ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : FRANCOIS PLUVINAGE & ERIC RODITI

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 21 **2016**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG Cedex
irem@math.unistra.fr

Tel. +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61

http://irem.unistra.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 21 – 2016

SOMMAIRE

EDITORIAL

Ce volume 21 des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives reflète la richesse de la recherche en didactique des mathématiques à tous les niveaux d'enseignement et sur des thèmes mathématiques très variés. Les niveaux d'enseignement représentés dans les articles publiés vont en effet du primaire au supérieur, la formation des enseignants y est aussi présente, et les contenus mathématiques abordés concernent la géométrie, l'algèbre, les probabilités, la logique et l'algorithmique. Cette richesse est peut-être à mettre en parallèle avec celle des grandes manifestations internationales organisées en 2015-2016 à propos ou autour de l'enseignement mathématique, notamment : Espace Mathématique Francophone (EMF) en octobre 2015 à Alger, colloque InterIREM international en juin 2016 à Strasbourg, colloque Histoire et Pédagogie des Mathématiques (HPM) en juillet 2016 à Montpellier, symposium Espace de Travail Mathématique (ETM5) en juillet 2016 à Florina (Grèce) et pour couronner le tout le congrès ICME13 fin juillet 2016 à Hambourg.

La disparité des nombres de participants à ces manifestations pourrait conduire à les situer dans des mondes différents. Ce serait oublier que toutes participent de la vie de la recherche en didactique : les grands rassemblements qui favorisent les découvertes d'autres manières de penser et les colloques dédiés qui favorisent l'approfondissement des recherches et le travail entre équipes internationales. Parmi ces derniers, le symposium ETM a pour l'équipe éditoriale des Annales une saveur particulière puisque la revue a publié des articles qui furent parmi les premiers parus sur les espaces de travail mathématique. Et tout prochainement est attendue la publication d'un volume spécial sur les ETM, sous le titre anglais de Mathematical Working Spaces in Schooling, par la revue *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, dont la directrice n'est autre que la personnalité reconnue qui a dirigé l'organisation scientifique locale du congrès ICME13.

La place de l'international dans les Annales est importante. Si le Canada est bien présent dans ce volume 21, il n'y est pas le seul représentant du continent américain. Le lecteur trouvera dans ce volume des articles d'auteurs d'Amérique Latine, même s'ils ne sont pas rédigés en espagnol. L'un d'entre eux résulte d'une collaboration franco-chilienne et un autre provient du Mexique. Ce dernier mérite ici quelques commentaires car il, s'inscrit dans un mouvement de discussions scientifiques que nous souhaitons encourager au sein des Annales, ainsi que nous l'écrivions dans le volume 19, où un débat avait été organisé sur les objets à considérer dans les recherches en didactique des mathématiques. Dans ce volume 21, l'article rédigé en anglais par Asuman Oktac (Cinvestav-IPN México) est une réaction à l'article sur l'algèbre moderne publié dans le volume 20. Pour l'essentiel, il vise à lui apporter des compléments, en prenant appui sur la théorie APOS qui a été développée aux USA par Ed Dubinsky et dont la même Asuman Oktac en compagnie de Maria Trigueros ont été des propagatrices en France.

Une absence de ce volume des Annales pourrait toutefois être comblée dans des volumes à venir, à savoir celle du continent africain. Des études conduites dans le cadre de pays de ce continent ont certes déjà paru dans des volumes antérieurs. Mais la richesse potentielle, qui est notamment apparue lors du colloque InterIREM international de juin à Strasbourg, nous laisse espérer pour les prochaines années la publication de recherches provenant du continent africain.

FRANÇOIS PLUVINAGE ET ÉRIC RODITI

THEIS, LAURENT; MORIN, MARIE-PIER; TAMBONE, JEANETTE; ASSUDE, TERESA; KOUDOGBO, JEANNE; MILLON-FAURE, KARINE

QUELLES FONCTIONS DE DEUX SYSTEMES DIDACTIQUES AUXILIAIRES DESTINES A DES ELEVES EN DIFFICULTE LORS DE LA RESOLUTION D'UNE SITUATION-PROBLEME MATHEMATIQUE ?

Abstract. Functions of two auxiliary educational systems aiming to support students with difficulties during mathematical problem solving. Solving mathematical problems is a major challenge for students with difficulties. In this article, we examine an assistance system tested by an elementary school teacher during a two-year collaborative research. This system consists of setting up two auxiliary educational systems (AES), in the form of a work session with the students presumed by the teacher to be having trouble, that is held prior to the solving of the problem with the whole class and another work session held after the solving of the problem. Within the AES, the teacher explains the problem to the students, and discusses concepts with the student regarded as prerequisites by the teacher. In the AES held after the solving of the problem, the teacher revisits the institutionalisation made with the whole class. In this article, we analyze the potential functions of our assistance system through the triple dimensions identified by Sensevy et al. (2000): Chronogenesis, mesogenesis and topogenesis.

Résumé. Résoudre des situations-problèmes mathématiques constitue un défi important pour les élèves en difficulté. Dans cet article, nous analysons un dispositif d'aide mis en œuvre par une enseignante dans le cadre d'une recherche collaborative. Ce dispositif consiste en la mise sur pied de deux systèmes didactiques auxiliaires (SDA). Le premier SDA prend la forme d'une rencontre de travail avec les élèves présumés en difficulté qui a lieu avant la résolution de la situation-problème en classe. Durant ce SDA, l'enseignante présente la consigne et discute de concepts qu'elle considère être des prérequis pour travailler sur la situation-problème. Au cours du SDA réalisé après la résolution de la situation-problème en classe, l'enseignante revisite l'institutionnalisation avec les élèves en difficulté. Dans cet article, nous analysons les fonctions de ces SDA à travers le triplet des genèses de Sensevy et al. (2000): chronogenèse, mésogenèse et topogenèse.

Mots-clés. Situation-problème, élève en difficulté, dispositif d'aide, mathématiques,

---

Introduction

La résolution de situations-problèmes mathématiques est au cœur de l'activité du mathématicien et de l'apprentissage des mathématiques. Dans les programmes de formation québécois, la compétence à résoudre des situations-problèmes est une compétence centrale à travailler avec les élèves au primaire (MELS, 2003). La résolution de situations-problèmes y est également un outil privilégié à travers lequel l'enseignant fait travailler différents concepts mathématiques. Or, la

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 9 - 37.

résolution de situations-problèmes peut être un défi particulièrement important pour des élèves dits "en difficulté". Tel est le constat de départ d'une équipe de huit enseignantes d'une école primaire qui a mené à l'élaboration d'une recherche collaborative centrée sur les conditions favorables à l'engagement dans une situation-problème et l'apprentissage des concepts visés, pour des élèves en difficulté scolaire en mathématiques.

De manière générale, les travaux de recherche qui s'intéressent aux élèves en difficulté en mathématiques peuvent être regroupés en deux catégories différentes (Giroux, 2014). Un premier courant de recherche, surtout anglo-saxon, s'intéresse à la caractérisation des processus cognitifs déficients et travaille dans une optique de remédiation aux difficultés des élèves. Un deuxième courant de recherche, surtout francophone, aborde cette question à travers l'étude des relations entre enseignement et apprentissage par l'intermédiaire des situations, des contrats et des institutions (Brousseau, 1980 ; Chevallard, 1999 ; Sarrazy, 2002). Ce courant aborde les difficultés des élèves de manière systémique, puisqu'il les situe à l'intérieur des conditions dans lesquelles elles apparaissent. Nos travaux s'inscrivent dans ce deuxième courant. Par ailleurs, nous abordons la problématique des élèves en difficulté dans une optique de développer leur potentiel mathématique (Mary, Squalli et Schmidt, 2008). Dans ce sens, nous partons de l'hypothèse que le travail sur les situations-problèmes mathématiques complexes peut être bénéfique aux élèves en difficulté.

Lors d'une des rencontres au début du projet, Sylvie, une enseignante du deuxième[1] cycle du primaire, a proposé un dispositif particulier, qui visait à rencontrer les élèves en difficulté en petit groupe avant la résolution de la situation-problème en classe afin de leur présenter la consigne. L'expérimentation de cette mesure d'aide a fait l'objet d'une analyse détaillée (Theis et al., 2014) qui a révélé quatre fonctions potentielles différentes de ce dispositif pour l'élève en difficulté. Nous allons revenir sur ces fonctions dans la suite de cet article. Dans une deuxième étape, une nouvelle version du dispositif d'aide a été expérimentée par Sylvie et une autre enseignante du deuxième cycle, Amélie (Assude et al., 2016). Toutefois, la situation-problème travaillée dans cette expérimentation est de nature différente de celle de la première expérimentation, les discussions dans le cadre du dispositif d'aide ont plutôt consisté à réaliser la première étape de la situation-problème, qui en comportait plusieurs. Malgré ces différences de contenu et de structure, nous avons pu constater la présence des mêmes fonctions du dispositif d'aide.

[1] Élèves âgés de 9 à 11 ans.

Dans le cadre de cet article, nous allons analyser une troisième mise en œuvre de notre dispositif d'aide réalisée par Manon, une enseignante de troisième cycle[2] du primaire. Comme nous allons le voir, les objets abordés dans le dispositif d'aide lors de cette expérimentation sont différents de ceux des deux expérimentations précédentes. En effet, Manon a décidé de travailler sur des objets de savoir anciens lors de la rencontre avec les élèves en difficulté, objets dont elle considère la maîtrise comme étant nécessaire pour pouvoir s'engager dans la situation-problème proposée. Manon introduit également un dispositif d'aide supplémentaire, puisqu'elle a rencontré en petites équipes les élèves en difficulté après la résolution de la situation-problème en classe afin de revenir avec eux sur les concepts travaillés. Le but de cet article est alors double. Tout d'abord, nous souhaitons mettre à l'épreuve notre modèle théorique constitué par les différentes fonctions de ce type de dispositif d'aide qui se situe en amont du travail en classe entière. Dans ce contexte, nous sommes surtout à la recherche des éléments de stabilité à travers des mises en œuvre portant sur des objets différents. Par ailleurs, nous allons analyser les fonctions qui se dégagent du dispositif d'aide mis en place après la résolution en classe de la situation-problème. Dans une première section, nous allons expliciter le modèle théorique qui est à la base de nos analyses et décrire de manière détaillée les fonctions qui se sont dégagées dans les mises en œuvre précédentes. Nous allons présenter et analyser a priori, dans une deuxième section, la situation-problème présentée par Manon. Une troisième section permettra de présenter un synopsis de la mise en œuvre en classe ainsi que des dispositifs d'aide. La quatrième section servira à analyser les fonctions de ces nouveaux dispositifs d'aide tels qu'ils se présentent dans cette expérimentation-ci et la dernière section à discuter les résultats.

1. Modèle théorique du dispositif d'aide

Nous allons modéliser le regroupement des élèves dits en difficulté avant et après la résolution de la situation-problème en classe sous forme de système didactique auxiliaire (SDA). En effet, en suivant les travaux de Chevallard (1995), l'espace d'étude est caractérisé par des systèmes didactiques principaux (SDP), les classes par exemple, et de SDA qui aident à l'étude. Les systèmes didactiques auxiliaires dépendent des SDP, notamment à travers les enjeux de savoir des SDP qui pilotent également les SDA. Comme l'a souligné Tambone (2014), un des objectifs des SDA est de redonner une valeur scolaire et sociale à l'élève. Cependant, cet objectif n'est souvent pas atteint, notamment parce que les SDA mis en place travaillent sur des enjeux de savoirs obsolètes dans la classe. Les analyses précédentes de notre dispositif (Theis et al., 2014, Assude et al., 2016) ont révélé que le regroupement

[2] Élèves âgés de 11 à 12 ans.

mis en place dans le cadre de notre recherche évite cette "pathologie du système" (Tambone, 2014), puisqu'il a lieu en amont du travail en classe.

Nous avons modélisé les fonctions de notre dispositif d'aide autour du triplet des genèses tel que décrit par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), pour qui,

> « au sein du système didactique, le professeur doit agir (définir, réguler, dévoluer, instituer) pour :
> - produire les lieux du professeur et de l'élève (effet de topogenèse) ;
> - produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage (effet de chronogenèse) ;
> - produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets (effet de mésogenèse) » (p.267).

Les premières analyses ont révélé des fonctions potentielles de notre dispositif. Tout d'abord, la fonction chronogénétique se manifeste surtout par le fait que l'élève en difficulté qui participe au dispositif rencontre la situation-problème avant les autres élèves. De ce fait, ces élèves savent davantage, et avant les autres élèves, de quoi il sera question lors de la résolution en classe de la situation-problème. Par ailleurs, ils disposent de plus de temps dans le système didactique auxiliaire pour entrer dans le milieu de la situation-problème. En disposant de ces connaissances, il deviendrait alors plus facile pour l'élève en difficulté qui a participé au système didactique auxiliaire, de prendre sa place d'élève dans le système didactique principal. C'est la fonction topogénétique, que nous avons observée à travers l'engagement des élèves en difficulté dans la tâche dans le SDP ainsi que leurs interventions en grand groupe. Finalement, la fonction mésogénétique permet aux élèves en difficulté de construire le milieu initial avant les autres élèves de la classe. Toutefois, nous avons constaté que, si cette fonction est importante, elle est difficile à tenir pour l'enseignant. Dans les deux expérimentations que nous avons menées, les situations proposées dans le SDA n'offraient pas de rétroaction directe aux élèves. Lors de la première expérimentation (Theis et al., 2014), il s'agissait d'anticiper ce qu'il serait possible de faire lors de la résolution en classe de la situation problème. Dans la deuxième mise en œuvre (Assude et al., 2016), les élèves en difficulté travaillaient, dans le SDA, sur la première étape d'une situation de communication. La tâche dans le SDP consistait à décrire une figure géométrique simple à un partenaire qui ne voit pas cette figure et qui doit ainsi la reproduire. Dans le SDA, l'enseignante demandait uniquement aux élèves de décrire une première figure, sans que ceux-ci puissent voir l'effet de leur description à travers la reproduction par un autre élève de la figure, bloquant ainsi la rétroaction que la reproduction aurait pu fournir.

Comme nous l'avons argumenté de manière plus détaillée ailleurs (Assude et al., soumis), nous avons constaté que le temps didactique n'avance pas dans les dispositifs expérimentés. Ce constat est d'ailleurs cohérent avec celui de Tambone

(2014), pour qui l'absence d'avancement du temps didactique est une caractéristique commune à l'ensemble des systèmes didactiques auxiliaires. De manière générale, cette rétention pour empêcher l'avancement du temps didactique nous semble importante, pour éviter que certains élèves du groupe ne soient en avance sur celui de la classe et puissent ainsi empêcher le bon déroulement de la situation-problème en classe. Toutefois, même si le temps didactique n’avance pas en tant que tel dans le SDA, nous allons montrer dans cet article que notre dispositif joue un rôle important pour synchroniser les élèves en difficulté avec le temps didactique de la classe.

Au cours de la nouvelle expérimentation qui sera décrite dans le présent article, l’enseignante a également décidé de mettre en œuvre un SDA après la réalisation en classe de la situation-problème. Pour l’analyse de ce dispositif, nous allons également nous servir du triplet des genèses, tout en faisant des parallèles avec un type de situations que Perrin-Glorian (1994) appelle des « situations de rappel ». À partir de son travail dans des classes majoritairement composées d’élèves en difficulté, Perrin-Glorian (1994) a identifié deux types de situation de rappel, dont un premier qui permet de faire un retour sur un problème et un deuxième qui porte sur une suite de problèmes sur un même thème. Vu la nature isolée de la tâche proposée dans notre expérimentation, ce seront les situations de rappel de type 1 qui nous intéressent particulièrement ici. Celles-ci permettent à la fois une institutionnalisation locale et une dévolution après coup. Elles sont réalisées un ou plusieurs jours après une situation d’action et permettent alors un retour sur le problème :

> « En essayant de dire collectivement ce qui s’est passé, quel problème a été traité, les élèves sont amenés à repenser le problème, les procédures de traitement envisagées dans la classe. Les élèves qui ne se sont pas construits une représentation mentale lors de la phase d’action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu’ils vont devoir parler de ce qui s’est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau » (*Ibid.*, p. 140).

Nous allons argumenter dans l’analyse du SDA réalisé à la suite du SDP quels sont les éléments qui rapprochent notre dispositif de ces situations de rappel.

2. Éléments méthodologiques

Dans le cadre de notre projet de recherche, nous avons accompagné les enseignantes dans la planification, l’expérimentation et l’analyse des situations-problèmes mathématiques ainsi que dans la mise en place des mesures d'aide destinées aux élèves signalés comme étant en difficulté par leur enseignante. Notre recherche est collaborative, au sens de Desgagné et al. (2013), puisqu'il s'agit d'une recherche "avec" les enseignantes et non d'une recherche "sur" les enseignantes. Une des visées centrales de la recherche collaborative est de "rapprocher les préoccupations du "monde de la recherche" et celles du "monde de la pratique" (Bednarz, 2013, p. 7). À la base de ces recherches se trouve un postulat fort que le savoir expérientiel d'un enseignant est valide et pertinent et que son articulation avec des savoirs issus de la recherche permet de faire le pont entre théorie et pratique. Au centre de cette approche de recherche se trouve un enjeu de double vraisemblance de la recherche qui en résulte : vraisemblance à la fois pour le milieu de la recherche et les critères qui lui sont propres et vraisemblance pour le milieu de la pratique, avec ses enjeux et contraintes.

Ainsi, les enseignantes ont été étroitement impliquées dans les différentes étapes du processus de recherche. Tout d'abord, la mesure d'aide documentée dans cet article a été initialement proposée par une des enseignantes qui ont participé au projet. Elle provient donc au départ du milieu pratique. Au cours de la recherche, nous avons accompagné les enseignantes dans la planification et la réalisation de la situation-problème expérimentée et des mesures d'aide. A la suite de la mise en œuvre en classe, nous avons fait un premier travail d'analyse avec l'enseignante à travers un visionnement conjoint (enseignante et chercheur) des bandes vidéo. Des extraits de l'expérimentation de chacune des expérimentations ont ensuite été présentés et discutés dans le cadre de séminaires auxquels l'ensemble des acteurs du projet ont participé. Finalement, les analyses scientifiques que nous décrivons dans cet article ont été soumises à l'enseignante participante et discutées afin d'en vérifier la validité du point de vue d'une praticienne.

Différents types de données ont été pris en compte pour les analyses qui ont mené à cet article : (1) les enregistrements vidéo des mises en œuvre par l'enseignante ainsi que leurs transcriptions, (2), le contenu de courtes entrevues réalisées avec l'enseignante avant et après chacune des périodes de travail avec les élèves, (3) le contenu des discussions avec les enseignantes dans le cadre des séminaires ainsi que des visionnements communs.

3. Problème mathématique et corpus de données

Dans cette section, nous allons tout d'abord décrire et analyser la tâche proposée par Manon dans le SDP. Ensuite, nous allons présenter le déroulement des deux SDA, celui réalisé avant le SDP, que nous nommerons SDA pré et celui mis en œuvre après le SDP, que nous nommerons SDA post.

1.1. Tâche proposée dans le SDP

Comme l'explique Manon, la tâche proposée dans le SDP concerne la formule de l'aire d'un triangle, qui est jusque-là inconnue des élèves.

> "La formule de l'aire du triangle. Ils ne connaissent pas. Ils connaissent la formule de l'aire du carré. C'est-à-dire ils savent comment faire l'aire du carré ou d'un quadrilatère, comme rectangle ou carré. Mais l'aire du triangle ils n'ont pas vu, [alors] c'est de découvrir l'aire du triangle."

Le SDP se déroule en plusieurs moments, sur deux périodes différentes. Tout d'abord, la première tâche proposée par Manon consiste à dessiner un triangle d'une aire de 18 cm^2 sur du papier quadrillé qu'elle leur fournit. Ce travail se réalise en équipe de quatre élèves environ, formés par l'enseignante de manière à ce que dans chaque groupe, on retrouve des élèves de niveau similaire. Ainsi, les quatre élèves qui ont participé au dispositif d'aide du SDA se retrouvent dans la même équipe.

Au niveau conceptuel, la tâche de dessiner un triangle de 18 cm^2, sans connaître la formule de l'aire est loin d'être anodine. En effet, une tâche plus classique aurait pu consister à demander aux élèves de déterminer l'aire d'un triangle déjà inscrit dans un quadrillage par l'enseignante. Cette tâche aurait alors nécessité une reconnaissance du concept d'aire comme étant la mesure d'une surface ainsi qu'un dénombrement des différents carrés et portions de carrés qui se trouvent à l'intérieur des limites de la figure[3]. Or ce n'est pas la tâche que Manon a choisie pour démarrer sa situation-problème.

La tâche de construire un triangle dont l'aire mesure exactement 18 cm^2 va bien au-delà de la mesure d'aire d'un triangle donné. En effet, sans pouvoir recourir à la formule d'aire, on peut supposer que la plupart des élèves vont d'abord tenter d'approcher, par essais-erreurs, la mesure d'aire demandée du triangle. Par contre, tous les types de triangles ne se prêtent pas facilement à cette tâche. Tout d'abord, pour ne pas trop compliquer la tâche, il est important d'aligner au moins un des côtés du triangle, et idéalement deux côtés, avec les lignes d'un quadrillage, ceci permettant de réduire le nombre de carrés qui ne sont recouverts que partiellement. Ensuite, le recours à un triangle rectangle permet d'aligner deux côtés du rectangle avec la grille, ce qui réduit encore le nombre de carrés partiels. Finalement, c'est le triangle rectangle isocèle dont deux des côtés mesurent exactement 6 cm qui permet le plus facilement de mener à terme la tâche, puisque la surface sera

---

[3] Avant cette situation-problème, les élèves savaient mesurer l'aire d'une surface par recouvrement, à l'aide d'unités non conventionnelles, et savaient mesurer l'aire d'un carré et d'un rectangle (par recouvrement et par la formule) à l'aide d'unités conventionnelles.

recouverte uniquement de carrés entiers et de demi-carrés. La construction d'autres types de triangles est possible, mais plus ardue dans une démarche où on essaie de s'approcher d'une aire de 18 cm^2 par une démarche d'essai-erreur, notamment parce qu'il devient plus difficile de déterminer exactement à quelle fraction de l'unité de mesure correspondent chacun des morceaux de carrés.

Ensuite, la deuxième tâche proposée demande aux élèves de déterminer l'aire de cinq triangles différents qui sont dessinés sur une fiche. Il est à noter que, contrairement à la tâche précédente, Manon ne fournit pas dès le départ un quadrillage aux élèves, qui permettrait de procéder rapidement par dénombrement. Par contre, la consigne "En utilisant les stratégies de ton choix, trouve l'aire des triangles suivants" laisse la porte ouverte au dessin d'un quadrillage par les élèves ou encore à la superposition des différents triangles sur un quadrillage. Bien sûr, lors du recours à cette stratégie, il est à nouveau nécessaire d'aligner la grille avec un des côtés du triangle, afin de rendre les carrés facilement dénombrables.

Il est également à noter que les triangles n'ont pas été choisis au hasard. Les deux premiers triangles, plus grands, ont la même aire et il en est de même pour les trois derniers triangles, plus petits. Même si Manon ne nous a pas explicitement justifié ce choix, cette configuration permettrait toutefois de constater que des triangles qui ont en commun les dimensions d'une base et de la hauteur qui y est associée auront la même aire.

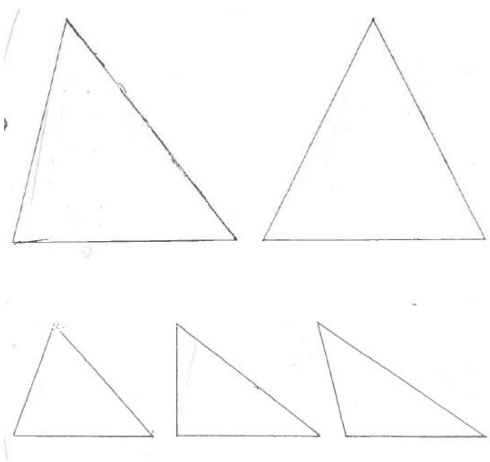


Figure 1: triangles proposés dans le SDP

Au-delà du recouvrement des différents triangles par un quadrillage, d'autres techniques peuvent également être utilisées pour déterminer l'aire des différents triangles. Ainsi, ces triangles peuvent être inscrits dans des rectangles de même base et de même hauteur de manière à pouvoir constater que l'aire du triangle correspond alors à la moitié de l'aire du carré ou du rectangle. Cette technique est a priori plus facile pour certains triangles, notamment le triangle rectangle, et plus difficile pour d'autres triangles, puisque le constat que le triangle correspond à la moitié du rectangle est plus difficile à visualiser à partir de la transformation géométrique de la figure.

Lors de la mise en œuvre en classe des deux tâches, des moments de travail en groupes de niveau similaire de 4 à 5 élèves et de retour en grand groupe se sont alternés tout au long des deux séances. Le tableau 1 constitue un synopsis de ces différents moments dans la classe de Manon. Nous y avons également inclus les principales techniques sur lesquelles ont travaillé l'équipe d'élèves qui ont participé au SDA afin de donner au lecteur une vue d'ensemble du déroulement des deux séances.

Etapes	**Types de tâche, techniques et quelques éléments de gestion didactique**	**Modes de travail**
1	Présentation du matériel : règle, crayon, cahier de maths, feuille quadrillée Tâche 1 : « Sur la feuille quadrillée, tu dois dessiner un triangle qui mesure 18cm^2 » Reprise des objets anciens : « Qu’est-ce que vous ne connaissez pas ? »	Collectif Oral et écrit au tableau (6 min. 30)
2	Tâche 1 : Le groupe ciblé arrive à dessiner un triangle rectangle d’aire 18cm^2, ainsi que la plupart des autres groupes. La technique utilisée est celle « dessiner un triangle rectangle sur une feuille quadrillée et dénombrer des carrés ou demi-carrés »	Groupes (17 min. 30)
3	Mise en commun. Présentation de la technique précédente	Collectif (3 min.)
4	Tâche 2 : trouver la mesure de l’aire de cinq triangles dessinés sur une feuille blanche Le groupe ciblé essaie de décalquer la feuille quadrillée à l’intérieur des triangles (ou de faire un quadrillage) pour pouvoir dénombrer les carrés d’un cm^2. La plupart des groupes utilisent la technique « décalque du quadrillage et dénombrement des carrés »	Groupes¸ (28 min. 30)

5	Mise en commun au tableau Point sur les techniques utilisées par les groupes : la technique précédente et la technique « compléter le triangle par un rectangle ou un carré, calculer l'aire de ces figures et diviser par deux » sont écrites au tableau	Collectif (11 min. 15)
6	Reprise de la tâche 2 dans les différents groupes Evolution des techniques vers la technique "compléter le triangle par un carré ou un rectangle"	Groupes (16 min. 30)
7	Mise en commun au tableau La formule de l'aire d'un triangle apparaît instanciée aux cas particuliers étudiés. **Fin de la première séance**	Collectif (8 min. 15)
8	**Début de la deuxième séance** Retour sur les cas particuliers étudiés lors de la dernière séance et sur la technique "compléter le triangle par un rectangle ou un carré, calculer l'aire de ces figures et diviser par 2. Consigne pour le travail en groupes: "Calculer l'aire des triangles sur la feuille qui n'ont pas encore été complétés et trouver une formule qui va nous permettre de calculer l'aire de n'importe quel triangle"	Collectif (6 min.15)
9	Reprise de la tâche 2 dans les différents groupes Manon spécifie dans le groupe ciblé qu'on veut trouver l'aire des triangles sans avoir recours au grillage. Au début, proposition récurrente par Daniel d'inscrire chaque triangle dans un parallélogramme. Ensuite, Manon dirige les élèves vers la transformation du parallélogramme en rectangle, inscrivant ainsi le triangle dans un rectangle. Les autres équipes travaillent sur la technique d'inscrire le triangle dans un rectangle.	Groupes (41 min. 30)
10	Mise en commun au tableau Objectif annoncé : "formaliser avec une formule". Disparition de l'obligation d'inscrire le triangle dans un	Collectif (8 min. 45)

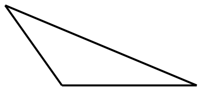
	rectangle. Il suffit de trouver la base et une hauteur. Institutionnalisation de la formule : aire du triangle = base x hauteur / 2. Application de la formule à un cas particulier 	

Tableau 1 – Synopsis des deux séances du SDP

Lors du déroulement en classe, il est à noter qu'il y a eu un certain glissement dans les consignes de Manon à l'intention des élèves. Ainsi, les consignes écrites de la deuxième tâche demandent explicitement aux élèves de déterminer l'aire d'un triangle précis. Or, à partir du début de la deuxième séance, la demande de Manon glisse progressivement vers la demande de "trouver une formule qui permet de trouver l'aire de n'importe quel triangle", et qui dépasse donc la consigne initiale.

2. Description du SDA pré

Lors de cette expérimentation, quatre élèves, sélectionnés par Manon, participent au SDA pré, qui est d'une durée totale de 12 minutes. Comme ces élèves participent pour la première fois à ce type de SDA et que ce dispositif est donc nouveau pour eux aussi, Manon offre, d'entrée de jeu, une légitimation du dispositif. Cette légitimation s'appuie d'abord sur le processus de recherche.

> "Cet après-midi, j'ai voulu faire une expérience spéciale que je n'ai jamais faite avec mes élèves avant de commencer une situation-problème."

Ensuite, Manon justifie le dispositif en faisant référence à des éléments qui concernent plus spécifiquement le groupe d'élèves sélectionnés et les raisons qui ont amené ce choix.

> "On fera l'affaire ensemble avec tout le monde demain, mais vous allez en avoir entendu parler. Mais je trouve ça intéressant de faire ça avec vous [...], parce qu'on se rend compte que lorsqu'on n'est qu'un petit groupe, on est capable d'aller chercher des affaires que quand on est en grand groupe, on a de la misère à vous concentrer, puis à être capable de saisir ce qui se passe. Vous vous laissez un peu porter par eux-autres. Ça arrive souvent. [...] Là, juste le fait que vous être tous les quatre, vous allez déjà avoir une idée de ce qu'est la situation."

Plusieurs raisons sont alors invoquées par Manon. Tout d'abord, elle indique aux élèves qu'ils auront déjà "entendu parler" de la situation-problème, avant les autres. Elle pointe là de manière explicite la fonction chronogénétique que nous avons identifiée dans les analyses antérieures. Ensuite, elle invoque également les avantages de travailler en petit groupe : la possibilité de mieux se concentrer et de mieux comprendre ce qui se passe. Finalement, elle invoque également l'argument qu'habituellement en classe, les quatre élèves ont tendance à se laisser porter par les autres élèves. Elle fournit alors indirectement une raison pour laquelle ces élèves ont été sélectionnés pour le SDA.

Par la suite, Manon annonce aux élèves la situation qu'ils auront à travailler le lendemain.

> "Je vais vous demander demain de trouver… l'aire d'un triangle… que je vais vous remettre. Trouvez l'aire d'un triangle. Ça vous dit quoi ? Quand on parle de ça. Trouver l'aire d'un triangle. Qu'est-ce que vous savez déjà qui pourrait vous aider à faire cette situation-là."

Quelques remarques s'imposent quant à cette description de la tâche. Tout d'abord, dans le SDP, la visée ultime sera de dégager une formule qui permet de calculer l'aire de tout triangle. Pour les élèves, c'est la première fois qu'ils travaillent sur l'aire de cette figure, cependant ils ont déjà rencontré les formules d'aire du carré et du rectangle. Or, durant le SDA pré, cette visée de trouver une formule générale reste implicite et il ne s'agit que de la détermination de l'aire d'un triangle particulier. Ensuite, même si au cours du SDP, les élèves auront à déterminer l'aire de différents triangles, ce n'est pas la première situation qui sera proposée le lendemain. En effet, Manon a décidé après la réalisation du SDA pré de modifier la première situation proposée dans le SDP et de demander aux élèves plutôt de tracer un triangle dont l'aire est d'exactement 18 cm^2. Cette première situation est alors de nature différente de celle annoncée au départ. Ce n'est que par la suite que les élèves auront à déterminer l'aire de différents triangles et, ultimement, à dégager une formule générale. Finalement, Manon fait appel aux savoirs anciens des élèves (ceux "que vous savez déjà") qui pourraient être mobilisés par les élèves pour résoudre la situation.

Une discussion s'engage alors dans le SDA pré avec les élèves autour du concept d'aire, à la suite d'une question de Julien. ("C'est quoi l'aire ?"). Manon questionne alors les autres élèves autour du concept d'aire. Ceux-ci offrent différentes explications. Roselyne fait appel à l'aire du carré et à une unité de mesure - le centimètre carré.

> "Il me semble que c'est… avec un carré c'est plus facile… mais un triangle, c'est 1 centimètre carré genre…"

Daniel pour sa part oriente son intervention davantage sur une procédure de dénombrement pour déterminer l'aire :

> "Dans le fond tu prends une feuille quadrillée… puis tu comptes tous les carrés à l'intérieur…"

Manon offre finalement une définition de l'aire :

> "C'est… la surface…l'intérieur d'une forme. Il va falloir mesurer l'intérieur d'une forme."

La discussion s'oriente ensuite vers les stratégies pour déterminer l'aire du carré et révèle les difficultés des élèves à se rappeler de cette formule. Marielle se situe d'abord dans une logique de dénombrement, mais lorsque Manon lui demande de calculer plutôt que de dénombrer, elle avance qu'il faut "multiplier, diviser ou [faire] plus". Manon questionne alors les autres élèves sur l'opération à utiliser, mais au final aucune réponse définitive ne ressort de la discussion quant à l'opération à utilise r:

> "Ok, il faut faire une opération mathématique. Pis là, Marielle elle n'en est pas sûre, c'est quoi le calcul. On prend la longueur, la largeur, on additionne, on soustrait, on multiplie, on divise, on ne sait pas trop. Ça il va falloir retrouver ça. Demain ça va être important si on veut prendre cette stratégie-là."

La deuxième partie de la discussion se centre ensuite sur les différents triangles. Tout d'abord, Manon demande à Daniel de décrire ce qu'est un triangle. Il est alors intéressant de constater que Daniel n'est initialement pas en mesure de mettre en mots les éléments constituants du triangle, mais est en mesure d'en dessiner un avec son doigt.

> Manon : C'est quoi un triangle, Daniel ?
> Daniel : C'est un...
> Manon : Sais-tu me dire des mots pour exprimer c'est quoi un triangle ?
> Daniel : Je ne sais pas.
> Manon : Dessine-moi un triangle, juste avec ton doigt.

Par la suite, Manon questionne les élèves sur les différents types de triangles : triangle rectangle, triangle équilatéral, isocèle et scalène. Pour chacun de ces triangles, elle dessine un exemplaire sur une feuille de papier et la discussion avec les élèves mène au dégagement de leurs propriétés.

La séance du SDA se termine sur un questionnement de Manon quant aux stratégies des élèves pour le SDP du lendemain.

> Manon : Vous avez déjà une bonne idée de ce qu'il faut faire ?
> Élèves : oui

> Manon : Dans votre tête, vous commencez déjà à placer vos stratégies ?
> Élèves : oui, oui
> Manon : C'est beau ? Est-ce que vous avez des questions ? Est-ce qu'il y a quelque chose qui ne semble pas clair ? … est-ce que l'aire maintenant c'est plus clair que tout à l'heure ?

Pour l'ensemble du SDA, nous pouvons retenir que Manon intervient essentiellement, sous forme de discussion avec les élèves sur le concept d'aire et sur celui de triangle (ainsi que les différentes formes de triangles). Même si la situation qui sera présentée dans le SDP est annoncée au début, elle n'est pas travaillée en profondeur en tant que telle ici, mais la discussion porte plutôt sur les savoirs anciens que Manon pense essentiels pour pouvoir entrer dans le milieu de la situation. Cette intention est d'ailleurs désignée explicitement par Manon lors de l'entrevue qui a été réalisée avec elle avant le SDA.

> "Aujourd'hui je vais rencontrer quatre élèves, ayant été identifiés comme ayant un peu plus de difficultés, pour leur présenter la situation problème et pour vérifier avec eux en fait s'ils possèdent les prérequis pour cette situation-là."

La fonction mésogénétique du SDA pré, qui est celle de faire entrer les élèves dans le milieu de la situation, prend ici une forme qui est assez classique dans les SDP : celle de la reprise des objets anciens et du rapport à ces objets. L'enseignante s'assure par ce biais que ces objets font partie du milieu initial de la situation. Roselyne, l'une des élèves intervenant dans le SDA pré, dira plus tard à propos de l'utilité du SDA :

> "Comme ça tu sais tout de suite c'est quoi l'aire, tu peux tout de suite commencer le travail."

Une des différences du SDA pré par rapport au SDP est que Manon reprend ici des objets anciens avec un petit groupe d'élèves. Vu le nombre, les élèves peuvent difficilement "échapper" au questionnement de Manon, alors que ceci peut ne pas être le cas en classe où beaucoup plus d'élèves peuvent prendre la parole. Par ailleurs, l'enseignante peut aussi observer plus finement ce que les élèves savent ou non à propos des triangles et des aires du carré et du rectangle, et s'adapter en fonction d'eux.

3. Manifestation des fonctions du SDA dans le SDP.

Dans cette section, nous allons expliciter la manifestation des fonctions chrono-, méso- et topogénétique du SDA dans le SDP à partir de cinq épisodes, qui témoignent de ces fonctions. Nous allons situer chacun de ces épisodes et expliquer en quoi ils nous semblent significatifs au regard des fonctions du SDA.

3.1. Episode 1 – Migration des objets du SDA vers le milieu de la situation du SDP

L'enseignante présente le matériel à utiliser avant de donner la consigne. Elle présente la feuille quadrillée dont les côtés des carrés mesurent 1cm ce qui n'est pas une feuille quadrillée habituelle pour les élèves[4]. Elle indique que cette feuille est spéciale et demande aux élèves ce qu'elle a de particulier. Des élèves répondent : « Elle est normale avec des carrés » ou « les lignes sont noires à la place d'être bleues » ou encore « il y a un cadre autour ». C'est Daniel qui donnera la réponse attendue par l'enseignante : « Il y a des carrés sont de… 1cm ». En choisissant une feuille quadrillée dont l'aire des carrés mesure 1cm^2, les élèves peuvent utiliser d'une manière indifférenciée cette unité d'aire «1cm^2 » ou l'unité d'aire « aire d'un carré du quadrillage », ce qui peut simplifier les techniques de dénombrement.

Cet épisode nous donne un indice des fonctions mésogénétique et chronogénétique du SDA dans le cadre du SDP. Pourquoi Daniel donne-t-il la réponse attendue contrairement aux autres élèves qui donnent des réponses perceptives ? Les objets « cm^2 » et « carré » sont présents dans le SDA. Dans ce dispositif, à la question « c'est quoi l'aire ? », Roselyne répond « avec un carré c'est plus facile… mais un triangle, c'est 1 centimètre carré genre… ça donne l'aire », et Daniel rajoute : « Dans le fond tu prends une feuille quadrillée… puis tu comptes tous les carrés à l'intérieur ». Daniel sait « plus avant » les autres élèves de la classe de quoi il va s'agir : des aires, des unités de mesure et des triangles.

Notre hypothèse interprétative de cet épisode est que la présence de ces objets dans le SDA a peut-être permis à Daniel de solliciter ces objets pour le milieu de la situation mathématique dans le SDP comme éléments du contrat didactique qu'il suppose être celui de la classe : le travail sur l'aire d'un triangle et les unités de mesure d'aire que l'enseignante veut mettre en place dans la classe. Ainsi, ce sont des élèves qui font migrer dans le SDP des objets convoqués précédemment dans le SDA, sans quoi ces objets auraient dû être introduits dans le milieu par l'enseignante.

D'ailleurs, à travers la prise de position de Daniel apparait également la fonction topogénétique du SDA. En effet, lorsque nous avons visionné cette intervention de Daniel avec l'enseignante, cette dernière considère que cette prise de position est tout à fait atypique pour lui. "[C'est] parce qu'on a travaillé la veille, ça, qu'il est capable de sortir ça. Parce que d'habitude, il n'intervient pas. Puis un de mes

[4] Au Québec, les carrés des quadrillages des cahiers des élèves ont habituellement une longueur de côté d'environ 6 mm.

objectifs [...], c'est que ces enfants-là qui d'habitude sont en retrait puis se laissent porter, ils sont capables d'intervenir".

3.2. Episode 2 – Engagement dans la tâche et dévolution

Les élèves du groupe ciblé se sont tout de suite mis au travail. L’enseignante vient auprès du groupe. Julien pense d’abord qu’il faut faire 18 cm de longueur mais Roselyne propose de dessiner un triangle rectangle : « D’après moi, pour ne pas compliquer la tâche, on pourrait faire un triangle à angle droit ». Manon s’exclame : « Ah ! Vous commencez avec un triangle rectangle », et elle revient à la consigne, notamment en disant « Je demande un triangle dont l’aire soit 18. Ça veut dire quoi ça ? L’aire, c’est quoi ? », et Julien répond : « c’est la mesure du dedans ». En demandant de préciser « il faut qu’il ait quoi ? », Roselyne répond « 18 petits carrés ». Après quelques échanges encore, les élèves essaient plusieurs mesures des côtés pour trouver, par exemple en divisant 18 par 2, et encore 9 par 2. Les quatre élèves font des essais en utilisant plusieurs mesures des côtés, et c’est Roselyne la première dans le groupe à dessiner un triangle rectangle isocèle dont l’aire mesure 18cm^2.

Cet épisode nous montre deux faits qui nous paraissent significatifs. Le premier est relatif à l’engagement des élèves du groupe ciblé dans la tâche proposée dans le SDP. Tous les quatre sont engagés dans la tâche en essayant de dessiner le triangle demandé. Nous pouvons l’observer dans les échanges entre eux, où tous les quatre prennent la parole. Marielle est aussi engagée dans la tâche même si elle le fait en observant le travail des autres. Julien, qui dans le SDA ne sait pas répondre « c’est quoi l’aire » arrive à donner dans le SDP une réponse : « c’est la mesure du dedans ». En plus, lors des essais il dira qu’on ne pourra pas avoir un côté qui mesure 18 cm, sinon « ça va donner plus que 18 » (soit plus de 18 cm^2). Comme nous l’avons dit, Roselyne donne l’idée du triangle rectangle qui est un choix pertinent pour trouver une solution au problème, et elle le fait très rapidement. Là aussi, on pourrait penser que le SDA a pu avoir une influence puisqu’ils ont sollicité un triangle particulier.

Le deuxième fait est relatif à l'entrée dans le milieu. En effet, le groupe des élèves ciblés s'approprie la tâche sans difficulté. Nous avons observé d’autres groupes qui ont eu plus de mal à entrer dans la situation notamment en confondant l’aire et le périmètre. Même si tout au début, Julien et Marielle ont pu parler de la longueur, très vite ils sont revenus à l’aire du triangle. Par ailleurs, le groupe ciblé a trouvé une réponse au problème en prenant la responsabilité de cette réponse : la proposition de Roselyne a été acceptée par le groupe, et chacun a pris une responsabilité dans les essais. Daniel essaie 4,5 en prenant la moitié de 9 cm pour un côté du triangle, et voilà leurs échanges :

Marielle : Daniel, la moitié d'une case ça fait virgule 5. Donc il faudrait aller soit en 4 soit en 5 parce que si on y va par la moitié...
Julien : Non, ça doit aller par 5 ou par 4 parce que par la moitié tu ne l'auras pas.
Marielle : Tu auras un autre. Tu auras 40 par 2.
Roselyne : ça, c'est si on fait avec 4,5 (elle montre sa feuille)
Marielle : regarde, ici il t'en manque 1
Roselyne : ça ne marche pas…
Daniel : ça c'est 5.
Roselyne : Non, c'est avec 4,5… juste ici ça ne va pas.
Marielle : Parfait, faisons un autre.

Cet épisode montre que les élèves, non seulement se sont engagés dans la tâche mais ils ont aussi pris la responsabilité de trouver ensemble une réponse au problème. Ils se sont placés en tant que producteurs d'une technique « dessiner un triangle rectangle et dénombrer les carrés ». La situation mathématique a ainsi été dévolue au groupe ciblé.

3.3 Episode 3 – Prise de parole et de position dans le topos d'élève

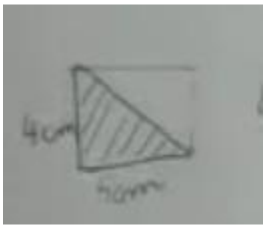
Le troisième épisode se situe dans la mise en commun de l'étape 3. Manon demande à la classe : « Vous avez dessiné quels types de triangle ? » Roselyne lève la main pour répondre, et Manon lui donne la parole : « moi j'ai fait un triangle rectangle isocèle », et Julien ajoute : « Il y a un côté qui mesure plus ». Nous avons deux élèves du groupe ciblé qui, ayant trouvé une solution et une technique pour accomplir la tâche 1, prennent la parole dans la classe, alors que l'enseignante les décrit comme étant habituellement passifs. Ils prennent position dans le topos de l'élève en montrant qu'ils ont eu un rôle de producteur d'une réponse. En outre, par cette prise de position en montrant une solution, ces deux élèves peuvent faire avancer le temps didactique puisque cette technique « dessiner un triangle rectangle et dénombrer les carrés et demi-carrés » deviendra publique et partagée, et va être par la suite utilisée dans la classe et par le groupe ciblé lui-même. Le groupe ciblé n'est pas le seul groupe à utiliser cette technique mais ils sont bien dans ce qu'il est attendu d'eux. Nous ne pouvons pas affirmer que ces prises de position sont l'un des effets du SDA mais nous pouvons considérer ces observations comme des indices que le SDA a pu avoir cette fonction topo et chronogénétique.

3.4. Episode 4 – Prise de position dans le topos d'élève

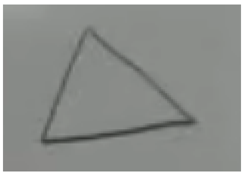
Cet épisode se place dans la deuxième mise en commun de l'étape 5. Il s'agit de trouver des techniques pour mesurer l'aire de cinq triangles dessinés sur une feuille (d'abord non quadrillée et ensuite quadrillée). Manon fait le point sur les différentes techniques utilisées : « Qu’est-ce que vous avez trouvé comme stratégies pour trouver, pour mesurer l’aire des différents triangles ? » Daniel lève la main et Manon lui donne la parole : « Nous, on décalque sur la feuille quadrillée », et ensuite « Après on compte les carrés et on complète ceux qui sont à la moitié ». Nous observons que Daniel prend aussi une position dans le topos d’élève lors de la mise en commun en montrant qu’il a un rôle de producteur d’une réponse. De même que pour l’épisode 3, il nous semble avoir là un indice de la fonction topogénétique du SDA qui va dans le même sens que d’autres indices déjà relevés.

3.5. Épisode 5 - Prise de position dans le topos d'élève

Cet épisode se situe lors d'un moment d'institutionnalisation à la toute fin de la première période. Tout juste avant l'épisode qui nous intéresse, Manon avait sollicité un élève au tableau qui est venu expliquer comment utiliser la technique "inscrire dans un rectangle et diviser l'aire du rectangle par deux" sur un triangle rectangle dessiné au tableau.



Manon demande ensuite aux élèves comment on pourrait trouver l'aire d'un triangle qui n'est pas un triangle rectangle, mais qui ressemble au triangle suivant, dessiné au tableau, sans dénombrer les carrés un par un.



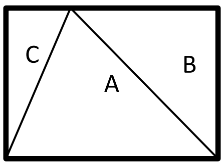
Daniel fait ici partie des élèves qui lèvent la main et il est appelé au tableau par Manon. Il commence par dessiner un rectangle autour du triangle, de la manière suivante:

Manon reprend alors le dessin, afin de le mettre au propre et explique la démarche de Daniel aux autres élèves. "Daniel, il a fait un rectangle comme ça avec. Il est parti de sa base du triangle ici, et il a complété un rectangle. Parce que faire l'aire d'un rectangle on sait comment faire." Elle demande ensuite à Daniel ce qu'il faut faire ensuite. Plutôt que de dire que l'aire du triangle équivaut à la moitié de celle du rectangle, et qu'il suffit de diviser l'aire du rectangle par 2, Daniel explique pourquoi le triangle correspond à la moitié du rectangle.

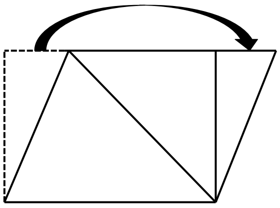
" Dans le fond, pour que ça, [les triangles situés dans le coin supérieur droit et dans le coin supérieur gauche du rectangle nouvellement formé] ça équivale à ça [le triangle initial], tu les mets ensemble (ajoute un triangle du côté droit du rectangle)."

Lorsque Daniel propose cette stratégie, on entend plusieurs élèves de la classe rire et Manon intervient pour dire à Daniel "Je pense que tu te compliques la vie. On va demander à Alexis de venir nous montrer qu'est-ce qu'il a fait avec ça".

Cet épisode nous semble hautement significatif à plusieurs égards. Tout d'abord, par son intervention, Daniel tente d'expliquer que le triangle correspond effectivement à la moitié du triangle. En déplaçant le triangle du coin supérieur gauche vers la droite, on obtient un parallélogramme de même aire que le rectangle initial et constitué de deux triangles congrus, mais positionnés différemment. Cette remarque de Daniel ne correspond pas aux attentes de l'enseignante. Elle demeure cependant pertinente, car pour adhérer à la technique "inscris dans un rectangle et divise l'aire du rectangle par deux", il faut d'abord être convaincu que, même pour ce type de triangle, le triangle correspond exactement à la moitié du rectangle dans lequel il est inscrit. Ce constat semble plus accessible aux élèves dans le contexte d'un triangle rectangle puisque la diagonale du rectangle dans lequel le triangle de départ est inscrit sépare celui-ci en deux triangles congrus. Il est toutefois moins évident dans le cas d'un triangle non rectangle puisque le rectangle est alors constitué du triangle initial A ainsi que des deux triangles B et C, dont la somme des aires est égale à celle du triangle A, ou encore de la moitié du rectangle.



Toutefois, cette difficulté pour les triangles non rectangles n'a pas été abordée de manière explicite par Manon auparavant. L'explication de Daniel aurait pu permettre d'institutionnaliser ce constat: en déplaçant le triangle du coin supérieur gauche, on constate qu'on a deux triangles congrus et on peut conclure que l'aire du triangle est bien la moitié de celle du rectangle (ou encore du parallélogramme) dans lequel il est inscrit, mais Manon décide plutôt de poursuivre avec un autre élève[5].



D'ailleurs, c'est une minute plus tard, à partir du rectangle et non du parallélogramme de Daniel que Manon revient explicitement sur l'équivalence des parties en argumentant à partir d'un rectangle.

L'intervention de Daniel illustre également bien la fonction topogénétique du SDA. C'est un élève qui pour son enseignante intervient peu en classe et a des difficultés « à réfléchir tout seul ». Ici, dans le SDP, il se positionne de manière forte et sur un enjeu qui est auparavant resté implicite dans la classe. En venant expliquer au tableau, il prend une place topogénétiquement haute.

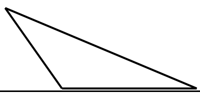
Manon reviendra sur la technique de Daniel dans le prochain épisode, lors d'un travail en petits groupes.

4. Description du SDA post et analyse de ses effets potentiels

Le SDA post a été réalisé par Manon une semaine après la conclusion de la situation-problème en classe. Dans le cadre de ce SDA, Manon a réuni les mêmes quatre élèves qui ont participé au SDA pré et qui ont travaillé ensemble pendant le

[5] Il est possible que le changement d'élève ait été motivé également par des considérations de temps. L'épisode en question se situe environ 5 minutes avant le son de la cloche de l'heure du midi, ce qui pourrait avoir obligé Manon à trouver une façon de conclure rapidement.

SDP. D'une durée totale de 18 minutes, le SDA post comprend les étapes suivantes :

Etapes	**Types de tâche, techniques et quelques éléments de gestion didactique**
1	Justification du dispositif auprès des élèves. " Je veux vérifier ce que vous avez compris. Est-ce que vous allez être capables maintenant de calculer l'aire d'un triangle, comment vous vous y prenez pour calculer l'aire d'un triangle."
2	Vérification, de manière individuelle, auprès de chaque élève s'ils seraient maintenant en mesure de calculer l'aire du triangle.
3	Travail sur l'aire du triangle isocèle utilisé dans le SDP à travers la technique "inscription dans un rectangle, puis diviser l'aire du rectangle par 2". Manon recentre ensuite sur la technique "inscrire une hauteur dans le triangle et appliquer la formule", ce qui dispense du dessin du rectangle. La technique est appliquée à un exemple, expliquée et discutée avec les élèves.
4	Travail sur un cas particulier, en utilisant la technique "trouver différents endroits où on peut placer la hauteur" 
5	Nouvelle vérification par Manon si les élèves seraient maintenant en mesure de déterminer seuls l'aire d'un triangle. Manon se rend compte que Julien ne sait pas encore comment déterminer l'aire du rectangle
6	Retour sur le calcul de l'aire du rectangle à travers des exemples utilisés dans le SDP et lien avec l'aire du triangle.
7	Manon questionne les élèves sur la façon dont ils ont perçu l'utilité du SDA pré.

Comme pour le SDA pré, nous avons identifié différentes fonctions du SDA post, que nous avons également analysées à partir du triplet des genèses.

Tout d'abord, dans le SDA post, la fonction mésogénétique se manifeste à travers des objets qui apparaissent ici, mais qui sont restés implicites pour l'ensemble des élèves qui ont participé au SDP.

À titre d'exemple, citons un épisode, situé à la troisième étape, où Manon revient avec Marielle sur l'utilité de la formule.

> "C'est à ça que ça sert une formule. C'est-à-dire que maintenant que j'ai compris. Toi tu as compris qu'il faut que tu fasses un carré puis que tu dois prendre cette longueur-là fois cette longueur-là pour trouver l'aire de ton carré. Après ça il faut que tu divises par 2. Une fois qu'on a compris ça, après ça on essaie de trouver un chemin plus court, le plus court possible, parce que si tu as 20 triangles dont il faut que tu calcules l'aire, puis qu'il faut que tu fasses toujours ton carré, pis il faut que tu t'assures que ta droite ici elle a sa place pis elle ne dépasse pas trop là, tu vois, que ça peut être long."

Cette utilité de la formule était restée implicite lors du SDP. Dans ce sens, le SDA post a permis de travailler ce que Castela (2008) décrit comme étant des besoins ignorés d'apprentissage. Ces enjeux non explicités d'apprentissage sont alors ceux qui « doivent être réalisés par les élèves pour réussir dans la classe de mathématiques alors même que l'institution d'enseignement n'organise aucun système didactique visant explicitement à permettre la réalisation des apprentissages en question (p. 137) ». Dans ce cas-ci, Manon a pu expliquer aux élèves du SDA post que l'inscription du triangle dans le carré était un support à la compréhension : « Tu as compris qu'il faut que tu fasses un carré puis que tu dois prendre cette longueur-là fois cette longueur-là pour trouver l'aire de ton carré. Après, il faut que tu divises par 2 ». La formule quant à elle sert à trouver une technique qui permet de calculer rapidement l'aire de plusieurs triangles : « On essaie de trouver le chemin le plus court ». A travers son intervention, Manon a donc pu expliciter l'utilité de chacune des deux techniques. Le besoin ignoré d'apprentissage est ici « l'utilité d'une technique ».

Le mode de fonctionnement en petit groupe permet également de clarifier certains des objets qui sont encore problématiques pour les élèves qui y participent. Ainsi, après l'utilisation de la technique "inscription dans un rectangle", Roselyne intervient pour rappeler qu'une autre technique est également possible :

> Roselyne : Mais aussi on avait une autre manière. Tu fais le lien de là jusque-là. Comme ça la ligne, la hauteur, est perpendiculaire à la base. Comme ça t'as juste à mesurer ça [la base] pis ça [la hauteur], tu fais fois, tu divises par… non, tu ne divises pas par 2 ?
>
> Manon : Est-ce qu'il faut diviser par 2 ou il ne faut pas diviser par 2 ?

Roselyne : Non, c'est juste dans un triangle, ce n'est pas dans un carré.

En fait, Roselyne rappelle la deuxième technique vue lors du moment de l'institutionnalisation dans le SDP, mais argumente que la division par 2 n'est plus nécessaire ici, puisque la hauteur n'est pas inscrite dans un carré, mais uniquement dans un triangle. Cette erreur s'explique probablement par le fait que, la hauteur étant inscrite à l'intérieur du triangle, le carré n'est plus visible pour Roselyne et celle-ci ne comprend pas que, même en l'absence de ce carré, l'aire obtenue en multipliant la base par la hauteur du triangle correspond tout de même à celle d'un carré. Manon intervient alors pour montrer, à partir du dessin du triangle que les deux hauteurs (celle du triangle et du carré) sont identiques, ce qui permet à Roselyne de faire le lien entre les deux techniques. Le contexte du SDA post a alors permis de clarifier un enjeu de savoir qui était resté implicite et incompris par Roselyne lors du SDP.

Le SDA post a également permis à Manon de revenir sur des objets plus anciens, mais nécessaires à la compréhension de la formule. Ainsi, lorsque Manon demande, après un premier travail sur différents triangles, si tous les élèves seraient maintenant en mesure d'appliquer la formule de l'aire du triangle, elle se rend compte que le concept d'aire du rectangle est encore flou pour Julien. Elle intervient alors, en reconstruisant la formule de l'aire du rectangle avec lui.

Il est à noter que cette formule est essentielle à la compréhension de celle de l'aire du triangle et c'est probablement à travers le dispositif particulier du SDA post, dans lequel Manon a échangé en petit groupe avec les élèves, qu'elle a pu se rendre compte de cette lacune chez Julien et intervenir auprès de lui.

L'intervention en petit groupe dans le SDA post joue également un rôle clé dans la fonction topogénétique de celui-ci. Ainsi, comme le nombre d'élèves dans le groupe est restreint, Manon peut intervenir de manière individuelle auprès de chacun d'eux. C'est le cas par exemple en début de séance, lorsqu'elle demande à chacun des élèves, de manière individuelle, s'il serait maintenant en mesure de calculer l'aire d'un triangle.

Le SDA post que nous avons observé constitue également un espace dans lequel les élèves ont la possibilité de poser des questions. Nous avons déjà vu que c'était le cas pour Roselyne, lorsqu'elle se questionnait sur la nécessité de diviser l'aire par 2 lorsqu'on inscrit la hauteur à l'intérieur du triangle. C'est également le cas pour Marielle, après le travail sur l'aire du rectangle, vers la fin du SDA post. Marielle pointe alors le rectangle devant elle et demande si on peut prendre la largeur ou la longueur du rectangle sur n'importe quel côté du triangle. 

> Mais si tu dis de prendre ici (montre la largeur à gauche du rectangle) et là (montre la longueur en bas du rectangle) mais est-ce que tu pourrais prendre là (montre la largeur à droite du rectangle) et là (montre la longueur en haut du rectangle) ? Mais est-ce que ça change quelque chose ?

À la base de cette question se trouve alors la congruité des paires de côtés du rectangle. Le SDA post permettrait ainsi aux élèves d'assumer leur rôle d'élève en leur donnant l'espace nécessaire pour poser leurs questions de clarification.

Concernant la fonction chronogénétique du SDA post, elle se manifesterait de deux manières différentes. Tout d'abord, les élèves y disposent de plus de temps pour l'institutionnalisation. En effet, le SDA post dure 18 minutes, alors que le moment collectif servant à l'institutionnalisation dans le SDP était d'une durée d'à peine 10 minutes. Ce plus de temps permet alors à l'enseignante d'expliciter certains éléments qui étaient restés implicites lors du SDP. Cette fonction se manifeste également par le fait que le SDA post se déroule environ une semaine après l'institutionnalisation en classe. Le SDA post apparait comme le lieu d'une institutionnalisation bis où Manon convoque à nouveau la technique institutionnalisée lors de son enseignement dans le SDP, c'est-à-dire la formule de l'aire du triangle. Elle s'assure ainsi que le rapport personnel à cet objet de savoir est conforme à ses attentes et aux attentes institutionnelles.

Maintenant, essayons de voir en quoi le SDA post tel qu'il a été expérimenté par Manon se rapproche ou se distingue des situations de rappel de type 1 décrites par Perrin-Glorian (1994). D'abord, tout comme pour les situations de rappel, notre SDA post permet de revenir sur la situation travaillée avec un certain recul. Ce travail se fait toutefois dans un contexte différent. Le travail de Perrin-Glorian (1994) se situant dans des classes entières, l'ensemble de la classe est concerné par ces situations de rappel, tandis que le SDA post ne s'adresse qu'à un certain nombre d'élèves, identifiés préalablement par l'enseignante comme étant en difficulté.

Perrin-Glorian (1994) a également identifié des fonctions de dépersonnalisation et de pré-décontextualisation à ce type de situations de rappel : « en reprenant à froid ce qui s'est passé, on élague les détails pour identifier ce qui est important. A cette occasion, le sens caché, le rôle pour l'apprentissage de l'un ou l'autre des problèmes posés peut se révéler à certains élèves. » (*Ibid.*, p. 140). Dans notre SDA post qui constitue une institutionnalisation-bis, les mêmes effets semblent également se produire. D'abord, le partage des stratégies de chacun des élèves contribue à la dépersonnalisation des stratégies. Ensuite, certaines des interventions permettent la pré-décontextualisation. Pensons notamment ici à la question de Marielle de savoir si on peut utiliser la largeur et la longueur de n'importe quel côté du triangle sert aussi à distinguer ce qui est essentiel et superflu dans sa technique.

5. Conclusion

Que pouvons-nous retenir de cette mise en œuvre de notre dispositif d'aide pour élèves en difficulté ? Tout d'abord, au niveau du SDA pré, les trois fonctions méso, chrono et topogénétiques que nous avions identifiées dans nos travaux précédents (Theis et al., 2014 ; Assude et al., 2016) se manifestent également dans cette mise en œuvre. Comme nous l'avons vu, la « rencontre avant » de certains objets sensibles qui seront utiles à la résolution de la situation-problème dans le SDA permet aux élèves une entrée plus facile dans le milieu, qui se manifeste notamment dans le SDP à travers la prise de position des élèves du SDA et leur fort engagement dans la situation. D'ailleurs, ces prises de positions semblent également dues à des effets du SDA aux yeux de Manon, qui a confirmé que les interventions de Daniel notamment dépassaient largement ce qu'il réussit à faire d'habitude en classe.

Il est également intéressant de constater que ces trois fonctions se manifestent de manière constante à travers trois mises en œuvre de nature très différente. Ainsi, rappelons que dans le premier SDA expérimenté (Theis et al., 2014), l'enseignante a demandé aux élèves d'anticiper des stratégies qui pourraient être utilisées pour aborder la situation-problème le lendemain. Dans le deuxième SDA (Assude et al., 2016), il s'agissait plutôt de compléter la première sous-tâche d'une tâche de communication à plusieurs étapes autour d'objets géométriques, tandis que la présente mise en œuvre du SDA pré impliquait plutôt un travail sur des objets anciens. Ces différences pourraient toutefois être en lien avec la nature des situations-problèmes qui étaient proposées dans les SDP respectifs. Ainsi, le premier problème proposé (Theis et al., 2014) était une situation avec une forte prégnance du contexte dans laquelle la difficulté pour les élèves consistait entre autres à tenir compte d'un grand nombre de variables contextuelles. La deuxième situation-problème (Assude et al., 2016) demandait aux élèves de décrire une figure géométrique à un autre, sans que celui-ci ne puisse la voir, et pour qu'il puisse la reproduire à l'identique. Comme cette situation impliquait plusieurs étapes, il devenait possible d'expérimenter seulement la première d'entre elles dans le SDA. Finalement, la situation utilisée dans cet article visait un apprentissage de nature davantage conceptuelle pour laquelle il était nécessaire que les élèves convoquent certains savoirs anciens, d'où la pertinence pour l'enseignante de s'assurer que ces anciens savoirs étaient acquis chez les élèves du SDA pré.

Au-delà de leurs différences, les trois expérimentations ont toutefois partagé un certain nombre de points communs, qui nous semblent importants pour favoriser l'apparition des effets du SDA. Tout d'abord, les dispositifs du SDA se sont réalisés à travers l'ensemble des expérimentations avec des groupes relativement petits d'élèves présumés en difficulté et ont été animées par l'enseignante elle-même.

Dans ce contexte, la petite taille du groupe permet d'une part plus facilement aux élèves de prendre position dans les travaux du groupe et il devient également plus difficile pour eux d'échapper au questionnement de l'enseignante.

Un autre élément qui caractérise l'ensemble des SDA que nous avons observés est l'absence d'avancement du temps didactique dans ces dispositifs (voir aussi Assude et al., soumis). Cette absence nous semble importante pour la gestion du SDP. En effet, si dans la classe, il y avait des élèves, ceux du SDA, qui avaient déjà avancé de manière significative dans la situation-problème, alors que d'autres la rencontrent pour la première fois, il deviendrait très difficile pour l'enseignante de gérer les échanges. Dans les trois mises en œuvre de notre dispositif d'aide, l'absence d'avancement du temps didactique s'explique entre autres par le fait qu'il n'y a pas de rétroaction de la situation. Dans la première mise en œuvre (Theis et al., 2014), les élèves étaient uniquement dans l'anticipation de ce qu'ils devaient faire dans le SDP, sans exécuter leurs stratégies. Par conséquent, aucune rétroaction du milieu n'était possible. Lors de l'introduction de la situation de communication dans le deuxième SDA observé (Assude et al., 2016), les élèves qui y participaient ont décrit la figure, mais sans que leur partenaire n'ait eu à la dessiner. Dans ce sens, il n'y a pas eu de rétroaction du milieu là non plus. Finalement, dans la présente expérimentation, Manon présente dans le SDA-pré l'objet qui sera travaillé dans le SDP (l'aire du triangle), mais travaille plutôt sur des savoirs anciens nécessaires à la résolution du problème, à savoir le concept d'aire et différents types de triangles, sans toutefois entrer directement dans la situation-problème.

Dans le présent article, nous avons également expérimenté pour la première fois un SDA réalisé après la résolution de la situation-problème dans le SDP. Nous avons pu constater que nous avons également retrouvé dans ce SDA post des fonctions chrono, méso et topogénétiques. Il nous semble toutefois important de souligner une différence fondamentale entre les deux SDA. Si le but du SDA pré est en quelque sorte de permettre ou de faciliter l'entrée dans le milieu aux élèves en difficulté, le SDA post porte plutôt sur une institutionnalisation "plus". En effet, les objets de savoir qui ont été institutionnalisés à la fin du SDP avec l'ensemble des élèves réapparaissent dans le SDA post. Toutefois, ces objets n'y sont pas traités à l'identique. D'un côté, le SDA post permet d'expliciter un certain nombre d'objets qui étaient restés implicites lors de l'institutionnalisation dans le SDP. D'un autre côté, le mode de fonctionnement en petit groupe a permis à Manon l'identification d'enjeux de savoirs nécessaires à l'institutionnalisation, notamment l'aire du rectangle qui était restée problématique pour une élève et le lien entre la technique "inscription dans un rectangle" et celle d'inscrire une hauteur à l'intérieur du triangle et d'appliquer la formule. Par ailleurs, les élèves disposent de plus de temps pour cette institutionnalisation dans le SDA post.

De manière générale, il nous semble toutefois que les deux SDA, pré et post, ont quand même un rôle important à jouer au niveau du temps didactique, même s'il n'y avance pas en tant que tel. En effet, on peut se demander si leur fonction n'est pas aussi de synchroniser les élèves en difficulté avec le temps didactique de la classe. Ainsi, le SDA pré, en permettant aux élèves de "savoir plus avant" sur la situation-problème, leur éviterait d'être "décrochés" dans le SDP dès la présentation de la situation-problème. C'est d'ailleurs une difficulté mentionnée par Sylvie, l'enseignante de la première expérimentation du SDA pré (Theis et al., 2014). " En temps normal [les élèves en difficulté] seraient restés les bras comme ça, et leur coéquipier, c’est lui qui aurait tout fait. Et ils auraient été en arrière, ils auraient regardé ça…"

Dans le même sens, le SDA post permettrait de ramener les élèves au niveau du temps didactique officiel de la classe. En effet, nous avons vu dans la présente expérimentation que le SDA post a permis de revisiter certains concepts sensibles de la situation problème, qui étaient restés incompris dans le SDP par certains élèves. Toutefois, à ce stade-ci de nos travaux, nous ne disposons pas encore des données nécessaires pour analyser les effets à long terme des effets des SDA que nous avons mis en place. Dans cet article, nous avons pu analyser comment s’opère cette synchronisation avec le temps didactique officiel de la classe localement pour une situation précise. Cependant, l’évaluation des effets à long terme de ces dispositifs sur l’apprentissage des élèves en difficulté et sur la rétention des savoirs fera partie des questions que nous pourrons explorer dans d’autres mises en œuvre de ces dispositifs d’aide.

Bibliographie

ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURE, K., TAMBONE, J., THEIS, L. ET MORIN, M.-P. (2016). Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux difficultés d'un système didactique. *Revue canadienne de l'enseignement des mathématiques, des sciences et des technologies*, ***16***(1), 64-76.

ASSUDE, T., MILLON-FAURE, K., KOUDOGBO, J., MORIN, M.-P., TAMBONE, J. ET THEIS, L.(soumis), Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques.*

BEDNARZ, N. (2013), (dir.) *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement.* L'Harmattan, Paris.

BROUSSEAU, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches,* **41**, 177-182

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques,* **28.2,** 135-182.

CHEVALLARD, Y (1995). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, dans Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Éds. Noirfalise et Perrin-Glorian). 83-122. Clermont-Ferrand : IREM.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques.* **19.2,** 221-266.

DESGAGNE, S., BEDNARZ, N., LEBUIS, P., POIRIER, L., & COUTURE, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, **27**(1), 33-64.

GIROUX, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques, dans *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques (Dir. Mary et alii.),* 11-44. Québec, Canada : Presses Universitaires du Québec.

MARY, C., SQUALLI, H. ET SCHMIDT, S. (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique, dans *Les jeunes en grande difficulté. Contextes d'interventions favorables.* (Dir. Myre Bisaillon et Rousseau), 169-192. Québec, Canada : Presses de l'Université du Québec.

MINISTERE DE L'EDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT. (2003), *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire.* Gouvernement du Québec, Québec.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques : naissance, développements et perspectives, dans *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (Éds. Artgiue et alii.), 97-147. Grenoble : La Pensée Sauvage.

SARRAZY, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, ***49***(1), 89-117.

SENSEVY, G., MERCIER, A. ET SCHUBAUER-LEONI, M.-L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques,* **20.3**, 263-304.

TAMBONE, J. (2014), Enseigner dans un dispositif auxiliaire: le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine. *Les sciences de l'éducation - pour l'ère nouvelle,* ***47***(2), 51-71.

THEIS, L., ASSUDE, T., TAMBONE, J., MORIN, M.-P., KOUDOGBO, J. ET MARCHAND, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et Francophonie*, ***42***(2), 160-174.

RAQUEL BARRERA-CURIN, CAROLINE BULF, FABIENNE VENANT

DIDACTIQUE, SÉMANTIQUE ET MÉTAPHORES : ANALYSE DE LANGAGES EN CLASSE DE GÉOMÉTRIE

Abstract. Didactic, Semantic and Metaphors: Analysis of Languages in Class of Geometry. This work focuses on the role taken by different forms of language during the first academic experience of symmetry by young children, in the context of primary school in France. We pay special attention to. A situation of introduction of symmetry in a class of CE1 (grade 7 or 8 years) was observed to this purpose. This paper aims to provide our analysis of this situation, which are grounded into a didactical theoretical framework enriched with semantic, discursive and metaphorico-conceptual analysis tools. This original approach allows us to understand the symmetry in all its complexity and to analyze finely the inter-influence of three dimensions (acting-talking-thinking) that characterize both the mathematical activity of the students and of the teacher.

Résumé. Ce travail s'intéresse au(x) rôle(s) que tiennent différentes formes de langage lors de la première rencontre explicite des élèves avec le concept scolaire de la symétrie, dans le contexte de l'école primaire en France. Nous nous appuyons pour cela sur l'observation d'une situation d'introduction de la symétrie dans une classe de CE1 (élèves de 7 ou 8 ans) en France. L'objectif de l'article est de rendre compte de nos analyses qui s'appuient sur un cadre théorique didactique enrichi d'outils d'analyse sémantiques, discursifs et métaphorico-conceptuels. Cette approche originale nous permet d'appréhender la symétrie dans toute sa complexité et d'analyser de façon fine l'inter-influence de trois dimensions (*agir-parler-penser*) qui caractérisent selon nous l'activité mathématique des élèves mais aussi celle de l'enseignant.

Mots-clés. Langages, apprentissage, géométrie, symétrie, métaphores, modes de fréquentation, agir-parler-penser.

Introduction

L'étude du rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques a été peu souvent objet d'étude en tant que tel dans les travaux de didactique des mathématiques français bien que cette question soit depuis longtemps au cœur de nombreux travaux anglo-saxons (voir paragraphe 1.1). La thèse de Laborde (1982) a été une des rares à aborder frontalement cette question à l'aune des cadres théoriques français. Toutefois depuis quelques années en France, ce courant s'inverse et des travaux de plus en plus nombreux cherchent à comprendre son rôle dans les mécanismes complexes d'apprentissage des mathématiques au-delà de son rôle en tant que *media* (Bronner et Al. 2013) (Barrier et Mathé 2014). Notre travail de recherche s'inscrit dans le prolongement de certains de ces travaux de recherche

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 39 - 78.

récents issus du champ de la didactique des mathématiques (voir paragraphes 1.1, 1.2 et 1.4) ainsi que de celui de la linguistique (voir paragraphes 1.3 et 1.4). Nous avons choisi de nous intéresser à la première rencontre explicite des élèves avec le concept *scolaire*[1] de la symétrie, dans le contexte de l'école primaire en France. Nous nous appuyons pour cela sur l'observation d'une situation d'introduction de la symétrie dans une classe de CE1 (élèves de 7 ou 8 ans) en France. Nous nous intéressons plus particulièrement aux processus de co-construction des connaissances liées à ce concept en accordant une attention particulière au langage, sous ses différentes formes (parlée, gestuelle, visuelle…). Pour cela, nous avons développé un cadre d'analyse qui tire son originalité de l'articulation de nos différentes approches : didactique, sémantique et métaphorico-conceptuelle.

La symétrie[2] est un concept mathématique que l'élève rencontre très tôt : dès l'école maternelle à travers des situations mettant en jeu implicitement des figures isométriques (Gorlier 1981 ; Rouche 1999 ; Grelier 2013) mais aussi en dehors de l'école du fait de sa dimension culturelle. De nombreuses recherches mettent en évidence l'existence chez le jeune enfant d'une forme d'intuition d'axe de symétrie, avant même toute rencontre scolaire avec la symétrie (Piaget & Inhelder 1977). D'autres travaux (Thompson 1917 ; Weyl 1952 ; Keller 2004, 2006) accordent à la symétrie un rôle crucial dans l'histoire de la construction de la pensée aussi bien mathématique que philosophique, psychologique ou esthétique. La symétrie est un concept mathématique dont les dimensions socioculturelles suscitent encore de nombreux intérêts et interrogations, notamment lorsqu'il s'agit d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques (Grenier 1988 ; Miyakawa 2005 ; Lima 2006 ; Bulf 2008 ; Chesnais 2009).

La première partie de l'article est consacrée à la description de l'articulation que nous faisons de différents positionnements théoriques, parfois considérés comme incompatibles d'un point de vue épistémologique. Ces positionnements mettent en jeu les objets suivants :

- l'apprentissage, vu comme un double processus d'*adaptation* (dimension individuelle) et d'*acculturation* (dimension sociale) ;
- la *langue*, vue comme un système de signes linguistiques et code permettant la communication ;

---

[1] D'après le dictionnaire de Reuter (2013 p.33), les concepts scolaires sont les concepts « construits et travaillés dans l'espace scolaire » et se distinguent des concepts « scientifiques » qui sont « élaborés dans les disciplines de recherche » ou les concepts « quotidiens de la vie de tous les jours ».

[2] Dans cet article, nous parlons de symétrie pour symétrie axiale.

- le *langage*, vu comme une activité dialogique et située mettant en jeu non seulement la *langue et ses codes écrits ou verbaux* mais aussi se manifestant sous différentes formes (visuelle, gestuelle, …).

La deuxième et troisième partie de l'article sont consacrées à la restitution des analyses de la situation de classe observée, illustrant la mise en fonctionnement de nos articulations théoriques et méthodologiques, d'horizons différents mais complémentaires.

1. Nos positionnements théoriques : didactique, linguistique et métaphorico-conceptuel

Dans la partie 1.1, nous expliciterons notre conception de l'apprentissage. Nous détaillerons comment celle-ci prend ses racines dans le cadre de la Théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) mais se trouve enrichie par nos récents travaux (Bulf, Mathé & Mithalal 2014, 2015) qui accordent aux échanges langagiers une part tout aussi importante qu'à la situation en jeu et la confrontation du sujet au milieu. Pour cela, nous avons choisi de mobiliser l'outil *Modes de Fréquentation* introduit par Bulf, Mathé et Mithalal (2014) dont nous décrirons l'intérêt comme outils d'analyse dans un contexte d'enseignement-apprentissage de la symétrie dans la partie 1.2. Dans la partie 1.3 nous proposerons d'enrichir cet outil en incluant une analyse linguistique et sémantico-discursive (Jacquet, Venant et Victorri 2005, Kerbrat-Orecchioni 2005). Nous reviendrons alors sur ce que nous entendons par *activité langagière*, *langue* et *langages*. Enfin dans la partie 1.4, nous ajouterons une dernière dimension à notre cadre d'analyse, celle d'une analyse métaphorico-conceptuelle des échanges langagiers se produisant grâce aux caractéristiques métaphoriques qui émergent des objets mathématiques (Barrera-Curin 2013, Nuñez & Margethis 2014). Cette dernière dimension se fonde sur l'idée que « notre système conceptuel ordinaire, selon lequel nous pensons et agissons, est fondamentalement de nature métaphorique » (Notre traduction. Lakoff & Johnson 1980 p. 454) :

> But our conceptual system is not something we are normally aware of. In most of the little things we do every day, we simply think and act more or less automatically along certain lines. Just what these lines are is by no means obvious. One way to find out is by looking at language. Since communication is based on the same conceptual system that we use in thinking and acting, language is an important source of evidence for what that system is like. (Lakoff & Johnson1980 p. 454)

L'objectif de la première partie de cet article est donc d'expliciter nos positionnements théoriques et leur articulation qui fondent notre cadre d'analyse afin d'appréhender – en étroite relation avec la langue et les échanges langagiers – la nature de l'objet mathématique en jeu, la symétrie, dans toute sa complexité aussi bien logique que sémantique.

1.1. Apprendre en géométrie : un double processus d'adaptation et d'acculturation

De nombreux travaux anglo-saxons, tels que ceux de Sfard (2001, 2012), Kieran, Forman et Sfard (2001), Moschkovich (2010) ou Morgan (2013) mettent en avant la prise en compte des contextes sociaux, historiques et culturels et accordent au langage un rôle prédominant et crucial dans le processus de construction de connaissances mathématiques. La Théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) se distingue au sens où on peut, en référence aux travaux de Bessot (2011) et à la distinction *connaissances/savoir* (Brousseau 1998 ; Lappara & Margolinas 2010), reconnaître au processus d'apprentissage qu'elle se propose de modéliser, une dimension individuelle et une dimension sociale :

> Brousseau s'oppose aux thèses constructivistes en définissant l'apprentissage comme un double processus :
>
> - un processus d'adaptation (assimilation et accommodation) à un milieu qui est porteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres : notions de milieu et de situation adidactique,
>
> - et un processus d'acculturation par l'entrée dans les pratiques d'une institution : notion de contrat et d'institutionnalisation. (Bessot 2011 p.32)

Autrement dit la dimension individuelle renvoie au caractère a-didactique de la situation en jeu dans laquelle le sujet met en jeu ses connaissances pour résoudre un problème et la dimension sociale renvoie au processus d'acculturation qui prend effet à travers les processus dits « complémentaires », selon Laparra et Margolinas (2010) de dévolution (mise en place de la situation et négociation du contrat en réglant la part d'implicite) et d'institutionnalisation. Il en résulte une construction négociée et partagée du savoir visé :

> […] enseigner un savoir suppose (quel que soit le choix pédagogique) un processus de contextualisation : ce que l'élève rencontre en situation est d'abord une connaissance. Mais les connaissances fonctionnent en premier lieu dans le régime de l'implicite, elles sont contextualisées, très dépendantes de la situation. Le processus qui fait changer de statut la connaissance en la faisant évoluer graduellement vers un régime de savoir est le processus d'institutionnalisation, qui passe par des formulations, des validations, une décontextualisation, une mémorisation, *etc*. (*Ib.,* p.146)

Dans Bulf, Mathé et Mithalal (2015), nous nous rapprochons des courants anglo-saxons tout en conservant notre ancrage dans la TSD en mettant au jour que les interactions langagières peuvent jouer un rôle essentiel au-delà de leurs rôles dans les processus de dévolution et d'institutionnalisation :

> […] au-delà de leurs fonctions habituellement identifiées pour le déroulement de la situation didactique et des effets de contrat prévisibles, les interactions langagières

> orales jouent ainsi un rôle fondamental dans la dynamique de constitution de chacun des niveaux de milieu. Ce rôle ne nous semble devoir être considéré ni comme prééminent, ni subordonné, mais bien comparable et du même ordre que celui de la boucle action-rétroaction du système [sujet<>milieu]. […] les négociations sur et dans le langage ont permis de modifier les attentes de l'élève ; elles ont en outre modifié leur rapport au savoir et participé de la négociation des significations qu'ils assignent au savoir en construction. (Bulf, Mathé & Mithalal 2015 pp.29-30)

Dans la recherche que nous rapportons ici, notre positionnement théorique s'inscrit dans la continuité de ces derniers travaux (Bulf, Mathé et Mithalal 2014, 2015) et concilie également ces deux points de vue sur l'apprentissage que nous admettons opérant de façon concomitante et dialectique : nous partageons le point de vue individuel de l'apprentissage qui est derrière l'idée d'apprendre en résolvant des problèmes et celui dit social qui accorde à la manifestation de différentes formes de langage un rôle tout aussi crucial que celui de l'adaptation au milieu. Nous adoptons ce positionnement théorique car il nous semble particulièrement convenir au contexte d'enseignement-apprentissage de la géométrie dans lequel s'inscrit cette recherche. En effet, le domaine de la géométrie privilégie la manipulation et les tracés (lors de la résolution d'un problème), et nécessite une forme spécifique et partagée de désigner les objets (qui renvoie au caractère éminemment social des savoirs scolaires). En outre, la spécificité et la complexité de l'appréhension d'objet géométrique (comme le concept de *droite* par exemple) résident dans le fait qu'un même signe (par exemple, une trace graphique – *un trait* – une trace visuelle – *un geste représentant une ligne droite de façon perpendiculaire ou horizontal au sol* – ou un mot – *une droite*) peut à la fois désigner l'objet matériel et/ou l'objet théorique ; la signification étant dans l'emploi (Wittgenstein 1953). Ainsi partageons-nous, dans le contexte spécifique d'enseignement-apprentissage de la géométrie, cette approche wittgensteinienne de l'apprentissage (construction collective, sociale, d'une forme de vie partagée) selon laquelle le langage – et les différentes formes qu'il peut prendre au cœur des interactions – tiennent un rôle essentiel (Mathé 2012). Nous reviendrons sur ce point dans la partie 1.3 en explicitant davantage nos références aux travaux de Bernié (2002) et Jaubert et Rebière (2012) qui, dans une perspective vygotskienne, considèrent que le langage est un outil de construction, négociation et transformation des significations.

En résumé et en référence aux derniers travaux cités, nous admettons qu'enseigner et apprendre la géométrie en contexte scolaire consiste à inscrire l'activité de l'élève dans un « ensemble social caractérisé par des modes d'agir-parler-penser » (Bernié 2002 p.81) « spécifiques d'un niveau donné, relativement à des objets de savoir donnés, dans un processus à la fois adaptationniste et social » (Bulf, Mathé et Mithalal 2014 p.32). Nous cherchons à rendre compte de la mise en relation de ces trois dimensions (agir-parler-penser) se manifestant dans et par l'activité géométrique (lors de la résolution d'un problème) : qu'entend-on par agir, parler et penser d'une figure symétrique ? Comment les élèves entrent-ils dans la résolution d'un problème portant sur la symétrie ? De quelle manière mobilisent-ils leurs connaissances ? Comment décrire l'évolution de leurs manières d'agir, de parler et de penser d'une figure symétrique au cours d'une activité riche en interactions entre élèves et enseignant ? Notre but est donc de présenter l'activité géométrique des élèves, en prenant en compte conjointement ces trois dimensions et en mettant en évidence les mécanismes de leur évolution en tant qu'unité.

1.2. Les *Modes de Fréquentation* d'une figure symétrique

Nous recourrons à une méthodologie d'analyse déjà éprouvée dans (Bulf, Mathé et Mithalal 2014) qui se déroule en deux temps. Dans un premier temps, nous menons une analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser de figure symétrique (détaillée dans la partie 2.2) puis, dans un second temps (partie 3), nous utilisons un outil d'analyse *a posteriori* baptisé *Modes de Fréquentation* afin de décrire l'activité géométrique des élèves en résolution de problèmes, relativement à un objet de savoir (ici figure symétrique). Nos analyses articulent les trois dimensions agir-parler-penser sans lien de subordination et se réalisent sous le regard de nos approches didactique, linguistique et métaphorico-conceptuelle que nous présenterons de façon détaillée dans les sections suivantes.

L'objectif de l'analyse *a priori* telle que nous la proposons ici, en termes de agir-parler-penser, est de fournir des indices ou balises pour structurer l'analyse *a posteriori*. Méthodologiquement, notre analyse *a priori* se veut épistémologiquement proche de celle menée dans le cadre strict de la TSD au sens où nous menons une analyse mathématique des concepts en jeu qui n'a pas un sens prédictif mais causal ; nous réfléchissons à l'activité potentielle des élèves en fonction des valeurs des variables didactiques de la situation. Toutefois, nous enrichissons ce modèle d'analyse en la présentant selon trois dimensions (agir-parler-penser), pensées comme une unité. Pour cela, et nous serons amenées à le détailler davantage dans la partie 2 de l'article, nous nous appuyons sur des résultats de travaux en didactique de la géométrie qui donnent déjà des éléments pour caractériser l'inter-influence entre ces trois pôles et nous aident donc à décrire l'activité géométrique potentielle des élèves dans la situation observée :

- d'une part, nous admettons l'inter-influence entre la façon qu'ont les élèves de percevoir les figures géométriques et leur manière d'agir dessus avec des instruments. En effet les travaux de Duval et Godin (2005) et Duval (2005) – et plus globalement de ceux du groupe de Lille[3] – mettent en évidence différentes façons

[3] De par leur appartenance institutionnelle, nous désignons par le groupe de Lille les membres du groupe de recherche qui a fonctionné à l'IUFM du Nord pas de Calais : Frédéric Brechenmacher, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Joël Jore, Bachir Keskessa, Régis

d'appréhender une figure qui dépendent de la tâche proposée et des instruments mis à disposition. Plus particulièrement, Duval (2005) décrit le développement de processus cognitifs articulant la visualisation et le langage en géométrie. Il définit en particulier le processus de « déconstruction dimensionnelle » des formes qu'il situe au cœur du processus de visualisation et du développement du raisonnement en géométrie :

> « La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme nD/2D, en unités figurales d'un nombre de dimension inférieure à celui de cette forme. Ainsi, la figure d'un cube ou d'une pyramide (3D/2D) est décomposée en une configuration de carrés, triangles, etc. (unités figurales 2D/2D). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales 1D/2D). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en « points » (unités 0D/2D). En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités 1D/2D (tracés sécants ou tracés formant un coin (« sommets », « angles », …)). (*Ib*., p. 20).

En outre pour Duval, la déconstruction dimensionnelle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive.

- d'autre part, nous nous appuyons sur l'analyse logique des concepts mathématiques en jeu au sens de Barrier, Hache et Mathé (2014) ou Barrier, Chesnais et Hache (2014). Cette analyse permet de décrire les relations d'inter-influence entre les trois pôles (agir-parler-penser) qui forment ainsi un « tout ». Ce type d'analyse s'exprime par la traduction des relations en termes de prédicats (au sens de la logique des prédicats) et met l'accent sur l'arité de ces prédicats, c'est-à-dire le nombre (unaire, binaire, ternaire, …) et la nature (point, ligne ou surface, au sens décrit par Duval dans le paragraphe précédent) des objets qui sont mis en relation. Ainsi, dans le contexte de notre objet d'étude qui porte sur des papillons (qui rappelons-le sera décrit dans la partie 2), la relation de symétrie peut, selon le stade de déconstruction dimensionnelle atteint, être considérée comme une relation unaire (par exemple, si les élèves comparent des ailes de papillon afin de produire un papillon symétrique, ils peuvent reconnaître un papillon effectivement symétrique dans sa globalité sans distinction de sous-éléments), binaire (par exemple, s'il s'agit de la mise en correspondance terme à terme de sous-éléments des ailes d'un même papillon en fonction de critères de forme ou de taille) ou ternaire (si par exemple trois éléments sont mis en relation : un élément d'une aile de papillon est mis en relation avec un élément d'une autre aile par rapport à une zone frontière représentée par les bords des rectangles à l'intérieur desquels ces ailes ont été dessinées).

- et enfin, nous référons aux résultats de travaux en didactique de la géométrie qui ont étudiés spécifiquement le concept de symétrie (voir les travaux déjà cités en

---

Leclercq, Christine Mangiante-Orsola, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere.

introduction de l'article ; Vergnaud 2002 ; Bulf, Marchini & Vighi 2013 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclerq 2013) qui nous donnent des éléments pour décrire *a priori* le rapport des élèves à cet objet mathématique.

Donnons maintenant un exemple dans le contexte de la situation étudiée (qui sera développé dans la partie 2) afin d'illustrer ce premier volet de notre méthodologie d'analyse. D'après les références que l'on vient de donner, nous pouvons décrire un mode d'agir-parler-penser *a priori* de figure symétrique lors de la première phase de la situation (annexe 1) de la manière suivante : *la mise en correspondance terme à terme de sous-éléments (de dimension 2 : éléments de surface du papillon comme un bout d'ailes par exemple ou de dimension 1 : contours de surface délimitant un bout d'ailes ou les antennes) d'un même papillon en fonction de critères visuels de forme ou de taille (les façons de parler peuvent être : exactement pareil-pas pareil, même forme, plus grand que, plus petit que, de chaque côté, etc.). Cette mise en relation entre ces deux éléments se fait par rapport à l'axe de symétrie qui n'est pas reconnu en tant que tel mais plus comme une zone frontière délimitant la moitié d'un papillon ; nous pouvons ainsi parler de relation ternaire. L'élève se suffit de la perception pour attribuer des valeurs à ces critères de comparaison dont la façon de parler dépend donc de la façon de voir et d'agir (et réciproquement).*

Une fois déterminés, les différents modes d'agir-parler-penser *a priori* (mais il n'est pas nécessaire d'être exhaustif), donnent ainsi des balises pour l'analyse *a posteriori* nous permettant de repérer en contexte – lors du déroulement de la situation – les manifestations effectives des façons d'agir-parler-penser un objet mathématique. Les modes de Fréquentation, outils d'analyse *a posteriori*, cherchent à décrire un rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu, ici figure symétrique, qui évolue au cours d'une situation. Les observables portent donc sur ce que font et disent les élèves et l'enseignant (gestes, regard, signes, langage oral, *etc*.) en repérant la dimension des objets en jeu (2D, 1D ou 0D) et leur relation (comme décrit précédemment c'est-à-dire à partir des différentes références données pour décrire l'analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser : les travaux de Duval, ceux spécifiques à la symétrie, l'analyse logique, *etc*.). Nous avons choisi de parler plutôt de Modes de Fréquentation (que de modes d'agir-parler-penser *a posteriori*) car ils ne sont pas figés, ils sont contextuels et se caractérisent par leur perpétuelle évolution au fil du déroulement. Et conformément à notre cadre théorique décrit dans la partie 1, cette évolution s'exprime d'une part d'un point de vue intra-personnel (caractère a-didactique de la situation) et inter-personnel (par son rapport aux autres et les éventuelles co-existences ou confrontations entre différents Modes de Fréquentation). Cette double dynamique d'évolution et de transformation des Modes de Fréquentation (considérée comme concomitante et dialectique) est précisément ce qu'on cherche à décrire, en partant donc de l'hypothèse que c'est l'inter-influence entre les trois dimensions (agir-parler-penser) qui sont moteur de cette double dynamique.

En résumé, l'outil d'analyse Modes de Fréquentation favorise une description et une analyse *a posteriori* de l'activité géométrique de l'élève que l'on décrit selon trois dimensions indissociables (agir-parler-penser). On cherche à exprimer les relations d'inter-influences qui sont à l'origine du caractère dynamique des Modes de Fréquentation de l'objet mathématique en jeu ; l'analyse logique reste un outil privilégié pour décrire ces relations. Si l'on reprend l'exemple cité précédemment : *la relation binaire repérée dans l'action par le fait que les élèves mettent en correspondance deux sous-éléments du papillon de façon perceptive selon des critères de forme ou de taille amènera le sujet à parler par exemple « de la forme de son aile d'un côté puis de l'autre » (et réciproquement, cette façon de parler amène à considérer une relation binaire dans l'action).* Nous décrivons là un Mode de Fréquentation de figure symétrique à un moment donné mais l'intérêt de l'analyse réside bien dans le fait de voir comment ces façons d'agir et de parler vont évoluer, s'inter-influencer et influencer les autres Modes de Fréquentation co-existant. Les valeurs des variables didactiques de la situation évoluant au cours de la séance (annexe 2), les façons d'agir sur le milieu vont donc également évoluer, faisant ainsi évoluer les façons de parler et de penser (et réciproquement). Ce sont donc toutes ces transformations, qui résultent à la fois d'une adaptation au milieu et d'une acculturation à des pratiques géométriques scolaires, que nous cherchons à décrire.

Pour étudier plus finement les relations entre les trois dimensions (agir-parler-penser), nous combinons une analyse linguistique (Jacquet, Venant et Victorri 2005), centrée sur les procédés sémantiques utilisés et sur la polysémie du vocabulaire géométrique, avec une analyse discursive (Kerbrat-Orecchioni 2005) à la fois fonctionnelle et hiérarchique. Ce double regard permet d'établir la structure du discours selon différents niveaux d'analyse (lexique, interactions, structures, enchaînements) ainsi que les relations entre ces différents niveaux. Nous détaillons ces compléments d'approches dans la partie suivante 1.3.

1.3 Activité langagière, langue et langages

Notre position sur le langage est très fortement influencée par les travaux de Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2012) commenté par Hache (2013). Dans la lignée de ces travaux, nous nous intéressons au langage en tant qu'« outil de construction, de négociations et transformations des significations » *(Ib.* 2013, p.3), « témoin d'une activité de réorganisation de ce que l'on comprend du monde » et « source d'apprentissage » (Jaubert et Rebière 2012, p.4). Par activité langagière, nous désignons le processus de construction des significations et des savoirs, dans et par le langage. Nous donnons au langage le sens général de « faculté que les hommes possèdent d'exprimer leur pensée et de communiquer entre eux au moyen d'un système de signes conventionnels vocaux et/ou graphiques constituant une langue » (TLFI[4]). L'activité langagière elle-même se traduit par des « reformulations, des mises à distances successives, la construction du discours de preuve et le travail de l'énoncé reconnu. » (*Ib*. 2012, p.4)

Pour jouer ce rôle, le langage met en œuvre la langue : « réservoir intériorisé des signes partagés par une communauté » (Hache 2013, p.2). Notre proposition est de passer par une description fine de ce qui se passe au niveau de la langue, une analyse linguistique, pour éclairer les processus en jeu au niveau de l'activité langagière. Nous prenons également en compte le fait que « le langage verbal n'est pas le seul outil producteur de sens » (Jaubert et Rebière 2012, p.4) et couplons l'analyse purement linguistique avec une analyse des langages mettant en jeu des gestes ou des éléments visuels. Nous parlons alors de formes de langage –gestuelle ou visuelle pour désigner ces modes de communication qui s'appuient sur des signes non verbaux (nous développerons également ce point dans la partie 1.4).

L'activité langagière et la construction de nouveaux savoirs sollicitent « des déplacements de positionnement énonciatifs qui engagent la transformation de la classe en communauté discursive disciplinaire » (Jaubert et Rebière 2012, p.5). Cette hypothèse énonciative forte donne une grande importance au contexte dans la construction des significations et des savoirs. C'est pourquoi l'étude linguistique que nous proposons s'inscrit dans le cadre théorique de la linguistique énonciative (Benveniste 1974 ; Ducrot 1972 ; Culioli 1983). L'objet d'étude en est précisément l'énonciation, « cette mise en fonctionnement de la langue par un acte individuel d'utilisation » (Benvéniste 1974, p.12). Il s'agit, étant donné un énoncé, de caractériser ce qui en fait un acte de communication et donc de prendre en compte l'acte et la manière d'énoncer aussi bien que la situation (temps, lieu). Cette analyse linguistique est à la fois sémantique et lexicale. Elle vise à caractériser les unités lexicales jouant un rôle important dans les énoncés, ainsi que le rôle du contexte. Le regard ainsi porté sur la langue et son utilisation, aussi bien du point de vue individuel qu'interindividuel, vient nourrir l'outil Mode de Fréquentation décrit dans la partie 1.2. L'analyse fine des observables langagiers aussi bien des élèves que de l'enseignant permet en effet de compléter les éléments issus de l'analyse didactique faite *a priori*. Il s'agit de décrire plus précisément le rapport du sujet à l'objet mathématique en jeu, mais aussi, et surtout, les éléments associés au langage qui caractérisent l'évolution des Modes de Fréquentation au cours de la situation. Notre analyse linguistique se situe aussi bien au niveau lexical que sémantique.

[4] TLFI : Trésor de la langue française informatisé, http://atilf.atilf.fr/tlf.htm. Consulté le 12 février 2016

Au niveau lexical, une importance particulière est donnée à l'étude des marqueurs de l'énonciation, les termes qui ne sont compréhensibles que par rapport à l'acte d'énonciation. Les indices auxquels nous nous intéressons visent à faire le lien entre l'énoncé (ce qui est dit) et l'énonciation (l'acte de dire), et à établir les caractéristiques de l'énonciation. Ce sont par les exemples les termes par lesquels un locuteur se définit comme sujet, comme les embrayeurs (Jakobson 1957) ou les déictiques. Il peut s'agir de marqueurs lexicaux comme *je, maintenant, ici, là-bas,* qui mettent l'accent sur le lieu, l'objet de référence ou la façon de situer le référent dans l'espace, ou, au contraire, de marqueurs qui renvoient à ce qui a été dit avant ou après. On cherche donc à distinguer les termes déictiques (qui renvoient à la situation), anaphorique (qui renvoient à ce qui a été dit avant) et cataphorique (qui renvoient à ce qui va être dit après). L'utilisation des temps verbaux fait aussi l'objet d'un intérêt particulier. Dans l'énoncé « Je suis absente tout l'après-midi », on distingue par exemple le temps de l'énonciation (quelques secondes) et le temps linguistique (plusieurs heures). Du point de vue sémantique, nous travaillons dans la lignée de « la construction dynamique du sens », cadre théorique initialement proposée par de Victorri et Fuchs (1996), en nous intéressant à la façon dont un terme prend son sens au sein d'un énoncé. Cette théorie considère que le sens d'une unité linguistique dans un énoncé donné est le résultat de l'interaction entre un apport sémantique constant associé à cette unité, *son noyau de sens,* et le contexte d'énonciation de cette unité. Par contexte d'énonciation, nous entendons aussi bien le co-texte, c'est-à-dire les autres unités linguistiques présentes dans l'énoncé que la situation extralinguistique dans laquelle cet énoncé est proféré. L'analyse subséquente consiste donc à repérer les termes sémantiquement marquants dans les énoncées et à mettre au jour les interactions qu'ils entretiennent avec le contexte. Celles-ci sont de deux types : d'une part l'influence des autres unités linguistiques, y compris syntaxiques, présentes dans l'énoncé et d'autre part les phénomènes sémantiques présidant aux changements ou à la création de sens. Pour cela, l'attention est portée sur les relations lexicales, comme la synonymie et l'antonymie et les processus sémantiques de changement de sens comme la métonymie ou la paraphrase. Cette analyse sémantique a un double objectif :

- d'une part, caractériser *a priori* la polysémie des unités linguistiques en jeu (les différents sens possibles « hors énoncé » et les liens qu'ils entretiennent entre eux). Par exemple, dans la situation présentée ici, on s'intéresse particulièrement aux noyaux de sens et champs lexicaux des mots *symétrie* et *symétrique*. En particulier, dans une lignée vygotskienne, l'analyse des sens courants de ces mots est mise en relation avec les sens mathématiques dégagés par l'analyse logique et permet ainsi une analyse *a priori* plus complète et plus fine.

- et, d'autre part, mettre au jour les contraintes dans la construction du sens de cette unité au sein d'un énoncé (Venant 2008). On élargit ici le cadre d'étude, en repérant non seulement les unités relevant des champs lexicaux établis *a priori*, mais également les phénomènes de création de sens en contexte pouvant mener à une utilisation *a posteriori* d'unité lexicale issue de champs voisins. La langue est vivante et elle nous fournit aussi beaucoup de processus permettant de créer des nouveaux sens en contexte, toujours apparentés au noyau de sens mais s'en éloignant sensiblement. Ainsi, dans la séquence d'enseignement que nous avons observée, l'enseignante emploie le terme *coller* pour inviter les élèves à superposer des figures symétriques : « quand on les colle, on voit bien que les ailes en dessous dépassent ». Ce sens ne fait pas à proprement parler partie des sens prévisibles pour *coller* mais découle de l'interaction du contexte et du noyau de sens de ce verbe. L'analyse de la polysémie de *coller* permet par exemple de relever et d'analyser ce détournement de sens. Le phénomène utilisé relève de la métonymie, c'est-à-dire que l'enseignante désigne la totalité de l'action (retourner les figures puis les superposer) par le seul processus final (*coller* au sens de *plaquer*). L'émergence en contexte de ce sens inhabituel pour *coller* reflète, au sein du discours, l'émergence d'un nouveau Mode de Fréquentation de figure symétrique. Une dynamique sémantique est mise au jour : dans une phase précédente de l'activité, le mot *coller* est en effet employé aussi bien par les élèves que par l'enseignante, dans le sens cette fois de « rapprocher et joindre deux choses ensembles ». L'analyse de cette dynamique constitue un accès par le langage à la dynamique d'évolution des Modes de Fréquentation correspondants.

Cependant, puisque c'est l'activité langagière, et surtout son rôle dans la négociation des Modes de Fréquentation, qui nous intéressent, il convient de prendre en compte le fait « que les énoncés ne se présentent pas comme des phrases ou des suites de phrases mais comme des textes. Or un texte est un mode d'organisation spécifique qu'il faut étudier comme tel en le rapportant aux conditions dans lesquelles il est produit. Considérer la structure d'un texte en le rapportant à ses conditions de production, c'est l'envisager comme discours ». (Grawitz 1990). Bien qu'il n'y ait pas unanimité en linguistique autour de la notion de discours, notre ancrage dans la linguistique énonciative nous a naturellement mené vers les travaux de Kerbrat et Orecchienni (2005). Nous retenons de ces auteurs l'idée de nous appuyer sur la description linguistique pour dégager la dynamique et la structure du discours aussi bien d'un point de vue hiérarchique (décomposition en unités de discours et articulations de ces unités) que fonctionnelle (repérer les moments de négociation, caractériser les rôles joués par les locuteurs, dégager les thèmes et les moments de recomposition des objets de discours). Ce type d'analyse permet par exemple de repérer et de mieux comprendre les moments de formulation des consignes, les effets de sens produits par le déroulement même de l'interaction langagière, l'induction d'attente chez les apprenants ou encore la gestion de la subjectivité. Le but ultime de l'analyse est ici de comprendre comment la dynamique langagière s'inscrit dans la double dynamique d'évolution et de transformation des Modes de Fréquentation et son rôle dans le processus d'inter-influence entre les trois dimensions (agir-parler-penser) qui en est le moteur.

Enfin, nous décrivons maintenant dans la partie 1.4, la dernière dimension de notre cadre d'analyse, celle d'une analyse métaphorico-conceptuelle des échanges langagiers se produisant grâce aux caractéristiques métaphoriques qui émergent des objets mathématiques (Barrera-Curin 2013 ; Nuñez & Margethis 2014).

1.4 Une approche métaphorico-conceptuelle des échanges langagiers

L'agir-parler-penser en tant qu'unité (Jaubert et al. 2012) permet de rendre compte de l'activité mathématique de l'élève et de l'enseignant au cœur d'une communauté scolaire au sein de laquelle leurs agir-parler-penser s'articulent dans la co-construction « d'un positionnement énonciatif attendu » (*Ib.* 2012). En conséquence, la prise en compte de cette unité inspire fortement une analyse des échanges verbaux concernant le langage parlé comme « outil de négociation » et la langue comme « réservoir intériorisé des signes partagés par une communauté » (*Ib.* 2012). De fait nos analyses didactiques préalables concernent des actions matérielles qui s'accompagnent souvent de l'analyse des dits échanges verbaux (Barrera-Curin 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal 2015).

Néanmoins, tel que nous l'avons précisé dans la section précédente, l'analyse des échanges verbaux ne suffit pas pour approcher la production de sens des objets de savoir ; elle mérite d'être articulée avec une analyse de langages, plus précisément, de formes de langage mettant en jeu des gestes, des éléments visuels ou encore des métaphores. Ce positionnement enrichit notre interprétation de cette unité qui est l'agir-parler-penser une figure symétrique et nous invite à observer le rôle médiateur résultant de l'articulation de différentes formes de langage lors de l'émergence, production, évolution ou transformation d'un Mode de Fréquentation tout au long du processus de conceptualisation. De ce fait et étant donné le contexte mathématique en question – la géométrie – et le contexte proposé par la situation proposée exploitant la relation entre *figure symétrique* et *un papillon* (situation que nous présentons en détails dans la section 2), nous affinons notre approche au cœur de laquelle le processus de conceptualisation subjacent à l'activité mathématique des élèves et de l'enseignant se produirait et évoluerait grâce à une articulation de différentes formes de langage (Cosnier 1982). De manière générale, l'intervention de différentes formes de langage ainsi que leur articulation seraient favorisées par les caractéristiques métaphoriques susceptibles d'émerger des objets mathématiques en jeu.

Nos travaux précédents s'intéressant au rôle de ces caractéristiques métaphoriques (Barrera-Curin 2009 ; 2013) – émergeant en interaction dans et par la manifestation de différentes formes de langage –, rendent compte de comment l'émergence ou la production de métaphores participe au processus de conceptualisation et à l'articulation de différentes notions mathématiques et extra-mathématiques. En conséquence, nous postulons qu'une approche métaphorico-conceptuelle (Lakoff & Johnson 1980 ; Lakoff & Nuñez 2000) enrichit l'analyse des échanges langagiers se produisant au cœur des interactions entre élèves et enseignant.

Cette approche articule quelques-uns des éléments théoriques provenant de deux fondements épistémologiques différents :

- Premièrement, des éléments issus d'un cadre socioculturel et sémiotique (Vygotski 1934/1997 ; Bartolini Bussi & Mariotti 2008) où des signes – dont le langage oral, les gestes, les représentations, les artefacts… – constituent des chaines sémiotiques (Presmeg 2002 ; Walkerdine 1990) rendant compte du caractère fonctionnel ou médiatique des langages dans le processus d'apprentissage des mathématiques. Dans ce cadre, l'analyse du processus de conceptualisation dépend essentiellement de l'analyse des moyens permettant de l'acquérir. Cette analyse implique nécessairement la prise en compte du contexte social et culturel dans lequel le processus générant l'activité mentale humaine se développe — et cela en ce qui concerne la production des objets de savoir — mais aussi en ce qui concerne le contexte situé et immédiat dans lequel élèves et enseignant rencontrent ces objets culturellement produits. Dans ce contexte, nous soulignons l'importance d'un travail collaboratif dans le processus de conceptualisation étant donné que l'activité cognitive est potentialisée grâce aux échanges entre des individus qui intentionnellement collaborent pour accomplir une tâche ou pour arriver au but visé (Bartolini Bussi & Mariotti 2008).

- Deuxièmement, des éléments issus d'un cadre cognitivo-linguistique, notamment de celui s'intéressant au phénomène appelé *conceptual metaphors* (Lakoff & Johnson 1980) étroitement lié à un processus de *embodied conceptualization* jouant un rôle fondamental dans le processus de conceptualisation en mathématiques (Nuñez & Marghetis 2014) :

> Metaphors are not just rhetorical devices but powerful cognitive tools that help us to build or grasp new concepts, as well as solving problems in efficient and friendly ways (Soto-Andrade & Santander 2011, p. 736)

Dans ce cadre, la métaphore, en le disant de façon métaphorique, serait une flèche qui pointe d'un objet à un autre (Soto-Andrade 2006, p. 124). Elle opère donc un transfert de sens, d'un domaine, dit domaine source, à un autre, dit domaine cible. En suivant Lakoff et Johnson (1980), « l'essence d'une métaphore est qu'elle permet de comprendre quelque chose (et d'en faire l'expérience) en termes de quelque chose d'autre » (*Ib*. p. 151). Cela nous conduit à mettre en valeur l'existence de liens étroits entre les objets mathématiques, leurs propriétés, leur structure… et les caractéristiques de ces objets pouvant émerger ou être produites de façon métaphorique et se manifester grâce à la mise en œuvre de différentes formes de langage.

Tous les éléments mentionnés ci-dessus et leur rapport aux langages se rencontrent au cœur du processus de médiation et à ses manifestations possibles tout au long du processus de conceptualisation en mathématiques (Chiu 2001 ; Kilhamn 2011 ; Lakoff & Nuñez 2000 ; Presmeg 1992).

Dans le contexte particulier de notre recherche, nous ajoutons aux éléments d'analyse *a priori* préalablement présentés, les possibilités d'articulation de différentes formes de langage – parlée, visuelle, gestuelle, métaphorique – et les possibilités de médiation qu'elles favorisent lorsqu'il est question d'agir-parler-penser l'objet mathématique en jeu, soit la symétrie, une transformation géométrique fortement présente dans la culture française. Au cœur de cette analyse nous mettons en relation des mondes différents pouvant être intra ou extra mathématiques et nous cherchons à déterminer ce que les formes de langage en question peuvent apporter en tant que médiateurs pour activer les objets mathématiques en jeu (Davis & Mowat 2010).

D'une part, l'articulation de différentes formes de langage au cours du processus de conceptualisation de figure symétrique peut s'accompagner de l'émergence ou de la production de métaphores associées aux transformations géométriques : verbaliser la mise en relation entre deux objets symétriques en termes de *retournement, réflexion, miroir, superposition, pliage, équilibre ;* exprimer ces mises en relation à l'aide de gestes et de mouvements pour éventuellement soutenir le langage parlé, *retourner la main, effectuer un effet miroir avec les deux mains, l'acte de pointer simultanément deux objets d'un côté et de l'autre d'une zone frontière, plier et déplier les mains, etc*. D'autre part, les caractéristiques métaphoriques qui émergent de l'objet *figure symétrique* favorisent la manifestation d'interprétations culturelles permettant de justifier l'existence d'une relation de symétrie entre deux objets : *les ailes d'un papillon doivent être symétriques pour que le papillon puisse voler*.

Bien que ces métaphores soient associées aux propriétés et à la structure des objets mathématiques, elles restent situées et susceptibles d'émerger, d'être produites ou encore d'être transformées au cours de l'évolution et de la confrontation des Modes de Fréquentations de figure symétrique.

En conséquence, lorsqu'il s'agira de l'analyse *a posteriori* du déroulement effectif de la situation, nous mettrons en lumière la contingence de l'émergence ou de la production des différentes formes de langage. Par exemple, lors des interactions, les manifestations des caractéristiques métaphoriques pouvant émerger des objets mathématiques peuvent implicitement être imposées par l'enseignant – considéré comme *expert* lors de l'utilisation de métaphores de par ses connaissances des objets mathématiques en jeu –, lorsqu'il cherche à échafauder un nouveau langage théorique chez ses élèves (Sfard 1994 ; Lakoff & Johnson 1999 ; Roth & Lawless 2002).

En outre, les élèves – *novices* – et l'enseignant, pourraient, par exemple, évoquer les mêmes métaphores mais les utiliser de façons différentes. Pour les premiers, les métaphores seraient un point de référence pouvant intervenir lors de l'entrée dans un problème mathématique et aussi lors de la justification de leurs réponses. Pour les experts, les métaphores serviraient plutôt comme des échafaudages leur permettant de connecter des idées mathématiques différentes (Kilhamn 2011). Le travail des experts se situe ainsi dans un processus de mathématisation verticale (Hershkowitz & al. 1996) au cours duquel l'attention est dirigée des relations aux propriétés et des propriétés (*defining or generative properties*) aux caractéristiques des objets mathématiques (Mason 2008). En termes de Lakoff et Nuñez (2000), nous pourrions aussi parler de *grounding* ou *linking* métaphores.

Finalement, puisque les caractéristiques métaphoriques associées à la structure et aux propriétés des objets mathématiques peuvent favoriser l'émergence d'une forme de langage gestuelle, il nous semble intéressant d'observer l'éventuelle production d'un processus narratif qui coordonnerait cette forme de langage à la conceptualisation du concept mathématique en jeu (Roth & Lawless 2002). De ce fait, ces gestes métaphoriques, si nous reprenons les mots de Roth and Lawless (2002), seraient préalables à l'expression du langage théorique en jeu tout en l'enrichissant :

> from this we conjecture that certain gestures literally embody abstract concepts in two ways. First, in their materiality, gestures enact topological features of a conceptual entity that does not exist in object form. Secondly, the body of the speaker produces the gesture, literally embodying a signifier for the concept. Consequently, while students construct verbal expressions of abstract concepts, gestures and perceptually available entities take on a complementary representational function that adds additional dimensions to communication above and beyond isolated utterances. As such, communication is best understood as being distributed over three different modalities, thereby easing cognitive demands and freeing resources for evolving new forms of theoretical language. (Roth & Lawless 2002 p. 299)

1.5 Synthèse du cadrage théorique

Pour résumer, nos positionnements théoriques (parties 1.1 à 1.4) nous amènent à concevoir l'apprentissage en classe de géométrie comme un double processus d'adaptation et d'acculturation. Nous caractérisons l'activité géométrique des élèves selon le triplet (agir-parler-penser) formant un tout indissociable. Nous avons choisi de construire un cadre d'analyse autour de l'outil Modes de Fréquentation en y ajoutant une dimension sémantique, discursive et métaphorico-conceptuelle permettant une analyse plus fine de l'activité géométrique de l'élève en résolution de problème au plus près de nos préoccupations : Quelle dynamique d'émergence, d'évolution et de transformation des Modes de fréquentation de figure symétrique au cours de la situation proposée ? Quelle(s) articulation(s) et inter-influences entre les différentes dimensions agir-parler-penser dans un contexte de résolution de problème ? De façon plus concrète, tout au long de la situation mise en œuvre, nous cherchons – grâce à l'analyse de différentes formes de langage (parlée, gestuelle, *etc*.) – ce qui se joue, se construit et se transforme au cours des interactions entre élèves et enseignant.

Nous cherchons à mettre au jour et à caractériser les différentes phases du discours et les rôles joués par les différents interlocuteurs dans la situation observée. Étudier les manières de parler nous conduits à définir le langage parlé comme un lieu de signification et négociation (Jaubert & Rebière 2012), un lieu qui est enrichi, de façon permanente, par d'autres formes de langage. Nous proposons, en conséquence, une analyse transversale, prenant en compte toutes ces formes de langage et renforçant ainsi l'unité des trois dimensions considérées ; celle-ci se réalise au niveau langagier et inclue une analyse métaphorico-conceptuelle à partir des caractéristiques métaphoriques susceptibles d'émerger des objets mathématiques en jeu (Barrera-Curin 2013, Nuñez & Marguetis 2014). Ces caractéristiques peuvent, tel que nous l'avons déjà mentionné, échafauder la production du langage théorique visé chez les élèves (Sfard 1994 ; Roth & Lawless 2002) grâce à l'émergence, par exemple, des gestes ou des métaphores qui lui seraient préalables.

Notre méthodologie d'analyse se déroule en deux temps :

- une analyse *a priori* (partie 2) en termes de modes d'agir-parler-penser, enrichie d'une analyse lexico-sémantique (étude de la polysémie des mots par exemple) et métaphorico-conceptuelle ;

- une analyse *a posteriori* (partie 3) en termes de Modes de Fréquentation de figure symétrique, enrichie d'une analyse sémantique et discursive, et métaphorico-conceptuelle.

L'analyse *a priori* a pour objectif de nous donner des indices pour retrouver en contexte les manifestations effectives des façons d'agir-parler-penser un objet mathématique afin de nous permettre de décrire les inter-influences entre ces trois dimensions dans ce contexte de résolution de problème géométrique. Dans la section 3 de l'article, nous présentons les analyses de deux moments de la séance observée. Le premier moment (partie 3.1) porte sur l'émergence et la négociation d'un premier Mode de Fréquentation de figure symétrique et, le deuxième, sur la dynamique d'évolution vers un nouveau Mode de Fréquentation de cet objet mathématique, idoine et partagé (partie 3.2). Nous rendons ainsi compte de la dynamique d’évolution et d’articulation de significations se produisant dans et par les langages tout au long de la séance.

2. Éléments d’analyse préalable et d’analyse *a priori* de la situation

La situation didactique qui a inspiré notre recherche a été expérimentée dans une classe de CE1 (élèves entre 7 et 8 ans) à Bordeaux et a pour objectif de provoquer la rencontre avec l’objet mathématique *figure symétrique*. Cette situation a été choisie par l’enseignante qui l’a empruntée à l’ouvrage de Fénichel, Pauvert et Pfaff (2004). Nos analyses portent sur deux des trois phases de la situation réalisées par l’enseignante et ses élèves pendant deux séances de 45 minutes. Nous précisons que nous n’avons ni proposé ni analysé la situation de façon préalable à sa mise en œuvre. Nous avons choisi d’analyser cette séance dite de « classe ordinaire » car elle s’est avérée intéressante et pertinente dans le cadre de notre recherche de par l’objet mathématique en jeu ainsi que par la richesse des échanges langagiers repérés *a posteriori* correspondant à ceux qui seraient susceptibles d’émerger dans toute séance de classe ordinaire. L’objectif général de la situation est d’approcher de manière perceptive (non instrumentée) le fait que la symétrie se définit par rapport à une droite (figure constituée de 2 parties et position de la droite par rapport à ces deux parties). Nous décrivons brièvement les enjeux de ces deux phases dans la partie 2.1. L’analyse *a priori* que nous proposons dans la partie 2.2 se veut conforme au positionnement théorique présenté dans la partie 1 et accorde donc une place essentielle à la manifestation de différentes formes de langage au cœur des modes d’agir-parler-penser des élèves et de l’enseignante.

2.1 Déroulement de la situation observée et premiers éléments d’analyse *a priori*

Phase 1 : des moitiés de papillon distinguables visuellement

L’enrôlement des élèves dans la séance observée se fait par une discussion collective à partir de l’affichage de deux photographies de papillons au tableau. Il s’agit de discuter simplement de leurs ressemblances et de leurs différences, et non pas de faire déjà émerger l’idée de symétrie. Chaque élève reçoit ensuite deux feuilles distinctes avec des moitiés de papillons distinguables visuellement (annexe 1) : les variables didactiques de cette première phase portent sur la forme des ailes et la longueur des corps des papillons. Tous les papillons sont inscrits dans des rectangles de mêmes dimensions, identifiés soit par un chiffre soit par une lettre. La tâche de l’élève consiste à retrouver perceptivement les deux moitiés constituant un même papillon et à noter les résultats dans un tableau (un modèle du tableau est laissé affiché, les élèves ont à leur charge de le recopier et de le compléter dans leur cahier de brouillon). Le fait de laisser les deux moitiés de papillon sur une même feuille, sans autoriser les élèves à découper ou à plier, aurait favorisé l’apparition de stratégies basées uniquement sur des critères visuels portant sur la forme et la taille, or cela n'a pas été le choix de l'enseignant qui a préféré distribuer directement deux feuilles distinctes et a autorisé le recours aux ciseaux. La mise en commun s'organise alors à partir des propositions des élèves.

Phase 2 : des moitiés de papillon non distinguables visuellement

La deuxième phase de la situation (annexe 2) a pour but de mettre en évidence l'inefficacité des procédures visuelles permettant pourtant de réussir la tâche dans la phase 1. Les élèves reçoivent la moitié gauche d'un papillon et leur tâche consiste à retrouver parmi six moitiés droites laquelle permet de former le bon papillon. Cette fois, les valeurs des variables didactiques retenues ne permettent plus de discriminer visuellement les moitiés de papillon : les ailes ont une forme et une taille proches et les longueurs des corps des papillons semblent identiques. Une première mise en commun permet de mettre en échec les procédures purement visuelles et approximatives pour avancer vers l'utilisation de la transparence du papier comme le moyen permettant de rencontrer la procédure souhaitée de retournement puis de superposition.

Dans la section suivante, nous décrivons *a priori* des modes d'agir-parler-penser (selon la méthodologie décrite dans la partie 1) dans le contexte de cette situation, en fonction des connaissances géométriques des élèves à ce niveau scolaire.

2.2 Une analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser de figure symétrique

Conformément à ce que nous avons annoncé dans la partie 1, en prenant appui sur les travaux de Duval (2005) et plus généralement sur ceux du groupe de Lille ainsi que d'autres travaux portant sur la symétrie (déjà cités précédemment), nous considérons qu'il existe différentes conceptions de la symétrie qui n'impliquent pas la même vision de la figure en jeu (ici la figure est *un papillon)* et que la mobilisation de tel ou tel instrument relève d'une façon spécifique de voir la figure (et réciproquement). En outre, tel que Perrin-Glorian, Mathé et Leclerq (2013) le précisent, les rapports aux figures géométriques résultent des pratiques déjà produites dès l'école maternelle et peuvent trouver leur origine, par exemple, dans un travail avec des instruments mais aussi dans la reproduction de figures par assemblage, superposition ou juxtaposition. Ces rapports peuvent se produire bien plus tôt et évoluent puisqu'il y a toute une expérience sensible et donc un rapport intuitif et métaphorique au monde extra-scolaire que nous ne pouvons ignorer ici compte tenu du fait que la figure en jeu (un papillon) est empruntée à la vie réelle.

Nous pouvons décrire *a priori* des modes d'agir-parler-penser de figure symétrique, dans le contexte de la situation de classe observée :

- Un exemple de mode d'agir-parler-penser *a priori* (phase 1, annexe 1):

Dans le contexte de la phase 1 de la situation (annexe 1), *penser* une figure symétrique revient à porter un regard spécifique sur les figures en jeu, ici des moitiés de papillon, rendant compte d'un mode d'appréhension de la figure et des propriétés la constituant (Perrin et al. 2013). Nous pouvons reprendre l'exemple déjà cité dans la partie 1 qui consiste *en la mise en correspondance de sous-éléments correspondants (soit de dimension 2 si on considère des éléments de surface du papillon comme un bout d'ailes par exemple soit de dimension 1 si on considère des contours de surface délimitant un bout d'ailes par exemple ou encore les antennes) à partir de deux moitiés d'un même papillon, en fonction de critères visuels de forme ou de taille. L'élève se suffit de la perception pour attribuer des valeurs à ces critères de comparaison (éventuellement en juxtaposant les deux moitiés de papillon) dont la façon de parler dépend donc de cette façon de voir et d'agir (et réciproquement).*

Sans détailler l'intégralité de l'analyse lexicale des termes *symétrie* et *symétriques* telles que nous l'avons menée *a priori*, disons simplement qu'elle permet de dégager différents sens courants, pour *symétrie*. Celui d'entre eux, qui correspond le mieux au mode d'agir-parler-penser décrit ici peut être caractérisé, par exemple, par cette définition issue de TLFI : « En parlant d'objet animé ou inanimé : **Correspondance exacte** de forme, de grandeur, de position entre les éléments d'un même ensemble **de part et d'autre** d'un axe, un plan ou un point. ». C'est ce sens que l'on retrouve dans des expressions comme *la symétrie d'un visage* ou *d'un cristal* ou encore lorsque l'on parle d'objets *se faisant symétrie* (sur une cheminée par exemple). Ce sens également est caractérisé par les champs lexicaux de l'exactitude et de la similitude. On parlera ainsi de *belle symétrie*, de *symétrie parfaite* ou encore de *symétrie imparfaite*. Ce sens se construit en effet beaucoup par antagonisme avec l'antisymétrie, et ainsi que la définition le décrit, sur des critères de forme, de grandeur et de position.

En termes d'analyse *a priori*, on peut donc supposer qu'à ce stade de l'activité, les élèves sont encore fortement ancrés dans le langage courant, même si l'activité de comparaison qu'on leur demande de verbaliser s'inscrit plus dans le domaine mathématique (il est assez rare d'avoir à expliciter dans la vie courante pourquoi on ressent quelque chose comme relevant ou non de la symétrie). On s'attend donc à voir émerger dans le discours des élèves et de l'enseignante des comparaisons du type « *plus grand que / plus petit que* ». Cette analyse *a priori* prendra tout son intérêt *a posteriori* car permettra de pointer les décalages de sens en fonction des unités linguistiques repérées. En outre, pour faire le lien entre analyse lexicale et logique, on peut anticiper que les termes employés tout en relevant du langage courant rendront compte du fait que la relation de symétrie est conçue de façon binaire ou ternaire (selon que la zone frontière entre les deux moitiés de papillon est prise en compte dans le discours) et pourront donc prendre des formes telles que : « exactement pareil de chaque côté » « même forme » « même taille » ou renvoyer directement à une relation de comparaison. Il s'agit ici d'une première approche vers la métaphore de l'*équilibre* pour exprimer ce qui serait symétrique. Les formes de langage exprimées par les élèves ou par l'enseignante, associées à l'émergence de cette métaphore – parlée, telle que mentionnée ci-dessus ou gestuelle, *l'acte de pointer simultanément deux objets d'un côté et de l'autre d'une zone frontière, effectuer un effet miroir avec les deux mains…* – viendraient agir comme des *médiateurs* articulant ainsi le mode d'agir-parler-penser décrit ici avec celui que nous présentons par la suite.

- Un autre exemple de mode d'agir-parler-penser *a priori* (phase 2, annexe 2):

Compte tenu du nouveau milieu, le mode d'agir-parler-penser décrit précédemment ne peut plus suffire *a priori* pour résoudre la tâche. On peut alors décrire un autre mode d'agir-parler-penser : celui-ci consiste cette fois à reconnaitre une figure symétrique (autrement dit un papillon en entier) si et seulement si la moitié d'un papillon est superposable avec une autre moitié, considérée comme sa retournée. Cette façon d'agir ne consiste plus à tenir compte que de certains sous-éléments mais de **tous** les éléments de la figure qui sont mis en correspondance « totale » par cet acte de superposition (contrairement au précédent mode d'agir-parler-penser *a priori*). Il s'agit donc cette fois de prendre en compte tous les éléments de dimension 1D et 0D puis de vérifier que le tout, constituant donc une surface (de dimension 2D), forme bien un papillon. Cette mise en relation des éléments est définitivement ternaire car la superposition n'aura de sens que si celle-ci se fait le long de l'axe de symétrie (représenté ici par l'un des côtés du rectangle qui encadre les papillons).

Cette conception de la symétrie s'éloigne sensiblement des sens courants repérés par l'analyse lexicale. Il s'agit en fait d'une transition d'un concept courant vers un concept plus savant, plus abouti mathématiquement. On peut cependant imaginer que cette transition va s'appuyer sur un sens courant différent de celui décrit dans le précédent mode d'agir-parler-penser. La nécessité d'intégrer les deux moitiés symétriques en un tout passe par la mise en œuvre du sens premier de « symétrie » en tant que « Rapport harmonieux de grandeur, de forme, de position que les différentes parties d'un ensemble ont entre elles et avec leur tout ». L'avancée vers le concept savant se fera aussi par l'intégration au champ lexical de la symétrie de nouveaux mots comme « *superposer* » ou « *retourner* » peu impliqués dans les usages quotidiens. Dans ce contexte, des gestes faisant appel à une *réflexion* viendraient soutenir ou encore fonder le langage parlé des élèves ou de l'enseignante. Ces gestes – *retourner la main*, *plier et déplier les mains…* – seraient susceptibles d'émerger grâce aux caractéristiques structurales des objets mathématiques en jeu permettant de *se représenter ou de se créer une image métaphorique* de la *symétrie comme une transformation* et du *symétrique comme une superposition exacte*.

Tel que nous l'avons déjà mentionné dans la section précédente, les caractéristiques métaphoriques de l'objet figure symétrique viennent favoriser la manifestation d'interprétations culturelles extra-mathématiques qui permettraient d'approcher une relation de symétrie entre deux objets (les métaphores traversent les frontières disciplinaires !). En conséquence, l'articulation de ces caractéristiques – équilibre, pli, réflexion… – favoriserait l'explicitation de mises en relation entre les papillons dessinées et les caractéristiques des ailes des papillons réels leur permettant de voler.

L'analyse *a priori* en termes d'agir-parler-penser de figure symétrique, nous donne ainsi des points de repères nous permettant d'identifier les mouvements de négociations et de transformations de significations du concept de figure symétrique au regard de ces trois dimensions, au cours de la résolution du problème posé. Autrement dit, nous sommes en mesure maintenant de repérer les différents composants des Modes de Fréquentation de figure symétrique au cours de la situation proposée et d'étudier leur dynamique d'évolution, ce qui est l'objet de la partie 3.

3. Dynamique d'évolution d'un Mode de Fréquentation de figure symétrique

Nous détaillons ici l'émergence et la négociation d'un premier Mode de Fréquentation de figure symétrique (durant la phase 1) pour ensuite nous attarder sur la dynamique d'évolution vers un nouveau Mode de Fréquentation de cet objet mathématique (durant la phase 2), témoignant ainsi de la construction et des négociations de significations se produisant tout au long de la séance.

3.1 Négociation d'un Mode de Fréquentation de figure symétrique

Au cours de la première phase de la situation (annexe 1), un premier Mode de Fréquentation de figure symétrique émerge. L'objectif de cette section et de le décrire et d'expliciter les mécanismes de sa co-construction et de son évolution. La tâche, rappelons-le consiste à apparier deux moitiés de papillon, l'une désignée par un chiffre, l'autre par une lettre. La co-construction du Mode de Fréquentation en question se produit dès la mise en correspondance d'une lettre avec un chiffre dans le tableau suggéré par l'enseignante. Le Mode de Fréquentation de figure symétrique que nous allons présenter et caractériser ici n'est pas le seul à émerger durant les phases de recherche individuelles ou de mise en commun, mais si nous avons choisi de nous attarder sur celui-ci c'est parce qu'il va être négocié et partagé avec les autres élèves et va servir de base pour la suite du travail (et donc la phase 2).

Lors de la première mise en commun, après la première phase de recherche de la phase 1, l'enseignante relève dans le discours, une situation problématique afin de montrer la nécessité de revenir sur l'agir :

> 89[5] Ens. : tu as trouvé le C, bon… Alors apparemment [elle montre le tableau], là vous êtes d'accord à peu près tous sur ces lettres-là, d'accord sauf ici [elle pointe le cinq qui a été associé à B et à C] on sait pas trop... Alors, ben, comment vous avez fait, comment vous pouvez être surs que c'est bien la bonne moitié de papillon… […]
>
> 97 Ens. : parce que j'aurais pu faire ça aussi [elle met la moitié cinq contre une autre moitié] et dire que c'était la bonne euh, j'aurais pu dire bon beh c'est bon ça ressemble à…, c'est un papillon, non ?
>
> 98 Élèves : oui…
>
> 99 Ens. : j'ai mis le cinq avec le A, et en fait c'est un c'est un bon, c'est le bon, moi je peux dire que c'est le bon, c'est un papillon, hein ? [des élèves demandent la parole, elle continue à parler sans s'interrompre]

En évoquant le faire dans le dire, elle revient explicitement sur la nature des objets de discours dont il est question : les moitiés de papillon et non plus les lettres et des chiffres qui ont servi jusqu'à présent à les désigner de façon métonymique. S'engage alors une négociation des critères de validation pour des nouveaux modes d'agir. L'enseignante pousse les élèves à changer de vision et à passer d'une vision perceptuelle globale (*c'est bon ça ressemble à…, c'est un papillon, non ?*) à une vision plus locale portant sur les contours de surface, les lignes. L'emploi du verbe faire (*comment vous avez fait* ?) centre le discours sur l'action et a pour but d'engager les élèves dans une verbalisation des procédures et critères qu'ils ont employés :

> 109 Yann : je sais, maitresse !
>
> 110 Ens. : qu'est-ce qui a la même forme ?
>
> 111 Él : les papillons et les lettres, non.

C'est la première fois dans la séance qu'apparaît explicitement le critère de *même forme*. L'enseignante porte discrètement l'emphase sur ce terme en le reprenant de façon interrogative (*qu'est-ce qui a la même forme* ?). Son but est de faire parler les élèves sur des critères portant non seulement sur la taille mais également sur la forme. On relève cependant une indétermination sémantique sur le mot *forme*. Le contexte trop réduit empêche de lever l'ambigüité de l'expression *c'est la même forme*, beaucoup de sens sont possibles aussi bien pour *c'est* que pour *forme*. Nous observons d'ailleurs une interprétation possible donnée par un élève en ligne 111 qui propose son interprétation de *c'est* (il répond à la question *qu'est ce qui a la même forme*). Il donne à *c'est* un sens global dans le contexte général de la tâche et énumère les parties à mettre en correspondance. Chez lui, la métonymie est encore bien ancrée. Il y a d'une part les *papillons*, terme qui désigne les moitiés de papillon

[5] Dans tous les extraits de verbatim, nous soulignons les éléments significatifs des échanges développés dans l'analyse.

repérées par un chiffre, et d'autre part les *lettres*, terme désignant les moitiés désignées par une lettre.

Un élève, Yann, demande alors à passer au tableau car il n'a pas d'autre moyen que de convoquer son mode d'agir pour décrire son mode de penser et le négocier avec la classe.

> 112 Ens. : lève la main… Yann ?
>
> 113 Yann : ben en fait, moi, bah, ce qui a la même forme c'est que, imaginons, (il se lève et vient au tableau) en fait c'est si on le met par exemple ce papillon, cette moitié de papillon avec la A (il met la moitié cinq contre une autre moitié pendant qu'il parle) je suis d'accord que ça fait bien un papillon.
>
> 114 Ens. : mais oui.
>
> 115 Yann : mais le seul problème, c'est que en fait c'est pas du tout le même dessin.
>
> 116 Ens. : c'est pas le même dessin. C'est-à-dire…

Yann développe l'idée qu'il ne suffit pas de travailler sur l'allure générale du papillon : *d'accord ça fait bien un papillon […] mais c'est pas du tout le même dessin.* La reformulation de *même forme* (ligne 113) en *même dessin* (ligne 116) correspond à un glissement discursif de l'objet papillon vers sa représentation 2D. Cela met en évidence le fait que les objets mathématiques peuvent faire émerger dans le discours la structure d'expériences physiques, corporelles et perceptuelles dont ils héritent (Nuñez & Marguetis 2014) et qui se manifestent en tant que *médiatrices* lors de la production sociale de l'objet mathématique en jeu.

La négociation de « nouveaux » critères de comparaison s'appuie sur un Mode de Fréquentation précédemment accepté, mettant en jeu des critères de taille et de forme. Yann reprend par exemple la comparaison des tailles (*c'est plus grande*) pour avancer dans son discours et raffiner ce critère en *exactement les mêmes*. Cette précision d'ordre lexical traduit un changement dans l'agir, puisqu'il s'agit désormais de réaliser une comparaison *en tout élément* de la partie considérée (ici les ailes et les antennes) :

> 117 Yann : et bien, [il montre des parties du dessin] elle déjà c'est plus grande voilà et puis elles ont pas les mêmes antennes. Alors moi j'ai barré [il fait le geste de barrer la moitié 5].
>
> 118 Ens. : oui…
>
> 119 Yann : à chaque fois j'ai essayé. Et à un moment je suis tombé sur le 5 [il remet ensemble les moités A et 5]. Je l'ai fait et là j'ai vu que c'était exactement les mêmes antennes, exactement les mêmes ailes [il montre en même temps sur le dessin] et j'ai dit c'est là.
>
> 120 Ens. : d'accord, c'est les mêmes antennes et les mêmes ailes où ?

> 121 Yann : euh, ici par exemple, c'est les mêmes antennes [il passe plusieurs fois son doigt sur chaque antenne] et là ben il a les mêmes ailes <u>parce que là, y a ça</u> [il passe son doigt sur une partie de l'aile] mais aussi au moment, je pense qu'avec certains peut-être qu'ils sont tombés dans le piège du numéro 2.

De nombreux déictiques accompagnent cette nouvelle façon de parler, ainsi que des gestes symétriques par rapport à la zone où sont collées les deux moitiés de papillon. Ces gestes décrivent une nouvelle façon d'agir qui prend en compte des éléments très locaux se correspondant exactement d'un côté et de l'autre. La relation ternaire est *incorporée* : l'axe de symétrie est pris en compte dans les gestes puisqu'il marque la zone de séparation des deux côtés considérés mais sa désignation n'est pas encore effective dans le langage oral. Le mode d'agir de Yann débouche sur un enrichissement lexical (*exactement*) traduisant une nouvelle façon de penser les figures symétriques. Il s'agit désormais de la mise en relation de deux objets de dimension 1D ou 0D par rapport à une zone frontière définie. Nous observons ainsi une intrication très forte entre les dimensions agir, parler et penser, débouchant sur l'émergence et la négociation d'un Mode de Fréquentation de figure symétrique médié par des nouvelles structures d'expériences physiques, corporelles, perceptuelles et langagières. En résumé, ce premier Mode de Fréquentation peut être caractérisé de la manière suivante : *deux figures séparées et juxtaposées par l'action de découpage ou de pliage par rapport à l'un des côtés des rectangles mis bord à bord. Il s'agit d'une comparaison visuelle, voire gestuelle en les pointant du doigt, de sous-éléments de surface (1D ou 0D) correspondants par des critères portant sur la forme et la taille que l'on met en relation (relation binaire ou ternaire incorporée) par rapport à une zone (d'un côté et de l'autre). Les manières de parler rendent compte de cette relation : même forme, plus grande…, exactement les mêmes ailes, exactement les mêmes antennes, etc.*

Ce Mode de Fréquentation de figure symétrique a été négocié et adopté par l'ensemble des élèves de la classe. Il est cependant destiné à évoluer tout au long de la séance pour finalement inclure la notion de superposition qui est l'objectif de la séance. Dans la section suivante, nous cherchons à caractériser cette dynamique d'évolution toujours selon les trois dimensions agir-parler-penser caractérisant l'activité géométrique des élèves.

3.2 Vers un autre Mode de Fréquentation de figure symétrique stabilisé

Un moment fort de cette dynamique correspond au passage à la phase 2 de la situation (annexe 2). L'enseignante propose la nouvelle tâche et la décrit oralement :

> 242-244 Ens. : donc je vais vous distribuer un pauvre papillon qui a perdu sa moitié [elle montre la moitié à la classe] on n'a donc qu'un demi papillon, qu'une moitié de papillon et il va falloir retrouver… la moitié // Il va falloir retrouver d'accord parmi toutes ces moitiés [elle montre et c'est sur une autre feuille] il va falloir

trouver celle qui / y en a qu'une celle qui va avec cette moitié /// Donc je répète je vais d'abord vous donner une moitié de papillon, il va falloir retrouver la bonne moitié qui va avec cette moitié.

Le milieu a changé mais reste dans le contexte des papillons. Il est maintenant composé d'une moitié gauche et de six moitiés droites possibles qui se ressemblent de façon globale et locale. Le Mode de Fréquentation de figure symétrique construit et partagé dans la tâche précédente va être mis en défaut car il ne peut plus suffire *a priori* pour résoudre cette nouvelle tâche. Il va donc être intéressant de voir comment *le agir* et *le parler* s'inter-influencent grâce à l'articulation de différentes formes de langage afin de pouvoir produire une (nouvelle) manière partagée d'agir-parler-penser de figure symétrique dans ce nouveau contexte (et milieu).

Confrontation de résultats divergents

On relève tout d'abord une première rétroaction perceptive d'un élève. Elle ne sera ni reprise ni relancée mais suggère un problème à venir :

250 El : là c'est <u>tous les mêmes.</u>

En effet si ce sont tous les mêmes comment les différencier en appliquant les critères de forme et de taille précédemment négociés ? Cette première rétroaction n'est pas suffisante mais elle permet aux élèves de s'engager dans la résolution de la tâche. Aussi le Mode de Fréquentation actuel de figure symétrique permet-il de résoudre la tâche de façon individuelle mais ne permet pas de départager les différentes réponses. Ce qui pose problème c'est la confrontation de tous les résultats divergents. Cette confrontation se fait dans le langage parlé :

254 à 263 Él. : c'est le F

Él. : non

Él. : si c'est le F

Él. : t'as vu

Él. : c'est le C, le C !

Él. : montre

Él. : le A

Él. : le E

Él. : le F

Él : non c'est pas le F [face caméra : l'élève a découpé la moitié de papillon et l'a mise à côté des autres moitiés des autres papillons, semble tester une à une les moitiés]

Él. : c'est le E

Él. : le F

Él. : le E

Él. : le A

Ens. : là vous êtes un peu moins sûrs quand même

À ce stade, les élèves partagent un même Mode de Fréquentation de figure symétrique, il s'agit pourtant de le remettre en cause puisqu'il ne permet pas de se mettre d'accord sur la bonne réponse. Leur moyen d'argumenter consiste à mobiliser les mêmes modes d'agir et de parler que précédemment : couper le long du bord rectangulaire, juxtaposer et comparer localement par rapport à des critères de forme et de taille (mise en relation de deux éléments locaux par rapport à une zone) afin que ce soit exactement pareil.

> 278 Él1. : [à la camera] parce que le E, tu vois là [elle suit du doigt le contour de l'aile du papillon C puis fait le même geste plus rapide sur la moitié de départ], ça va être comme ça et le F c'est plus petit [elle juxtapose la moitié du papillon sur la moitié F] là c'est plus petit
>
> 279 Él2. : [à la camera] c'est pas parce qu'elle est petite, c'est parce que là [pointe du doigt], c'est rond et puis là c'est droit [compare la moitié de départ avec la moitié F] c'est plus droit que ici [et montre la moitié F] c'est plus droit que ici

Les lignes 278 et 279 montrent à la fois comment évoluent les Modes de Fréquentation et le fait que cette évolution n'est pas simultanée. En effet, le premier élève a compris qu'il faut désormais raisonner sur des éléments plus locaux que des ailes ou des antennes. Ses critères sont encore en évolution. Il mêle des critères de forme (*comme ça*) et des critères de taille (*là c'est plus petit*). Le second est plus avancé dans son évolution. Il a compris que la taille n'est plus pertinente dans ce contexte pour comparer les éléments (*c'est* pas *parce qu'elle est plus petite*), mais qu'il faut travailler sur la forme (*c'est plus* rond). Bien que son vocabulaire soit plus précis (***rond*, *droit*** au lieu de *c'est comme ça*), il est incapable, tout comme son camarade, de désigner les éléments à comparer. Les deux élèves recourent donc à des déictiques et des gestes (*ça, là, c'est, ici*).

On se demande alors : qu'est-ce qui va faire avancer/changer/transformer les choses ?

Remise en cause du précédent Mode de Fréquentation de figure symétrique

C'est l'enseignante qui va, dans et par une articulation de formes de langage (parlée et gestuelle), mettre en défaut le Mode de Fréquentation actuel de figure symétrique en tant que moyen de contrôle. Elle cherche à engager les élèves dans une verbalisation différente de celle de la première phase. Il ne s'agit plus comme précédemment de décrire un mode d'action (*Comment vous avez fait ?*) mais d'élaborer des critères de validation (*Comment être sûr ?).*

> 301 Ens. : d'accord, sauf que… attends deux secondes… tout à l'heure quand on mettait nos moitiés de papillon… [elle fait en même temps le geste avec ces mains en les retournant et en les mettant ensemble] […] on voyait bien que, ce pauvre papillon, il a l'air d'avoir du mal à voler, d'accord ? Alors que là finalement, si on met, si on décide de, pourquoi pas de mettre, d'accord, notre moitié avec la F, bon, c'est peut-être un petit peu plus rond mais en tout cas notre papillon, bah il pourrait arriver quand même… Ça nous fait un papillon…[des élèves lèvent la main…] alors comment être sûr que c'est bien celui là / ? Comment être sûr que c'est bien ces moitiés ? [Plusieurs élèves lèvent la main] Parce que c'est quand même moins visible que tout à l'heure, on n'est pas très sûr…

Cette mise en défaut du précédent Mode de Fréquentation passe, dans le discours, par l'installation progressive d'un doute, très marqué lexicalement par les expressions *pas sûr*, *avoir l'impression*, *moins visible*. L'enseignante appuie son propos sur une autre métaphore qui émerge du concept de « symétrique ». Ses gestes mettent en évidence le fait que la symétrie est une transformation (réflexion) : *elle fait en même temps le geste avec ses mains en les retournant et en les mettant ensemble*. Cette métaphore – implicitement évoquée par les gestes de l'enseignante – cherche à influencer le discours des élèves pour coordonner la suite de leur communication. L'enseignante impose ainsi, par ses gestes, une caractéristique métaphorique qui émerge de l'objet mathématique en jeu – *la symétrie est une réflexion, le symétrique d'une figure résulte d'une réflexion* – lorsqu'elle cherche à introduire ou à échafauder comme le dirait Sfard (1994), un nouveau langage théorique chez ses élèves. En d'autres mots, il s'agit d'introduire une nouvelle manière de *fréquenter* une figure symétrique.

En outre, le fait que la pensée commune ignore les frontières disciplinaires – que les métaphores traversent facilement (Soto-Andrade 2006) (Rouche 2006) – influence spontanément les gestes de l'enseignante (experte), la conduisant à évoquer une métaphore inversée (*il a l'air d'avoir du mal à voler*) mettant en relation les propriétés mathématiques des figures symétriques avec des caractéristiques culturellement reconnues du papillon *réel* qui peut voler puisque ses ailes possèdent « exactement les mêmes caractéristiques ». En d'autres mots, la capacité du papillon à voler repose sur le fait d'avoir une paire d'ailes identiques. L'enseignante cherche ainsi à souligner, de façon implicite qu'un contrôle visuel sur l'ensemble du papillon ne suffit plus. La métaphore du vol lui sert à expliciter son propos (*parce que tout à l'heure le papillon quand on le formait si c'était pas le bon il volait pas*). Le critère d'exactitude des formes sur des ailes de même taille est difficile à vérifier de façon globale (*on a l'impression que c'est pas la même forme*). Les élèves novices, aussi bien en matière de symétrie que de métaphore, ne réussissent pas à la suivre ; ils ne peuvent pas accéder à cette articulation entre ces deux *mondes* puisqu'ils ne se sont pas encore appropriés les propriétés des figures symétriques déjà appropriées par l'enseignante. Cela oblige l'enseignante a reformuler son propos de façon explicite (*c'est moins visible que tout à l'heure*). La référence temporelle vient insister sur le fait que le milieu a changé et qu'il faut donc s'adapter.

> 308 Ens. : … alors Anna nous dit que, c'est ce qu'on a dit tout à l'heure, alors on a dit qu'il faut que ce soit la même taille et la même forme, d'accord, Oussine nous a parlé de la forme, Anna elle nous parle de la taille, il faut que ce soit la même forme et la même taille. Comment on pourrait vérifier maintenant, comment on peut être sûr…

Les élèves sont moins à l'aise pour réaliser dans l'agir et dans le dire la tâche demandée. En effet, cela se traduit par un changement de mode discursif chez l'enseignante. Elle passe d'un discours interactionnel, avec une fonction négociatrice du langage à un discours didactique entièrement à sa charge. Les rôles discursifs sont modifiés. Les élèves étaient jusqu'à présent des interlocuteurs dans une conversation animée et modérée par l'enseignante. L'enseignante devient maintenant l'oratrice principale et elle donne au langage parlé une fonction plus illocutoire, c'est-à-dire destinée à faire agir les élèves. Elle veut en effet les amener à trouver un nouveau moyen de contrôle et initie en cela une évolution du Mode de Fréquentation de figure symétrique selon les trois dimensions :

- au niveau du *parler*, elle commence par consolider les acquis lexicaux de la phase 1, c'est-à-dire les mots *taille* et *forme*. Elle utilise pour cela un procédé sémantique consistant à donner aux élèves la paternité de ce vocabulaire : *Oussine nous a parlé de la forme, Anna elle nous parle de la taille*. Les élèves n'ont de fait jamais prononcé ces mots (ils ont parlé de *plus petit, plus rond* ou *comme ça*) qui ont été introduits par l'enseignante. Ce procédé sémantique lui permet de faire entrer ce nouveau vocabulaire dans la communauté discursive de la classe. C'est aussi une façon de souligner que le vocabulaire pour parler de la symétrie est acquis et que l'enjeu de la tâche se situe dans une autre dimension.

- au niveau du *penser*, la réintroduction du mot *papillon* qui avait été éludé aussi bien par les élèves que par l'enseignante dans la phase précédente, marque un changement d'objet fréquenté. On a travaillé jusqu'à présent sur le maniement des moitiés de papillon à mettre en correspondance, les désignant la plupart du temps par leurs symboles (*on va mettre le A avec le 3*). Ce retour au mot *papillon* est le marqueur lexical du fait que l'on va désormais penser les figures symétriques comme formant un tout.

- ce changement dans le *penser* à des répercussions au niveau de l'*agir*, puisque pour valider que deux moitiés de papillon forment un tout, on ne peut plus procéder de façon visuelle et locale comme précédemment (*c'est quand même moins visible que tout à l'heure*). On cherche désormais à savoir, à être sûr que deux moitiés sont symétriques et on part donc à la recherche d'un nouveau moyen d'action sur lequel faire reposer cette validation.

L'enseignante provoque ainsi l'émergence d'un nouveau moyen d'agir unifiant les Modes de Fréquentation précédemment rencontrés. Elle les récapitule dans un premier temps (*Oussine il nous a parlé de la forme, Anna elle nous parle de la taille*) avant de les unifier (*il faut que ce soit la même forme et la même taille*). Elle fait dans le même temps évoluer le mode de rétroaction. On a focalisé sur ce qui permettait de dire que deux moitiés de papillon ne se correspondaient pas, maintenant on part à la recherche d'un mode de vérification d'un bon appariement *(Comment on peut être sûrs ?)*. Le domaine de validité du précédent Mode de Fréquentation ne nécessitait pas ce degré de précision, or, dans ce nouveau milieu, ces moyens d'agir sur la figure (mise en relation de deux sous-éléments de la figure) ne suffisent plus.

> 309 Ens. : parce que tout à l'heure le papillon quand on le formait si c'était pas le bon il volait pas, celui-là on a l'impression parce que c'est pas la même forme, mais comment on pourrait faire ? [Anna précise que c'est la même forme dans ce cas-ci]
>
> 310 Ens. : oui, c'est la même forme, c'est ce qu'on a dit. Lisa?
>
> 311 Lisa : on découpe les ailes…

Il faut donc trouver un nouveau moyen d'agir qui prenne en charge ce degré de précision (nouveaux moyens de contrôle). Toutefois ce nouveau moyen d'agir a du mal à émerger et n'apparaît pas spontanément chez les élèves. L'enseignante les amène alors de façon artificielle à adopter la façon d'agir d'un élève.

> 317 Ens. : Alors, regarde ce qu'elle a fait Lisa, elle a posé une moitié du papillon sur l'autre moitié et elle a regardé si ça allait exactement**,** en soulevant si ça se posait exactement sur l'autre [elle manipule, superpose les deux petits moitiés de papillons] si les traits étaient exactement au même endroit dessous. Essayez de faire ça… si ça nous permet de voir si c'est la bonne moitié.

Il s'agit cette fois de mettre en relation tous les éléments de la figure (1D et 0D) dans une relation de superposition (*ça se posait exactement*), afin de valider le tout (2D) ainsi formé (*C'est la bonne moitié*). On voit bien ici le jeu de déconstruction-reconstruction des éléments de la figure (2D$\leftrightarrow$ 1D$\leftrightarrow$0D, autrement dit des allers-retours entre les unités figurales de différentes dimensions) et leur nouvelle mise en relation qui nécessite une nouvelle façon d'agir dessus : *tourner, retourner, poser exactement l'un sur l'autre, superposer.*

> 340 Ens : on regarde les traits, d'accord ? S'ils vont, s'ils se… alors on appelle ça se superpose, c'est-à-dire si les traits se posent exactement sur les autres, d'accord ? Et pour bien voir qu'est-ce qu'on pourrait faire ? On pourrait regarder…
>
> 341 Ens : on voit bien que si on le colle, on voit bien que, chut ! on voit bien que les ailes en dessous elles dépassent d'accord, donc on, écoutez bien, pour que ce soit, d'accord, la bonne moitié il fallait on dit que ça se superpose, c'est à dire que ça se pose exactement dessus et qu'il n'y ait rien qui dépasse. D'accord.

Ainsi les différents éléments des précédents Modes de Fréquentation de figure symétrique ont-ils servi de points d'appui, d'échafaudage pour l'émergence et la construction d'un nouveau Mode de Fréquentation de figure symétrique pour résoudre cette tâche. En résumé, ce nouveau Mode de Fréquentation se caractérise de la façon suivante : *il s'agit de superposer une figure et sa retournée en contrôlant par rapport au bord du rectangle (l'axe de symétrie est considéré en acte) et de faire correspondre par cette relation de superposition (relation ternaire) tous les sous-éléments de la figure (2D$\leftrightarrow$1D$\leftrightarrow$0D). La façon d'en parler évolue et les termes de superposer, (re)tourner, tous les traits, exactement, dessus, dessous accompagnent ces façons d'agir (et de penser) ; on ne parle plus de forme ou de taille car ces éléments caractéristiques sont englobés par l'idée plus générale de « tous les éléments » qui se superposent.*

Conclusion

Notre recherche émerge d'un intérêt partagé autour de l'articulation de différentes formes de langage au cours du processus de co-construction de connaissances géométriques à l'école. L'élaboration d'un cadre d'analyse commun constitue l'un des premiers apports substantiels de cette recherche. En effet notre cadre d'analyse résulte d'une approche originale qui articule des outils didactiques, linguistiques et métaphorico-conceptuels. La mise en relation de différents cadres théoriques issus de différents champs disciplinaires est parfois jugée incompatible d'un point de vue épistémologique, comme ici concilier langue et langage, ou encore les points de vue individuel et social de l'apprentissage ; dans cet article nous avons essayé de mettre en évidence la richesse d'analyse qu'apporte justement ce type de décloisonnement théorique. Notre méthodologie d'analyse repose alors sur la confrontation d'une analyse *a priori* (en termes d'agir-parler-penser une figure symétrique enrichie d'une analyse lexico-sémantique et métaphorico-conceptuelle) et *a posteriori* (en termes de Modes de Fréquentation d'une figure symétrique enrichie d'une analyse sémantique et discursive et métaphorico-conceptuelle) dont nous avons largement décrit la spécificité et la complexité des rouages dans cet article.

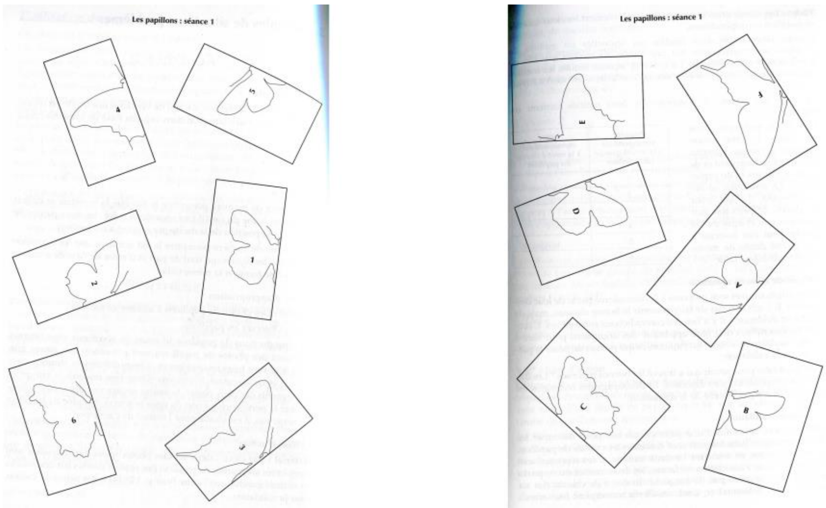
Nos questions de recherche portent sur la dynamique d'émergence, d'évolution et de transformation des Modes de Fréquentation de figure symétrique au cours d'une situation d'enseignement de la symétrie axiale dans un contexte emprunté à la vie réelle (celui des papillons). Notre objectif est de décrire le plus finement possible les relations d'inter-influences entre les différentes dimensions que nous accordons à l'activité mathématique d'un élève (autrement dit selon les trois dimensions : agir-parler-penser) en résolution de problème, grâce à l'analyse des différentes formes de langage reconnues : orale, gestuelle et visuelle. Notre positionnement théorique articule une composante sociale, médiée entre autres par des échanges langagiers, aux processus de construction d'objets mathématiques par la confrontation des élèves à un milieu didactique. En conséquence, tout au long de la situation analysée et au cœur des interactions entre élèves et enseignante, nous cherchons à mettre au jour ce qui se joue, se co-construit, se produit et se transforme dans et par la mise en œuvre de différentes formes de langage. Plus particulièrement, déjà *a priori*, nos analyses didactiques enrichies par les apports des analyses linguistiques et métaphorico-conceptuelles mettent en évidence la pluralité du champ des possibles quant aux façons de parler, et leur relation avec les façons d'agir, au delà de l'adaptation au milieu. Cela constitue un apport essentiel de notre travail et nous conduit à prendre en compte, aussi bien théoriquement qu'expérimentalement, les moyens langagiers, linguistiques et procéduraux qui participent à l'émergence et à la production de nouvelles connaissances chez des élèves de première année du primaire. Dans ce contexte, le regard que nous portons *a posteriori*, sans hiérarchie ni sur les formes de langage manifestées ni sur la tâche réalisée, nous a permis de décrire finement à travers les manifestations effectives des modes d'*agir-parler-penser* en situation, l'activité mathématique des élèves en lien avec celle de l'enseignante.

Plus précisément, notre approche met en évidence que l'analyse sémantique et l'analyse des caractéristiques métaphoriques se manifestant sous différentes formes de langage, aussi bien orale que gestuelle, renforcent la finesse de l'analyse logique, angle d'analyse qui fonde l'unité entre les différentes dimensions qui caractérisent les Modes de Fréquentations d'une figure symétrique. Par exemple, lors de la première phase de la situation, nos analyses décrivent comment les différentes façons d'*agir-parler-penser* s'inter-influencent pour converger vers un Mode de Fréquentation de figure symétrique partagé : *une figure est symétrique si deux sous-figures distinctes (2D) sont juxtaposées et/ou si des sous-éléments significatifs (1D ou 0D) sont mis en relation par des critères portant sur la forme ou la taille (relation binaire ou ternaire incorporée par des gestes). Les mots exactement et côté sont significatifs de cette mise en relation, de même que les termes : mêmes ailes ou antennes ou plus grande que/plus petite que, etc.*

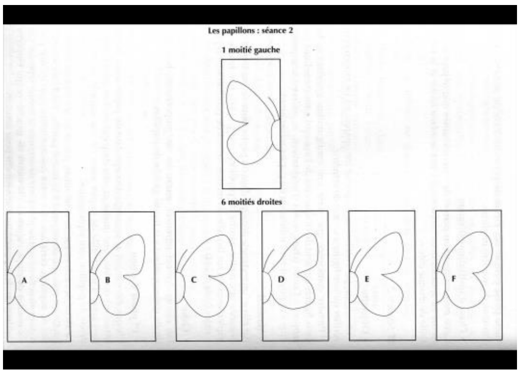
Nous observons également comment les différents éléments propres à la manifestation des premiers Modes de Fréquentation de figure symétrique servent d'échafaudage pour la co-construction d'un nouveau Mode de Fréquentation, celui-ci se manifestant lorsque les élèves sont confrontés à la résolution d'une nouvelle tâche (et à un nouveau milieu) dans la deuxième phase de la situation. Des nouvelles façons de *parler* et d'*agir* sont, de façon concomitante, négociées dans et par la mise en œuvre de différentes formes de langage, et participent de la construction d'un nouveau Mode de Fréquentation de figure symétrique idoine (retournement puis superposition de l'une des moitiés de papillon).

Ainsi, comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, un des points forts de nos analyses est de mettre en lumière l'intrication forte, sans lien de subordination, entre les caractéristiques de la situation (le caractère adidactique de la situation), les caractéristiques métaphoriques des concepts géométriques et les jeux de langages et de la langue. C'est sur cette intrication que repose le rôle de médiation de l'enseignante et celui des processus de négociation, permettant ainsi l'évolution des Modes de Fréquentation autour de l'objet mathématique en question. Nos analyses, en plus d'aborder sous un jour nouveau des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage dans un contexte de résolution de problème géométrique, ouvrent également d'autres perspectives de recherche. Le caractère spécifique et complexe de la géométrie influence fortement la nature de nos résultats : qu'en est-il dans un autre contexte que celui de la géométrie ? De même nous accordons un rôle essentiel aux caractéristiques sociales et culturelles dans l'étude des phénomènes observés : qu'en est-il dans un autre contexte culturel ? Nous avons d'ores et déjà commencé à explorer cette dernière question en comparant le déroulement de cette situation dans deux contextes différents : celui que nous venons décrire dans cet article, en France, avec celui d'une classe québécoise (Barrera-Curin, Bulf et Venant à venir). Les premiers résultats obtenus sont très encourageants et nous confortent sur la pertinence de ce que nous avons appelé précédemment le décloisonnement théorique de nos outils d'analyse. Nous poursuivons nos recherches afin d'approfondir, d'une part, l'étude des processus de médiation mis en œuvre dans et par le langage sous toutes ses formes, au cours de la co-construction d'un savoir mathématique et, d'autre part, l'influence du contexte culturel.

Annexe 1 : Extraits des supports (échelle non respectée) de la première phase de la situation (Fénichel & Al. 2004 pp.139-142)



Annexe 2 : Extraits des supports (échelle non respectée) de la seconde phase de la situation (Fénichel & Al. 2004 pp.139-142)



Bibliographie

BARRERA CURIN R. I. (2009), Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique, *Petit x*, ***85***, 5-26.

BARRERA CURIN R. I. (2013), *Étude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

BARRERA CURIN R. I., BULF C. & VENANT F. (à venir), France-Québec comparison on language practices in geometry class in primary school, *Proceeding of 13th International Congress on Mathematical Education (ICME) Hamburg, 24-31 July 2016*.

BARRIER T., CHESNAIS A. & HACHE C. (2014), Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – Revue de Recherches en Education* **54**, 175-193.

BARRIER T., HACHE C. & MATHÉ A.-C. (2014), Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N* **93**, 13 – 37.

BARRIER T. & MATHÉ A.-C. (2014) (Coord.), Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques, *Spirale, revue de recherches en éducation*, **54**.

BARTOLINI BUSSI M. G. & MARIOTI A. (2008), Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a vygotskian perspective. In L. E. et al. (Ed), *Hadbook of international research in mathematics education* (2è éd). New York and London: Routledge.

BENVENISTE E. (1974), *Problèmes de linguistique générale II*, Paris : Gallimard.

BERNIÉ J.-P. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue Française de Pédagogie* **141**, 77 – 88.

BESSOT A. (2011), *L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations*. In : C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage, 29 – 56.

BRONNER A., BULF C., CASTELA C., GEORGET J.-P, LARGUIER M., PEDEMONTE B., PRESSIAT A. & RODITI E. (Coord) (2013), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BULF C. (2008), *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

BULF C., MARCHINI C. & VIGHI P. (2013) Le triangle-Acrobate : un jeu géométrique sur les isométries en CE1 : intérêt et limites, *Grand N* **91**, 43-70.

BULF C., MATHE A.-C. & MITHALAL J. (2015), Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **35.1**, 7-36.

BULF C., MATHE A.-C. & MITHALAL J. (2014), Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education* **54**, 29-48.

CHESNAIS A. (2009), *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

CHIU M. (2001), Using Metaphors to Understand and Solve Arithmetic Problems: Novices and Experts Working With Negative Numbers, *Mathematical Thinking and Learning* ***3*****(2-3)**, 93 – 124.

COSNIER J. (1982), *Communications et langages gestuels*. In Cosnier, Coulon, Berrendonner, Orecchioni (Ed.), *Les voies du langage, communications verbales, gestuelles et animales*, Paris : Dunod, 255 – 304.

CULIOLI A., (1983-1984), *Transcription du séminaire de DEA*, Paris VII, DRL et Poitier.

DAVIS B. & MOWAT E. (2010), Interpreting Embodied Mathematics Using Network Theory : Implications for Mathematics Education, *Complicity : An International Journal of Complexity and Education* **7-1**, 1 – 31.

DUCROT O. (1972), *Dire et ne pas dire. Principes de sémantique linguistique*, Paris : Hermann.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **10,** 5 – 53.

FÉNICHEL M., PAUVERT M. & PFAFF N. (2004), *Donner du sens aux mathématiques, Tome 1, Espace et géométrie.* Paris : Bordas.

GORLIER S. (1981), Deux activités à l'école maternelle sur le temps et l'espace, *Grand N* **23**, 53-61.

GRAWITZ M. (1990), *Méthode des sciences sociales*. Paris : Éditions Dalloz.

GRELIER J.-F. (2013), *Apprentissages géométriques :* http://www.apprentissages-geometriques.com/ consulté le 26 Juin 2015.

GRENIER D. (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1 (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

HACHE C. (2013), Langage mathématique à la transition primaire/collège. Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève, *Arpeme*, 452 – 463.

HERSHKOWITZ R., PARZYSZ B. & VAN DOR MOLEN J. (1996), Space and Shape. In Bishop et al. (eds), *International handbook of mathematics education* ***1***, Rotterdam : Kluwer, 161 – 204.

JAUBERT M. & REBIÈRE M. (2012), *Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative*. In : forumlecture. ch, Plate-forme internet sur la littéracie. http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf (consulté le 06 Juin 2015)

JACOBSON R. (1957), *Shifters, Verbal Categories and the Russian Verb*. Cambridge : Mass.

JACQUET G., VENANT F. & VICTORRI B. (2005), Polysémie lexicale. In Sémantique et traitement automatique du langage naturel. Hermès, 99 – 132.

KELLER O. (2004), *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs*, Paris : Vuibert.

KELLER O. (2006), *Une archéologie de la géométrie : la figure et le monde : peuples paysans sans écriture et premières civilisations*, Paris : Vuibert.

KERBRAT-ORECCHIONI C. (2005), *Le discours en interaction*. Paris : Armand Colin.

KIERAN C., FORMAN E. & SFARD A. (2001), Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* **46-1/3,** 1-12.

KILHAMN C. (2011), *Making sens of negative numbers*. Thèse de doctorat, University of Gothenburg.

LABORDE C. (1982), *Langage naturel et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état. Université Joseph Fourier, Grenoble.

LAKOFF G. & JOHNSON M. (1980), *Metaphors we live by*, Chicago : University of Chicago Press.

LAKOFF G. & JOHNSON M. (1999), *Philosophy in the flesh: The embodied mind and its challenge to western thought*, New York : Basic Books.

LAKOFF G. & NUÑEZ F. (2000), *Where Mathematics comes from?* New York : Basic Books.

LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2010) Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. Pratiques **145-146**, 141-160.

LIMA I. (2006), *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs – Étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I, (disponible sur tel.archives-ouvertes.fr).

MASON J. (2008), Being mathematical with and in front of learners : Attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. In T. W. (series) & B. J. (Eds), *International Handbook of mathematics teacher education* **4**, Rotterdam : Sense Publishers, 31 – 56.

MATHE A.-C. (2012) Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 32-2*, 195-228.

MIYAKAWA T. (2005), *Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de la symétrie orthogonale,* thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

MORGAN, C. (2013), Language and Mathematics: a field without boundaries. In *Proceedings of the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, 2013, Antalya, Turkey, 50-67.

MOSCHKOVICH J. (ED.) (2010), *Language and Mathematics Education : Multiple Perspectives and Directions for Research.* Charlotte, NC : Information Age Publishing.

NUÑEZ R. & MARGHETIS T. (2014), *Cognitive Linguistic and the Concept(s) of Number*, In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds), *The Oxford Handbook of Number Cognition.*

PIAGET J. & INHELDER B. (1947), *La représentation de l'espace chez l'enfant,* Paris : PUF (édition 1977).

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C & LECLERCQ R. (2013), Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM* **90**, 5 – 41.

PRESMEG, N. C. (1992), Prototypes, metaphors, metonymies, and imaginative rationality in high school mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **23**, 595 – 610.

PRESMEG, N. C. (2002), Beliefs about the nature of mathematics bridging of everyday and school mathematical practices. In G. Ledger, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds), *Beliefs : A hidden variable in mathematics education ?* Dordrecht : Kluwer, 293 – 312.

ROTH W. M. & LAWLESS D. V. (2002), Scientific investigations, metaphorical gestures, and the emergence of abstract scientific concepts, *Learning and Instruction* **12**, 285 – 304.

ROUCHE N. (1999), *Formes et Mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Nivelles (Belgique) : CREM.

ROUCHE N. (2006), L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'age adulte. Synthèse du colloque : l'apprentisssage des mathématiques considéré comme un tout, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **supplement 11,** 3 – 16.

SFARD A. (1994), Reification as the birth of metaphor, *For the learning of mathematics* **14.1**, 44 – 55.

SFARD A. (2001), There is More to Discourse than Meets the Ears: Learning from mathematical communication things that we have not known before. *Educational Studies in Mathematics* **46-1/3**, 13- 57.

SFARD A. (2012), Almost 20 years after: Developments in research on language and mathematics. Review of J. N. Moschkovich (Ed.) (2010) Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, Onligne First Article (November 2012).

SOTO-ANDRADE J. (2006), Un monde dans un grain de sable : métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 123 – 147.

SOTO-ANDRADE J. & SANTANDER P. (2011), Conceptual metaphors and grundvortellungen : a case of study, *Proceedings of CERME 7*, 735 – 744.

THOMPSON A. W. (1917), *On growth and form*, Cambridge university press (édition 1992).

VENANT F. (2008), Représentation géométrique et calcul dynamique du sens lexical : application à la polysémie de livre, Larrivée P. (ed.) *Représentations du sens lexical*, *Langages* **172**, 30-54.

VENANT F. & VICTORRI B. (2001), *La synonymie comme accès à la structure sémantique du lexique adjectival et verbal du français*. Dans *Soutet O. (dir.), La synonymie*. Paris, Presses de l'Université de Paris-Sorbonne.

VERGNAUD G. (2002), *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance* in. Portugais (Ed.) La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation, *colloque GDM 2001*.
http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai2001.pdf (consulté le 06 Juin 2015)

VICTORRI B. & FUCHS C. (1996), *La polysémie, construction dynamique du sens*. Paris : Hermès.

VYGOTSKI L. S. (1934), *Pensée et langage*, Paris : La Dispute (3ème éd., 1997).

WALKERDINE V. (1990), *Mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*, London: Routledge.

WERTSCH J. V. & ADDISON STONE C. (1995), *The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions.* In J. V. Wertsch (Ed.), *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives.* Cambridge University Press.

WEYL H. (1952), *Symétrie et mathématique moderne*, Paris : Flammarion (édition 1964).

RAQUEL BARRERA-CURIN
Université du Québec à Montréal, département Éducation et Formation Spécialisées
barrera.raquel@uqam.ca
CAROLINE BULF
Université de Bordeaux, LAB-E3D, EA7441
caroline.bulf@u-bordeaux.fr
FABIENNE VENANT
Université du Québec à Montréal, département des Mathématiques
venant.fabienne@uqam.ca

VINCENT MARTIN ET MATHIEU THIBAULT

REGARDS QUÉBÉCOIS SUR SEPT DÉCENNIES DE RECHERCHE LIÉE À L'APPRENTISSAGE ET À L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITÉS

Abstract. Quebec perspectives on Seven Decades of Research on Teaching and Learning Probability. In this literature review, we present research from around the world as well as from Quebec that focused on the development of probabilistic reasoning, and on learning, and teaching of probability. We organize this review into three chronological periods: piagetian, postpiagetian, and contemporary. Through this historical overview, we can see an evolution in research moving from a majority of works issued from psychology field, primarily aimed to describe and understand the probabilistic reasoning and conceptions of individuals to research that are now mostly developed in the field of education which are related to learning, and teaching of probability in the school context. We are concluding by outlining gray areas related to teaching and learning probabilities which deserve to be enlighten in future research.

Résumé. Dans cette recension d'écrits, nous présentons de nombreux travaux de recherche internationaux et québécois qui ont porté sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. Nous organisons cette recension en trois périodes chronologiques : piagétienne, postpiagétienne et contemporaine. Ce survol historique nous permet de constater une évolution dans les travaux de recherche : passant d'une majorité de travaux issus du domaine de la psychologie, qui visent surtout à décrire et comprendre les raisonnements et les conceptions probabilistes d'individus vers des travaux qui sont maintenant surtout issus du domaine de l'éducation et qui portent sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités dans le contexte scolaire. Nous terminons en exposant quelques zones d'ombres reliées à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités qui méritent d'être éclairées par la recherche de demain.

Mots-clés. Recension, didactique des mathématiques, psychologie, raisonnement probabiliste, probabilités, apprentissage, enseignement.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 79 -115.

Introduction

Depuis plus d'un demi-siècle, de nombreuses recherches ont été réalisées sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités (Bordier, 2001; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1997; Jones & Thornton, 2005; Watson, 2006). Comme le soulignent Jones et Thornton (2005), ces recherches sont essentiellement issues de deux domaines, soit le domaine de la psychologie (dont la psychologie cognitive, développementale et béhavioriste) et celui des *mathematics education*. À cela, nous ajoutons le domaine de la didactique des mathématiques, qui se distingue des *mathematics education* à plusieurs égards (Kieren & Sierpinska, 2000), et dont sont issues des recherches franco-européennes et québécoises sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. Ces deux champs de recherche (psychologie et éducation, renvoyant à la fois aux *mathematics education* et à la didactique des mathématiques) font émerger deux orientations de recherche (Jones & Thornton, 2005) : d'un côté, les recherches en psychologie décrivent la manière dont les individus pensent sur le plan probabiliste à différents âges et dans différents contextes tandis que, de l'autre côté, les recherches en éducation tentent d'influencer directement ou indirectement la manière dont les individus apprennent les probabilités et raisonnent sur le plan probabiliste.

Plusieurs recensions anglophones des travaux de recherche liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités ont été réalisées dans un contexte international. D'abord, Shaughnessy (1992) a réalisé une importante recension des écrits scientifiques sur l'enseignement des probabilités et des statistiques (stochastique). Par la suite, des écrits comme ceux de Borovcnik et Peard (1996), de Jones et Thornton (2005), de Jones, Langrall et Mooney (2007) ainsi que de Batanero (2014) ont permis de poursuivre le travail de recension entamé par Shaughnessy (1992), à chaque fois avec des angles un peu différents.

La présente recension prend appui sur ces grandes recensions, c'est-à-dire qu'elle vise à exposer, dans les grandes lignes, l'enchainement et les orientations de nombreux travaux anglophones réalisés de par le monde. Cependant, elle se distingue par son caractère francophone et par un effort d'intégration des travaux québécois et français.

1. Considérations méthodologiques

À travers cette démarche de recension des écrits liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités, nous avons fait ce que Jesson, Matheson et Lacey (2011) appellent une recension traditionnelle de l'étendue des travaux (traditional scoping review), qui vise à dégager un aperçu de l'état actuel des recherches et des connaissances à propos d'un sujet particulier dans le but de pointer ou d'identifier des zones d'ombres dans la discipline que de nouvelles recherches pourraient chercher à éclairer.

Ce faisant, nous avons eu recours à une méthode de sélection des écrits qui s'apparente à l'échantillonnage en « boule de neige » (Beaud, 2016; Mongeau, 2011) pour cibler des ouvrages incontournables et à partir desquels nous avons identifié de nouveaux textes pertinents. Selon Beaud (2016), l'échantillonnage en boule de neige (snowball sampling) « est une technique qui consiste à ajouter à un noyau d'individus (des personnes considérées comme influentes, par exemple) tous ceux qui sont en relation […] avec eux, et ainsi de suite » (p. 268). Concrètement, nous avons lu des textes et nous avons regardé leurs références bibliographiques. De celles-ci, nous avons tiré de nouveaux textes que nous avons lus et dont nous avons scruté les références bibliographiques. Nous avons répété cette démarche à plusieurs reprises en cherchant à la rendre la plus systématique possible, sans toutefois prétendre à l'exhaustivité.

De plus, en considérant le grand nombre d'écrits ayant abordé cette question, nous avons ensuite fonctionné par choix raisonnés pour arriver à rapporter dans ce texte des écrits issus des champs de la psychologie et de l'éducation, qui ont été rédigés en français et en anglais, qui ont été publiés à travers les différentes périodes et au sein de différentes équipes de recherche, et donc, qui représentent une diversité ou une variété géographique et institutionnelle.

2. Recension historique des travaux de recherche liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités

En prenant exemple sur les travaux de Jones et Thornton (2005), nous organisons en trois périodes notre recension des différents travaux de recherche liés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités. Ces périodes correspondent à la période piagétienne (1950 à 1970), la période postpiagétienne (1970 à 1990) et la période contemporaine (1990 à nos jours). À l'intérieur de ces périodes, nous avons organisé chronologiquement les différents travaux recensés, et ce, sans chercher à présenter de confrontation entre ceux-ci. Ceci constitue un choix reposant sur la volonté de recenser largement des travaux sur sept décennies pour mettre en relief de grandes tendances dans les travaux portant sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités. Ces tendances seront présentées dans la section dédiée à la discussion sur l'évolution des travaux de recherche.

2.1. Période piagétienne (1950 à 1970)

Cette première période, qui s'étend de 1950 à 1970, est dite période piagétienne puisqu'elle a été marquée par les travaux des chercheurs Piaget et Inhelder (1951).

Ces travaux ont non seulement influencé des travaux de recherche en psychologie durant cette période, mais également des travaux de recherche dans les deux périodes subséquentes.

Piaget et Inhelder (1951) sont parmi les premiers chercheurs à s'être penchés sérieusement sur la question de l'apprentissage des probabilités. Ainsi, leurs travaux réalisés en Suisse sur la genèse de l'idée de hasard chez l'enfant ont permis de définir le développement de la pensée probabiliste en trois stades. Durant la période intuitive ou préopératoire (avant 7-8 ans), il y a absence d'une pensée probabiliste systématique, car les enfants ne sont pas en mesure de faire la distinction entre des évènements aléatoires (possibles) et des évènements déterminés (certains). Durant la période opératoire concrète (entre 7-8 et 11-12 ans), l'enfant arrive à faire cette distinction, en même temps que des formes élémentaires d'estimations probabilistes se développent, mais la difficulté réside dans la manière de dresser tous les cas possibles. L'enfant se trouve alors aux prémisses de la quantification des probabilités. Finalement, durant la période opératoire formelle (11-12 ans et plus), le construit formel du concept de probabilité se développe simultanément au concept de rapport, qui est jugé essentiel à la compréhension des probabilités. L'enfant parvient alors à quantifier les probabilités.

Même si la focalisation a surtout été faite sur le travail de Piaget et Inhelder (1951) durant cette période, Jones et Thornton (2005) soulignent que d'autres études psychologiques ont examiné pendant ces années le raisonnement d'individus sous différents types de renforcements, alors qu'ils faisaient des prédictions des résultats d'expériences aléatoires (Gratch, 1959 ; Offenbach, 1965 ; Siegel & Andrews, 1962 ; Stevenson & Zigler, 1958). Dans l'ensemble, les travaux de cette période ont essentiellement porté sur le développement du raisonnement probabiliste chez certains individus, plutôt qu'à l'idée d'apprentissage et d'enseignement des probabilités dans le cadre scolaire comme ce fut le cas dans les deux périodes suivantes.

2.2. Période postpiagétienne (1970 à 1990)

Cette deuxième période, qui s'étend de 1970 à 1990, est dite période postpiagétienne. En effet, cette période est marquée de plusieurs travaux qui s'inscrivent dans la continuité des travaux de Piaget tout en étant empreints d'un fort intérêt pour la notion de conceptions probabilistes, ainsi que des travaux reliés à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités.

2.2.1. Travaux sur les conceptions probabilistes

Durant cette période, de nombreux travaux de recherche ont émergé au regard des raisonnements déployés par des individus dans un contexte où intervient le hasard. Ainsi, des conceptions notamment liées aux notions de chance, de probabilité et de rapport à l'aléatoire ont été observées et documentées à travers l'étude de ces raisonnements. Autour de ces conceptions, qui apparaissent comme des raisonnements probabilistes particuliers, la nomenclature est variée : conceptions erronées (*misconceptions*), conceptions primitives, conceptions spontanées, fausses conceptions, intuitions, heuristiques, biais, etc. (Shaughnessy, 1992). La plupart des termes employés pour décrire ces conceptions sont connotés négativement, puisqu'elles traduisent en quelque sorte un raisonnement qui serait doté d'un manque, d'une lacune ou d'une simplicité excessive par rapport à un savoir de référence. Même si nous reconnaissons les difficultés que celles-ci peuvent engendrer pour l'apprentissage des probabilités, nous choisissons d'aller dans le même sens que Savard (2008) et de les qualifier de conceptions probabilistes. Cette appellation neutre à l'égard de ces raisonnements probabilistes particuliers s'avère adéquate, selon nous, dans la mesure où ces conceptions probabilistes sont assez communes, qu'elles peuvent se développer, se complexifier, s'effacer, se modifier ou évoluer au gré des expériences et des enseignements vécus. De plus, elles peuvent s'avérer viables et opératoires dans certains contextes, mais pas dans d'autres.

D'abord, les psychologues israéliens Kahneman et Tversky ont été les précurseurs d'un ensemble de travaux en psychologie et en éducation (Kahneman & Tversky, 1972 ; 1982 ; Tversky & Kahneman, 1971 ; 1973 ; 1974) qui ont porté sur les conceptions probabilistes avec leurs importants travaux sur le raisonnement en contexte d'incertitude (*reasoning under uncertainty*). Leurs travaux de recherche sont liés aux heuristiques et biais en probabilités (Kahneman, Slovic & Tversky, 1982), c'est-à-dire des opérations mentales rapides et intuitives. Ces auteurs se basent sur l'idée que les raisonnements des individus, souvent statistiquement naïfs (*statistically naive*), sont influencés par certaines heuristiques menant à des biais en probabilités. D'abord, ces chercheurs ont travaillé sur la conception de disponibilité ou d'accessibilité (*availability heuristic*), par laquelle un individu a tendance à estimer les probabilités d'un évènement sur la base de la facilité avec laquelle des exemples particuliers de l'évènement peuvent lui venir à l'esprit, par la facilité de rappel, de construction ou d'association. Ils ont également travaillé sur la conception de représentativité (*representativeness heuristic*), qui amène une personne à croire que les résultats d'une expérience aléatoire seront forcément représentatifs de la population parente. Dans l'ensemble, ces auteurs ont montré que ces heuristiques peuvent aider à déterminer les probabilités dans certains contextes, mais que souvent, elles mènent à des biais ou à des conceptions erronées relatives aux probabilités.

Plusieurs travaux de recherche ont été réalisés à la suite des travaux de Kahneman et Tversky. Pensons par exemple à Falk (1983), un chercheur israélien dont les travaux ont entre autres porté sur des biais reliés aux probabilités conditionnelles, notamment l'effet de l'axe du temps (*Falk phenomenon*), qui amène à déterminer la probabilité d'un évènement à partir du principe de causalité, d'apparence temporelle unidirectionnelle, sans considérer la structure probabiliste de la situation. Allant dans le même sens, Gras et Totohasina (1995a ; 1995b) se sont eux aussi intéressés, quelques années plus tard, à certaines conceptions d'élèves du secondaire en France relativement aux notions de chronologie, de causalité et de probabilité conditionnelle.

Pensons également aux recherches de Konold (1989 ; 1991), dont les travaux ont débuté dans cette période et se sont poursuivis dans la période suivante (Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier & Lipson, 1993 ; Konold, 1995). Ce chercheur états-unien a travaillé particulièrement sur une heuristique connue sous le nom de l'approche du résultat (*outcome approach*). Dans cette approche, l'individu tente de prédire le prochain résultat d'une situation aléatoire, plutôt que de considérer l'ensemble des résultats possibles ainsi que les probabilités qui leur sont associées.

De leur côté, les travaux de l'équipe de Fischbein (Fischbein, 1975 ; Fischbein & Gazit, 1984 ; Fischbein, Nello & Marino, 1991 ; Fischbein, Pampu & Minzat, 1970) ont fourni une alternative à la vision développementale de Piaget et Inhelder (1951). Fischbein a cherché à mieux comprendre quand et comment les élèves peuvent apprendre des contenus probabilistes. En effet, ce chercheur roumain s'est opposé aux idées voulant que l'acquisition des concepts probabilistes survienne à l'intérieur de trois stades rigidement circonscrits selon l'âge et que les enfants ne puissent pas comprendre le concept de hasard avant l'âge de sept ans. Il a même voulu prouver qu'un enseignement systématique comme celui rapporté dans le travail de Fischbein, Pampu et Minzat (1969), c'est-à-dire une séquence d'enseignement organisée en leçons pour aborder des notions centrales en probabilités (comme celles de fraction, d'évènement, de rapport, de variabilité, par exemple), pouvait permettre à des élèves d'acquérir les concepts de hasard et de probabilité avant le stade opératoire formel mentionné par Piaget et Inhelder (1951).

Les travaux de Fischbein se basent sur l'idée d'intuition, qui consiste en une évaluation globale et non explicite d'une situation faisant appel au sens commun. Cet auteur a identifié deux types d'intuitions : les intuitions primaires sont des croyances dérivées d'expériences individuelles sans le besoin d'un quelconque enseignement systématique, alors que les intuitions secondaires sont des croyances restructurées résultant d'un enseignement reçu à l'école. Les intuitions primaires peuvent donc aider ou nuire à l'apprentissage. Fischbein (1975) considère que les intuitions primaires de l'enfant ne peuvent être modifiées sans un enseignement systématique et il soutient que les interprétations déterministes et celles liées au hasard peuvent coexister, ce qui fait que les individus vacillent souvent entre les deux, reflétant ainsi leur manque de compréhension. Il avance donc que l'aspect intuitif du raisonnement probabiliste est relativement pauvre et que la formation d'intuitions probabilistes secondaires est particulièrement importante au regard de l'enseignement des mathématiques. Ces travaux réalisés par l'équipe de Fischbein durant la période postpiagétienne ont eu un grand impact sur les travaux subséquents sur les probabilités, notamment en établissant pour la période contemporaine un contexte favorable aux activités d'enseignement et de réflexions curriculaires liées aux probabilités.

Bien que les travaux sur les conceptions probabilistes aient émergé durant la période postpiagétienne, plusieurs chercheurs ont continué à les documenter dans la période contemporaine. C'est notamment le cas de Fischbein, qui a également fait des contributions significatives par d'autres travaux publiés dans la période contemporaine (par exemple Fischbein & Schnarch, 1997; Lecoutre & Fischbein, 1998). Par souci de cohérence organisationnelle, nous présentons quelques-uns de ces travaux directement en prolongement de la présente section dédiée aux travaux sur les conceptions probabilistes durant la période postpiagétienne.

Au tournant de la période contemporaine, les travaux réalisés au Québec par Rouan (1990) ont visé à décrire et comprendre les conceptions probabilistes présentes chez des élèves marocains de niveau collégial (18-19 ans). Ce faisant, ce chercheur a observé que des élèves manifestent la conception du contrôle du hasard, reliée à une croyance que la pratique et l'expérience de jeux de hasard et d'argent permet de contrôler ou d'influencer les résultats d'une expérience aléatoire à partir d'habiletés et de stratégies (Rouan, 1990 ; Rouan & Pallascio, 1994). Ainsi, les résultats de cette étude suggèrent que l'enseignement des probabilités qui a été offert aux étudiants les a amenés à raisonner de façon déterministe, c'est-à-dire en pensant que le hasard est décidé à l'avance. De ce fait, les élèves n'arrivent pas à comprendre les caractères d'imprévisibilité et de variabilité du hasard.

Dans des travaux sur ce qu'ils nomment les jugements probabilistes dans des situations aléatoires, Lecoutre et ses collaborateurs (Lecoutre, 1992 ; Lecoutre & Durand, 1988 ; Lecoutre, Durand & Cordier, 1990 ; Lecoutre & Fischbein, 1998) ont travaillé sur la présence et l'évolution de différentes conceptions probabilistes au sein de différents contextes chez les jeunes. Par ses travaux, la chercheure française a notamment étudié la conception d'équiprobabilité, qui se manifeste lorsqu'on considère que des évènements sont équiprobables alors qu'ils ne le sont pas, ce qui a engendré d'autres travaux sur cette conception (par exemple Marsolais, 1997). Lecoutre a également abordé la conception de conjonction (*conjunction fallacy*) proposant que la probabilité d'un évènement en interaction simultanée avec un autre évènement apparaisse, sous certaines conditions, plus probable que la probabilité de voir survenir ce même évènement individuellement.

Fischbein et Schnarch (1997) ont développé des études longitudinales qui montrent que certaines conceptions erronées (*misconceptions*) sont renforcées avec le temps. Cela signifie que, en vieillissant, les élèves adhèrent de plus en plus fortement à certaines croyances erronées, par exemple la conception de dépendance, qui découle des effets de récence positif ou négatif (*negative and positive recency effects*). Cette conception porte à croire que les résultats passés d'une expérience aléatoire influencent les résultats futurs. D'une part, l'effet de récence positif est basé sur l'idée de continuer dans la même tendance après une séquence. D'autre part, l'effet de récence négatif est basé sur l'idée qu'il y a nécessairement une équilibration entre les fréquences des différents résultats possibles à travers de nombreux essais. Dans ce sens, les élèves ayant participé à la recherche de Fischbein et Schnarch (1997) sont devenus convaincus avec le temps qu'il est plus probable qu'une pièce de monnaie tombe sur « pile » après une série de « face », comme si la pièce de monnaie devait respecter un certain équilibre. Ces chercheurs indiquent aussi que les élèves doivent faire évoluer leurs intuitions. Alors, puisque les conceptions erronées seraient renforcées avec le temps, ceux-ci jugent qu'il est impératif de s'y intéresser davantage lors de l'enseignement pour favoriser une évolution de celles-ci vers des conceptions qui sont conformes aux savoirs établis.

Les travaux de Dupuis et Rousset-Bert (1998) se sont aussi penchés sur les conceptions de dépendance. Plus particulièrement, ces chercheurs français se sont questionnés quant à l'effet du recours aux représentations (comme les arbres et les tableaux) sur la compréhension que développent les élèves de fin du secondaire (terminale) quant au concept d'indépendance en probabilité. Leurs résultats illustrent que, lorsque des élèves disposent de plusieurs outils de représentation mis en correspondance, l'appui visuel leur permet de mieux identifier si des évènements sont dépendants ou indépendants.

Les travaux de Lahanier-Reuter (1999) ont quant à eux porté sur l'étude de diverses conceptions du hasard découlant de modes de connaissances distincts. Cette auteure a donc cherché à préciser l'écart entre les connaissances sur le hasard produites par le mode de la connaissance scientifique et celles générées par celui de la pensée commune. Pour ce faire, elle a considéré trois groupes d'apprenants français de niveau primaire (10 ou 11 ans), de terminale (18 ans en moyenne) et universitaires. À travers des observations de séquences d'enseignement et d'apprentissage, elle a constaté que cet écart entre les modes scientifiques et de sens commun entraine certains conflits de sens entre apprenants et enseignants, ainsi que des dysfonctionnements importants et fréquents du point de vue des connaissances mathématiques.

Un peu plus tard au Québec, Dubois (2002) a étudié ce qu'il nomme le phénomène des fausses conceptions en probabilités et statistique chez de jeunes adultes. Ce faisant, il a été en mesure de mettre en lumière la faible évolution des fausses conceptions des étudiants du collégial à la suite d'un enseignement des probabilités et statistique. Selon l'auteur, cela peut constituer un problème pour le développement d'un raisonnement probabiliste puisque les fausses conceptions semblent demeurer relativement ancrées dans le processus cognitif de jeunes adultes, et ce, malgré un enseignement systématique.

Poirier et Carbonneau (2002) ont présenté l'impact d'un conte probabiliste dans le cadre d'une activité avec des élèves du primaire au Québec. Le conte est basé sur l'aventure d'un chevalier qui doit traverser une série d'obstacles pour aller délivrer une princesse. L'issue de chacune des épreuves dépend du hasard et, bien entendu, le chevalier surmonte chacune des embûches. Voilà pourquoi les auteures affirment que : « le conte renforce l'élève dans sa pensée magique » (*Ibid.*, p. 12). Bien que l'objectif du conte était de faire réfléchir les élèves sur un résultat qui dépend du hasard dans une approche fréquentielle, cette activité est plutôt venue renforcer certaines conceptions probabilistes des élèves, plutôt que de les ébranler. Dans ce cas, le contexte d'enseignement, bien que stimulant, a nui au développement d'un raisonnement probabiliste chez les élèves.

Lors de discussions philosophiques avec de futurs enseignants du primaire au Québec, Roy (2005) a fait ressortir certaines conceptions du hasard, c'est-à-dire les idées que se font des personnes à propos du hasard. Il ressort de cette étude que les conceptions du hasard de ces futurs enseignants influencent leur compréhension des phénomènes quotidiens. Par exemple, la conception du hasard d'un participant à l'étude semble se manifester lorsqu'il dit qu'il y a du hasard lorsque quelque chose survient alors que cela avait une « mince probabilité d'arriver » (Roy, 2005, p. 201). Cette conception du hasard pourrait l'amener à croire qu'il n'y a pas de hasard dans un jeu s'il n'arrive rien d'exceptionnel ou de très rare.

En terminant cette section, nous soulignons que plusieurs écrits ont cherché à synthétiser l'avancement de la recherche au regard des conceptions probabilistes au fil des années. Par exemple, au tournant de la période contemporaine, Shaughnessy (1992) a réalisé un important travail de recension des écrits dans lequel ont notamment été exposées les études ayant porté sur les conceptions probabilistes. Plus récemment, Savard (2014) a présenté un travail de synthèse sur les conceptions présentes chez des individus dans le développement d'un raisonnement probabiliste. Elle y pointe entre autres le fait que si plusieurs conceptions ont été bien documentées par des travaux de recherche dans les dernières décennies, plusieurs mériteraient d'être mieux comprises et gagneraient donc à faire l'objet d'une attention plus soutenue dans l'avenir.

2.2.2. *Travaux sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités*

Durant cette période, de nombreuses recherches ont été réalisées dans le champ de l'éducation à la suite ou en réponse aux travaux de Piaget et de Fischbein.

Les travaux de Steinbring (1984; 1989; 1991) prennent appui sur une analyse épistémologique de la nature des stochastiques. Ces travaux ont notamment permis de mettre en lumière les formes empirique et théorique des probabilités et la relation mutuelle existant entre le hasard et les probabilités (Steinbring, 1984; 1991). Dans ce sens, ce chercheur allemand atteste que l'apprentissage des probabilités débute par des jugements personnels à propos d'une situation aléatoire, suivis de comparaisons entre la situation empirique et le modèle théorique, pour enfin que ces comparaisons puissent mener à une généralisation et une caractérisation plus précise de la situation aléatoire.

De son côté, Green (1983 ; 1988 ; 1989 ; 1990) a réalisé en Angleterre une vaste étude auprès d'élèves de 11 à 16 ans afin de vérifier les travaux de Piaget et Inhelder (1951). Plus spécifiquement, il a cherché à connaitre ce que ces élèves savaient à propos des concepts de probabilité et du vocabulaire qui s'y rattache. Ses travaux ont amené le chercheur à conclure que : 1) le concept de rapport est essentiel pour une compréhension du concept de probabilité ; 2) les élèves ont de la difficulté à comprendre et à utiliser le vocabulaire associé aux probabilités (certain, probable, etc.) ; et 3) un enseignement systématique est nécessaire pour complexifier leurs conceptions liées aux probabilités.

Pour leur part, Garfield et Ahlgren (1988) ont mis en lumière trois grandes difficultés que rencontrent la majorité des élèves dans l'apprentissage des probabilités, aux États-Unis. D'abord, ils jugent que de nombreux élèves ont une difficulté latente avec le concept de nombres rationnels et avec le raisonnement proportionnel, qui sont utilisés dans le calcul, la présentation et l'interprétation des probabilités. Ensuite, ils constatent que plusieurs notions probabilistes apparaissent en conflit avec les expériences des élèves et leur manière de voir le monde. Enfin, ils soutiennent que plusieurs élèves développent un désintérêt pour les probabilités, en fonction de la nature théorique de l'enseignement auquel ils ont été exposés. Au regard de ces difficultés, ces auteurs formulent des recommandations pour l'enseignement, entre autres l'idée d'utiliser des activités concrètes et la simulation, de reconnaitre et de confronter des erreurs communes des élèves dans l'apprentissage des probabilités et finalement, de créer des situations qui se rattachent au quotidien des élèves et qui font intervenir des raisonnements probabilistes. De plus, ils proposent que l'élève soit impliqué dans ses apprentissages, en participant à des activités qui font intervenir des situations aléatoires, ce qui peut notamment être possible à l'aide des technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement (TICE).

En résumé, les travaux de la période postpiagétienne ont permis de dresser un paysage cognitif, pédagogique et didactique cohérent lié aux probabilités. Ainsi, ils ont constitué une base pour le développement curriculaire relatif aux probabilités survenu dans plusieurs pays qui a culminé durant la période suivante. Ces travaux ont également fourni les infrastructures nécessaires aux recherches subséquentes qui ont cherché à répondre aux nouveaux défis liés à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités.

2.3. Période contemporaine (1990 à nos jours)

Cette troisième période, dite période contemporaine, a débuté en 1990 et se poursuit jusqu'à nos jours. Elle est marquée par la réalisation d'une série de réformes curriculaires à l'échelle mondiale entre autres liée aux mathématiques scolaires. Ces réformes ont mené à l'émergence des probabilités et de la statistique comme domaine mathématique d'importance à l'école (Batanero, 2014; Jones & Thornton, 2005; Jones *et al.*, 2007). Dans ce sens, on voit dans cette période se multiplier les travaux de recherche liés à des modèles développementaux ou explicatifs, à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités dans différents niveaux scolaires, à la formation en enseignement des probabilités ainsi que ceux liés à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent. Ne pouvant rapporter l'ensemble des recherches réalisées dans cette période, puisqu'elles sont encore plus nombreuses et diversifiées que dans les deux autres périodes, nous choisissons de mentionner certains exemples de travaux de recherche survenus au cours des 25 dernières années et qui se démarquent par leur importance ou leur originalité.

2.3.1. Travaux liés à des modèles développementaux ou explicatifs

L'émergence de travaux utilisant des modèles pour décrire les différents niveaux de complexité dans les raisonnements probabilistes des élèves constitue, selon Jones *et al.* (2007), un des changements d'orientation les plus importants pour les travaux de recherche sur les probabilités durant cette période.

Les travaux de l'équipe états-unienne de Jones et de ses collègues (Jones *et al.*, 1997 ; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1999 ; Jones, Langrall, Thornton, Mooney, Wares, Jones, Perry, Putt & Nisbet, 2001) ont permis de définir six concepts-clés du raisonnement probabiliste : 1) l'ensemble des résultats possibles ; 2) la probabilité expérimentale d'un évènement ; 3) les probabilités théoriques d'un évènement ; 4) la comparaison de probabilités ; 5) les probabilités conditionnelles ; 6) l'indépendance. Leurs travaux ont également mené à l'élaboration d'un cadre de référence du développement probabiliste en quatre niveaux (subjectif, transitionnel, informel quantitatif et numérique) qui ne sont pas reliés à des âges de développement.

Les travaux de l'équipe australienne de Watson et de ses collègues (Watson, 2000 ; Watson, 2006 ; Watson, Collins & Moritz, 1997 ; Watson & Kelly, 2004 ; Watson & Moritz, 2003) ont porté, entre autres, sur l'idée du hasard chez de jeunes enfants et des adultes, notamment sur les idées de variation et d'équité (*fairness*), en plus de travailler au développement d'un modèle d'évaluation du développement de concepts liés aux probabilités et à la statistique (Watson, 2006). Ces travaux se sont également penchés sur le concept d'échantillon, plus spécifiquement sur les conceptions en lien avec l'effet de la taille de l'échantillon de futurs enseignants du secondaire (Watson, 2000) et sur le développement de la compréhension du concept d'échantillon par des élèves du primaire et du secondaire (Watson & Moritz, 2000).

Encore en Australie, Way (2003) a décrit trois stades de développement probabiliste chez les élèves du primaire : pensée non probabiliste, pensée probabiliste émergente et quantification des probabilités. Elle établit les caractéristiques pour chaque stade de développement ainsi qu'aux transitions qui permettent de passer d'un stade à l'autre. Ses résultats l'amènent à proposer des recommandations en enseignement, par exemple de proposer des activités appropriées aux élèves selon leur stade de développement pour favoriser une progression dans leurs apprentissages.

2.3.2. Travaux sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités

Pendant la période contemporaine, de très nombreux travaux ont porté sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, qui sont majoritairement structurés relativement aux trois approches probabilistes.

D'abord, l'approche théorique est traitée la plus régulièrement et est donc considérée comme l'approche classique (Albert, 2006). Dans cette approche, dont l'origine remonte à Laplace (1825/1995), la probabilité se calcule à partir du rapport entre le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles d'un évènement quelconque lorsque tous les cas sont jugés équiprobables. Dans la lignée de cette approche théorique, Kolmogorov propose en 1933 une théorie mathématique basée sur l'axiomatisation des probabilités et est ainsi devenu un des fondateurs des probabilités à l'ère moderne (Chaumont, Mazliak & Yor, 2004). Ces travaux mathématiques russes ont ensuite été traduits en anglais (Kolmogorov, 1933/1956). Ensuite, l'approche fréquentielle[1], provenant des travaux de von Mises (1928/1952), mesure la fréquence relative d'un évènement particulier à la suite d'une série de données observées. Ainsi, une fréquence relative stabilisée se dégage à travers la réalisation d'essais, ainsi que par la compilation et l'organisation de leurs résultats, afin d'arriver à tendre vers la probabilité de voir se produire un évènement possible. Cette approche permet donc d'établir des liens entre le domaine de la statistique et le domaine des probabilités. Enfin, l'approche subjective (Chernoff, 2009 ; Savard, 2008) ou personnaliste (Hacking & Dufour, 2004) prend ses racines dans les travaux de Lindley (1980), appuyés sur le théorème de Bayes. Cette troisième approche consiste pour un individu ou un groupe d'individus à évaluer numériquement la force ou le degré d'une croyance à travers une analyse plus ou moins intuitive de l'information dont il dispose. Dans les travaux qui seront présentés subséquemment, certaines approches sont parfois favorisées, mais on y note aussi une mise en relation entre les approches pour en faire ressortir la complémentarité de chacune dans le développement de la pensée probabiliste.

[1] Dans les écrits consultés, cette approche est qualifiée de différentes manières, notamment d'approche fréquentiste, expérimentale, expérientielle ou empirique.

Batanero et Serrano (1999) ont comparé en Espagne le sens de l'aléatoire chez des élèves du secondaire répartis en deux groupes d'âge (14 et 17 ans), et ce, à travers l'identification des propriétés mathématiques que ceux-ci associent à des séquences aléatoires et déterministes, ainsi que des distributions bidimensionnelles. Les résultats de cette recherche indiquent que l'âge et le niveau d'instruction ont peu d'influence sur les conceptions des élèves à propos des phénomènes aléatoires. Cela signifie que la pensée probabiliste des élèves ne semble pas avoir évolué malgré les apprentissages des probabilités développés dans les cours de mathématiques. Ces deux chercheures soutiennent donc qu'il est important de tenir compte des conceptions des élèves à travers l'enseignement des probabilités si on espère une évolution de celles-ci.

Des travaux français initiés par Brousseau, Brousseau et Warfield (2002), puis poursuivis par Briand (2005 ; 2007) ont mis l'accent sur l'importance de faire simuler les élèves avec une machine simple, soit une bouteille contenant des billes blanches et noires, mais conçue de façon à ce que le contenu de la bouteille ne soit pas dévoilé entièrement puisqu'on ne peut voir qu'une bille par tirage (avec remise). Cette approche fréquentielle amène ainsi les élèves à simuler un nombre restreint de tirages directement à partir de la machine simple, puis à utiliser un ordinateur pour simuler rapidement un plus grand nombre de tirages. En réponse au constat du fort accent mis sur l'approche théorique dans le programme et dans des manuels scolaires du secondaire au Vietnam, Vu Nhu (2005 ; 2009) a établi une comparaison institutionnelle entre la France et le Vietnam. Elle s'est inspirée des travaux de Brousseau et de Briand pour réaliser une étude didactique sur l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien de l'approche fréquentielle. Pour ce faire, elle a élaboré une ingénierie didactique dans laquelle elle a cherché à amener les élèves à développer un outil de décision avec conscience dans un problème d'incertitude aléatoire en abordant la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le degré de certitude dans leurs liens avec les probabilités.

Le travail de Zimmermann (2002) a permis d'examiner le rôle de l'enseignement des probabilités, à l'aide des TICE, sur l'évolution des raisonnements et des croyances d'élèves du secondaire aux États-Unis. La simulation d'expériences aléatoires donne l'opportunité aux élèves d'en dégager un modèle mathématique pour développer leur compréhension des probabilités. Dans cette recherche, la calculatrice à affichage graphique a permis aux élèves, après avoir simulé une expérience aléatoire un grand nombre de fois dans un temps restreint, d'observer la stabilisation de la fréquence relative.

Les travaux de Henry (par exemple, 1999 ; 2000 ; 2001 ; 2009 ; 2010) ont porté sur l'approche fréquentielle. Après avoir mis en lumière la construction du domaine des probabilités dans l'Histoire (Henry, 1999 ; 2001 ; 2009), ce chercheur a décrit l'évolution de l'enseignement secondaire en statistique et probabilités en France. Il a notamment fait ressortir que davantage d'importance est accordée à l'approche fréquentielle depuis les programmes scolaires français des années 90 (Henry, 2000; 2010). Toutefois il a affirmé qu'il subsiste une « confusion entre fréquence expérimentale et probabilité conçue alors à tort comme une fréquence limite » (Henry, 2000, p. 52)[2]. De plus, il faut mentionner ses travaux concernant la modélisation en probabilités, qui s'effectue en adoptant une approche fréquentielle pour expérimenter une situation aléatoire, créer un modèle, puis le simuler (Henry, 1999 ; 2001).

Prenant appui sur ces travaux, Parzysz (2007 ; 2009 ; 2011) a amené une réflexion inscrite dans l'approche fréquentielle pour simuler et modéliser diverses situations aléatoires. D'ailleurs, cette modélisation prend forme en partie grâce à la simulation à l'aide de TICE (Batanero, Henry & Parzysz, 2005 ; Henry & Parzysz, 2011 ; Parzysz, 2007 ; 2009).

Corter et Zahner (2007) se sont penchés sur l'utilisation de représentations visuelles (schéma, arbre, liste de résultats possibles, tableau et diagramme de Venn) dans des problèmes en probabilités résolus par des étudiants universitaires aux États-Unis. Leurs résultats montrent que les étudiants utilisent spontanément des représentations visuelles qui diffèrent selon le type de problème. Ces chercheurs ont conclu quant à l'importance de la visualisation pour le développement du raisonnement probabiliste.

Au Québec, Savard (2008) a réalisé une thèse en lien avec le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités dans une classe du primaire. Ce travail a mis en lumière le fait qu'un enseignement des probabilités dans lequel sont convoqués en alternance les contextes personnels, socioculturels et mathématiques peut permettre aux élèves de complexifier leurs conceptions probabilistes et de développer une pensée critique à l'égard des jeux de hasard et d'argent.

Au Canada, les travaux de Chernoff (2009) ont porté sur les perceptions du hasard et des probabilités associées qu'ont les futurs enseignants du primaire et du secondaire par rapport à des séquences de cinq tirages de pile ou face interprétées en fonction des revirements (*switches*) et des séquences ininterrompues de résultats

[2] Le terme « probabilité fréquentielle » est couramment utilisé dans le système scolaire au Québec, ayant été introduit dans les programmes scolaires des années 2000. Ce glissement sémantique d'une fréquence relative stabilisée vers une probabilité fréquentielle se retrouve dans plusieurs ressources québécoises : dans les documents ministériels, dans des articles professionnels et scientifiques, dans les manuels scolaires et dans les ressources numériques (comme Netmaths, par exemple). Une réflexion épistémologique sur la nature des probabilités et leur définition nous apparait donc nécessaire, et ce, à la fois au regard des contextes socioéducatif et scientifique québécois.

identiques (*longuest run*). Les résultats de son étude basée sur l'approche subjective laissent entendre que les réponses généralement reconnues comme incorrectes dans ce type de tâche ne sont pas nécessairement dépourvues d'un raisonnement probabiliste juste.

Une équipe québécoise constituée entre autres de Theis et Savard soutient l'idée que les probabilités pourraient être enseignées selon une approche fréquentielle, contrairement à l'approche théorique qui est habituellement favorisée par les enseignants (Theis & Savard, 2010b ; Savard, Freiman, Theis & Larose, 2013). Ces chercheurs considèrent que l'enseignement dispensé ne mise pas suffisamment sur l'institutionnalisation. Ils suggèrent alors que les discussions en grand groupe pourraient permettre d'institutionnaliser les connaissances développées dans les activités utilisant le simulateur de probabilités. De plus, sans que cela nous informe sur le développement du niveau de conceptualisation des probabilités chez les élèves, les auteurs soutiennent qu'une telle discussion peut amener ces derniers à partager leurs croyances et leurs conceptions erronées qui pourront alors être confrontées. Dans l'enseignement des probabilités, le vocabulaire utilisé par les élèves peut être problématique puisque ceux-ci ne distinguent pas nécessairement des expressions telles que *hasard*, *chance* et *probabilité* (Larose, Bourque & Freiman, 2010). De plus, l'enseignement des probabilités devrait davantage exploiter des situations authentiques (Grenon, Larose, Bourque et Bédard, 2010).

Martin a étudié la contribution et la compréhension de deux élèves jugées en difficulté en mathématiques dans la résolution d'une situation-problème probabiliste au sein d'équipes hétérogènes dans une classe du primaire au Québec (Martin, 2010 ; Martin & Theis, 2009 ; 2011). Dans un contexte similaire, Martin (2014) s'est ensuite intéressé aux interventions didactiques faites par deux enseignants du primaire dans l'enseignement des probabilités auprès d'élèves jugés en difficulté en mathématiques. Cette recherche montre que les deux enseignants ont rencontré des difficultés à la fois dans la gestion de la variabilité dans les essais, dans la prise en compte de la loi des grands nombres et dans l'articulation des approches fréquentielle et théorique (Martin et Theis, sous presse). De ces travaux, il ressort notamment que l'apprentissage des probabilités est possible à travers la résolution de tâches complexes plaçant en complémentarité les approches fréquentielle et théorique (Martin & Mai Huy, 2015).

Thibault (2011a ; 2011b) s'est penché sur la manifestation et l'évolution de certaines conceptions probabilistes chez des élèves québécois du secondaire dans une séquence d'enseignement des probabilités basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent. En plus des manifestations ponctuelles des conceptions de 30 élèves de quatrième secondaire (15-16 ans), le processus de complexification conceptuelle a été analysé pour deux cas d'élèves particuliers. Il semble que ce processus prend beaucoup de temps et peut être engendré par des multiples facteurs d'ébranlement.

Par exemple, le recours aux TICE comme des simulateurs d'expériences aléatoires (Maheux & Thibault, 2012 ; Thibault, 2015) semble potentiellement riche pour ébranler les conceptions des élèves par une approche fréquentielle.

Après ses nombreux travaux dans la période postpiagétienne, Konold a soulevé une réflexion sur l'idée que la fréquence relative stabilisée dans une expérimentation serait une estimation de la vraie probabilité (*true probability*) que l'on ne peut pas connaitre (Konold, Madden, Pollatsek, Pfannkuch, Wild, Ziedins, Finzer, Horton & Kazak, 2011). Par exemple, en lançant un objet irrégulier comme un os[3], il est impossible de calculer les probabilités théoriques d'atterrir sur l'une ou l'autre des faces, alors l'approche fréquentielle permettrait à long terme que la fréquence relative tende vers la vraie probabilité. Les chercheurs suggèrent de simuler physiquement une expérience aléatoire pour laquelle on ne peut pas calculer la probabilité théorique, puis d'utiliser les TICE par la suite pour permettre de voir la fréquence relative se stabiliser rapidement.

2.3.3. Travaux liés à la formation à l'enseignement des probabilités

Durant la période contemporaine, de nombreux travaux se sont intéressés à la formation à l'enseignement des probabilités en prenant appui sur les travaux développés relativement à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités.

Les travaux de l'équipe espagnole formée par Batanero et ses collaborateurs ont fait ressortir des besoins pour la formation à l'enseignement des probabilités, que ce soit en identifiant des difficultés des enseignants ou en faisant ressortir des manques dans la formation des enseignants (Batanero, Contreras, Fernandes & Ojeda, 2010 ; Batanero & Díaz, 2012 ; Batanero, Godino & Roa, 2004). Il en ressort des situations de jeu paradoxales qui peuvent être utilisées comme outils didactiques dans la formation des enseignants. Ces chercheurs soulignent d'ailleurs la spécificité de la préparation à enseigner les probabilités puisqu'il faut prendre en considération à la fois les attitudes, les croyances, les connaissances probabilistes et les connaissances professionnelles des enseignants.

Les travaux de Theis et Savard (2010a ; 2010b) font ressortir les façons dont un simulateur de jeux de hasard et d'argent a été utilisé dans des classes du secondaire au Québec. Il semble que les enseignants participant à cette recherche-action sont parvenus à montrer aux élèves du début du secondaire que les jeux de hasard et d'argent sont défavorables aux joueurs à long terme, ce qui n'aurait pas été possible, selon les auteurs, dans une approche de type papier-crayon. Cependant, toujours

[3] En France, il y a eu beaucoup d'expériences pédagogiques autour du jet d'une punaise de bureau et Parzysz (2011) mentionne aussi le lancer de cauri, qui est une sorte de coquillage africain, pour forcer à adopter une approche fréquentielle en raison de l'impossibilité de calculer les probabilités théoriques associées aux différents évènements.

selon les auteurs, ces enseignants n'ont pas eu recours au plein potentiel du simulateur[4], notamment pour faire le lien entre la fréquence relative stabilisée et la probabilité théorique ou pour établir un raisonnement probabiliste quantitatif. Theis et Savard (2010b) font alors ressortir des perspectives à considérer pour la formation des enseignants, en mentionnant par exemple que les discussions en lien avec le simulateur soient reprises en grand groupe pour enrichir et consolider les apprentissages réalisés dans les simulations.

Pour sa part, Rioux (2012) a étudié l'évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire du Québec à partir d'une séquence de situations probabilistes. La notion de projet de formation est vue à la fois comme un projet visé, qui est relatif à l'anticipation des compétences professionnelles qui doivent être développées durant la formation initiale à l'enseignement, ainsi que comme un projet programmatique, qui est relié à l'anticipation des activités de formation requises pour développer ces compétences professionnelles. La séquence qui a été réalisée a notamment permis d'inciter les étudiants à recourir à une approche stochastique et à porter un jugement probabiliste qui prend en compte la complexité conceptuelle des situations. Dans ce contexte, l'auteure a donc constaté une complexification et un élargissement des projets de formation de certains étudiants à la fois par une prise en compte progressive de l'élève et du savoir (en plus de leur propre posture d'enseignant) ainsi qu'à travers un passage d'une anticipation empreinte d'une illusion de certitude du futur proche vers une anticipation créative d'un futur proche à inventer et porteur de nombreux possibles.

2.3.4. Travaux liés à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent au Québec

Les jeux de hasard et d'argent sont pratiqués par l'Homme depuis bien longtemps, l'origine remontant chez les Égyptiens vers 3500 av. J.-C. (David, 1962). L'origine des probabilités est toutefois plus récente, surtout si on compare avec d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre et la géométrie, puisque le premier problème de probabilités connu, intitulé *pari du chevalier de Méré*, prend place dans une situation de jeux de dés en 1654 (Barbin & Lamarche, 2004 ; Derriennic, 2003). Cependant, ce n'est que récemment que d'abondantes recherches en lien avec le jeu excessif[5] ont donné naissance à un champ de recherche. Ces recherches suggèrent qu'il existe un réel problème de jeu dans la société québécoise.

---

[4] Ce simulateur est disponible à l'adresse http://anniesavard.com/simulateur/. Il s'agit d'un simulateur développé par *Netmaths* pour un projet de recherche dirigé par François Larose (Université de Sherbrooke).

[5] Il est à noter qu'on retrouve aussi dans les textes scientifiques les expressions « jeu pathologique », « jeu compulsif » ou « *gambling problem* ».

Plusieurs études en psychologie liées aux probabilités ont été réalisées dans les deux dernières décennies au Québec. Par exemple, l'équipe de Ladouceur s'est intéressée au hasard et au fléau social engendré par le jeu excessif (Ladouceur, 2004 ; 2005 ; Ladouceur, Ferland & Fournier, 2003 ; Ladouceur, Ferland & Vitaro, 2004; Ladouceur, Sylvain & Boutin, 2000a ; Ladouceur, Sylvain, Boutin & Doucet, 2000b). Ils ont observé que certaines croyances amenaient des pensées erronées chez des personnes en situation de jeu, ce qui rejoint les travaux sur les conceptions mentionnés précédemment. Puisque le joueur ne réalise pas toujours que le jeu repose sur le hasard ou à partir d'une compréhension inadéquate du hasard, il peut tomber dans le piège du jeu excessif en pariant excessivement. Cet aspect psychologique vient embrouiller la pensée du joueur et fait apparaitre des conceptions qui ne respectent pas les savoirs probabilistes établis. Par exemple, plus de 70% des joueurs se fient aux résultats des tirages précédents pour prédire le prochain tirage lors du lancer d'une pièce de monnaie, alors qu'il y a une indépendance entre les tours (Ladouceur *et al.*, 2000b).

Aussi, d'autres études québécoises en psychologie suggèrent que les connaissances mathématiques des adultes ne sont pas suffisantes pour rationaliser leurs comportements dans une situation de jeu (Benhsain, 2002; Benhsain, Taillefer & Ladouceur, 2004). Les résultats de ces études amènent l'idée que les joueurs ne parviennent pas à recourir à leurs connaissances mathématiques, comme l'indépendance entre les tours, pour éviter d'adopter des comportements irrationnels. Leurs conceptions erronées semblent être prédominantes sur leurs connaissances mathématiques. Cependant, il semble qu'une compréhension adéquate des notions probabilistes peut réduire les risques de voir une personne participer irrationnellement à des jeux de hasard et d'argent sans être consciente du risque réel de perdre (Benhsain, 2002 ; Benhsain *et al.*, 2004 ; Ladouceur *et al.*, 2000b).

3. Discussion sur l'évolution des travaux de recherche

Dans la section précédente, nous avons fait un survol des différents travaux réalisés au cours des sept dernières décennies autour des questions du développement du raisonnement probabiliste ainsi que de l'apprentissage et de l'enseignement des probabilités. Nous allons maintenant émettre différents constats au regard de cette recension, et ce, en faisant référence aux travaux de Shaughnessy (1992) et Jones *et al.* (2007).

Dans sa recension des écrits scientifiques sur l'enseignement des stochastiques, Shaughnessy (1992) a présenté une liste de souhaits (*wish list*) des recherches futures pour la décennie qui devait suivre. Par la suite, Jones *et al.* (2007) ont évalué le corpus des travaux recensés entre 1992 et 2007 à la lumière des souhaits émis par Shaughnessy, puis ils ont à leur tour énoncé d'éventuelles pistes de recherche pour répondre aux besoins de recherche. Dans les prochains paragraphes, nous ferons de même en évaluant les travaux recensés dans ce texte au regard de certaines propositions faites par Shaughnessy (1992) et Jones *et al.* (2007), en faisant ressortir huit constats.

3.1. Diversité des travaux recensés

Un premier constat qui ressort de notre recension est lié à la diversité géographique et culturelle des travaux recensés, ainsi qu'à la présence de nombreux travaux francophones. Autant Shaughnessy (1992) que Jones *et al.* (2007) ont souligné le besoin de voir se réaliser des recherches interculturelles (*cross-cultural studies*). Dans notre recension, nous avons intégré de nouveaux travaux anglophones comme les travaux canadiens de Chernoff (2009), par exemple. Nous avons également ajouté plusieurs travaux francophones réalisés au Québec (par exemple Martin, 2010 ; 2014 ; Rioux, 2012 ; Savard, 2008 ; Thibault, 2011a) et en France (par exemple Henry, 2010 ; Henry & Parzysz, 2011 ; Lahanier-Reuter, 1999 ; Parzysz, 2011), ainsi que les travaux vietnamiens de Vu Nhu (2005, 2009). Ceci constitue une valeur ajoutée par rapport aux recensions de Shaughnessy (1992) et de Jones *et al.* (2007), dans lesquelles seuls quelques chercheurs francophones étaient considérés, et ce, seulement lorsque leurs travaux étaient publiés en anglais (par exemple Brousseau *et al.*, 2002). Ainsi, les travaux que nous avons recensés attestent d'une diversité géographique et culturelle, mais ils ne portent pas sur les influences culturelles pour l'apprentissage ou l'enseignement des probabilités.

3.2. Accumulation de recherches à visée éducative

Par l'organisation en périodes de quelques exemples forts de travaux de recherche ayant porté sur le développement du raisonnement probabiliste ainsi que l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, nous pouvons constater une évolution et des tendances. Au départ, il n'y avait que des travaux de recherche issus du domaine de la psychologie et qui visaient surtout à décrire et comprendre les raisonnements probabilistes d'individus. Ces travaux ont alimenté des recherches en éducation, qui sont peu à peu apparues et ont porté attention à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités dans différents systèmes scolaires. Avec le temps, l'accumulation de ces recherches à visée éducative a non seulement permis d'alimenter le processus de développement de différents curriculums scolaires à travers le monde, mais a également favorisé l'émergence d'une réflexion sur la formation à l'enseignement des probabilités dans les universités.

3.3. Prise en compte du système scolaire et de la formation des enseignants

Dans les travaux ancrés en éducation sur l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, il semble y avoir une évolution à travers les périodes d'une centration sur l'élève et ses apprentissages vers une prise en considération de l'enseignant et de son enseignement et jusqu'à un regard sur les curriculums scolaires et sur la formation universitaire des enseignants. Ce constat dénote une progressive refocalisation des travaux centrés sur l'élève vers des travaux au cadre plus large, ce qui apparait contraire à un souhait conjointement exprimés par Shaughnessy (1992) et par Jones *et al.* (2007). En effet, ceux-ci ont exprimé le besoin de poursuivres les recherches sur les aspects métacognitifs du raisonnement probabiliste. Selon nous, de telles recherches pourraient soutenir une réflexion sur l'apprentissage des probabilités par des élèves, notamment dans le but d'alimenter la formation à l'enseignement et par extension, pour constater les effets de la formation bonifiée.

3.4. Conceptions des enseignants par rapport aux probabilités

En ce sens, nous pouvons également voir un changement de tendance face aux travaux répertoriés dans les recensions précédentes. Effectivement, Shaughnessy (1992) a énoncé le souhait de voir davantage de recherche être réalisée au regard des connaissances et des croyances sur les probabilités des futurs enseignants et des enseignants en exercice. Pour leur part, Jones *et al.* (2007) ont rapporté, en écho aux propos de Stohl (2005), que peu de travaux ont permis de répondre à ce souhait. À titre d'exemple, ils évoquaient par exemple les travaux de Begg et Edwards (1999). Or, nous observons l'émergence de nouveaux travaux liés aux conceptions des probabilités des enseignants, c'est-à-dire relatifs au regard porté par les enseignants sur les probabilités et leur enseignement. Au Québec, nous pouvons penser aux travaux de Roy (2005), qui a fait ressortir certaines conceptions du hasard chez de futurs enseignants du préscolaire et du primaire, ainsi qu'aux travaux de Rioux (2012), qui a étudié l'évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire du Québec à partir d'une séquence de situations probabilistes. Nous pouvons également citer les travaux de Martin (2014 ; Martin & Theis, sous presse), qui ont montré certaines difficultés que rencontrent des enseignants du primaire avec l'articulation des approches fréquentielle et théorique, à la fois dans la gestion de la variabilité dans les essais et dans la prise en compte de la loi des grands nombres. D'autres travaux comme ceux Batanero *et al.* (2010) témoignent de l'aspect contre-intuitif de certaines situations aléatoires qui mettent en évidence une persistance des conceptions erronées chez certains enseignants. Pour nous, la pertinence de ces travaux n'est pas d'accuser les enseignants en mettant en lumière leurs difficultés vécues dans l'enseignement des probabilités. Il s'agit plutôt d'argumenter le besoin de formation initiale et continue relativement à cette branche des mathématiques dans la perspective de favoriser le développement professionnel des enseignants dans ce contexte.

3.5. Problématique sociale des jeux de hasard et d'argent

Dans les travaux ancrés en psychologie, il semble s'être opéré une évolution de l'étude des raisonnements probabilistes déployés par des individus vers l'étude des raisonnements probabilistes mis de l'avant par des individus dans des contextes de jeux de hasard et d'argent. L'émergence de ce type de travaux apparait cohérent par rapport aux pistes de recherche identifiées par Shaughnessy (1992) et par Jones *et al.* (2007). En effet, ceux-ci ont conjointement plaidé en faveur de travaux relatifs au développement d'une pensée ou d'un jugement critique face aux probabilités et aux informations stochastiques rencontrées au quotidien par le citoyen. Dans les dernières années, nous observons un accroissement des travaux liés à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent au Québec, malgré que la plupart des travaux recensés soient issus du domaine de la psychologie. Toutefois, certains travaux en didactique des mathématiques abordent également cette question. Par exemple, le travail de Savard (2008 ; 2010) illustre bien l'émergence récente d'un courant de recherche situé à l'intersection des domaines de l'éducation et du travail social ou de la psychologie et se trouvant relié à la fois à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités et à la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent. Ainsi, selon Savard (2010), c'est dans un contexte scolaire que les élèves doivent prendre conscience des risques à participer à des jeux de hasard et d'argent puisque les jeunes se croient invincibles face au jeu dans un contexte quotidien.

3.6. Rôle de l'école face au jeu excessif

L'ampleur du problème du jeu excessif auprès des adolescents québécois (Martin, Gupta & Derevensky, 2007) demeure considérable, malgré une baisse de participation observée dans les dernières années (Camirand, 2014). On peut penser que l'école, en particulier par le biais des cours de mathématiques, doit assumer sa part de responsabilité pour contrer ce fléau social en sensibilisant les élèves aux probabilités de gagner dans les jeux de hasard et d'argent. Aussi, l'école doit permettre le développement de compétences mathématiques et de compétences citoyennes comme la pensée critique et la prise de décision (Savard, 2008). Or, il semble possible d'établir un lien entre le travail de Lahanier-Reuter (1999) et l'idée d'une institution scolaire agissant comme un vecteur d'éducation citoyenne au regard de la problématique sociale des jeux de hasard et d'argent. Cette chercheure a montré la présence, chez des apprenants, d'un écart entre les connaissances sur le hasard produites par le mode de la connaissance scientifique et celles générées par celui de la pensée commune. Elle a également mis en lumière que de cet écart entre les conceptions scientifique et commune des probabilités peuvent découler certains conflits de sens au sujet des probabilités et des dysfonctionnements importants et fréquents sur le plan des connaissances mathématiques. Ainsi, si l'école vient agir pour réconcilier – ou du moins réduire les écarts existants entre – ces deux conceptions des probabilités, nous croyons que cela constitue un exemple de ce que Savard appelle le développement de compétences mathématiques par l'école pour amener les élèves à acquérir des compétences citoyennes comme la pensée critique et la prise de décision face à des situations aléatoires.

3.7. Mise en relation de l'apprentissage et de l'enseignement

Une autre tendance pouvant être observée dans les travaux de recherche de la période contemporaine est que les conceptions probabilistes sont moins étudiées de façon isolée, comme c'était généralement le cas durant la période postpiagétienne. Désormais, ces conceptions sont plus souvent mises en relation avec l'enseignement dans lequel elles ont émergé. Pensons par exemple aux travaux de Thibault (2011a), qui a développé et mis en œuvre une séquence d'enseignement des probabilités, puis a porté un regard sur les effets de cette séquence en termes d'émergence de certaines conceptions probabilistes chez des élèves du secondaire au Québec. Prenons également les travaux de Savard (2008), qui, avec une séquence d'enseignement visant à amener des élèves du primaire à développer une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités, constituent un autre exemple de recherche ayant récemment porté sur les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage des élèves.

Or, ceci va dans le sens de Shaughnessy (1992), qui a souhaité un accroissement des recherches visant à étudier les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage des élèves, notamment au regard de leurs intuitions et de leurs conceptions probabilistes. À cet égard, Jones *et al.* (2007) ont remarqué l'émergence de nombreux travaux s'inscrivant dans cette perspective, évoquant par exemple les recherches de Jones *et al.* (1999) et de Zimmermann (2002). Nous allons donc dans le même sens en reconnaissant que de nouveaux travaux sont réalisés concernant les effets de l'enseignement des probabilités sur l'apprentissage des élèves.

3.8. Recours aux TICE

Par ailleurs, autant Shaughnessy (1992) que Jones *et al.* (2007) ont réclamé un étoffement du corpus des travaux abordant la question du recours aux TICE pour le développement du raisonnement probabiliste. D'ailleurs, Jones *et al.* (2007) disaient, il y a près d'une décennie, que « la recherche portant sur l'influence de la technologie sur les conceptions probabilistes des élèves commençait à peine à émerger » (p. 946, traduction libre). Ainsi, si nous pouvons constater que cette réflexion sur l'usage des TICE était déjà présente en 1992 et qu'elle s'est poursuivie en 2007, il faut cependant souligner qu'il y a eu une véritable explosion technologique dans les dernières années et qu'en conséquence, une explosion de la recherche sur les TICE semble s'être opérée. Alors qu'il y a quelques décennies, de telles initiatives étaient relativement rares et relevaient de l'innovation par rapport au quotidien de la classe (par exemple les travaux de Pratt, 2000), les TICE sont désormais de plus en plus présentes et utilisées dans les milieux scolaires. Ainsi, il semble y avoir une tendance récente dans les travaux à regarder les usages effectifs ou potentiels des TICE déjà présentes au quotidien, que ce soit au regard de l'expérience d'apprentissage offerte aux élèves (par exemple Batanero, Godino & Canizares, 2005 ; Stohl & Tarr, 2002) ou au regard de la formation à l'enseignement des probabilités (par exemple Bu, 2008 ; Stohl & Hollebrands, 2008 ; Theis & Savard, 2010a ; 2010b). Ce regard porté sur le recours aux TICE pour la formation à l'enseignement des probabilités nous apparait particulièrement récent.

4. Implications pour des recherches ultérieures

Le regard rétrospectif porté sur les travaux de Shaughnessy (1992) et de Jones *et al.* (2007) nous permet de constater que certaines des recommandations énoncées ont trouvé écho dans les recherches récentes, mais que d'importantes zones d'ombres scientifiques subsistent autour de l'apprentissage et de l'enseignement des probabilités. Parmi ces zones d'ombres qui mériteraient à nos yeux d'être éclairées par la recherche de demain, nous identifions quatre pistes de recherche.

4.1. Exploration des contenus probabilistes de ressources didactiques

Il nous semble impératif d'explorer les contenus probabilistes des ressources didactiques généralement utilisées pour l'enseignement des probabilités, étant donné que cet objet a été peu étudié par les travaux que nous avons recensés. En effet, il semble que de nombreux enseignants ont tendance à baser leur enseignement sur un manuel scolaire ou sur des ressources en ligne (par exemple, Netmaths, Sésamath, ChallengeU, Khan Academy, etc.). Il serait donc utile de mieux connaitre le contenu probabiliste de ces ressources qui sont utilisées de nos jours pour enseigner les probabilités au primaire et au secondaire.

4.2. Étude des pratiques effectives d'enseignement des probabilités

Dans le même sens, nous considérons indispensable de poursuivre l'étude des pratiques d'enseignement des probabilités, afin d'établir un lien entre ce qui est proposé dans les ressources didactiques et ce qui est réellement fait par les enseignants. D'ailleurs, Martin (2014) a mis en exergue la rareté des travaux de recherche sur l'enseignement ou les pratiques d'enseignement des probabilités. Nous croyons que, dans cette perspective, des pistes intéressantes pourraient être examinées. En effet, il s'avère important de chercher à mieux connaitre la place occupée par l'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire. Par exemple, au Québec, l'enseignement des probabilités est prescrit tout au long du cheminement scolaire d'un élève de 6 ans à 17 ans. Toutefois, étant donné que cet enseignement n'occupe pas une place prépondérante dans les programmes de formation de l'école québécoise au primaire et au secondaire, il est possible de se questionner sur la place réelle accordée à cet enseignement dans les classes.

D'une part, il conviendrait d'explorer les contenus probabilistes abordés dans l'enseignement (le « quoi ») et le ou les moments durant lesquels se fait l'enseignement des probabilités (le « quand »). D'autre part, il importe également de se questionner sur la manière dont sont enseignées les probabilités (le « comment ») et sur les retombées ou les effets de cet enseignement (le « pourquoi ». Cette dernière considération fait écho à un des constats énoncés dans la section précédente, à savoir qu'il peut être pertinent d'opérer une mise en relation de l'apprentissage et de l'enseignement, plutôt que de regarder l'enseignement de manière isolée, sans prendre en considération l'apprentissage qui en est corolaire.

Dans ce sens, nous pensons que cette étude conjointe du « quoi », du « quand », du « comment » et du « pourquoi » de l'enseignement des probabilités pourrait par exemple se faire à travers une réflexion didactique sur l'articulation des approches probabilistes théorique et fréquentielle dans l'enseignement des probabilités ou encore par une réflexion sur la mise en relation de la statistique et des probabilités. Que ce soit par une étude de l'enseignement ordinaire en classe ou par la mise en œuvre d'une ingénierie didactique ou d'une expérimentation didactique, il conviendrait alors de porter attention aux raisonnements développés par les élèves dans ce contexte d'incertitude, notamment en fonction de leur processus de conceptualisation des notions probabilistes en jeu, par exemple les concepts d'échantillon et de variabilité ainsi que la loi des grands nombres. De telles recherches nous apparaissent pertinentes à la fois pour les niveaux primaires et secondaires dans une perspective de comparaison, mais également dans une perspective de transition entre ces deux institutions scolaires, afin de favoriser un arrimage des deux univers.

4.3. Approfondissement des différents usages des TICE

Il nous apparait crucial de réaliser des travaux qui permettront un approfondissement des différents usages des TICE qui se font et qui pourraient être faits pour le développement du raisonnement probabiliste. C'est d'ailleurs ce que suggèrent Kissane et Kemp (2010), qui ont souligné que, malgré certaines recherches qui font intervenir les TICE dans l'enseignement des probabilités, il subsiste un manque de recherches ayant recourt aux diverses possibilités d'utilisation des TICE, que ce soit des calculatrices, des logiciels ou des sites Internet. En conséquence, nous sommes convaincus de l'importance de poursuivre les travaux de recherche visant à faire l'étude de l'utilisation des TICE pour l'apprentissage et l'enseignement des probabilités ainsi que pour la formation à l'enseignement des probabilités. De telles recherches pourraient notamment examiner des avantages et des défis de l'utilisation des TICE, des enjeux et des difficultés qui lui sont inhérents, ainsi que ses retombées.

4.4. Regard sur la formation à l'enseignement des probabilités

Nous jugeons finalement qu'un important travail de recherche est également nécessaire relativement à la formation à l'enseignement des probabilités. En effet, le faible accent mis sur les probabilités dans la formation à l'enseignement a été souligné par des auteurs de différents pays (par exemple Batanero *et al.*, 2010 ; Begg & Edwards, 1999 ; Theis, 2012). Ainsi, étant donné les besoins de formation actuels, il nous semble que cet effort scientifique pourrait être orienté à la fois sur la formation initiale et sur la formation continue. Celui-ci permettra notamment de mieux connaitre le contenu spécifiquement dédié à l'enseignement des probabilités dans la formation à l'enseignement, et éventuellement, pour travailler à son amélioration. En ce qui concerne la formation continue, davantage d'initiatives pourraient être offertes aux enseignants en exercice. En conséquence, il serait bénéfique de mener davantage de recherche-action (Guay, Dolbec & Prud'homme, 2016) et de recherche collaborative (Bednarz, 2013) concernant l'apprentissage et l'enseignement des probabilités, ce qui va dans le sens d'une proposition de Shaughnessy (1992), qui en a appelé d'une collaboration entre les chercheurs et les enseignants pour développer une meilleure compréhension de l'apprentissage et de l'enseignement des probabilités. En plus de mener à la production de nouveaux savoirs scientifiques, ces recherches pourraient stimuler le développement professionnel des enseignants qui y participeront et ceux-ci pourraient alors devenir des agents multiplicateurs dans leur milieu. Pour alimenter ces initiatives de formation, il existe déjà des ressources didactiques utiles qui peuvent être considérées. En effet, plusieurs ouvrages ont été publiés sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire, avec des sections réservées aux probabilités (par exemple Van de Walle et Lovin, 2007 ; 2008a ; 2008b) alors que d'autres ouvrages se consacrent entièrement à l'apprentissage et l'enseignement des probabilités (par exemple, Glaymann & Varga, 1973 ; Glaymann, 1976a ; Glaymann, 1976b).

Conclusion

En terminant, il convient de souligner qu'il y a dix ans, au regard de l'impressionnante quantité des travaux contemporains, Jones et Thorton (2005) ont conclu leur travail de recension d'écrits en énonçant la remarque suivante : « Le verdict reste inconnu quant à savoir si les recherches de la période contemporaine ont permis d'apporter les soutiens nécessaires aux apprenants et aux enseignants » (p. 83, traduction libre). Aujourd'hui, nous ne sommes pas plus convaincus que ces recherches trouvent écho dans les salles de classe du primaire jusqu'à l'université, malgré quelques signes d'amélioration encourageants. En effet, malgré la présence accrue des probabilités dans la plupart des curriculums des écoles primaire et secondaire (Batanero, 2014 ; Henry, 2010 ; Jones *et al.*, 2007), ce qui est notamment le cas au Québec (Caron, 2002 ; Gattuso & Vermette, 2013 ; Savard & DeBlois, 2005), la qualité de leur apprentissage et de leur enseignement dans les classes reste largement méconnue. Ce constat ne se limite certes pas au domaine des probabilités, mais il n'en est pas moins préoccupant pour autant, si ce n'est que pour l'importance cruciale que revêt le développement d'un raisonnement probabiliste éclairé chez les citoyens en devenir. En conséquence, bien du chemin reste à faire, mais celui-ci s'annonce aussi riche qu'intrigant.

Bibliographie

ALBERT J. (2006), Interpreting probabilities and teaching the subjective viewpoint, dans *Thinking and reasoning with data and chance* (Éds. Burrill & Elliott), 417-433. NCTM, Reston.

BARBIN E. & LAMARCHE J.-P. (2004), *Histoires de probabilités et de statistiques*, Ellipses, Paris.

BATANERO C. (2014), Probability teaching and learning, dans *Encyclopedia of mathematics education* (Éd. Lerman), 491-496. Springer, Dordrecht.

BATANERO C., CONTRERAS J.M. FERNANDES J.A., & OJEDA M.M. (2010), Paradoxical games as a didactic tool to train teachers in probability, Actes de l'*International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

BATANERO C., & DÍAZ C. (2012), Training school teachers to teach probability: reflections and challenges, *Chilean Journal of Statistics* **3.1**, 3-13.

BATANERO C., GODINO J.D. & CANIZARES M.J. (2005), Simulation as a tool to train pre-service school teachers, Actes de *First ICMI African Regional Conference*.

BATANERO C., GODINO J.D. & ROA R. (2004), Training teachers to teach probability, *Journal of Statistics Education* **12.1**.

BATANERO C., HENRY M. & PARZYSZ B. (2005), The nature of chance and probability, dans *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (Éd. Jones), 15-37. Springer, New York.

BATANERO C. & SERRANO L. (1999), The meaning of randomness for secondary school students, *Journal for Research in Mathematics Education* **30.5**, 558–567.

BEAUD, J.-P. (2016). L'échantillonnage, dans *Recherche sociale. De la problématique à la collecte de données* (Éds. Gauthier & Bourgeois), 251-288. Presses de l'université du Québec, Sainte-Foy.

BEDNARZ N. (Éd.) (2013), *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement*, L'Harmattan, Paris.

BEGG A. & EDWARDS R. (1999), Teachers' ideas about teaching statistics, Actes de *Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*.

BENHSAIN K. (2002), *Conceptions erronées des jeux de hasard selon le niveau de connaissances en statistiques*, Mémoire de Maitrise, Université Laval.

BENHSAIN K., TAILLEFER A. & LADOUCEUR R. (2004), Awareness of independence of events and erroneous perceptions while gambling, *Addictive behaviors* **29.2**, 399–404.

BORDIER J. (2001), Les règles normatives des jugements sur la probabilité, *Bulletin de l'AMQ* **41.3**, 28-38.

BOROVCNIK M. & PEARD R. (1996), Probability, dans *International Handbook of Mathematical Education* (Éds. Bishop & alii), 239-287, Kluwer, Dordrecht.

BRIAND J. (2005), Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple, *Recherches en didactique des mathématiques* **25.2**, 247-282.

BRIAND J. (2007), La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe, *Petit x* **75**, 7-33.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. & WARFIELD V. (2002), An experiment on the teaching of statistics and probability, *Journal of Mathematical Behavior* **20**, 363-411.

BU L. (2008), Computer simulation: engaging preservice mathematics teachers in in-depth investigations of a simply complex problem, Actes de *Society for Information Technology & Teacher Education International Conference*.

CAMIRAND H. (2014), Jeux de hasard et d'argent, dans *Enquête québécoise sur le tabac, l'alcool, la drogue et le jeu chez les élèves du secondaire, 2013. Évolution des comportements au cours des 15 dernières années* (Éds. Traoré et alii), 149-182, Institut de la statitstique du Québec, Québec.

CARON, F. (2002), Splendeurs et misères de l'enseignement des probabilités au primaire, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 85-96.

CHAUMONT L., MAZLIAK L. & YOR M. (2004), Quelques aspects de l'oeuvre probabiliste, dans *L'héritage de Kolmogorov en mathématiques* (Éds. Charpentier & alii), 55-79. Belin, Paris.

CHERNOFF E. (2009), *Subjective probabilities derived from the perceived randomness of sequences of outcomes*, Thèse de Doctorat, Simon Fraser University.

CORTER J.E. & ZAHNER D.C. (2007), Use of external visual representations in probability problem solving, *Statistics Education Research Journal* **6.1**, 22-50.

DAVID F.N. (1962), *Games, gods and gambling: The origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era*, Griffin, Londres.

DERRIENNIC Y. (2003), Pascal et les problèmes du chevalier de Méré, *Gazette des mathématiciens* **97**, 45–71.

DUBOIS P. (2002), *Étude du phénomène des fausses conceptions en probabilités et statistiques chez des jeunes adultes québécois*, Mémoire de Maitrise, Université du Québec à Montréal.

DUPUIS C. & ROUSSET-BERT S. (1998), De l'influence des représentations disponibles sur la résolution de problèmes élémentaires de probabilité et sur l'acquisition du concept d'indépendance, *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **6**, 67-87.

EVEN R. & KVATINSKY T. (2010), What mathematics do teachers with contrasting teaching approaches address in probability lessons?, *Educational studies in mathematics* **74.3**, 207-222.

FALK R. (1983), Experimental models for resolving probabilistic ambiguities', Actes du *Seventh international conference on the psychology of* mathematics, 319-325.

FISCHBEIN E. (1975), *The intuitive source of probabilistic thinking in children*, Reidel, Dordrecht.

FISCHBEIN E. & GAZIT A. (1984), Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?, *Educational studies in mathematics* **15**, 1-24.

FISCHBEIN E., NELLO M.S. & MARINO M.S. (1991), Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educational studies in mathematics* **22.6**, 523-549.

FISCHBEIN E., PAMPU I. & MINZAT I. (1970), Comparison of ratios and the chance concept in children, *Child development* **41.2**, 377-389.

FISCHBEIN E. & SCHNARCH D. (1997), The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education* **28.1**, 96–105.

GARFIELD J. & AHLGREN A. (1988), Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research, *Journal for Research in Mathematics Education* **19.1**, 44-63.

GATTUSO L. & VERMETTE S. (2013), L'enseignement de statistiques et probabilités au Canada et en Italie, *Recherches et perspectives - Statistique et Enseignement* **4.1**, 107-129.

GLAYMANN M. (1976a), Les probabilités à l'école élémentaire, *Educationnal Studies in Mathematics* **6.4**, 389-393.

GLAYMANN M. (1976b), Où le premier n'est pas toujours premier… pièce probabiliste en trois actes pour des enfants de 10 ans, *Educationnal Studies in Mathematics* **7.1**, 83-88.

GLAYMANN M. & VARGA T. (1973), *Les probabilités à l'école*, Cedic, Paris.

GRATCH G. (1959), The development of the expectation of the non-independence of random events in children, *Child Development* **30**, 217-227.

GRAS R. & TOTOHASINA A. (1995a), Chronologie et causalité, sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. Méthodologie et corollaires de la mise en évidence de ces conceptions, *Recherches en didactique des mathématiques* **15.1**, 49-95.

GRAS R. & TOTOHASINA A. (1995b), Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des implications : implications - similarité - corrélation, *Educational studies in mathematics* **28**, 337-33.

GRATCH G. (1959), The development of the expectation of the non-independence of random events in children, *Child Development* **30**, 217-227.

GREEN D.R. (1983), A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16, Actes de *First International Conference on Teaching Statistics*, 766-783.

GREEN D.R. (1988), Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years, Actes de *Second International Conference on Teaching Statistics*, 287-291.

GREEN D.R. (1989), School's pupil's understanding of ramdomness, dans *Studies in mathematics education. The teaching of statistics* (Éd. Morris), 27-39, Unesco, Paris.

GREEN D.R. (1990), A longitudinal study of pupil's probability concepts, Actes de *Third international conference on teaching statistics*, 320-328.

GRENON V., LAROSE F, BOURQUE J. & BÉDARD J. (2010), The impact of using pupils' daily practices as well as computerized simulators as a teaching medium on motivation and knowledge construction regarding probabilities among high school pupils, Actes de *International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

GUAY M.-H., DOLBEC A. & PRUD'HOMME L. (2016), La recherche-action, dans *Recherche sociale. De la problématique à la collecte de données* (Éds. Gauthier & Bourgeois), 539-578. Presses de l'université du Québec, Sainte-Foy.

HACKING I. & DUFOUR M. (2004), *L'ouverture au probable. Éléments de logique inductive*, Armand Colin, Paris.

HENRY M. (1999), L'introduction des probabilités au lycée : un procesus de modélisation comparable à celui de la géométrie, *Repères-IREM* **36**, 15-34.

HENRY M. (2000), Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilités, *Gazette des mathématiciens* **84**, 49-56.

HENRY M. (2001), *Autour de la modélisation en probabilités*, Presses Universitaires Franc-Comtoises, Paris.

HENRY M. (2009), Émergence de la probabilité et enseignement : définition classique, approche fréquentiste et modélisation, *Repères-IREM* **74**, 67-89.

HENRY M. (2010), Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités, *Statistique et Enseignement* **1.1**, 35-45.

HENRY M. & PARZYSZ B. (2011), Simulating random experiments with computers in the classroom: Indispensable but not so simple, Actes de *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME7)*.

JESSON J.K, MATHESON L. & LACEY F.M. (2011), *Doing your literature review. Traditional and systematic techniques*, SAGE Publications, Londres.

JONES G.A., LANGRALL C.W. & MOONEY E.S. (2007), Research in probability: responding to classroom realities, dans *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Éd. Lester), 909-956, Information Age Publishing Inc, Charlotte.

JONES G.A., LANGRALL C.W., THORNTON C.A. & MOGILL, A.T. (1997), A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability, *Educational studies in mathematics* **32.2**, 101-125.

JONES G.A., LANGRALL C.W., THORNTON C.A. & MOGILL, A.T. (1999), Students' probabilistic thinking in instruction, *Journal for research in mathematics education* **30.5**, 487-519.

JONES G.A., LANGRALL C.W., THORNTON C.A., MOONEY E.S., WARES A., JONES M.R., PERRY B., PUTT I.J. & NISBET S. (2001), Using students' statistical thinking to inform instruction, *Journal of mathematical behavior*, **20.1**, 109-144.

JONES G.A. & THORNTON C.A. (2005), An overview of research into the teaching and learning of probability, dans *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (Éd. Jones), 65-92, Springer, New York.

KAHNEMAN D., SLOVIC P. & TVERSKY A. (1982), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases,* Cambridge University Press, Cambridge.

KAHNEMAN D. & TVERSKY A. (1972), Subjective probability: A judgment of representativeness, *Cognitive psychology* **3**, 430-454.

KAHNEMAN D. & TVERSKY A. (1982), On the study of statistical intuitions, *Cognition* **11**, 123-141.

KIEREN T. & SIERPINSKA A. (2000), Mathematics education & didactique des mathématiques: Is there a reason for living separate lives?, Actes de *Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG)*, 61-79.

KISSANE B. & KEMP M. (2010), Teaching and learning probability in an age of technology, Actes de *Fifteenth Asian Technology Conference in Mathematics*.

KOLMOGOROV A. N. (1956), *Foundations of the theory of probability*, Chelsea Publishing Company, New York. (2e éd. anglophone, travail original publié en 1933)

KONOLD C. (1989), Informal conceptions of probability, *Cognition and instruction* **6.1**, 59-98.

KONOLD C. (1991), Understanding students' beliefs about probability, dans *Radical constructivism in mathematics education* (Éd. von Glasersfeld), 139-156, Kluwer, Dordrecht.

KONOLD C. (1995), Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics, *Journal of Statistics Education* **3.1**, 1-9.

KONOLD C., MADDEN S., POLLATSEK A., PFANNKUCH M., WILD C., ZIEDINS I., FINZER W., HORTON N.J. & KAZAK S. (2011), Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability, *Mathematical Thinking and Learning* **13.1**, 68-86.

KONOLD C., POLLATSEK A., WELL A., LOHMEIER J. & LIPSON A. (1993), Inconsistencies in students' reasoning about probability, *Journal for Research in Mathematics Education* **24.5**, 392-414.

LADOUCEUR R. (2004), Comportements de jeu et jeu pathologique, *Atout hasard. Bulletin d'information du Centre québécois d'excellence pour la prévention et le traitement du jeu* **6.2**.

LADOUCEUR R. (2005), Connaissances en mathématiques et jeux de hasard et d’argent, *Atout hasard. Bulletin d'information du Centre québécois d'excellence pour la prévention et le traitement du jeu* **7.1**.

LADOUCEUR R., FERLAND F. & FOURNIER P.M. (2003), Correction of erroneous perceptions among primary school students regarding the notions of chance and randomness in gambling, *American Journal of Health Education* **34.5**, 5-10.

LADOUCEUR R., FERLAND F. & VITARO F. (2004), Prevention of problem gambling : Modifying misconceptions and increasing knowledge among Canadian youths, *The Journal of Primary Prevention* **25.3**, 329-335.

LADOUCEUR R., SYLVAIN C. & BOUTIN C. (2000a), Le jeu pathologique, *Revue Québécoise de Psychologie* **21.1**, 21-35.

LADOUCEUR R., SYLVAIN C., BOUTIN C. & DOUCET C. (2000b), *Le jeu excessif - Comprendre et vaincre le gambling*, Les Éditions de l’Homme, Montréal.

LAHANIER-REUTER D. (1999), *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*, Presses universitaires de France, Paris.

LAPLACE P.S. (1995), *Philosophical essay on probabilities*, Springer-Verlag, New-York. (Travail original publié en 1825)

LAROSE F., BOURQUE J. & FREIMAN V. (2010), The effect of contextualising probability education on differentiating the concepts of luck, chance and probabilities among middle and high school pupils in Quebec, Actes de *International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

LECOUTRE M.-P. (1992), Cognitive Models and Problem Spaces in "Purely Random" Situations, *Educational studies in mathematics* **23.6**, 557-568.

LECOUTRE M.-P. & DURAND J.-L. (1988), Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire, *Educational studies in mathematics* **19.3**, 357-368.

LECOUTRE M.-P., DURAND J.-L. & CORDIER J. (1990), A Study of two Biases in Probabilistic Judgments: Representativeness and Equiprobability, *Advances in Psychology* **68**, 563-575.

LECOUTRE M.-P. & FISCHBEIN E. (1998), Évolution avec l'âge de «misconceptions» dans les intuitions probabilistes en France et en Israël, *Recherches en didactique des mathématiques* **18.3**, 311-331.

LINDLEY D.V. (1980), *Introduction to probability and statistics from the Bayesian viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge.

MAHEUX J.-F. & THIBAULT M. (2012), Le rôle de l'évidence : une expérience en probabilité avec la technologie, Actes de *Rencontre Interuniversitaire Recherche en Enseignement des Mathématiques*.

MARSOLAIS C. (1997), *Les conceptions équiprobabilistes d'élèves québécois du secondaire*, Mémoire de Maitrise, Université du Québec à Montréal.

MARTIN I., GUPTA R. & DEREVENSKY J. (2007), Participation aux jeux de hasard et d'argent, dans *Enquête québécoise sur le tabac, l'alcool, la drogue et le jeu chez les élèves du secondaire* (Éd. Tremblay), 125-144, Institut de la statistique du Québec, Québec.

MARTIN V. (2010), *Quand rien n'est sûr, tout est possible : l'apprentissage des probabilités chez des élèves à risque*, Éditions Bande didactique, Montréal.

MARTIN V. (2014), *Étude des interventions didactiques dans l'enseignement des probabilités auprès d'élèves jugés ou non en difficulté en mathématiques en classes ordinaires du primaire*, Thèse de Doctorat, Université de Sherbrooke, Québec.

MARTIN V. & MAI HUY K. (2015), Une réflexion didactique sur des activités pour penser l'enseignement-apprentissage des probabilités et des statistiques à l'école primaire, *Bulletin AMQ* **55.3**, 50-67.

MARTIN V. & THEIS L. (2009), L'apprentissage des probabilités à travers la résolution d'une situation-problème au troisième cycle, *Vivre le primaire (compléments en ligne)* **22.2**, 1-8.

MARTIN V. & THEIS L. (2011), La résolution d'une situation-problème probabiliste en équipe hétérogène: le cas d'une élève à risque du primaire, *Nouveaux Cahiers de la Recherche en Éducation* **14.1**, 49-70.

MARTIN V. & THEIS L. (sous presse), L'articulation des perspectives fréquentielle et théorique dans l'enseignement des probabilités : regard sur un changement de posture chez un enseignant du primaire, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*.

MONGEAU, P. (2011), *Réaliser son mémoire ou sa thèse. Côté jeans et côté tenue de soirée*. Presses de l'Université du Québec, Québec.

OFFENBACH S.I. (1965), Studies of children's probability learning behavior 11: Effect of method and event frequency at two age levels, *Child Development* **36**, 952-961.

PARZYSZ, B. (2007), Expérience aléatoire et simulation : le jeu de croix ou pile. Relecture actuelle d'une expérimentation déjà un peu ancienne, *Repères-IREM* **66**, 27-44.

PARZYSZ, B. (2009), De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation, *Repères-IREM* **74**, 91-103.

PARZYSZ, B. (2011), Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités, *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **16**, 127-147.

PIAGET J. & INHELDER B. (1951), *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Presses universitaires de France, Paris.

POIRIER L., & CARBONNEAU A.-M. (2002), Expérimentation d'un conte probabiliste dans une classe multi-âges du premier cycle du primaire, *Instantanées mathématiques* **38.3**, 4-12.

PRATT D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for research in mathematics education* **31.5**, 602-625.

RIOUX M. (2012), *Évolution des projets de formation de futurs enseignants au primaire au contact de situations probabilistes*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal.

ROUAN O. (1990), *Conceptions probabilistes chez des élèves de 18-19 ans*, Mémoire de Maitrise, Université du Québec à Montréal.

ROUAN O., & PALLASCIO R. (1994), Conceptions probabilistes d'élèves marocains du secondaire, *Recherches en didactique des mathématiques* **14.3**, 393-428.

ROY A. (2005), *Manifestations d'une pensée complexe chez un groupe d'étudiants-maîtres au primaire à l'occasion d'un cours de mathématiques présenté selon une approche philosophique*, Thèse de Doctorat, Université du Québec à Montréal.

SAVARD A. (2008), *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision*, Thèse de Doctorat, Université Laval.

SAVARD A. (2010), Simulating the risk without gambling: Can student conceptions generate critical thinking about probability?, Actes de l'*International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

SAVARD A. (2014), Developing probabilistic thinking: What about people's conceptions?, dans *Probabilistic thinking* (Éds. Chernoff & Sriraman), 283-297, Springer, New York.

SAVARD A. & DEBLOIS L. (2005), Un cadre théorique pour éclairer l'apprentissage des probabilités à l'école primaire : vers une prise de décision à l'égard des jeux de hasard et d'argent, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 61-76.

SAVARD A., FREIMAN V., THEIS L. & LAROSE F. (2013), Discussing virtual tools that simulate probabilities: What are the middle school teachers' concerns?, *McGill Journal of Education* **48.2**, 403-423.

SHAUGHNESSY J.M. (1992), Research in probability and statistics: Reflections and directions?, dans *Handbook on Research in Mathematics Teaching and Learning* (Éd. Grouws), 465-494, Macmillan, New York.

SIEGEL S. & ANDREWS J.M. (1962), Magnitude of reinforcement and choice behavior in children, *Journal of Experimental Psychology* **63**, 337-341.

STEINBRING H. (1984), Mathematical concepts in didactical situations as complex systems: the case of probability, dans *Theory of mathematics education (TME: ICME 5): occasional paper 54* (Éds. Steiner & Balacheff), 56-88, IDM, Bielefeld.

STEINBRING H. (1989), La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste. Une conception épistémologique pour l'analyse du processus d'enseignement, *Annales de didactiques et de sciences cognitives* **2**, 191-215.

STEINBRING H. (1991), The theoretical nature of probability in the classroom, dans *Chance encounters: probability in education* (Éds. Kapadia & Borovcnik), 135-168, Kluwer, Amsterdam.

STEVENSON H. & ZIGLER E.F. (1958), Probability learning in children, *Journal of Experimental Psychology* **56**, 185-192

STOHL H.L. & HOLLEBRANDS K.F. (2008). Preparing to teach data analysis and probability with technology, Actes de l'*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI Study 18).

STOHL H.L & TARR J.E. (2002). Developing notions of inference using probability simulation tools, *Journal of mathematical behavior* **21**, 319-337.

THEIS L. (2012). Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du primaire et du préscolaire? À la recherche des mathématiques dans une séquence sur l'enseignement des probabilités, dans *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques* (Éds. Proulx & alii), 181-204, Presses de l'Université du Québec, Québec.

THEIS L. & SAVARD A. (2010a), Linking probability to real-world situations: How do teachers make use of the mathematical potential of simulation programs?, Actes de l'*International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)*.

THEIS L. & SAVARD A. (2010b), Recours à un simulateur pour enseigner les probabilités: quels défis et occasions pour des enseignants du début du secondaire?, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 263-272.

THIBAULT M. (2011a), *Apprentissage des probabilités chez des élèves du secondaire dans une séquence d'enseignement basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent : émergence de conceptions*, Mémoire de Maitrise, Université du Québec à Montréal.

THIBAULT M. (2011b), Apprentissage des probabilités pour des élèves du secondaire dans une séquence d'enseignement basée sur la simulation de jeux de hasard et d'argent : émergence de conceptions, Actes de colloque du *Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 105-114.

THIBAULT M. (2015), Utiliser les mathéma-TIC pour enseigner les probabilités, *Revue Envol (GRMS)* **165**, 9-13.

TVERSKY A. & KAHNEMAN D. (1971), Belief in the law of small numbers, *Psychological Bulletin* **76.2**, 105-110.

TVERSKY A. & KAHNEMAN D. (1973), Availability: a heuristic for judging frequency and probability, *Cognitive psychology* **5**, 207-232.

TVERSKY A. & KAHNEMAN D. (1974), Judgment under uncertainty: heuristics and biases, *Science* **185**, 1124-1131.

VAN DE WALLE J. & LOVIN L.H. (2007), *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 1*, ERPI, Montréal.

VAN DE WALLE J. & LOVIN L.H. (2008a), *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 2*, ERPI, Montréal.

VAN DE WALLE J. & LOVIN L.H. (2008b), *L'enseignement des mathématiques. L'élève au centre de son apprentissage. Tome 3*, ERPI, Montréal.

VON MISES R. (1952), *Probabilities, statistics and truth*, William Hodge, Londres. (Travail original publié en 1928)

VU NHU T.H. (2005), *La notion de probabilité dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques au lycée*, Mémoire de master, Université de pédagogie de Hochimihn Ville, Vietnam.

VU NHU T.H. (2009), *Une étude didactique de l'introduction dans l'enseignement mathématique vietnamien de notions statistiques dans leurs liens avec les probabilités*, Thèse de doctorat, Université Joseph-Fournier – Grenoble I, France.

WATSON J.M. & KELLY B.A. (2004), Expectation versus variation: students' decision making in a chance environment, *Canadian journal of science, mathematics and technology education* **4.3**, 371-396.

WATSON J.M. & MORITZ J.B. (2000), Development of understanding of sampling for statistical literacy, *Journal of mathematical behavior* **19.1**, 109-136.

WATSON J.M. & MORITZ J.B. (2003), Fairness of dice: a longitudinal study of students' beliefs and strategies for making judgments, *Journal for research in mathematics education* **34.4**, 270-304.

WATSON J.M. (2000), Preservice mathematics teachers' understanding of sampling: intuition or mathematics, *Mathematics teacher education and development* **2**, 121-135.

WATSON J.M. (2006), Assessing the development of important concept in statistics and probability, dans *Thinking and reasoning with data and chance* (Éds. Burrill & Elliott), 61-75, NCTM, Reston.

WATSON J.M., COLLIS K.F. & MORITZ J.B. (1997), The development of chance measurement, *Mathematics education research journal* **9.1**, 60-82.

WAY J. (2003), *The development of children's notions of probability*, Thèse de Doctorat, University of Western Sydney

ZIMMERMANN G. (2002), *Students' reasoning about probability simulations during instruction*, Thèse de Doctorat, Illinois State University.

VINCENT MARTIN
Université du Québec à Trois-Rivières
Campus Drummondville
vincent.martin@uqtr.ca

MATHIEU THIBAULT
Université du Québec à Montréal
uqammathieuthibault@gmail.com

RAYMOND DUVAL ET FRANÇOIS PLUVINAGE

APPRENTISSAGES ALGEBRIQUES

« *Le nombre est dans l'art comme dans la science. L'algèbre est dans l'astronomie, et l'astronomie touche à la poésie ; l'algèbre est dans la musique, et la musique touche à la poésie.*

L'esprit de l'homme a trois clés qui ouvrent tout : le chiffre, la lettre, la note. »

Victor Hugo (1840). *Les Rayons et les Ombres* (extrait de la fin de la Préface)

PREMIERE PARTIE : POINTS DE VUE SUR L'ALGEBRE ELEMENTAIRE ET SON ENSEIGNEMENT

Abstract. Standpoints on elementary algebra and its teaching. This first article of a series of two presents on teaching elementary algebra different standpoints, not always easy to reconcile with each other; a second article will cover activities to promote the learning of algebra. The expectations expressed by the institution on this learning are determined by the common uses of algebra in everyday or professional life, such as the introduction and use of formulas in a spreadsheet. But the results observed at the end of compulsory schooling are clearly insufficient. From a cognitive standpoint, the phased curriculum of algebra does not appear satisfactory, especially not taking into account the difference between symbolic writing and the natural language. The historical view shows, before the use of algebraic notation, the use of algorithmic processes significantly more advanced than the beginnings of algebra, so difficult to transpose in education; but it also points out that following the invention of printing, writing algebraic and relative numbers have arisen simultaneously, which deserves consideration for teaching algebra. Our analysis of the treatment required by algebraic problem solving first highlights the role of the functional designation, next to the direct designation, and the crucial importance of a commonly misunderstood operation, namely that of renaming considered objects. Then arose the fundamental semiotic distinction for analyzing the specific cognitive functioning for processing complete expressions in algebra, namely between a sign and its occurrences.

Résumé. Ce premier article d'une série de deux expose sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire des points de vue différents, pas toujours faciles à concilier les uns avec les autres ; un second article portera sur des activités destinées à favoriser l'apprentissage de l'algèbre. Les attentes exprimées par l'institution concernant cet apprentissage sont déterminées par les usages répandus de l'algèbre dans la vie courante ou professionnelle, comme par exemple l'introduction et l'usage de formules dans un tableur. Mais les résultats observés à l'issue de la scolarité pour tous sont manifestement insuffisants. Du point de vue cognitif, les progressions mises en place dans les programmes d'enseignement de l'algèbre n'apparaissent pas satisfaisantes, méconnaissant notamment l'écart entre l'écriture

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 117 -152.

symbolique et la langue naturelle. Le regard historique montre, avant l'usage de l'écriture algébrique, l'emploi de traitements algorithmiques sensiblement plus avancés que ceux des débuts de l'algèbre, donc difficilement transposables dans l'enseignement ; mais il signale aussi qu'à la suite de l'invention de l'imprimerie, l'écriture algébrique et les nombres relatifs ont surgi simultanément, ce qui mérite considération pour l'enseignement de l'algèbre. Notre analyse des traitements exigés par les résolutions algébriques de problèmes met tout d'abord en évidence le rôle de la désignation fonctionnelle à côté de la désignation directe et l'importance cruciale d'une opération usuellement méconnue, à savoir celle de redésignation des objets en jeu. Puis est posée la distinction sémiotique fondamentale pour analyser le fonctionnement cognitif propre aux traitements d'expressions complètes en algèbre, à savoir celle entre un signe et ses occurrences.

Mots-clés. Algèbre élémentaire, Formules, Désignation directe, Désignation fonctionnelle, Redésignation, Occurrences d’un signe.

Introduction

La complexité des problèmes soulevés par l’enseignement de l’algèbre élémentaire nous a conduits à envisager une étude en deux volets sur ce sujet. Cet article qui présente le regard porté sur l’algèbre depuis plusieurs points de vue constitue le premier volet. Il s’agit donc d’une analyse qui peut être qualifiée de préliminaire en termes d’ingénierie didactique (Artigue, 1987, pp. 287 et 288). Le lecteur ne s’étonnera donc pas de trouver dans cet article peu de références aux nombreux documents didactiques portant sur l’algèbre. Le second volet de notre étude s’appuiera davantage sur de telles citations, puisqu’il portera sur des activités d’enseignement visant à favoriser l’apprentissage de l’algèbre pour tous les élèves.

1. Point de vue institutionnel sur l’enseignement de l’algèbre de 11 à 15 ans

1.1. Objectifs institutionnels et analyse cognitive de résultats d’évaluation

La pratique systématique d’évaluation des acquis est désormais bien implantée au niveau international. C’est ainsi que les enquêtes PISA, acronyme de “Programme for International Student Assessment”, ou en français « Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves », ont un retentissement évident au sein des institutions éducatives de nombreux pays. Ces enquêtes s’appliquent, dans trente pays membres de l’OCDE et de onze autres pays partenaires, aux jeunes de 15 ans, cet âge s’expliquant par l’objectif de PISA, qui est de déterminer « dans quelle mesure les élèves qui arrivent en fin d'obligation scolaire ont acquis certaines des connaissances et compétences essentielles pour pouvoir participer pleinement à la vie de nos sociétés modernes, en particulier en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences » (Rapport OCDE, 2011, version française, volume 1, p. 18). Les résultats qui retiennent surtout l'attention des responsables des systèmes éducatifs sont d'une part les niveaux de réussite globaux, d'autre part les taux de réussite à certaines des questions posées.

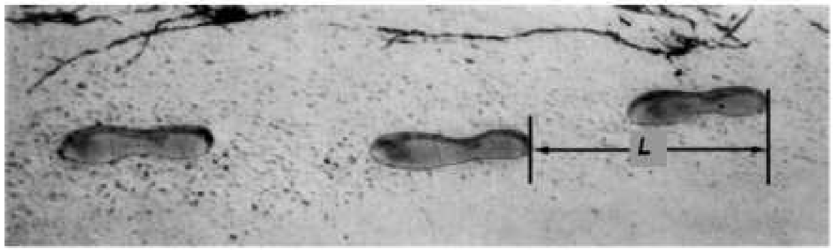
Mais une autre analyse des résultats de PISA peut consister en des comparaisons des réussites à certaines questions. En l'absence de tableaux de croisements des réponses à deux ou plusieurs questions, les résultats communiqués ne permettent pas de procéder à une telle comparaison de manière individuelle, mais ils permettent cependant des comparaisons globales qui sont déjà très révélatrices. Nous avons considéré les rapports les plus récents de PISA (ceux qui concernent les résultats de PISA 2009), mais ceux-ci continuent à s'appuyer largement sur les résultats déjà obtenus en 2003 et qui constituent donc des références toujours valides.

Considérons deux des questions extraites de l'enquête internationale PISA de 2003. Elles portent uniquement sur l'utilisation de formules. Dans la première, les lettres correspondent au codage des marges d'un tableau et doivent être mise en correspondance avec une formule.

- ***La meilleure voiture (Best car)*** proposait la formule suivante pour un niveau de qualité de véhicules :
  $$(3 \text{ x } S) + F + E + T.$$
  Il s'agissait de faire son calcul pour les valeurs S=3, F=1, E=2, T=3 (valeurs à lire dans un tableau).
- ***Marche à pied (Walking)***

  La seconde question considérée est reproduite en Figure 1. Une formule y est indiquée, comportant un terme fractionnaire : $\frac{n}{L} = 140$.

MARCHE A PIED



L'image montre les traces de pas d'un homme en train de marcher. La longueur de pas L est la distance entre l'arrière de deux traces de pas consécutives.

Pour les hommes, la formule $\frac{n}{L} = 140$ donne un rapport approximatif entre n et L, où :

n = nombre de pas par minute,

L = longueur de pas en mètres.

Question 1 : MARCHE À PIED M124Q01 - 0 1 2 9

Si la formule s'applique à la façon de marcher d'Henri et qu'Henri fait 70 pas par minute, quelle est la longueur de pas d'Henri ? Montrez vos calculs.

Figure 1. La question « Walking » de PISA 2003 dans sa version française

Le tableau 1 ci-après montre les taux de réussite à ces deux questions, obtenus dans quelques pays auprès d'élèves de 15 ans, c'est à dire après plusieurs années d'enseignement de l'algèbre. On observe une chute considérable de réussite entre les deux questions. Mais le phénomène important est que cette chute se produit pour les populations de pays différents, alors que l'organisation des systèmes éducatifs n'est pas la même dans ces pays. On touche là à un phénomène intrinsèque qui concerne l'introduction de l'algèbre, ou tout au moins l'utilisation de formules. Et peut-être la difficulté est-elle plus importante que ne le laisse paraître ces tableaux. Car, d'un point de vue cognitif, les acquisitions institutionnellement visées au terme de trois ou quatre années d'enseignement de l'algèbre impliquent la réussite à ces deux questions, et non pas seulement à l'une ou à l'autre. Or, comme nous l'avons signalé, les résultats communiqués ne nous permettent pas de savoir quel pourcentage obtient une telle double réussite.

Pays, avec indication de l'effectif interrogé	Taux de réussite	
	The best car ➘	Walking
Finlande (56 989)	**76%** ➘	**41%**
France (712 101)	**74%** ➘	**43%**
Brésil (1 850 984)	**49%** ➘	**14%**
USA (3 153 480)	**75%** ➘	**28%**

Tableau 1. Résultats observés dans quatre pays

Bien évidemment, l'interprétation de cette chute peut donner lieu à une discussion critique des questions posées. Ainsi on ne fera pas la même analyse de cette chute si l'on pense que ce sont deux questions différentes ou au contraire que les différences, non mathématiques, dans la manière de présenter les données d'un problème, sont négligeables. De même, on peut se demander si ce sont des questions d'algèbre. Car elles portent sur l'utilisation de formules. Et on peut se demander si l'enseignement de l'algèbre aide vraiment les élèves à utiliser des formules, en dehors des mathématiques, sur des données observées dans la réalité ou si, au contraire, cet apprentissage peut être fait indépendamment de l'enseignement de l'algèbre. Nous reviendrons plus loin sur toutes ces questions. Pour l'instant, nous resterons sur le constat massif que l'enquête PISA permet de mettre en évidence.

1.2. Les programmes d'un enseignement pour tous les élèves : trois impasses caractéristiques

La fonction d'un programme d'enseignement est d'organiser une progression pour l'acquisition, sur plusieurs années, d'un complexe de connaissances. Pour l'algèbre il s'agit bien sûr du complexe de connaissances que sont les équations et les inéquations comme méthodes de résolution de problèmes. Ce qui implique une certaine maîtrise du calcul littéral et algébrique. L'organisation de l'enseignement repose sur un découpage de ce complexe de connaissances en différentes notions, techniques, qui vont alors constituer des objectifs pour chaque année d'enseignement d'un cycle. Deux points sont donc essentiels dans l'analyse d'un programme. Il y a le choix d'un complexe de connaissances : il dépend des attentes sociales et des profils curriculaires de formation. Par exemple, enseigner l'algèbre à tous les élèves est-il vraiment nécessaire ? Question tout à fait légitime, vu l'importance des impasses systématiquement observées, mais qui n'est pas d'actualité. Et il y a le point de vue pris en compte pour découper un complexe de connaissance choisi ainsi que la méthode d'analyse mise en œuvre pour effectuer ce découpage. Ce point de vue est évidemment le point de vue mathématique, même si on l'assortit de considérations pédagogiques ou didactiques à l'intention des professeurs. *La méthode de découpage est généralement une analyse en connaissances mathématiquement pré-requises.*

Ainsi, quels que soient les programmes d'introduction à l'algèbre, on retrouve toujours les mêmes impasses caractéristiques sur trois points stratégiques pour la compréhension non pas de « l'élève », mais de centaines de milliers d'élèves : l'introduction de lettres-caméléons, l'écrasement des niveaux d'organisation dans les écritures symboliques et l'oubli de l'écart cognitif entre les écritures symboliques et la langue naturelle. Dans ce qui suit, nous prenons l'exemple du document officiel de 2008 « Du numérique au littéral », en vigueur en France jusqu'en 2015 pour l'organisation d'un enseignement de l'algèbre sur quatre ans, de la 6ème à la 3ème. En 2015, une consultation a été proposée sur des projets de programmes (Projet de programme pour le Cycle 4 – 9 avril 2015, consultable en ligne sur le site officiel du ministère de l'éducation nationale http://eduscol.education.fr/cid88456/consultation-sur-les-programmes-des-cycles-2-3-et-4.html), mais nous ne voyons pas que ces projets introduisent de sensibles modifications en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre et les sujets connexes (e. g. les nombres) que nous envisageons dans cette étude.

1.2.1 Le problème des « *différents usages des lettres* » en relation avec « *les différents statuts du signe* = »

Tout d'abord, le texte officiel de 2008 « Du numérique au littéral » met en avant les « différents usages des lettres ». Il en distingue quatre, comme spécifiques de l'algèbre : *variable*, *indéterminée*, *inconnue* et *paramètre*. Et un changement dans l'usage d'une lettre est lié (du moins pour les trois premiers usages) à un changement dans les « différents statuts du signe = » : « symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique », traduction d'« une identité pour rendre compte de l'universalité d'un énoncé toujours vrai », utilisation dans des énoncés « dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais », et utilisation comme symbole d'affectation. *Tout cela implique qu'une même lettre et qu'un même « symbole » dans l'écriture d'une équation peuvent avoir des statuts ou des significations totalement différents, voire « en rupture » les uns par rapport aux autres, sans que rien dans « l'expression algébrique » écrite (formule ou équation ?) ne l'indique.* On peut donc parler d'un symbole et de lettres-caméléons. Au moins pour tous ceux qui ne sont pas mathématiciens ou enseignants de mathématiques, ce qui est la situation des élèves de collège !

Le passage du numérique à un littéral où les lettres se prêtent à des usages polyvalents et sémantiquement incompatibles pose plusieurs questions. Comment introduire les lettres ? Faut-il introduire les lettres en privilégiant un statut, puis introduire progressivement les autres statuts ? Est-ce à partir de l'usage des lettres qu'on perçoit le statut du signe « = » ou est-ce l'inverse ? Cette dernière question s'impose d'autant plus qu'avec le calcul numérique le signe « = » « annonce un résultat ».

Le texte ne s'arrête pas à la première question. S'appuyant sur un exemple d'activité où il s'agit d'élaborer une formule, on se contente de la déclaration suivante : « il y a bien des façons de désigner le nombre de carreaux sur le côté (d'un carré) : par un symbole, par une lettre… Le choix de recourir à une lettre est le fruit d'une convention ». La suite montre que l'*on ne s'intéresse pas à l'opération de désignation à l'aide d'une lettre, opération qui est implicitement considérée comme triviale* pour deux raisons : on s'en tient à la désignation directe par un caractère évidemment conventionnel et on n'a pas à choisir l'objet que l'on va re-désigner. Or l'intérêt du recours à une lettre (un caractère pris dans un alphabet) n'est pas la désignation directe mais *la désignation fonctionnelle.* Et celle-ci implique le choix non pas d'une lettre mais de l'objet que l'on peut désigner directement de manière à pouvoir désigner un autre objet en fonction de l'objet désigné directement. Là est le seuil de l'utilisation algébrique des lettres. Et c'est un peu une boîte noire pour les élèves dans la « phase de mise en équation » pour la « résolution algébrique d'un problème». Car dire qu'elle « nécessite de repérer une grandeur qui va pouvoir s'exprimer de deux façons différentes », c'est en fait formuler deux exigences, qui apparaissent paradoxales au regard des pratiques de désignation dans la langue naturelle, sans donner aux élèves le moyen de prendre conscience de leur caractère spécifiquement mathématique.

L'impasse faite sur la diversité et la complexité des opérations de désignation apparaît dans la réponse à la seconde question. Le texte propose une progression sur quatre ans qui est entièrement centrée sur le statut des lettres : statut de variable en $6^{ème}$, d'indéterminée en $5^{ème}$, d'inconnue en $4^{ème}$ et de paramètre en $3^{ème}$ en liaison bien sûr avec les fonctions affines.

1.2.2 L'écrasement des niveaux d'organisation dans les écritures symboliques.

En « algèbre », les écritures symboliques articulent deux types différents de signes :

- D'une part les lettres et les chiffres, interprétables en termes de nombres, de grandeurs, de quantités, etc. Nous compterons également parmi les écritures numériques celles qui représentent un nombre négatif, tel (-1), ou des nombres particuliers, tels π ou $\sqrt{2}$.

- D'autre part les signes organisateurs d'expressions, c'est à dire d'unités de sens constituées par la combinaison d'au moins trois signes parmi les chiffres ou les lettres et les symboles suivants :
  - o les symboles d'opérations (+, – , $\times$ parfois noté par un simple point ou même sous-entendu, $\div$ ou / ou le trait de fraction horizontal, le décalage vertical pour les exposants),

- o les parenthèses, analogues à la ponctuation dans un texte, pour indiquer des priorités différentes des priorités opératoires usuelles pour ces symboles (exponentiation en premier lieu, multiplication et division ensuite, addition et soustraction enfin)
- o les symboles de relation (= , < , > , ≤ , ≥), permettant de constituer des expressions complètes.

On obtient ainsi trois types d'unités discursives de sens :

- les expressions articulées autour d'un symbole de relation et constituant des expressions complètes (équations, formules, inéquations) parce que susceptibles d'être vraies ou non par exemple : $x > 1$,
- les expressions articulées autour d'un ou plusieurs symboles d'opérations et constituant un membre d'équation ou de formule, c'est-à-dire l'ensemble de tous les signes qui figurent d'un même côté d'un symbole de relation, par exemple $a - 1$ dans $1 - (2 - a) = a - 1$,
- les expressions articulées par un seul symbole d'opération ou marquées par des parenthèses et constituant les termes, par exemple $(2 - a)$ dans l'expression précédente.

Les deux derniers types d'expressions discursives sont des expressions incomplètes (voir infra 3.2). *Ces trois types d'unités discursives correspondent à trois niveaux d'organisation des unités de sens utilisées en algèbre,* et cela se traduit par des opérations de traitement très différentes selon le niveau considéré.

Cette distinction apparaît partiellement dans le texte avec l'opposition entre ce qui est appelé la « résolution de l'équation ou des équations », ou encore le « fonctionnement du calcul littéral pour passer d'une égalité à une autre », et la « transformation d'expressions algébriques ». La résolution d'une équation porte sur la recherche des valeurs (une, plusieurs, aucune, toutes) pour laquelle l'équivalence postulée entre deux expressions d'une même chose est vraie. La transformation d'une expression algébrique (réduction, factorisation, développement, ...) porte sur les seules expressions articulées par des symboles d'opérations. Or dans ces deux cas le texte parle d' « outil de calcul formel » ou de « calcul formel » et fait l'impasse sur *la différence entre les opérations de substitution* que ces deux traitements mobilisent spécifiquement.

La résolution d'équation exige que l'on puisse faire passer des termes d'un membre à l'autre en conservant l'équivalence postulée entre deux expressions d'une même chose. Ainsi le texte donne l'exemple du passage d'une expression complète à une autre « $d = vt$ à $v = d/t$ ». Et on a vu que plus de la moitié de la population ne réussit pas ce passage après plusieurs années d'enseignement, quels que soient les pays ! La transformation d'une expression algébrique, considérée comme un « programme de calcul », consiste en des substitutions d'expression uniquement faites en s'appuyant uniquement sur les propriétés des opérations qui en articulent lettres et chiffres. Le statut des lettres n'y intervient pas comme dans la résolution des équations. Ce type de substitution requiert que l'on puisse, par exemple, reconnaître dans la forme d'écriture d'une expression l'organisation caractéristique d'une identité remarquable, On peut alors avoir des difficultés de visibilité, analogues à celles de la reconnaissance d'une sous-figure dans une figure. Enfin, il y a la substitution qui consiste en l'instanciation de lettres par des valeurs numériques qu'on leur donne afin de trouver la valeur d'une expression complète. Ce type de substitution est caractéristique de l'utilisation des formules et, en ce sens, il s'oppose à la résolution d'une équation. On peut d'ailleurs remarquer que dans ce texte on ne fait pas de réelle distinction entre élaborer une formule et utiliser une formule, alors que les opérations mobilisées sont respectivement la désignation fonctionnelle conduisant à des expressions articulées par des symboles d'opérations et l'instanciation des lettres qui rabat le calcul algébrique sur le calcul numérique.

1.2.3 L'oubli de l'écart cognitif entre écritures symboliques et langue naturelle.

Le paradoxe de l'enseignement de l'algèbre est qu'on ne peut pas se couper de la langue naturelle pour l'introduire, alors que son apport épistémologique et mathématique est au contraire de rompre complètement avec la langue. Il y a là une ambivalence cognitive qui hypothèque très sérieusement tous les choix didactiques, parce que l'écart cognitif entre les productions algébriques et les productions linguistiques — sur la manière de les lire et de discerner leur organisation, d'en dériver d'autres expressions complètes —n'est jamais pris en charge de manière pertinente. Or là se situe l'un des points clés pour faire prendre conscience de la rupture entre le « calcul numérique et le calcul algébrique ».

Il y a tout d'abord la méconnaissance de la variété des opérations de désignation directe et indirecte dans la langue naturelle. En regard, la désignation directe par des lettres paraît simple comme un codage, mais la désignation fonctionnelle qui est spécifique à l'utilisation des lettres en algèbre n'a pas d'équivalent dans la langue naturelle. Si on veut la formuler verbalement il faut recourir à une phrase et pas seulement à un syntagme nominal et encore moins à des substantifs ou à des déictifs. En outre, elle va à l'encontre de toutes les pratiques de désignation qui conduisent à l'élargissement du vocabulaire utilisable et non pas à sa réduction maximale pour désigner des objets. On retrouve donc ici l'impasse évoquée plus haut sur la complexité des opérations de désignation qui pourtant touchent directement au statut des lettres (1.2.1).

Il y a ensuite tous les problèmes que posent les passages entre la langue naturelle et tous les autres types de représentation utilisés en mathématiques, c'est à dire tous les problèmes de conversion. Ici, ils se traduisent par les phénomènes de non congruence qui surgissent entre les énoncés en langue naturelle et les écritures symboliques. Ceux concernant la mise en équations à partir d'énoncés de problèmes sont bien connus. Le texte des programmes semble vouloir les contourner en proposant des problèmes privilégiant l'élaboration de formules à partir de configurations géométriques décomposées en carrés que l'on peut dénombrer. Mais, étrangement, il recourt à des tâches de conversion inverse, en proposant des tâches de description verbale de l'organisation « structurale » des « expressions algébriques ». Intention louable puisque l'expression personnelle en langue naturelle est le moyen nécessaire pour une prise de conscience. Mais une telle description se heurte aux mêmes phénomènes de non congruence que la mise en équations des données d'un énoncé. Car ici il y a un conflit entre la perception de l'organisation d'une écriture autour des signes d'opération ou d'égalité, et sa compréhension mathématique. L'une est déterminée par des critères de symétrie à partir de certains symboles et l'autre est déterminée par la compréhension des propriétés des opérations ou des relations désignées par ces symboles. La description verbale ne peut atteindre son but que si elle accompagne une activité sur un autre type de représentation permettant de basculer de la perception centrée sur une disposition symétrique des signes à une perception centrée sur leur ordre opératoire.

2. Point de vue épistémologique sur l'émergence de l'algèbre

Comme nous venons de le voir dans un cas qui est certes particulier, mais qui correspond à une étude sensiblement plus poussée que dans les autres documents et ouvrages que nous avons pu consulter, les textes de programmes scolaires, les documents d'accompagnement et les manuels, ne portent pas la trace d'une prise de conscience des obstacles à franchir pour entrer dans le monde de l'algèbre élémentaire. Pour l'approche d'une question quelque peu délicate touchant à l'enseignement, comme l'est celle qui nous intéresse ici, l'éclairage qu'apporte l'histoire des mathématiques met souvent en lumière des phénomènes que l'on ne soupçonnait pas. Dans une perspective d'enseignement de l'algèbre, on peut par exemple se poser la question : Auxquelles, des équations ou des relations aujourd'hui exprimées par des formules, convient-il d'attribuer le bénéfice de l'antériorité ? Mais les historiens des mathématiques ne tranchent pas, car les unes et les autres apparaissent dans les traces les plus anciennes de l'activité mathématique.

2.1. L'antiquité : orientation vers des traitements algorithmiques

Les deux papyrus égyptiens qui font autorité en matière de traitements mathématiques sont le papyrus de Moscou, qui date d'environ 1850 ans avant J. C., et le papyrus Rhind rédigé environ 200 ans plus tard par le scribe Ahmès. Ces papyrus, présentés dans Mac Tutor par O'Connor et Robertson (2000), traitent tous deux de problèmes dont certains sont des résolutions d'équations alors que les autres mettent en jeu des relations.

Relevons toutefois que le spectre couvert pas les problèmes où des relations sont en jeu est nettement plus large que celui des résolutions d'équations. Celles-ci apparaissent à propos soit de problèmes numériques (e.g. ceux nommés *aha* : $x + x/n = a$, avec n et a donnés), notamment liés aux techniques de calcul ayant cours à l'époque en Egypte, soit de problèmes de proportions, tels les problèmes 1 à 6 du papyrus Rhind, où il est question de la quantité de grain nécessaire pour obtenir un certain nombre de miches de pain ou de pintes de bière.

Du côté des relations apparaissent des problèmes d'arpentages, de mesures diverses comme masses, volumes, en particulier ceux qui mettent en jeu des pyramides. Les scribes s'intéressaient également à des approximations, comme celles du nombre π (voir un cas en figure 2 : un disque de diamètre 9 et un carré de côté 8 ont des aires proches).

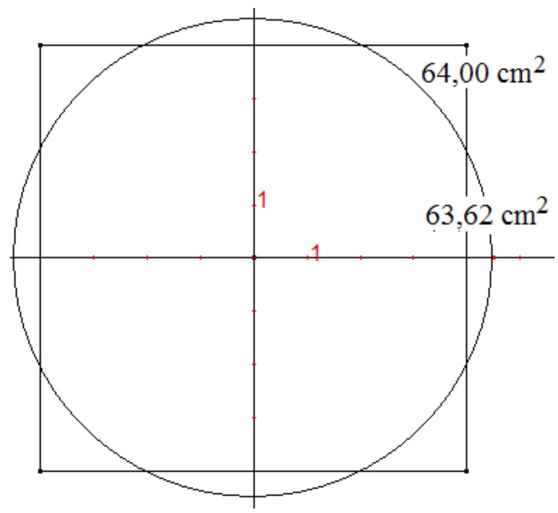


Figure 2. Carré et disque d'aires voisines

Bien sûr, tous les traitements présentés à propos de relations sont numériques, car il ne pouvait être question de calcul formel. Les papyrus montrent comment on traite telle question pour telles et telles valeurs numériques. Mais n'est-ce pas ainsi que l'on procède aujourd'hui encore, quand on montre des techniques opératoires à des élèves de l'école primaire ?

Les relations les plus simples sont faciles à exprimer sans recours à un quelconque symbolisme. Ainsi, le volume d'une pyramide est le tiers du volume du parallélépipède de même base et de hauteur égale ; cela se montre aisément dans le cas particulier du cube découpé en trois pyramides congruentes.

Sur la figure 3, on voit que les trois pyramides EABCD, EBCGF et ECDHG sont congruentes. Le cas général, envisagé par exemple par Démocrite (vers 460 – vers 370 av. J. C.), ainsi que celui des cônes, se démontrent plus difficilement.

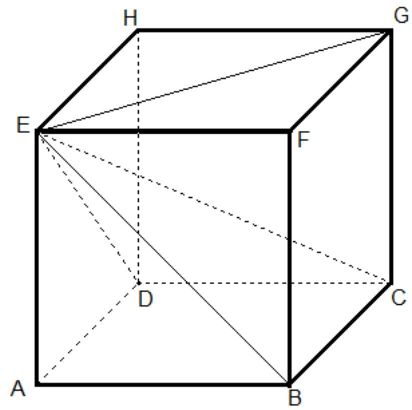


Figure 3. Pyramides égales dans un cube

Les scribes égyptiens s'attaquaient aussi à des relations plus compliquées. Par exemple, celle du tronc de pyramide (figure 4) considéré sur le papyrus de Moscou est représentative d'une situation qui dépasse le premier degré. La formule générale est dans ce cas :

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Et ce que le papyrus explicite, c'est le calcul qui permet d'obtenir ce volume, pour les valeurs h = 6, a = 4 et b = 2.

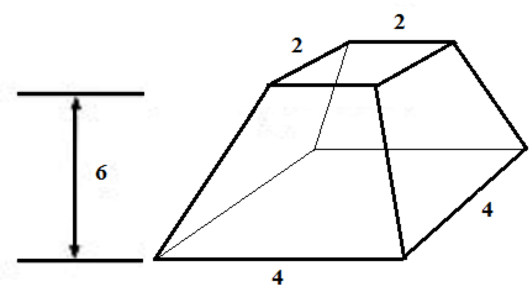


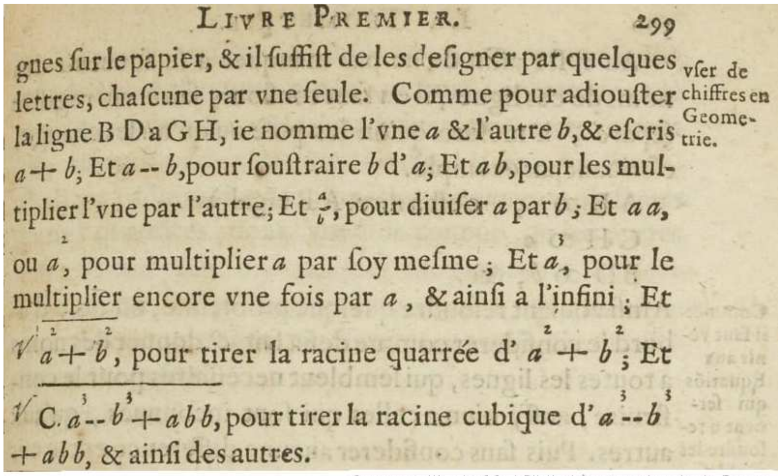
Figure 4. Tronc de pyramide du papyrus de Moscou

On voit sur les exemples indiqués que les papyrus indiquent très nettement une orientation algorithmique. Et ce n'est pas seulement propre aux papyrus égyptiens. Ainsi, des tablettes babyloniennes antérieures, puisque datées de 2000 av. J. C., contiennent des tables de carrés qui permettent le calcul d'un produit *ab* en n'ayant à effectuer que des sommes, des différences et des divisions par deux. Ce qui est mis en œuvre est l'identité que nous écrivons aujourd'hui $ab = [(a + b)^2 - (a - b)^2]/4$. Evidemment les tablettes ne présentent pas une telle écriture symbolique, mais indiquent sur des exemples numériques comment utiliser la table des carrés pour obtenir un produit. Par exemple, si je veux calculer 58×27, je vais consulter la table pour y trouver les carrés de 58 + 27 = 85 et de 58 – 27 = 31, lesquels sont respectivement 7225 et 961. Leur différence est 6264, que l'on divisera deux fois de suite par deux pour obtenir d'abord 3132 et finalement 1566, qui est bien le produit cherché.

Si certaines situations étudiées dans l'antiquité peuvent donner lieu à des propositions d'activités susceptibles d'intéresser des élèves actuels, certaines pouvant d'ailleurs être utilement conduites avec le recours à l'outil informatique comme le tableur, elles se situent le plus souvent à un niveau plus avancé que celui de l'entrée dans l'algèbre. Celle-ci est quant à elle orientée vers la manipulation et l'emploi de l'écriture symbolique, qui n'était nullement en gestation dans l'antiquité. Notre regard sur l'histoire doit plutôt se porter vers l'époque d'apparition de l'écriture symbolique.

2.2. Deux irruptions concomitantes : l'écriture symbolique et les nombres relatifs

L'écriture qui est aujourd'hui familière à tout utilisateur de mathématiques a été mise en place et s'est répandue en une durée de moins de 50 ans, entre 1591 et 1637, ce qui est extrêmement court. Les ouvrages du début de cette période sont d'une lecture pénible pour les non spécialistes, alors que la *Géométrie* de Descartes, dont la figure 5 ci-après reproduit un extrait où l'auteur considère la désignation par des lettres, est un texte qui ne demande pratiquement pas d'effort à un lecteur actuel, sinon pour l'identification de certaines graphies de l'époque (comme par exemple les formes de la lettre s). La date de 1591 est celle de la parution de l'œuvre *In Artem Analyticam Isagoge* de François Viète, dont les historiens s'accordent à considérer qu'elle marque la naissance de l'algèbre symbolique. La date de 1637 est celle de la publication du *Discours de la méthode* de René Descartes, suivi de la *Géométrie*, considérée par l'auteur comme un *essai* d'application de sa méthode.



LIVRE PREMIER. 299

gnes ſur le papier, & il ſuffiſt de les deſigner par quelques lettres, chaſcune par vne ſeule. Comme pour adiouſter la ligne B D a G H, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a + b$; Et $a -- b$, pour ſouſtraire b d'a; Et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; Et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; Et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'$a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C.\, a^3 -- b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique d'$a^3 -- b^3 + abb$, & ainſi des autres.

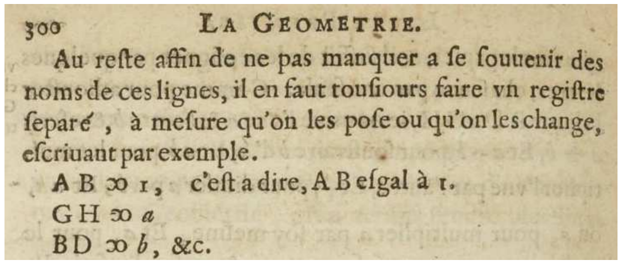
Vſer de chiffres en Geometrie.

Figure 5. Reproduction d'un passage de la *Géométrie* dans le *Discours de la Méthode*

Voyons les points clés de l'apparition de notre écriture symbolique. Comme nous l'avons vu, les ingrédients de base de l'écriture symbolique sont évidemment des lettres et des nombres, accompagnés de symboles opératoires à valeur de conjonction, comme « + et – », et de symboles à valeur verbale, en premier lieu desquels figure le symbole d'égalité « = ». Une question naturelle est celle de l'apparition de ces signes. Et la réponse est de nature à surprendre : L'apparition de tous ces signes a précédé de peu la période qui nous a intéressés à propos de l'algèbre : entre 1489, date de publication de l'ouvrage *Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft*, de Johannes Widmann, le premier à introduire les signes « + et – » pour l'addition et la soustraction, et 1557, date de parution du livre de Robert Recorde intitulé *The Whetstone of Witte*, introduisant le symbole d'égalité que nous utilisons.

Une considération de nature socioépistémologique amène à se dire qu'un tel mouvement doit correspondre à une évolution qui ne se limite pas aux mathématiques. Et nous sommes tentés d'invoquer à ce sujet l'invention de l'imprimerie, vers 1440 par Gutenberg, conduisant à substituer aux manuscrits des ouvrages obtenus grâce à des fontes de caractères normalisés.

Pour l'anecdote, notons toutefois que Descartes ne notait pas l'égalité par le symbole « = » mais par le symbole $\reflectbox{$\propto$}$ (le signe ∝ renversé), comme on le voit sur la figure 6, dans un passage par ailleurs extrêmement instructif. En effet, on peut y remarquer le mot « *registre* », souvent utilisé seul en didactique, en raccourci de « registre d'expression ».


300 LA GEOMETRIE.

Au reſte affin de ne pas manquer a ſe ſouuenir des noms de ces lignes, il en faut touſiours faire vn regiſtre ſeparé, à meſure qu'on les poſe ou qu'on les change, eſcriuant par exemple.

AB ∞ 1, c'eſt a dire, AB eſgal à 1.
GH ∞ *a*
BD ∞ *b*, &c.

Figure 6. Signe d'égalité chez Descartes

À présent, si l'on contemple les productions du XVIe siècle qui ont utilisé les signes introduits par Widmann ou Recorde, on ne peut manquer de remarquer, à côté de l'algèbre, l'œuvre de Simon Stevin dans le domaine numérique. Dans *La pratique d'arithmétique*[1], publiée en 1585, Simon Stevin introduisit les signes opératoires, plutôt que de se contenter d'utiliser uniquement des vocables latins.

Par exemple, Stevin énonce la règle des signes comme le *théorème* : « *plus multiplié par plus donne produit plus, & moins multiplié par moins donne produit plus, & plus multiplié par moins, ou moins multiplié par plus, donne produit moins.* » A titre de démonstration, Stevin propose un cas numérique représentant la situation générale. Il s'agit de (8 – 5)×(9 – 7), accompagné de quelques explications. L'opération ci-contre reproduit exactement la présentation de Stevin (1634, p. 39). On y observe en particulier la présence d'un signe – en début d'une ligne (- 56 + 35).

8 - 5
9 - 7
- 56 + 35
72 - 45
6

C'est pour des études de ce type que la paternité des nombres négatifs est attribuée à Stevin, par ailleurs connu pour sa contribution au système décimal de numération. Or, si les nombres négatifs ont ainsi cours dans les réflexions de Stevin, c'est en raison de sa vision géométrique des nombres. Sans aller jusqu'à la formalisation des nombres réels qui devra attendre le XIXe siècle, il considère que les nombres correspondent aux points d'une droite graduée. Il peut par exemple affirmer que √8 est un nombre (Ibid. p.9), puis généraliser : « *Thèse IV : Qu'il n'y a aucuns nombres*

[1] La consultation en ligne de ce texte dans une version posthume de 1634 augmentée par Albert Girard (Stevin, 1634) est recommandable. Mais tous les points signalés ici sont conformes à l'ouvrage original (Stevin, 1585), également consultable en ligne.

absurds, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds » (Ibid. p. 222). Auparavant, il aura affirmé que *nombre n'est point quantité discontinue* (Ibid. p.2) et que c'est à 0, et non pas à 1 comme les mathématiciens de la Grèce antique le posaient, qu'il faut accorder la propriété de ne pas se diviser en parties propres.

Des considérations de nature épistémologique qui précèdent, il résulte qu'il est essentiel d'envisager pour l'introduction de l'algèbre auprès de collégiens des activités mettant en jeu des nombres négatifs en même temps que des nombres positifs et non pas d'introduire les nombres négatifs dans des activités ultérieures. Les programmes de mathématiques français de 2008 n'étaient pas en conformité avec une telle préconisation, car ils introduisaient en classe de cinquième (le « grade 7 » de la désignation internationale des niveaux scolaires) des études d'écritures littérales et seulement un an plus tard en classe de quatrième (grade 8) le produit des nombres relatifs[2]. C'est ce produit, pierre d'achoppement signalée depuis longtemps déjà sur le chemin de l'acquisition des nombres réels (voir par exemple Glaeser, 1981), que nous allons à présent considérer.

2.3. Suivre Descartes pour multiplier les nombres relatifs ?

Le travail sur les formules et les équations s'appuie sur la mise en œuvre de toutes les règles opératoires sur les nombres relatifs. Notamment, les besoins d'utilisation de la distributivité du produit sur la somme, pour factoriser ou développer, sont très fréquents dans ce travail. Mais force est de constater que la présentation de cette distributivité dans l'enseignement mathématique est pour le moins légère. Dans les manuels scolaires de diverses époques et divers pays dont nous avons pu avoir connaissance, la distributivité du produit sur la somme ou bien est une règle affirmée sans aucune justification, ou bien est accompagnée d'une figure représentant deux rectangles de même hauteur accolés : la hauteur commune des rectangles étant par exemple désignée par a et les bases par b et c, cette figure justifie l'égalité

$$a\times(b + c) = a\times b + a\times c.$$

Pour les élèves qui la rencontrent à cette occasion, une telle présentation du produit de deux facteurs comme une aire n'est d'ailleurs pas nouvelle Ainsi, bien des manuels pour l'école primaire présentent des produits d'entiers comme des décomptes de carreaux assemblés en rectangles. Par exemple 3 rangées de 5 carreaux forment un rectangle de 15 carreaux, et si ce rectangle est vu comme constitué de 5 colonnes de 3 carreaux, on y voit une illustration de la commutativité de la multiplication : $3\times5 = 5\times3$.

[2] Il en est de même pour les propositions de programmes de 2015.

Mais le fait qu'une telle présentation du produit s'impose comme la seule vision géométrique de la multiplication peut être doublement catastrophique du point de vue didactique :

- D'une part, le produit de deux nombres représentant des grandeurs se trouve ainsi doté d'une dimension autre que celle de chacun ses facteurs. Les deux facteurs représentent des longueurs et leur produit représente une aire.
- D'autre part, cette représentation par des aires de rectangles est inadaptée au produit de nombres relatifs[3].

Une autre vision géométrique du produit de deux nombres doit donc être recherchée. La consultation du supplément de géométrie au *Discours de la Méthode* de René Descartes, précédemment cité, nous offre une piste pour cette recherche. Ce père de la géométrie analytique, dans le plan baptisé depuis par son nom : *plan cartésien*, considère que $c \times d$ est à c comme d est à 1 (Figure 7).

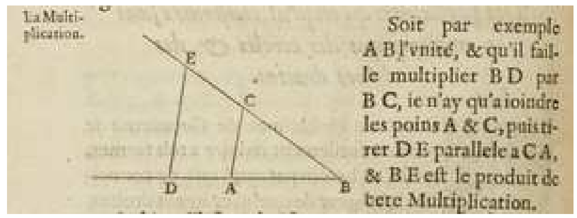


Figure 7. Extrait du Discours de la Méthode, p. 298

Le produit, tel qu'il résulte de la sorte du théorème de Thalès, n'est pas une aire mais une longueur comme chacun de ses facteurs. Dans la figure 7, seules sont représentées deux demi-droites, ce qui limite le produit à celui de deux facteurs positifs. Mais nous pouvons facilement étendre la construction au plan cartésien tout entier et rencontrer ainsi la fameuse *règle des signes* pour le produit des nombres relatifs. Un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra a été utilisé pour la figure 8) permet de représenter le produit de deux nombres a et b quel que soit leur signe. Les points A(a, 0) et B(b, 0) étant choisis sur l'axe des abscisses, on place le point B'(0, b), puis on trace le segment qui unit A au point V(0, 1) et enfin la parallèle à ce segment menée de B'. Cette parallèle rencontrera l'axe des abscisses au point

[3] On pourrait objecter ici la possibilité de mettre en place une convention de sens de parcours du bord des rectangles, d'une manière analogue à la pratique introduite à propos des intégrales définies. Mais la présentation de cette convention serait irréaliste pour les niveaux scolaires qui nous intéressent dans ce texte.

C(ab, 0). L'affichage dans ce logiciel a conduit à veiller à une bonne lecture en mettant entre parenthèses les valeurs de a et b lorsqu'elles sont négatives (cas de -2 sur la figure 8).

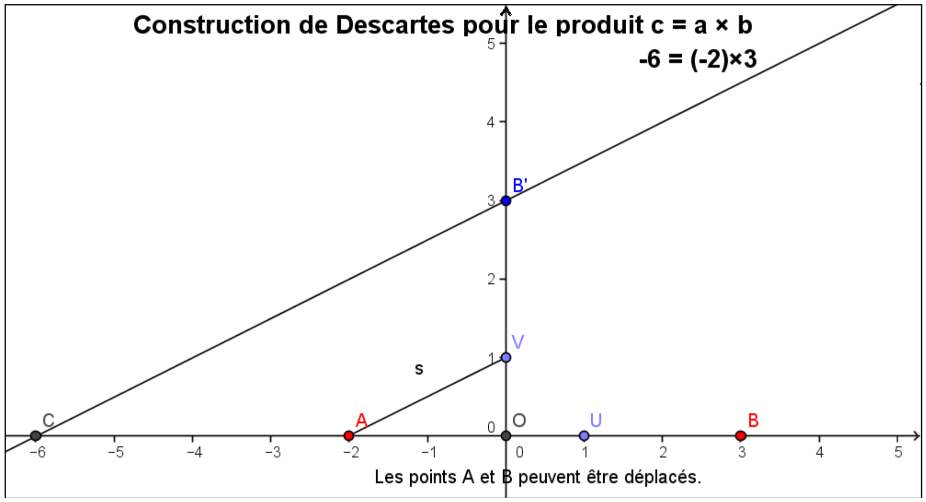


Figure 8. Représentation du produit de deux nombres a et b dans le plan cartésien

Mais la construction de Descartes ne met pas la distributivité du produit sur la somme autant en évidence que ne le fait le produit vu comme aire de rectangle.

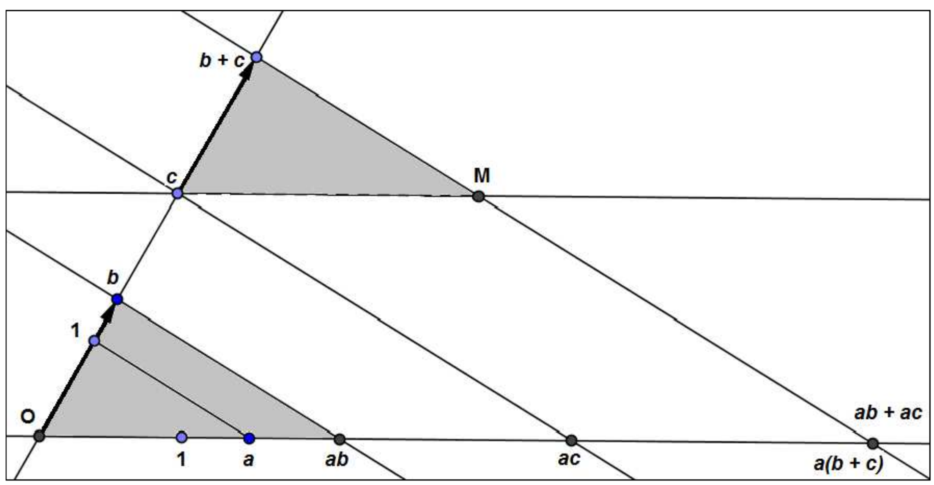


Figure 9. Distributivité $a(b + c) = ab + ac$ dans la construction de Descartes

La figure 9 illustre cette distributivité, passant par l'interprétation de la somme comme une translation : la flèche qui va de O à b est égale à celle qui va de c à $b + c$, et l'observation de la congruence des deux triangles grisés permettent de justifier que $a(b + c)$ et $ab + ac$ désignent le même point. Mais les expérimentations que nous avons pu conduire, jusqu'en formation de professeurs de mathématiques (Pluvinage et Flores, 2016) ont montré la difficulté de cette démarche. En revanche de même que la construction de Descartes, l'**homothétie** de rapport positif ou négatif présente le produit comme une longeur et conduit à une interprétation géométrique sensible de la règle des signes, tout en mettant en évidence la propriété de distributivité du produit sur la somme. Nous y reviendrons dans la seconde partie de notre étude, consacrée aux activités pour faire faire de l'algèbre.

3. *Un point de vue de mathématiques appliquées : un herbier de formules et d'équations*

Lors des examens auxquels nous avons procédé jusqu'ici, les divers traitements mathématiques auxquels il faut savoir recourir en algèbre élémentaire ont pu être rencontrés. Mais pour autant, nous restons désarmés sur des points cruciaux, par exemple la résolution d'un énoncé comme le suivant, conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

> L'âge de Lola : « *L'an prochain,* dit Lola, *j'aurai trois fois l'âge que j'avais il y a neuf ans, quand ma famille est venue habiter cet appartement.* » Quel âge a Lola aujourd'hui ?

Il s'agit d'un énoncé[4] dont l'étude est proposée dans l'ouvrage d'Ursini et al. (2005, p. 92) et sur lequel nous reviendrons. Les questions que nous nous posons ici sont : Un tel problème a-t-il sa place en tant qu'activité proposée à des débutants en algèbre ? Si oui, comment doter (tous) les élèves des outils pour le résoudre ? Il est évidemment exclu de vouloir répondre à partir de la considération d'un unique énoncé. Nous avons donc entrepris un tour d'horizon des types d'emploi de lettres dans des formules ou équations par des manuels scolaires et des ouvrages scientifiques. Ce tour d'horizon s'est concrétisé sous la forme de l'herbier de formules et d'équation suivant.

[4] L'énoncé original en espagnol est le suivant : *Dentro de un año, Amanda tendrá el triple de la edad que tenía hace nueve años. ¿Qué edad tiene Amanda ahora?* Dans son adaptation française, nous avons justifié la considération de neuf ans en arrière par un événement de l'époque, afin que l'énoncé n'apparaisse pas gratuit.

Aire d'un triangle à partir de base et hauteur correspondante	(1)	$A = \frac{bh}{2}$
Définition de vitesse	(2)	$v = \frac{d}{t}$
Consommation d'eau déduite de l'énergie électrique consommée (formule réglementaire)	(3)	$P = 250\frac{X}{Z}$
Relation d'Euler pour les polyèdres convexes (généralisée en caractéristique d'Euler-Poincaré)	(4)	$s - a + f = 2$
Côté d'un triangle déterminé par les deux autres côtés et leur angle	(5)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}$
Racine carrée d'un carré	(6)	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
Distributivité du produit sur la somme	(7)	$a(b + c) = ab + ac$
Formule de la somme des premiers entiers naturels	(8)	$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, ou $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Equation du premier degré	(9)	$ax + b = cx + d$
Equation du second degré	(10)	$ax^2 + bx + c = 0$
Equation d'une droite dans le plan cartésien	(11)	$y = ax + b$
Cercle dans le plan euclidien repéré	(12)	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Division euclidienne dans les entiers naturels	(13)	$a = bq + r$, avec $r < b$

Tableau 2. L'herbier de formules et d'équations.

Sans entrer dans les détails de la sélection que nous avons faite pour aboutir à cet herbier, disons simplement que nous souhaitions qu'y soient représentés les différents types d'interactions entre objets que l'on rencontre à un niveau mathématique élémentaire.

Ce double tableau comporte deux cadres. Le premier cadre est partagé en deux blocs, respectivement de cinq et trois formules, et le second cadre présente un bloc de cinq égalités.

- On peut considérer chacune des cinq premières formules constituant le premier bloc comme *une relation opératoire orientée vers un résultat*. Les instructions d'application accompagnant la formule (3)[5] dans le texte officiel qui la présente explicitent bien la démarche attendue pour son usage. Ici le signe d'égalité pourrait aussi bien être remplacé par une flèche. Il suffit de verbaliser la relation dénotée par ce signe pour voir qu'on peut l'exprimer par des verbes comme « donne », « fait », etc. Bien évidemment pour toutes les formules où le résultat figure dans le premier membre, autrement dit à gauche du signe d'égalité, ce verbe est à mettre au mode passif, comme « est obtenu par ». On notera que, formellement, *la quantité à calculer est toujours désignée une seule fois*. Dans les formules (1), (2), (3) et (5), le résultat à obtenir est de plus isolé au premier membre (ce n'est pas le cas dans la formule (4), où l'une quelconque des trois variables peut être calculée quand on connaît les deux autres). Il se peut que, dans une formule exprimant une relation opératoire, certaines variables apparaissent plusieurs fois, comme c'est le cas pour la formule (5), mais la variable qui correspond au résultat à obtenir n'apparaît qu'une fois.
- Au contraire, dans chacune des formules qui constituent le second bloc, il y a répétition de variables de part et d'autre du signe d'égalité. Ce que chacune de ces formules présente est *une relation d'identité entre deux expressions incomplètes* déterminées par les propriétés des opérations qui articulent des lettres et des nombres. *Une telle construction est propre à l'algèbre.* Il y a une certaine

---

[5] **Avis et communications Ministère de l'écologie et du développement durable**
Avis relatif à des délibérations des agences de l'eau AGENCE DE L'EAU ARTOIS-PICARDIE Délibération n° 2002-A-063 du 4 octobre 2002, NOR: DEVE0210424V
Article 9 Mesure indirecte des volumes prélevés
1. Calcul du prélèvement en fonction de l'énergie électrique consommée
Le volume prélevé est obtenu par application de la formule suivante : $P = 250 \times W/Z$ avec :
P : volume prélevé en mètres cubes durant la période soumise à redevance ;
W : énergie électrique consommée mesurée au compteur, exprimée en kWh ;
Z : hauteur théorique minimale d'élévation en mètres.
(J.O. du 12-29-2002, n 303, p. 60 059 texte 5)

ressemblance avec la construction de syntagmes nominaux à partir de propositions dans la langue naturelle, mais la comparaison s'arrête là.

On pourra noter que quatre emplois différents du signe d'égalité y apparaissent :

- *une relation d'affectation par définition* (formule (1) du tableau, définissant la vitesse). Une telle affectation est orientée. Dans certains langages informatiques, elle est rendue par le signe double « $\coloneqq$ », l'objet défini figurant à gauche du signe et sa définition à droite.
- *une relation opératoire orientée vers un résultat, comme pour n'importe quel calcul numérique* ((3), (4), (5) et (6) du tableau).
- *une relation d'équivalence sémantique* qui porte non pas sur les objets représentés, mais sur la manière de les désigner. On retrouve ici la distinction introduite par Frege entre sens et référence. On touche ici à la difficulté majeure de la mise en équation : trouver deux manières différentes de désigner un même objet (des quantités, des grandeurs mesurées, etc.), c'est-à-dire trouver deux membres sémantiquement équivalents. Nous en avons vu un exemple à propos de la formule (3) d'aire d'un rectangle, appliquée de deux façons différentes à l'aire d'un triangle rectangle isocèle pour aboutir à la relation $b^2/4 = a^2/2$ entre l'hypoténuse b et le côté de l'angle droit a.

  Signalons au passage que le calcul fractionnaire avec la réduction à un même dénominateur relève d'une telle égalité formelle. Mais il nous semble que c'est une distinction rétroactive, que l'on a faite après l'avènement de l'algèbre et du calcul algébrique.

Ces différents emplois de l'égalité importent pour l'élaboration d'une formule, mais une fois celle-ci établie, libre cours est donné à tous les jeux qu'autorise l'égalité mathématique. C'est pourquoi d'ailleurs, songeant aux écueils signalés précédemment en 1.2.1, nous n'avons pas parlé à leur propos de statuts, mais d'emplois du signe d'égalité. A la différence de statuts qui sont établis, les emplois sont, comme nous le verrons plus avant (4.2.2), tributaires des activités réalisées. Par exemple, l'identité (8) de la distributivité peut donner lieu à deux lectures opératoires (développement et factorisation). Et au contraire, les utilisations possibles de la formule (2) définissant une vitesse amènent à la manipuler comme une équivalence, pour obtenir trois écritures *équivalentes* : v = d/t, d = vt et t = d/v. Ainsi, pour prédire l'heure d'arrivée de coureurs cyclistes roulant à 45 km/h et auxquels il reste 20 km à parcourir à 16h45, la réponse surgira directement de la substitution des valeurs 20 et 45 dans la dernière des trois écritures : t = 20/45, soit environ 0,44 h ou 27 minutes. L'égalité de définition, orientée, est ainsi devenue une équivalence pour cette utilisation.

4. Le fonctionnement sémio-cognitif requis pour comprendre en algèbre

La première question pour toute recherche sur un enseignement général de l'algèbre est celle de la décomposition d'un complexe de connaissances à acquérir. Car cette décomposition définit non seulement le cadre d'une progression sur plusieurs années mais le choix didactique des activités données aux élèves dans les classes à l'échelle de quelques semaines ou d'une année. Lorsqu'elle est considérée d'un point de vue mathématique, cette décomposition est toujours faite par la réitération d'analyse en connaissances mathématiquement pré-requises (Conférence Siemat[6] III, 2011) et les recherches se font localement dans le cadre de ce découpage. Or cela ne peut que conduire aux impasses bien connues que nous avons rappelées. Quelle autre décomposition proposer pour ce complexe de connaissances que sont la résolution des équations et leur utilisation dans la résolution de problèmes, objectif de l'enseignement général de l'algèbre ?

Les problèmes de compréhension que soulève l'introduction de l'algèbre viennent de ce que l'on introduit *un registre de représentation sémiotique dont le fonctionnement cognitif est en rupture complète* avec les modes de fonctionnement des registres de la langue naturelle et de la représentation décimale des nombres. Ce registre ne se caractérise pas par l'emploi de lettres mais par de multiples opérations de substitution entre mots, signes numériques (chiffres ou écritures spécifiques comme $\sqrt{2}$) et lettres. Nous disons ici « chiffres » pour écarter la désignation de nombres par des expressions littérales. Pour décrire le fonctionnement de ce registre, nous allons d'abord regarder la diversité des opérations de désignation que les passages entre mots, chiffres et lettres recouvrent, puis les deux types d'expressions produites, et les transformations de l'organisation des expressions produites. Nous évoquerons, pour finir, les opérations d'instanciations qui conduisent souvent à une utilisation et une compréhension indifférenciées des équations et des formules.

4.1. La diversité des opérations de désignation et les passages entre mots, chiffres et lettres.

Rappelons tout d'abord que désigner des objets est la première opération discursive propre au langage et plus généralement à tout registre discursif. La maîtrise de la langue naturelle commence non pas avec la connaissance du vocabulaire mais avec la pratique de la désignation directe et, surtout, de la désignation indirecte pour les

---

[6] Deux regards opposés sur les points critiques de l'enseignement de l'algèbre au collège. III SIEMAT, Sao Paolo, UNIBAN 21-25 juin 2011

objets qui échappent à une désignation directe. Or ce sont les opérations les plus fréquentes dans toute pratique discursive (*Sémiosis et pensée humaine* chap. II). Une désignation indirecte requiert que l'on construise une expression. Dans la langue naturelle l'expression construite prend la forme d'un syntagme nominal qui est une micro-description de l'objet que l'on veut désigner. Elle combine au moins deux termes référentiels avec des termes de liaison. Par exemple : « le prix *du* litre *d'*essence *à la* pompe *avant* la dernière crise pétrolière ». Ainsi l'énoncé du problème de Lola (*supra* 3) repose entièrement sur trois opérations de désignation indirecte : « l'âge de Lola l'an prochain, l'âge de Lola il y a neuf ans, l'âge de Lola aujourd'hui ».

4.1.1. Des opérations de *redésignation* indirecte à l'emploi de lettres

L'intérêt mathématique de l'emploi des lettres est dans l'opération indirecte de désignation qu'elle rend possible et non pas dans l'opération directe de désignation. La désignation fonctionnelle permet, en effet, de désigner des objets différents en utilisant une seule lettre et donc de réduire au minimum les opérations de désignations directes qui exigeraient chaque fois des lettres différentes. La désignation d'un objet se fait alors à partir de la désignation d'un autre objet. Par exemple, si x désigne l'âge de Lola $x + 1$ et $x – 9$ désigneront respectivement les âges de Lola dans un an et il y a neuf ans. La désignation fonctionnelle exige qu'il y ait une relation numérique entre les objets que l'on va désigner par la même lettre. Et cette relation va être marquée par un symbole d'opération. La désignation directe par une lettre ne présente qu'un intérêt général et limité d'abréviation : x, y, z pour les différents âges de Lola. Autrement dit, au lieu de chercher à avoir autant de désignations directes qu'il y a d'objets différents à désigner, selon le principe économique qui commande la communication orale et la pratique spontanée du langage, on cherche au contraire à les réduire au minimum possible.

On voit ici apparaître une première divergence entre la décomposition des connaissances faites du point de vue cognitif et celle faite du point du point de mathématique pour introduire l'algèbre. Elle porte sur l'emploi des lettres. Faut-il mettre l'accent d'abord sur la prise de conscience de l'opération de désignation fonctionnelle qu'il implique ou sur le rôle mathématique que l'on va donner à la lettre dans le choix d'un problème (variable et non pas inconnue ou indéterminée) ? La déclaration suivante, faite en première page du document officiel de 2008 (supra 1. 3), est à cet égard révélatrice du choix didactique systématiquement fait quand on s'en tient au seul point de vue mathématique : « La nécessité d'avoir à DESIGNER *le nombre de carreaux sur le côté* (un carré représenté par une figure de carreaux blancs et entouré d'un bord de carreaux grisés) justifie l'EMPLOI *d'une lettre* ». Autrement dit, on substitue une désignation directe par une lettre, qui ne pose aucun problème, à une désignation indirecte qui paraît d'autant plus complexe et coûteuse qu'il s'agit d'une micro-description :« *le* nombre *de* carreaux *sur le* côté (du carré dessiné) ». Ce faisant on néglige deux choses :

— On ne désigne pas, mais on REDESIGNE ce qui a déjà été désigné verbalement. Ce qui est la pratique couramment attendue dans les énoncés de problèmes proposés pour introduire l'emploi de lettres.
— L'intérêt et la difficulté de l'emploi d'une lettre commence avec la désignation fonctionnelle et non pas avec la désignation directe.

En négligeant ces deux points cognitivement essentiels, on prépare, pour la suite des apprentissages, des incompréhensions et des blocages qui surgiront comme le retour de ce que l'enseignement aura d'emblée refoulé.

4.2.2 Les différents types d'opérations de *redésignation* et les types d'objets désignés

Toutes les opérations de désignation directe ou indirecte que l'on fait dans la pratique élémentaire de l'algèbre, et donc que l'on demande de faire aux élèves, s'inscrivent dans une gamme de substitution sémantiques entre les mots, les chiffres et les lettres. La question des objets sur lesquels portent ces opérations est moins simple. D'un point de vue mathématique ce sont évidemment les nombres, ou des grandeurs, et des relations entre les nombres. D'un point de vue cognitif, deux données sont importantes pour répondre à cette question :

— les objets sont des nombres pris individuellement, ou des grandeurs déterminées, que l'on peut désigner par une écriture décimale ou par une lettre
— les objets sont des ensembles de nombres que l'on peut désigner soit par une liste indéfiniment ouverte de nombres, soit par une qualification terminologique (« les entiers ») soit par une micro-description (pour désigner par exemple un intervalle). La désignation d'une variable par une lettre requiert la prise de conscience du type d'objet.

A partir de ces données on voit que les opérations de *redésignation* peuvent porter sur trois types d'objets :

— *des nombres pris individuellement*, mais sans qu'on les ait désignés par des chiffres. Pour ce type d'objet, l'emploi d'une lettre permet de désigner un nombre encore inconnu ou, plus exactement, manquant dans les données d'un problème mais qui est désigné verbalement. Par exemple « l'âge de Lola»
— *une liste de ouverte de nombres* dont on peut poursuivre l'écriture décimale ou fractionnaire, (1, 2, 3, ..), Mais on peut aussi considérer un ensemble de nombres {1 , 3, 5,..}. Pour ce type d'objet l'emploi d'une lettre répond à une fonction de condensation. L'emploi d'une lettre pour désigner une variable répond à une fonction de balayage potentiel de tous les éléments de la liste condensée en une

lettre. Souvent on utilise la même lettre pour désigner la fonction de condensation et celle de balayage.

— *deux types de listes ouvertes de nombres,* que l'on peut développer en parallèle selon une relation qui les met en correspondance terme à terme. Un exemple de ce type d'objet est à chercher non pas dans l'histoire de l'algèbre, mais dans la naissance de la mécanique avec l'interprétation de valeurs recueillies sur l'augmentation de la vitesse et celle de la distance parcourue, dans des observations sur la chute des corps. Ici l'emploi d'une lettre répond aux deux fonctions de condensation et de balayage.

Pour ce qui concerne l'emploi des lettres, les deux premiers types d'objets relèvent d'une désignation directe. En revanche, le troisième type d'objet requiert la désignation indirecte fonctionnelle.

CHIFFRES	LETTRES	MOTS *(interface verbale, souvent muette ou oubliée, entre chiffres et lettres)*
Un nombre	**Redésignation directe** par une lettre	Désignation directe ou Désignation indirecte par micro-description
Une liste ouverte de nombres	**Condensation** en une lettre **Balayage des éléments** d'un ensemble de nombres	Désignation directe du **type nom propre** pour un ensemble de nombres ou pour un type de grandeur : vitesse, temps, aire..
Des listes dont la génération des nombres est corrélée	**Désignation fonctionnelle** par ***une combinaison opératoire lettre-chiffre*** *:* « 2n +1 » **Balayage** d'un ensemble de nombres	**Désignation directe d'une propriété** des nombres : « impair » **Désignation indirecte** par une micro-description (souvent relative à une quantité ou une grandeur)

Figure 10. Gamme des substitutions sémantiques mobilisées dans le registre algébrique

Nous avons ainsi obtenu une première décomposition, en termes d'opérations de désignation, du complexe des connaissances que sont les équations et les formules. Toute entrée dans l'algèbre requiert des opérations de *redésignation* de ce qu'on a d'abord désigné d'une autre manière en utilisant des chiffres et/ou des mots (le plus souvent des syntagmes nominaux). En d'autres termes, il y a deux entrées possibles pour les opérations de *redésignation*.

Sur le tableau ci-dessus, les opérations de *redésignation* requises, c'est à dire les passages à effectuer d'une colonne à l'autre, sont marquées par des flèches en traits plein. Les flèches en pointillés marquent les opérations inverses de ces redésignations, si l'on ose dire. D'une part, il y a *l'instanciation des lettres* en fonction du type d'objets qu'elles désignent. D'autre part il y a la question de *la qualification verbale des objets* déjà désignés par des chiffres ou des lettres. Ainsi toute amorce de la liste énumérative {1, 2, 3, …} est qualifiée par l'expression « les entiers naturels », que l'on suppose relever d'une mobilisation immédiate et élémentaire.

Et cela est particulièrement crucial pour la dernière ligne, celle qui concerne des listes corrélées et la désignation fonctionnelle. On remarquera la rupture cognitive entre les opérations de désignations littérales et les opérations de désignation verbale pour le troisième type d'objet. Les opérations de désignation littérale ne peuvent être que fonctionnelles, c'est-à dire indirectes, tandis que les opérations de désignation verbales peuvent être indifféremment directes ou indirectes.

Cette première analyse nous permet de soulever trois questions cruciales sur l'introduction de l'emploi des lettres dans le cadre de la résolution de problèmes. Car il y a là une première source de confusions cognitives, souvent rédhibitoires, tant pour les enseignants que pour les élèves.

(1) Résoudre un problème en utilisant des lettres implique plusieurs opérations de redésignation. Comment ne pas assimiler les opérations de désignation directe d'un nombre, de désignation d'un ensemble de nombres et la désignation fonctionnelle d'une relation entre des listes ouverts de nombres, *lorsque les données du problème sont décrites verbalement dans un énoncé se rapportant à une situation concrète ?*

(2) Avec quel type d'objet faut-il d'abord introduire les opérations de redésignation ? S'en tenir à la désignation d'UN nombre installe une association réflexe qui va bloquer la désignation d'une liste ouverte de nombre ou le balayage potentiel d'un ensemble de nombres. On retrouve là la question du statut des lettres qui, d'un point de vue cognitif, dépend entièrement de la prise de conscience des différentes opérations de redésignation par des lettres. Mais s'en tenir à la désignation d'une liste ouverte de nombre conduit à sous-estimer l'importance de la désignation fonctionnelle qui constitue l'apport décisif de l'emploi des lettres en algèbre.

(3) D'un point de vue sémio-cognitif, la redésignation d'une liste ouverte de nombre est une condensation et non pas une généralisation. D'un point de vue mathématique, lorsqu'on peut observer une régularité dans la progression de la liste ouverte de nombres, l'emploi d'une lettre est une généralisation. On ne

confondra évidemment pas la fonction sémio-cognitive de condensation, qui repose sur une opération de redésignation, et la démarche de généralisation qui relève d'un raisonnement de type inductif et qui appelle une justification. La distinction de ces deux fonctions est d'autant plus cruciale que dans beaucoup de tâches mathématiques, même élémentaires, elles se recouvrent. Et cela conduit à soulever une troisième question. Peut-on proposer les mêmes activités ou les mêmes situations d'apprentissage pour faire prendre conscience de la fonction de condensation dans l'emploi de lettres et pour faire entrer dans une démarche de généralisation ?

Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions.

4.2. La distinction de deux niveaux d'organisation dans les expressions produites

Pour produire une formule ou une équation, il faut articuler en une seule expression deux expressions résultant chacune de l'une des opérations de redésignation que nous venons d'analyser (supra Figure 5). Ces expressions référentielles sont organisées autour des seuls symboles d'opérations. Ces expressions sont des *expressions incomplètes* qui forment soit un membre de l'équation, soit l'un des syntagmes opératoires constituant un membre d'équation. Ainsi dans l'herbier ci-dessus : d/t est un membre de la formule correspondant à la définition de la vitesse et $(x - x_0)^2$ est un syntagme opératoire de l'un des membres de l'équation du cercle dans le plan euclidien repéré.

L'articulation de deux expressions incomplètes en une expression complète repose sur une relation d'équivalence sémantique (elles désignent le même objet, un nombre, ou un ensemble de valeurs), ou sur une relation d'identité (elle est toujours vraie quelles que soient les valeurs de la variable). Cette relation est marquée par le signe « = » qui est le même, qu'il s'agisse d'une formule ou d'une équation, d'une simple équivalence sémantique ou d'une identité formelle. Cela évidemment soulève des problèmes de discernabilité et de changement de points de vue.

4.2.1 La double *redésignation* d'un même objet et le symbole « = »

Du point de vue cognitif, il y a une différence profonde entre ces deux niveaux d'organisation. Elle apparaît avec ce qu'on appelle classiquement la « mise en équation » des données d'un problème. *Elle requiert que l'on reconnaisse deux désignations différentes d'un même objet.* Par exemple l'énoncé du problème de Lola comporte une double désignation de l'âge de Lola l'année prochaine : « l'an prochain j'aurais trois fois l'âge que j'avais il y a neuf ans ». On a alors les deux syntagmes opératoires suivant : (x + 1) et 3(x – 9) qu'il faut évidemment ne pas confondre avec (x – 9) qui désigne l'âge de Lola il y a neuf ans. Cet exemple est très simple dans la mesure où la double désignation verbale est donnée dans la même phrase. Dans la plupart des énoncés, et surtout ceux demandant que l'on écrive un système d'équations, la double désignation est donnée dans des phases différentes de l'énoncé (Article du groupe math-français dans Petit x).

La double *redésignation* d'un même objet est évidemment la condition pour l'écriture d'une expression complète, que ce soit une formule ou une équation. Elle constitue l'un des gestes de langage caractéristiques des mathématiques, puisqu'elle est la condition absolument nécessaire au progrès et à la continuité du raisonnement mathématique. Ainsi, même la simple formulation d'une suite d'instructions pour construire une figure en géométrie requiert la double désignation de certaines unités figurales. Mais, en algèbre, elle requiert que l'on ait au préalable recherché et identifié dans les énoncés de problèmes, quels qu'ils soient, une double désignation préalable verbale et/ou chiffrée de nombres ou de grandeurs. Et c'est là une pratique qui va contre toutes les pratiques spontanées du langage dans les échanges oraux ou dans la manière de donner des informations ou de décrire en dehors des mathématiques. C'est pourquoi elle reste pour les élèves, tout au long de leur curriculum, une difficulté plus profonde et plus insaisissable que l'opération de désignation fonctionnelle pour la mise en équation les données d'un problème. W. Damm avait fait, il y a plus de vingt ans, des observations significatives en ce sens, que l'on pourrait facilement refaire aujourd'hui même après quatre années d'enseignement de l'algèbre. Plus récemment J.-C. Duperret et J.-C. Fenice ont fait part de leur expérience d'enseignant sur ce point avec leurs élèves en quatrième et en troisième (Duperret & Fwenice, 1999). La prise de conscience de cette opération par les élèves est donc un enjeu cognitif important pour l'apprentissage de l'algèbre.

4.2.2 Variation de la référence du symbole " = " et changement de point de vue sur les expressions complètes produites.

Par rapport au aux expressions complètes, il y a deux situations très différentes quant au fonctionnement cognitif mobilisé : produire une expression complète et la comprendre de manière à pouvoir en étudier la portée et utiliser les possibilités de transformations qu'elle comporte. Dans le cas des équations et des formules, on peut même parler d'une rupture ou d'un fossé entre ces deux situations.

Dans la situation de « mise en équation » des données d'un problème, le symbole "=" réfère à *une relation d'équivalence sémantique*. Cette relation porte ne porte pas sur les objets désignés puis redésignés, mais sur leurs seules redésignations littérales. On retrouve ici la distinction introduite par Frege entre sens et référence :

la différence de sens vient des manières de désigner un objet et non pas de l'objet auxquelles les différentes désignations renvoient.

Dans la situation de compréhension, les équations sont regardées à partir du nombre de leur(s) solution(s) : une, plusieurs, aucune ou toutes les valeurs d'un ensemble de nombre. Et il s'agit de se demander pour quelles valeurs des lettres l'équation est vraie. Or cela exige un changement complet de point de vue. Car pour entrer dans cette question il faut basculer d'une compréhension de l'expression complète ancrée sur les objets désignés (quantités, grandeurs, ensemble de nombres) à une compréhension uniquement centrée sur le recouvrement d'extension de deux expressions incomplètes. Dans le champ d'une telle interrogation, que le symbole "=" peut alors ne plus référer à une équivalence sémantique, mais *à une relation logique d'identité formelle.*

On voit donc surgir ici un écart cognitif considérable entre les expressions incomplètes qui sont des syntagmes opératoires et le symbole "= ". Les expressions incomplètes formant les membres d'une équation ont des sens différents mais réfèrent au même objet (la ou les solutions), ce qui va justifier certaines opérations de traitement, comme on le verra plus loin. *Le symbole "=", qui n'a pas d'autre sens que sa référence, peut se référer à des objets différents, ici les relations d'équivalence sémantique et d'identité formelle*. Cela va dépendre du nombre de solutions de l'équation.

Certes, la relation d'identité formelle peut être logiquement considérée comme sémantique, puisqu'elle porte sur le recouvrement complet des extensions de deux expressions incomplètes. Mais d'un point de vue cognitif, les relations d'équivalence sémantique et d'identité formelle s'inscrivent dans des dynamiques de compréhension différentes.

Dans une situation où l'on a écrit une équation pour résoudre un problème, la question de la vérité ou, plus exactement, de la vérification du fait que les deux expressions désignent bien la même valeur numérique, ne se pose pas, puisque les deux expressions ont été produites pour être deux désignations différentes de la même valeur. Il n'y a pas à s'interroger sur la signification du symbole " = ". Ce serait une vraie fausse question.

Mais la situation de compréhension des équations, impose un changement de point de vue ne serait-ce qu'avec ce geste sémiotique typique de l'algèbre : *prendre le signe "0" comme l'un des membres de l'équation.* On bascule d'une compréhension centrée sur une équivalence sémantique à une compréhension centrée sur la distinction et la reconnaissance d'identités formelles, quelles que soient les valeurs des lettres. De même qu'il n'y a pas d'Analyse mathématique sans faire intervenir l'infini, de même il n'y a pas d'algèbre sans le signe « 0 ». Et, là, on commence à voir les équations se séparer des formules. Qui songerait à écrire toutes les formules de physique de cette manière ? Par exemple : v – d/t = 0 !

Le fait de pouvoir prendre « 0 » comme un membre d'équation permet de voir la différence cognitive entre équation et formule. Cette différence se situe à une frontière, dont on oublie toujours qu'elle reste discernable pour un profane même cultivé comme pour la plupart des élèves, entre ce qui est de l'algèbre et ce qui n'en est pas. Bien qu'elles soient des expressions complètes, les formules ne sont jamais regardées par rapport à leur valeur de vérité, *mais seulement par rapport à la fonction référentielle de chacun des termes constituant l'un des deux membres.* Concrètement cela veut dire que les seules opérations que l'on fait avec une formule sont *des opérations d'instanciation* : on substitue des nombres aux lettres dans l'un des membres, pour trouver la valeur numérique du terme qui constitue l'autre membre. Autrement dit, on fait les opérations inverses de celles requises par les opérations de redésignation, sans avoir à effectuer la mise en relation de deux redésignations différentes d'un même objet, comme dans la mise en équation des données d'un problème. La conséquence est simple et imparable. Dans une formule, le symbole "=" ne réfère ni à une identité formelle ni à une relation d'équivalence sémantique, mais seulement à *une relation opératoire orientée vers un résultat,* comme dans l'écriture d'un calcul numérique. On pourrait tout aussi bien remplacer ce symbole par une flèche : « c'est clair comme deux et deux *font* quatre», selon la formule bien connue.

4.3.2 Conséquences pour faire entrer les élèves dans l'algèbre

Cette analyse permet de soulever trois autres questions pour l'introduction de l'algèbre. Elles ne concernent plus l'emploi des lettres pour produire une expression incomplète ou une équation, mais la manière de regarder les expressions complètes, équations ou formules, ainsi que les opérations induites par leur compréhension.

(4) En situation de production, il n'y a guère de différence entre la mise en équation des données d'un problème et l'élaboration d'une formule pour rendre compte de relations observées, puisque dans les cas, cela mobilise les mêmes opérations de redésignation. Mais utiliser cette situation pour introduire l'algèbre ne conduit-il pas les élèves dans une impasse puisqu'en situation de compréhension, la compréhension des formules renforce l'interprétation du symbole " = " comme une relation opératoire orientée, contre toute interprétation comme une identité formelle ou même comme une équivalence sémantique ?

(5) Utiliser une formule et résoudre une équation pour résoudre un problème sont deux choses totalement différentes. Dans le premier cas il n'y a pas besoin de produire de la formule, tandis que dans le second il faut mettre en équation les

données du problème. Est-il alors nécessaire d'apprendre l'algèbre pour pouvoir appliquer les nombreuses formules qui sont utilisées dans de nombreux domaines en dehors des mathématiques ?

(6) On peut parfaitement utiliser une formule sans avoir à effectuer la moindre transformation de l'écriture de la formule. Il suffit de présenter toutes les formes de la formule correspondant aux différentes situations dans lesquelles elle peut être utilisée. Ainsi :

$$d/t = \boldsymbol{v}, \qquad vt = \boldsymbol{d}, \qquad d/v = \boldsymbol{t}$$

On évite ainsi les difficultés d'un changement de membre qui arrêtent tant d'élèves dans l'utilisation d'une formule, comme on l'a vu plus haut (1.1, Tableau 1). Dans ce cas, ne faudrait-il pas plutôt introduire les formules non pas pour motiver l'emploi des lettres mais pour faire découvrir l'une des opérations de transformations d'écriture d'une équation, celle qui consiste à passer un terme d'un membre à l'autre ?

Nous reviendrons ultérieurement sur ces questions.

4.3. Le traitement des expressions complètes et la question de la place et des occurrences des lettres.

A la différence des phrases et des propositions en langue naturelle, l'organisation des expressions algébriques complètes est intrinsèquement transformable sans que la valeur de vérité en soit changée ou affaiblie. Cette transformation peut être faite soit au niveau de l'expression complète, soit à celui d'une expression incomplète, soit encore aux deux. C'est ce qui confère aux équations leur puissance d'utilisation, et aux formules leur possibilité d'être utilisée dans des situations où ce n'est pas le même de type de données que l'on peut recueillir. Or la caractéristique des traitements algébriques est de porter non pas sur les lettres, sur ce qu'elles désignent ou même sur leur statut, mais uniquement sur leur place dans l'expression complète et sur leurs différentes occurrences.. Autrement dit, la distinction sémiotique fondamentale pour analyser le fonctionnement cognitif propre aux traitements en algèbre est *la distinction entre un signe et ses occurrences*, et non pas celle entre signifié et signifiant, ou entre un signe et l'objet auquel une opération discursive de désignation le réfère. C'est là que se situe le changement radical de regard que le passage d'une phase de « mise en équation » à celle de la « résolution d'équations » implique. Les traitements algébriques reposent deux types d'opérations fondamentales : le déplacement des occurrences d'une lettre par rapport **au signe " =",** et la réduction du nombre des occurrences d'une même lettre par rapport aux signes d'opérations. Nous pouvons ainsi distinguer deux types de transformations d'une expression complète.

4.3.1 Déplacement des occurrences d'une même lettre d'un membre à l'autre.

La première transformation de base porte sur le regroupement dans un même membre de tous les termes qui comportent une occurrence de lettre. Elle conduit donc à changer la place d'une des occurrences d'une lettre par rapport au symbole (« = »). Ce déplacement entraîne l'introduction d'un nouveau symbole d'opération :

(1) $x + 8 = 3x$ se réécrit en $8 = 3x - x$

(2) $8 - x = 3x$ se réécrit en $8 = 3x + x$

Ce type de déplacement est commun aux équations et aux formules. Il pose un problème de compréhension que l'on peut envisager sous deux points de vue différents. Celui de son explication mathématique : l'introduction d'un nouveau symbole d'opération dans le deuxième membre correspond à l'opération de suppression de l'occurrence dans le premier membre :

(1) : x « $- x$ » $+ 8 = 3x$ « $- x$ »

(2) : $8 - x$ « $+ x$ » $= 3x$ « $+ x$ »

Elle conduit à la formulation de règles sur les symboles d'opération et devient très vite peu opératoire pour les élèves, comme le montrent les difficultés à changer de membre, lorsque cette opération de suppression n'est plus additive mais multiplicative et fait apparaître une écriture fractionnaire. Or dans ce type d'opération *on part d'une forme d'organisation de l'équation pour expliquer comment et pourquoi on peut générer d'autres formes d'organisation équivalentes, et qui peuvent donc être substituées les unes aux autres.* On peut adopter un tout autre point de vue, qui consiste à faire la démarche inverse, comme dans l'utilisation de formules pour calculer une donnée manquante. *On part des différentes organisations d'une expression complète obtenues par le seul déplacement des places des différentes lettres.* Des valeurs numériques sont données pour, par exemple, instancier deux des trois lettres, afin de calculer la valeur numérique pour la troisième. En d'autres termes, au lieu de présenter une formule, on présente l'ensemble des expressions sous lesquelles elle peut être utilisée et entre lesquelles on peut choisir selon les valeurs numériques qui sont données :

$$\{d= vt,\ v = d/t,\ t = d/v\}$$

L'utilisation de formules peut être un moyen de prendre conscience de l'opération qui permet de les transformer pour les rendre utilisables et, ainsi, de se convaincre de leur équivalence en découvrant que c'est la même formule. En ce sens très précis, l'utilisation de formules peut être une condition pour entrer dans la résolution des équations, au lieu de la situation classique où elle considérée comme un des acquis attendus de l'enseignement du calcul algébrique ou « formel ».

4.3.2 Les transformations liées au nombre d'occurrences d'une lettre par rapport aux signes opératoires.

Elles portent sur les expressions incomplètes, celles uniquement organisées avec des symboles d'opération. L'opération vise la réduction maximale du nombre des occurrences d'une même lettre dans une expression incomplète, chaque occurrence étant liée par une opération à un autre terme qui peut-être une autre occurrence de la même lettre, un nombre ou une autre lettre. Cette réduction s'effectue en effectuant l'opération à laquelle l'occurrence est liée. Deux cas sont alors possibles :

— toutes les occurrences sont réductibles à une seule comme dans l'exemple suivant :

$$3\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} - 8 \quad \rightarrow \quad 2\boldsymbol{x} - 8$$

— certaines occurrences sont irréductibles à une seule et elles apparaissent inséparables parce que liées multiplicativement comme dans l'exemple suivant :

$\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x}$ comme Descartes l'écrivait

$$(\boldsymbol{x} + 1)\ (\boldsymbol{x} - 1)$$

Il y a évidemment la notation de l'exposant qui permet une économie d'écriture et qui accroît considérablement la puissance de calcul des écritures algébriques. Mais ce codage ne réduit pas le nombre des occurrences car il implique que l'on puisse faire un aller et retour entre deux formes d'écritures :

$$\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{x} \text{ ET } x^2$$

$$(\boldsymbol{x} + 1)\ (\boldsymbol{x} - 1) \text{ ET } (\boldsymbol{x}^2 - 1)$$

Dans un sens la transformation relève d'un pur calcul, mais dans l'autre il exige souvent que d'abord l'on ait reconnu visuellement une forme particulière d'organisation de l'expression comme dans le cas de la résolution des équations du second degré. Et c'est là que les difficultés apparaissent.

Il y a celles bien connues de reconnaissance de la forme de l'identité remarquable que l'on peut utiliser pour simplifier une équation. Il s'agit à la fois d'une reconnaissance de forme et d'une reconnaissance sémantique portant sur les seuls nombres de l'expression incomplète. Car il s'agit d'identifier rapidement, à la simple lecture, non seulement les carrés mais aussi les différents produits permettant d'obtenir les nombres qui ne sont pas des carrés.

Le réflexe consistant à ne chercher qu'une seule valeur pour x^2 est d'une autre nature, On peut certes l'expliquer par la difficulté d'effectuer le retour vers la forme d'écriture qui ne masque pas l'irréductibilité de deux occurrences de x. Mais ce réflexe est d'abord la séquelle de la manière dont l'opération de désignation ou de *redésignation* par une lettre a été introduite (pour un exemple, voir supra 3.2, Figure 5), par association avec un nombre ou avec une liste corrélée de nombres. Et on voit, à travers ce réflexe qui persiste tout au long de la scolarité, la nécessité d'introduire les opérations de désignation littérale à partir de listes corrélées de nombres qui ne se limitent pas aux entiers mais portent aussi sur les nombres négatifs.

Références historiques consultables en ligne

Descartes, R. (1637) *Le Discours de la Méthode*
La Géométrie de Descartes débute en page 297 du *Discours de la Méthode*, consultable en ligne dans la bibliothèque Gallica à l'adresse Internet
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594.r=La+Géométrie+Descartes+1637.langFR

Robert Recorde (1510-1558) : le signe « = » est introduit dans *The Whetstone of Witte* (1557). This book was the Second Part of Arithmetic, *The Grounde of Artes* being the first, covering the extraction of roots, the theory of equations and arithmetic with surds. In his study of quadratic equations, Recorde does not allow solutions which are negative, but he does allow negative coefficients. He makes good use of the sum and product of the roots stressing that for the equation $x^2 = px - q$ the sum of the roots is p and their product is q.
Retrieved from
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Recorde.html

Stevin, S. (1585). L'arithmétique. Livre numérique gratuit, consultable en ligne sur Free Google eBook :
https://books.google.fr/books/about/L_arithmetique.html?hl=fr&id=1dU5AAAAcAAJ

Stevin, S. (1634) *Œuvres mathématiques. Augmentées par Albert Girard*. En ligne dans la bibliothèque Polib <http://polib.univ-lille3.fr/data/015/index.html>

François Viète (1540-1603) : In his treatise *In artem analyticam isagoge* Viète demonstrated the value of symbols introducing letters to represent unknowns. He suggested using letters as symbols for quantities, both known and unknown. He used vowels for the unknowns and consonants for known quantities. The convention where letters near the beginning of the alphabet represent known quantities while letters near the end represent unknown quantities was introduced later by Descartes in *La Géométrie.* This convention is used today, often without people realising that

a convention is being used at all. (If I asked for a solution to $ax = b$ nobody asks: "For which quantity do I solve the equation?")
Retrieved from http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete.html

… Son œuvre principale sera *In Artem Analyticam Isagoge* (1591), publié à Tours, premier grand traité d'algèbre symbolique. (…)Dans une équation, les consonnes (*resp*. les voyelles) sont les *paramètres* connus (*resp*. les *inconnues*). Il utilisa le terme actuel de *coefficient* dans une équation. Un demi-siècle plus tard, Descartes adoptera cet usage qui se répandra dans toute l'Europe.
Extrait de http://www.chronomath.com/

Bibliographie

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 281–308.

Duperret, J. C. et Fenice, J. C. (1999). L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège. *Repères-IREM N° 34*. P. 29-54

Éduscol (ministère de l'Éducation Nationale), (2008). *Du numérique au littéral au collège*, document eduscol.education.fr/D0015/
http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Glaeser G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2.3**, 303– 346.

OCDE (2011), Résultats de PISA 2009 : Savoirs et savoir-faire des élèves – Performance des élèves en compréhension de l'écrit, en mathématiques et en sciences (Volume I)
http://dx.doi.org/10.1787/9789264097643-fr

Pluvinage, F. et Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA* volume 30, number 54.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. et Trigueros, M. (2005) *Enseñanza del álgebra elemental, una propuesta alternativa*, México, Trillas

RAYMOND DUVAL
duval.ray@wanadoo.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
fpluvinage@cinvestav.mx

LALINA COULANGE ET **PAULA VERDUGO**

UNE ETUDE COMPARATIVE DE L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL ALGEBRIQUE EN FRANCE ET AU CHILI

Abstract. A Comparative Study of the Teaching of Algebra in France and in Chile. In this paper, we present the results of a comparative study on the teaching of algebra in France and in Chili. Within the Anthropological Theory of the Didactic, we studied and compared the mathematical knowledge related to the distributive property, taught within each school system. The analysis of programs and textbooks reveals significant differences in the knowledge to be taught or taught. We also analyzed the knowledge of students, through a questionnaire given to French and Chilean students (aged 14-15). The analysis of the answers allows us to establish differences between the *mathematical praxeologies* students have learnt. It also reveals similarities that reveal the difficulties of (Chilean or French) students in learning algebra. Finally, we conducted a brief experimentation in a French class that introduced a type of tasks present in the Chilean textbook. This experimentation allows us to examine the role of geometric framework in the study of the distributive property, more represented in the knowledge to be taught and taught in Chile than in France.

Keywords: Comparative Study - Knowledge to be taught - Algebraic manipulation - The distributive property - Algebraic and geometrical frameworks

Résumé. Dans cet article, nous présentons les résultats d'une étude comparative sur l'enseignement du calcul algébrique en France et au Chili. Nous situant dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique, il s'est agi d'analyser et de comparer les organisations de savoirs mathématiques enseignées en lien avec la propriété de distributivité, au sein de chaque institution scolaire. L'analyse des programmes et de manuels scolaires révèle des différences significatives dans les savoirs à enseigner et enseignés. Nous avons également mené une analyse des praxéologies apprises, au moyen d'un questionnaire proposé à des élèves français et chiliens (élèves de 14-15 ans). L'analyse des réponses nous permet d'établir des différences entre les praxéologies mathématiques apprises au sein des deux institutions, mais aussi des points communs qui renvoient entre autres à des difficultés similaires dans l'apprentissage du calcul algébrique. Enfin, nous avons conduit une brève expérimentation dans une classe de seconde française visant à « importer » un type de tâches présent dans le manuel chilien et absents des manuels français. Cette expérimentation nous permet d'interroger le rôle du cadre géométrique dans l'étude de la propriété de distributivité, plus représenté dans les savoirs à enseigner et enseignés au Chili qu'en France.

Mots-clés. Étude comparative – Savoirs à enseigner et enseignés – Calcul algébrique – Distributivité – Changement de cadres algébrique géométrique

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 153 - 185.

1. Introduction

Nous présentons une étude comparative sur les savoirs à enseigner et enseignés autour de la propriété de distributivité au secondaire en France et au Chili. Une analyse des programmes et des manuels français et chiliens à un niveau d'enseignement donné (élèves de 14-15 ans) nous permet de cerner des différences relatives aux savoirs à enseigner sur la distributivité dans les institutions scolaires de ces deux pays.

Sur la base des résultats de cette analyse, un questionnaire a été élaboré et appliqué à un échantillon d'une centaine d'élèves français et chiliens. L'analyse des réponses d'élèves à ce questionnaire nous permet de préciser les savoirs enseignés sur les techniques de calcul algébrique (liées à la factorisation et au développement d'expressions littérales) dans les institutions scolaires considérées.

Nous avons également conduit une expérimentation dans une classe de seconde française (élèves de 15-16 ans). Il s'agit de proposer à des élèves français d'accomplir des tâches relatives à un type de tâche donné, présent dans l'institution chilienne et absent de l'institution française. Cette expérimentation vise à interroger certaines des potentialités et/ou limites des changements de cadres algébriques et géométriques convoqués par ce type de tâche.

Le plan de l'article suit le plan de l'étude. Nous présentons tout d'abord la problématique sur laquelle s'appuie notre étude comparative. Dans une deuxième partie, nous exposons les résultats de nos analyses des savoirs à enseigner sur le calcul algébrique et la distributivité dans les programmes ainsi que dans plusieurs manuels français et chiliens. Puis nous rendons compte de l'analyse des réponses à un questionnaire posé à des élèves français et chiliens d'âge comparable. Enfin dans une dernière partie, nous donnons brièvement à voir de nouvelles pistes sur le rôle des changements de cadres pour justifier mais aussi produire des techniques de calcul algébrique liées à la propriété de distributivité.

2.- Une problématique de comparaison des savoirs à enseigner et enseignés sur la distributivité en France et au Chili

Nous nous situons dans une perspective d'étude comparative des savoirs à enseigner et enseignés en algèbre élémentaire, en France et au Chili, référée à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997 ; Chevallard, 1999 ; Bosch et Chevallard, 1999). Plus précisément, notre recherche est basée sur une comparaison des savoirs mathématiques à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique en lien avec la propriété de distributivité et des types de tâches afférents. La propriété de distributivité joue un rôle central au regard des pratiques de calcul algébrique (Assude, Coppé et Pressiat, 2012, Croset 2009) mises à l'étude dans l'enseignement du calcul algébrique au niveau du secondaire. Dans le cadre de la théorie anthropologique, il s'agit d'étudier les types de tâches et les techniques relatives à la distributivité (relevant de la factorisation ou du développement d'expressions algébriques) ainsi que les aspects technologico-théoriques liés à ces types de tâches et ces techniques. Plusieurs auteurs en didactique de l'algèbre (Assude, Coppé et Pressiat, 2012 ; Coulange et al., 2012 ; Croset, 2009 ; Abou-Raad et Mercier, 2009 ; Abou-Raad, 2006) soulignent des manques technologiques ou l'absence d'un discours mathématique pertinent dans l'enseignement du calcul algébrique. Ces travaux convergent sur le fait que la portée des techniques de calcul algébrique n'est pas clairement identifiable dans les savoirs à enseigner et enseignés. Selon les auteurs précités, ceci pourrait être dû à la présence d'un enseignement à forte dimension ostensive, à l'absence d'un discours mathématique pertinent et au caractère « muet » de technologies permettant d'éclairer la mise en œuvre des techniques de calcul algébrique ou d'identifier les adaptations de connaissances correspondantes (Robert, 2008). D'autres travaux mettent en avant le cloisonnement des organisations mathématiques des savoirs algébriques à enseigner ou enseignés au regard des cadres numériques et géométriques d'emploi de l'algèbre (Coulange et al., 2012) ou bien des dimensions outils et objets de ces savoirs (Grugeon, 1997 ; Pilet, 2012). Ces phénomènes didactiques, relatifs tantôt au cloisonnement, tantôt à l'incomplétude des organisations de savoir algébrique mises à l'étude éclairent une partie des difficultés rencontrées par les élèves dans le domaine du calcul algébrique (Croset, 2009 ; Constantin, 2008). Notons enfin la récurrence apparente de ce type de phénomènes dans des institutions didactiques scolaires, parfois différentes (au collège ou au lycée ; en France, au Liban ou en Tunisie). Pourtant, exception faite des travaux d'Abou-Raad (2006), la plupart de ces recherches ne se centrent pas ou peu sur une perspective d'étude comparative des savoirs à enseigner et enseignés sur le calcul algébrique.

Nous avons choisi de nous engager dans cette voie de comparaison pour plusieurs raisons. Nous avons constaté d'une part, un peu « naïvement » au départ, des différences significatives dans les organisations de savoirs à enseigner autour de la distributivité en France et au Chili : tant dans la progression relative à ces savoirs à enseigner, que dans les types de tâches mis à l'étude ou encore, au regard du rôle des changements de cadre géométrique dans ces organisations mathématiques. Il nous a semblé intéressant d'interroger ces différences. D'autre part, il nous a semblé que cette comparaison pourrait permettre d'approfondir des questions relatives à la récurrence des phénomènes didactiques relatifs à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre.

La problématique au centre de notre recherche peut dès lors être formulée comme suit.

- *Quelles sont les praxéologies mathématiques à enseigner autour de la distributivité en France et au Chili ?*

Plus précisément, au sein de chaque institution scolaire : Quels sont les types de tâches et les techniques mis à l'étude ? Quels sont les ingrédients technologiques,

voire théoriques, enseignés sur le calcul algébrique, en lien avec la distributivité ? Notamment, quel(s) rôle(s) jouent les changements de cadre géométrique ?
Afin de trouver des éléments de réponses à ce type de questions, nous avons analysé les programmes, deux manuels français et le manuel chilien « officiel » (recommandé par le ministère de l'éducation national chilien). Nous synthétiserons les principaux résultats de ces analyses dans la sous-section 2.1 de l'article.
- *Quelles sont les praxéologies mathématiques apprises autour de la distributivité en France et au Chili ?*
Sur la base de nos analyses de programmes et de manuels, nous avons élaboré et fait passer un questionnaire à des élèves français et chiliens d'âges équivalent (âgés de 15-16 ans). Ce questionnaire comprend un ensemble de tâches de calcul algébrique, plus ou moins représentées au sein de chaque institution. Les analyses *a priori* et *a posteriori* des réponses obtenues à ce questionnaire, outillées par la théorie anthropologique, nous renseignent sur les rapports personnels des élèves aux organisations mathématiques enseignées sur la distributivité.
- *Que peut-on dire des potentialités et limites des praxéologies mathématiques à enseigner sur la distributivité au sein de chacune des deux institutions, française et chilienne ?*
Cette question est assez typique d'études comparatives (Bessot et Comiti, 2008 ; Bessot et Comiti, 2013). Dans le cadre de notre travail, en plus des analyses des savoirs à enseigner et enseignés au sein de chaque institution et de leur comparaison, nous avons conduit une brève expérimentation dans une classe française de Seconde (élèves de 15-16 ans). Au cours d'une séance dédiée à l'enseignement du calcul algébrique, nous avons observé et analysé l'accomplissement de plusieurs tâches, par les élèves français. Ces tâches correspondent à un type de tâches présent dans l'institution chilienne et absent de l'institution française, visant à produire et à justifier des techniques liées à la factorisation en prenant appui sur le cadre géométrique. Cette expérimentation nous a paru à même de questionner plus avant les relations possibles entre le cadre algébrique et le cadre géométrique dans les organisations de savoirs mathématiques à enseigner sur la distributivité, et leurs potentialités.

2.1 Savoirs à enseigner sur la distributivité dans les institutions françaises et chiliennes (élèves de 14-15 ans)

Nous avons étudié les programmes de l'enseignement secondaire en France et au Chili, et ce, afin d'identifier certains aspects globaux des organisations de savoir algébrique à enseigner sur la distributivité dans chacune des deux institutions. Nous ne retenons ici que les résultats principaux de cette étude, destinés à éclairer la suite de notre propos.

L'analyse des programmes fait apparaître que l'étude des organisations des savoirs à enseigner sur la distributivité se fait sur des échelles de temps très différentes, et que les relations envisagées entre les organisations de savoir algébrique et d'autres savoirs numériques ou géométriques au sein de chaque institution ne se jouent pas de la même manière.

En France, la propriété de distributivité simple est enseignée dès la classe de Cinquième (élèves de 12-13 ans). Ainsi dit-on dans le programme de ce niveau qu'il s'agit d'enseigner des connaissances liées à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction. On voit aussi le souci dès la 5^e, d'introduire cette propriété en lien avec des pratiques de calcul numérique. Ainsi, la « capacité attendue » correspondante dans le programme (mais non exigible dans le cadre du socle commun de compétences) est d'utiliser la distributivité sur « des exemples numériques et littéraux » en prenant appui sur des situations empruntées aux cadres numérique ou géométrique faisant intervenir la notion de formule. En Quatrième (élèves de 13-14 ans), l'étude se poursuit : la propriété de double distributivité est introduite et l'accent est mis dans le programme sur l'enseignement de techniques relatives au « développement de produits algébriques ». Là aussi, des liens entre calcul numérique et littéral sont mis en avant à plusieurs reprises : par exemple l'introduction du produit de deux nombres relatifs est censée prendre appui sur l'extension de la propriété de distributivité simple à ce type de nombres. Enfin c'est en Troisième (élèves de 14-15 ans) que sont introduites les « identités remarquables » à exploiter dans la factorisation et le développement d'expressions numériques ou littérales simples. En France, ce qui caractérise les savoirs mathématiques à enseigner sur la distributivité est un temps long d'enseignement (3 ans dans le cadre de la scolarité obligatoire) et une construction dialectique des techniques de calcul algébrique et de leurs ingrédients technologiques avec les systèmes de nombres, mise en avant par Constantin (2014). Des articulations avec le cadre géométrique ou liées aux grandeurs sont également évoquées à plusieurs reprises *via* des situations scolaires de production/d'utilisation d'expressions numériques ou littérales.

Au Chili, ce n'est qu'en première année de l'enseignement dit « moyen » du lycée (élèves de 14-15 ans), que la propriété de distributivité semble un objet d'enseignement officiel. Elle fait certes une première apparition dans le programme de la classe de 5^e année de l'enseignement dit « basique » (élèves de 10-11 ans) au Chili, dans le cadre de l'enseignement de la multiplication et est à cette occasion, énoncée sous sa forme générale liée à l'addition, mais elle n'est pas explicitement considérée comme un savoir explicite à enseigner à ce niveau[1]. Ce n'est qu'en première année de lycée (élèves de 15-16 ans) et donc bien plus tard, que le

---

[1] Bien que non cités explicitement dans le programme français, on peut faire le même type de constats sur des savoirs implicites ou « cachés » à enseigner sur la distributivité en lien avec le calcul mental ou posé de produits à l'école primaire (Constantin, 2014).

programme de l'enseignement chilien fait apparaître la propriété de distributivité en tant que savoir algébrique à enseigner, et met en avant l'enseignement des techniques de factorisation et de développement afférentes. À ce niveau, dans le même temps sont dès lors introduites à la fois la « distributivité simple », la « double distributivité » et les « identités remarquables ». Si l'on se fie aux programmes officiels, le temps d'enseignement des savoirs à enseigner sur la distributivité est donc beaucoup plus resserré et dense dans l'institution chilienne que dans l'institution française. Les praxéologies concernées sont enseignées à la fois plus tardivement et plus simultanément (1 an). Il est également à noter que des savoirs algébriques sont préalablement enseignés dans les niveaux antérieurs du secondaire : sur la notion d'équation, relatifs à la production ou à l'utilisation d'expressions algébriques (pour modéliser, généraliser des situations géométriques ou numériques) pouvant correspondre à des produits ou des sommes de plusieurs variables et/ou de variables d'exposants variés[2]. C'est dès lors davantage en lien avec ces savoirs algébriques que la distributivité semble introduite, plutôt qu'en lien avec la construction de systèmes de nombres.

En France				**Au Chili**
Propriétés	Classes			Classe
	5e	4e	3e	1er lycée
Distributivité simple	√			√
Distributivité double		√		√
Identités remarquables			√	√

Tableau 1 : Niveaux/ savoirs à enseigner sur la distributivité en France et au Chili.

Pour pouvoir étudier et comparer de manière plus locale ces savoirs à enseigner dans les deux institutions, française et chilienne, nous avons choisi d'analyser des manuels pour lesquels les savoirs à enseigner étaient relativement comparables, tout comme les âges des élèves considérés. Nous avons analysé les contenus de deux manuels français de troisième (élèves de 14-15 ans) : Triangle (édition 2012) et Phare (édition 2012) et du manuel officiel chilien[3] de 1re année du lycée (élèves de 14-15 ans), édité par le ministère de l'éducation nationale (2012).

Nos analyses révèlent des différences significatives dans les organisations mathématiques à enseigner, dont certaines visiblement en rapport avec la

[2] La notion de puissance 2, 3, 4… d'une variable est dès lors préalablement étudiée *via* le retour systématique à la définition d'une puissance.

[3] Le manuel chilien analysé est recommandé par le ministère de l'éducation nationale au Chili, c'est donc le manuel officiel et le plus utilisé (il est utilisé par environ 90% d'enseignants d'après les rapports officiels du ministère de l'éducation nationale chilien).

progressivité plus ou moins envisagée dans le temps d'enseignement. En effet, en France, la propriété de distributivité semble plus étroitement mise en rapport avec le cadre numérique qu'au Chili.

Dans les deux manuels de 3e français étudiés[4], un travail important est consacré aux expressions à une variable correspondant à des polynômes à une variable réelle et de degré au plus 3 (et plus fréquemment de degré 1 ou 2), avec des coefficients numériques variés. Au Chili, la rupture avec le cadre numérique paraît plus nette. Les expressions à développer, factoriser dans le manuel officiel chilien comprennent des produits de puissances de plusieurs variables, des polynômes à plusieurs variables réelles et de degré parfois plus grand que 3. Malgré des étiquetages officiels de savoirs proches (distributivités simple, double, identités remarquables), les types de tâches mises à l'étude dans les deux manuels diffèrent, du fait de variables didactiques différentes qui caractérisent les expressions algébriques et déterminent les techniques ou les adaptations de connaissances en jeu : qu'il s'agissent de la nature de coefficients numériques liés aux monômes ou de la structure des expressions (sommes, produits de polynômes et/ou de monômes, à une ou à plusieurs variables, etc.). Les tableaux donnés en annexe 1 et 2 donnent à voir ces différences relatives aux types de tâches liées à la factorisation ou au développement d'expressions algébriques potentiellement fréquentées par les élèves. Notons toutefois que les organisations didactiques que recouvrent ces manuels, sont également différentes, le nombre d'énoncés d'exercices dédiés aux types de tâches de calcul algébrique liés à la distributivité, étant globalement bien plus important dans les deux manuels français que dans le manuel chilien. Ceci implique de rester parfois prudent sur les interprétations des résultats de nos analyses, au regard des effectifs différents de tâches concernés (nettement moins importants dans le manuel chilien que dans les manuels français)[5].

Une autre différence constatée à l'aune de l'analyse de manuels est relative aux ingrédients technologico-théoriques développés autour de ces types de tâches dans les différents manuels. Les arrière-plans théoriques des organisations des savoirs mathématiques à enseigner sur la distributivité en France et au Chili ne sont pas du même ordre. Dans l'institution française, la mise à l'étude de la propriété de distributivité repose davantage sur une formalisation, unification et généralisation des savoirs numériques (Constantin, 2014), mais ne fait pas apparaître de discours

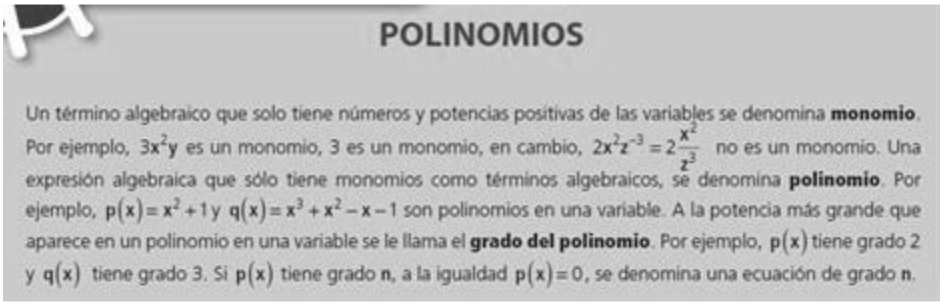
---

[4] On peut faire le même constat sur la nature des expressions algébriques en jeu, en lien avec les types de tâches factoriser/développer pour les manuels français de 5e et de 4e.

[5] Une étude des pratiques enseignantes en vue d'étudier des choix effectifs d'énoncés par les enseignants des deux pays n'a pas été conduite. Toutefois, les résultats des analyses de réponses au questionnaire (présentés ci-après) confirment les résultats d'analyse des programmes et des manuels quant à la nature des tâches de calcul algébrique potentiellement fréquentées par les élèves des deux pays.

théorique explicite sur les objets de savoirs concernés, liées aux notions polynômes, de monômes, ou de degrés, ce que constataient déjà Abou-Raad et Mercier (2009).

Par contre, dans l'institution chilienne, l'arrière-plan théorique des organisations mathématiques relatives à l'enseignement de la distributivité positionne explicitement la notion de polynôme et/ou de monôme, de degré d'un polynôme, de produit et/ou de décomposition de polynômes au centre de l'étude. L'extrait de cours introductif du chapitre concerné cité ci-dessous l'illustre bien :



POLINOMIOS

Un término algebraico que solo tiene números y potencias positivas de las variables se denomina **monomio**. Por ejemplo, $3x^2y$ es un monomio, 3 es un monomio, en cambio, $2x^2z^{-3}=2\frac{x^2}{z^3}$ no es un monomio. Una expresión algebraica que sólo tiene monomios como términos algebraicos, se denomina **polinomio**. Por ejemplo, $p(x)=x^2+1$ y $q(x)=x^3+x^2-x-1$ son polinomios en una variable. A la potencia más grande que aparece en un polinomio en una variable se le llama el **grado del polinomio**. Por ejemplo, $p(x)$ tiene grado 2 y $q(x)$ tiene grado 3. Si $p(x)$ tiene grado **n**, a la igualdad $p(x)=0$, se denomina una ecuación de grado **n**.

Figure 1 : Extrait du cours introductif sur le calcul algébrique du manuel chilien.

Par ailleurs, les ingrédients technologiques présents dans le manuel chilien s'appuient de façon plus prononcée sur des changements de cadres algébrique et géométrique (Douady, 1986). Les règles du calcul algébrique sont fréquemment justifiées dans l'ouvrage *via* un changement de cadre : l'équivalence entre deux polynômes qu'il s'agit de développer et/ou de factoriser, se justifie par des égalités d'aires de surfaces rectangulaires ou carrées. Ce type de changements de cadres est présent à d'autres niveaux dans des manuels français, en vue d'introduire les propriétés de simple distributivité et de double distributivité en 5^e^ et 4^e^. Toutefois, il n'est pas repris dans les manuels de 3^e^ que nous avons analysés[6]. Constamment présent dans le manuel chilien, cet environnement technologique accompagne également des adaptations des techniques de calcul algébrique relatives à la distributivité qui ne sont pas explicitées dans les activités ou les cours des manuels français (et ce, à quelque niveau que ce soit) : par exemple, pour passer du développement d'un produit d'un facteur et d'une somme à deux termes, au

[6] Dans les manuels de 5^e^ et de 4^e^ que nous avons également consultés, ce type de changements de cadre est présent dans des activités visant à introduire la simple ou double distributivité et parfois repris à titre d'illustration, dans la partie cours. Un unique manuel de 3^e^ sur ceux consultés, semble en faire davantage usage que les autres, dans les activités introductives. Il s'agit du manuel Sésamath 3^e^ qui s'appuie notamment sur ce changement de cadre pour introduire le produit d'une somme par une différence (activité Sésamath 3^e^, p. 35), ce qui constitue une originalité (notamment du fait de considérer un point de vue géométrique sur la différence) sur laquelle nous reviendrons par la suite (cf. partie 3).

développement d'un produit d'un facteur et d'une somme à plus de deux termes (à 3, 4... n termes) :

En general, si un lado de un rectángulo es a y el largo se divide en n partes, formando n diferentes rectángulos, donde todos tienen un lado que mide a. Entonces, el área del rectángulo es igual a la suma del área de los pequeños rectángulos (ver figura a la derecha). Es decir, si el largo mide $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$, entonces se tiene que:

$$a(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n) = ab_1 + ab_2 + ab_3 + ... + ab_n$$

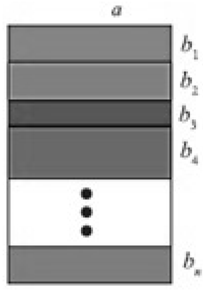


Figure 2. Construction géométrique pour l'étude de distributivité, relativement à une somme de n termes, proposée dans le manuel chilien

Cette importance constamment accordée aux cadres géométrique et algébrique se traduit aussi par des types de tâches en lien avec ce type de changements de cadres, présents de manière récurrente dans le manuel chilien, dont on ne trouve pas d'équivalents dans les manuels français. C'est par exemple le cas d'un type de tâches qui a particulièrement retenu notre attention, correspondant à l'énoncé « d'activité » [7]extrait de ce manuel, cité ci-après. Nous reviendrons par la suite sur ce type de tâches (cf. partie 3).

actividades

1. Dibuja en tu cuaderno dos rectángulos, uno de área $2x^3y^2$ y otro de área $3x^2yz$, de tal forma que tengan un lado de la misma medida. Factoriza $2x^3y^2 + 3x^2yz$

Figure 3. Activité de factorisation à l'aide de décomposition d'aires de rectangles

Il s'agit dans l'énoncé d'exercice cité ci-dessus de factoriser un polynôme à plusieurs variables (x, y et z) de degré 3. Pour ce faire, les auteurs du manuel chilien préconisent la représentation de surfaces rectangulaires d'aires indiquées dans l'énoncé, ayant un côté commun dont le tracé est laissé à la charge de l'élève. Le type de tâches correspondant, présent dans le manuel chilien, est absent des deux manuels français étudiés. Du fait de son caractère que l'on pouvait considérer *a priori* comme tout à fait inhabituel dans le contexte institutionnel français, et ce, à plusieurs titres (jeu de cadres attendu, factorisation de polynômes à plusieurs variables de degré supérieur à 2), nous n'avons pas choisi d'intégrer une tâche de ce type dans le questionnaire posé aux élèves français et chiliens (cf. partie 2), mais de conduire une expérimentation (cf. partie 3) visant à explorer les potentialités d'un tel type de tâches dans le contexte d'une classe de seconde française.

[7] Les « activités » (ou *actividades*) du manuel chilien ne sont pas à considérer comme des activités introductives au sens de celles trouvées dans les manuels français. Il semble s'agir davantage d'énoncés qui apparaissent à la suite d'éléments de cours progressivement introduits et/ou de tâches à considérer comme relativement emblématiques.

2.2 Elaboration et analyse *a priori* d'un questionnaire posé à des élèves français et chiliens (14-15 ans)

À partir des résultats de notre analyse de programmes et de manuels, nous avons élaboré un questionnaire qui a été proposé à un échantillon d'élèves français et chiliens. Notre échantillon comportait un total de 82 élèves français (à l'entrée en seconde) et 111 élèves chiliens (en fin de première année de lycée)[8].

Ci-dessous, est reproduit le questionnaire ainsi proposé à un nombre significatif d'élèves issus des deux institutions française et chilienne.

Exercice 1. Développer

a. $(a+b)(a-b)$

b. $(5+3x)^2$

c. $(\sqrt{3}-\sqrt{10})^2$

d. $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

Exercice 2. Factoriser

a. $9x^2-4y^2$

b. $3x+2xy$

c. $36-60x+25x^2$

Exercice 3. Développer

$(a+2b+c)^2$

Exercice 4. Factoriser

a. $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$

b. $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$

Exercice 5. Développer et réduire

$16x^2-(4x-3)(4x+3)$

Exercice 6. Factoriser

a. $abc-abc^2$

b. $-2xy^2w+4y^3w^2z$

c. $ac+bc+ad+bd$

Figure 4. Questionnaire proposé à des élèves français et chiliens de 15-16 ans (septembre-octobre 2013)

Les tâches proposées dans ce questionnaire ont été choisies à la lueur de nos résultats d'analyse des savoirs à enseigner sur la distributivité, notamment ceux concernant les types de tâches et techniques mises à l'étude dans les manuels français et chiliens. Nous avons cherché à rassembler des tâches correspondant à des types tâches caractéristiques des deux institutions, tout en recherchant une certaine variété dans la complexité des tâches. L'analyse *a priori* présentée ci-après permet de préciser

[8] Les 82 élèves français correspondent à trois classes différentes dans un seul lycée. Les 111 élèves chiliens correspondent à des classes de trois lycées différents. Précisons que ce sont des contraintes du calendrier de notre recherche qui nous ont conduites à poser ce questionnaire à l'entrée en seconde (plutôt qu'en fin de troisième) : toutefois au regard du fait que les élèves de Seconde concernés n'avaient pas repris l'étude du calcul algébrique au moment de la passation, on peut considérer que ce sont bien des connaissances en lien avec les savoirs enseignés en Troisième qui ont été convoquées pour répondre aux questionnaires.

notre démarche de conception d'un tel questionnaire, et comment nous avons procédé pour répartir des tâches que l'on pouvait considérer *a priori* comme plus ou moins routinières au sein de chaque institution, dans un même questionnaire. Nous avons notamment cherché à ce que ce questionnaire soit *a minima* équilibré : c'est-à-dire qu'il ne soit pas trop à la faveur ou à la défaveur d'une population d'élèves donnée, française ou chilienne (en proposant autant d'exercices « inhabituels » ou « habituels » d'une part et d'autre)[9].

L'analyse *a priori* de ce questionnaire a été conduite en envisageant les réponses possibles des élèves à la fois français et chiliens, par rapport à chaque item du questionnaire, en nous appuyant d'une part sur les résultats de nos analyses des organisations de savoir à enseigner au sein de chacune des institutions, d'autre part sur une étude des adaptations de connaissances potentiellement à l'œuvre dans les réponses possibles d'élèves des deux institutions. Afin d'illustrer notre méthodologie, prenons l'exemple de plusieurs items représentés dans les exercices. Nous avons retenu des items, présents dans les exercices 1, 4, 5 et 6 du questionnaire comme étant ceux qui nous paraissent le mieux illustrer les différences entre les praxéologies de calcul algébrique, apprises respectivement par les élèves français et les élèves chiliens à l'issue de nos analyses.

Exercice 1. Item 1.b : Développer $(5+3x)^2$

Dans les manuels français, le type de tâches relatif au développement d'expressions algébrico-numérique à une seule variable correspondant à la mise en application d'une identité remarquable auquel renvoie cet item est largement majoritaire dans les manuels de 3^e français (100% des exercices liés au développement dans Triangle, 75% des exercices extraits de Phare). À l'opposé, il est assez peu mis à l'étude dans le manuel chilien (14,3% des exercices). On peut donc faire l'hypothèse d'une meilleure réussite des élèves français en réponse à cet item. Toutefois compte tenu du fait qu'il s'agit d'une application assez immédiate d'une identité remarquable étudiée dans les deux pays, on peut penser que les élèves chiliens produisent des solutions correctes en réponse à cet item, au moins pour une part d'entre eux.

Exercice 1. Item 1.c : Développer $(\sqrt{3}-\sqrt{10})^2$

---

[9] Nous avons conduit une étude quantitative sur la base des réponses obtenues afin de vérifier si vraiment le questionnaire avait été élaboré de forme équilibrée, c'est-à-dire que celui-ci ne soit pas discriminant quant aux performances de la population d'élèves français ou chiliens. Cela a été fait en appliquant aux dites performances des deux échantillons un test d'hypothèse non-paramétrique, dont l'hypothèse nulle est « il n'y a pas de différences significatives entre les performances des élèves de deux institutions sur le questionnaire », laquelle a été « non rejetée » avec un niveau de signification de 5%.

Dans le manuel français Triangle, il n'y a pas d'exercice lié à ce type de tâches : développer une expression numérique du type carré de binôme, avec la présence de nombres correspondant à des racines carrées. Il est par contre, travaillé dans 14 exercices sur un total de 64 (22%) consacré au développement d'expressions algébriques ou numériques du manuel Phare. Dans le manuel officiel chilien, ce type de tâche est très peu travaillé, seulement dans 1'exercice sur 7 (14,3%). La question reste donc relativement ouverte en ce qui concerne la réussite possible de la part d'une population d'élèves ou d'une autre en réponse à cet item.

Exercice 1. Item 1.d: Développer $(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

Le type de tâches correspondant à cet item n'est pas ou quasiment pas travaillé dans les deux manuels français (2,8% des exercices de Phare, absent dans Triangle), alors qu'il est présent dans le manuel chilien (il représente 60% des exercices). Le développement de polynômes à plusieurs variables n'est pas ou peu travaillé en France. Cependant, il se peut que les élèves français adaptent leurs connaissances sur les techniques de calcul algébrique en reconnaissant dans le cas présent, une identité remarquable (produit de la somme par la différence de deux nombres), soit en passant par la mise en application de la double distributivité. La mise en œuvre de ces techniques suppose toutefois des adaptations de connaissances en lien avec le calcul sur les puissances (savoir calculer le carré d'un cube) dont on peut penser qu'elles sont plus habituelles pour les élèves chiliens que français au regard du travail conduit sur la notion de puissance dans les deux institutions.

Exercice 4. Item 4.a. Factoriser $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$

Dans le manuel français Triangle, ce type de tâches avec expressions à une variable du type $(ax+b)(cx+d)-(ax+b)(ex+f)$, est travaillé dans 60 exercices sur un total de 66 énoncés (ce qui représente 91% des exercices). Ce type de tâches n'est pas représenté dans le manuel chilien. Les adaptations de la technique de factorisation requises ici ne sont pas enseignées au Chili. Ici**,** il s'agit en fait de repérer des facteurs communs correspondant à des expressions numérico-algébriques (le facteur commun étant (2x +5)). À l'inverse, ce type de tâches semble constituer un enjeu de la classe de 3e française. Il recouvre d'ailleurs parfois avec des adaptations plus importantes de techniques prenant appui sur le numérique du type de celles convoquées par la tâche correspondant à l'item suivant.

Exercice 4. Item 4.b. Factoriser $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$

Dans le manuel français Triangle, ce type de tâches est travaillé dans 6 exercices sur un total de 66 (9%). Dans le manuel Phare, il est l'objet de 10 exercices sur un total de 10 (100%). Dans le manuel chilien ce type de tâches est travaillé dans seulement 1 exercice sur 16. On peut penser que ce type d'exercices sera davantage réussi par les élèves français que par les élèves chiliens. Cependant, même pour les élèves français, cet exercice reste complexe, car le travail correspondant est souvent guidé dans les énoncés trouvés dans les manuels scolaires : on indique par exemple qu'il s'agit de factoriser $25x^2 - 9$ avant de factoriser l'ensemble de l'expression.

Exercice 5. Développer et réduire $16x^2 - (4x-3)(4x+3)$

Il s'agit d'abord de développer le polynôme $(4x-3)(4x+3)$ en reconnaissant une identité remarquable, ou en appliquant la double distributivité, puis de réduire le polynôme restant, en prêtant attention au signe moins dans $16x^2 - (16x^2 - 9)$. Dans le manuel français Triangle, ce type de tâche est travaillé dans 21 exercices sur un total de 50 (42%) et dans le manuel Phare, il est présent dans 8 exercices sur un total de 21 (38,1%). Dans le manuel officiel chilien ce type de tâches n'est pas travaillé en tant que telle. Cette tâche peut s'avérer plus discriminante que celles considérées auparavant, relatives à l'exercice 4, car les adaptations de connaissances numériques en lien avec la technique de développement ne sont vraisemblablement pas enjeu d'enseignement au Chili alors qu'elles sont davantage au cœur du travail algébrique conduit en fin de collège en France.

Exercice 6. Factoriser

a. $abc - abc^2$

b. $-2xy^2w + 4y^3w^2z$

c. $ac + bc + ad + bd$

Dans les deux manuels français, il n'y a pas d'exercices liés au type de tâches que recouvre l'exercice 6. Dans le manuel chilien, le type de tâches correspondant est travaillé dans 12 exercices sur 16 liés à la factorisation d'expressions algébriques (75%). Ce type d'adaptation de connaissances, lié à la technique de factorisation n'est *a priori* pas étudié par les élèves français. Les deux premiers items pourraient dès lors s'avérer discriminants au regard des techniques dont les élèves de l'institution française disposent, du fait entre autres, de la présence inhabituelle de puissance (polynôme de degré 3 pour l'item b) et de plusieurs variables (*a, b* et *c* ; *x, y* et *z* ; *a, b, c* et *d*). On peut toutefois envisager que des élèves franchissent les adaptations de connaissances requises, en revenant à la définition de la notion de puissance, par exemple. Le cas du dernier item est un peu différent. Les marges de manœuvre sont moins importantes et le terme commun *(a+b)* peut apparaître après une factorisation par le facteur commun *c* des deux premiers termes, puis par *d* des deux derniers termes de la somme, ce qui peut rendre la tâche plus aisée, y compris pour des élèves français.

2.3 Résultats de l'analyse *a posteriori* du questionnaire posé aux élèves français et chiliens

L'analyse *a posteriori* des réponses des élèves français et chiliens à ce questionnaire donne des indications sur les rapports personnels développés par les deux populations d'élèves aux genres de tâches « développer » et « factoriser ».

Les différences de réussite constatées confirment la conformité de ces rapports personnels d'élèves aux rapports institutionnels appréhendés par notre étude des programmes et des manuels. Par exemple, on observe une plus grande réussite chez les élèves chiliens que les élèves français en réponse à l'exercice 3, du fait sans doute de leur fréquentation en amont de ce type de tâches considéré comme *a priori* plutôt absent du collège en France.

	$(a+2b+c)^2$
France	2,4%
Chili	37,8%

Tableau 5 : Taux de réussite dans l'exercice 3.

À l'opposé, on peut constater que la réussite des élèves français est plus importante que celle des élèves chiliens dans les réponses données à l'item c de l'exercice 1, ce qui paraît conforme au fait que ce type de tâches numériques n'est que très peu représenté dans l'institution chilienne, tout en n'étant pas non plus au cœur des savoirs enseignés en France (d'où les 23,2% de réussite constatée).[10]

	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{10}\right)^2$
France	23,2%
Chili	2,7%

Tableau 6 : Taux de réussite dans l'exercice 1c.

De la même façon, on peut apprécier que globalement ; le taux de réussite des élèves chiliens est plus important que celui des élèves français, relativement à l'exercice 6 :

	a. $abc-abc^2$	b. $-2xy^2w+4y^3w^2z$	c. $ac+bc+ad+bd$
France	1,2%	2,4%	28%
Chili	25,2%	26,1%	31,5%

Tableau 7 : Taux de réussite dans l'exercice 6

Toutefois comme ces tableaux l'illustrent bien, les taux de réussite constatés ne sont pas uniquement indexés avec la représentativité des types de tâches au sein de chacune des deux institutions. Par exemple, l'écart obtenu entre les taux de réussite

[10] Rappelons la diversité rencontrée dans les deux manuels français de 3^e sur ce type de tâches, précisément.

des élèves français et chiliens sur l'item c. de l'exercice 6, nettement plus faible que pour les items a. et b., montre que la complexité de la tâche en termes d'adaptations de connaissances et de marges de manœuvre joue un rôle également important tout comme notre analyse *a priori* permettait d'ailleurs de le supposer au regard des variables didactiques en jeu (cf. tableaux 1 et 2 en annexe).

De la même façon, la différence des taux de réussite constatée entre les deux populations d'élèves est nettement moins importante pour l'item 4b (Factoriser $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$) que dans l'item 4a (Factoriser $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$). Ceci est dû au fait que cet item présente une difficulté supplémentaire pour les élèves français : pour factoriser, il faut d'abord reconnaître le produit de la somme par la différence afin d'obtenir un facteur commun apparent. Notons que l'on observe pourtant une légère augmentation du taux de réussite des élèves chiliens sur ce deuxième item 4.b., ce qui semble indiquer qu'ils franchissent mieux certains types d'adaptations (liée par exemple, à l'introduction d'une étape intermédiaire pour factoriser une expression littérale donnée) que d'autres (relatives au traitement de l'opposé d'une somme).

	a. $(2x+5)(9x+6)-(2x+5)(5x-3)$	b. $25x^2-9+(5x-3)(7x+8)$
France	39%	14,6%
Chili	4,5%	8,1%

Tableau 8 : Taux de réussite dans l'exercice 4

Certains des résultats à la fois quantitatifs et qualitatifs de notre analyse *a posteriori* peuvent d'ailleurs quelque peu étonner au regard de la seule étude institutionnelle. Prenons l'exemple de l'exercice 2a.

	a. $9x^2-4y^2$	b. $3x+2xy$	c. $36-60x+25x^2$
France	26,8%	42,7%	40,2%
Chili	36%	64,9%	17,1%

Tableau 9 : Pourcentage de réussite dans l'exercice 2

Les taux de réussite des élèves français et chiliens, relativement à cet item sont respectivement de 26,8% et 36%, soit relativement proches. Les élèves des deux pays éprouvent par ailleurs des difficultés similaires à reconnaître $9x^2$ comme $(3x)^2$ et commettre des erreurs du même type dans le traitement attendu du monôme dans la factorisation. À l'instar de Pilet (2012), nous faisons l'hypothèse que cela renvoie en partie au fait que, que ce soit en France ou au Chili, ce type de tâches apparaît majoritairement comme directement convoqué comme sous-tâche dans l'accomplissement de tâches plus complexes telles que la factorisation de polynômes et serait finalement assez peu travaillé en tant que tel dans les deux institutions. Le travail de Constantin (2014) étaye également ce type de constat, en parlant de la présence de savoirs implicites ou « cachés » dans l'institution[11] et au rôle particulier que jouent notamment les monômes ou les « Pseudo-monômes »[12] au sens de Drouhard (1992) dans le calcul algébrique.

De la même manière, l'écart entre les taux de réussite obtenus en réponse à l'exercice 5 ne paraît pas très significatif.

	$16x^2 - (4x-3)(4x+3)$
France	17,1%
Chili	11,7%

Tableau 10 : Taux de réussite dans l'exercice 5

L'analyse institutionnelle évoquée ci-avant semble pourtant indiquer que ce type de tâches est nettement plus fréquenté par les élèves français que par les élèves chiliens. Or on obtient en France comme au Chili un assez faible taux de réussite dans l'accomplissement du type de tâche ainsi représenté. Plus encore, les erreurs commises de façon majoritaire par les élèves chiliens et français sont de même nature : elles ont trait à la gestion du signe « – » qui semble problématique au sein des deux institutions bien que davantage travaillée en France.

Les résultats des analyses *a posteriori* des réponses d'élèves à ce questionnaire confirment que les rapports personnels d'élèves restent assez conformes aux rapports institutionnels que l'analyse des programmes et des manuels avaient permis d'appréhender. Le fait que les praxéologies à enseigner et enseignées sur le calcul algébrique en France mettent davantage l'accent sur le traitement d'expressions numérico-algébriques se confirme au regard des résultats obtenus aux exercices 4 et 5 du questionnaire. Inversement le fait que les praxéologies à enseigner au Chili se centrent plus sur des expressions algébriques à plusieurs variables et/ou comportant des produits de plusieurs variables est également confirmé par les réponses obtenues. Les élèves chiliens réussissent « mieux » les exercices 3 et 6.

Pour autant, les résultats obtenus donnent également à voir que la complexité des tâches de calcul algébrique proposées du fait de variables didactiques considérées dans notre analyse *a priori*, joue un rôle non négligeable. Les différences entre les taux de réussite constatés entre les deux populations d'élèves peuvent se retrouver infléchies du fait d'adaptations de connaissances supposées ou des marges de manœuvre plus ou moins importantes dans les calculs effectués, identifiées *a priori*. Ainsi pour des tâches plus ou moins possiblement fréquentes dans chacune des

[11] Dans son travail de thèse, Constantin (2014) évoque notamment le rôle que joue la substitution de lettres par des (pseudo-)monômes très précoce dans les propriétés énoncées autour de la distributivité sous une forme algébrique (du type $k(a + b) = ka + kb$).

[12] Cette catégorie de « pseudo-monôme » se distingue de celle d'un produit par le fait que, sur le plan de la structure linguistique, l'on peut considérer qu'il y a deux opérations multiplicatives : l'une interne comme pour $3 \times x$ et l'autre externe comme pour $3x$.

institutions, les taux de réussite des élèves français ou chiliens tendent à se rapprocher. Les réponses obtenues pour certains des exercices montrent également des erreurs aux origines communes que l'on retrouve commises par les deux populations d'élèves français ou chiliens : c'est le cas par exemple de la gestion des signes « – » dans les calculs à effectuer (cf. exemple donné ci-avant sur l'opposé de la somme). Ce type de résultats ainsi obtenu est intéressant car il nous informe quant aux difficultés rencontrées par les élèves et à leurs origines éventuelles qui peuvent, pour partie, transcender les différences constatées entre les organisations du savoir à enseigner au sein des deux institutions scolaires françaises ou chiliennes[13]. Nous y reviendrons en conclusion.

3. Quelques résultats sur le rôle des changements de cadres algébrique et géométrique dans l'enseignement de la distributivité

L'étude institutionnelle (cf. partie 2) a montré le changement de cadres algébrique et géométrique constitue un « fil rouge » du discours technologico-théorique tenu sur la distributivité au sein du manuel chilien. Nous avons dès lors trouvé intéressant de nous interroger plus avant sur les potentialités et/ou les limites de ce changement de cadre dans l'enseignement du calcul algébrique.

3.1. Remarques sur les potentialités et les limites du changement de cadres algébrique-géométrique

Dans le manuel officiel chilien analysé, une partie importante du discours technologique et théorique tenu sur la propriété de distributivité en lien avec le calcul algébrique prend appui sur des constructions géométriques. Pour ce faire, ce discours s'appuie sur des calculs d'aires de surface rectangulaires ou carrées en vue de justifier l'équivalence d'expressions algébriques.

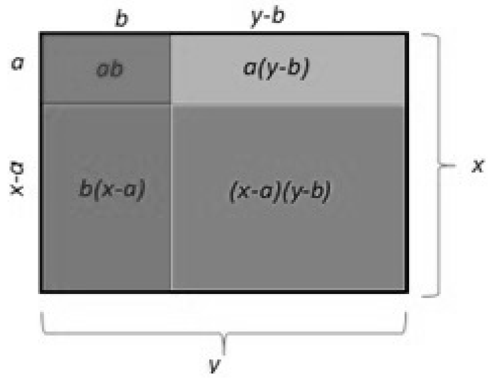
Une des originalités de l'argumentation technologique ainsi développée dans le manuel chilien est qu'elle tente visiblement de prendre en charge une part des adaptations de techniques enseignées (cf. l'exemple développé ci-avant sur le développement du produit d'un facteur par une somme de *n* termes, cf. partie 2.1), tentative qui nous a paru plutôt absente des deux manuels français analysés. Pour autant, ce discours nous semble présenter quelques incomplétudes.

En effet, si ce discours s'attache à prendre en charge certaines des adaptations relatives aux techniques de développement et de factorisation d'expressions littérales, d'autres sont laissées de côté, comme par exemple celles attenantes à la

[13] Ainsi le résultat de recherche relative aux erreurs d'élèves français ou chiliens dans la gestion du signe « – » a conduit Dauriac (2014) à mener une enquête complémentaire sur l'intégration des nombres relatifs dans le calcul algébrique dans l'institution française. Cette étude a permis d'élucider certains aspects problématiques, relatifs à l'enseignement de ce que les auteurs de manuels de 4e désignent par déterminer l'opposé d'une somme.

soustraction. Cela nous a semblé intéressant de nous interroger plus spécifiquement à ce sujet, au regard des difficultés communes rencontrées par les élèves français ou chiliens dans la gestion de signe « – ». Le signe « – » est systématiquement prise en charge ailleurs dans le cadre algébrique *stricto sensu*, privilégiant de ce fait le retour systématique à sa signification comme opération unaire[14] ($-x$ étant à interpréter comme l'opposé de x), sans considérer l'opération binaire que la différence entre deux termes recouvre (Drouhard et Panizza, 2012) davantage en continuité du premier sens arithmétique de la soustraction et sans nécessairement aménager de passage explicite d'une signification à d'autres possibles[15].

Nous avons dès lors cherché à proposer quelques compléments possibles aux organisations mathématiques concernées par ces jeux de cadre, en lien avec la soustraction. Par exemple, nous proposons la construction géométrique suivante pour illustrer l'application de la double distributivité relativement à un produit de deux différences.



$$\begin{aligned}(x-a)(y-b) &= xy - b(x-a) - ab - a(y-b)\\ &= xy - bx + ba - ab - ay + ab\\ &= xy - xb - ay + ab\end{aligned}$$

Figure 5 : Support à un changement de cadres pour la double distributivité / soustraction

[14] L'« arité » d'une opération est par définition le nombre de ses opérandes ; par exemple l'addition est binaire, son arité est 2.

[15] Cette volonté de redéfinir la soustraction comme opération binaire dans le cadre algébrique peut poser question par rapport à la rupture entre arithmétique et algèbre, souvent mise en avant en didactique de l'algèbre. Nous ne nous y attarderons pas plus ici : notons toutefois qu'une identité remarquable du type $(a-b)^2$ présente dans les deux institutions française et chilienne (tout comme plus tard, dans l'étude de signes d'expressions littérales, les formules liées à la dérivation) montre une certaine « vie » de la « différence algébrique » comme opération binaire dans les pratiques de calcul algébrique.

Pour autant, ce type de compléments possibles au discours technologico-théorique sur les organisations mathématiques enseignées sur la distributivité et le calcul algébrique soulève des questions, notamment celle de la prise en charge de l'extension des pratiques de calcul algébrique aux nombres relatifs, impossible dans le seul cadre des grandeurs géométriques en jeu (en lien avec les notions d'aire et de longueur) comme le montre bien Constantin (2014).

Notons par ailleurs que dans la figure ci-dessus, comme dans toutes celles rencontrées dans la partie « cours » du manuel chilien, les variables ou les sommes et différences de variables caractérisent des longueurs, et dès lors les produits de deux facteurs (d'un nombre et d'une variable, de variables, de sommes ou de différences de deux variables) correspondent à des calculs d'aires. Cette caractéristique des changements de cadres géométrique et algébrique peut conduire à mettre en relation les grandeurs considérées (longueurs et aires) et les structures des expressions algébriques qui modélisent la situation géométrique. Par exemple, cela peut autoriser des moyens de contrôle, liés au degré des polynômes qui modélisent une situation géométrique faisant intervenir des grandeurs produits : on peut s'attendre à un polynôme de degré 2 pour un calcul d'aire, voire de degré 3 pour le calcul d'un volume.

Certains types de tâches correspondant à des exercices du manuel chilien font toutefois exception à cette caractéristique récurrente[16] des changements de cadre géométrique et algébrique. C'est par exemple, le cas de la factorisation d'un polynôme par le biais de la représentation en facteurs polynômiaux comme une somme d'aires, le total représentant le polynôme initial à factoriser (cf. figure 3). Rappelons que c'est un type de tâches présent dans le manuel chilien et absent des deux manuels français étudiés. Nous avons élaboré et mis en œuvre une brève expérimentation autour de ce type de tâches, dans une classe de Seconde française. Cette expérimentation visait à interroger quelques-unes des potentialités et des limites éventuelles de telles tâches liées à un changement de cadres algébrique et géométrique, relativement inhabituel pour les élèves, dans le contexte de l'institution scolaire française.

3.2. Une expérimentation en classe française : des tâches relatives à la factorisation et au changement de cadres algébrique-géométrique

Nous avons envisagé une série de tâches visant à installer progressivement le type de tâches concerné afin d'éviter une rupture de contrat didactique trop importante qui aurait pu entraver l'intégration de ce type de tâches inhabituel dans l'institution

[16] Cela semble être une caractéristique récurrente liée à ces changements de cadres algébrique et géométrique : que ce soit dans la partie « cours » du manuel chilien et/ou dans les parties « cours » ou « exercices » des manuels français de 5^{e} et/ou de 4^{e} où l'on en trouve davantage trace que dans les deux manuels de 3^{e} analysés. Nous y reviendrons en conclusion.

française. D'autre part, l'analyse des réponses des élèves français au questionnaire présenté dans la partie 2.3 ayant donné à voir des difficultés de ces élèves dans les calculs liés aux (pseudo-)monômes, nous avons cherché à prendre en compte cet aspect dans la progression de tâches ainsi envisagées. L'expérimentation brièvement décrite ci-après a été mise en œuvre dans une classe de Seconde française (28 élèves de 15-16 ans, le 28 mars 2013, séance d'une heure environ). Précisons que les 28 élèves concernés avaient répondu au questionnaire présenté dans la sous-section 2.1 de cet article. Nous leur avons présenté la séance concernée en leur expliquant qu'il s'agissait de les familiariser avec un type d'exercices classique au Chili et assez inhabituel en France.
Nous avons reproduit ci-après la consigne distribuée aux élèves en début d'heure et qui a servi de support à cette expérimentation :

1) Expliquer comment tracer un carré d'aire $25x^2$ et faire une figure codée à main levée.
2) Expliquer comment tracer un carré d'aire $3x^2$ et faire une figure codée à main levée.
Construire un rectangle d'aire $10x$ ayant un côté commun avec ce carré.
Chercher une factorisation de $3x^2 + 10x$.
3) Tracer à la main un carré d'aire $25x^2$, puis un rectangle d'aire $25xy$, de sorte que les deux aient un côté commun.
Proposer une factorisation de : $25x^2 + 25xy$.
4) Tracer à la main deux rectangles, l'un d'aire $4x^2y$ et l'autre d'aire$4xy^2$, de sorte que les deux aient un côté commun.
Proposer une factorisation de $4x^2y$.+ $4xy^2$
5) Tracer à la main deux rectangles d'aires $2x^3y^2$ et $3x^2yz$, de sorte que les deux aient un côté commun.
Proposer une factorisation de $2x^3y^2 + 3x^2yz$.

Figure 6 : Support de l'expérimentation élaborée et mise en œuvre dans une classe de Seconde le 28 mars 2013

Notre analyse *a priori* de la succession de tâches ainsi proposée nous permet de prévoir que la question 1 ne devrait pas poser trop de difficultés aux élèves. Il s'agissait d'une première tâche visant à installer sur un exemple simple un contrat didactique toutefois inhabituel lié à la production d'une figure générique correspondant à une aire donnée sous la forme d'une expression algébrique.

Le début de la deuxième question posée nécessite une première adaptation liée à la présence d'un coefficient irrationnel $\sqrt{3}$. Il s'agissait pour nous de revenir sur une partie des difficultés potentiellement rencontrées par les élèves dans le traitement des (pseudo-)monômes (cf. résultats au questionnaire). Le fait qu'une tâche du même type ait été accomplie préalablement nous a semblé pouvoir constituer une aide pour franchir cette première adaptation de connaissances. Par contre le fait de trouver les côtés du rectangle d'aire donnée, ayant un côté commun avec le carré est à même de poser difficulté aux élèves. Trouver le côté inconnu du rectangle en « divisant » l'aire de celui-ci ($3x^2+10x$) par la mesure du côté supposé commun $\sqrt{3}\,x$ entre le rectangle et le carré paraître délicat au regard de la nature du (pseudo-)monôme. Dans les faits, la factorisation attendue en réponse à cette question $\sqrt{3}x(\sqrt{3}x+\frac{10}{\sqrt{3}})$ ou $\sqrt{3}x(\sqrt{3}x+\frac{10\sqrt{3}}{3})$ est très inhabituelle (se situant par là-même en rupture de contrat didactique). Il est dès lors possible que les élèves produisent des factorisations plus « coutumières » pour eux mais ne répondant pas à la consigne donnée dans le cadre géométrique, du type de $x(3x+10)$. Ce choix était volontaire : il s'agissait bien de « forcer » la mise en place d'un nouveau contrat didactique attenant à la factorisation d'expressions littérales en lien avec un travail effectué en amont dans le cadre géométrique.

Il est important à noter qu'à partir de la troisième question (questions 3, 4 et 5), les expressions littérales à factoriser peuvent s'avérer problématiques vu qu'elles correspondent à des polynômes à plusieurs variables et/ou de degré ≥ 2. Or notre étude institutionnelle montre qu'ils ne sont pas ou peu travaillés dans les manuels français de collège. Notre idée est donc d'introduire ce type de tâches avec le but d'initier les élèves français à la factorisation d'expressions littérales sans doute inhabituelles pour eux et de voir si le travail effectué en amont dans le cadre géométrique leur permet de franchir les adaptations de connaissances correspondantes.

Les résultats principaux de l'analyse *a posteriori* de la séance observée sont les suivants. En réponse à la première question, 23 des 28 élèves ont reconnu que la mesure du côté du carré est égale à la racine de son aire, et ont su faire le calcul correspondant à la technique (reconnaître que le côté du carré est égal à la racine de son aire). La quasi-totalité a dessiné le carré de côté $5x$. Nous avons observé que la racine carrée du (pseudo-)monôme a pu à cette occasion ou non être convoquée explicitement par les élèves. La référence au cadre géométrique peut d'ailleurs amener les élèves à « expliciter la racine » qu'ils ne convoquent peut-être pas aussi spontanément dans le cadre algébrique *stricto sensu* si on en croit les résultats obtenus au questionnaire sur la factorisation de monômes identiques (et des erreurs commises par les élèves français comme chiliens dans ce type de traitements). L'extrait suivant de la transcription semble toutefois attester d'une première rupture de contrat didactique liée à l'articulation entre les cadres algébrique et géométrique liée au tracé d'une figure géométrique.

E1 : Enfin il faut une inconnue, du coup on pourra, on peut pas savoir, on peut pas faire, si y a une inconnue.

MAIT1 : **Ah, alors tu penses que tu peux pas faire parce que c'est pas connu, alors ce qu'on vous demande c'est une figure codée à main levée, hein.**

E1 : Ouais.

MAIT1 : **On vous demande pas de tracer quelque chose de (inaudible).**

E1 : Vingt-cinq x au carré...

Extrait 13 : Échanges d'élèves à l'occasion du tracé du carré d'aire $25x^2$

L'élève concerné hésite à tracer un carré codé à main levée, de côté indéterminé (côté 5x). Notons que cela confirme une des ruptures du contrat didactique que nous avions anticipé dans notre analyse *a priori*, tout en précisant certains aspects : certains élèves éprouvent visiblement des difficultés à dessiner une figure « générique » dont le côté est indéterminé.

En réponse à la deuxième question de l'énoncé, conformément à notre analyse *a priori*, certains élèves ont produit la figure et la factorisation attendue tandis que d'autres ont produit des factorisations plus habituelles qui ne répondaient pas aux contraintes géométriques de l'énoncé et/ou se sont retrouvés bloqués dans le tracé à main levée de la figure correspondante. Cela a permis lors de l'épisode de mise en commun collective qui a suivi d'expliciter les règles « nouveau contrat didactique » relatif à la factorisation en lien avec le changement de cadre algébrique et géométrique. Notons que suite aux échanges collectifs qui ont permis d'identifier la longueur commune d'un côté du rectangle et d'un côté du carré : $\sqrt{3}x$ (correspondant au facteur commun), une majorité d'élèves a été en mesure de produire la factorisation attendue en réponse à cette question.

En réponse aux troisième, quatrième et cinquième questions de l'énoncé, il est important de signaler l'importance de la rupture du contrat didactique, liée au fait que les aires sont des monômes à plusieurs variables, ce qui est rarement travaillé dans l'institution française à ce niveau, comme l'on a vu dans l'analyse des manuels de Troisième (cf. sous-section 2.1). L'extrait suivant de la transcription atteste de la difficulté que représente cette question pour deux élèves dont les échanges ont été retranscrits.

E2 : Tiens, j'me sens trop mal. (inaudible)

E1 : Pourquoi tu te sens mal ? Qu'est-ce que t'as ? […]

E1 : Un rectangle d'aire, (inaudible) x, y ? Pfou // Oh, y a trop de lettres, j'suis perturbée là.[…]

E1 : 25xy. Pfou. Y a trop de lettres !

Extrait 14 : Échanges d'élèves à l'occasion de la découverte de la troisième question

Cependant, une fois cette difficulté surmontée *via* des aides de la part des expérimentateurs présents dans la classe,[17] la majorité des élèves ont répondu à une partie des questions posées de manière correcte. Des élèves ont produit spontanément plusieurs factorisations possibles sur la base des dessins à main levée effectués. Par exemple dans la production d'élèves ci-dessous, on peut observer deux factorisations possibles du polynôme relatif à la cinquième question posée.

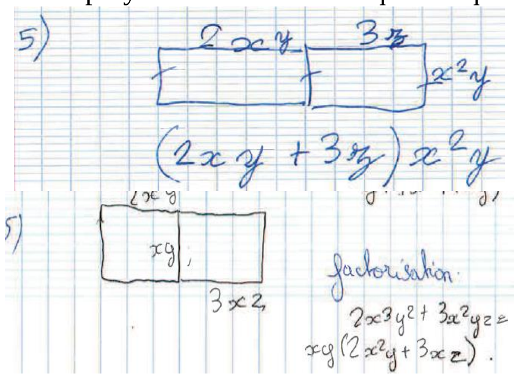


Figure 7 : Exemples de factorisations diverses pour l'exercice 5.

Le temps imparti pour la séance observée n'a malheureusement pas permis de revenir sur ces différentes possibilités pour factoriser une même expression algébrique, répondant de manière satisfaisante aux contraintes imposées par l'énoncé. Cela a été fait par l'enseignant de la classe observée à la suite de la séance concernée.

À travers cette brève expérimentation, on peut entrevoir quelques-unes des potentialités apparentes des tâches liées au changement de cadres algébrique et numériques ainsi expérimentées. Elles ont semblé permettre le travail sur des monômes avec un discours sur les longueurs des côtés des carrés et leurs aires qui semblent avoir permis aux élèves de mieux percevoir la structure algébrique particulières de pseudo-monômes au sens de Drouhard (1992). La production à main levée de « figures génériques » avec des côtés de longueurs indéterminées nous paraît également intéressante, au regard d'enjeux liés cette fois à la modélisation de situations géométriques, ici considérée dans un sens relativement inhabituel pour les élèves[18]. Enfin, la production spontanée par les élèves de plusieurs factorisations possibles sur la base de dessins à main levée d'expressions algébriques comprenant des produits de plusieurs variables le permettant *a priori* nous semble un point intéressant à signaler. Les élèves à l'issue de la classe du collège n'identifient pas

[17] Ces aides ont surtout constitué à expliciter ce que les expressions algébriques présentes dans l'énoncé présentaient d'inhabituel et à relancer la recherche des élèves.

[18] La modélisation algébrico-fonctionnelle est un enjeu important de l'enseignement des mathématiques au lycée en France, ce qui peut laisser penser qu'une telle potentialité mérite qu'on s'y attarde.

nécessairement que pour une expression littérale donnée, plusieurs factorisations sont possibles, et cela peut constituer un enjeu d'enseignement dans la transition collège-lycée (Tonnelle, 1979). On peut envisager que des tâches de ce type, mais plus traditionnelles pour des élèves français de Seconde, correspondant à la factorisation de polynômes comportant des produits de deux variables ou trois variables, de degré 2 ou 3 ou coïncidant davantage avec l'organisation mathématique des savoirs à enseigner sur les grandeurs (simples ou produits correspondant aux aires ou aux volumes) pourraient constituer une entrée intéressante dans la modélisation algébrico-fonctionnelle de situations géométriques.

4. Conclusions et perspectives

À l'issue de ce travail de recherche, plusieurs types de conclusions émergent sur les organisations de savoirs à enseigner sur la distributivité en France et au Chili.

Concernant les savoirs à enseigner et enseignés au sein de chacune des deux institutions, nous avons identifié des différences significatives dans les organisations de savoir à enseigner dans l'institution française et chilienne, que ce soit en ce qui concerne les types de tâches et techniques mises à l'étude ou les arguments technologico-théoriques qui visent à les accompagner (cf. partie 2). L'enseignement de la distributivité en France pourrait être qualifié de plus « algébrico-numérique » du fait des relations apparentes et étroites entre les *praxis* algébrique et numérique, étudiées de manière concomitante sur un temps long correspondant à plusieurs années d'enseignement au collège (Constantin, 2014). Ainsi les types de tâches à enseigner en fin de collège font principalement intervenir des « expressions algébrico-numériques » avec des coefficients de nature numérique variée (faisant parfois intervenir des racines carrées), correspondant la plupart du temps à des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 2. Les adaptations de techniques sollicitées reposent souvent sur un travail à la fois numérique et algébrique qui en ce qui concerne les (pseudo-)monômes par exemple, est parfois convoqué assez directement dans la factorisation ou le développement de polynômes. La *praxis* à enseigner sur la distributivité au Chili en un temps d'étude plus court qu'en France (une année à l'entrée du lycée) paraît d'emblée de nature plus algébrique : les polynômes considérés comportent plusieurs variables, peuvent être de degré supérieur à 2, ce qui va de pair avec un travail mené en amont sur les puissances et les produits de variables. Nous avons également constaté des différences dans les discours technologico-théoriques visant à accompagner l'enseignement des techniques de distributivité au sein des deux institutions. Le discours technologico-théorique paraît notamment plus présent et assumé dans le manuel chilien, du fait, d'une part, des objets de savoirs algébriques théoriques transposés (comme la notion de polynômes), et d'autre part de la présence d'arguments technologiques reposant sur un changement de cadres géométrique et algébrique, prenant en charge certaines adaptations des techniques.

En ce qui concerne les rapports personnels des élèves français et chiliens avec les savoirs enseignés ou les savoirs appris au sein de chacune des institutions, nous avons mis au jour des différences cohérentes avec celles constatées dans les organisations de savoirs mathématiques à enseigner. Ainsi les analyses des réponses d'élèves français et chiliens à notre questionnaire confirment les familiarités des uns et des autres avec les types de tâches respectivement mises à l'étude dans chacune des deux institutions. Par exemple, les élèves français réussissent davantage que les élèves chiliens à réaliser certaines adaptations de connaissances numériques, comme celles intervenant dans des calculs visant la factorisation ; en revanche, les élèves chiliens maîtrisent mieux d'autres adaptations, par exemple qui sont nécessaires pour la factorisation de polynômes à plusieurs variables et de degré supérieur ou égal à 2. Toutefois la nature même des adaptations de connaissances est importante à prendre en compte, et les différences de réussite entre les élèves chiliens et français dans l'accomplissement des tâches considérées comme plus ou moins familières aux uns et aux autres *a priori*, peuvent parfois s'estomper lorsque la marge de manœuvre relative à ces adaptations est plus faible. Ces analyses comparatives ont également permis de révéler la présence de *praxis* erronées qui semblent plus ou moins confortées par l'organisation des savoirs à enseigner au sein de chaque institution. Ainsi, bien qu'une *praxis* numérico-algébrique à enseigner en France, une part des techniques de développement ou de factorisation des polynômes correspondant à cette *praxis* (le travail sur les (pseudo-)monômes, la gestion du signe « – » dans les développements) semble à l'origine de difficultés des élèves français, tout autant que pour les élèves chiliens. Ces difficultés peuvent d'ailleurs renvoyer à des incomplétudes dans la *praxis* ou dans le *logos,* mises en avant par d'autres travaux que les nôtres (Pilet, 2012 ; Dauriac, 2014).

Ces résultats nous ont conduites à étudier les conditions de viabilité et d'existence de certaines organisations de savoir à enseigner. Nous nous sommes plus particulièrement intéressées aux rôles des changements de cadres algébrique et géométrique qui sous-tendent une part importante du discours technologico-théorique tenu sur la distributivité au Chili. Ainsi nous avons tenté dans un premier temps d'envisager des compléments aux ingrédients technologiques exposés dans le manuel officiel chilien : visant par exemple à prendre en charge la gestion du signe « – » dans les savoirs à enseigner sur la distributivité. Ce type de compléments peut certes poser question au regard de la signification prêtée à la différence dans le cadre géométrique, dès lors redéfinie comme opération binaire (en extension de sa signification arithmétique) alors que d'autres significations du signe « – » sont en jeu dans le cadre algébrique, dès lors que les nombres relatifs interviennent (Drouhard et Panizza, 2012). De manière plus générale les cadres géométrique et lié aux grandeurs présentent des limites avérées et maintes fois soulignées en ce qui concerne l'intégration des nombres relatifs (autrefois qualifiés d'algébriques). Des travaux récents (Dauriac, 2014) interrogent plus précisément ce point particulier, concernant la (ré-)intégration des nombres relatifs dans les *praxis* liées au calcul algébrique, à enseigner en France.

Pour autant, les changements de cadres géométrique et algébrique ne nous semblent pas dénués de potentialités au regard des éléments de discours technologiques qu'ils permettent de tenir sur les savoirs à enseigner sur le calcul algébrique, mais aussi du point de vue de types de tâches pouvant correspondre à des « jeux de cadres » au sens de Douady (1986). L'expérimentation conduite dans une classe de Seconde française nous a permis notamment d'identifier les potentialités d'un type de tâches donné, présent dans le manuel officiel chilien, et absent de l'institution française. Les mises en relations d'aspects structuraux des expressions algébriques (produits ou carrés, sommes) et de grandeurs géométriques (aires, longueurs) permises *via* le type de tâches ainsi exploré par les élèves nous ont semblé pertinentes à plusieurs égards développés ci-avant : dans le traitement des monômes ou pseudo-monômes, dans la recherche de facteurs communs dans le cadre algébrique. De plus, les questions suscitées par la production de « figures génériques » en lien avec des changements de cadres algébrique et géométrique (envisagé dans un sens inhabituel pour des élèves français) nous ont paru intéressantes dans une autre perspective, celle liée à l'enseignement de la modélisation algébrico-fonctionnelle.

Toutefois, il ne faudrait pas sous-estimer le coût que de tels changements ou jeux de cadre peuvent occasionner du point de vue des connaissances mathématiques des élèves relatives aux organisations de savoirs mathématiques liées aux calculs algébrique et aux grandeurs géométriques. D'autre part, la mise en cohérence de ces organisations de savoirs à enseigner peut être questionnée au regard des pratiques de modélisations algébriques. Par exemple, quelle(s) relation(s) envisager entre grandeurs simples, grandeurs-produits (aire, volume) et degré et/ou produits de monômes ou de polynômes ? Et pourquoi ?

Bibliographie

ABOU-RAAD N. (2006), *Le calcul algébrique en France et au Liban. Etude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves*. Thèse d'université. Université Aix-Marseille I.

ABOU-RAAD N., MERCIER A. (2009) Etude comparée de l'enseignement de la factorisation par un facteur commun binôme, en France et au Liban. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 29(2) 155-288.

ASSUDE, T., COPPÉ, S. & PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 41-62). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BESSOT, A. & COMITI, C. (2008), Apport des études comparatives aux recherches en didactique des mathématiques : le cas Viêt-Nam/France. In Coulange L. & Hache, C. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* 2008, 171-19.

BESSOT, A. & COMITI, C. (2013), Apport des recherches comparatives internationales aux recherches en didactique des mathématiques. Le cas de la France et du Viêt Nam. *Recherche en didactique des mathématiques,* 33(1), 41-62.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). - La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objets d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble, p. 77-124.

CHEVALLARD, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.

CONSTANTIN, C. (2008), *Des fragilités du collégien aux difficultés du lycéen en Mathématiques, deux études de cas : Yoan et Joanna*. Mémoire de Master 2 recherche, Université Paris 7.

CONSTANTIN, C. (2014), *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* Thèse de l'Université d'Aix-Marseille.

COULANGE L., DROUHARD J.P., DORIER J.L., ROBERT A. (2012), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série. Grenoble : La Pensée Sauvage.

COULANGE L., BEN NEJMA S., CONSTANTIN C., LENFANT-CORBLIN A. (2012), Des pratiques enseignantes aux apprentissages des élèves en algèbre à l'entrée au lycée. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 57-79). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CROSET, M.-C. (2009), *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre*. *Étude des erreurs stables inter-élèves et intra-élèves en termes de praxis-en-acte*. Thèse de l'Université Joseph Fourier – Grenoble I.

DAURIAC P. (2014), *Entre relatifs et calcul algébrique en 4e*. Mémoire de Master 2, Université de Bordeaux.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-31.

DROUHARD J.-P. (1992), *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. Thèse de l'université Paris 7.

DROUHARD J.-P., PANIZZA M. (2012), Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L. et Robert A., *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques*, Hors série (pp. 203-229). Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRUGEON B. (1997), Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, Recherches en Didactique des Mathématiques, 17(2), 167-210.

PILET J. (2012), *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire: modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris.

TONNELLE J. (1979), *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. Mémoire de DEA des Universités de Bordeaux I et d'Aix-Marseille 2. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

VLASSIS J. (2013), Utilisation du signe négatif et activités de modélisation, *Education et Formation,* 39-50.

Ministerio de Educación. *Informe final servicio de implementación del sistema de seguimiento al uso de texto escolares en uso durante el 2013.* http://www.textosescolares.cl/usuarios/tescolares/File/Informe%20Final%20SAT%202013_diciembre.pdf (2013), Accessed 03 Jan 2016.

MANUELS SCOLAIRES

BRAULT, R., DARO, I., FERRERO, C., PERBOS-RAIMBOURG, D., & TELMON, C. (2008). *Mathématiques, 3e*. Collection « Phare ». Hachette.

CHAPIRON, G., MANTE, M., MULET, R., & PEROTIN, C. (1999). *Mathématiques, 3e*. Triangle. Hatier.

ORTIZ, A., REYES, C., VALENZUELA, M., CHANDÍA, E. (2012). *Matemáticas, 1º*. McGraw-Hill. Interamericana de Chile Limitada.

Remerciements : Les deux auteurs remercient le Dr. Jean-Philippe Drouhard et le Dr. Patricio Cumsille pour leur collaboration dans la rédaction de cet article.

LALINA COULANGE
lalina.coulange@espe-aquitaine.fr

PAULA VERDUGO
paulasinttia@gmail.com

Annexe 1 : Le genre de tâches « Développer » en France et au Chili

Types de tâches associés au genre de tâches « Développer ». La notion de développement repose sur l'idée de supprimer des parenthèses, mais aussi sur la transformation d'un produit en une somme. Développer consiste donc en la transformation d'une expression algébrique écrite comme un produit, dans une autre expression algébrique écrite sous la forme d'une somme de deux ou plus polynômes. À partir de notre analyse praxéologique on distingue quatre types de tâches principaux, lesquels sont à leur tour divisés dans sous-types selon les variables didactiques en jeu :

Expressions	Types de tâches du genre « Développer »
1) $(a+b)(a-b)$	1.1) *a* nombre relatif/racine et *b* racine/nombre relatif, ou *a, b* racines (on exclut le cas : *a, b* nombres relatifs). Ex. : $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$, $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})$
	1.2) *a, b* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $(3x+12)(3x-12)$ $(3x-12)(3x+12)$
	1.3) *a, b* polynômes ou monômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $(x-y)(x+y)$
2) $(a\pm b)^2$	2.1) *a* nombre relatif/racine et *b* racine/nombre relatif, ou *a, b* racines (on exclut le cas : *a, b* nombres relatifs). Ex. : $(\sqrt{6}+2)^2$, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
	2.2) *a, b* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $(3x\pm 2)^2$
	2.3) *a, b* polynômes ou monômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $(x\pm 3y^2)^2$
3) $(a\pm b\pm c)^2$	3. *a, b, c* monômes à plusieurs variables de degré inferieur ou égal à 1.
4) $pq\pm rs$	4.1) $pq+rs$ avec *p, q, r, s* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $3x+3(5x+3)$
	4.2) $pq-rs$ avec *p, q, r, s* polynômes ou monômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $16x^2-(4x-3)(4x+3)$
	4.3) *p, q, r, s* polynômes ou monômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $x^2y^2(3xy\pm 2x^2y)\pm 5x^3y^3$

Tableau A.1 : Les types de tâches constitutifs du genre de tâches « Développer »

Le Tableau A.2 ci-dessous donne des indications sur la présence des types de tâches du genre « Développer » dans les manuels français Triangle et Phare et dans le manuel officiel chilien.

Genre Développer		Triangle	Phare	Manuel chilien
1) $(a+b)(a-b)$	1.1)	0	10 (27,8%)	0
	1.2)	23 (100%)	25 (69,4%)	2 (40%)
	1.3)	0	1 (2,8%)	3 (60%)
Total		23	36	5
2) $(a \pm b)^2$	2.1)	0	14 (22%)	1 (14,3%)
	2.2)	35 (100%)	48 (75%)	1 (14,3%)
	2.3)	0	2 (3%)	5 (71,4%)
Total		35	64	7
3) $(a \pm b \pm c)^2$		0	0	1 (100%)
4) $pq \pm rs$	4.1)	29 (58%)	12 (57,1%)	0
	4.2)	21 (42%)	8 (38,1%)	0
	4.3)	0	1 (4,8%)	21 (95%)
Total		50	21	22

Tableau A.2 : Présence des types de tâches constitutifs du genre de tâches « Développer » au sein des deux institutions.

Annexe 2 : Le genre de tâches « Factoriser » en France et au Chili

Types de tâches associés au genre de tâches « Factoriser ». Dans l'enseignement secondaire dans l'institution française, le genre de tâches « Factoriser » une expression algébrique du type donné ne se réduit qu'aux polynômes (généralement à une variable) de degré 3 au plus, et à coefficients, correspondant la plupart du temps, à des entiers relatifs et fractions. Par contre dans l'institution chilienne, ce genre s'étend aux polynômes à plusieurs variables et de degré au plus 4 en chaque variable (ce qui peut produire expressions de degré assez élevé), comme le montre la figure ci-dessous. Dans notre étude, nous distinguons 3 types de tâches principaux, lesquels sont à leur tour divisés en sous-types de tâches selon les variables didactiques en jeu.

Expressions	Types de tâches du genre « Factoriser »
1) $a^2 - b^2$	1.1) *a, b* polynômes à une variable de degré inferieur ou égal à 1. Ex. : $16x^2 - 9$, $(5x+4)^2 - (3x-2)^2$
	1.2) *a, b* polynômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $x^2 - y^2$, $x^4 - y^2$
2) $a^2 \pm 2ab + b^2$	2.1) $a^2 + 2ab + b^2$ avec *a* nombre relatif ou racine et *b* polynôme à une variable de degré égal à 1, ou *a* polynôme à une variable de degré égal à 1 et *b* nombre relatif ou racine (on exclut le cas *a* et *b* nombres relatifs ou racines au même temps). Ex. : $16x^2 + 24x + 9$ ou $9 + 24x + 16x^2$
	2.2) $a^2 - 2ab + b^2$ avec *a* nombre relatif ou racine et *b* polynôme à une variable de degré égal à 1, ou *a* polynôme à une variable de degré égal à 1 et *b* nombre relatif ou racine (on exclut le cas *a* et *b* nombres relatifs ou racines au même temps). Ex. : $36 - 60x + 25x^2$ ou $25x^2 - 60x + 36$
	2.3) *a, b* polynômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $4x^2 \pm 12xy^2 + 9y^4$
3) $pq + pr$ / $qp + rp$	3.1) *p* nombre relatif ou racine et *q, r* polynômes à une variable de degré égal à 1 (on exclut le cas *p, q* et *r* nombres relatifs ou racines au même temps) Ex. : $3x + 12 + 6x + 24$
	3.2) *p, q,* et *r* polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 1, où le facteur commun est apparent. Ex. : $(2x+5)(9x+6) - (2x+5)(5x-3)$
	3.3) *p, q,* et *r* polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 1, où le facteur commun n'est pas apparent. $25x^2 - 9 + (5x-3)(7x+8)$
	3.4) *p, q,* et *r* polynômes à plusieurs variables (de degré quelconque). Ex. : $-12x^2y + 24y^2$

Tableau A.3 : Les types de tâches constitutifs du genre de tâches « factoriser »

Le Tableau A.4 ci-dessous montre la répartition des types de tâches du genre « Factoriser » dans les manuels français Triangle et Phare, ainsi que dans le manuel officiel chilien.

Genre « Factoriser »		**Triangle**	**Phare**	**Manuel**
1) $a^2 - b^2$	1.1)	33 (100%)	31 (97%)	0
	1.2)	0	1 (3%)	2 (100%)
Total		33	32	2
2) $a^2 \pm 2ab + b^2$	2.1)	26 (57%)	11 (39,3%)	1(33,3%)
	2.2)	20 (43%)	13 (46,4%)	1(33,3%)
	2.3)	0	4 (14,3%)	1(33,3%)
Total		46	28	3
3) $pq + pr$ / $qp + rp$	3.1)	0	0	3 (18,75%)
	3.2)	60 (91%)	0	0
	3.3)	6 (9%)	10 (100%)	1 (6,25%)
	3.4)	0	0	12 (75%)
Total		66	10	16

Tableau A.4 : Présence des types de tâches constitutifs du genre de tâches « Factoriser » au sein des deux institutions.

STEPHANIE BRIDOUX, NICOLAS GRENIER-BOLEY,
CHRISTOPHE HACHE ET ALINE ROBERT

LES MOMENTS D'EXPOSITION DES CONNAISSANCES ANALYSES ET EXEMPLES

Abstract. Teaching Knowledge during Lectures in Mathematics Analyses and Examples
We investigate several issues tied to the moments when the teacher introduces in his classroom the general, formal mathematical knowledge (the "course"). These issues are especially explained with reference to a theoretical hypothesis stated in terms of "pseudo-concepts". Our didactical analyses take into account the contents of the course and its sequence of events. In particular we clarify several discursive "proximities" that may or may not appear during the sequence of events. Such proximities are particularly associated to explicit "closenesses" between students' work over contextualized activities and the underlying general non-contextualized statement. These analyses are first illustrated on examples extracted from a course about graphical representation of functions (14-16 years old students). Secondly, we compare three types of courses on sequences and functions' limits given to first-year university students: a textbook, a video and a lecture. The study reveals differences between diverse courses. It leads to clarify the issue about the specificity of the courses' input in the students' learning.

Key words: lecture, course, course contents, sequence of events, proximities.

Résumé
Nous étudions les moments où l'enseignant expose, en classe, les connaissances (savoirs) qui constituent « le cours ». Nous précisons le questionnement, notamment en référence à une hypothèse théorique en termes de pseudo-concepts. Nous développons nos analyses didactiques, à la fois sur les contenus des cours et sur leurs déroulements. En particulier nous précisons diverses proximités discursives, qui peuvent ou non être en jeu, pendant les déroulements. Elles sont notamment associées à des rapprochements explicites entre le travail des élèves sur des activités contextualisées, et l'énoncé précis concerné, non-contextualisé. Ces analyses sont illustrées d'abord par des exemples tirés d'un extrait de cours sur une introduction des représentations graphiques des fonctions au collège et sur la comparaison de diverses modalités de cours de première année de licence de mathématiques sur les limites de suites ou de fonctions : cours écrit, amphithéâtre, vidéo en ligne. L'étude révèle des différences entre divers cours et conduit à préciser le questionnement sur la spécificité de l'apport des cours dans les apprentissages des élèves.

Mots-clés. Exposition des connaissances, cours, contenus des cours, déroulements des cours, proximités.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 187 - 233.

Introduction

Beaucoup de recherches portent sur la conception et/ou l'observation des activités des élèves, plus ou moins autonomes, considérées comme une pièce maîtresse des apprentissages. Cependant ces derniers mettent en jeu plusieurs moments distincts, qui peuvent contribuer à donner du sens aux notions et à construire la disponibilité recherchée, dont participe l'organisation des connaissances : la résolution d'exercices et de problèmes s'accompagne de cours qui ont leur part dans l'acquisition des techniques, du formalisme mathématique et finalement des objets et outils visés par l'enseignement. Un des enjeux de nos recherches est de comprendre certaines articulations entre les activités de différentes natures des élèves, ce qu'elles « embarquent » les unes des autres, pour enrichir la réflexion sur l'enseignement, compte tenu des contraintes incontournables qui l'accompagnent. Activités, cours, lesquels, dans quel ordre, pour qui ?

Dans cet article nous interrogeons spécifiquement le(s) moment (s) des séances où l'enseignant (réel ou virtuel) (éventuellement avec une participation des élèves) expose des connaissances générales, en particulier ce qui sera à retenir, et à utiliser dans des exercices ultérieurs (voire évalué), en leur réservant le mot « cours » (qui ne désigne donc pas l'ensemble de la séance). On peut évoquer aussi, à la place de « connaissances générales », « le savoir » ou un « texte du savoir » pour qualifier ce que l'enseignant présente, associé à un produit culturel de l'activité scientifique, qui est à transformer en connaissances par les élèves, à retenir et à utiliser (cf. Margolinas, 2015, 14-15). Ces moments peuvent suivre une recherche spécifique des élèves, inclure des exercices, des exemples mais sont néanmoins dédiés à un exposé décontextualisé, même si le degré de généralité des énoncés adoptés varie, selon le niveau scolaire notamment. D'une certaine manière, les contenus des cours c'est ce qui ne peut pas être élaboré (dans son ensemble) par les élèves… D'ailleurs les enseignants débutants ne s'y trompent pas et ont souvent le sentiment que c'est au moment des cours qu'ils ont le plus de légitimité.

Présentons plusieurs raisons de ce choix des cours comme thème d'étude, ainsi que plusieurs difficultés qui se posent d'emblée.
Du côté des acteurs, les enseignants de mathématiques questionnent dès le collège (11-12 ans) l'utilité des moments « de cours ». L'évolution des modalités de ces cours, souhaitée ou constatée par l'institution (notamment en lien avec les « pédagogies inversées », ou plus largement l'usage de ressources en ligne) entretient cette mise en question. Des interviews (Bridoux et al, 2015) permettent de constater que certains enseignants sont plutôt attachés à ces moments spécifiques de l'enseignement où, tout au long de l'année scolaire, le professeur expose aux élèves les connaissances qu'ils sont censés « apprendre ». Toutefois ces enseignants témoignent d'un certain embarras à ce sujet. Ce qui nous intéresse, c'est la manière dont l'enseignant gère les activités des élèves pendant les cours, alors qu'il ne peut

plus faire jouer les leviers habituels utilisés dans les exercices, activités autonomes, aides...
Les formateurs sont aussi interpellés par les questions posées par les cours, ajoutant la question délicate de l'appropriation des textes à exposer par les débutants (Bridoux et al, 2015).
Le même type de questions se pose aussi en primaire, mais la formation des enseignants et les contenus enseignés différant de ceux du secondaire et ultérieurs, les problématiques ne sont pas les mêmes (voir par exemple Allard, 2015).

Du côté des recherches, la question que nous abordons ici n'est pas nouvelle. C'est celle des moyens d'analyser, d'apprécier ce que peut apporter l'*exposition des connaissances* dans les acquisitions des élèves, quel que soit le dispositif. Les notions d'*institutionnalisation* et de *décontextualisation*[1], utilisées en Théorie des situations didactiques (TSD), permettent déjà d'aborder le moment d'exposition des connaissances et leur place dans l'ensemble d'une séquence. Nous y reviendrons brièvement.

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'activité (TA) et utilisons la double approche ergonomique et didactique (DA) (Robert et Rogalski, 2002) pour analyser les pratiques. De manière générale, les activités des élèves, induites des tâches proposées et des traces observables en classe nous renseignent sur les apprentissages possibles et pilotent nos analyses. Ce sont les activités que pourraient développer les élèves pendant les cours, suite à ce que l'enseignant propose, qui nous intéressent ici, et nous amènent à étudier précisément les pratiques correspondantes. Or pendant les moments d'exposition des connaissances il y a peu d'observables sur les activités des élèves. De plus, il est quasiment impossible d'apprécier séparément l'apport des moments de cours et de ceux des résolutions d'exercices, tant les uns et les autres se complètent.

Cela nous a conduits à élaborer une hypothèse théorique sur le rôle des cours, qui fournit des indicateurs permettant d'apprécier, au moins partiellement, les déroulements de ces moments (en termes de rapprochements induits par le discours, ou proximités discursives), complétant l'analyse des contenus des cours, nécessaire à l'utilisation de ces indicateurs. Cela ne garantit rien sur les activités correspondantes des élèves mais délimite des possibles. Cela permet des comparaisons, entre divers cours, voire différents supports, et aussi entre des prévisions des chercheurs et des réalisations des enseignants. En revanche la question des effets des cours est encore hors de portée.

En première partie nous revenons sur les aspects théoriques que nous mettons en œuvre, en les situant par rapport à d'autres. En deuxième partie nous développons

[1] Nous ne distinguons pas la dépersonnalisation qui accompagne aussi l'exposé du cours après des activités des élèves en contexte, le passage au général associé à l'omission de l'action et ses acteurs.

nos indicateurs. En troisième partie, nous donnons des exemples d'analyses et de résultats partiels. D'abord (partie 3.1) on étudie un extrait de cours filmé en classe de troisième (élèves de 15 ans) sur l'introduction des représentations graphiques des fonctions. Pour le chercheur, il s'agit de repérer s'il y a ou non, à ses yeux, des occasions de proximités, en comparant ensuite à la manière dont l'enseignant s'y prend. Nous présentons ensuite en 3.2 des analyses de cours de première année d'université scientifique sur les limites de suites ou de fonctions. Leur comparaison amène à illustrer tout ce qui peut être dans un « vrai » cours oral et pas dans les autres (manuel, cours à distance filmé), avec en même temps les questions que cela soulève, notamment sur le formalisme. Bilans et conclusion reprennent la portée et les limites de cette étude, et reviennent sur des perspectives.

1. Appuis théoriques

1.1. En amont de l'étude

Rappelons que la DA (inscrite dans la TA) amène à étudier les déroulements des séances, au même titre que les contenus mathématiques travaillés, pour apprécier les activités mathématiques des élèves, supposées déterminantes pour leurs apprentissages. Ces activités sont en grande partie provoquées par les choix correspondants des enseignants, et il s'agit de délimiter les activités possibles à partir de tout ce qui peut influer sur elles, tâches, nature du travail demandé, accompagnements et discours du professeur. Nous postulons en particulier que si l'autonomie des élèves[2] pendant les activités est une condition d'apprentissage (Piaget), la possibilité de travailler dans une ZPD des élèves, et donc la qualité des discours de l'enseignant, associée au caractère collectif de ce qui se joue, et à tous les échanges en sont une autre, tout aussi cruciale (Vygostki).
Pendant le travail sur les exercices (déroulements), les activités possibles des élèves sont appréciées à partir de la comparaison entre tâches attendues et constats de ce qui se passe, compte tenu des interventions des enseignants.
Mais les activités des élèves pendant les cours sont peu observables, nous l'avons dit. On peut voir si les élèves notent, voire acquiescent, certains participent – mais écoutent-ils ? Ont-ils vraiment compris ? Quelle est la portée de la question à laquelle ils répondent, vont-ils intégrer cette réponse au reste, quelle mémorisation est enclenchée ? Dans quelle mesure les élèves ont accès à autre chose qu'à la suite linéaire de ce qui est développé par l'enseignant ? C'est donc sur les discours des enseignants que nous nous centrons, en traquant notamment, tout ce qui peut rapprocher les élèves des connaissances visées – cela restera de l'ordre du potentiel, et non vérifié. Nous cherchons en particulier, à partir d'une analyse des contenus traités, à repérer les occasions que les enseignants donnent (ou non) à leurs élèves d'entendre, de voir, de prendre conscience de proximités entre des activités déjà

[2] En termes d'a-didacticité ou de travail en petits groupes par exemple.

faites ou des connaissances « déjà-là » ou « presque déjà-là », et les connaissances (et activités) nouvelles qui sont visées par l'enseignement (Robert et Vandebrouck, 2014). Nous ajoutons une hypothèse spécifique sur le rôle des cours (ci-dessous) qui permet de préciser encore ce qui est recherché localement.
Cela dit, le cadre de la DA amène à ne pas isoler trop l'étude ; non seulement on ne se restreint pas à ce qui se passe pendant une séance de classe pour comprendre la place des cours par rapport au reste, en référence au scénario global, mais encore on croise avec les contraintes liées au métier (institution notamment), aux élèves et au contexte (social), aux personnes (entretiens, représentations) et aux maths (relief)… pour apprécier mieux les choix et leurs raisons. Dans ce texte cependant on se limite à des études locales.

1.2. Une référence incontournable pour analyser les contenus des cours et les scénarios : le relief, les manuels

Le relief sur une notion résulte du **croisement** d'une étude *épistémologique* – nature des notions et spécificités –, *curriculaire* [institutionnelle - programmes] et *cognitive* – difficultés des élèves déjà répertoriées. Son étude facilite par exemple la réflexion sur le choix du mode d'introduction aux élèves d'une notion : par exemple selon sa nature et sa place dans les programmes, selon la distance entre le nouveau et l'ancien, on pourra ou non élaborer un bon problème d'introduction facilitant la construction de la notion par les élèves. Les exemples traités ici relèvent de notions FUG (Robert, 1998), qu'un nouveau formalisme, généralisateur et unificateur, rend éloignées des connaissances anciennes. Il en est de même pour l'appréciation des tâches proposées aux élèves – voire des exemples et exercices résolus du cours. Cette étude du relief permet par exemple de se rendre compte de ce qui est apparemment majoré ou minoré dans le scénario, dans les évaluations.

Le manuel est lui aussi un exemple de texte du savoir et de mise en forme, mais sans fractionnement entre leçons ni beaucoup d'explications ni d'usage de certains ostensifs, ni de réponses adaptées aux questions d'élèves ni beaucoup de liens entre chapitres. Le manuel délivre un texte relativement homogène, alors qu'un cours oral et écrit peut davantage fluctuer, être adapté à ce qui se devine chez les élèves, à ce qui a été fait, aux difficultés qu'on connait et qu'on anticipe.

1.3. Une hypothèse spécifique sur un rôle possible des cours

Banalement le cours participe à une certaine formalisation des notions visées, à leur mémorisation et à leur utilisation future, et, plus généralement à leur compréhension locale et globale. Nous allons préciser ces idées en nous appuyant sur des éléments théoriques. Par ce mot « cours », nous désignons à la fois un contenu (rapporté à ce texte du savoir), écrit et/ou oral, et un déroulement devant les élèves. Nous étendons cependant quelquefois le mot aux parties des manuels dévolues aux seuls textes du

savoir. Dans quelle mesure ce peut être un moment constitutif de l'appropriation par les élèves des concepts visés ?
Nous nous plaçons dans la perspective d'un apprentissage conceptuel. Rappelons que nous adoptons une définition « opérationnelle » de la conceptualisation : en l'associant à la disponibilité des notions (outils et objets, utilisés à bon escient sur un ensemble de tâches données) et à l'organisation des connaissances nouvelles et anciennes, avec la flexibilité attendue et la possibilité de résoudre les tâches comportant des adaptations.

1.3.1. Présentation de l'hypothèse

L'hypothèse que nous faisons sur un rôle possible des cours est inspirée à la fois des idées de zone proximale de développement (ZPD) et de la notion de pseudo-concept, empruntées à Vygotski, reprises en partie par Vergnaud notamment en didactique professionnelle. Cela prolonge d'une certaine manière les idées d'institutionnalisation suivant l'activité autonome des élèves, voire la précédant (inspirées par Piaget, reprises par Brousseau (ibid.), Douady (ibid.) et d'autres didacticiens à leur suite). Nous assimilons ainsi les cours à la présentation aux élèves de concepts en mots et en formules, qui, pour eux, joueraient d'abord le rôle de « pseudo-concepts ». On pourrait avancer que les concepts-en-acte introduits par Vergnaud en sont une illustration, dans certains cas.

L'exposition des connaissances serait un moment qui peut participer à l'appropriation visée, par la possibilité de familiariser avec les mots (et formalisations) et de faire activer ensuite (ou grâce à ce qui s'est passé avant) des connexions, d'abord provisoires et partielles, entre mots et activités mathématiques – en référence imagée et adaptée aux pseudo-concepts de Vygotski. C'est un processus long, qui doit s'apprécier dans la durée.

1.3.2. Retour sur les pseudo-concepts

Imaginons un enfant en train d'apprendre à parler se cognant au coin d'une table – l'adulte présent tape la table en disant « vilaine table ». Il fait ainsi un rapprochement à la fois gestuel et en mots (avec le qualificatif vilaine) entre du vécu et le mot général introduit par l'adulte « table ». Plus tard l'enfant se cogne à un fauteuil et le tape en répétant « vilaine table » – et l'adulte de rectifier, en expliquant que cette fois ce n'est pas une table (et il la montre du même coup) mais un fauteuil… Il corrige l'utilisation erronée de l'enfant du mot en contexte, et en profite pour remontrer l'objet associé à « table ». Ainsi à partir du mot utilisé par un adulte qui s'adresse à lui en contexte, l'avancée vers le concept pour l'enfant est rendue possible par un début de manipulation du mot, hésitante, peut-être en partie erronée. L'enfant reprend le mot en étant attentif aux réactions de l'adulte confronté à cette utilisation, en en testant ainsi l'usage en quelque sorte. Cela joue comme une anticipation de ce qui est visé et l'usage, ainsi rendu possible même s'il est incertain, en est alors sans cesse ajusté grâce aux effets de son utilisation par l'enfant sur ses interlocuteurs, reprises, corrections mais aussi encouragements, jusqu'à la transformation attendue en concept et à son intériorisation.

1.3.3. Retour sur les moments d'exposition des connaissances

C'est ce type de processus que nous proposons d'emprunter, toutes proportions gardées et métaphoriquement, en faisant l'hypothèse qu'il y aurait là un des moteurs de ce qui peut se passer en cours et après. Il s'initialiserait ainsi pendant les cours quelque chose, une familiarisation, qui ressemble à ce qui précède : autrement dit les concepts introduits dans le cours avec des phrases, y compris formelles, symboliques, porteuses d'idées et/ou de techniques (relevant de théories, porteuses de justifications), ne seraient que des « pseudo-concepts » pour les élèves au début, mais devraient pouvoir se transformer à moyen terme en concepts ; les leviers de ce processus de conceptualisation étant les exercices et le texte du savoir proposés ainsi que la qualité des explicitations et des liens entre exercices et cours. Sans prétendre cependant que parce qu'une proximité est dévoilée, explicitée, cela suffit à ce que l'élève s'en saisisse.

L'enseignant énonce des éléments généraux, décontextualisés, plus ou moins liés à des activités antérieures (où des outils visés ont pu être utilisés en contexte), donne ensuite des exemples, des exercices résolus, et l'élève (ou l'étudiant) va ensuite, après cette présentation, s'exercer à mettre en fonctionnement (contextualiser, adapter) ces éléments généraux dans des activités ultérieures. Charge à l'enseignant de préparer ces mises en œuvre, y compris par des choix de tâches, de les aider, voire de rectifier les dérapages éventuels : c'est ce qui est en jeu dans les connexions évoquées ci-dessus, faites de rapprochements explicites sous forme de commentaires entre les objets et outils du cours, généraux, nouveaux, et leur utilisation en contexte. Ce qui est en jeu est l'activation, explicite, de proximités entre ce que les élèves savent, ont fait ou doivent faire et ce qui est nouveau, y compris les aspects « objets » et outils introduits par l'enseignant. C'est l'ensemble cours-activités qui est en jeu.

De ce point de vue l'apprentissage spécifique lié aux cours s'apparenterait à la transformation individuelle, sans doute longue, des pseudo-concepts en conceptualisations.

« L'efficacité » des cours dépendrait alors notamment des occasions et de la qualité de l'activation de ces connexions, de ces liens entre des connaissances contextualisées (exercices, activités) et du savoir décontextualisé – et serait donc liée aux discours des enseignants, pendant la présentation des contenus de cours, aux choix des tâches associées et des discours accompagnant le travail correspondant des élèves (cf. activités des élèves), en particulier des [tentatives de] rapprochements entre activités, connaissances déjà-là et connaissances nouvelles des élèves. Cela oriente les recherches en fournissant des indicateurs plus précis que nous détaillerons ci-dessous.

2. Méthodologie générale

2.1. Comment mener de telles études ?

Dans notre acception de ce qui est à étudier, et comme nous l'annoncions en première section, ce qu'il y a à analyser dans un cours n'est pas seulement le texte du savoir à présenter puis présenté par l'enseignant mais bien tout l'accompagnement. Voire même davantage, dans la mesure où le processus n'est pas immédiat, mais ce ne sera pas fait ici.
Nous allons étudier des cours réels, en général filmés[3] et transcrits, éventuellement complétés par des documents, voire des entretiens. Ce sont des études cliniques (quelques séances par professeur), adaptées au contexte des cours.

Nous n'avons pas encore de problématiques précises, si ce n'est la description de ces moments de cours, et ce sont des comparaisons qui constituent la première étape de ces recherches. En particulier l'étude des différences entre manuel et cours est l'objet d'une partie de nos travaux, avec la mise en évidence de ce qu'apporte l'introduction des déroulements. De plus ces comparaisons, entre les prévisions des chercheurs et les analyses de divers déroulements effectifs conduiront à repérer des variables (dans les contenus et objectifs des cours selon les niveaux) et à baliser une palette de possibles dans les pratiques.

2.2. Analyses des contenus

On étudie les contenus des cours réels, en référence au relief, une fois déterminés la place dans les programmes et les objectifs.

Le problème du découpage de ce qui est étudié se pose d'abord – on a décidé d'analyser les chapitres que l'enseignant délimite lui-même (cependant les exemples de cet article sont encore plus limités, ils servent surtout ici à illustrer notre méthodologie).

Le cours présente une mise en forme d'un texte de savoir sur le chapitre, en partie hors tout contexte, général – on dira non-contextualisé – au moins en partie écrit (même si les supports diffèrent), cohérent du début à la fin du chapitre. Il s'y intercale des exercices et des problèmes, dont nous devons tenir compte, au moins dans une étude complète analysant les dynamiques et autres liens entre cours et exercices. Tout comme nous tenons aussi compte (sauf dans l'étude des manuels) de la présentation orale qui est faite, en général en plusieurs temps. Les rythmes et durées respectives des différentes parties de l'enseignement ne sont pas pris en compte ici. Pas plus que nous n'étudions les encouragements et autres éléments de contrat par

---

[3] En classe, la caméra est posée au fond de la salle et centrée sur le tableau et l'enseignant.

exemple, pour maintenir les élèves en activité. Cela complèterait certainement utilement notre étude, tout comme la prise en compte de la manière dont l'enseignant s'adresse aux élèves, comme c'est étudié en pragmatique (Pariès, 2004), voire de toute sa gestuelle.

2.2.1. Contenus mathématiques

Banalement on trouve dans un cours, et la liste est donnée ici en vrac, des définitions, théorèmes et propriétés, des démonstrations (et modèles de raisonnements), des méthodes, des exemples, des exercices résolus ou exercices types (à imiter), des activités d'introduction, des éléments historiques, des commentaires variés, des formules et des représentations graphiques ou géométriques.
Les didacticiens ont développé un certain nombre d'outils que nous utilisons pour décrire ces éléments mathématiques, caractères outil/objet, cadres, registres de représentations, symbolisme et ostensifs…

On s'intéresse ici particulièrement au degré de généralité des énoncés non-contextualisés (Butlen et Pezard, 2003), pour apprécier la distance entre ceux-ci et les exercices contextualisés sur lesquels les élèves ont travaillé ou vont travailler : par exemple dans un exemple générique pris comme énoncé de cours, il n'y a pas de variable, seulement des nombres, qui pourront être remplacés par d'autres nombres, ce qui n'est pas tout à fait le cas dans les énoncés les plus généraux.

Cela dit, dans un cours, « tout » ne va pas servir directement, tout n'est pas toujours transformable en activité ni évaluable – même si c'est très variable pendant la scolarité. Il peut y avoir des éléments du cours qui ne se prêtent pas directement à des exercices mais, par exemple, plus à des réflexions. Lors d'un cours sur la nature des différents nombres, il n'y a pas d'exercices d'application immédiats, même si les élèves peuvent être sollicités sur ce qu'ils connaissent déjà. Citons encore par exemple la justification de la règle des signes pour la multiplication des nombres négatifs, dont les élèves n'ont pas besoin directement. Citons encore le discret et le continu, difficile à approcher dans un cours du secondaire et pourtant présents (cf. Rousse).

Enfin d'autres éléments présents dans les cours ne sont pas définissables : la notion d'équation par exemple, pourtant très utilisée. Cela met en jeu ce que Pouyanne (Robert et Pouyanne 2004) appelle des notions non encore formalisées, voire non encore formalisables ; les notions para-mathématiques et proto-mathématiques définies par Chevallard (1991) s'inscrivent aussi dans cette catégorie.

2.2.2. Ce que l'enseignant peut ajouter aux stricts contenus, notamment à l'oral

Il peut indiquer le statut des connaissances (admis, démontré, méthode, utilité…), ainsi que les liens et mises en relation entre cours et applications (entre aspects déclaratifs et procéduraux), entre connaissances anciennes et nouvelles, entre diverses parties du cours. Il peut ainsi mettre en évidence, plus ou moins explicitement, l'organisation des connaissances, que ce soit à travers la structuration d'un même cours ou entre cours.

Ce sont des commentaires qu'on a appelés « méta » qui sont souvent utilisés pour ces ajouts (Tenaud, 1991, Robert et Robinet, 1996). On en a défini plusieurs niveaux, mettant en jeu l'objet du commentaire. Rappelons qu'on distingue le *méta 3*, au niveau le plus général, avec les références au mode de fonctionnement mathématique, au *pourquoi* et au *pour quoi* des choses. Le *méta 2* aborde des questions de structuration globale, des idées générales sur le *comment*, par exemple les méthodes à utiliser face à un type de problème, sans tenir compte des données particulières ; le *méta 1* est le plus adapté aux différents contextes rencontrés, il permet de parler des liens précis, locaux, déclaratif / procédural ; sur des exercices il est associé à la prise en compte de la conclusion et des données (des hypothèses).

Finalement le cours peut ainsi être vu comme une réserve d'énoncés divers, voire une référence, avec plus ou moins d'indications sur les liens et mises en relation entre les connaissances, leur origine, leur statut, pour que les élèves y puisent les objets et outils utilisés ensuite et les retiennent.

2.3. Un outil pour étudier localement les déroulements : les proximités-en-acte mises en jeu par les enseignants

Une des conséquences de la prise en compte du métier dans nos analyses de pratiques est l'importance que nous accordons à la préoccupation des enseignants de garder les élèves plus ou moins attentifs, y compris pendant les cours, et même si possible de faire progresser certaines de leurs connaissances, ou au moins d'amorcer ce progrès, pendant ces moments-là. Nous admettons qu'une des manières développées par les enseignants pour y arriver est de rester aussi « proche » que possible des élèves. C'est sans doute une caractéristique constante de ce que font les professeurs en classe, à tout moment, mais elle est d'autant plus importante pendant les cours qu'ils ne peuvent pas s'appuyer autant qu'à d'autres moments sur les activités des élèves.

Nous avons ainsi introduit la notion de *proximité-en-acte* pour qualifier ce qui, dans les discours ou dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves (Robert et Vandebrouck, 2014 ibid). Nous les avons étudiées dans des phases de recherche d'exercices en classe et, dans le travail présenté ici, nous allons les spécifier et les repérer dans les moments d'exposition des connaissances.

Les proximités-en-acte traduisent ainsi une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou à exploiter une proximité entre ce qu'il veut introduire et les réflexions ou les activités ou les connaissances des élèves. Cette activité de l'enseignant peut être consciente et voulue, plus ou moins explicitement, mais peut aussi être automatique[4]. Cette proximité est d'ordre cognitif ou non, et concerne ou non tous les élèves. Il y a ainsi des proximités non strictement mathématiques : affectives (encouragements), langagières (jouant sur divers niveaux de langue, du familier au symbolique, ou sur des images, etc.), de type « carotte/bâton » (jouant sur des motivations liées à la scolarité et les contrats).

D'autres proximités peuvent avoir une portée plus directement cognitive, mettant en jeu des liens portant sur des contenus (par l'intermédiaire de commentaires méta mais pas seulement), ou révélant des relations portant sur diverses tâches, ou sur diverses sous-activités, ou sur leurs liens avec le cours, au sens large… Par exemple, même si l'enseignant a explicitement conçu une activité préalable à un cours, pour préparer l'introduction de certaines connaissances visées, ce n'est pas pour autant que le passage de l'activité aux connaissances qui vont être dégagées soit facilement perçu comme proche par (tous) les élèves, sans explicitation complémentaire (qui constitue une proximité). Ainsi ce mot « en-acte » accolé à « proximité » spécifie, dans notre idée, une qualité de l'activité de l'enseignant en classe qui accompagne le développement des contenus, qualité ni nécessairement consciente pour l'enseignant, ni exprimable. Ceci de la même façon que pour Vergnaud (1990), le « en acte » de l'expression concept-en-actes qualifie une connaissance qui se manifeste dans l'activité d'un sujet sans être toujours consciente ni exprimable.

De manière générale, nous reconstituons ces proximités (ou non-proximités) à détecter dans des pratiques enseignantes à partir de divers indicateurs, les enrôlements et certains arguments employés pour mettre et maintenir les élèves au travail, la durée du travail des élèves et ce qui amène à l'arrêter, la nature des questions ou les types d'aides (procédurales ou constructives notamment, Robert et Vandebrouck 2014) avec leur relation au travail des élèves, à leurs réponses et tous les autres commentaires qui font qu'il n'y a pas une simple juxtaposition entre divers éléments du cours. Les aides sont souvent des ajustements improvisés pour répondre aux élèves, très ajustées au travail fourni, et donc ce sont des formes particulières de proximités.

Même si l'étude préalable du relief sur la notion nous aide dans notre appréciation de ce qui est supposé connu des élèves et de ce qui est nouveau, voire difficile, il y a cependant toujours une part d'appréciation subjective du chercheur dans l'interprétation de ce que dit l'enseignant, et ce qui est étiqueté comme proximité-en-acte reste dans une certaine mesure « potentiel » : d'une part il n'est pas certain que l'enseignant l'ait conçue comme telle, mais, d'autre part, il n'est pas certain que cela soit efficace pour les élèves, que la proximité soit reconnue et source de progrès. Ce serait par des entretiens *a posteriori* qu'on pourrait vérifier la concordance entre

[4] Si un élève semble perdu, on lui pose une question.

l'attribution par le chercheur d'une intention de rapprochement et l'intention réelle de l'enseignant.

Une dernière remarque s'impose sur la différence entre les proximités étudiées ici et les « petits pas » préconisés par certaines pédagogies, même si cette dernière expression n'est pas très précise. Les petits pas engagent les élèves dans une forme de proximité très limitée, locale, souvent sans changement ni de point de vue ni de degré de généralité ni de cadre ou registre, et souvent ils peuvent effectuer seuls une partie du chemin. En revanche, les proximités sur lesquelles nous travaillons peuvent concerner un changement de niveau de connaissances, une généralisation importante, que les élèves auraient eu du mal à faire seuls, voire à concevoir seuls, mais qu'ils pourront accepter, s'approprier, parce que l'enseignant va leur expliquer, y compris sur un exercice, *a posteriori*, ce qui dans leurs connaissances est proche de ce qui est mobilisé et ce qui est nouveau.

2.4. Les proximités discursives dans le cas particulier des moments d'exposition des connaissances

Nous suggérons qu'il peut y avoir, dans les cours, plusieurs grands types de ces proximités-en-acte particulières, discursives. Elles se déclinent en relation avec les contenus précis, habillant en quelque sorte le cours. Elles sont soit le fait de l'enseignant pendant l'exposé, soit se jouent dans des échanges, des interactions avec les élèves, des questions (improvisées ou non, venant de l'enseignant ou des élèves) et des réponses. En particulier lorsque l'enseignant attire l'attention des élèves, fait redire ou demande « qu'est-ce que vous avez compris ? »… Cependant, nous y insistons, il ne peut pas y avoir de certitude sur le fait que l'élément de discours sélectionné joue effectivement comme un rapprochement pour les élèves.

Dégager les proximités potentielles, les éléments de discours candidats à apporter des proximités, engage deux types d'analyses des cours, *a priori* lorsqu'on met en jeu les contenus travaillés, avec des *occasions de proximités* repérées par le chercheur qui se réfère au relief sur la notion, et *a posteriori* sur le déroulement du cours avec des *proximités possibles* développées par l'enseignant (et également repérées par le chercheur).

Un premier niveau d'analyses de ces déroulements, une fois reconstitués les contenus du cours, énoncés et exemples, et les degrés de généralité et de formalisation utilisés, concerne le vocabulaire utilisé. L'utilisation du langage courant, voire familier, au regard du langage mathématique, plus généralement les commentaires métamathématiques peuvent être porteurs de rapprochements. On étudie ainsi les rappels (et appels à la mémoire), annonces, répétitions, reprises (avec modifications ou non), mais aussi les analogies, métaphores, éclaircissements, explicitations, et enfin, plus globalement, structuration, statuts des savoirs (voire éléments d'histoire) et histoire racontée. On repère dans ces éléments ce qui apparait comme des liens, des dévoilements ou des implicites, des mises en garde (souvent liés à des anticipations), à différents niveaux de généralité. Une autre source d'analyse importante se trouve dans les différences entre oral et écrit, avec l'usage plus ou moins commenté des ostensifs et des diverses formalisations et représentations en jeu. Il se peut que certains gestes accompagnent ces commentaires entre oral et écrit, que nous incluons éventuellement dans nos descriptions les plus fines.

C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'elles explicitent entre contextualisé et non-contextualisé qui déterminent les types de proximités que nous retenons, vu l'importance des connexions provisoires à transformer en nouvelles connaissances, et notamment des liens entre ce qui est contextualisé, lié aux activités proposées aux élèves, et ce qui est général. Les proximités peuvent ainsi rapprocher un exemple et sa généralisation (dans les deux sens) ou deux éléments ayant le même degré de généralité (horizontales).
Ces dernières peuvent être globales (sur le sens, le pour quoi, le pourquoi, les statuts de ce qui est présenté… cf. méta 3), ou plus locales (sur le comment, méta 2 ou sur le texte du savoir) – elles peuvent aller de ce qui précède à ce qui suit ou le contraire.

Soulignons qu'un passage du cours ou une activité introductive ou illustrative peut activer plusieurs types de proximités successivement.

Enfin les proximités possibles développées au cours d'interactions peuvent à la fois renseigner l'enseignant sur la compréhension des élèves et les motiver, par-delà un strict gain cognitif.

Dans ce qui suit, nous détaillons la caractérisation retenue de chaque type de proximité, avec un exemple, puis nous indiquons des questions qui concernent leur production. D'autres exemples seront donnés dans la troisième partie.

2.4.1. Les proximités « ascendantes »

Elles se placent entre ce qu'ont pu déjà faire les élèves et du nouveau (mots, définitions, propriétés) – lorsqu'il y a généralisation ou décontextualisation, soit d'un caractère outil qui donne naissance à un « nouvel » objet ou à un « nouvel » outil, soit directement d'un nouvel objet, définition ou propriété. Ce qui varie selon les cours, c'est ce qui est décontextualisable à partir de ce que peuvent savoir ou faire les élèves, et la distance entre ancien et nouveau. Mais le transfert, inductif, mis en jeu, pour passer au général, n'est pas toujours transparent, et un enjeu de ces proximités est d'expliciter ce qui est retenu et généralisé à partir du cas particulier, de ce que les élèves ont pu faire. Selon l'empan de cette généralisation, c'est plus ou moins facile.

Ce type de proximités peut se retrouver dans beaucoup d'ingénieries ou de problèmes développant une dialectique outil-objet (Brousseau ibid, Douady ibid, Butlen et Pezard, 2003). Nous en avons moins d’exemples au collège qu'à l'école primaire. Il n’est pas exclu qu’il y a là une source de différences entre les cours du primaire et du secondaire, liées à un degré de généralité différent des éléments non-contextualisés, à leur place dans l’ensemble des séances et aux dynamiques avec les exercices qui les accompagnent – selon que les éléments de cours sont ou non repris dans des exercices. Peut-être aussi y a-t-il davantage de notions FUG à partir du collège (cf. ci-dessus).

Donnons un petit exemple de proximité ascendante possible. Il s’agit d’un cours sur les fonctions affines en seconde (ZEP) :

Enseignant et élèves ont tracé la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = -2x + 3$ à partir de deux points (ils ont choisi deux valeurs de x et calculé $f(x)$).

L’enseignant reprend la parole :

Si je calcule l’image de 0 – (des élèves : 3) *c’est 3. C’est le quel 3 ?* (elle montre le 3 de $-2x + 3$ et le souligne) *– c’est l’ordonnée de ce point sur la courbe* (elle montre le point où la courbe coupe l’axe des y).

A chaque fois quand vous calculez l’image de 0 par $f(x) = ax + b$ *vous obtenez b que vous allez trouver sur l’axe des ordonnées* (elle désigne un point virtuel de coordonnées $(0, b)$ sur l’axe des ordonnées). *La valeur de b faut toujours qu’elle soit sur l’axe des ordonnées. Quel nom* ? (des élèves : ordonnée à l’origine).

Vous notez : b est appelé l’ordonnée à l’origine…

Nous repérons que l’enseignant redit aux élèves, en s’appuyant sur un cas particulier qu’ils ont traité, la double lecture qu’on peut faire du 3 (dans la formule, sur la courbe) et généralise immédiatement au cas général, associé à une formule algébrique, cette double lecture, en soulignant les mêmes éléments (b de la formule et b ordonnée d’un point de l’axe des y).

Ce qui est en jeu ici, c’est que nous pensons qu’en fait, le général n’est pas automatiquement proche des élèves, que des rapprochements explicites peuvent vraiment aider. Nous en voulons pour preuve certains travaux de Butlen et al., qui montrent que spontanément les élèves en restent au générique (à l’exemple qui engendre le général) et ne passent pas au général. Nous avons aussi fait passer un questionnaire à des élèves de lycée, qui montre qu’une partie d’entre eux ont du mal avec les activités introductives et avec le sens du mot « général » en mathématiques (Bridoux et al, 2015).

De plus, lorsque les élèves ont travaillé diversement sur une activité d’introduction, le choix par l’enseignant de la procédure qu’il généralise peut poser problème, pour ceux qui font autrement, qui ne reconnaîtront pas le rapprochement explicite.

Autant de questions à se poser sur ce type de proximités, pour avancer sur leur efficacité possible.

2.4.2. Les proximités descendantes

Elles se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou exercices à faire ensuite avec ou par les élèves ((re-)contextualisation). L'enjeu est d'expliciter ce qui est à contextualiser, la manière d'inscrire le cas particulier traité dans l'invariant général, de substituer les données aux variables (à repérer). Ce n'est pas toujours transparent pour les élèves, alors même que leur longue fréquentation des mathématiques amène les enseignants à ne pas toujours repérer ces difficultés, tant ces connaissances sont naturalisées chez eux. Par exemple il n'est pas question d'appliquer le théorème de Pythagore à un triangle non rectangle, ou à un quadrilatère – mais on peut changer le nom des sommets, les mesures des côtés, la place de la figure… On peut aussi transformer « triangle rectangle » en « triangle ayant un angle droit », ou passer de « côtés perpendiculaires » à « triangle rectangle » ou repérer un triangle rectangle dans une figure plus compliquée.

Donnons un exemple de proximité descendante possible (donné en classe tout de suite après l'exemple précédent) :
L'enseignant reprend, après avoir donné la définition de l'ordonnée à l'origine.
On va tracer la courbe de $f(x) = 2x - 3$*. Que vaut b cette fois ?* (des élèves : -3)
Donc il va y avoir un point sur l'axe des ordonnées en (-3) – (elle le place directement).

Il y a proximité possible parce que l'enseignant applique l'énoncé général précédent, et non plus le calcul direct, mais en explicitant cette démarche (par l'interrogation sur b, à identifier, et le « donc »).

On peut citer un autre exemple, a contrario. Un enseignant débutant vient de donner la règle sur le calcul de l'exposant d'un produit de puissances du même nombre. Confronté à un problème numérique de ce type, un élève recommence à développer chaque facteur du produit pour donner le résultat juste. L'enseignant le corrige lui reprochant de ne pas appliquer la règle. Une alternative, qui pourrait être une proximité descendante, serait de montrer à l'élève qu'il pouvait aussi aller plus vite en appliquant la règle, qui donne le même résultat... Autrement dit on admet que le cours ne donne pas de modèle à retenir et à appliquer pour les élèves dès qu'il a été dispensé. Une fois qu'ils ont entendu (et/ou noté) le cours, les élèves peuvent revenir à d'autres procédures, correctes ; en revanche, et c'est là qu'il peut y avoir occasion de proximité, il s'agit pour l'enseignant d'illustrer comment que le cours permet de faire autrement.

En fait, pour les applications qui sont l'essentiel de ce qui est concerné ici, l'enjeu est dans les explicitations de ce qui est à « faire » par les élèves à partir de l'énoncé général à contextualiser, y compris la reconnaissance éventuelle. On pourrait évoquer la clarification du passage du déclaratif au procédural.

2.4.3. Les proximités horizontales

Elles ne font pas intervenir de changement de discours entre contextualisé et non-contextualisé. Elles peuvent ainsi porter sur le cours en train de se faire, à un niveau général, par exemple sur les statuts des éléments en jeu ou sur des liens, ou sur la structuration du cours (« *on en est où ?* ») ou les méthodes en jeu. Elles peuvent aussi expliciter localement une suite de calculs, ou des différences entre écrit et oral. Elles nourrissent alors souvent des interactions limitées, brèves questions et réponses de faible « portée ».

Donnons des exemples de proximités horizontales. Nous avons trouvé dans une capsule vidéo sur le net, comme introduction du « cours » sur le tableau de signes d'un produit de facteurs algébriques le discours suivant :
« *pour chercher le signe de l'expression* $(3x-9)(1-2x)$, *on cherche quand « tout ça » (l'enseignant montre le produit) est positif ou négatif. Pour cela on cherche quand le premier facteur est positif ou négatif, le 2ème facteur est positif ou négatif et on applique la règle des signes. Pour faire tout ça et pour simplifier la discussion, on fait un tableau.* »

Nous y voyons un exemple de proximité horizontale locale possible, dans la mesure où l'enseignant explique ce qu'il y a à faire sur l'exemple, sans faire allusion à un procédé général.

En revanche on pourrait imaginer une occasion de proximité horizontale plus générale, permettant à l'enseignant d'expliquer, hors exemple, que, dès qu'on peut connaitre les signes des facteurs d'un produit, on peut connaître le signe de leur produit, dans la mesure où la règle des signes peut être appliquée sur chaque intervalle où les facteurs gardent un signe constant.

Et une occasion de proximité encore plus générale serait de questionner les élèves sur le statut de cette règle des signes (et de signaler qu'on l'admet, par exemple).

3. Exemples

3.1. Au collège, un exemple de différences entre occasions de proximité et proximités possibles.

3.1.1. Des enjeux liés à l'étude des représentations graphiques des fonctions au collège – un point de vue de chercheur

Notre étude du relief sur la notion nous amène à distinguer dans cette introduction en troisième (14-15 ans) des graphiques de fonctions plusieurs enjeux, que nous allons présenter et dont nous discuterons des occasions de proximités (potentielles, rappelons-le). Nous ne faisons pas une étude exhaustive du relief, mettant en jeu une bibliographie importante.

La première chose qu'on peut souligner est que la représentation graphique des fonctions est non congruente à l'expression algébrique : en effet cette dernière n'est pas directement accessible sur la courbe. Le lien entre abscisse et ordonnée de tous les points de la courbe, par l'expression algébrique de la fonction, est « illisible » en général.

Les connaissances anciennes des élèves de troisième sont les courbes déjà étudiées depuis longtemps, mais exclusivement graphiquement. Les élèves savent placer des points de coordonnées données, lire des coordonnées (valeurs numériques particulières), repérer visuellement des variations des grandeurs en jeu sur chaque axe. Ils savent passer des abscisses numériques aux ordonnées et réciproquement. Mais c'est un travail « séparé », successif, sur les deux coordonnées. Les tâches et techniques antérieures ne nécessitent pas de prendre en compte les couples (x, y), alors que cela devient nécessaire si on travaille sur la fonction représentée, car alors $y = f(x)$.

Autrement dit les élèves interprètent déjà beaucoup de choses sur des graphiques mais en dehors de l'association à une représentation de fonction, donc sans que cette propriété serve, et l'enjeu nous semble être le transfert à f de ce qu'ils savent déjà faire sans mettre en jeu f – transfert invisible, qui ne peut pas se deviner. Par exemple l'image remplace l'ordonnée, l'antécédent remplace x ; si on se donne un intervalle de l'axe des x, cela permet d'accéder à des informations sur la portion de courbe correspondante (par exemple elle monte) et sur les ordonnées associées (leur croissance éventuelle) mais ce qui est nouveau c'est la traduction de ces dernières informations sur f (par exemple f croît). Pour travailler sur cet aspect, on doit réaliser en actes *une substitution* liée à une *transitivité* (*remplacer y par $f(x)$ et (x, y) par $\big(x, f(x)\big)$* très difficile, très éloignée de ce que les élèves savent faire.

Mais il y a une autre nouveauté, liée à ce qui est introduit dans l'aspect algébrique : si les élèves peuvent construire des points isolés, même proches, rien ne peut les aider à joindre les points, à tracer la courbe qui passerait par ces points, ni surtout à justifier ou interpréter ce tracé : sauf l'habitude de voir des courbes et l'envie de les tracer, ou sauf si c'est une droite dont ils connaissent deux points. Il leur manque (encore) l'idée de s'intéresser à tous les points (à leur ensemble), et l'idée que, sur les courbes associées à des fonctions, non seulement tous les points sont obtenus de la même façon à partir de la fonction, l'ordonnée valant « f de l'abscisse » mais encore tout point $\big(x, f(x)\big)$ est sur la courbe (idée de réciproque, associée à celle d'ensemble)… Ils ont certes l'intuition du continu mais cela reste une intuition !

Le cas de la proportionnalité

On pourrait penser qu'il y a là une source d'activité d'introduction bien naturelle, restreinte aux droites.

En classe de quatrième (13-14 ans), en effet, on étudie la proportionnalité et à partir d'un tableau de valeurs discrètes et numériques (souvent entières d'ailleurs), on trace, dans le plan muni d'un repère, des points que l'on joint par une droite. Ces points ont comme coordonnées les deux valeurs numériques d'une colonne du tableau. Cet alignement, ainsi que sa réciproque – si des points sont alignés avec l'origine ils représentent une situation de proportionnalité –, sont des propriétés admises. Mais ce qu'il faut souligner, c'est que les points de la droite différents de ceux qui ont servi à la tracer ne sont pas l'objet d'attention, ni d'explication ni d'interprétation (du moins dans les programmes actuels). La droite (alors objet géométrique) ne sert qu'à traduire l'alignement des points initiaux, le fait que tous les autres points de la droite ont des coordonnées proportionnelles, liées par la même relation du type $y = ax$, est souvent passé sous silence, même si on fait vérifier qu'un certain nombre d'autres couples de coordonnées proportionnelles sont sur la droite.

Une démonstration utilisant le théorème de Thalès était proposée dans certains programmes antérieurs. Le fait est qu'elle était difficile pour un certain nombre d'élèves, qui ne pouvaient la produire seuls : ce n'est donc sans doute pas un bon candidat à une activité d'introduction.

Et les logiciels ?

On pourrait objecter à ce qui précède que les élèves « disposent »[5] de courbes tracées par un logiciel, ou données dans un document, mais questionnent-ils la manière de les obtenir ? Quelles mathématiques là-dedans ? Qu'est-ce que la donnée de telles courbes produit chez les élèves ? Qu'est-ce qui peut être dit aux élèves ? On retrouve la question plus générale de ce qui est « embarqué » comme propriétés dans les logiciels.

De manière générale un logiciel comme Geogebra peut placer de très nombreux points de coordonnées (x,y), avec $y = f(x)$ (commande), points suffisamment nombreux pour qu'on ait l'impression visuelle de continuité dans le cas de graphes de fonctions. On gagne ainsi le fait de s'intéresser à beaucoup de valeurs de x, avec la « bonne » relation entre x et y pour un point tracé. Les élèves peuvent déduire que si on trace beaucoup de points, cela finit par « se toucher », mais il nous semble que la dépendance systématique entre x et y de tous les points de la courbe représentative de f (et la réciproque évoquée ci-dessus) peut encore rester lointaine.

Occasions de proximités à mettre en jeu ?

Que ce soit avant ou (plutôt) après le cours au collège, en terme d'occasions de proximités, on peut penser à expliciter tout ce qui est ajouté à ce qu'on connait déjà : étant donné une fonction f, le fait de tracer la courbe revient à représenter par des points d'un plan muni d'un repère tous les couples $\left(x, f(x)\right)$ correspondants et surtout la possibilité nouvelle que cela donne de transférer des informations visuelles, à partir du graphique, non seulement sur $f(x)$ mais aussi sur f. En se basant sur un

[5] Que ce soit par eux-mêmes ou grâce à l'enseignant.

certain usage antérieur des représentations graphiques, on pourrait introduire l'idée de dépendance, ou même l'idée de variation, jusque-là réservées à un travail visuel sur des courbes non associées (explicitement) à des fonctions. Cette possibilité de transfert à des propriétés de $\{(x,\ f(x)\}$ à f, ce passage du visuel (graphique) au fonctionnel est nouvelle, c'est un changement de point de vue difficile qui peut (doit) donc être explicité. On conçoit qu'il y a plutôt là des occasions de proximités descendantes ou horizontales qu'ascendantes, notamment en explicitant le transfert, malgré la non-transparence de l'association courbe-fonction, et en indiquant que, par définition, tous les points $(x, f(x))$ sont sur la courbe et seulement eux.

3.1.2. Pour préparer un cours en troisième sur les représentations graphiques – des proximités possibles…

C'est le deuxième cours sur fonctions dans une classe de troisième dont on a analysé les vidéos. Il y a trois activités successives avant le cours pour préparer la définition des représentations graphiques des fonctions. Nous allons les résumer en indiquant à chaque fois les proximités possibles (et ce qui pourrait y échapper).

La première activité consiste à deviner que des couples de nombres proposés sont associés à la fonction $x \to 2x$.

Puis les élèves complètent avec quelques autres valeurs le tableau formé par les nombres et leurs images (en colonne). Ils identifient une situation de proportionnalité (déjà vue en quatrième) que l'enseignant demande de représenter dans un repère. Le fait que les points (il y en a donc beaucoup plus que deux) sont alignés sur une droite passant par l'origine du repère est rappelé. La droite est tracée. Rien n'est dit à ce moment de la séance sur les points intermédiaires. Il n'y a rien de nouveau, ce sont des révisions (sans doute avec des différences entre élèves). On peut remarquer l'association explicite d'un couple de nombres (a, b) en colonne sur le tableau aux coordonnées (a, b) d'un point. Il n'y a pas de fonction dans l'affaire sauf dans deux allusions de l'enseignant. Il cite au début la fonction $x \to 2x$ et, après le tracé, il évoque « la représentation graphique de la situation donc de la fonction ». En réponse à une question d'élève il annonce une généralisation de la représentation graphique à d'autres fonctions comme $(x \to 2x + 3)$. L'enjeu ultime des représentations graphiques, à savoir l'interprétation des coordonnées de tout point d'une courbe représentative de f comme $\left(x, f(x)\right)$ n'est pas encore préparé.

Dans la deuxième activité, il s'agit de deviner que des couples de nombres proposés sont associés cette fois à la fonction qui à un nombre fait correspondre son carré. L'enseignant demande ensuite de compléter un tableau de valeurs de ce qui sera la fonction $x \to x^2$ puis de placer les points dont les coordonnées sont les colonnes du tableau dans un repère. Il demande aux élèves de s'arrêter au tracé de ces seuls points. L'enseignant continue lui-même, en traçant grâce à un logiciel « tous » les points de coordonnées (nombre de départ x, nombre d'arrivée x^2). Il parle de courbe

– qui n'est pas une droite (reprenant ce que dit un élève), il évoque « l'ensemble des points de la courbe », mais sans insister du tout sur le mot ensemble. Les points initiaux des élèves sont placés et on constate qu'ils sont sur la courbe obtenue. Là, l'enseignant insiste sur la construction de la courbe par le logiciel grâce au placement de « très nombreux points de coordonnées (x, x^2). La question se pose peut être encore pour les élèves entre la construction de la courbe à partir de points nombreux et son interprétation : ce n'est pas parce que la courbe est obtenue à partir de beaucoup de points (x, x^2) que les coordonnées de tous ses points vérifient la même relation. Même si l'enseignant affiche les coordonnées d'un point au hasard, et indique que l'ordonnée est le carré de l'abscisse, l'explicitation de ce que veut dire « ensemble » n'est pas faite, voire n'est pas possible. On vérifie ce que nous signalions ci-dessus : le manque de clarté sur ce point, alors qu'implicitement on met en œuvre cette définition de la courbe. Autant généraliser une construction de courbe point par point en remplaçant y par $f(x)$ peut sembler à la portée des élèves, autant, à l'envers, interpréter les coordonnées de n'importe quel point de la courbe comme $(x, f(x))$ met en jeu quelque chose de nouveau qui n'est plus proche du tout de ce qu'ont déjà fait les élèves. Tout se passe comme s'il manquait un « réciproquement ». L'utilisation du mot ensemble justifie ce que dit l'enseignant sans avoir vraisemblablement de signification pour les élèves. Est-ce cependant important ? L'activité suivante donne une réponse.

La troisième activité reprend la même chose pour la fonction $x \to \sqrt{x}$. Les élèves complètent un tableau de valeurs numériques puis pour le représenter autrement, les élèves placent les points dans un repère. L'enseignant demande s'il est légitime de les joindre, comme certains élèves l'ont fait cette fois-ci. Il laisse la réponse en suspens. Ensuite il trace devant les élèves la courbe sur ordinateur en commandant à ce dernier de placer les points (abscisse x, ordonnée $\sqrt{x}$). Il fait varier l'abscisse, x, déclarée comme variable, et redit que l'ordonnée du point correspondant de la courbe est $\sqrt{x}$. La courbe s'affiche. L'enseignant choisit un point de la courbe et l'ordinateur affiche les coordonnées numériques. L'enseignant demande la signification des deux nombres ainsi affichés. Pas de réponses jusqu'à ce qu'un élève reprenne le $(x, \sqrt{x})$. On constate à nouveau à la fois l'appui sur les constructions précédentes et la difficulté pour beaucoup d'élèves d'interpréter la courbe, ce qui est trop éloigné de ce que les élèves ont déjà pu faire. Enfin l'enseignant donne la définition : une représentation graphique est un ensemble de points, « l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ », – il précise qu'une droite est une courbe… Il demande enfin de tracer une courbe non représentation graphique d'une fonction.

On peut se demander quelles proximités avec tous les élèves sont engagées. Peut-on parler de proximité ascendante ? L'enseignant s'appuie sur une interprétation des coordonnées mais il n'explique pas pourquoi on choisit justement ces coordonnées pour chaque point ; les élèves peuvent encore moins le deviner seuls. Il nous semble qu'il y a là une proximité tentée par l'enseignant qui peut rester un peu illusoire, pour un certain nombre d'élèves.

De plus l'enseignant insiste sur le fait que x prend toutes les valeurs, que tous les points sont concernés (comme s'ils se touchaient, qu'ils avaient une épaisseur) mais il ne dit rien sur le fait que tout point de la courbe a comme ordonnée $f(x)$. Il n'évoque pas non plus ce qu'on connait de plus sur la fonction grâce à cette représentation, il dit seulement que c'est une autre façon de l'aborder (juxtaposition des points de vue).

Certes, en dire trop aux élèves peut aussi bien les noyer que n'en dire pas assez. Il s'agit d'adapter à chaque classe les informations qu'on juge adéquates, mais il nous semble que le didacticien peut clarifier les occasions de proximités, en explicitant notamment ce qui pourrait être ascendant ou plus difficile.

3.2. Exemples en première année d'université (cursus scientifique)

3.2.1. Contexte du travail

Le cours en amphi engendre probablement encore moins d'interactions entre l'enseignant et les étudiants qu'il n'y en a au secondaire, notamment en raison du nombre important d'étudiants qui sont en général présents. À l'université, les étudiants peuvent aussi avoir accès à de nombreuses ressources qui leur donnent directement accès au texte du savoir, comme des livres, des polycopiés, des vidéos de cours en ligne. La présence au cours magistral n'étant, de plus, pas obligatoire, il nous a semblé pertinent de nous intéresser à ce que les étudiants peuvent retirer de ce type de cours. Nous mettons ici en regard le cours d'un manuel, une vidéo de type FAD (formation à distance) et un cours en amphi filmé. Des caractéristiques de chaque support sont dégagées. Cette diversité est selon nous un moyen de mieux mettre en évidence les spécificités propres au cours magistral.

Nous nous sommes centrés sur la notion de limite (suite et fonction) qui est une notion clé de l'enseignement de l'Analyse à l'université. Elle est en effet introduite en L1 dans de nombreux pays et son enseignement est source de difficultés récurrentes chez les étudiants en première année universitaire (par exemple, Bridoux (2016), Robert (1982) Przenioslo (2005)). Dans la suite, quand nous parlerons de la notion de « limite » de suite ou de fonction, cela signifiera la « notion mathématisée formelle quantifiée de limite ».

3.2.2. Un peu de relief sur les notions de limites formalisées

La notion de limite d'une suite numérique apparaît pour la première fois dans la classe de première au lycée (programme de 2010 en France). Les programmes précisent bien que la définition formelle n'est pas donnée à ce stade de l'enseignement. La notion est donc introduite de manière empirique à partir d'exemples d'expérimentations logicielles, d'études d'algorithmes, etc. Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont étudiées, pour lesquelles la convergence est aussi abordée de manière intuitive, dans le cas d'une suite croissante non majorée, on peut déterminer un rang à partir duquel tout terme de la suite est supérieur à un nombre donné. La notion de limite de fonction apparaît aussi en classe de première au lycée dans le chapitre « Dérivation » : comme pour les suites, le programme stipule qu' « on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point » et qu'on n'en donne pas de définition formelle.

Dans la classe de terminale de la série scientifique, les notions de limite sont approfondies. D'une part, pour définir le fait qu'une suite (u_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, le programme autorise par exemple la formulation « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ; le fait que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ s'exprime par « tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». D'autre part, les notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini sont introduites avant celle de continuité. Cependant, que ce soit pour la notion de limite de suite ou celle de limite de fonction, les tâches proposées aux élèves relèvent en général de l'application de techniques algébriques opératoires. D'ailleurs, cet aspect est confirmé dans les programmes où on peut lire que « le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer les limites dans les exemples rencontrés en terminale ». Soulignons qu'il n'y a pas besoin d'utiliser la définition formalisée pour résoudre ces exercices.

À l'université, en revanche, les définitions formelles en (ε, N) de limite de suite et en (ε, α) de limite de fonction apparaissent rapidement dans les cours. Même si plusieurs caractérisations sont possibles (écrire les quantifications dans la langue naturelle ou avec des symboles, présence explicite ou non d'une implication,...), c'est souvent en termes d'inégalité que la définition est donnée, comme dans les exemples suivants. Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

Une fonction f admet une limite finie l en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0\ \forall x \in Df, (|x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$$

Les quantifications présentes dans ces caractérisations, l'usage (ou non) des parenthèses et du symbole d'implication, tout comme l'emploi d'une inégalité avec une valeur absolue, font que ces définitions sont porteuses d'un formalisme complexe à ce niveau d'enseignement. De plus, il semble difficile de les introduire en s'appuyant sur les connaissances anciennes (même intuitives) des étudiants acquises au lycée puisque les notions formelles de limite n'y ont pas ou peu été travaillées, que le besoin de telles définitions ne s'est pas fait sentir, et que, si on se réfère aux programmes, lorsqu'une définition est donnée, elle n'est pas formulée de la même manière dans les deux institutions (lycée et université). En ce sens, ces deux notions de limite sont porteuses d'un nouveau formalisme qui généralise les exemples étudiés au lycée tout en unifiant la notion de limite dans un cadre général. Les notions de limite de suite et de fonction sont donc des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (notions FUG) au sens de Robert (1998). Comme Robert l'explique, ce type de notion est difficile à introduire car la distance ancien-nouveau est grande. Elle souligne ainsi la difficulté à trouver un problème initial à proposer aux étudiants où la notion de limite apparaîtrait comme l'outil de résolution optimal, les amenant ainsi à écrire de manière autonome la (nouvelle) définition formelle tout en lui donnant du sens. Il y a peu d'espoir de mettre en place des proximités ascendantes naturelles.

Une fois la définition formelle introduite à l'université, elle est en général utilisée pour étudier les premiers exemples, puis pour démontrer quelques résultats classiques comme l'unicité de la limite ou les règles de calculs (en partie déjà connues) sur les limites. Compte tenu de la complexité de la structure logique de la définition, ce type de travail nécessite d'utiliser à bon escient des connaissances en logique élémentaire mais aussi sur l'ordre dans les réels pour manipuler les inégalités. Nous savons que ces connaissances sont souvent peu disponibles en première année d'université (Dieudonné et al., 2011). De plus, les recherches sur la transition secondaire-supérieur (par exemple Gueudet, 2008, Durand-Guerrier, 2013) pointent des difficultés chez les étudiants avec les aspects formels, spécifiques de l'activité mathématique dans le supérieur, et en particulier avec la manipulation des écritures quantifiées et de leur contrôle sémantique. Les étudiants sont donc d'emblée confrontés à des tâches complexes pour eux. Cela nous amène à penser qu'il est difficile de trouver des premières tâches qui seraient simples et isolées[6], permettant aux étudiants de se familiariser avec l'usage de la notion formalisée donnée en cours. Même les exercices d'application immédiate de la définition ne sont pas immédiats pour les étudiants (on retrouve un résultat de Bridoux (2011) qui semble spécifique de certaines notions FUG). Ainsi s'il y a proximité descendante, entre cours et exercices, elle devra mettre en jeu des explicitations à réfléchir. Restent alors les proximités plutôt horizontales…

3.2.3. Nature des analyses réalisées et méthodologie

Dans une recherche récente (Petropolou et al. (2016)), les auteurs ont cherché à identifier dans quelle mesure les besoins des étudiants au début de l'université sont conceptualisés et pris en compte par les enseignants en cours magistral. Dans notre travail, nous nous plaçons dans une perspective similaire, en cherchant plus précisément les « manières de se rapprocher des étudiants » et, parmi celles-ci, lesquelles apparaissent (ou pas) dans les différents types de cours analysés.

[6] Ce sont des applications immédiates (définition, propriété) des connaissances des étudiants.

Compte tenu de l'analyse du relief de la notion de limite, nous faisons l'hypothèse que le rôle de l'enseignant est particulièrement important au moment de son introduction, notamment pour amener les étudiants à lui donner du sens, c'est-à-dire en comprenant ce qu'elle traduit et ce dont il y a besoin pour l'utiliser. Cela comprend aussi l'appropriation du nouveau formalisme que la définition contient.

Nous nous sommes donc demandé ce qui était explicité par l'enseignant, dans le cours magistral, lorsqu'il introduit la définition en tant qu'objet. Reformule-t-il la définition avec d'autres mots pour rester « proche » des connaissances approximatives du plus grand nombre possible d'étudiants ? Donne-t-il des commentaires méta sur son utilisation ? Illustre-t-il la définition avec un dessin ? Ces premières questions sont selon nous l'occasion de dégager des premiers exemples de proximités (plutôt horizontales) dans le discours de l'enseignant. Nous nous restreignons ici à l'émergence de la définition dans le cours mais pour avoir une vue globale du scénario choisi par l'enseignant, les premiers exemples proposés par l'enseignant, puis les premiers résultats et leurs démonstrations ont eux aussi été étudiés, prolongeant ce que nous montrons ici (Bridoux et al. (2015)).

Pour repérer des occasions de proximités, nous étudions, pour chaque média, la présence de reformulations de la définition, la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et la prise en compte de la structure globale de la définition, en nous demandant en particulier quels sont les implicites entre écrit et oral dans ce qui est fait : qu'est-ce qui est écrit et pas dit, qu'est-ce qui est dit et pas écrit ? Ce choix méthodologique est associé aux éléments curriculaires sur la notion de limite et à la nature FUG de cette notion présentés dans l'étude du relief.

3.2.4. Étude de manuels et occasions de proximités

Ce qui est recherché

Pour mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe, il nous a semblé pertinent d'étudier un média, ici le manuel, où le professeur est absent. L'analyse menée vise à dégager des occasions de proximités qui pourraient être développées par l'enseignant. Elle permet également de repérer, *a priori*, les occasions de tisser des liens entre l'ancien et le nouveau. Par exemple, lorsqu'une définition est donnée dans un manuel et qu'elle est ensuite illustrée sur un exemple, il pourrait y avoir une occasion de voir émerger une proximité descendante dans le discours de l'enseignant : par l'explicitation de ce qui est contextualisé dans la définition générale.

Nous regardons ici le manuel *Mathématiques Tout-en-Un*[7]. Ce manuel couvre le programme de mathématiques de la première année des classes préparatoires

[7] GAUTIER C., WARUSFEL A., CAMINADE B., FONTAINE H. & NICOLAS S. (2007) *Mathématiques Tout-En-Un, ECS 1re année,* Éditions Dunod.

économiques et commerciales et concerne principalement la filière scientifique. La partie « Analyse » du manuel commence par l'étude des suites et des nombres réels (chapitre 15) puis vient celle de la notion de limite d'une fonction (chapitre 16). La progression suivie dans le chapitre 15 est la suivante : définition de la notion de suite, étude de certains comportements globaux des suites (monotonie, suite majorée/minorée/bornée), définition de la convergence d'une suite et unicité de la limite (avec démonstration). Quelques résultats classiques sont ensuite démontrés.

La définition de convergence

La section qui traite des suites convergentes démarre par la définition suivante et fixe ensuite les notations (p.322) :

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite convergente s'il existe un réel l tel que*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon).$$

On dit que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers l. On note* $l = \lim u$ *ou* $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$. *Une suite qui ne converge pas est dite divergente.*

La caractérisation choisie pour définir la notion de convergence vers un réel n'utilise que des symboles mathématiques. Elle n'est accompagnée d'aucun commentaire explicatif et n'est pas illustrée par un dessin. Telle qu'elle est présentée, il nous semble difficile d'établir ici un rapprochement avec les connaissances « déjà-là » d'un étudiant de L1 qui tenterait de s'approprier seul la notion en lisant ce manuel. L'étudiant aurait en effet complètement à sa charge de donner du sens au formalisme utilisé dans la définition.

Deux remarques suivent la définition dans le manuel. La première consiste à reformuler la définition précédente en termes d'intervalles (comme le préconisent les programmes du lycée) :

La définition signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, *tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ou encore tous les termes de la suite sauf un nombre fini, sont dans l'intervalle* $[l-\varepsilon;\ l+\varepsilon]$.

Cette reformulation est une occasion de donner un certain sens à la définition précédente. Cependant, aucune explication n'est donnée sur le passage des symboles présents dans la définition aux expressions utilisées ici, comme « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang », ni sur le passage de l'inégalité à la notion d'intervalle. Le lecteur doit donc ici aussi puiser dans ses connaissances ce qui permet de passer d'une caractérisation à une autre.

La deuxième remarque concerne le fait que la caractérisation en termes d'intervalles est aussi vérifiée pour des intervalles ouverts, avec une tentative de justification :

Comme tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle de la forme $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, *la propriété est vérifiée pour tout intervalle ouvert contenant l : la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers l si, pour tout intervalle ouvert I contenant l, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans I.*

Remarquons que la justification ne porte que sur la transformation des intervalles, la question de savoir si le même entier n_0 convient selon qu'on travaille avec un intervalle ouvert ou un intervalle fermé n'est pas abordée. Elle est de nouveau laissée à la charge du lecteur.

Trois exemples d'utilisation de la définition sont ensuite traités pour montrer qu'une suite donnée converge vers un réel l ou est divergente (p.323) : « *une suite u constante converge vers* u_0 », « *la suite* $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0* » et « *la suite* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente* ». C'est donc en tant qu'objet que la définition est ici utilisée. Nous étudions ici le second exemple. Les deux autres sont étudiés dans Bridoux et al. (2015).

Nous découpons la présentation du livre.
En effet, soient $\varepsilon > 0$ *et* n_0 *tel que* $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Cette première ligne soulève selon nous une ambiguïté. En effet, l'expression « soi(en)t » fait classiquement référence à la présence d'un (de) quantificateur(s) universel(s) dans la proposition quantifiée à montrer. Or, dans la définition de convergence, c'est un quantificateur existentiel qui précède l'entier n_0. Le fait de considérer un entier quelconque parmi tous ceux qui sont supérieurs à $\frac{1}{\varepsilon}$ ne met donc pas en évidence la quantification existentielle portant sur cet entier dans la définition puisque cet entier n'est pas explicitement donné. On se contente d'affirmer implicitement la possibilité d'en construire un qui satisfait l'inégalité donnée. Cela tient peut-être au fait que pour définir facilement un tel entier positif, il faudrait utiliser la partie entière d'un réel. Or, cette notion n'est définie que plus tard, dans la section sur les nombres réels. Nous y revenons juste après.
On a alors, pour tout entier $n \geq n_0$, $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \varepsilon$.

Tout d'abord, remarquons que l'expression « *pour tout entier* $n \geq n_0$ » ne respecte pas la structure logique choisie dans la définition dans laquelle il y a une implication liant les indices *n* et n_0. Ensuite, les inégalités ne sont pas justifiées, de nouveau c'est au lecteur de le faire lui-même.

Nous trouvons enfin une remarque en lien avec la construction de l'indice n_0 (qui renforce ce qui précède) :
L'existence, pour tout réel x d'un entier $n \geq x$, *utilisée constamment ici, sera justifiée dans la section 6 sur la partie entière.*

Telle que proposée, la rédaction de cet exemple ne montre pas une utilisation de la définition qui met en évidence sa syntaxe logique. Il nous semble de plus que la rédaction proposée ici pourrait ne pas être acceptée par tous les enseignants universitaires s'il s'agissait de la production écrite d'un étudiant de L1, puisque l'entier n_0 n'est pas explicitement donné et que les inégalités ne sont pas justifiées.

3.2.5. Analyse d'un cours en ligne, proximités potentielles

En complément de l'analyse précédente, nous présentons ici une analyse logique des pratiques langagières d'un enseignant (vidéo proposée dans le cadre d'une formation à distance[8], l'enseignant n'est pas devant des étudiants, il accompagne son propos avec un diaporama). Cette analyse permet, à un niveau très local, de mettre en lumière des occasions de proximités lorsque l'oral s'ajoute à l'écrit mais sans étudiants réels. Nous voyons ici que l'enseignant s'éloigne du formalisme strict (tout en restant conforme aux pratiques de la communauté, ces pratiques langagières sont complètement naturalisées). On peut penser qu'il gagne souvent ainsi une certaine souplesse dans la formulation et une certaine concision. L'usage d'expression courante pour formuler les mathématiques, les reformulations ou la constations de possibilités multiples de formulations (jeu entre écrit et oral notamment) peuvent permettre certaines proximités horizontales, ou a minima peuvent donner à voir certains implicites.

Reformulations

Le cours analysé commence par énoncer la définition de la limite d'une suite. La formulation symbolique est très rapidement donnée. Il est frappant de constater que l'enseignant formule et reformule onze fois cette définition, par écrit ou oralement, de façon à chaque fois différente, en un peu plus d'une minute au début du cours. Cette première présentation est suivie d'un commentaire oral d'une représentation graphique d'une suite convergente, l'enseignant poursuit avec les limites infinies, puis énonce des propriétés des limites et prouve deux d'entre elles. Dans toutes ces phases de l'exposé, la définition est reformulée. Nous nous concentrons ici sur la première minute[9, 10].

1	*Diapo*	0:00	La suite $(\mathrm{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$
2	*Oral*	0:08	La suite $u\ n$ a pour limite l appartenant à R
3	*Diapo*	0:00	Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $\lvert u_n - l \rvert < \epsilon$
4	*Oral*	0:12	Pour tout epsilon positif il existe un entier grand N tel que dès que l'entier petit n est plus grand que grand N alors valeur absolue de $u\ n$ moins l est plus petit que epsilon.
5	*Diapo*	0:24	$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ (n \geq N \Longrightarrow \lvert u_n - l \rvert < \epsilon)$
6	*Oral*	0:27	Pour tout epsilon [main sur ∀] il existe un entier [un pas, main sur ∃] naturel grand N, tel que [deux pas, main sur « $(n \geq N$»] si petit n est plus grand que N alors [un pas, main sur « $\Longrightarrow$ »] valeur absolue de [recule] $u\ n$

[8] http://youtu.be/253AEiNBvGw

[9] « Diapo » signale des éléments projetés sur le diaporama, « Oral » signale des phrases prononcées par l'enseignant, mis à part pour la formulation n°7 les formulations orales sont des reformulations de formulations écrites.

[10] Les temps indiqués correspondent au début de la formulation ou à l'apparition de la diapo. La vidéo commence 43 secondes avant le temps 0:00 ci-dessus. Pendant ces 43 secondes, l'enseignant présente le plan du cours.

			moins l est plus petit que epsilon.
7	*Oral*	0:44	Autrement dit u n est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang.
8	*Diapo*	0:51	$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$
9	*Oral*	0:58	Limite de u n égale à l lorsque n tend vers plus l'infini.
10	*Diapo*	0:51	$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$
11	*Oral*	1:01	u n tend vers l lorsque n tend vers plus l'infini.

La définition est également reformulée plusieurs fois dans la suite du cours, notamment au cours des preuves, mais ce ne sera pas développé ici. Reprenons ici une des observations soulignées dans Bridoux (2015) : le cas de la quantification de n est un cas intéressant de jeu entre l'oral et l'écrit, l'un complétant l'autre. Dans la formulation 3 la quantification universelle de n est classiquement omise (implicite lié à l'implication), dans la formulation 4 on peut voir une trace de la quantification de n dans le « dès que », dans la formulation 5 elle apparaît très explicitement, dans la formulation 6 elle disparaît à nouveau complètement (y compris dans la gestuelle de l'enseignant qui accompagne sa lecture de la main sur la diapo).

Notons également que dans les formulations 8 et 10 on énonce la définition en commençant par parler des termes de la suite et de sa limite, on parle ensuite de n (ordre d'énonciation inverse de l'ordre logique[11]). « n tend vers plus l'infini » acquiert une autonomie grammaticale dont on sait qu'elle pose ensuite des difficultés quant à la compréhension de la notion de limite (voir par exemple Job 2013).

L'enseignant ne peut, ici, ajuster son discours aux réactions qu'il constaterait chez les étudiants. On constate qu'il ne propose pas de commentaire mathématique des éléments pointés ci-dessus : une implication sous-entend toujours une quantification universelle, (non) sens de l'expression « n tend vers l'infini » hors contexte, pourquoi utilise-t-on le mot « limite », « tendre vers », « proche », « à partir d'un certain rang » etc. Ces éléments sont pourtant potentiellement des moyens de travailler le contenu exposé.

---

[11] Voir par exemple Hache (à paraître) : "Un des questionnements récurrents sur l'expression des [quantifications] concerne l'ordre de ces [quantifications] : [Rakotovoavi] distingue l'*ordre logique* et l'*ordre d'écriture*. (…) retenons qu'en présence de deux [quantifications] on dit en général que la première des deux, selon l'ordre logique, est celle dont le champ (c'est-à-dire la portion de l'énoncé où la [quantification] s'applique) englobe le champ de l'autre. L'ordre d'écriture ne correspond pas toujours à l'ordre logique. Donnons ici un exemple (...) : « Il existe un plan, et un seul, contenant un point donné et parallèle à un plan donné ». La quantification « il existe un plan » arrive la première dans la phrase, alors qu'elle est dans le champ des quantifications universelles portant sur « un point » et « un plan ». L'inversion nécessaire pour rétablir l'ordre logique des quantifications est soulignée par la présence du marqueur « donné »".

La seule proximité en acte effective ici réside dans la succession de reformulations. Chaque reformulation enrichit les formulations précédentes, et peut enrichir potentiellement la compréhension de la notion par les étudiants.

Usage du mot « rang », de l'expression « à partir d'un certain rang »

Le second exemple développé concerne l'introduction du mot « rang » et de l'expression « à partir d'un certain rang ». Le mot « rang » dans le contexte des suites mathématiques est synonyme d'« indice », il peut parfois aussi être remplacé par « nombre entier » (mais on perd alors le rappel du contexte des suites). L'expression « à partir d'un certain rang » renvoie à la double quantification « $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$ », et la cache. On peut par exemple dire « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang » pour « $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ u_n > 0$ ». Soulignons que dans cette situation il existe effectivement un entier N tel que, quel que soit l'entier n, si n plus grand que N alors u_n est positif. Les expressions « constante à partir d'un certain rang » ou « croissante à partir d'un certain rang » sont un peu plus compliquées, mais relèvent de la même analyse. Notons que ces différentes formulations ne font pas apparaître les variables muettes présentes dans les formulations quantifiées (classiquement N et n). Il existe d'autres formulations usuelles proches utilisant la variable n (mais pas N) comme « pour n assez grand », ou utilisant la variable N (mais pas n) comme « il existe un rang N à partir duquel ».

La formulation 7 ci-dessus « $u\ n$ est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang » est classique. L'usage de « à partir d'un certain » est plus complexe que dans les phrases précédentes. Il faut ainsi lire dans la formulation une quantification universelle de ε (en ajoutant une intention concernant le fait que l'on veut que ε soit petit, on retrouve une dimension pragmatique) et le fait que le rang évoqué par « à partir d'un certain rang » n'est pas déterminé : il dépend de ε.

Les expressions issues des usages courants de la langue permettent des combinaisons et des organisations de phrases plus variées (conjugaisons, nuances qualitatives, insertion d'adverbes etc.) que ne le permet le formalisme. Elles cachent par contre la référence formelle, et elles ne permettent pas un usage directement « opérationnel » : comment montrer par exemple qu'une suite n'a pas pour limite zéro avec la définition « Une suite tend vers zéro si et seulement si elle est aussi proche que l'on veut de zéro à partir d'un certain rang » ? Elles ne permettent pas facilement non plus de saisir certaines nuances (différences d'usage de « à partir d'un certain rang » entre « la suite est strictement positive à partir d'un certain rang » et « $u\ n$ est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang »).

Il est intéressant d'analyser la façon dont l'enseignant introduit ces formulations dans son discours. Dans le premier cours sur les suites (définitions, exemples de suites, premières propriétés) et dans le cours étudié (2e cours), on trouve dix occurrences du mot « rang ». Le mot « rang » est utilisé pour « indice » (trois fois), dans une expression « à partir d'un certain rang » pour laquelle il existe effectivement un rang (cinq fois) ou dans le contexte plus complexe de l'usage de « à partir d'un certain rang » lié à la définition de limite (deux fois). Aucun commentaire n'est fait à propos de ces usages, l'étudiant peut faire des liens entre les formulations employées et ce qui est écrit (quand quelque chose est écrit et quand ce qui est écrit est différent de ce qui est prononcé, deux occurrences), mais c'est en général à lui de prendre l'initiative, et de faire le lien avec les questions de contenu. Autrement dit, les occasions de proximité existent bien, mais ne sont pas exploitées.

Prononciation de «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ »

La formulation écrite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être lue simplement[12] : la lecture explicite des parenthèses serait lourde, la variable n est muette (« $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ » ne parle pas de n), cette suite n'a pas nécessairement encore de nom (faut-il l'appeler « u » ?)... On lit souvent cette formulation en commençant par « La suite... » : « La suite u », « La suite u indice n » (en ajoutant éventuellement « pour n dans ℕ », ce qui présente la variable n et introduit plus explicitement le fait qu'elle est muette), « La suite u n » (idem), « La suite de terme général u indice n » (là aussi on peut ajouter « pour n dans ℕ » ce qui précise le domaine dans lequel la variable n prend ses valeurs, la variable n est déjà rendue muette par « de terme général ») etc. Il arrive qu'on utilise des formulations plus concises : « u n » pour « La suite u n », ou « u », celles-ci permettent de simplifier les formulations de propositions ou de preuves complexes, tout en nécessitant une certaine complicité de l'auditeur ou du lecteur, et un travail complémentaire d'interprétation plus important.

Pour un entier n donné, le n-ième terme de la suite est noté « u_n », ce qui est souvent lu « u indice n » ou plus simplement « u n », on peut parfois préciser en disant « le terme u n » (ou « le nombre u n » par exemple).

On voit donc ici que deux objets très différents mais liés (une suite de nombres et un nombre par exemple, ce dernier étant un des termes de la suite) peuvent être désigné par des formulations orales très proches, voire par la même formulation (« u n »). Les relations entre ces deux objets sont au centre de la définition de limite : la convergence est une propriété de la suite, définie par une propriété de ses termes (et de la limite en question) quantifiée de façon complexe. La compréhension de la notion de limite est très liée à la compréhension de cet emboitement (propriété de la suite, propriétés de ses termes), de ces deux niveaux de lecture. L'enseignant désigne ici presque systématiquement les suites par les expressions « suite u n » ou « u n », il est intéressant d'analyser ce que permet ces quasi similarités de formulations, la façon dont cela fait parler le formalisme, lui donne sens, mais aussi les difficultés que cela peut engendrer (plus une formulation est concise, plus elle est porteuse

[12] La thèse de Jean Philippe Drouhard (Drouhard 1992) étudie entre autres ces notations mathématiques utilisant deux dimensions (notations des racines n-ièmes par exemple).

d'implicites), et la façon dont l'enseignant gère ces difficultés potentielles.

Certaines formulations jouent sur les deux niveaux (suite ou termes de la suite). Un exemple[13] « si u n tend vers plus l'infini [la suite] alors la suite des u n sur tend vers zéro [la suite]. Réciproquement, si u n tend vers zéro [la suite] et si les u n sont strictement positifs [les termes[14]], alors un sur tend vers plus l'infini [à nouveau la suite] ». La formulation écrite correspondante affichée (ci-dessous) ne laisse aucune ambiguïté sur le statut des objets. Elle permettrait donc à un auditeur attentif de décoder l'oral :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$

Comme pour l'utilisation du mot « rang », les formulations orales sont souvent complétées ici par une formulation écrite. Celles-ci lèvent parfois l'ambigüité, et donnent donc implicitement des éléments des pratiques langagières concernant les suites. Parfois les formulations écrites intègrent, elles aussi, des raccourcis (que les formulations orales précisent ou non). Dans tous les cas, rien n'est explicité sur ces points.

Cela pourrait engendrer des difficultés de compréhension ou d'apprentissages : le cours porte sur une propriété des suites définie de façon complexe à partir des propriétés quantifiées des éléments de la suite, mais il arrive fréquemment que l'on désigne suite et éléments par le même nom.

Les analyses précédentes montrent qu'il y a à la fois dans le manuel et dans la vidéo de FAD des occasions de proximités mais celles-ci ne sont pas exploitées : par exemple des proximités descendantes à la suite de la définition de limite (manuel) ou des proximités discursives (vidéo de FAD) plutôt horizontales et locales. Nous allons maintenant voir dans quelle mesure ces occasions de proximités sont converties (ou non) en des proximités possibles par l'enseignant dans le cours magistral.

3.2.6. Des exemples de proximités dans le cours magistral
Ce qui est recherché

Pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite, nous étudions une vidéo de cours magistral en L1 sur la limite de

[13] Entre crochets, nos commentaires.

[14] L'enseignant marque, dans son expression orale, le fait qu'il parle des termes en utilisant le pluriel (« les u n sont » et non simplement « u n »).

fonction[15]. Pour ce faire, nous procédons à une analyse au niveau global et étudions le déroulement de ce cours en tentant d'y repérer des liens explicites entre ancien et nouveau pilotés par l'enseignant ; en particulier, nous nous intéressons à la présence de reformulations de la définition, à la prise en compte des connaissances anciennes des étudiants et de la structure logique (globale ou locale) de la définition de limite. Plus finement, nous prenons en compte le fait que dans un cours magistral le texte du savoir est accompagné du discours oral de l'enseignant, de ses gestes et d'interactions éventuelles avec certains étudiants[16] qui peuvent lui permettre de donner une certaine cohérence au savoir et de tisser des liens.

La nature FUG de la notion de limite laisse supposer qu'il n'y a pas d'activités préalables qui permettraient aux étudiants d'élaborer quelque chose se rapprochant de la définition visée. Cela nous amène à prendre en compte tout ce que l'enseignant explicite, les différentes reformulations ou illustrations qu'il utilise, les commentaires méta qu'il fait, la distance entre ce qu'il dit et ce qu'il écrit et la formulation orale associée au formalisme écrit. On se donne ainsi les moyens de repérer plusieurs types de passage dans cette association entre écrit et oral : la lecture orale des symboles écrits, avec ou non des ajouts de liaisons implicites (*tel que* par exemple) ; la traduction de certaines parties formalisées en mots (les inégalités lues en termes de distance par exemple).

Présentation générale du cours étudié

Le cours magistral étudié est une séance de 1h30 donnée au semestre 2 devant environ 200 étudiants de L1[17] portant sur l'introduction de la définition de la notion de limite de fonction (en un point, en l'infini). Il constitue la première rencontre des étudiants avec cette définition. Pour analyser cette séance, nous avons procédé à la transcription des écrits de l'enseignant au tableau et de son discours puis nous les avons mis en regard avant de procéder à un découpage du déroulement en phases qui suit celui effectué par l'enseignant sur le plan de son cours.

Le cours a été découpé en 15 phases mais, comme dans le cas du manuel, nous en analysons quatre qui correspondent à l'émergence de la définition de limite (finie) d'une fonction et à sa première utilisation en tant qu'objet : phase 1 (introduction intuitive), phases 3 et 6 (écriture et reformulation de la définition) et phase 12 (application de la définition). Nous renvoyons à Bridoux et al., ibid., pour une analyse plus complète de ces phases.

---

[15] Malgré les différences notables entre les définitions de limite de fonction et de limite de suite, nous faisons l'hypothèse qu'elles restent comparables au regard de nos objectifs puisque nous étudions des moments de première rencontre avec la définition formelle associée à une notion FUG.
[16] Même si l'on peut raisonnablement penser qu'il y a plutôt moins d'interactions entre enseignant et élèves que dans l'enseignement secondaire.
[17] Ces étudiants se destinent à des études en informatique ou en mathématiques.

Dans la suite, nous mettons en italique dans le corps des paragraphes les paroles transcrites.

Introduction intuitive (phase 1)

L'enseignant débute le cours en demandant aux étudiants une définition de la notion de limite puis écrit au tableau sous la dictée d'un étudiant :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

L'enseignant obtient auprès d'un autre étudiant une définition intuitive, en mots, qu'il reformule : « *OK,* $f(x)$ *doit se rapprocher autant que l'on veut de* l *mais quand* x *se rapproche de* x_0 » (reformulation 1). Il s'appuie ensuite sur un graphique sur lequel il traduit « se rapprocher/se rapproche » par des symboles « flèche » avant de les reformuler en « aussi proche/suffisamment proche » en s'aidant de gestes ; la locution « quand » devient « si » : « $f(x)$ *est aussi proche que l'on veut de* l *si* x *est suffisamment proche de* x_0 » (reformulation 2).

Cette phase témoigne de la volonté de l'enseignant de tenter de partir des représentations intuitives d'un étudiant pour en arriver à une reformulation qui contient déjà en germe certains éléments logiques et formels de la définition. Cependant, la reformulation 2 est encore éloignée de la définition formelle quantifiée. D'une part, si les deux propositions qui la composent sont formulées de façon similaire (« $f(x)$ *est aussi proche que l'on veut de* l » et « *si* x *est suffisamment proche de* x_0 »), elles ne seront pas quantifiées de la même manière (respectivement par une quantification universelle et par une quantification existentielle). D'autre part cette reformulation nous semble être porteuse d'une inversion possible de l'ordre et de la nature des quantificateurs[18] qui rend *a posteriori* difficile la justification de l'ordre choisi dans la définition. Cette tentative s'appuie-t-elle sur des connaissances ou représentations déjà-là de tous les étudiants ? Relaie-t-elle des besoins ou une réelle motivation ? La question se pose.

Premières définitions (phases 3 et 6)

Lors de la phase 3, l'enseignant écrit la définition de limite d'une fonction en un point en respectant une chronologie qu'il base sur la reformulation 2 obtenue en phase 1. Le tableau ci-dessous met en parallèle un extrait de ce qu'il écrit et de ce qu'il dit au début de cette chronologie.

[18] Il y a de fait une « inversion » entre l'idée intuitive que si x se rapproche de x_0 alors $f(x)$ est proche de l, et la traduction formalisée qui garantit que cela est vrai « sans trou » pour peu qu'on soit « près de x_0 ».

Ce qui est écrit au tableau	Ce qui est dit par l'enseignant (extraits)
$\forall\varepsilon > 0$ $\quad |x - x_0| < \alpha$ $\quad |f(x) - l| < \varepsilon$	*Qu'est-ce que c'est que la distance de $f(x)$ à l ?*[réponse d'un étudiant] *Oui c'est la valeur absolue de $f(x) - l$. Alors on veut que $f(x) - l$ soit aussi petit qu'on veut, $f(x)$ va se rapprocher autant qu'on veut de l, qu'est-ce que ça veut dire ? Ça veut dire que valeur absolue de $f(x) - l$ est inférieur à epsilon, pour epsilon aussi petit qu'on veut, on est d'accord. On veut que epsilon soit aussi petit qu'on veut, ça veut dire que ça va être vrai pour tout epsilon positif. Et on doit avoir ça si x est suffisamment proche de x_0, c'est-à-dire si la distance de x à x_0 est inférieure à une certaine valeur alpha.*

Au tableau, il aboutit finalement à cet écrit à la fin de la phase 3 :

$\underline{\forall\varepsilon > 0}$ que l'on veut	$\underline{\exists\alpha > 0}\,\forall x \in Df$ Suffisamment	$\underline{|x - x_0| < \alpha}\Rightarrow$ Proche	$\underline{|f(x) - l| < \varepsilon}$ Proche

Lors de la phase 6, l'enseignant écrit la définition et le commentaire suivants : *<u>Définition :</u> soit $x_0 \in \mathbb{R}$, f une fonction définie sur un voisinage de x_0. f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Autrement dit, aussi petit que soit ε on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de x_0 sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε.*

Lorsqu'il écrit la définition, il lit les valeurs absolues en termes de distances et dit : *D'accord, le « quel que soit » c'est « aussi petit que soit ε », « $\exists\alpha > 0$ tel que $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha$ » ça c'est un intervalle en fait donc il existe un intervalle suffisamment petit autour de x sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε.*

Il commente ensuite l'équivalence : $|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$.

Ce travail de l'enseignant témoigne de sa volonté d'introduire la définition de limite en travaillant sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales possibles basées sur des reformulations : en mots (oral et écrit), par le biais d'un graphique (oral et écrit), en termes de distance (oral) et d'inégalités strictes impliquant des valeurs absolues (écrit), en termes d'intervalles et de voisinages (oral et écrit). Cette tentative de rapprochement est à relativiser car elle reste orale et non écrite et que la distance dit/écrit est grande.

Même s'il prend en charge une partie de la structure logique de la définition de limite avec différentes reformulations (voir aussi phase 1), son ordre et l'apparition des quantificateurs sont entièrement à sa charge et sans lien avec les connaissances des étudiants. Ainsi, l'introduction de « $\exists\alpha > 0$ » semble retardée puis forcée par l'enseignant, étant donné qu'aucun élément de ses différentes reformulations ne permet de la motiver réellement. Ce sont des choix de mathématiciens motivés par des exigences hors de portée des étudiants, ensemblistes ou topologiques et par l'efficacité qui ont présidé à l'émergence de cette expression…

Un exemple d'application de la définition (phase 12)

Durant la phase 11, l'enseignant définit la limite finie d'une fonction en $+\infty$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall x \in Df, x > r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

qu'il reformule oralement en terme de distance avant d'écrire : autrement dit, aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle $]r; +\infty[$ sur lequel la distance de $f(x)$ à l est inférieure à ε. L'enseignant utilise dans cette définition la plupart des reformulations qu'il a introduites dans les phases 1, 3 et 6 ce qu'on peut interpréter comme une tentative de mise en cohérence des proximités horizontales qui y ont été mises en valeur. On peut penser aussi que cette mise en cohérence anticipe l'usage que l'enseignant va faire de cette définition dans la phase 12.

Dans la phase 12, l'enseignant propose de démontrer que « $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ », annonce qu'une « *méthode systématique* » va être utilisée puis écrit :

$\forall\varepsilon > 0\ \exists r > 0\ \forall x \in Df, x > r \implies |\frac{1}{x}| < \varepsilon$. Soit ε > 0 quelconque. On cherche $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ si $x > r$ alors $|\frac{1}{x}|$<ε. *J'écris donc si alors plutôt que l'implication. Alors est ce que ça vous semble possible et pour quelles valeurs de r ça marche ?*

Un étudiant répond, l'enseignant poursuit :

Eh oui, voilà $\frac{1}{\varepsilon}$ très bien. Alors la bonne manière de faire c'est de regarder la conclusion qu'on veut obtenir, on veut avoir cette propriété alors regardons à quelle condition on peut avoir ça, $|\frac{1}{x}|$<ε, comment on peut l'écrire ? Moi je voudrais avoir une condition qui s'écrit $x > r$ donc on a des nombres positifs donc qu'est ce qui se passe si on prend l'inverse ? La fonction inverse elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc c'est dire que

Il écrit : $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x$. Donc a fortiori $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Il commente : *Je cherche une implication, j'ai une équivalence donc si maintenant j'impose que x soit positif, ça, ça s'écrit... Alors est ce que je peux écrire ça, là on avait une équivalence et puis je rajoute une condition x positif. Donc j'ai plus une équivalence mais j'ai une inclusion de gauche à droite. Alors une fois qu'on a écrit les choses comme ça, qu'est qu'on prend pour r ? On cherche un r tel que si $x > r$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ et bien $r = \frac{1}{\varepsilon}$ ça marche d'accord ?*

Il écrit finalement : On pose $r = \frac{1}{\varepsilon}$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > r$ alors $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Pour cette démonstration, l'enseignant met en valeur le formalisme et la logique locale de la définition qu'il reformule en utilisant les connaissances supposées anciennes des étudiants sur les valeurs absolues et la fonction inverse. Ce faisant, il crée une proximité descendante possible vis-à-vis de la définition formelle. En fin de démonstration, il revient explicitement et oralement sur une méthode générale et féconde pour prouver ce type de résultat :

Donc qu'est-ce qu'il y a de général dans cette démarche ? C'est déjà de partir d'un epsilon positif quelconque et après d'avoir pour attitude de chercher r vérifiant cette propriété. Donc pour ça vous écrivez, vous tentez de réécrire la conclusion à laquelle vous voulez arrivez de manière à trouver une condition suffisante sur x, une condition de la forme x>r pour avoir cette conclusion, d'accord ?.

En quelque sorte, il tente de rendre la définition « procédurale », il faut se donner un epsilon et réaliser quelque chose ensuite qui est de l'ordre de la recherche d'une condition suffisante d'une forme souhaitée. En d'autres termes, il a introduit l'activité de définition formelle par le biais de reformulations (proximités horizontales) et la preuve d'un tel résultat demande une démonstration formelle qu'il tente de rapprocher (proximité descendante) d'une utilisation procédurale de la définition au sens où les étudiants peuvent traduire ce qu'il faut réaliser en termes de procédures associées à des connaissances qu'ils sont supposés maîtriser.

3.2.7. Bilan

Analyse du manuel et occasions de proximités

Dans le manuel étudié, la notion de convergence d'une suite numérique est présentée sans motivation, la nécessité de la nouvelle définition n'apparaît pas. Dans un cours oral, l'enseignant peut commenter, même brièvement, l'introduction de cette nouvelle notion, même si la motivation tient seulement à l'évocation du savoir mathématique, donnant ainsi une occasion de proximité horizontale globale. L'enseignant qui introduit cette définition peut aussi l'exprimer à voix haute tout en l'écrivant et commenter la définition en mettant en évidence l'ordre des quantificateurs par exemple, en la reformulant – souvent ces commentaires sont dits et pas écrits –, ces reformulations pouvant aussi être accompagnées de commentaires explicatifs de l'enseignant (rappels sur la manipulation d'inégalités avec valeur absolue, dessin[19] pour les illustrer), donnant ainsi des occasions de proximités horizontales locales.

La progression choisie par le manuel est de donner la définition puis de l'illustrer sur des exemples, offrant ainsi une occasion de proximité descendante. Cependant, cette occasion est selon nous « manquée » puisque rien n'est dit sur l'utilisation de la définition, ni sur la prise en compte de sa syntaxe logique dans les exemples traités. De plus, toutes les justifications sollicitant des connaissances anciennes sur les inégalités et sur l'ordre des réels sont laissées à la charge du lecteur.

Ainsi, dans le cas qui nous occupe (cours sur une notion FUG), le savoir présenté dans le manuel reste exclusivement « objet » puisqu'on n'a pas de commentaire sur « à quoi il sert » et comment, même s'il est utilisé ; tous les liens sont à construire par le lecteur (dont le manuel ne préjuge pas les connaissances déjà-là).

Analyse du cours magistral et proximités possibles

Les analyses du manuel et de la vidéo de FAD ont mis en valeur des occasions de proximités non exploitées. L'analyse du déroulement du cours magistral montre que certaines d'entre elles sont converties en proximités possibles locales par

[19] Robert (1983) a élaboré une séquence didactique visant à introduire la définition de convergence à partir d'un travail sur la représentation graphique de certaines suites. Une première représentation de la notion en terme de bande autour de la limite dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang peut émerger de ce travail avec l'aide l'enseignant.

l'enseignant. Si le caractère FUG de la définition de limite semble interdire à l'enseignant des liens complets avec les connaissances des étudiants, de nombreux indicateurs au sein de son activité discursive font état de proximités horizontales possibles avec les connaissances ou représentations anciennes des étudiants (soit par le biais de reformulations des définitions ou par la traduction de phrases logiques) mais aussi de proximités descendantes possibles dans les démonstrations.

Pour établir ces proximités, l'enseignant se base sur un formalisme progressif des diverses reformulations utilisées (mots, graphique, distances et valeurs absolues, voisinages…) et sur une mise en valeur de connaissances en logique (quantificateurs, méthodes de raisonnement, condition suffisante…) : en outre, il les accompagne de commentaires explicatifs, contrairement au manuel où certains passages étaient laissés à la charge du lecteur. On a cependant noté un certain nombre de paraphrases, qui ne permettent pas d'aborder des difficultés importantes, liées aux choix faits par les mathématiciens pour fixer cette définition de limite et pas à la traduction « mot à mot » de l'idée intuitive dynamique des étudiants. D'autre part, la plupart de ces proximités possibles sont dites et non écrites (grande distance en général entre le dit et l'écrit chez cet enseignant) ce qui peut relativiser leur portée : parmi ceux qui participent, on peut se demander qui est susceptible de profiter de ces commentaires ; sans doute faudra-t-il attendre les cours ou les travaux dirigés suivants les rendre opérationnels.

Discussion et bilan général

Dans notre étude, nous n'avons pas identifié de proximités ascendantes, ce qu'on peut interpréter de plusieurs manières. L'analyse du relief de la notion de limite et son interprétation comme notion FUG en particulier rend selon nous difficile la mise en place d'une situation permettant un recours à des proximités ascendantes naturelles, quel que soit le type de cours. Cette difficulté pourrait être encore accentuée par le choix du moment d'enseignement, à la transition secondaire/supérieur, et aux « *manières de faire les mathématiques* » à chacun des ordres (Corriveau, 2013).

Les analyses de la vidéo de FAD et du cours magistral ont mis en valeur les reformulations successives de la définition de limite utilisées par les deux enseignants. Dans le premier cas, les reformulations restent très proches de la définition formalisée écrite, celle-ci étant souvent traduite directement en mots et le symbolisme sous-jacent étant souvent lu de gauche à droite. Dans le deuxième cas, nous avons vu que les reformulations sont progressives, en lien avec certaines connaissances anciennes des étudiants et que le symbolisme de la définition est introduit selon une chronologie qui tient compte d'une partie de ses difficultés logiques. Les reformulations dans les deux types de cours ne sont donc pas de même nature : en termes de proximités, nous interprétons cela comme une occasion de proximité discursive partiellement manquée dans le cas de la vidéo de FAD et comme une proximité possible dans le cas du cours magistral.

Dans cette partie, notre objectif principal était d'illustrer notre méthodologie générale. Elle nous a permis d'identifier des différences entre les occasions de proximités (repérées par le chercheur) dans le manuel et la vidéo de FAD et des proximités possibles (repérées par le chercheur) dans le cours magistral, compte tenu de l'enseignant et du déroulement qu'il organise. Dans ce dernier cas, on peut se demander si ces proximités sont conscientes (ou pas) chez l'enseignant et questionner leur impact sur les étudiants. Enfin, une question se pose naturellement : parmi les nombreuses occasions de proximités identifiées, lesquelles retenir ? C'est le travail du chercheur en didactique des mathématiques que de mettre en valeur des choix de proximités à l'aune de différentes analyses et cela constitue sans doute une perspective prometteuse de nos travaux.

4. Bilan de l'étude, limites, discussion

4.1. Un bilan de l'étude proposée

4.1.1. L'importance de la prise en compte du contexte

Rappelons que toute analyse d'un cours doit être rapportée au contexte précis où il a eu lieu – il n'est qu'à lire ce qui est constaté en première année d'université pour apprécier les différences avec ce qui peut se passer au lycée sur la notion de limite, où sa présentation a des objectifs beaucoup moins formels, sur la même notion. Sont en jeu les programmes et les spécificités de la notion à enseigner, mais aussi la classe, l'enseignant et ses conceptions… Par exemple, selon le niveau de conceptualisation en jeu, on peut viser des connaissances mobilisables ou disponibles, que ce soit en termes d'outils et/ou d'objets, et c'est l'ensemble du cours qui en est affecté.

4.1.2. Étude locale croisée des contenus et des déroulements

L'hypothèse que nous avons développée induit qu'interviennent dans ce qui nous intéresse, à savoir les activités, même invisibles, des élèves, non seulement les choix de contenus des cours, mais aussi les discours effectivement tenus. Nous devons analyser par exemple le degré de généralité des énoncés, mais le rapporter aux exemples et exercices les accompagnant ainsi qu'aux commentaires qui sont tenus en même temps que les énoncés, aux échanges et questions auxquels cela donne lieu – que cela vienne ou non des élèves.

Plus précisément, nous donnons un rôle dans les acquisitions visées, aux proximités discursives que l'enseignant développe (ou non) pendant le cours. Nous avons en effet fait l'hypothèse que ces tentatives de rapprochements peuvent jouer comme un levier cognitif, d'autant plus que les élèves ont moins d'occasion de développer des activités autonomes pendant le cours. Ces proximités favoriseraient, on l'a dit, la conceptualisation attendue, à partir de la présentation de ce qui peut n'être d'abord que des pseudo-concepts pour les élèves. Il est donc important à nos yeux de les prévoir, puis de les repérer.

À ce titre, nous avons avancé que les passages contextualisé↔non-contextualisé (général), dans les deux sens, sont spécifiques des cours[20] de mathématiques et sont des occasions particulièrement propices à développer des proximités cognitives. Elles mettent en jeu des liens entre des activités, des connaissances déjà-là, ou presque déjà-là et des connaissances visées (avec notamment les liens ancien/nouveau, théorèmes et applications). Ces proximités sont associées au fait de rendre visible, explicite, ce qui est illustré, ou généralisé, et les relations précises entre contexte et non-contextualisé[21]. En effet une nouvelle notion, et particulièrement lorsqu'elle s'accompagne d'un nouveau formalisme, embarque un certain nombre d'éléments invisibles directement à partir des seuls mots ou des premières formules, avec un potentiel d'utilisation pour aborder des (nouveaux) problèmes, également en partie caché.

Dans le cas des proximités ascendantes, le chercheur essaie de comprendre ce qui est (pourrait être) ajouté par l'enseignant aux activités préliminaires pour éclairer la montée en généralité, le repérage de ce qui est en jeu dans la nouvelle notion en regard de la version contextualisée travaillée.

Dans le cas des proximités descendantes il s'agit de traquer le repérage (explicite) de ce qui est variable dans l'expression générale, non-contextualisée et de ce qui ne l'est pas, ainsi que les remplacements et substitutions à faire quand on passe à une contextualisation de l'expression générale. Les proximités descendantes ont pour objectif d'aider les élèves, au cours d'exercices d'application voire d'exemples, en accompagnant leur application en contexte et à éprouver le potentiel de la notion (et des formules).

Il se peut que l'analyse du relief indique qu'il est difficile d'introduire une proximité ascendante – on évoquera une proximité impossible, voire en partie un peu illusoire si elle est tentée. Il se peut qu'au contraire une occasion de proximité soit manquée aux yeux du chercheur. On en a vu des occurrences dans l'exemple des représentations graphiques en troisième et pour les limites en L1.
De plus, des éléments explicites sur des parties générales, non-contextualisées, non transformables en activités immédiates, peuvent participer à maintenir les élèves dans une forme d'activité : le cours est presque le seul moment où l'enseignant peut expliciter des éléments liés à une vue globale de ce qui est en jeu, où il peut dégager des relations entre notions, dégager ainsi leur organisation ; il peut aussi dévoiler la structuration de l'exposition des connaissances en cours, ou même référer à la genèse

[20] Même s'il y en a aussi dans les moments d'exercices, mais plus dispersés, et toujours initiés par le contextualisé.
[21] En général de l'ordre des commentaires méta, plus ou moins généraux eux-aussi.

du savoir en jeu et aux démarches à l'œuvre. On évoque des proximités horizontales globales. De plus on suppose qu'un certain nombre d'explications, d'échanges enseignant-élèves plus locaux, sans changement de niveau de généralité de ce qui est en jeu, jouent aussi un rôle dans le maintien dans l'écoute (et dans l'activité). On évoque des proximités horizontales locales. Elles servent également à renseigner l'enseignant sur cette écoute, contribuant à entretenir une certaine proximité entre les acteurs, peut-être pas directement cognitive, mais nécessaire. Cela peut aussi éclairer les objectifs à atteindre pour les élèves. On en a vu des exemples dans les différents cours sur les limites.
Reste à savoir dans quelle mesure ces interventions s'inscrivent dans le reste des activités des élèves, et participent à la compréhension visée. Sans même évoquer les notions éloignées des connaissances antérieures (FUG) pour lesquelles il nous semble d'emblée difficile de développer des proximités ascendantes, il pourrait y avoir des proximités engagées par des questions de l'enseignant, faisant référence à des questionnements théoriques (ou technologiques) non « obligatoires ».

4.2. Des limites théoriques

Plus généralement la notion même de pseudo-concept s'applique plutôt à des concepts quotidiens, pour des petits enfants – nous l'appliquons à des concepts scientifiques en réseaux, pour des élèves plus âgés... De plus les pseudo-concepts introduits par Vygotski, sont associés souvent seulement à des mots et des idées, à partir d'actions concrètes : le concept mathématique associé aux mots, et souvent il y a plusieurs mots en jeu, est, lui, porteur de sens, de techniques, il peut faire intervenir du symbolisme, il y a même souvent plusieurs représentations associées et il n'est jamais isolé. Cela justifie l'attention que nous portons à tout ce qui accompagne le texte du savoir, à plusieurs niveaux, exprimé dans différents registres pour illustrer les différents aspects du concept.

D'autre part toute cette élaboration théorique s'appuie sur une tentative d'opérationnaliser la ZPD – mais les ZPD sont des caractéristiques individuelles, et il s'agit de cours à une classe – y aurait-il lieu d'introduire une notion de ZPD « moyenne » ?
Quel est le rôle du collectif dans les moments de cours – cf. échanges provoquant des proximités ? Quelles différences entre les élèves ?

De même qu'il y a des différences dans les différentes parties des cours, qui n'alimentent pas les mêmes aspects des connaissances, de même il est vraisemblable qu'il y a des différences entre les élèves concernant les processus d'apprentissage. Par exemple l'expérience montre que certains élèves ont du mal à entrer directement dans un cours décontextualisé, d'autres en revanche ont du mal à s'intéresser à un exercice dont ils ne comprennent pas (encore) la finalité.

4.3. Une discussion didactique

Pourquoi ne pas se contenter de la notion d'institutionnalisation (introduite en TSD, notamment pour le primaire, et très répandue hors de son contexte initial) et lui préférer le mot exposition des connaissances ? Cela tient à ce que nous adoptons un point de vue plus général que celui de la TSD, lié aux pratiques effectives… sur toutes les notions. Nous pensons qu'il n'y a pas toujours lieu d'utiliser le mot dans son sens initial, précis.
En fait d'une part, c'est tout un processus d'institutionnalisation qui est en jeu, qui n'est pas présent dans nombre de séances ordinaires. Du reste en TSD, il reste aussi des interrogations sur la manière précise et la possibilité de mener à bien la phase finale d'institutionnalisation qui nous concerne ici (Mounier, 2010, Allard, 2015).
D'autre part, en lien avec les différents types de notions, déjà évoqués, la notion d'institutionnalisation est peut-être trop restrictive pour rendre compte de tout ce qui se fait ou de ce qui peut être fait en cours. « *On ne peut pas regarder le cours de la même manière s'il vient en synthèse d'une situation qui mettait en jeu le contenu ou s'il vient avant…* [22]».

Par ailleurs la TSD a amené à travailler l'institutionnalisation à partir de la décontextualisation et de la dépersonnalisation des savoirs (nous regroupons les deux qualités sous le terme de « non-contextualisé »), à partir des activités antérieures des élèves. Ainsi, après une recherche des élèves sur un problème, accessible, où la mise en œuvre du savoir visé par les élèves est incontournable, voire si possible contrôlable par les seuls élèves, suivie d'une synthèse du travail des élèves, les enseignants dégagent, en s'appuyant sur cette synthèse le savoir décontextualisé, légitime, général, à retenir et réutiliser. Le mot « décontextualisé » a alors son sens propre, « issu d'un contexte », « généralisé ». En fait lui aussi est souvent utilisé de manière plus large, comme synonyme de « général ».
Nous utilisons le mot « non-contextualisé » pour nous démarquer de l'indication implicite d'un travail contextualisé, antérieur à l'énonciation du savoir.

4.4. Des questions globales qui restent posées

Comment savoir qu'une (ou un ensemble de) proximité(s) a (ont) été active(s) dans un processus de conceptualisation ?
Comment apprécier les moments de cours dans l'ensemble d'un scénario ?

Qu'attend-on des élèves comme travail sur le cours ? Qu'est-ce que les élèves attendent des cours ?
Y a-t-il des différences selon les différents supports utilisés dans les cours (vidéos[23], TNI, polycopié à trous, sans trous, manuels…) ?

[22] Communication privée MJ Perrin.
[23] Une étude est en cours sur la classe inversée.

Quid du travail « hors-classe » ?

Cela rejoint des questions plus larges et notamment celles-ci : quel profil d'élèves est visé dans la scolarité obligatoire ? À quelles différences d'objectifs, voire de potentialités des élèves, peuvent être liées les alternatives, dans la forme, la durée, les modalités des cours, voire des programmes ?

5. Conclusions et perspectives

Nous ne répondrons pas aux questions ci-dessus mais nous indiquons des pistes pour avancer la réflexion dans certaines de ces directions.

5.1. Une vision globale dans un cours : perspective de recherches ultérieures

À un niveau global, faire cours engage inévitablement des choix (ou des compromis ?), plus ou moins prévisibles, en tension, entre la présentation d'un exposé cohérent, général, donnant à voir le jeu auquel on joue dans ce chapitre des mathématiques, abordant des aspects du pourquoi ou du pour quoi (cf. proximités horizontales non locales, ou ascendantes), provoquant des interrogations, avec une ambition en termes de compréhension, et celle d'un exposé plus directement applicable et peut être plus utile aux élèves, abordant les aspects liés au comment faire (cf. proximités descendantes ou horizontales locales).

Tout se passe comme si deux niveaux de pensées étaient « activés » liés à deux logiques :

- une logique un peu globale, liée au sens, à l'organisation des idées entre elles, à l'adoption plus ou moins implicite d'un mode de validation mathématique. On pourrait évoquer une logique épistémologique, voire heuristique, qui mettrait en jeu des réponses à des questionnements explicites ou non, d'ordre théorique ou technologique.
- et une autre plus « scolaire », plus locale, plus liée aux contrats, liée à la volonté de faire mémoriser les mots et les phrases, de faire suivre localement les justifications, d'armer les futures utilisations (y compris techniques). On pourrait évoquer une logique « procédurale » qui mettrait en jeu des réponses à des questions techniques, explicitées ou non.

Il peut y avoir tension car suivre la deuxième logique peut faire perdre le fil aux élèves, voire être (très) ennuyeux, tout en les rassurant en partie, privilégiant un apprentissage procédural et des réponses sur le « comment », mais suivre la première peut avoir aussi pour conséquence de perdre les élèves, notamment au moment du retour aux applications strictement mathématiques, en « séduisant » certains et en ennuyant d'autres élèves. Le recours à des éléments un peu externes aux mathématiques, faisant intervenir l'intelligence « ordinaire », le langage familier, ou à des éléments historiques, l'énoncé d'éléments non directement utilisables, peuvent être bien reçus ou le contraire : on a tous l'expérience de ces élèves qui lèvent leur stylo quand « ça ne sert pas » et, a contrario, de ces yeux qui s'allument quand on s'évade du strict contexte.

Participent notamment à ces choix les niveaux de langage et de généralité adoptés, ainsi que la nature des commentaires ajoutés et le choix des proximités développées. Ainsi les études précédentes des choix de contenus (avec le statut des connaissances, la traque de ce qui ne sert pas) et des différentes proximités possibles détectées pourraient amener à détecter les traces de ces deux logiques qui se combinent différemment dans les cours.

Ajoutons que les évaluations choisies par les enseignants font partie du tableau global qu'on peut dresser pour comprendre mieux ce que peut apporter un cours dans l'ensemble d'un scénario : y compris pour apprécier dans quelle mesure ce sont les évaluations qui président à certains choix dans les cours ou l'inverse, quand les évaluations sont fonctions de ce qui aura été fait...

5.2. Des entretiens avec les enseignants et les élèves : une autre piste

Des entretiens avec des enseignants pourraient compléter ce qui est inféré des vidéos à ce sujet – complétés par des questionnaires des élèves (notamment de ces enseignants), sur les cours. C'est un premier moyen d'approcher à la fois ce que les enseignants attendent des élèves et la manière dont les élèves reçoivent le cours et en conçoivent l'utilisation : un certain nombre de questionnaires de ce type ont déjà été dépouillés et d'autres sont en cours de réalisation (Bridoux et al, 2015). Nous avons constaté que les interrogations portent souvent sur les choix difficiles, à repenser chaque année, de ce qu'on choisit d'exposer, sur l'insertion de ces moments dans le reste des activités et sur ce qu'on attend des élèves.

Cela confirme à la fois la diversité des points de vue des enseignants et leur auto-questionnement (cf. logiques en tension).
Du côté des difficultés des élèves, ils se demandent souvent à quoi sert ce moment de « cours », comment concilier écoute, compréhension et prise de notes (de façon à garder une trace jugée indispensable). Dans le questionnaire correspondant (ibidem), une question tentant de faire associer le qualificatif « général » aux théorèmes et définitions n'a pas du tout été comprise. Un certain nombre d'élèves semble ne pas non plus apprécier autant les activités préparant le cours que les exemples ou exercices résolus donnés pendant ce dernier. Pour eux très majoritairement l'étude du cours est assimilée à l'acquisition de ce dont ils ont besoin pour la résolution des exercices, tout particulièrement pour les contrôles.
Cela rejoint notre intérêt pour les proximités ascendantes et horizontales non locales, dont l'effet reste à tester.

5.3. Conclusion

Le cours proprement dit serait un réservoir de pseudo-concepts à retenir et à travailler pour les transformer en concepts, ce qui met en jeu un temps long et tout le scénario concerné. Nous avons évoqué différents outils pour étudier les contenus des cours, et d'autres, très liés au repérage de ces contenus, pour étudier les discours effectifs, dont les proximités discursives.

Suivant cette hypothèse et les perspectives envisagées, plusieurs conditions joueraient, selon les cas, pour que des éléments donnés en cours puissent être appropriés, transformés par chaque élève en connaissances individuelles (éventuellement disponibles) :

- l'inscription des moments d'exposition dans le reste du scénario, en termes de cohérence, de liens et de dynamiques, mettant notamment en jeu les activités des élèves, avant ou après,
- le déroulement choisi et les explicitations des passages du contextualisé au décontextualisé ainsi que les reformulations, reprises, répétitions et commentaires sur le décontextualisé, impliquant plus ou moins les élèves (appréciées en termes de proximités discursives réalisées)
- les logiques globales récurrentes, imbriquées, procédurale ou épistémologique, développées à l'oral, sur l'ensemble d'un chapitre, voire sur l'année.

En particulier ce serait de la qualité et des variétés des tâches proposées et du jeu des proximités développées, notamment en cours, y compris improvisées, ajustées aux élèves, que dépendraient la compréhension, la richesse et l'apprentissage de ce qui peut être mis en mémoire et la possibilité de mobiliser correctement les savoirs correspondants.

Cela demande une grande disponibilité des enseignants, notamment pour improviser des proximités alors même que ce qui est en jeu est peut-être naturalisé pour lui (transparent, non objet de questionnement – cf $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Pour avancer, il manque une étude de davantage de cours, et une mise en relation peut-être indirecte avec des effets sur les élèves – ou au moins des hypothèses à ce sujet. Des recherches complémentaires sont à mener, en faisant varier les contenus étudiés, les élèves, les enseignants, en interrogeant les élèves à la sortie d'un cours, en comparant des productions d'élèves et leur cours... On peut aussi penser à comparer les occasions de proximités repérées par les chercheurs et les proximités possibles développées par les enseignants et réfléchir aux raisons des différences dans des recherches collaboratives…

Bibliographie

ALLARD C. (2015), *Étude du processus institutionnalisation dans les pratiques d'enseignants de fin d'école primaire : le cas des fractions*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot.

BRIDOUX S. (2011), *Enseignement des premières notions de topologie à l'université - Une étude de cas.* Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).

BRIDOUX S., CHAPPET-PARIES M., GRENIER-BOLEY N., HACHE C. & ROBERT A. (AVEC LA COLLABORATION DE LEVI, M.C. ET PILORGE F.) (2015), Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz,* n°14, Juillet 2015.

BRIDOUX S. (2016), Introduire la notion de convergence avec une ingénierie didactique des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant ?, *Actes du colloque INDRUM,* Montpellier.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D. & PEZARD M. (2003), Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherche en Didactique des mathématiques* **23.1**, 41-78, Grenoble, La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (1991), Sur la déconcertation cognitive. *Interactions didactiques* **12**, 27-51.

CORRIVEAU C. (2013), Explicitation des ethnométhodes mathématiques des enseignants du secondaire et du postsecondaire pour mieux comprendre les enjeux de transition. Dans N. Bednarz (dir.) *Recherche Collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement,* L'Harmattan, Paris, 231-263.

DIEUDONNE M., DRONIOU J., DURAND-GUERRIER V., RAY B. & THERET D. (2011), Bilan de praticiens sur la transition lycée-université. *Repères-IREM* **85**, 5-30.

DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7/2**, 5-31.

DROUHARD J.P. (1992), *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire,* Thèse de Doctorat, Université Paris 7, éditée par l'IREM de Paris, Paris.

DURAND-GUERRIER V. (2013), Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

GUEUDET G. (2008), Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. *Actes de la XIII*ème *école d'été de didactique des mathématiques*, 159-175.

HACHE C. (A PARAITRE), Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques, in *Actes du 20e colloque de la CORFEM, juin 2014,* Grenoble.

JOB P. (2013), Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations, in COPPE S. et HASPEKIAN M. (2013) *Actes du séminaire national de didactique des Mathématiques, année 2013*, édité par l'IREM de Paris, Paris.

MARGOLINAS C. (2015), Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie* **188**, 13-22.

MOUNIER E. (2010), *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse de Doctorat, Université Paris-Diderot (Paris7).

PARIES M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques. Relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **24 2-3**, 251-284.

PETROPOLOU G., JAWORSKI B., POTARI D. & ZACHARIADES T. (2016), Addressing large cohorts of first year mathematics students in lectures. *INDRUM 2016 Proceedings.*

PRZENIOSLO M. (2005), Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. *Educational Studies in Mathematics* **60 1**, 71-93.

ROBERT A. (1982), L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **3.3**, 307-341.

ROBERT A. (1983), L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* **340**, 431-449.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18/2**, 139-190.

ROBERT A. & POUYANNE N. (2004), Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation. *Document pour la formation d'enseignants de mathématiques (bleu) n°5*, IREM Paris-Diderot.

ROBERT A. & ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.2**, 145-176.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies* Vol 2 (4), 505-528.

ROUSSE S. Thèse en cours, Université Paris Diderot.

ROBERT A. & VANDEBROUCK F. (2014), Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **34 2-3**, 239-285.

TENAUD I. (1991), *Une expérience d'enseignement de la géométrie en Terminale C : enseignement de méthode et travail en petits groupes.* Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2**, 133-170.

STEPHANIE BRIDOUX
LDAR (EA 4434)
Université de Mons (Belgique)
stephanie.bridoux@umons.ac.be

NICOLAS GRENIER-BOLEY
LDAR (EA 4434)
Université de Rouen (France)
nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr

CHRISTOPHE HACHE
LDAR (EA 4434)
Université Paris-Diderot (France)
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

ALINE ROBERT
LDAR (EA 4434)
Université Cergy-Pontoise (France)
aline.robert@u-cergy.fr

ZOE MESNIL

UN RETOUR DE NOTIONS DE LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES POUR LE LYCEE : UN NOUVEAU SAVOIR A ENSEIGNER

Abstract. Logic in high school syllabuses, a knowledge to be taught, With the resurgence of logical concepts in new syllabuses, a *knowledge to be taught* appears more explicitly than it did in previous years. This led me to study the teaching of logical concepts in high school as the study of a didactical transposition process. But because the goal is not to teach mathematical logic, but to teach logical tools for mathematical activity, I propose to introduce into the didactical transposition's scheme a *reference knowledge* between the *mathematical knowledge* (mathematical logic) and the *knowledge to be taught*. In this article, I am showing through the example of the implication, which aspects of logical concepts it would be relevant to take into account in such a knowledge, and I rely on the criteria established to construct a framework for analyzing syllabuses and textbooks.

Résumé. Avec la réapparition de notions de logique dans les nouveaux programmes, un *savoir à enseigner* est dessiné de façon plus explicite que dans les années précédentes, ce qui m'a amenée à étudier l'enseignement de notions de logique au lycée en termes d'étude d'un processus de transposition didactique. Mais parce que l'objectif n'est pas d'enseigner la logique mathématique, mais d'enseigner des outils logiques au service de l'activité mathématique, je propose d'introduire dans le schéma de la transposition didactique un *savoir de référence* intermédiaire entre le *savoir savant* (la logique mathématique) et le *savoir à enseigner*. Dans cet article, je montre à travers l'exemple de l'implication quels aspects des notions de logique il serait pertinent de prendre en compte dans un tel savoir, et je m'appuie sur les critères dégagés pour construire une grille d'analyse des programmes et des manuels.

Mots-clés. logique, implication, lycée, transposition didactique.

Introduction

Si tout le monde est d'accord sur le fait qu'il faut user de logique quand on fait des mathématiques, il n'y a, en revanche, pas de réponse consensuelle et pérenne à la question de l'enseignement de cet usage. À l'époque des mathématiques modernes (entre 1960 et 1980), on a pensé que cela passait par un enseignement de logique mathématique, notamment au lycée. Les quelques personnes qui s'intéressaient particulièrement à cette question dans la communauté didactique naissante ont d'une part commencé un travail d'identification des erreurs récurrentes des élèves, d'autre part prévenu des limites d'une approche trop formelle pour y remédier : une leçon de logique ne peut être efficace qu'« à condition que cette logique soit bien présentée comme métamathématique, c'est-à-dire que sa relation aux mathématiques soit constamment présente » (Adda, 1988, p.20). Ces réflexions et expérimentations sur

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 235 - 266.

un enseignement de logique mathématique au service de l'activité mathématique n'ont cependant pas pu être poursuivies puisque la logique mathématique a été exclue des programmes de la contre-réforme (autour de 1980) dont les rédacteurs voulaient marquer une rupture avec les mathématiques modernes. Mais avec cette éviction, c'est également l'enseignement de la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique, que j'appelle *logique des mathématiques* pour la différencier de la logique mathématique, qui a en grande partie disparu, comme le décrit V. Durand-Guerrier :

> Pratiquement absente aujourd'hui des curricula français, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est également le plus souvent absente du discours du professeur. Pour autant, les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence. (Durand-Guerrier, 2005, p.5)

En ce qui concerne le lycée, la situation est possiblement en train de changer : dans le nouveau programme pour la classe de Seconde publié en juillet 2009 (et dans ceux qui ont suivi en 2010 pour la classe de Première et en 2011 pour la classe de Terminale), des notions de logique sont de nouveau explicitement citées. Il y a donc actuellement une demande institutionnelle, et j'ai mené une étude didactique pour l'analyser et étudier sa mise en œuvre. Cette étude est l'objet de ma thèse intitulée *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'expression* (Mesnil, 2014), dont je vais en partie rendre compte dans cet article.

Dans la première partie, j'argumenterai le choix de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1991) pour étudier l'enseignement de la logique au lycée en termes d'étude d'un processus de transposition didactique. Parce qu'il ne s'agit pas d'enseigner le savoir savant qu'est la logique mathématique, j'ai proposé de penser la transposition didactique des notions de logique au lycée en introduisant un *savoir de référence* (Rogalski et Samurçay, 1994). Une difficulté majeure apparaît tout de suite : un tel savoir de référence n'existe pas au sens d'un corpus qui fasse consensus dans la communauté mathématique. En m'appuyant sur une étude épistémologique et didactique, j'ai mis au jour dans ma thèse des caractéristiques pertinentes d'un tel savoir et j'ai constitué un corpus dans lequel les notions de logique sont abordées sous trois angles : celui de la logique mathématique, celui des pratiques langagières des mathématiciens, celui des difficultés des élèves. Je montrerai alors, à travers l'exemple de l'implication, comment ce corpus constitue une référence pour la suite de mon étude, l'étude du *savoir à enseigner*.

La deuxième partie de l'article sera consacrée à l'étude de la place de la logique dans les programmes de Seconde et dans les documents qui les accompagnent depuis 1960. J'y mettrai en évidence les similitudes et les différences entre deux périodes : la période des mathématiques modernes (entre 1969 et 1981), et la période actuelle (depuis 2009).

L'étude de ces programmes montre que les instructions officielles actuelles sont imprécises, et ne donnent que peu d'éléments pour outiller les enseignants face à la complexité des notions de logique. Dans la troisième partie de cet article, je présenterai une étude des manuels actuels, en les regardant comme éléments qui participent à dessiner le savoir à enseigner (peut-être encore plus dans ce contexte de nouveauté, car les enseignants disposent de peu de s), mais également comme éléments révélateurs de choix d'organisation didactique qui permettent de faire des hypothèses sur les pratiques des enseignants.

1. Caractéristiques d'un savoir de référence pertinent pour l'enseignement de notions de logique au lycée

1.1. Une nécessaire adaptation du schéma de la transposition didactique

Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009 présente par rapport au précédent programme une nouveauté pour l'enseignement de la logique dans la classe de mathématiques : il y figure le tableau ci-après (figure 1) fixant des objectifs concernant divers éléments de logique. Ces éléments sont régulièrement rencontrés dans l'activité mathématique, et leur utilisation par un individu nécessite des connaissances logiques (connaissance au sens de Margolinas, 2012, « ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation »). Le programme stipule donc que l'enseignement de ces connaissances fait partie de l'enseignement des mathématiques. Ces connaissances sont en lien dialectique avec le savoir logique des mathématiciens (savoir toujours au sens de Margolinas, 2012, « construction sociale et culturelle qui vit dans une institution »). Le programme de 2009 détermine ainsi « un contenu de savoir […] désigné comme savoir à enseigner » (Chevallard, 1991, p.39). Ce changement rend d'autant plus intéressante l'approche de la Théorie Anthropologique du Didactique et l'étude de l'enseignement de notions de logique au lycée en terme d'étude d'un processus de transposition didactique, c'est-à-dire de l'« ensemble [des] transformations adaptatives qui vont rendre [ce savoir] apte à prendre place parmi les *objets d'enseignement* » (*Ibid.*). Notamment, le programme, le document *Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques* qui l'accompagne et les manuels de Seconde publiés en 2010 constituent un ensemble consistant de données permettant une analyse de la partie externe de la transposition, aboutissant à la constitution du *savoir à enseigner*.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Figure 1 : Tableau des objectifs sur les notions de logique, Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique, BO n°30 du 23/07/2009

Notons cependant que les auteurs du programme de 2009 réservent aux notions de logique un traitement différent d'autres notions au programme. Par exemple, la notion d'échantillon[1] est un « contenu »[2] du programme, associé à des « capacités attendues » – comme « exploiter et faire une analyse critique d'un résultat d'échantillonnage » – et accompagné du « commentaire » suivant : « un échantillon de taille *n* est constitué des résultats de *n* répétitions indépendantes de la même expérience ». Les notions de logique par contre ne sont pas présentées comme des contenus et ne sont pas accompagnées d'un commentaire qui en donnerait ce qui pourrait être une définition au niveau du lycée. La notion d'échantillon est clairement repérée dans un savoir savant (la statistique), les concepteurs de programmes s'en saisissent et en font un objet d'enseignement. Pour les notions de logique, le statut d'objets mathématiques qu'elles ont au sein de la logique mathématique ne semble pas être une référence. La transposition didactique à étudier n'est donc pas celle d'un contenu de savoir repéré dans le savoir savant qu'est la logique mathématique, mais d'un contenu de savoir repéré dans ce que j'ai déjà appelé dans l'introduction la

---

[1] La notion d'échantillon est un nouvel objet d'enseignement dans le programme de Seconde de 2009, même si cette notion était déjà présente comme thème d'étude possible dans le programme précédent.

[2] Les termes « contenu », « capacités attendues » et « commentaires » font référence à la présentation classique des programmes en trois colonnes.

logique des mathématiques. Cette logique des mathématiques, partagée par la communauté, est visible dans les pratiques des mathématiciens plutôt que dans des traités. J'emprunte alors à J. Rogalski et R. Samurçay la notion de *savoir de référence* :

> Dans le domaine étudié, on assiste au déroulement d'un processus de construction d'un corps de savoir de référence à partir d'un ensemble de « savoirs en acte » manifestés dans des pratiques. Ce processus consiste à identifier des catégories d'objets et de traitements communes à des pratiques efficaces, qui sont quant à elles spécifiques de situations, contextualisées et personnalisées. (Rogalski et Samurçay, 1994, p.43)

C'est en tant que transposition d'un tel savoir de référence, qui serait une institutionnalisation de ce « savoir logique en acte », que je propose d'étudier le savoir à enseigner au lycée relatif aux notions de logique. J. Rogalski et R. Samurçay précisent ensuite qu'il est nécessaire que ce savoir de référence puisse « s'exprimer avec ses concepts, ses méthodes, ses systèmes de représentations et son langage » (*ibid.*, p.46). Or, bien que chaque mathématicien soit sans doute capable de décontextualiser, de dépersonnaliser les connaissances logiques qu'il met en œuvre, il n'existe pas dans la communauté mathématique un « savoir de référence pour la logique des mathématiques » qui fasse consensus dans le choix des concepts qui y figurerait et dans le niveau de formalisation du discours sur ces concepts. J'ai alors cherché à déterminer des caractéristiques épistémologiques et didactiques qui seraient pertinentes pour la constitution d'un tel savoir, et je me suis appuyée sur ces caractéristiques pour proposer une référence, c'est-à-dire un corpus sur les notions de logique présentes au lycée.

1.2. Caractéristiques d'un savoir de référence pour les notions de logique, et principes pour la constitution d'une référence

L'étude de divers systèmes logiques à travers l'histoire m'a permis de dégager des invariants et des différences dans le rôle assigné à la logique et dans les moyens qui lui sont donnés pour le remplir, que j'ai organisés selon quatre axes : le travail sur le langage, la validité des raisonnements, la nécessaire formalisation et la dialectique entre syntaxe et sémantique. L'étude de travaux didactiques montre comment les questions relatives à l'enseignement de la logique résonnent avec les préoccupations et les choix de ces différents logiciens. Je présente ici quelques grandes lignes des résutats de ces études, importantes pour situer les choix faits dans la constitution d'une référence (pour plus de détails, voir Mesnil, 2014, pp. 95 à 102).

Tous ces systèmes logiques sont construits à partir d'un travail sur le langage. La notion de proposition y est primordiale. Aristote la décrit en termes de sujet-copule-prédicat, et il a fallu attendre Frege pour qu'à la fin du XIX^{e} siècle, cette analyse soit remplacée par une analyse en termes de fonction et argument qui permet deux choses essentielles pour le langage mathématique : d'une part de considérer des prédicats (propriétés) à plusieurs places, d'autre part de sortir l'opération de quantification de la proposition en la faisant porter par des quantificateurs qui agissent sur des variables. La logique des prédicats qui naît alors est ainsi en mesure de modéliser les propositions mathématiques[3]. Du point de vue didactique, J. Adda avait déjà souligné au moment des mathématiques modernes que les mathématiques ne peuvent se traiter sans se placer à l'intérieur du calcul des prédicats et que les questions de quantifications étaient trop peu présentes dans la classe (Adda, 1975). Depuis sa thèse sur l'implication, V. Durand-Guerrier a montré de nombreux exemples de situations dans lesquelles la logique des prédicats est une théorie de référence pertinente pour l'analyse didactique (Durand-Guerrier, 1996), et dans la communauté didactique francophone, plusieurs travaux sur différentes notions de logique reprennent cette hypothèse de travail (Rogalski et Rogalski, 2004 et Deloustal-Jorrand, 2004 sur l'implication, Chellougui, 2004 sur les quantificateurs, Ben Kilani, 2005 sur la négation).

Le langage actuel des mathématiciens s'inspire du formalisme de Frege, mais n'est en aucun cas une utilisation stricte d'un langage formel. S'intéressant particulièrement aux problèmes langagiers dans l'enseignement des mathématiques, C. Laborde montre qu'il y a un usage particulier de la langue en mathématiques, dû à l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle (Laborde, 1982). Cette interaction permet aux mathématiciens d'avoir recours à des reformulations fécondes pour la conceptualisation. Les enseignants ont une pratique familière des particularités du langage des mathématiciens, mais elles peuvent poser des difficultés aux élèves, qui « découvrent en même temps les concepts et la façon dont on en parle » (Hache, 2015, p. 28). Selon S. Epp, il faut une attention particulière pour que les étudiants acquièrent la maîtrise du langage suffisante pour l'activité mathématique (Epp, 1999).

Dans les systèmes logiques étudiés, le travail sur le langage est un préalable à celui sur le raisonnement : leur but commun est bien d'assurer la validité de celui-ci. De la même façon, et particulièrement dans une perspective didactique, l'étude de notions de logique en tant que constituant du langage mathématique est à articuler avec leur utilisation dans le raisonnement. Dans la référence que j'ai constituée, j'ai

[3] J'appelle « proposition mathématique » tout énoncé qui dit un (ou des) fait(s) sur un (ou des) objet(s) mathématique(s). Une proposition mathématique est susceptible d'être vraie ou fausse. Ainsi, « 3 est impair » est une proposition vraie, « 2 est impair » est une proposition fausse, « n est impair » est une proposition pour laquelle cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question par manque d'information sur n. Ce choix est différent de celui de certains auteurs qui appellent « proposition » seulement les deux premières (qui sont des propositions closes), il a pour but de renforcer la similitude entre ces trois énoncés : ce sont des phrases qui parlent d'objets mathématiques, la première de 3, la deuxième de 2, la troisième d'un objet qui s'appelle n.

choisi de donner une place centrale au langage au détriment du raisonnement. Entrer dans la logique par le langage est cohérent avec l'étude épistémologique, lui accorder une place importante est cohérent avec les travaux didactiques. Le fait que cela soit au détriment du raisonnement est lié essentiellement à deux raisons : tout d'abord à des questions de temps (mais la référence constituée a vocation à être enrichie, notamment du côté du raisonnement), ensuite, à une volonté de réhabiliter les liens entre langage et logique, celle-ci étant plus spontanément associée au raisonnement.

Finalement, ces études épistémologique et didactique m'ont amenée à proposer une référence dans laquelle la présentation des notions de logique combine trois approches :

- la logique mathématique. C'est une branche récente des mathématiques qui peut être considérée comme un aboutissement de ce qu'ont cherché à faire différents concepteurs de systèmes logiques depuis l'Antiquité grecque, et qui est particulièrement adaptée comme référence formelle pour rendre compte de la logique des mathématiques. Propositions, variables, connecteurs, quantificateurs sont présentés en tant qu'élements du langage mathématiques, sous un double aspect syntaxique et sémantique.
- l'étude des pratiques langagières des mathématiciens. J'ancre ainsi la présentation de ces notions de logique dans l'activité mathématique en prenant en compte la façon dont elles sont exprimées dans le discours mathématique, en utilisant la logique des prédicats pour mettre au jour certaines formulations complexes et parfois ambiguës qui font pourtant partie des pratiques langagières des mathématiciens, largement importées dans la classe de mathématiques.
- des travaux didactiques. J'ancre ainsi la présentation de ces notions de logique dans la classe de mathématiques, en prenant en compte les difficultés que la complexité de ces notions peut amener chez les élèves.

Cette référence (que j'évoquerai en disant simplement *la référence*) n'est pas un savoir de référence puisqu'elle n'est pas partagée et reconnue par la communauté mathématique. Elle pourrait cependant contribuer à la construction d'un tel savoir.

1.3 L'exemple de l'implication dans la référence

L'implication est un élément majeur dans l'activité mathématique. Elle est à l'articulation entre le langage et le raisonnement : de nombreux théorèmes sont formulés sous la forme d'une implication, il faut les démontrer, et pour cela, nous utilisons fréquemment dans nos raisonnements d'autres implications que l'on sait vraies. Je vais présenter ici cette notion à partir des trois approches que j'ai décrites. Parce qu'il y a beaucoup à dire, même à l'intérieur de chaque approche, cette présentation peut donner l'impression d'être une longue liste de points sensibles associés à cette notion, pour la plupart déjà évoqués dans d'autres écrits. Mais c'est justement cette multiplicité des points de vue, et cette volonté de faire le tour des points sensibles, qui permet à la référence d'être opérationnelle, à la fois comme outil d'analyse du chercheur, et comme ressource pour l'enseignement et la formation.

1.3.1. Approche à partir de la logique mathématique

Du point de vue mathématique, le mot *implication* recouvre plusieurs objets différents : le connecteur IMPLIQUE, la proposition formée en faisant opérer ce connecteur sur deux propositions P et Q[4] (ce qui donne la proposition P⇒Q, ce que pour ma part j'appellerai implication), mais aussi la proposition obtenue en faisant opérer ce connecteur sur deux propositions P[x] et Q[x] dans lesquelles la variable x est libre, et en lui associant une quantification universelle portant sur la variable x (ce qui donne la proposition « pour tout x, P[x]⇒Q[x] », que j'appellerai implication universellement quantifiée). Dans une preuve, nous adoptons deux positions par rapport à la manipulation des implications : nous sommes parfois utilisateur d'une implication (elle sert alors à justifer une inférence), nous sommes parfois démonstrateur d'une implication (elle est alors la conclusion d'une inférence).

Le connecteur binaire IMPLIQUE permet, à partir de deux propositions P et Q, de former la proposition P⇒Q (c'est l'aspect syntaxique d'opérateur sur les propositions commun à tous les connecteurs). Il est caractérisé du point de vue sémantique par la table de vérité ci-après (figure 2).

Les deux dernières lignes de cette table posent souvent problème. Plusieurs arguments permettent de les justifier, je n'en donnerai qu'un ici, celui qui illustre le mieux à mon sens la cohérence de ce choix avec l'activité mathématique. Considérons la proposition « pour tout entier n, n est divisible par 4 ⇒ n est pair ». Dire que cette proposition est vraie (ce qui est le cas), c'est en particulier dire que les propositions « 6 est divisible par 4 ⇒ 6 est pair », et « 9 est divisible par 4 ⇒ 9 est pair » sont vraies, cas qui correspondent aux deux dernières lignes de la table de vérité. Ainsi, décider que l'implication P⇒Q est vraie lorsque la prémisse P est fausse est la seule manière de pouvoir écrire des propositions de la forme « pour tout x, P[x]⇒Q[x] », sans se préoccuper des valeurs qui rendent la prémisse fausse pour conclure à sa vérité, ce que nous faisons constamment.

[4] P et Q peuvent éventuellement comporter des variables libres, V. Durand-Guerrier distingue ces deux situations en parlant d'implication matérielle dans le premier cas (pas de variable libre), et d'implication ouverte dans le deuxième cas (Durand-Guerrier, 2005, pp. 46 à 49).

P	Q	P⇒Q
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai

Figure 2 : Table de vérité du connecteur IMPLIQUE

Cette table de vérité nous permet de voir facilement que la négation de P⇒Q est (P ET NON(Q)).

Une implication universellement quantifiée est une proposition de la forme « pour tout x∈E, P[x]⇒Q[x] ». Elle est construite à partir d'une implication « P[x]⇒Q[x] » dans laquelle la variable x est *parlante*, et d'une quantification universelle portant sur cette variable, ce qui a pour effet de la rendre *muette*, et opérant sur cette implication[5]. La proposition « pour tout x∈E, P[x]⇒Q[x] » est vraie lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E, P[a] est fausse ou Q[a] est vraie. Ceci nous permet de voir que la négation de la proposition « pour tout x, P[x]⇒Q[x] » est la proposition « il existe x tel que P[x] ET NON(Q)[x] », ce qui justifie la technique du contre-exemple pour infirmer une implication. On voit que le fait que le contre-exemple doit vérifier la prémisse et pas la conclusion est lié à la table de vérité du connecteur IMPLIQUE[6], et que le fait qu'il suffise d'en produire un seul est lié à la quantification universelle.

Pour rendre compte de la manipulation d'une implication dans une preuve, je me servirai ici de la déduction naturelle de Gentzen. Les deux positions d'utilisateur et de démonstrateur correspondent aux deux règles de déduction ci-après (figures 2 et 3), l'une appelée règle d'élimination de l'implication (schéma également connu sous le nom de *modus ponens*), l'autre appelée règle d'introduction de l'implication (pour plus de détails sur ces règles, et sur d'autres règles du système de Gentzen, utilisées comme outils d'analyse des pratiques langagières dans la formulation des preuves, voir Hache et Mesnil, à paraître)

---

[5] La notion de variable étant absente du savoir à enseigner actuel, que ce soit dans le programme ou dans les manuels, le statut d'être muette ou parlante pour une variable est *a fortiori* également absent. C'est pourtant une disctinction fondamentale pour la compréhension des propositions mathématiques, voir Mesnil, 2014, p. 113.

[6] Plusieurs étudiants savent très bien utiliser cette technique du contre-exemple, mais quand on leur demande d'écrire formellement la négation de P⇒Q, ils proposent souvent P⇒NON(Q), ou NON(P)⇒Q, ou Q⇒NON(P), bref, une implication combinant P, Q ou leur négation !

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

Figure 3 : règle d'élimination de l'implication

$$\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ \dfrac{Q}{P \Rightarrow Q}\end{array}$$

Figure 4 : règle d'introduction de l'implication

La règle d'élimination peut se lire ainsi : « de P et de P⇒Q je déduis Q », la règle d'introduction peut se lire ainsi : « pour démontrer P⇒Q, je démontre Q sous hypothèse P ».

1.3.2. Expression dans le discours mathématique

Dans cette partie, je me limiterai à étudier deux expressions langagières couramment utilisée pour dire les implications : « si P, Q » et « si P alors Q ». Je renvoie le lecteur / la lectrice à la thèse (Mesnil, 2014) pour l'utilisation d'autres expressions telles que « P implique Q », « P entraîne Q ».

Nous allons voir différentes utilisations de *si* (ou de *si… alors…*) dans lesquelles je soulignerai des obstacles possibles à la compréhension de la notion d'implication dans son sens mathématique rappelé dans le paragraphe précédent. Cette deuxième approche situe la référence dans une perspective didactique puisque ces obstacles sont autant de difficultés potentielles pour l'enseignement et l'apprentissage.

Je me suis d'abord appuyée sur des travaux du linguiste O. Ducrot qui propose une description des énoncés *si p, q* du langage courant non pas à partir de l'existence d'un type de relation entre *p* et *q*, mais à partir de deux actes illocutoires réalisés par leur énonciation : demander à l'auditeur d'imaginer *p*, une fois le dialogue introduit dans cette situation imaginaire, y affirmer *q* (Ducrot, 1991). Il précise que cette description permet de rendre compte de l'emploi traditionnel du mot *si* pour donner à entendre une relation de dépendance entre les propositions qu'il réunit :

> Dans la mesure, en effet, où on demande à l'auditeur de se placer dans l'hypothèse « *p* » avant de lui annoncer « *q* », on donne à penser qu'il y a une certaine dépendance entre « *p* » et « *q* » : sinon, on comprendrait mal que le locuteur ait cru bon de faire précéder l'acte d'affirmation d'un acte de supposition. La dépendance entre les deux propositions apparaît ainsi comme un contrecoup de la dépendance entre les deux actes accomplis. (Ducrot, 1991, p.169)

Il explique ensuite comment la loi d'exhaustivité, connue également sous le nom de principe du maximum d'information, amène alors à entendre cette relation de dépendance comme à la fois suffisante et nécessaire :

> Si le locuteur a restreint son affirmation de « q » à la supposition préalable que « p » est vrai, il est naturel de croire, puisqu'il est censé dire le maximum de ce qu'il sait, qu'il ne pouvait pas affirmer « q » d'une façon catégorique. Si, de plus, on refuse d'attribuer cette incapacité à une limitation de son savoir, on doit interpréter cette restriction de l'affirmation comme l'affirmation d'une restriction. On introduit donc l'idée que « q » est vrai seulement si « p » est vrai. (Ducrot, 1991, pp.169-170)

En mathématiques, pour démontrer une implication « si P (alors) Q », on se place dans la situation où P est vérifiée, puis on affirme (en argumentant) Q (voir règle d'introduction de l'implication à la figure 4). Cette démarche se rapproche de la description de Ducrot, et le phénomène qu'il décrit ci-dessus, même s'il correspond à des utilisations de *si* dans la langue courante, peut venir faire obstacle à la compréhension de la notion d'implication qui est alors entendue comme une l'équivalence.

Puisque nous avons distingué implication et implication universellement quantifiée, demandons-nous laquelle est marquée par l'utilisation de *si*, ou de *si… alors…* qui est plus fréquemment utilisé en mathématiques. Cette expression est presque toujours utilisée en mathématiques entre deux propositions comportant au moins une même variable libre. Les mathématiciens ne lisent pas une proposition telle que « si n est pair, alors n est divisible par 4 » comme une simple implication entre deux propositions mais comme une implication universellement quantifiée. La preuve en est que si on les interroge sur cette proposition, ils ne diront pas qu'elle est parfois vraie (par exemple pour n=7), parfois fausse (par exemple pour n=6), mais qu'elle est fausse. En fait, selon O. Ducrot, l'idée de dépendance associée au mot *si* empêche les mathématiciens de l'utiliser pour marquer dans tous les cas le connecteur IMPLIQUE :

> Un mathématicien n'aurait pas de répugnance particulière à dire « si 2+2=4, alors 2+3=5 », car on peut envisager que la deuxième proposition se démontre à partir de la première. Mais il hésiterait à dire « si 2+2=4, alors 2 n'a pas de racine carrée rationnelle », car la démonstration de la deuxième proposition, dans ce cas, n'utilise pas, habituellement, la première. (Ducrot, 1991, p.169)

Ainsi, en mathématiques, la dépendance entre P et Q dans l'expression *si P alors Q* est marquée par le fait d'avoir une démonstration de Q à partir P. Or, les mathématiciens ne démontrent pas des propositions telles que 2+3=5 sous hypothèse 2+2=4, mais plutôt l'implication $x+y=z \Rightarrow x+y+1=z+1$ dont ils montrent qu'elle est vraie quels que soient x, y et z. Cette position qui distingue *si* de la langue courante et connecteur IMPLIQUE était également celle de Frege. Il soulignait que le signe qu'il employait dans son *Idéographie* pour noter le connecteur IMPLIQUE ne se traduisait par *si* que « dans le seul cas où une partie du contenu est indéterminée et donne à l'ensemble un caractère de généralité » (Frege, 1971). Il restreignait ainsi l'utilisation de *si* au cas où au moins une variable apparaît libre dans la prémisse et dans la conclusion, cas où il est alors possible de quantifier universellement l'implication. Finalement, nous rencontrons dans l'activité mathématique essentiellement des implications universellement quantifiées[7] et la plupart du temps, la quantification est implicite, « intégrée » au *si (alors)*. L'utilisation de *si* pour signifier le connecteur IMPLIQUE entre deux propositions quelconques se heurte aux habitudes dues à cet usage (par extension, les emplois de *si* pour signifier une instanciation d'une implication universellement quantifiée seront cependant acceptés, c'est le cas de l'exemple de Ducrot).

Cette description de O. Ducrot lui permet d'expliquer d'autres utilisations du *si* avec cette même description. Certaines de ces utilisations sont présentes en mathématiques, notamment ce qu'il appelle le *si-présuppositionnel*, que l'on retrouve par exemple dans « si Pierre est à Paris, il y restera certainement » (Ducrot, 1991, p.176). La proposition introduite par *si* constitue alors un présupposé de la principale, qui n'a pas de sens en dehors de la situation décrite par la subordonnée. Nous retrouvons en mathématiques une utilisation de *si* qui se rapproche du *si-présuppositionnel*, par exemple dans la proposition suivante :

si x et y sont des réels strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

Ici, le *si* introduit une condition P : « x et y sont des réels strictement positifs » pour que la proposition Q : « $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ » ait un sens. La gêne que l'on peut ressentir en essayant d'énoncer la contraposée de cette proposition montre bien qu'on ne l'entend pas comme une implication.

Je terminerai en signalant un dernier emploi de *si* courant en mathématique : son utilisation dans les définitions. Tout d'abord, une définition n'est pas une proposition. Elle pose une convention, et cela n'a pas de sens de se demander si elle est vraie ou fausse. Elle introduit un nouveau prédicat P'[x] (par exemple « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ») comme raccourci d'une proposition P[x] (ici « pour tous réels x, y, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$ »). Par ailleurs, elle pose une équivalence entre ces deux propositions (mais on ne peut pas utiliser dans la définition l'expression *si et seulement si* puisque d'une certaine façon le prédicat P'[x] n'est pas encore introduit dans le langage).

Nous voyons que dans ces deux dernières utilisations *si* ne correspond pas à une implication. Nous pouvons souligner les distinctions entre ces énoncés et une implication en s'appuyant sur d'autres formulations. Dans le premier exemple, on pourra utiliser de façon équivalente une formulation dans laquelle la quantification universelle est explicite, relativisée à un ensemble de valeurs pour les variables pour lequel la suite de la proposition a un sens :

---

[7] Notons cependant qu'à chaque implication universellement quantifiée sont associées des implications obtenues par instanciation de la variable par une valeur, comme nous venons de le voir.

Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

C. Hache décrit une telle formulation comme une quantification relativisée posant une *condition de sens*, à distinguer d'une quantification relativisée posant une *condition de vérité,* qui par contre correspond à une implication (« pour tous réels x et y strictement positifs, $xy>0$ » est équivalente à « pour tous réels x et y, si $x>0$ et $y>0$ alors $xy>0$ », voir Hache, 2015).

Dans le cas des définitions, l'utilisation d'une expression telle que « par définition, P'[x] si P[x] » permet de signaler que l'on est dans une utilisation particulière de *si* qui ne relève pas de l'implication, l'utilisation d'une formulation telle que « on dira que P'[x] lorsque P[x] » permet d'éviter le *si*.

Dans cette étude de l'utilisation de *si* en mathématiques, je me suis appuyée à la fois sur une approche linguistique et sur une approche mathématique. Elles se complètent pour décrire les pratiques langagières des mathématiciens, et surtout les éventuels obstacles à la compréhension des élèves.

1.3.3. Difficultés dans l'apprentissage de l'implication

Ici encore je continue à suivre le fil rouge « langage » qui guide ce que je choisis de mettre (pour l'instant) sur l'implication dans cette référence. Ainsi, dans cette partie sur les difficultés dans l'apprentissage de l'implication, je présenterai ce qui concerne l'implication en tant qu'élément du langage mathématique : le cas délicat d'une implication dont la prémisse est fausse, la distinction entre implication et implication universellement quantifiée. J'évoquerai finalement la disticntion foncdamentale entre vérité d'une implication et validité d'une déduction.

Cas de la prémisse fausse : Dans une étude menée en 1999 et 2001 auprès d'étudiants entrant dans la préparation au CAPES[8] de mathématiques, J. Rogalski et M. Rogalski ont notamment étudié le traitement des implications à prémisse fausse, intérêt qu'ils justifient par le fait que « la situation de l'implication à hypothèse fausse est à peu près la seule qui met fortement en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique usuelle, naturelle […] et d'autre part une logique formelle dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques, au point que les étudiants ne se rendent pas compte qu'elle y est plus qu'on ne le pense à l'œuvre » (Rogalski et Rogalski, 2004, p.177). Ils montrent que seulement 20% des étudiants savent traiter correctement le cas de la prémisse fausse dans des situations mettant en jeu des implications formées à partir de propositions concernant des données immédiatement saisissables par le sujet (par exemple, « si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral ») et que

[8] Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré, les étudiants qui préparent le CAPES se destinent donc à être enseignants dans le secondaire (élèves de 11 à 18 ans).

ces étudiants réussissent mieux dans d'autres situations où ils ont à évaluer la vérité d'une implication (dans différents contextes, les études nombreuses autour de la tâche de Wason ayant montré l'importance de celui-ci, voir Durand-Guerrier et al., 2012). Le résultat ne serait sans doute pas très différent aujourd'hui puisque la logique est peu présente dans la formation initiale des enseignants. Mais le fait de ne pas savoir qu'une implication est vraie quand sa prémisse est fausse est-il handicapant dans l'activité mathématique ? Nous nous retrouvons assez peu souvent (je serais presque tentée de dire jamais) en situation de devoir valider une implication en justifiant sa vérité par le fait que sa prémisse est fausse. En revanche, nous avons affaire à l'implication à prémisse fausse à plusieurs moments, que j'ai déjà signalés dans la partie 1.3.1 et que je rappelle ici :

- à chaque fois que nous affirmons la vérité d'une implication universellement quantifiée « pour tout x, (P[x]$\Rightarrow$Q[x]) », nous affirmons en particulier la vérité d'un certain nombre d'implications à prémisse fausse (par exemple, affirmer la vérité de « pour tout réel x, $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ » c'est en particulier affirmer la vérité de « $-0{,}5 \geq 1 \Rightarrow (-0{,}5)^2 \geq 1$ »).
- à chaque fois que nous nous contentons de montrer B sous hypothèse A pour montrer que l'implication A$\Rightarrow$B est vraie, nous considérons donc qu'elle est vraie lorsque A est fausse.

Le fait qu'une implication dont la prémisse est fausse est vraie permet de mieux comprendre ce que l'on fait dans ces moments de l'activité mathématique.

Distinction entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée : V. Durand-Guerrier a écrit de nombreux textes mettant en évidence le caractère polysémique de l'implication et a notamment souligné la pratique de quantification universelle implicite associée à l'implication. Elle a relaté des expérimentations dans lesquelles des élèves qui ne sont pas au courant de cette pratique évaluent alors la vérité d'une implication d'une façon non conforme à ce qu'attend le professeur, et pourtant conforme à la logique mathématique (voir par exemple la tâche du labyrinthe, Durand-Guerrier, 1999 : les élèves disent qu'on ne peut pas savoir si une implication est vraie, car ils la lisent comme une implication entre deux propositions dont on ne connaît pas la valeur de vérité, le professeur dit qu'elle est fausse car il la lit comme une implication universellement quantifiée).

Confusion entre *si A alors B* et *A donc B* : A$\Rightarrow$B est une proposition. Elle peut être vraie ou fausse, ce renseignement ne nous est pas donné par la proposition elle-même mais par son assertion ou son infirmation. De plus, savoir qu'elle est vraie ne nous donne aucun renseignement sur la valeur de vérité de A ni sur celle de B puisque plusieurs distributions de valeurs de vérité rendent A$\Rightarrow$B vraie. *A donc B* n'est pas une proposition, on ne peut pas lui accorder de valeur de vérité. Par contre, nous pouvons nous demander si une telle inférence est valide ou non, et pour cela, il est nécessaire de contrôler plusieurs éléments : en effet, affirmer *A donc B*, c'est affirmer trois choses : que A est vraie, que B est vraie et que l'on peut déduire le deuxième renseignement du premier (souvent parce que l'on sait que A⇒B est vraie). Une implication, marquée par exemple par l'utilisation de *si… alors…,* et une déduction, marquée par l'utilisation de *donc*, sont ainsi deux objets épistémologiquement différents, reliés à deux concepts disctincts et fondamentaux en logique : la vérité (d'une proposition) et la validité (d'un raisonnement, qui est assurée par la vérité des prémisses et la validité d'une loi logique).

Bien sûr, une grande partie des *donc* écrits ou prononcés en mathématiques sont reliés à l'implication car ils marquent une utilisation de la règle du *modus ponens.* V. Durand-Guerrier fait l'hypothèse que l'utilisation des implications essentiellement dans ce cas amènent une conception selon laquelle affirmer un énoncé conditionnel, c'est affirmer son antécédent, « conception commune [qui] semble assez résistante, au sens où elle résiste à la pratique et aux savoirs acquis en mathématiques » (Durand-Guerrier, 2005, p.56). Une telle conception empêche d'utiliser une implication dans un raisonnement par contraposition (schéma du *modus tollens, si A alors B, or NON(B) donc NON(A)*), puisque la conclusion d'un tel raisonnement est la fausseté de la prémisse.

J'ai finalement montré dans cette première partie de l'article comment le processus de transposition didactique pour les notions de logique au lycée pouvait être repensé à partir d'un *savoir de référence* pour intégrer la dimension outil de ces notions dans l'activité des mathématiciens. Tout en m'appuyant sur le savoir savant qu'est la logique mathématique, j'ai intégré d'autres dimensions plus en lien avec l'activité mathématique et avec la classe dans la constitution d'une référence par rapport à laquelle je situe l'étude du *savoir à enseigner*.

2. Analyse des programmes et documents d'accompagnement

Y. Chevallard appelle travail externe de la transposition didactique la « sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme "savoir à enseigner", seront alors soumis au travail de transposition » (Chevallard, 1991, p.30). Il s'agit d'un travail externe car il se fait en dehors des institutions où est mis en œuvre l'enseignement. Des textes sont ainsi produits (programmes, documents d'accompagnement) qui constituent la délimitation « officielle » du savoir à enseigner. Je donnerai d'abord la méthodologie, puis les principaux résultats de l'analyse de ces textes.

2.1. Méthodologie d'analyse des programmes : l'approche écologique

L'approche écologique propose des outils pour l'analyse du texte du savoir. Cette analyse, menée avec une perspective historique, éclaire les enjeux des choix faits pour définir le savoir à enseigner, choix qui participent d'un système de conditions et de contraintes auquel est soumis l'enseignant. Pour analyser les programmes et les documents d'accompagnement, j'ai suivi la démarche proposée par M. Artaud dans son cours à la IXe École d'Été de didactiques des mathématiques :

> un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour [de lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où on [le] trouve et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. Nous pourrons alors envisager la transposition de ces complexes d'objets dans l'enseignement secondaire. (Artaud, 1997, p.111)

J'ai recherché niche(s) et habitat(s) de la logique dans les textes des programmes et des documents les accompagnant depuis 1960. J'ai centré mon étude sur les programmes pour la classe de Seconde[9], et je l'ai menée en distinguant quatre périodes selon la place attribuée à la logique dans ces programmes :

- de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait une entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain, certaines pratiques d'enseignement sont débattues, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
- de 1969 à 1981 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1969 est celui des mathématiques modernes. C'est une période dans laquelle la logique est objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme donne rapidement lieu à de vives critiques.
- de 1981 à 1999 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1981 est celui de la contre-réforme. La logique en est exclue, accusée de participer au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes. Cette exclusion se poursuit dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1990.
- depuis 1999 : la logique fait un timide retour dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1999, puis dans le programme pour la classe de Première de la section littéraire en 2004, puis finalement un retour plus explicite dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009.

Pour cerner le contexte dans lequel est écrit chacun de ces programmes, je me suis appuyée sur différents textes publiés par l'APMEP[10], notamment le Bulletin, publication trimestrielle de l'association. J'utilise ces textes comme des indicateurs

[9] En ce qui concerne les programmes actuels, les objectifs sont presque identiques pour les classes de Seconde, Première et Terminale et seul un document d'accompagnement a été publié, pour la classe de Seconde.

[10] Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

des interrogations de la communauté de l'enseignement des mathématiques. Des positions diverses s'y expriment, pas seulement celles prises officiellement par l'association. Je fais ainsi des allers-retours entre analyses des programmes à l'aide des outils de l'analyse écologique qui permettent de préciser la demande institutionnelle, et analyses des bulletins de l'APMEP, qui aident à en comprendre l'évolution, en montrant le point de vue des acteurs de la mise en œuvre de cette demande.

2.2. Résultats de l'analyse : comparaison de la période des mathématiques modernes et de la période actuelle

Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais la logique mathématique n'est une référence pour cet apprentissage que durant la période des mathématiques modernes (1969-1981), et, à un degré moindre, depuis 1999. Nous pouvons donc parler, dans ces deux périodes, de deux niches qui correspondent aux deux piliers de la logique : une niche raisonnement et une niche langage. Ces deux niches sont bien sûr imbriquées puisque le langage est constitutif du raisonnement.

Dans ces deux périodes nous pouvons également parler d'un habitat flou pour la logique qui doit être présente partout, son étude accompagnant celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant une différence notable sur ce point entre les deux périodes, qui révèle deux positions distinctes quant à la dimension objets des notions de logique. Pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à ces notions, étudiées en tant qu'objets mathématiques. Ce chapitre était placé en début de Seconde et il avait pour but de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est précisé qu'il ne faut pas faire de cours et le programme ne suggère d'aborder les notions de logique que dans leur dimension outil.

L'étude de documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 montre que, si les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, les approches sont très différentes, notamment dans la place attribuée à la logique mathématique. Dans la période des mathématiques modernes, le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 qui accompagne les programmes de 1969 (désigné ensuite par *le commentaire de 1970*) propose un très synthétique cours de logique mathématique, en précisant que ce qui est exposé est surtout à visée de formation des professeurs plutôt que directement destiné aux élèves. Cet exposé n'est pas accompagné d'exemples d'activités pour la classe.

À l'inverse, le document *Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 (désigné ensuite par *le document ressources de 2009*) propose une série d'exercices sur les éléments de logique au programme, mais aucune considération théorique les concernant. Il n'est ainsi pas question de les présenter, ni pour les élèves, ni même pour les professeurs, à partir de l'approche de la logique mathématique. Plusieurs différences entre l'utilisation de certains mots (et, ou, un, si… alors…) dans le langage courant et dans le langage mathématique sont soulignées, mais aucun terme de la logique mathématique n'est utilisé pour expliquer ces différences (par exemple, les termes « quantificateur universel » et « quantificateur existentiel » ne sont pas utilisés pour parler des différents sens dans l'emploi du mot *un*).

Finalement, l'étude de ces deux documents nous permet de préciser les liens entre logique et langage dans ces deux périodes. Durant la période des mathématiques modernes, l'ancrage dans la niche langage est plus fortement affirmé : la formalisation du langage mathématique est vue comme bénéfique, structurante pour l'activité mathématique, et la logique mathématique est vue comme une aide à la maîtrise d'un langage formalisé beaucoup plus largement utilisé au lycée qu'aujourd'hui. Dans le programme actuel, même si la logique est relié au langage, la maîtrise d'un langage mathématique spécifique n'est plus un objectif revendiqué. Les principes de la logique mathématique sont en effet mis en parallèle avec les principes de la logique du langage courant, mais dans les commentaires du document ressource de 2009, les premiers semblent consister en des précisions nécessaires pour adapter les deuxièmes à la rigueur requise en mathématiques, qui exige notamment l'univocité de certains termes. Le traitement des notions de variable et de proposition est un indicateur de ces différentes positions par rapport au langage mathématique : elles sont présentées comme des notions essentielles dans le commentaire de 1970, elles sont absentes du document ressources de 2009.

L'étude des documents publiés par l'APMEP montre que l'enseignement de la logique est beaucoup plus une préoccupation des enseignants durant la période des mathématiques modernes qu'actuellement (une liste des articles publiés dans le Bulletin de l'APMEP sur ce sujet se trouve dans Mesnil, 2014, pp. 441 à 443). En 1967 et 1968, l'APMEP publie dans le Bulletin des articles théoriques sur la logique mathématique, montrant ainsi la volonté de former les professeurs en matière de logique avec cette référence. D'autres textes publiés dans le Bulletin témoignent des débats qui ont accompagné la période des mathématiques modernes, notamment autour de la présentation axiomatique dans l'enseignement des mathématiques. S'agissant plus particulièrement des notions de logique, le débat sur l'utilisation ou non des symboles de quantificateur a été particulièrement vif. Des expériences d'enseignement de logique sont relatées, de l'école primaire au lycée. Les auteurs y mettent en avant le travail sur le langage que permet la logique. La formalisation est défendue par plusieurs enseignants comme un élément fécond pour la conceptualisation des notions mathématiques. Pour la période actuelle, le premier article publié dans le Bulletin qui concerne la logique est paru en novembre 2014 (Larrieu, 2014), et c'est au jour d'aujourd'hui le seul.

La perspective historique sur la place de la logique dans les programmes de mathématiques pour le lycée montre que la position actuelle vient à la suite de deux situations extrêmes : la logique est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite totalement exclue de 1981 à 1999. Nous pouvons ainsi parler d'un retour de la logique dans les programmes, et en retenir deux conséquences importantes en ce qui concerne les enseignants : rien n'a été inscrit dans le temps à un niveau collectif, et les enseignants actuels n'ont pas tous reçu le même type de formation sur la logique, et n'ont pas les mêmes connaissances. Le professeur d'aujourd'hui se retrouve donc, sans doute plus que pour d'autres domaines, à devoir faire des choix didactiques qui seront très influencés par une composante personnelle (Robert et Rogalski, 2002).

Comme le souligne G. Arsac (Arsac, 1989), le savoir à enseigner ne se réduit cependant pas aux textes officiels (d'ailleurs les professeurs se contentent rarement de cette seule lecture pour préparer leurs cours). Parmi les ressources publiées à côté des textes officiels, les manuels ont une place importante. Ils sont un élément charnière de la transposition. Leur étude, qui est l'objet de la partie suivante, complète l'étude des programmes et documents d'accompagnement dans l'étude globale du savoir à enseigner.

3. Analyse des manuels

Les manuels donnent à voir des choix d'organisation d'enseignement de notions de logique, c'est-à-dire une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes qui leur est propre. Mais, par leur manière de présenter les notions et par le choix et l'organisation des tâches qu'ils proposent, ils sont aussi une ressource pour les choix didactiques des professeurs. L'étude des manuels dans ce contexte de retour de la logique dans les programmes est particulièrement intéressante : nous pouvons faire l'hypothèse d'y trouver des différences dans l'interprétation du programme et dans la présentation des notions, d'une part parce que des habitudes n'ont pas encore été prises, d'autres part parce que les injonctions du programme sont assez imprécises. Par ailleurs, le peu de ressources pour l'enseignement de la logique au lycée peut amener les enseignants à utiliser les manuels comme ressource privilégiée pour cela.

Neuf des dix manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010 ont choisi de consacrer quelques pages à la logique, réunies au début ou à la fin du manuel, ou disséminées dans chaque chapitre. Par ailleurs, tous ces manuels proposent des exercices identifiés pour travailler sur les notions de logique, soit grâce à l'utilisation d'un logo, soit parce qu'ils sont réunis dans une rubrique. Ces pages et ces exercices sont des nouveautés par rapport aux précédentes éditions de ces manuels.

3.1. Méthodologie d'analyse des manuels

L'étude des programmes nous a permis de voir les grandes lignes des instructions officielles concernant l'enseignement de notions de logique. À partir de ces grandes lignes, les auteurs des manuels scolaires, par ailleurs soumis à des contraintes d'écriture, vont proposer une matière plus directement utilisable par l'enseignant, comme le souligne L. Ravel :

> Ces grandes lignes sont ensuite mises en texte dans les manuels scolaires. Les auteurs de manuels, sujets de l'institution scolaire, vont apprêter les objets de savoir à enseigner afin de les rendre “utilisables” par les enseignants et les élèves. [...] Ils vont donc faire des choix pour mettre en texte les directives du programme et proposer à leurs sujets des activités préparatoires, un cours et des exercices. Ils vont alors construire des organisations mathématiques autour de ces objets de savoir pour pouvoir les mettre en place. (Ravel, 2003, pp.39-40)

J'ai mené l'analyse des manuels en deux temps : tout d'abord une étude des « pages logiques » des manuels, c'est-à-dire des pages où sont présentées les notions de logique, dans l'ensemble des manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010, ainsi que 3 manuels de Seconde publiés en 1969[11], puis une étude des tâches proposées dans les exercices identifiés « logique » dans cinq manuels publiés en 2010, sélectionnés parce qu'ils présentent une certaine diversité quant aux choix faits pour la présentation des notions de logique et qu'ils sont largement utilisés. Je me suis appuyée sur les études épistémologique et didactique pour retenir des points sensibles permettant de décrire et catégoriser les propositions des manuels en les situant par rapport à la référence que j'ai élaborée, ce qui m'a conduite à organiser mon étude autour des questions ci-dessous :

- Quel investissement de la niche langage ? de la niche raisonnement ?
- Les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont-ils tous les deux présents ?
- Quelle position est prise par rapport à la formalisation des notions ?
- Comment sont prises en compte certaines difficultés identifiées dans la référence liées à la complexité des notions de logique ?

[11] Parce que le programme donne des directives précises, nous pouvons faire l'hypothèse d'une certaine homogénéité dans les manuels de 1969, qui fait qu'il n'est pas nécessaire de proposer une étude de tous les manuels de cette époque; ceux choisis étaient par ailleurs très largement utilisés.

- L’organisation des activités permet-elle que la logique soit effectivement « présente partout » ?

Je vais présenter les résultats de cette analyse en ce qui concerne l’implication, mais les réponses à ces questions sont à peu près similaires pour les connecteurs ET et OU, pour la négation, pour les quantificateurs. De même que dans le programme et le document ressources, les notions de proposition et de variable sont très peu présentes dans les manuels.

3.2. Focus sur l'implication dans les manuels

3.2.1. Investissement des niches langage et raisonnement

La notion d'implication est une notion particulièrement importante dans ces deux niches : d'une part les élèves rencontrent très fréquemment des propositions sous forme d'implication, d'autre part, le seul schéma de raisonnement qui est explicité au moment de l'apprentissage du raisonnement déductif est le *modus ponens (si A alors B, or A donc B),* qui met en jeu une implication.

Deux manuels de Seconde n’évoquent pas l’implication : *Pixel* qui n'a pas de « pages logiques » et *Déclic* qui n'en a qu'une, mais qui ne mentionne pas l'implication. Les huit autres manuels consacrent un paragraphe à la notion d'implication[12]. Deux d’entre eux présentent l'implication dans la niche raisonnement :

- dans *Odyssée*, le paragraphe Implication, réciproque, contraposée commence par : « Le principe même du raisonnement mathématique est **l'implication** (propriété directe) : un fait en implique un autre, une hypothèse entraîne une conclusion ».
- dans *Indice*, dont un extrait est donné ci-après (figure 5), l'implication est également introduite en lien avec l'idée de conséquence, le mot étant explicitement employé. Implication et déduction ne sont d’ailleurs pas distinguées, puisque des formulation en *si… alors…* et des formulations avec *donc* sont données comme synonymes.

[12] L'expression « proposition conditionnelle » employée par le programme n'est reprise que dans deux manuels, le terme « implication » étant largement plus employé.

V. Implication – Équivalence

- Dans le langage usuel, on emploie souvent les mots « donc », « d'où » ou des phrases sous la forme :

« si $\underbrace{---}_{P}$ alors $\underbrace{---}_{Q}$ »

pour exprimer l'idée qu'une partie de l'énoncé (ici Q) est une conséquence de l'autre partie (ici P).

Par exemple : « J'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas au lycée » ;

« Si $\underbrace{\text{j'ai 40° de fièvre,}}_{P}$ alors $\underbrace{\text{je ne vais pas au lycée}}_{Q}$ »

De même en mathématiques, dès le collège, de tels énoncés ont été utilisés.

Par exemple :

« *ABCD* est un losange, donc ses diagonales sont perpendiculaires »

« Si $\underbrace{\text{un quadrilatère est un losange,}}_{P}$ alors $\underbrace{\text{ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires}}_{Q}$ »

Ces phrases sont vraies car on sait qu'un losange a ses diagonales perpendiculaires ; l'hypothèse « un quadrilatère est un losange » entraîne forcément la conclusion « ce quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires ».

Figure 5 : Extrait du manuel Indice sur l'implication

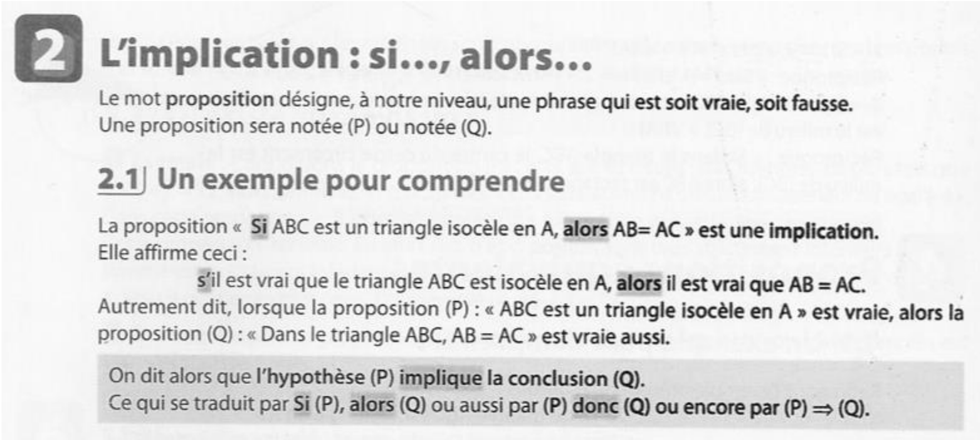
Cette approche de la notion d'implication en lien avec le raisonnement déductif pourrait être une façon de mettre en place une dialectique outil/objet (Douady, 1986). L'implication y serait vue d'abord à travers les déductions qu'une implication vraie permet de faire (c'est ce qui est proposé dans une situation telle que *Les Comonautes*, présentée dans le document ressources de 2009, issue de Legrand, 1983), puis la définition sémantique du connecteur IMPLIQUE (sa table de vérité) permettrait de justifier cette utilisation. Les manuels *Odyssée* et *Indice* sont loins de proposer une telle dialectique, ils n'explicitent pas l'utilisation d'une implication dans un raisonnement, et n'évoquent la question de la vérité d'une implication qu'à travers un exemple.

Trois autres manuels, *Symbole*, *Transmath* et *Travailler en confiance*, ont une présentation à l'intersection des niches langage et raisonnement : une implication est une proposition de la forme *si A alors B*, dont la description sémantique est en lien avec le raisonnement (voir figure 6 ci-après). En effet, elle consiste à dire que l'implication *si A alors B* signifie « si A est vraie alors B est vraie », reliant ainsi l'implication à certaines déductions possibles[13]. Dans son analyse de la notion d'implication dans des manuels de 4ème, de Seconde et de DEUG[14], V. Deloustal-Jorrand classe effectivement de telles définitions dans le registre du raisonnement

[13] Une implication vraie permet de déduire la vérité de la conclusion de la vérité de la prémisse, et la fausseté de la prémisse de la fausseté de la conclusion.

[14] Diplôme d'Études Universitaires Générales, qui, avant l'organisation du cursus en Licence-Maîtrise-Doctorat, s'obtenait au bout des deux premières années d'étude à l'Université.

déductif, et souligne qu'elles ont le défaut d'écraser l'implication sur le cas où la prémisse et la conclusion sont toutes les deux vraies, et qu'elles connotent une notion de causalité, voire de temporalité (Deloustal-Jorrand, 2004, p.73).


2 L'implication : si…, alors…

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase **qui est soit vraie, soit fausse.**
Une proposition sera notée (P) ou notée (Q).

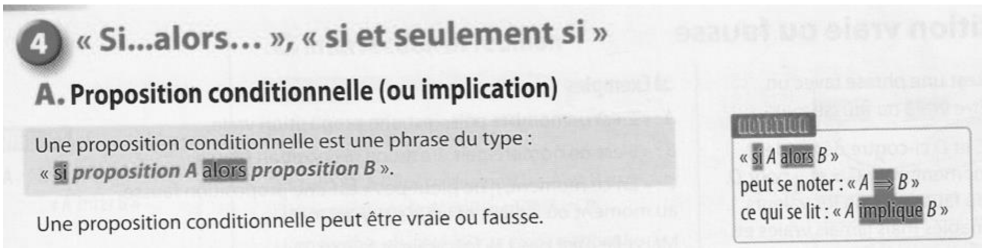
2.1 Un exemple pour comprendre

La proposition « **Si** ABC est un triangle isocèle en A, **alors** AB= AC » **est une implication.**
Elle affirme ceci :
s'il est vrai que le triangle ABC est isocèle en A, **alors il est vrai que AB = AC.**
Autrement dit, lorsque la proposition (P) : « **ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la** proposition (Q) : « Dans le triangle ABC, AB = AC » **est vraie aussi.**

On dit alors que **l'hypothèse (P) implique la conclusion (Q).**
Ce qui se traduit par **Si** (P), **alors** (Q) ou aussi par **(P) donc (Q) ou encore par (P) ⇒ (Q).**

Figure 6 : Extrait du manuel Math'x sur l'implication

Les trois derniers manuels, *Math'x, Hyperbole* et *Repères*, définissent l'implication seulement dans la niche langage : une implication est une proposition de la forme *si A alors B* :


4 « Si…alors… », « si et seulement si »

A. Proposition conditionnelle (ou implication)

Une proposition conditionnelle est une phrase du type :
« si *proposition A* alors *proposition B* ».

Une proposition conditionnelle peut être vraie ou fausse.

NOTATION
« si *A* alors *B* »
peut se noter : « *A* ⇒ *B* »
ce qui se lit : « *A* implique *B* »

Figure 7 : Extrait du manuel Transmath sur l'implication

En plus de ces descriptions ou définitions, les manuels abordent différents aspects de l'implication. Certains aspects sont en lien avec le langage, comme le fait que certaines formulations cachent une implication (*Transmath* donne l'exemple de la proposition « deux angles opposés par le sommet sont égaux »), ou comme le fait que les formulations en *si… alors…* comportent une quantification universelle implicite (souligné seulement par le manuel *Travailler en confiance*). D'autres sont en lien avec le raisonnement, comme l'indication de techniques pour montrer que l'implication *si A alors B* (qui est en fait dans les exemples donnés toujours une implication implicitement universellement quantifiée) est vraie ou fausse. Dans le premier cas, trois techniques sont données : montrer B sous hypothèse A, utiliser des implications successives, remplaçer la conclusion par une proposition équivalente, mais aucune de ces techniques n'est justifiée par les propriétés de l'implication. Dans le deuxième cas, la technique proposée est le recours à un contre-exemple, mais les manuels qui en parlent se contentent de dire qu'il faut montrer que l'on peut avoir à la fois A vraie et B fausse, sans justifier cette technique par l'explicitation des règles de négation d'une proposition universellement quantifiée, et de négation d'une implication. Cette présentation de techniques qui ne sont pas justifiées est à mettre en relation avec les mises en garde du programme qui précise qu'il n'est pas question de faire un « cours » de logique, et avec l'absence de considérations théoriques sur les notions de logique dans le document ressources de 2009. Les auteurs de manuels donnent l'impression d'avoir suivi cette ligne de conduite : seule la dimension outil est présente.

Le tableau ci-après (figure 8) résume les indicateurs de l'investissement de la niche langage et de la niche raisonnement dans la présentation de l'implication dans les manuels. Une case vide signale que cet aspect n'est pas traité dans le manuel, un premier constat est donc qu'il n'y a pas du tout uniformité du contenu du discours sur l'implication dans les différents manuels. Par ailleurs, le tour d'horizon que j'ai proposé dans cet article sur les définitions de l'implication montre que sur un aspect présent dans presque tous les manuels, les choix d'approches sont également très divers. Ce résultat peut s'expliquer par le manque de précision du programme : les auteurs de manuels ont eu à combler ce manque, chacun ayant fait ses choix. Enfin, des lettres majuscules L ou R indiquent dans quelle niche se situe chaque aspect de l'implication, et nous pouvons voir que la niche raisonnement est plus investie que la niche langage, ce qui est encore une fois à lettre en relation avec les résultats de l'étude des programmes.

	Description ou Définition, niche Langage ou Raisonnement	Implication implicite dans d'autres formulations	Formulation en *si… alors…* implicitement universellement quantifiées	Comment montrer que *si A alors B* est vraie	Comment montrer que *si A alors B* est fausse	Comment utiliser une implication
Odyssée	Description, **R**					
Hyperbole	Définition, **L**			B sous hypothèse A, **R**		
Transmath	Définition, **L/R**	**L**				
Indice	Description, **R**			B sous hypothèse A, **R**	Contre-exemple, **R**	
Travailler en confiance	Définition, **L/R**		**L**	Par implications successives, par conclusion équivalente, **R**		
Symbole	Définition, **L/R**			Par implications successives, B sous hypothèse A, **R**		
Math'x	Définition, **L**	**L**		Par implications successives, **R**	Contre-exemple, **R**	**R**
Repères	Définition, **L**			B sous hypothèse A, **R**	Contre-exemple, **R**	

Figure 8 : Langage et raisonnement dans les propos des manuels de 2010 sur l'implication

3.2.2. Aspects syntaxique et sémantique de l'implication dans les manuels de 2010, niveau de formalisation

Dans le programme et le document ressources de 2009, le discours sur les notions de logique reste en grande partie informel, et le document ressources, pourtant à destination des enseignants, ne propose aucun élément théorique. Cette absence de référence dans le programme se ressent dans les manuels actuels, et ce que j'espère avoir donné à voir pour l'implication est valable pour les autres notions de logique : le discours est assez différent d'un manuel à l'autre, il reste également en partie informel, et les notions de logique y sont même parfois malmenées. Une conséquence immédiate de la défiance affichée vis-à-vis de la formalisation des notions est l'absence quasi totale de leur aspect syntaxique, ce que nous allons voir pour l'implication.

Dans les deux manuels *Symbole* et *Hyperbole*, la présentation de l'implication fait suite à la description de la conjonction et de la disjonction de deux propositions, et de la négation d'une proposition. À travers l'emploi de cet ensemble de termes, et une présentation plus formelle que dans d'autres manuels, nous pouvons considérer que dans *Symbole* et *Hyperbole*, chaque connecteur, et en particulier l'implication, est présent sous son aspect syntaxique d'opérateur permettant de construire une nouvelle proposition (voir figures 9 et 10 ci-après). Mais cet aspect syntaxique n'est pas dissocié de l'aspect sémantique. Dans la définition des connecteurs ET et OU, la description sémantique est proche de ce qui pouvait se faire à l'époque des mathématiques modernes, où l'on trouvait des tables de vérité dans les manuels de Seconde. Le fait de ne pas utiliser de table de vérité n'est cependant pas anodin : c'est un ostensif représentatif d'une approche formelle de la logique, contre laquelle le programme actuel met en garde. Par contre, dans cet extrait, il n'y a pas de description sémantique du connecteur IMPLIQUE telle que celle des connecteurs ET et OU. Les auteurs ne donnent pas le comportement de l'implication par rapport aux valeurs de vérité de ses composantes, ils parlent de ce qu'elle « exprime ».

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :
– **(P et Q)**, appelé **conjonction** des propositions P, Q est vraie lorsque P **et** Q sont vraies toutes les deux.
– **(P ou Q)**, appelée **disjonction** des propositions P, Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P **ou** Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Figure 9 : Extrait du manuel Symbole sur les connecteurs ET et OU

1 L'implication

Définition 7

Si P et Q sont des propositions, la proposition « si P, alors Q », appelée **implication**, exprime que si P est vraie alors Q est vraie aussi.

Figure 10 : Extrait du manuel Symbole sur l'implication

Ce traitement différent de l'implication empêche d'identifier une catégorie d'objets, les connecteurs, en tant qu'éléments du langage mathématique, comme cela était le cas en 1969. J'intepréte cette différence de traitement en lien avec un autre point sensible en logique : la distinction entre une proposition et l'affirmation de sa vérité, qui rejoint la distinction entre contenu de jugement et jugement que faisait Frege (Frege, 1971, pp.74-75). C'est par l'affirmation de la vérité de l'implication *si P alors Q* que l'on exprime que si P est vraie alors Q est vraie (et il vaudrait mieux dire, pour éviter cette redondance du *si… alors…*, qu'elle exprime qu'il n'est pas possible que P soit vraie et Q soit fausse). Une proposition en elle-même n'exprime pas un jugement. Bien sûr, dans l'activité mathématique, la vocation des propositions est d'être énoncées, et cette énonciation constitue l'acte d'affirmation de leur vérité. Dans la pratique, on ne dit pas « la proposition "tous les réels ont un carré positif" est vraie » mais simplement « tous les réels ont un carré positif ». Pour la conjonction (et la disjonction), les auteurs du manuel *Symbole* distinguent la proposition et l'affirmation de sa vérité, puisqu'ils ne se contentent pas de dire « (P et Q) exprime que P est vraie et que Q est vraie », mais ils ne font plus cette distinction pour l'implication.

Globalement, même si dans les manuels de 2010 une implication est caractérisée par sa forme *si A alors B*, c'est le seul aspect syntaxique qui est soulevé. Dans les manuels de 1969, certaines propriétés de l'implication étaient données, comme l'équivalence entre (A⇒B) et (NON(A) OU B), ou la transitivité (énoncée comme le fait que la proposition ((A⇒B) ET (B⇒C))⇒(A⇒C) est toujours vraie). De telles propriétés, bien que justifiées d'un point de vue sémantique (par les tables de vérité), renforcent la présence de l'aspect syntaxique de l'implication en donnant des propriétés du signe qui peuvent ensuite être utilisées indépendamment de son sens. Ces propriétés sont absentes des manuels de 2010 (autant des manuels de Seconde que des manuels de Première ou Terminale), et il n'y a pas de dialectique entre les deux aspects syntaxique et sémantique de l'implication.

3.2.3. Prise en compte de la complexité de la notion d'implication

Je reviens ici sur les difficultés évoquées dans le paragraphe 1.3.3 et sur la façon dont elles sont prises en compte dans les manuels, ou au contraire source d'erreurs.

Prémisse fausse : Seul le manuel *Math'x* évoque le cas de la prémisse fausse quand il précise comment utiliser une implication : « **quand on sait que "si A alors B" est vraie**, on est sûr que lorsque la proposition A est vraie, la proposition B est automatiquement vraie. **Attention**, lorsque la proposition A est fausse, on ne peut rien dire sur B ! Elle peut être, indifféremment, vraie ou fausse ». Cela montre à quel point le travail sur la notion d'implication ne vise pas du tout l'aspect objet du connecteur IMPLIQUE.

Distinction entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée : la pratique de quantification universelle implicite des implications étant quasi-systématique dans les manuels, il est difficile de distinguer implication et implication universellement quantifiée. Comme nous l'avons vu dans le tableau de la figure 8, un seul manuel, *Travailler en confiance*, souligne cet implicite. Par ailleurs, les exemples d'implications donnés dans les manuels sont presque toujours traitées comme des implications implicitement universellement quantifiées, quand bien même elles pourraient être lues seulement comme des implications. Par exemple, pour la proposition « si ABC est un triangle isocèle en A, alors AB=AC » du manuel *Transmath* (figure 6), une interprétation comme implication dans laquelle les variables A, B et C sont parlantes est possible. Cependant, le manuel précise ensuite que cette proposition affirme que « lorsque la proposition (P) « ABC est un triangle isocèle en A » est vraie, alors la proposition (Q) « dans le triangle ABC, AB=AC » est vraie aussi ». Cette précision introduit l'idée que les variables peuvent prendre des valeurs différentes, et que quelles que soient les valeurs prises, si la proposition (P) est vraie, la proposition (Q) est vraie, ce qui est une interprétation de l'implication universellement quantifiée. De même que dans les pages « Logique », les implications présentes dans les exercices Vrai/Faux ne sont, à quelques exceptions près, jamais explicitement quantifiées, ce qui peut amener le même type de réponse « on ne peut pas savoir » que dans la tâche du labyrinthe (Durand-Guerrier, 1999).

Confusion entre *si A alors B* et *A donc B* : Trois des dix manuels de 2010 mettent *si… alors …* et *donc* sur le même plan, notamment le manuel *Indice* dans l'extrait donné en figure 3. Le fait de donner des exemples rend particulièrement visible la différence entre ces termes : on ne prononce pas les deux phrases « J'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas au lycée » et « Si j'ai 40° de fièvre alors je ne vais pas au lycée » dans les mêmes circonstances, puisque la première est énoncée par quelqu'un qui a 40° de fièvre, et la seconde généralement par quelqu'un qui justement n'est pas dans cette situation.

Ces différents aspects qui font de la notion d'implication une notion complexe ne sont pas évoqués dans le document ressources de 2009. Il n'est donc pas étonnant de n'en trouver aucune trace dans les manuels. Dans le commentaire de 1970, le cas de la prémisse fausse était mentionné, puisque l'implication était présentée comme un connecteur, la forme $A \Rightarrow B$ était distinguée de la forme *pour tout x*, $P[x] \Rightarrow Q[x]$. Le recours à la logique mathématique permet de souligner ces points, mais cette référence formelle n'est pas suffisante pour être opérationnelle pour l'enseignement et l'apprentissage de notions de logique. Plusieurs recherches ont été menées pour évaluer la pertinence d'un enseignement de logique ayant pour référence la logique mathématique mais en la reliant à l'activité mathématique. Je cite en exemple, mais je suis loin d'être exhaustive, les travaux de J. Adda, par exemple son article dans le bulletin APMEP, 1975, la thèse de E. M. El Faqih, 1991, la thèse de J. Njomgang Ngansop, 2013. Les propositions de J. Adda concernent les collège, mais datent d'une époque révolue, les travaux de E. M. El Faqih et de J. Njomgang Ngansop concernent le supérieur. Des expérimentations restent donc à mener au niveau du lycée.

3.2.4. Présence d'un travail sur l'implication dans les différents chapitres

Un relevé et une classification en terme de types de tâche des exercices identifiés « logique » montrent que l'implication est de loin la notion qui est l'objet du plus grand nombre d'exercices (dans les 5 manuels étudiés, entre 25% et 47% des exercices estampillés « logique » sont sur l'implication), essentiellement des tâches de type Vrai/Faux à propos d'une implication, éventuellement de sa réciproque, puis de l'équivalence. Sur l'ensemble des 5 manuels, ce type d'exercice est présent dans tous les chapitres. Quand les implications sont vraies, la tâche consiste la plupart du temps à seulement repérer une propriété vue en cours.

Conclusion

Dans cet article j'ai proposé une contribution à l'étude de la transposition didactique de notions de logique au lycée en France. Une telle transposition ne peut pas se penser selon le schéma classique, avec la logique mathématique comme savoir savant à son origine, mais plutôt à partir d'un savoir de référence qui prend en compte la dimension outil des notions de logique dans l'activité mathématique. À partir d'études épistémologique et didactique, j'ai construit une référence dans laquelle des notions de logique sont présentées à partir de trois approches, illustrées ici à travers l'exemple de l'implication : le point de vue mathématique à partir de la logique mathématique, le point de vue de l'activité mathématique à travers la prise en compte des pratiques langagières des mathématiciens, le point de vue de l'enseignement à travers les résultats d'études didactiques. Cette référence est un outil qui m'était nécessaire pour constituer une grille d'analyse du savoir à enseigner. J'ai par exemple montré dans cet article que la complexité de l'implication n'était pas prise en compte ni dans le programme, ni dans le document ressources qui l'accompagne, ni dans les manuels. Les auteurs de ces derniers proposent finalement une sorte d'institutionnalisation *a minima,* quasiment un seul type de tâche, l'exercice

Vrai/Faux, et font des confusions malheureuses (comme la confusion entre *si A alors B* et *A donc B* que l'on trouve dans certains manuels). Plus généralement, l'ensemble de l'étude du savoir à enseigner montre que les instructions du programme actuel sur la logique sont imprécises et que le discours dans les manuels reste très informel. Cette étude amène naturellement des perspectives de recherche sur le savoir enseigné et sur les pratiques des enseignants. Au vu de ses résultats, nous pouvons faire l'hypothèse d'une diversité dans les pratiques, et de difficultés des enseignants à mettre en place un enseignement de notions de logique. Une question méthodologique spécifique à la logique se pose alors pour tester cette hypothèse : comment constituer un corpus de données adéquat permettant de saisir des pratiques sur un enseignement qui se doit d'être transversal ?

Ces résultats sur le savoir à enseigner s'expliquent en grande partie par l'absence d'un savoir de référence dans la communauté (comprenant mathématiciens, enseignants de mathématiques, chercheurs en didactiques des mathématiques). La constitution d'un tel savoir est alors un moyen d'agir pour l'enseignement de la logique des mathématiques, mais elle ne peut se faire que sur un temps long et de façon collective : il est important que les mathématiciens y retrouvent la logique qu'ils mettent en œuvre dans l'activité mathématique, que les logiciens y retrouvent leur objet de travail, que les enseignants de mathématiques y trouvent une façon d'enseigner cette logique, que les didacticiens puissent argumenter par des recherches la pertinence de son contenu.

Sur ce dernier point par exemple, des recherches sur les notions de proposition et de variable sont à poursuivre. Ce sont des éléments essentiels du langage mathématique, mais, sans doute parce qu'elles sont primordiales, elles ont été l'objet de nombreux débats au moment de la crise de fondements. Le point de vue naïf adopté dans la référence que j'ai constituée tend à gommer leur complexité, l'étude de ces débats en permettrait sans doute une description plus fine. Ces notions sont également essentielles pour parler du langage mathématique dans une perspective d'enseignement des mathématiques. Elles sont pourtant en grande partie absentes du programme et des manuels, et le discours sur le langage mathématique y reste très confus. Ainsi, c'est surtout en direction de la classe que des recherches sont à poursuivre sur ces notions, qui pourraient être structurées autour des questions suivantes : quelles difficultés des élèves peuvent être mises en relation avec une conception erronée de ces notions ? Comment les enseignants abordent-ils ces difficultés ? Qu'est-ce qu'une clarification de ces notions peut apporter sur ces deux points ? Quelles situations proposer pour les aborder ?

Un autre enrichissement de la référence contituée consisterait à redonner au raisonnement une place plus importante. Là encore, c'est une suite naturelle au travail déjà fait sur le langage (voir par exemple l'étude des pratiques langagières dans la formulation des preuves dans Hache et Mesnil, à paraître), pour laquelle de nombreuses recherches existantes pourraient être exploitées.

Bibliographie

ADDA J. (1975), Une manière d'intégrer des éléments de logique dans l'enseignement des mathématiques en 6ème. *Bulletin de l'APMEP n°301*, pp. 755-759.

ADDA J. (1988), L'évolution de l'enseignement de la logique en France. *Atti degli incontri di logica matematica, vol. 5*, pp. 13-26.

ARSAC G. (1989), La transposition didactique en mathématiques. G. Arsac, M. Develay et A. Tiberghien (Eds.) *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie* (pp. 3-36). IREM et LIRDIS de Lyon.

ARTAUD M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. M. Bailleul et al. (Eds.) *Actes de la 14ème École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139).

BEN KILANI I. (2005), *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

CHELLOUGUI F. (2004), *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

DELOUSTAL-JORRAND V. (2004), *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(0)*, pp. 5-31.

DUCROT O. (1991), *Dire et ne pas dire : principes de sémantique linguistique.* Hermann.

DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (1999), L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit'x n°50*, pp. 57-79.

DURAND-GUERRIER V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.* Note de synthèse, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V., BOERO P., DOUEK N., EPP S. et TANGUAY D. (2012) *Examining the Role of Logic in Teaching Proof.* G. Hanna et M. de Villiers (éds), ICMI Study 19 Book: Proof and Proving in Mathematics Education, chap. 16, pp. 369-389. Springer, New-York

EL FAQIH E. M. (1991), *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

EPP S. (1999), The language of quantification in mathematics instruction. L. Stiff et R. Curio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 188-197). National Council of Teachers of Mathematics.

FREGE G. (1971), *Écrits logiques et philosophiques.* Traduction et introduction de C. Imbert. Éditions du Seuil.

HACHE C. (2015), Pratiques langagières des mathématiciens. Une étude de cas avec « avec ». *Petit'x n°97.*

HACHE C. et MESNIL Z. (à paraître), Pratiques langagières et preuves, *Actes du XXII^e colloque de la CORFEM*. A.Chesnais, M. Gandit et G. Train (Eds)

LABORDE C. (1982), *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique.* Thèse de doctorat. Université scientifique et médicale institut national polytechnique de Grenoble.

LARRIEU J.Y. (2014), Une progression pour l'enseignement de la logique propositionnelle au Lycée. *Bulletin de l'APMEP n° 511*, pp. 524-530.

LEGRAND M. (1983), Les cosmonautes. Compte rendu d'une recherche du groupe "apprentissage du raisonnement"de l'IREM de Grenoble. *Petit'x n°1*, pp. 57-73.

MARGOLINAS C. (2012), Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières. *Colloque sociologie et didactique*.

MESNIL Z. (2014), *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

NJOMGANG NGANSOP J. (2013), *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone: aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

RAVEL L. (2003), *Des programmes à la classe : étude de la transposition didactique interne. exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier Grenoble.

ROBERT A. et ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies vol. 2/4*, pp. 505-528.

ROGALSKI J. et ROGALSKI M. (2004), Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 9,* pp. 175-203.

ROGALSKI J. et SAMURÇAY R. (1994), Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. G. Arsac, Y. Chevallard, J. Martinand, et A. Tiberghien (Eds.) *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35–71). Grenoble : la Pensée Sauvage.

ZOE MESNIL
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Est Créteil
zoe.mesnil@u-pec.fr

MICHELE COUDERETTE

ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHMIQUE EN CLASSE DE SECONDE : UNE INTRODUCTION CURRICULAIRE PROBLEMATIQUE

Abstract. Teaching Algorithmic: a Problematic Introduction in the High School Curriculum. In 2009, the high school curricular reform introduced algorithms in mathematics teaching. This is a new hybrid object, at the crossroads of mathematics and computer science, for which most teachers are not trained. Therefore, how do teachers approach this part of the program? To answer this question, we observed a mathematics teacher in a second grade in high school, for one year school. In order to conduct an analysis, we articulate two theoretical frameworks: the anthropological theory of didactics (ATD) and the joint action theory in didactics (JATD). The ATD provides tools for analyzing the tasks proposed by the math teacher to the students against the background of the concept of mathematical praxeologies. The JATD allows to put in view the expectations of the institution with what is actually taught in the classroom over several sessions of algorithm teaching. The results show the difficulties of teaching a knowledge that has its references in two disciplines. The co-constructed knowledge developed in the class is referred either under their mathematical specificity or their computer specificity. As a result of that, students do not really learn algorithmic knowledge.

Keywords. Algorithms - Mathematics - Analysis of teaching practices - JATD - ATD

Résumé. La réforme des lycées de 2009 a introduit l'enseignement de l'algorithmique en cours de mathématiques. Il s'agit d'un nouvel objet hybride, au carrefour des mathématiques et de l'informatique, pour lequel la plupart des enseignants ne sont pas formés. Dès lors, comment les enseignants abordent-ils cette partie du programme ? Pour répondre à cette question, nous avons observé une enseignante de mathématiques dans une classe de seconde, durant une année scolaire. Afin de mener une analyse , nous articulons deux cadres théoriques : la théorie anthropologique du didactique (TAD) et la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD). La TAD fournit des outils pour analyser les tâches que l'enseignante propose aux élèves sous couvert du concept de praxéologies mathématiques. La TACD permet de mettre en regard les attentes de l'institution avec le savoir réellement enseigné dans la classe au fil de plusieurs séances d'enseignement de l'algorithmique. Les résultats montrent les difficultés d'enseignement d'un savoir dont les références appartiennent à deux disciplines. Les savoirs mis à l'étude sont référés soit à leur spécificité mathématique soit à leur spécificité informatique. Du coup, les élèves n'entrent pas dans l'étude des savoirs réellement algorithmiques.

Mots-clés. Algorithmique – Mathématiques – Analyse de pratiques enseignantes – TACD – TAD

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 267 - 296.

Introduction

Cet article traite de l'introduction de l'algorithmique en mathématiques en classe de seconde. Des recherches ont déjà été menées sur ce sujet (Modeste, 2012 ; Modeste, Gravier, Ouvrier-Buffet, 2010 ; Haspékian, Nijimbéré, 2012) mais peu ont porté sur l'analyse de pratiques ordinaires d'enseignement. Nous rendons compte ici d'une recherche s'appuyant sur l'observation d'une classe de seconde lors d'un enseignement d'algorithmique en mathématiques au moment de son introduction dans les nouveaux programmes (MEN, 2009a)

L'enseignement de l'algorithmique, en tant qu'objet d'étude, a été introduit dans les universités françaises dans les années 1950 (Chi Thanh N'Guyen ; 2005). En 2009, cet enseignement est ensuite apparu dans les programmes scolaires de lycée dans le cours de mathématiques. Auparavant, outil au service des autres domaines enseignés dans la discipline mathématique, l'algorithmique est devenu un objet d'étude.

À la suite d'une enquête (Couderette, 2013) auprès d'enseignants en classe seconde montrant leurs difficultés à enseigner cet objet d'étude et compte tenu de la complexité et du caractère interdisciplinaire de ce dernier, nous avons pensé utile de documenter la manière dont un enseignant mettait en œuvre cette partie du programme[1]. Pour effectuer cette analyse des pratiques ordinaires en classe, nous avons dans un premier temps fait une étude épistémologique à propos du savoir algorithmique. Cela nous a permis de mener une analyse critique du curriculum tel qu'il a été proposé en 2009. C'est ce qui fera l'objet de la première partie de cet article. Dans un deuxième temps, fort de l'analyse épistémologique et curriculaire effectuée, nous sommes allée observer une enseignante participante à l'enquête ayant accepté de nous recevoir dans sa classe durant l'année scolaire 2010-2011. Cette étude de cas fera l'objet de la seconde partie de cet article.

1. De l'analyse épistémologique aux choix curriculaires actuels

Ainsi que le souligne Artigue (1988), une analyse d'ordre épistémologique est un préalable nécessaire à l'analyse de curriculums et de pratiques enseignantes. Les travaux de Knuth (1968), auteur faisant référence dans la communauté des mathématiciens informaticiens, permettent d'éclairer la manière dont cet objet est transposé dans les textes d'accompagnement en vigueur ainsi que dans les pratiques de classe sur le terrain.

---

[1] La recherche présentée dans cet article relève d'une approche descriptive à visée compréhensive afin de mettre en évidence les contraintes et les possibles du fonctionnement d'un système didactique aux prises avec l'enseignement d'un objet, pensé comme interdisciplinaire dans les textes du programme mathématique. Dans cette perspective, la posture du chercheur s'attache à suspendre autant que possible son jugement aux pratiques observées.

1.1. Contexte d'introduction de l'algorithmique dans le curriculum 2009

Initialement objet mathématique, l'algorithme est maintenant souvent perçu comme un objet de l'informatique associé à la programmation. Dans son ouvrage, « Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce », Chabert (2010) montre l'évolution du concept d'algorithme jusqu'au développement de l'informatique, informatique qui a largement contribué à la formalisation des algorithmes et à l'élargissement du domaine de recherche des mathématiques. L'algorithmique est devenue à elle seule un domaine de recherche, au carrefour de l'informatique et des mathématiques. Reconnu par la société civile, dans les différentes institutions politiques, économiques, industrielles, de recherche, ou d'enseignement, ce savoir algorithmique est devenu enjeu d'enseignement. Le groupe d'experts de l'Association ITIC-ASTI[2] milite pour un enseignement de l'informatique au secondaire ne se réduisant pas à une utilisation des outils informatiques : « *Un tel enseignement est de nature à créer les conditions d'une bonne utilisation des outils informatiques dans les autres disciplines de par la maîtrise qu'il contribuerait à donner aux élèves. De ce point de vue aussi, sa valeur ajoutée est donc indispensable. « Objet » et « outil » d'enseignement, loin de s'opposer, sont complémentaires et se renforcent mutuellement* » (Association ITIC-ASTI, 2007). Une proposition de programme est présentée par Dowek en 2008, proposition qui introduit l'informatique à tous les niveaux de scolarité : *« Placer le programme des lycées dans une vision pour l'ensemble du cursus en informatique de la maternelle à l'Université avec une phase en amont du lycée centrée autour de la maîtrise de logiciels […], une phase au Lycée centrée autour de l'apprentissage des connaissances nécessaires à l'écriture d'un programme simple […], et une phase en aval du lycée consacrée aux diverses branches de l'informatique en tant que discipline scientifique »*. En 2009, suivant ainsi les conseils de la commission Kahane (2002) d'introduire « *une part d'informatique dans l'enseignement des sciences mathématiques et dans la formation des maîtres* », le ministère fait le choix d'inclure dans tous les programmes de mathématiques de lycée et à tous les niveaux, un enseignement d'algorithmique.

Le projet et les objectifs de l'enseignement de l'algorithmique dans le nouveau programme de mathématiques sont d'amener à « *une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel.* » et *ainsi de « de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul »* (MEN, 2009a, p. 9). Le programme précise que cet enseignement ne doit pas être déconnecté de l'enseignement des

---

[2] ITIC-ASTI : Informatique et TIC - Association française des Sciences et Technologies de l'Information. Groupe animé par des informaticiens, Maurice Nivat, Gilles Dowek, Éric Bruillard et Monique Grandbastien notamment.

mathématiques : « *au contraire, l'introduction de chaque nouvel élément (variable, boucle, itération, etc.) devrait apparaître lors de la résolution de problèmes pour lesquels les démarches habituelles sont malcommodes ou peu performantes* » (MEN, 2009b). Cette spécification qui amène donc à travailler à la fois les mathématiques et l'informatique ne nous semble pas aller de soi. Les discussions dans la communauté des professeurs de mathématiques ont montré un certain nombre de difficultés des enseignants à mettre en œuvre ce nouveau programme sur l'algorithme. L'APMEP[3] signale dans son bulletin qu'un « *déficit de formation est déclaré de façon explicite lorsqu'il s'agit d'évoquer les nouveaux thèmes introduits dans le programme, notamment dans le cadre de l'algorithmique. Ce manque de formation peut être repéré de façon implicite cette fois à travers certaines difficultés que rencontrent les enseignants à interpréter le programme.* » (APMEP, 2014). Le rapport de la commission de suivi des programmes de 2014 montre que l'introduction de l'algorithmique est « *jugée positive par 65% des répondants, [mais que] plus de 40% des répondants ne sont pas satisfaits de son écriture dans le programme officiel ; c'est la partie du programme qui est jugée la moins explicite. Les entretiens laissent penser que les relations entre algorithmique, mathématiques et programmation ne sont pas clairement perçues.* » (MEN-DGESCO, 2014). Si les recherches de Haspékian et Nijimbéré confirment les observations du ministère, ils relèvent par ailleurs que « les textes officiels n'aident pas les enseignants à faire la part des choses précisément entre ces différents points de vue, à délimiter clairement ce qui relève de l'algorithmique au niveau des raisonnements de ce qui relève des nécessités de son implémentation technologique » (2012, p. 270). Il apparait donc ici que l'introduction de ce nouvel objet d'enseignement parait complexe. En quoi l'analyse épistémologique peut-elle éclairer cette complexité ?

1.2 Analyse épistémologique de ce domaine d'étude

Les travaux de Knuth, chercheur que l'on pourrait qualifier de « mathématicien-informaticien », sont reconnus à la fois par la communauté des mathématiciens et par celle des informaticiens. Professeur à l'université de Standford (États-Unis), Knuth a contribué autant aux mathématiques qu'à l'informatique : ses travaux de recherche ont porté sur les mathématiques discrètes et sur l'algorithmique. Son ouvrage The Art Of Computer Programming (TAOCP) date de 1968. Pour autant, malgré l'évolution de l'informatique, celui-ci reste toujours d'actualité et fait encore référence dans la communauté des chercheurs du domaine. Dans cet ouvrage, Knuth développe la vision qu'il a d'un algorithme. Celui-ci n'est *ni uniquement* informatique, *ni uniquement* mathématique : *il est des deux*. Dans cet ouvrage, tous les algorithmes présentés s'appuient sur des énoncés mathématiques. Pour autant, l'objectif n'est pas de faire un cours de mathématiques, mais de faire comprendre à

[3] APMEP : Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

un lecteur « novice » en informatique ce qu'est un algorithme. Aussi, donne-t-il à son propos une forte dimension pédagogique en décrivant des concepts algorithmiques au versant plutôt informatique et en particulier en pointant des concepts algorithmiques potentiellement difficiles à comprendre du fait de leur proximité avec des concepts informatiques (le stockage dans une variable par exemple). Nous cherchons à mettre en tension la vision hybride de l'algorithmique développée par Knuth avec celle que l'on peut deviner à la lecture des documents officiels (programme et document ressources) afin de faire émerger ce qui a été retenu pour constituer le savoir à enseigner.

Les quatre sous-parties ci-dessous rendent compte de concepts de base et de difficultés pointées par Knuth dans le premier volume « Fundamental Algorithms » du TAOCP (1968) : (1) définition et caractéristique, (2) texte de communication, (3) difficultés potentielles (4) Validation. Nous reprenons ces quatre points dans la section relative à l'analyse des textes officiels.

1.2.1. Une définition et cinq caractéristiques

S'appuyant sur plusieurs exemples, tous mathématiques, Knuth définit et caractérise ce qu'est un algorithme par *« a finite set of rules witch gives a sequence of operations for solving a specific type of problem* » (Knuth, 1968 ; p. 4).

En utilisant les cinq caractéristiques d'un algorithme, finitude (*finitness*), définition précise (*definiteness*), effectivité (*effectiveness*), entrée (*input*) et sortie (*output*), Knuth (1968) nous met en alerte sur la présentation de processus de vie courante comme des algorithmes : une recette de cuisine, qui si elle respecte bien la propriété de séquentialité, les critères d'entrée, de sortie et de finitude, ne respecte pas les critères de « définition précise » et d'» effectivité». Un algorithme doit fournir un même résultat quel que soit l'opérateur le traitant.

1.2.2. Un texte de communication

Knuth (1968) formalise d'une manière très précise l'écriture des algorithmes (cf. ci-dessous), montrant ainsi l'importance qu'il donne à l'aspect communicationnel entre celui qui écrit l'algorithme et celui qui le lit : nom de l'algorithme, début, fin, numérotation des différentes étapes, résumés et commentaires, sont autant d'éléments composant un algorithme permettant au lecteur d'en avoir une meilleure compréhension : « *they are only for the reader's benefit as possible aids to comprehension »* (Knuth, 1968, p. 3).

```
Algorithm NomAlgo : Given liste des variables
NomAlgo1 [résumé de l'action 1] action 1 (commentaire 1)
NomAlgo2 [résumé de l'action 2] action 2 (commentaire 2)
……….
NomAlgon [résumé de l'action 2] action 2 (commentaire 2) ▌
```

Figure 1 : Écriture formelle d'un algorithme selon Knuth (1968).

L'algorithme d'Euclide formalisé par Knuth se présente ainsi :

```
Algorithm E (Euclid's algorithm). Given two positives
integer m and n, find their greatest common divisor, i.e.,
the largest positive integer witch evenly divides both m and
n
E1 [Find remainder] divide m by n and let r be the remainder
(we will have 0<=r<n)
E2 [is it zero?] If r = 0, the algorithm terminates; n is
the answer.
E3 [Interchange] Set m ← n, n ← r, and go back to step E1.▌
```

Figure 2 : Écriture formelle de l'algorithme d'Euclide selon Knuth (1968)

1.2.3. Des difficultés potentielles lors de l'enseignement de l'algorithmique

- *L'affection et la variable, enjeux de savoir problématiques*

Knuth pointe plusieurs difficultés de compréhension de certains objets et concepts résultants de signifiants différents selon qu'ils sont utilisés dans un cadre exclusivement mathématique[4] ou dans un cadre algorithmique ; il désigne par exemple le concept « d'affectation » comme l'un des plus difficiles à comprendre, celui-ci renvoyant à la notion de variable informatique : une variable informatique désigne un emplacement dans la mémoire de l'ordinateur et nous comprenons alors, que même si le vocabulaire est le même, le mot variable dans un contexte algorithmique relève ici de l'informatique et non des mathématiques. Le mot « variable » représente donc des concepts différents selon qu'il est utilisé en

[4] Pour des commodités de langage, nous écrirons « mathématique » lorsque nous désignerons tout ce qui relève exclusivement des mathématiques (c'est-à-dire ne relevant pas de l'algorithmique) et par « informatique » tout ce qui relève exclusivement de l'informatique (et non de l'algorithmique).

mathématique ou en informatique. Du point de vue informatique, une variable ne peut contenir qu'une seule valeur à un instant *t*, qui pourra ensuite évoluer selon les instructions de l'algorithme. En mathématique, une variable revêt une tout autre signification : par exemple, dans l'écriture $x \epsilon N$, x représente n'importe quelle valeur de N. Knuth conseille à ses lecteurs d'étudier des algorithmes déjà écrits et de les dérouler à la main pour comprendre leur fonctionnement, en particulier lors des opérations d'affectation. Pour des algorithmes plus complexes (mettant en jeu une boucle par exemple), « suivre à la trace » des variables suppose que l'on ait une technique de traçage. Nous présentons ci-dessous à titre d'exemple la trace de l'algorithme d'Euclide, nécessaire pour la gestion des variables :

Déroulement		Etapes	m	n	r
Entrées		E0	28	72	?
Traitement	1er passage dans la boucle	E1	28	72	28
		E2	28	72	28
		E3	72	28	28
	2nd passage dans la boucle	E1	72	28	16
		E2	72	28	16
		E3	28	16	16
	3ème passage dans la boucle	E1	28	16	12
		E2	28	16	12
		E3	16	12	12
	4ème passage dans la boucle	E1	16	12	4
		E2	16	12	4
		E3	12	4	4
	5ème passage	E1	12	4	0
Sortie		E2	12	4	0

Figure 3 : Trace de l'algorithme d'Euclide pour les valeurs 28 et 72 selon Knuth (1968)

- *L'égalité en mathématiques et en informatique*

Un autre concept pointé par Knuth comme difficile à comprendre est le signe « = ». Selon qu'il est utilisé en mathématique ou en algorithmique, il n'a pas la même signification. Dans le domaine mathématique, il symbolise l'expression « est le résultat de… » ou décrit une relation d'équivalence entre deux objets de même nature, ou encore traduit une assertion logique ayant la valeur de vrai ou faux, alors que dans le domaine algorithmique le signe « = » est utilisé dans les tests d'égalité et donc revêt uniquement le statut d'assertion logique. Les travaux de Knuth rejoignent les nombreuses recherches en didactique de l'algèbre portant sur les différentes significations du signe « = » selon leur contexte d'utilisation. On citera, en autres, Chevallard (1985), Kieran (1994), Gascon (1994), Artigue (2002) et plus récemment Knuth et al. (2006).

1.2.4. Validation d'un algorithme

Poursuivant sa volonté de montrer le caractère hybride des algorithmes, Knuth s'intéresse à leurs validations. Il montre qu'une démonstration de type expérimental est insuffisante et qu'une démonstration mathématique est nécessaire. Il présente alors deux méthodes : l'induction mathématique et la preuve de programme par assertions. Toutes deux reposent sur des domaines mathématiques : la démonstration par récurrence pour la première et la logique formelle pour la seconde (Hoare, 1969). Si la logique formelle n'est pas au programme de lycée, la démonstration par récurrence est possible dans les classes scientifiques.

Comment alors la transposition opère-t-elle dans les documents institutionnels ? Les documents institutionnels montrent-ils la double appartenance – l'hybridité – de l'algorithmique ou présentent-ils principalement son versant informatique ? Les difficultés pointées par Knuth sont-elles explicitement indiquées ? Quelles propositions sont alors avancées pour les contourner ?

1.3. Les choix curriculaires effectués dans le programme 2009

Tout d'abord, il nous semble important de signaler que contrairement aux autres savoirs enseignés en mathématiques, le texte du savoir à enseigner l'algorithmique n'a pas été découpé en fonction des niveaux seconde, première et terminale. Il est décrit dans le programme de seconde et est établi pour les trois années de lycée. (MEN, 2009a). Nous considérons que cette place « à part » dans les programmes lui donne un statut « à part ». D'autre part, il est clairement indiqué que l'algorithmique a une visée doublement transversale : elle doit s'insérer dans chacune des trois parties du programme de mathématiques et s'articuler avec les autres disciplines enseignées : « *l'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante* » (MEN, 2009a, p. 9).

Dans cette section, nous rendons compte de quelques points saillants d'une analyse critique des documents institutionnels (programme de seconde, documents ressource) en reprenant point par point les éléments dont nous avons rendu compte dans la section précédente.

1.3.1. Une définition floue de l'algorithme

Knuth insiste sur les propriétés de *definiteness* et *effectiveness* d'un algorithme, au point de prendre pour exemple une recette de cuisine. Nous pouvons alors nous interroger sur la pertinence d'introduire les algorithmes à l'aide de situations de vie courante, qui de par leur nature, ne respectent pas les propriétés de *definitessnes* et d'*effectiveness*.

Des exemples souvent repris pour illustrer ces différents aspects, comme le rendu de monnaie pour le volet numérique, ou encore les recettes de cuisine. On trouve encore des algorithmes dans des situations de la vie courante (s'habiller) ou professionnelle (ainsi, la conduite d'un train, la consultation d'un catalogue de bibliothèque, etc.).
…
Ainsi, dans la recette de la pâte à crêpes, on trouve la séquence d'instructions (mettre la farine dans le bol ; faire un puits ; mettre les œufs dans le puits)

Figure 5 : extrait du document ressources en algorithmique (MEN (2009b), pp. 6-8)

1.3.2. Aspect communication du texte algorithmique

C'est au travers des préconisations pour l'évaluation que nous trouvons trace des principes de Knuth. Dans le document-ressources, des critères d'évaluations relatifs à la lisibilité de l'algorithme sont définis : explicitation du but de l'algorithme, commentaires précisant le déroulement, noms des variables bien choisis font partis des critères permettant d'évaluer un algorithme non pas seulement sur son aspect fonctionnel mais aussi sur son aspect communicationnel.

Critère	Excellent	Bon	Moyen	Insuffisant
Respect des bons usages Le but visé par l'algorithme est explicité, et des commentaires précisent le déroulement. Les variables ont des noms bien choisis.	Aucune erreur	De petits détails sont négligés. Le but est difficile à déterminer	Des détails manquent, mais le programme tente quand même d'accomplir ses fonctions essentielles.	Ne répond pas au problème posé. Objectif impossible à déterminer

Figure 6 : Extrait du document ressources en algorithmique (MEN (2009b), p. 13)

Pour autant, l'aspect communication est-il réellement présent dans le texte de programme ? Dans la plupart des algorithmes présentés, seules les variables déclarées sont commentées et non les différentes actions. L'algorithme 8 du document ressource (MEN (2009b), (affichage automatique d'une fenêtre graphique), certes complexe, est pratiquement le seul à contenir des commentaires pour les différentes étapes du traitement. Le nombre d'algorithmes du document traduits en langage informatique (calculatrices, applications logicielles) peut implicitement laisser à penser que l'aspect fonctionnel du programme est privilégié. Cette perception, plus informatique qu'algorithmique, laisse en réalité peu de place à la compréhension même des objets algorithmiques.

1.3.3. Des difficultés potentielles dans l'enseignement de l'algorithmique

- *Affectation et variable, enjeux de savoir problématiques*

Si l'affectation et la notion de variable ne sont pas soulignées comme des difficultés dans le programme, on peut supposer qu'elles sont implicitement suggérées par la description imagée « *le rangement d'un objet dans un petit tiroir ne pouvant contenir qu'un objet à la fois* » (MEN, 2009b, page 7). L'activité de traçage signalée comme nécessaire par Knuth (1968) est complètement absente dans le programme. Il nous semble alors possible de dire que, du fait de cet absence, la transposition didactique dans le programme actuel d'un concept purement algorithmique tel que l'affectation dans une variable, ne permet pas d'en traiter le sens.

Nous retrouvons toutefois une des préoccupations de Knuth relative à la compréhension du fonctionnement d'un algorithme dans les textes du savoir à enseigner : étudier des algorithmes afin d'en déterminer leurs fonctions ou de déceler des erreurs dans leurs conceptions. Mais nulle indication sur une technique d'étude d'un algorithme. Est-il implicitement convenu que l'implémentation d'un algorithme dans une calculatrice ou application logicielle pourra rendre possible la détection d'une erreur et ainsi de la corriger ? Des techniques sont envisageables (mettre des tests d'arrêt par exemple, suivre à la trace le contenu des variables) mais difficiles à mettre en œuvre sans une compréhension au préalable des concepts algorithmiques.

- *L'égalité en algorithmique et en mathématique, écueil potentiel*

Le concept d'égalité en algorithmique n'est pas non plus signalé comme possible difficulté. Cet écueil est complètement occulté dans les programmes. Jamais les enseignants n'ont leur attention attirée sur le fait que ces signifiants différents selon que le concept soit abordé sous couvert des mathématiques ou sous couvert de l'informatique, sont porteurs potentiels de difficultés. On peut donc anticiper que les enseignants seront confrontés à ces difficultés lorsqu'ils auront à enseigner ce concept.

1.3.4. La validation d'un algorithme : une absence dans les programmes

La preuve d'un algorithme n'est pas explicitement mentionnée dans le programme. On peut voir une explication dans le fait que les algorithmes écrits sont en lien direct avec les notions mathématiques étudiées dans le cours de mathématiques. Le risque est alors que pour les élèves la notion de preuve d'algorithme n'existe pas et que seule la machine ou l'application logicielle valide l'algorithme.

En conclusion de cette analyse, il ressort que les concepteurs des programmes d'algorithmique partagent formellement la même vision des algorithmes que Knuth : des algorithmes reposant sur des concepts mathématiques mais aussi sur des concepts informatiques. Néanmoins, les documents institutionnels ne permettent pas, par élision, de traiter du sens des concepts purement algorithmiques signalés par Knuth : certaines difficultés ou écueils signalés par cet auteur, bien que présents allusivement dans ce programme, semblent laisser les enseignants démunis face à l'organisation didactique et/ou mathématique de la séance, comme l'a mis en évidence l'enquête évoquée en introduction.

Au terme de cette analyse transpositive d'un domaine nouvellement objet d'étude, examinons les mises en œuvre possibles dans le cours de mathématiques.

2. Analyse des pratiques d'enseignement de l'algorithme en classe de seconde : une étude de cas

Nous nous intéressons à la manière dont une enseignante met en œuvre cet objet d'enseignement compte tenu de sa spécificité c'est-à-dire celui d'être un objet interdisciplinaire (mathématique et informatique) et qui par conséquence vise à travailler à la fois les mathématiques et l'informatique. L'analyse épistémologique et curriculaire permet de préciser les questions de recherche : (i) quel est le savoir réellement mis à l'étude dans le cours d'algorithmique ? (ii) comment ce savoir évolue-t-il au sein du système didactique ? (iii) comment les enseignant jouent-ils avec les contraintes d'un enseignement sous couvert de deux disciplines ?

Cette problématique suppose deux niveaux d'analyse, celle des praxéologies ici de type interdisciplinaire et celle des pratiques en classe.

2.1. Cadres théoriques

L'étude de cas a été menée sous couvert de deux cadres : le premier, permettant de mettre en exergue le savoir réellement mis à l'étude, s'appuie sur le concept de praxéologie développé dans la théorie anthropologique du didactique – TAD – (Chevallard ; 1999), le second rendant compte de la co-construction de ce savoir au sein du système didactique, s'appuie sur les études de l'action conjointe (Sensevy ; 2007). La compatibilité de ces deux cadres théoriques a déjà été discutée dans plusieurs travaux dont ceux de Brière-Guenoun et Amade-Escot (2010), Athias (2014), Salone (2015).

Pour décrire et étudier les conditions de réalisation des pratiques institutionnelles, la TAD offre un outil d'analyse que nous utilisons pour étudier les savoirs effectivement mis à l'étude par une enseignante dans une classe de seconde : les organisations praxéologiques. Les outils praxéologiques permettent de décrire une séance en termes d'unité, chaque unité correspondant à une tâche dans laquelle l'élève est engagé. Ils permettent de déterminer les savoirs mis à l'étude, et ainsi de répondre aux questions : (i) quel est l'apprentissage visé dans la séance ? (ii) l'algorithmique étant un objet interdisciplinaire, à quelle discipline de référence se réfère l'enseignante quand elle propose une tâche aux élèves ?

La théorie de l'action conjointe en didactique – TACD – pose l'action didactique comme une résultante des interactions élèves-professeur. L'analyse de l'action conjointe permet de montrer comment, dans ces interactions, les praxéologies, telles que proposées par le professeur, vivent au sein de la classe. Dans notre analyse, nous utilisons les genèses {topogenèse, chronogenèse, mésogenèse} décrivant la dynamique évolutive du système didactique : (iii) quels sont les objets constituant le milieu, sachant que ceux-ci sont évolutifs dans la co-construction du savoir, (iv) à quel rythme ce savoir est-il conduit et (v) quelles places élèves et professeur occupent-ils par rapport au savoir construit ?

2.2 Indications de méthode

Contexte et participants : La classe observée est une classe de seconde générale d'un lycée dans la banlieue toulousaine. D'un niveau moyen en mathématiques, elle est constituée de 33 élèves (23 garçons et 9 filles) âgés de 15 à 16 ans. L'enseignante a une ancienneté de 25 ans dans l'enseignement et a suivi une formation en algorithmique dans son cursus universitaire alors qu'elle était étudiante.

Recueil des données : Nous avons observé et filmé trois séquences d'enseignement chacune étant composée de trois séances de 55 minutes. Respectant le protocole de Leutenegger (2009), chaque séance a été précédée d'un entretien *ante* puis suivie d'un entretien *post*, tous deux enregistrés. Les entretiens *ante* ont pour objectif de recueillir l'intention didactique de l'enseignante et les entretiens *post* de recueillir ses réactions « à chaud » quant au déroulement du cours. Des notes écrites « prises au vol » ainsi que les documents distribués aux élèves ont complété ce recueil.

Analyse des données : les deux cadres théoriques précités sont mobilisés pour l'analyse des données.

- Nous appuyant sur les travaux de Chevallard (1998) et de Bosch et Gascon (2004), nous avons cherché à déterminer pour chacune des tâches proposées aux élèves si la référence était d'ordre mathématique, algorithmique ou informatique. Pour cela nous avons fait appel au modèle [T/τ/θ/Θ] de la TAD qui décrit l'organisation praxéologique des tâches proposées aux élèves : accomplir une tâche t relevant d'un type de tâche T nécessite la mise en œuvre d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui est elle-même justifiée par une théorie Θ.

- Suivant les préconisations de Leutenegger (2009), l'ensemble des données vidéo ont été transcrites puis condensées dans des synopsis nous permettant d'obtenir une vue d'ensemble des séances observées. Chaque synopsis présente sur une échelle temporelle un découpage de la séance en termes de tâches, de modalités de travail fixées par l'enseignante, de repérage d'épisodes remarquables ou significatifs pour l'analyse didactique. Les interactions élèves-professeur sont ensuite analysées au travers de trois genèses {mésogenèse, chronogenèse, topogenèse}.

Dans le cadre de cet article, nous nous appuyons sur deux exemples prototypiques de ce que nous avons observé et que nous développons en deux temps : l'analyse des praxéologies algorithmiques puis l'analyse de la co-construction des savoirs mis à l'étude.

2.3. Analyse des praxéologies algorithmiques en classe de mathématiques

L'analyse praxéologique du savoir mis à l'étude a été conduite afin de pouvoir déceler si des éléments relevés par Knuth comme problématiques dans leur enseignement (aspect hybride de l'algorithmique, difficultés concernant les notions d'affectation, de variable, d'égalités, de validation) étaient perceptibles dans les dispositifs proposés par l'enseignante.

2.3.1 Première séquence : des algorithmes pour consolider des savoirs mathématiques

L'enseignante poursuit « officiellement » dans cette séquence deux objectifs : écrire un algorithme en langage naturel puis l'implémenter sur une calculatrice Texas (TI 82) ou Casio (Graph35). C'est ce qu'elle indique dans l'entretien ayant eu lieu avant la séance : « je veux qu'ils écrivent les algorithmes en langage naturel […], qu'ils les entrent dans la calculatrice ».

Trois types de tâches sont inscrits dans cette séquence : étudier des algorithmes déjà écrits, écrire des algorithmes, implémenter des algorithmes dans une calculatrice. Les tâches sont successivement :

- Étudier, en se situant dans un cadre géométrique, l'algorithme 1 permettant d'obtenir le milieu d'un segment à partir de deux points du plan.

- Étudier, en se situant dans un cadre numérique, l'algorithme 2 permettant d'obtenir $3x - 4$ à partir de x.

- Écrire puis implémenter dans la calculatrice un algorithme 3 permettant d'obtenir la moyenne pondérée de plusieurs notes ; l'enseignante choisit de faire écrire cet algorithme « *parce que l'on est à la fin du trimestre et les élèves sont motivés pour calculer leur moyenne générale* » (Entretien post-séance)

- Écrire puis d'implémenter dans la calculatrice plusieurs algorithmes portant sur des calculs de prix HT, TTC, taux d'évolution.

Dans cette section, nous nous intéressons à la séance 2 portant sur l'écriture d'algorithmes relatifs à des calculs de prix. Il est demandé aux élèves d'écrire les algorithmes suivants :

Algorithme 4 : écrire un algorithme qui permet de calculer une remise de t% sur un prix p Algorithme 5 : écrire un algorithme qui permet de calculer le prix final (après la remise), écrire ensuite un programme avec la calculatrice qui donne le prix final puis compléter le tableau Algorithme 6 : écrire un algorithme qui permet de calculer le prix HT connaissant le prix TTC et le taux de TVA Algorithme 7 : écrire un algorithme déterminant le taux de TVA (5,5% ou 7,5% ou 18,5%) connaissant le prix HT et le prix TTC.

Notons que les tâches proposées dans cette séance d'algorithmique correspondent à celles que l'on donnerait dans un cours de mathématiques. Le cours de mathématiques « classique » portant sur les pourcentages et l'utilisation du coefficient multiplicateur fait travailler principalement quatre types de tâches : le calcul de la remise (ou augmentation), le calcul du prix après réduction (ou augmentation), le calcul du prix initial, le taux d'évolution. Les tâches algorithmiques sont calquées sur des tâches mathématiques classiques.

L'écriture de l'algorithme 5 peut appeler plusieurs techniques :

Une technique τ_1 utilise le coefficient multiplicateur, exprimant la relation entre les deux prix :

$$\text{prix}_{\text{après augmentation}} = \text{prix}_{\text{initial}} \times (1 + t\ \%)$$

$$\text{prix}_{\text{après remise}} = \text{prix}_{\text{initial}} \times (1 - t\ \%)$$

Une autre technique τ_2 que les élèves de collège connaissent bien fait appel au calcul intermédiaire de la remise ou de l'augmentation :

$$\text{prix}_{\text{après augmentation}} = \text{prix}_{\text{initial}} + \text{montant de l'augmentation}$$

$$\text{prix}_{\text{après remise}} = \text{prix}_{\text{initial}} - \text{montant de la remise}$$

L'appel à cette dernière technique est d'autant plus naturel pour les élèves qu'ils viennent d'écrire un premier algorithme qui permet d'obtenir le montant de l'augmentation ou de la remise. Or, ainsi que nous le développerons plus loin dans l'analyse de l'action conjointe, l'enseignante écarte la deuxième technique au profit de la première technique qui vient juste d'être revue dans le cours de mathématiques.

La tâche que nous venons d'analyser est emblématique de la séquence :

- Toutes les tâches sont soumises à des organisations praxéologiques de différents ordres, chacune ayant un ancrage référentiel plus ou moins marqué dans une des deux disciplines (*cf.* schéma ci-après).

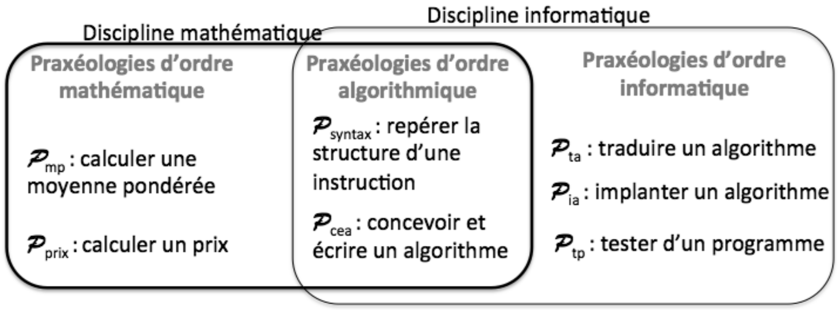


Figure 7. Praxéologies mises en œuvre dans la séquence 1

Nous observons que ces praxéologies sont dépendantes les unes des autres : la praxéologie $\mathcal{P}_{cea}$ fait appel à des praxéologies « auxiliaires », $\mathcal{P}_{mp}$ et $\mathcal{P}_{prix}$, nécessaires à l'écriture de la « phase de traitement » des algorithmes. L'implémentation des algorithmes nécessitera successivement la réalisation des praxéologies $\mathcal{P}_{ta}$ et $\mathcal{P}_{ia}$.

Le schéma ci-après résume les dépendances entre ces praxéologies.

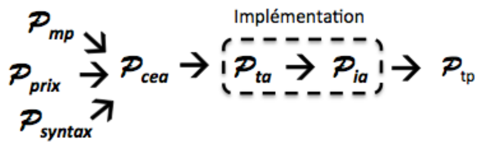


Figure 8. Dépendances entre les praxéologies de la première séquence

- La mise œuvre des algorithmes est fortement conditionnée par des praxéologies mathématiques : pour la praxéologie $\mathcal{P}_{cea}$, praxéologie algorithmique, la mise en œuvre de la technique mobilise des connaissances mathématiques qui sont des œuvres du milieu didactique. Parfois, ces œuvres peuvent être déjà connues de la classe (dans l'étude du premier algorithme, les élèves savent déterminer sans problème que le point I construit est le milieu du segment [AB]) mais parfois, elles peuvent nécessiter une étude préalable, de façon à rendre ces œuvres disponibles pour la classe (c'est le cas pour le calcul d'une moyenne pondérée ou le l'utilisation d'un coefficient multiplicateur pour le calcul de prix). L'écriture d'algorithmes devient alors, de par sa place dans l'organisation didactique, une tâche d'application ou de consolidation d'un savoir mathématiques sous un format particulier (celui d'un algorithme), un prétexte à consolider voire réinvestir une notion déjà étudiée dans le cours de mathématiques.

2.3.2. Deuxième séquence : des savoirs mathématiques pour écrire des algorithmes

L'enseignante appuie son projet d'enseignement sur des notions mathématiques stabilisées dans le milieu de l'élève. Elle pose d'emblée l'appareillage technologique qui sous-tend les activités algorithmiques proposées aux élèves en portant leur attention sur ce qui deviendra plus tard des éléments technologiques dans l'écriture des algorithmes :

Complétez les phrases suivantes :

P1 : Si $AB^2+AC^2=BC^2$ alors le triangle ABC est……………..

P2 : SI ………… Alors les vecteurs $\vec{u}$ (x,y) et $\vec{v}$(x',y'),dans un repère orthonormé (O,I,J,) sont colinéaires

P3 : Si………………..alors les points A,B et C sont alignés sinon ils ne sont pas alignés

P4 :Si mon âge est supérieur à …… ans alors je peux passer mon permis de conduire sinon je ne peux pas

P5

- *Avec le forfait téléphonique « liberto » ,il n'y a pas d'abonnement fixe mais l'heure d'appel est facturée 12 euros*
- *.Avec le forfait « freedom », le temps de communication est illimité mais le prix de l'abonnement est de 80 euros par mois.*

Si je téléphone 3h par mois alors je dois choisir le forfait……
Si je téléphone plus de……..h par mois alors je dois choisir le forfait………

Figure 9. Appareillage praxéologique pour la séquence 2

Cet appareillage étudié soit dans les années précédentes (théorème de Pythagore), soit quelques semaines auparavant (colinéarité de vecteurs, fonction affine), permet à l'enseignante de se centrer sur l'objectif principal : « *comprendre le 'si…alors…sinon' et utiliser le langage machine 'if…then…else'* » (Entretien post-séance). Le contrat didactique est explicitement algorithmique et informatique : « *On a cinq algorithmes à faire. Sur votre feuille, vous faites deux colonnes : une colonne ou vous écrirez le langage naturel. Le langage naturel, il doit être compris par n'importe quelle personne. N'importe qui doit comprendre votre algorithme en langage naturel. Par contre, le langage Texas ou le langage Casio, c'est pour vous. Mais surtout pour la machine, pour que le programme puisse tourner* ». La consigne donnée aux élèves est d'écrire cinq algorithmes correspondants aux cinq propositions étudiées précédemment (*cf.* Figure 9). Nous retrouvons les mêmes types de tâche qu'à la première séquence : étudier un algorithme déjà écrit, écrire des algorithmes et implémenter des algorithmes.

- Comme pour la première séquence, toutes les tâches sont soumises à des organisations praxéologiques d'ordre mathématique, algorithmique ou informatique (*cf.* schéma ci-dessous).

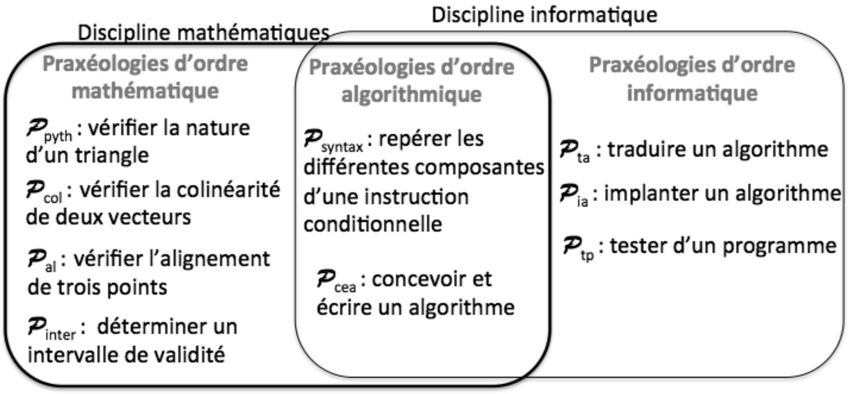


Figure 10. Praxéologies mises en œuvre dans la séquence 2

Par contre, les praxéologies mathématiques mobilisent cette fois-ci des techniques connues des élèves alors que la praxéologie $\mathcal{P}_{syntax}$, d'ordre algorithmique, mobilise des connaissances, non connues des élèves, nécessaires à l'écriture des algorithmes de la séquence. La conception et l'écriture d'algorithmes nécessite la réalisation des praxéologies mathématiques et de la praxéologie algorithmique $\mathcal{P}_{syntax}$. Nous schématisons ci-après la dépendance entre ces praxéologies.

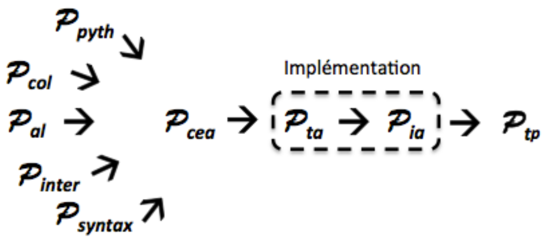


Figure 11. Dépendances entre les praxéologies de la seconde séquence.

- Le milieu didactique initial n'est composé que de matériaux considérés par l'enseignante comme connus des élèves : le théorème de Pythagore, la condition de colinéarité des vecteurs, les fonctions affines. Or, ainsi que nous le verrons dans la seconde partie, l'enseignante se heurte à une autre difficulté : les élèves restent dans un cadre géométrique, ne basculant pas dans un cadre algorithmique.

2.3.3. *Pour conclure sur l'organisation praxéologique retenue par cette enseignante*

Les organisations praxéologiques des deux séquences s'appuient essentiellement sur des praxéologies mathématiques. En première séquence, la construction d'algorithmes vient en fin de processus d'apprentissage de concepts mathématiques montrant qu'implicitement la visée était principalement de consolider des savoirs mathématiques. Dans la seconde séquence, le projet didactique est résolument algorithmique, mais les tâches proposées reposent sur des savoirs emblématiques des mathématiques nécessitant des passages dans différents cadres conceptuels pour pouvoir manipuler des concepts algorithmiques.

Comment la co-construction des savoirs algorithmiques a-t-elle alors lieu au sein de la classe ?

2.4. Analyse de la co-construction de ces savoirs en classe

Pour analyser la co-construction d'un savoir algorithmique, nous avons utilisé les outils d'analyse de l'action conjointe en didactique (ACD) tels que les avons brièvement décrits dans la section « cadre théorique ».

2.4.1. Première séquence : variable et affectation, deux concepts problématiques

Une désignation floue du concept de variable algorithmique

Rappelons que selon Knuth (1968), l'affectation, en lien avec la notion de variable, est une des opérations conceptuellement la plus difficile à comprendre. Nous avons donc observé l'enseignante aux prises avec cette difficulté, difficulté se traduisant d'abord par l'utilisation d'un vocabulaire imprécis : mettre, lettre, stockage, mémoire, flèche, Sto, égal, variable, affecter. Ce flou, se traduisant par un vocabulaire approximatif, entraine un ensemble de questions de la part des élèves, questions qui révèlent une incompréhension quant à la nature même de cet objet :

> E1 : « et le résultat de ça, je vais mettre un nombre, un chiffre… Un nombre … Je vais mettre un nom ? » (E écrit par le geste un « X ») (séance 2)
>
> Une séance plus tard, un autre élève, lors du codage en langage machine :
>
> E2 : « peu importe la lettre ? »

Extrait 1 : interrogation sur la notion de variable

Cette incompréhension fait écho à une autre, à propos de la notion d'affectation : celle-ci est introduite par l'emploi des verbes « mettre » (en séance1) et « stocker » (en séance 2). Dans la séance 3, L'enseignante introduit le terme institutionnel « affecter » qui est ensuite utilisé de façon quasi-systématique par les élèves. Par la suite, dans la traduction des algorithmes en langage machine (Texas ou Casio), elle est amenée à utiliser indifféremment les deux termes : « flèche » et « STO » (séances 2 et 3).

L'affectation, concept problématique

Une analyse plus fine des interactions entre les élèves et l'enseignante à propos de la question de l'affectation, montre comment l'enseignante tente de faire accepter aux élèves l'utilisation d'un résultat de cours, mais qui du coup ne lui permet pas d'étudier pleinement le concept d'affectation. Tout d'abord, nous remarquons que les premiers algorithmes étudiés ne mettent en jeu qu'une seule variable, le traitement s'écrivant en une seule instruction et l'affectation du résultat précédant son affichage. Dans cette configuration, pour bon nombre d'élèves la fonction STO d'affection est réservée au résultat du calcul, juste avant l'affichage avec la fonction DISP. On peut penser que les notions de mémoire et d'affectation ne sont pas comprises et que l'instruction d'affectation est associée à l'instruction d'affichage. Ceci n'est pas sans conséquences sur la chronogenèse du savoir relatif au concept d'affectation. Nous l'illustrons au travers de trois épisodes remarquables, issus de la première séquence.

Lors de l'écriture de l'algorithme 5, nous assistons à un jeu de persuasion à propos du calcul d'un prix réduit, entre des élèves ancrés dans des connaissances antérieures (passage par le calcul de la remise) et l'enseignante qui veut leur faire utiliser une formule factorisée, formule établie lors d'un cours sur les fonctions affines.

Premier épisode : intrusion de la calculatrice dans l'écriture de l'algorithme

Les élèves ont écrit et implémenté avec succès un premier algorithme (calcul du montant de la remise à partir du prix et du taux de réduction). Pour écrire le second algorithme qui permet d'obtenir le prix remisé, plusieurs élèves souhaitent écrire les deux opérations qu'ils utilisent habituellement : calculer la remise, puis effectuer une soustraction pour obtenir le résultat escompté.

Ayant trouvé dans un des menus de la calculatrice le symbole « = », l'élève E3 pense pouvoir l'utiliser pour les calculs intermédiaires, comme il le ferait en mathématiques et stocker le résultat final dans une variable :

Tdp[5] 1	E3	comment on fait le « = » ?
Tdp 2	P	comment le …
Tdp 3	E3	le « = »
Tdp 4	P	pourquoi tu as besoin du « = » ?
Tdp 5	E3	ben pour faire égal !
Tdp 6	P	pourquoi f… Pour où ? …oui ?
Tdp 7	E3	Prompt p,
Tdp 8	P	Oui
Tdp 9	E3	Prompt t

[5] Tdp : tour de parole

Tdp 10	P	Oui
Tdp 11	E3	je vais faire p*t/100
Tdp 12	P	mmm
Tdp 13	E3	et le résultat de ça, je vais mettre un nombre, un chiffre… Un nombre … Je vais mettre un nom ? (E12 écrit un « X » gestuellement)
Tdp 14	P	Oui
Tdp 15	E3	par exemple x, je ferai x moins p
Tdp 16	P	oui. Hé bé … alors ?
Tdp 17	E3	comment je ferai le « égal » pour trouver ?
Tdp 18	P	on va toujours utiliser la flèche, en fait.
Tdp 19	E3	ah je fais sto…
Tdp 20	P	tu ne tu ne mets pas égal, voilà. Tu le stockes dans une mémoire, hein, et on va se resservir de cette lettre pour la mettre ensuite dans une autre mémoire
Tdp 21	E3	Ok
Tdp 22	P	ou la même. Comme tu veux.
Tdp 23	E3	(parlant tout seul) prompt p, prompt t …
Tdp 24	P	(s'éloignant) ben, sinon demain, on verra qu'on peut… On est pas obligé de faire comme tu fais
Tdp 25	E3	ah ouai ? hé madame, c'est quoi là ? Il y avait « plus », « moins » , « différent » …
Tdp 26	P	oui, c’est dans test. Mais on verra plus tard…

Extrait 2 : épisode 1 (séquence 1 - séance 2)

Cet épisode montre l’intrusion de la calculatrice dans l’activité d’écriture. Si E3 écrit bien le premier algorithme « à la main », il écrit le second directement dans la calculatrice. L’enseignante est alors happée par les questions de E3 (Tdp 7, 9 et 19) qui l’entrainent sur un terrain informatique : elle répond dans le langage de la calculatrice et non dans un langage algorithme. À la fin de cet épisode, l’enseignante s’éloigne sans apporter de réponse de type algorithmique quant à l’écriture d’une ou deux instructions et/ou l’utilisation d’une ou deux variables dans l’algorithme. En position topogénétique basse, elle ne rebondit pas sur les remarques de E3 pour agir sur l’avancée du savoir algorithmique.

Deuxième épisode :

En réalité, l’enseignante reste concentrée sur un objectif : écrire le traitement en une seule opération, opération qu’elle cherchera à conforter plus tard dans une phase de régulation :

Tdp 1		E12	ah moi je sais pas comment on fait le « égal », je n’ai pas compris
Tdp 2		P	Le « égal », je te dis, vous utilisez le stockage là. (Le professeur montre le tableau ci-contre :) Casio ? → X M ▲
Tdp 3		E12	ouais mais…[E12 se prend la tête dans les mains]

Tdp 4		P	vous mettez dans… [Le professeur écrit au tableau]. Si vous avez 20 % de remise, comment vous avez fait pour calculer ? Vous avez fait 32 – 20 % de 32. E12, toi tu veux faire en deux opérations. Si tu veux faire en **une seule opération**. Tu fais 32 – 20 % de 32. On est d'accord ?
			[E12 hoche la tête.]
			On peut mettre 32 en …? En facteur ! Ça c'est ce qu'on va voir jeudi. Hein ? Quand on fait une remise de 20 %, **on peut multiplier directement** le prix initial 32 par 1 – *t* %. J'ai vu qu'il y en a qui avaient mis la formule. […] Bon, E13, tu n'y as pas pensé ? À écrire $32\left(1-\frac{20}{100}\right)$, c'est-à-dire 32 × 0,8. Vous avez **directement** le prix remisé, comme ça. Et vous avez **une seule opération** si vous ne voulez pas faire l'étape « je calcule la remise et j'enlève la remise » … C'est ce qu'on va voir demain, pour terminer le cours. Ou plutôt jeudi… Pensez bien que **plutôt que le faire en deux opérations**, vous pouvez utiliser ça. (Le professeur montre le tableau). Diminuer, c'est faire, c'est multiplier par 1 – *t*%. Diminuer de *t*%. Et donc on revient **avec une seule opération**.

Extrait 3 : épisode 2 (séquence 1 - séance 2)

À la fin de cette deuxième séance, nous constatons que plusieurs élèves ne cherchent pas à effectuer le traitement en une seule opération. Pour ces élèves, la confusion entre le signe « = » repéré dans un des menus de la calculatrice et l'opération d'affection demeure. L'enseignante, quant à elle, cherche à convaincre de l'intérêt de l'utilisation du coefficient multiplicateur (1 – t %). Pour cela, elle rappelle la technologie justifiant cette technique, la factorisation, et use d'arguments d'économie (en gras dans l'extrait 3). L'expression « *Bon, E13, tu n'y as pas pensé ?* » (tdp 4) suggère qu'en se plaçant en surplomb, elle espère remporter l'adhésion des élèves. La troisième séance permettra aux élèves d'affirmer leur point de vue.

Troisième épisode :

Ainsi que le montre l'échange ci-dessous, l'enseignante finit par accepter la proposition des élèves d'effectuer le traitement en deux étapes, et donc d'utiliser deux variables. Elle avance cette fois-ci un argument algorithmique : « ça va faire une ligne de calcul de plus ». On peut supposer qu'elle ne souhaite pas faire implémenter deux lignes de calculs, ce qui pourrait l'amener à discuter de la signification du « = » en informatique, mais du coup ne lui permet pas de saisir l'opportunité d'approfondir les concepts d'affectation et de variables. Notons toutefois qu'elle mentionne pour la première fois, sans s'y attarder, l'écrasement d'une variable.

Tdp1	E5	pourquoi on ne fait pas P – R ?
Tdp2	P	alors, si on fait P – R… On peut faire un algorithme où on fait d'abord calculer la remise, et puis après on va faire P – R. **Ça va rajouter une ligne de calcul.** Dans ton algorithme, ce serait un algorithme où on ferait calculer R, c'est-à-dire on ferait calculer $P\times\frac{t}{100}$, et après calculer P – R. Et après, tu le mettrais dans une autre lettre ou encore dans P et après voilà. Ça va marcher aussi. Si vous l'avez programmé avec la machine, tu as dû voir que ça marchait.

Extrait 4 : épisode 3 (séquence 1 - séance 3)

L'analyse de cette séquence nous a conduit à deux constats :

- Élèves et enseignant ne poursuivent pas la même démarche : les élèves cherchent à écrire un algorithme en réinvestissant des connaissances anciennes alors que l'enseignante cherche, tout en faisant travailler l'écriture d'un algorithme, à asseoir un savoir mathématique en cours d'apprentissage, vu précédemment en « papier-crayon » dans un cours traditionnel. Néanmoins, l'enseignante finit par accepter la démarche algorithmique proposée par les élèves. Dans cette séquence, ce sont principalement les élèves qui agissent sur la chronogenèse du savoir algorithmique.

- L'aspect informatique est prédominant : le langage utilisé, et par les élèves et par l'enseignante, appartient plus au domaine informatique (« stocker », « prompt ») qu'au domaine algorithmique. Cet aspect est majoré par le fait que élèves travaillent sur la calculatrice sans passer par l'activité d'écriture « papier-crayon ».

2.4.2 Deuxième séquence : difficultés dans les changements de cadres conceptuels

Nous présentons ici deux épisodes significatifs de la difficulté des élèves à passer d'un cadre géométrique à un cadre numérique pour ensuite travailler dans un cadre algorithmique. L'objectif de l'enseignante dans cette séquence est de faire travailler l'instruction conditionnelle « Si … alors … sinon ».

La tâche de l'élève est d'écrire un algorithme vérifiant : qu'un triangle est rectangle dans le premier épisode ; la colinéarité de deux vecteurs dans le deuxième épisode. Les deux extraits ci-dessous révèlent que les élèves E12, E22 et E23 n'ont pas pris encore conscience de la nature des objets mathématiques en jeu dans l'écriture des algorithmes. Dans l'extrait ci-dessous, E12 inscrit en entrée les sommets du triangle, faisant une confusion entre A (tdp 3 et tdp 5), sommet du triangle et la mesure *a* d'un côté du triangle. C'est l'enseignante qui oriente les élèves sur des objets numériques, ici les coordonnées du point A (tdp 8).

Tdp 1	E 12	bein, quand on écrit, il faut marquer quoi...
Tdp 2	P	Voilà. On va rentrer les différentes longueurs des côtés du triangle et c'est l'algorithme du programme qui dira si le triangle est rectangle ou pas. Alors en entrée, qu'est ce qu'on met ? Qu'est ce qu'il va falloir écrire en entrée ?
Tdp 3	E 12	les points
Tdp 4	P	Les points, ça veut dire quoi les points ?
Tdp 5	E 12	Ben heu … bein prompt a, déjà
Tdp 6	P	Prompt a, ça veut dire quoi pour toi ?
Tdp 7	E 12	Le point …
Tdp 8	P	Tu voudrais rentrer les coordonnées du point A…

Extrait 5 : recherche des entrées de l'algorithme 1 (séquence 2 – séance 1)

Dans l'extrait 6, les deux élèves E22 et E23 prennent conscience du changement de cadres qu'elles doivent opérer (tdp 9). L'enseignante, usant de la technique du trilogue (Schubauer-Leoni, 1997), indique aux élèves les noms des variables, s'appuyant sur les contraintes de la calculatrice, mais éludant du même coup le travail sur la notion de variable en mathématique et en algorithmique.

Deux élèves filles au fond de la classe appellent le professeur		
Tdp 1	E23	ici c'est des nombres qu'il faut demander ? Alors que c'est des vecteurs ...
Tdp 2	P	oui. Alors il faut demander les coordonnées. Que tu écrives demander les coordonnées du vecteur U. Et entre parenthèses, c'est a et b par exemple. Tu vois c'est une bonne remarque çà.
Tdp 3	E22	mais on ne marque pas x, y ?
Tdp 4	P	il faut que tu marques... Il faut en demander quatre nombres. Il y a quatre entrées dans cet algorithme.
Tdp 5	E23	x et x'
Tdp 6	P	[élevant la voix] Si tu veux. Sur ta machine, tu n'as pas x' y'. C'est pour ça que je vous conseillais d'écrire a b c d
Tdp 7	E23	Oui mais si … parce que là c'est c'est … du coup, je ne marque pas entre parenthèses vecteur U et vecteur V
Tdp 8	P	Vaut mieux faire le contraire. Vaut mieux que tu marques demander les coordonnées du vecteur U, entre parenthèses tu marques a b. Et les coordonnées du vecteur V, entre parenthèses c d.
Tdp 9	E23	Le vecteur v, on ne peut pas le faire sur la calculatrice
Tdp 10	P	Non. Il faudra que tu demandes un nombre. Tu demanderas a et b. C'est comme si c'était xA et xB ou heu …xU et xV

Extrait 6 : recherche des entrées de l'algorithme 2 (séquence 2 – séance 2)

L'enseignante pare les difficultés des élèves en prenant en charge l'avancée du savoir lors de corrections collectives pour chacun des algorithmes ce qui amènera peu à peu les élèves à écrire seuls le dernier algorithme. La trace écrite (figure ci-après) montre la volonté de l'enseignante de dissocier ce qui relève de l'algorithmique ou de l'informatique.

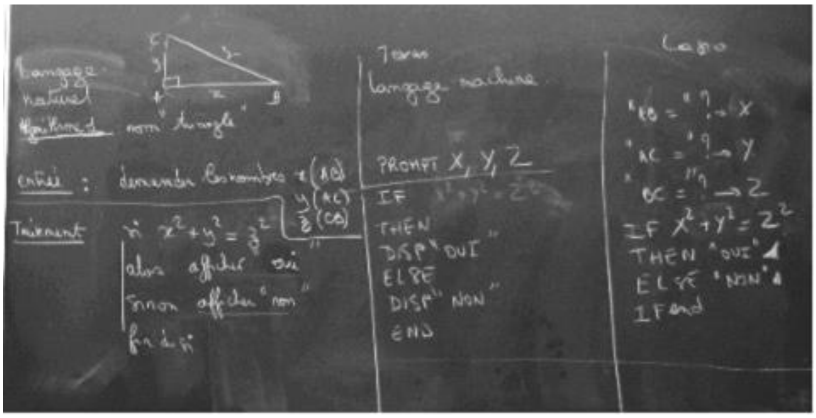


Figure 12 : correction de l'algorithme 1 (séquence 2 – séance1)

L'analyse de cette séquence nous a conduit à deux constats :

- L'enseignante, en constituant le milieu didactique d'objets mathématiques connus de longue date des élèves, fait le choix de centrer la séquence sur des apprentissages algorithmiques. Pour autant, les élèves ne réussissent pas à entrer dans la démarche algorithmique car ils n'ont pas conscience de la nature des objets entrant en jeu dans un algorithme.

- L'enseignante prend en charge l'avancée du savoir en se situant en surplomb : elle oriente les élèves en leur indiquant les variables en jeu abaissant ainsi l'enjeu didactique en algorithmique ; le travail sur la notion de variable en mathématique et en informatique est évité.

3. Discussion : de la difficulté d'enseigner un savoir sous couvert de deux disciplines de référence

Si les textes officiels préconisent l'étude de l'algorithmique dans tous les domaines d'étude en mathématiques, ils ne donnent pas d'indications sur la ou les manières de l'introduire au sein du cours. L'observation d'un enseignement d'algorithmique dans une classe 'ordinaire' de seconde montre les difficultés d'enseigner un savoir se référant à deux disciplines. Les praxéologies algorithmiques mises à l'étude par cette enseignante au travers des tâches qu'elle propose mettent en évidence deux orientations. L'enseignante oscille entre deux positions : consolider des savoirs mathématiques en écrivant des algorithmes et/ou écrire des algorithmes pour construire des programmes utiles dans et hors le cours de mathématiques. Dans les deux cas, elle respecte bien les injonctions du programme qui incitent à placer l'algorithmique « dans tous les champs des mathématiques » (MEN, 2009a).

(i) Toutes les tâches d'écritures d'algorithmes mettent en œuvre des concepts mathématiques et toutes ont donné lieu à une implémentation dans un langage informatique, celui de la calculatrice des élèves. Les activités d'écritures d'algorithmes mettent en œuvre des concepts étudiés peu de temps de temps auparavant dans le cours de mathématiques : « *En fait, j'aime bien les mettre en fin de cours [les algorithmes]* » (entretien ante ; séquence 2 - séance 2). Nous interprétons ce propos comme une manière de réinvestir, voire consolider, des apprentissages récents. Ce disant, l'enseignante dévoile que le projet didactique est, en filigrane, d'ordre mathématique. Cette approche est confortée par les préconisations institutionnelles : « *L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité, logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante* » (MEN, 2009a). On peut alors comprendre que la place dévolue à l'algorithmique soit comprise comme une « mise en textes algorithmiques » de concepts mathématiques étudiés dans le cours de mathématiques, ce qui nous autorise à poser la question de l'enjeu d'étude de l'algorithmique : l'enjeu est-il d'aborder des concepts mathématiques sous un autre angle, ou d'étudier des concepts algorithmiques ? Reprenant la formulation de Modeste (2012, p. 239), l'algorithme est-il un « *outil [didactique] d'enseignement ?* »

(ii) Par ailleurs, l'enseignante a une vision informatique de l'algorithmique : pour elle, il est important que les élèves « *fassent des programmes qui leur servent* » (entretien ante ; séquence 1 - séance 1). Cette manière d'aborder l'algorithmique en favorisant son versant informatique est elle aussi confortée par les documents officiels qui présentent presque tous les algorithmes codés dans un langage informatique. La volonté de produire un programme « opérationnel » a pour conséquence de donner le prima à la calculatrice ou au logiciel aux dépens d'activités purement algorithmiques telles que la validation ou le traçage de la variable, activités qui permettraient alors de se centrer sur l'étude de quelques concepts algorithmiques : variable, affectation par exemple. Notons aussi que dans cette approche, la calculatrice devient alors un outil de validation, ce qui est en contradiction avec ce qui se fait habituellement dans les autres parties du programme mathématique où la calculatrice, tout comme le tableur ou la figure géométrique, sont considérés comme des éléments initiateurs d'une conjecture qui sera ensuite prouvée avec des outils mathématiques. Ceci nous autorise à poser à nouveau la question de l'enjeu d'étude : est-il programmatique ou algorithmique ?

(iii) La deuxième séquence montre les difficultés de changements de cadres conceptuels que les élèves ont à effectuer lors de l'écriture des algorithmes. Ces difficultés peuvent s'expliquer par une absence de réflexion sur la nature des objets travaillés sur le plan mathématique, algorithmique ou informatique. Ainsi, comme l'écrit Briant dans sa thèse, « *l'élève, devant la tâche de concevoir un algorithme et un programme dans un environnement informatique, se voit dans une situation de décomposer chacune de ses actions en actions élémentaires. Cette décomposition passe par une réflexion nécessaire sur les objets mathématiques en jeu dans la tâche à effectuer et oblige les élèves à revenir sur leurs conceptions de ces objets.* » (Briant, 2013, p. 553). Les résultats produits dans cette étude de cas contribuent à la suite de cet auteur à questionner d'une autre manière l'enjeu d'étude de l'algorithmique dans les programmes actuels : en quoi l'approche algorithmique des concepts peut-elle alimenter une réflexion sur les objets mathématiques, et réciproquement sur les objets informatiques ?

4. Conclusion

Il ressort de cette analyse que la vision de Knuth (1973) quant à l'hybridité de l'algorithmique est bien perceptible tant dans les textes institutionnels que dans les pratiques observées. Le concept de praxéologie emprunté à la TAD et les descripteurs de l'action conjointe (TACD) ont permis de faire émerger les savoirs mis à l'étude en algorithmique dans une classe ordinaire en montrant combien les préconisations du programme rendent difficiles autant les actions du professeur que celles des élèves. Dans notre analyse de cas, nous montrons qu'enseignant et élèves travaillent séparément les aspects de l'algorithmique, ne tenant pas ainsi compte de son hybridité : l'enseignante le met à l'étude sous couvert des mathématiques ***puis*** sous couvert de l'informatique ; les élèves quant à eux, dans l'action conjointe, tendent à valoriser le versant informatique dans ses dimensions techniques. Nous rejoignons ainsi des résultats de recherches en didactique montrant que les objets d'enseignement déclarés à l'interface de deux disciplines sont difficilement transposables dans leur double référence (Devos-Prieur & Grandaty, 2011 ; Leutenegger, 2008 ; Schubauer, Leutenegger & Forget, 2007). Dans cette étude, et comme l'ont montré ces auteurs, nous avons mis en évidence que l'objet algorithmique, de nature hybride (Knuth, 1968) avance au fil du temps didactique soit sous couvert d'une discipline (les mathématiques), soit sous couvert d'une autre (l'informatique).

Pour autant, dans la perspective de résolution de cette difficulté didactique, les récents travaux de Modeste (2012) et de Briant (2013) posent d'une autre manière la question de l'intégration du domaine de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques au lycée. Modeste montre dans sa thèse que l'algorithme tel qu'il est présenté dans les textes officiels est « *une transposition partielle du concept principalement orientée vers la programmation et l'usage de l'algorithme comme un outil* » et propose des situations didactiques « *mettant en jeu des activités de preuve ou de recherche dans un contexte de résolution de problèmes* ». Briant, à propos de l'enseignement de l'algèbre, soutient qu'algorithmique et programmation obligent « *à revenir sur les conceptions des objets* » et ouvre « *un nouveau registre de représentation pour les objets de l'algèbre* ». Ces propositions donneraient alors pleinement vie à l'enseignement des concepts algorithmiques dans l'enseignement des mathématiques sous réserve d'un *« équipement praxéologique de la profession, équipement comportant à la fois des savoirs savants et des savoirs pour enseigner »* (Briant, 2013, p. 545) qui s'avère indispensable.

Remerciements

Je tiens à remercier Chantal Amade-Escot, Gisèle Cirade ainsi que les relecteurs de la revue pour leur aide précieuse. Sans leur soutien et leurs remarques avisées, cet article n'aurait peut-être pas vu le jour …

Bibliographie

ARTIGUE M. (2002), Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol 7, n°3, 245-274.

APMEP (2014). Réforme du lycée : un premier bilan pour la classe de seconde. http://www.apmep.fr/Reforme-du-lycee-un-premier-bilan

ASTI-ITIC (2007). Pour un enseignement de l'Informatique et des Technologies de l'Information et de la Communication au lycée. http://www.epi.asso.fr/revue/editic/asti-itic-lycee-prog.htm

ATHIAS F. (2014), « *La géométrie dynamique comme moyen de changement curriculaire* » Thèse de doctorat. Université Aix-Marseille.

BRIANT N. (2013), *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

BRIERE-GUENOUN F. & AMADE-ESCOT C. (2010), Analyse in situ des savoirs mobilisés par un professeur d'éducation physique et sportive dans l'interaction didactique. *Revue Suisse des sciences de l'éducation*, **32(2)**, 595-614.

BOSCH M. & GASCON J. (2002), Organiser l'étude 2. Théories et empiries dans Dorier, J.-L. et al. (Eds). Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage, 21-30 Août 2001, 23-40.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19.2**, 221-265.

CHEVALLARD Y. (1985), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x,* **5**, 51-94.

COUDERETTE M. (2013), *Enseignement de l'algorithmique en cours de mathématiques en classe de seconde.* Communication orale au 3ème colloque international de l'ARCD : "Savoirs, compétences, Approches comparatives de l'organisation des contenus, et des formes, de l'étude ; variations et constantes disciplinaires, institutionnelles, culturelles", Marseille.

DEVOS-PRIEUR O. & GRANDATY M (2011), *Les retombées de la formation continue : articulation des contenus enseignés en EPS et Maîtrise de la Langue chez un maître formateur et un Professeur d'école.* Communication orale au 2ième colloque international de l'ARCD : "Les contenus disciplinaires", Lille. In CD rom des actes.

DOWEK G. (2008), Les rencontres de l'Ormes 2008. Séminaire de l'ASTI http://www.epi.asso.fr/revue/docu/d0805a.htm

GASCON J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à "l'arithmétique généralisée, *Petit x* **37**, 43-63. Grenoble : Université Joseph Fourier.

HASPEKIAN M. & NIJIMBERE C. (2012), Les enseignants face à l'entrée de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques au lycée, dans M. Gandit & B. Grugeon (dir.) Actes du 19e colloques de la CORFEM. IUFM Franche-Comté, juin 2012, 265-285.

HOARE C. (1969), An Axiomatic Basis for Computer Programming. Communications of the ACM, 12, 576-583.

KAHANE J.-P. (2002), Enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques : Rapport au ministre de l'éducation nationale (O. Jacob, Ed.). Paris : CNDP. Disponible sur http://smf4.emath.fr/ Enseignement/Commission Kahane/

KIERAN C. (1981), Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in Mathematics **12*****(3)**, 317-326.

KNUTH E. et al. (2006), Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, **37***(**4)**, 297-312. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/30034852

KNUTH D. E. (1968), *The Art of Computer Programming*, Vol 1 : Fundamental Algorithms (2e éd.). Addison-Wesley.

LEUTENEGGER F. (2009), *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique*. Berne, Peter Lang.

LEUTENEGGER F. (2008), L'entrée dans une code écrit à l'école enfantine et l'articulation entre le collectif et l'individuel : comparaison de deux études de cas. *Éducation & Didactique,* **2(2)**, 7-42.

Ministère de l'Éducation Nationale (2009a). Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.
http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

Ministère de l'Éducation Nationale (2009b). Ressources pour la classe de seconde, Algorithmique ; EduSCOL, DGESCO.
http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe-au-college-et-au- lycee.html

Ministère de l'Éducation Nationale (2014). Ministère de l'Éducation nationale. Commission de suivi de la mise en œuvre des programmes de mathématiques. DGESCO.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/01/6/CSM-projet-rapport2013_293016.pdf

MODESTE S. (2012), *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble.

MODESTE, S., GRAVIER, S., OUVRIER-BUFFET, C. (2010). Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères-Irem*, **79**.

NGUYEN C-T. (2005), *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble.

SALONE J.-J. (2015) « *Les Références Praxéologiques dans les Systèmes Didactiques* » Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille.

SCHUBAUER-LEONI M.-L. (1997), « Interactions didactiques et interactions sociales : quels phénomènes et quelles constructions conceptuelles ? ». *Skholê,* **7**, 103-134.

SCHUBAUER-LEONI, M.L. ; LEUTENEGGER, F. ; FORGET, A. (2007). L'accès aux pratiques de fabrication de traces scripturales convenues aux commencements de la forme scolaire : interrogations théoriques et épistémologiques. *Éducation & didactique*, **1(2)**, 7-35

SENSEVY, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds.) (2007), *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*, 13-49. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

MICHELE COUDERETTE
ESPE Midi Pyrénées
michele.couderette@univ-tlse2.fr

ASUMAN OKTAÇ

ABSTRACT ALGEBRA LEARNING: MENTAL STRUCTURES, DEFINITIONS, EXAMPLES, PROOFS AND STRUCTURE SENSE

Abstract. A reflection is made about Abstract Algebra Learning, motivated by the reading of an article published previously in this journal. The reflection involves elements of APOS (Action – Process – Object – Schema) Theory and related published works as well as results from other studies involving definitions, examples, proofs and structure sense.
Keywords: Abstract Algebra, group theory, mental structure, definition, example, proof, structure sense

Résumé. Apprentissage de l'Algèbre Abstraite : Structures mentales, définitions, exemples, démonstrations et sens de la structure. Une réflexion est présentée autour de l'apprentissage de l'Algèbre Abstraite, motivée par la lecture d'un article publié dans cette revue. La réflexion inclut des éléments de la théorie APOS (Action – Processus – Objet – Schème) et des travaux publiés en relation avec cette théorie, ainsi que les résultats d'autres recherches incluant définitions, exemples, démonstrations et sens de la structure.
Mots-clés. Algèbre Abstraite, théorie de groupes, structure mentale, définition, exemple, preuve, sens de structure

---

1. Introduction

The writing of this paper came about after reading the article of Durand-Guerrier, Hausberger & Spitalas (2015) about the prerequisite knowledge for the learning of Modern Algebra (or Abstract Algebra). Rather than being a *reply* to that article, it can be thought of as a *complement*, and perhaps the latter view would allow us to understand better some results that the authors present in their study.

The intention of this paper is mainly two-fold: On the one hand to offer a non-exhaustive review of studies in order to outline what research has found out about Abstract Algebra learning, and on the other, to discuss some aspects that interact with this learning and that are mentioned in the Durand-Guerrier et al. article, such as the generation and use of examples; the role that definitions play; production of proofs; and structural thinking. In relation with this focus, some results from research in Linear Algebra learning are also mentioned.

Other aspects raised by Durand-Guerrier, Hausberger & Spitalas (2015) are not less important, such as the use of quantification, the relationship between Linear Algebra and Abstract Algebra, and the role of logic in understanding mathematical structures, also motivate reflections, but are left to a possible future article.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 297 - 316.

2. Research on Abstract Algebra Learning and Teaching

In 2001 Findell wrote that a literature search using specific criteria revealed 15 articles on the learning of Abstract Algebra; 11 of these were published since 1994, of which 9 originated from the work of Dubinsky, Leron and their collaborators. Since 2001 there have been an increase in this kind of studies, although it can still be claimed that the number of published studies in this area is slim compared to others at the undergraduate level, such as calculus and analysis, as noted by Durand-Guerrier et al. (2015) as well. On the other hand APOS-related work constitutes a major part of the growing body of research (Arnon et al., 2014) on Abstract and Linear Algebra learning and teaching. These studies offer insight into different aspects of the learning process; given the situation, studies carried out using this theoretical framework deserve some credit in an article about the learning of Abstract (Modern) and Linear Algebra.

Concepts such as binary operation, group, subgroup, center of a group, isomorphism, coset, normality, quotient group, permutations and symmetries have been researched and discussed in several publications (Asiala et al., 1997; Asiala et al., 1998; Brown et al., 1997; Dubinsky et al., 1994; Leron and Dubinsky, 1995). In these studies, usually through the design of a preliminary genetic decomposition that indicates a possible way to learn a certain mathematical concept, researchers explicitly state the proposed mental stages involved in constructing it. This is the first step of the research cycle, known as the *theoretical analysis*. After this is done, instructional strategies developed specifically with the purpose of motivating the proposed mental constructions in the genetic decomposition are implemented, constituting the second step of the research cycle. One common strategy in this phase has been the use of computer programming to help with the interiorization of Actions into Processes and encapsulation of Processes into Objects. Finally, data is collected mainly through interviews in order to observe whether the mental path sketched by the genetic decomposition is in line with how students seem to be learning the concept in question. The cycle is iterated until a satisfactory explanation is reached in terms of student understanding; this happens when the theoretical analysis and empirical findings converge.

The mental structure known as Action is constructed when an individual responds to an external cue such as a formula or an algorithm and is applied to previously constructed objects. When they are repeated and reflected upon, they are converted into Processes via the mechanism of *interiorization*. When there is need to apply Actions on Processes, they are *encapsulated* into Objects to which actions can be applied (for more information about APOS Theory and its components, the reader can consult Trigueros & Oktaç, 2005; and Arnon et al., 2014). In this theory, if supported by empirical evidence, student failure is attributed to the lack of required mental structures, construction of Objects through the mechanism of encapsulation being the most difficult stage to achieve (Arnon et al., 2014).

According to Dubinsky et al. (1994) “An individual's knowledge of the concept of group should include an understanding of various mathematical properties and constructions independent of particular examples, indeed including groups consisting of undefined elements and a binary operation satisfying the axioms. Even if one begins with a very concrete group, the transition from the group to one of its quotients changes the nature of the elements and forces a student to deal with elements (e.g., cosets) that are, for her or him, undefined.” (p. 268)

In Brown et al. (1997) a genetic decomposition of the group concept is given in terms of the coordination of three schemas: set, binary operation and axiom; in fact, the first two are coordinated through the third one. The need for this coordination is pretty obvious since literature reports that there are students who think about a group as a set without being aware of the role that the binary operation plays and this has consequences on their subsequent understanding of Group Theory concepts (Dubinsky et al., 1994; Iannone & Nardi, 2002). As Findell (2001) notes, “The operation gives the group its structure. In other words, a group without its operation is merely a formless collection of elements” (p. 131). The failed coordination is typically evident in affirmative answers to questions of the type “Is Z_3 is a subgroup of Z_6?” (Hazzan & Leron, 1996) or when students claim “that the identity in Z_3 is inherited from Z_6” (Findell, 2001, p. 152) or even that associativity in Z_6 is inherited from Z (Findell, 2001), or still, that any subset of a group inherits closure (Fukawa-Connelly, 2007). Furthermore, Iannone and Nardi (2002) observed that students interpreted the group axioms as being properties of the group’s elements rather than those of the binary operation.

In order to illustrate the mental structures of Action, Process and Object, we can consider the example of the coset concept. A student with an Action conception can form cosets of familiar groups, such as Z_{18} but would have difficulty of doing it for groups such as D_3. As the following extract illustrates, in forming the cosets of $H = < 3 >$ the student needs to write down explicitly the steps in performing calculations in an algorithmic manner, and may be confused about whether in forming the cosets of the form aH, a runs through H (subgroup) or G (the group):

> **Cal:** Well, the number in front is what you add to each element inside the set. So zero added to these six elements would keep the same six. One [the number] added to each, which is in the first column, would give you the 1, 4, 7, 10 and then you add 2 these first the H which is zero through 6, 9, 12, 15. Then you add 2 to each and you get 2,5,8,11,14 and 17. (Dubinsky et al., 1994, p. 283)

With a Process conception, the student can think about forming the cosets without having to actually write them down and may begin to observe patterns, in forming sets of the form, for example, $1+ < 3 >$ in Z_{18}, and can decide when to stop:

> **Lon**: Okay, yeah. I should have said that $3 + H$, of course, which is a coset in its own right, is equal to the coset $0 + H$ because you get the same members as if you had added 0. Same goes with 4, 5, 6 and so on. (Dubinsky et al., 1994, p. 284)

When the Process of coset formation is encapsulated into an Object, actions can be performed on it such as multiplying them, forming sets using them as elements and preparing operation tables using labels for them. When necessary, the student can *de-encapsulate* the Object to go back to the underlying Process:

> **Jocelyn**: It's uh, for subgroups you can pick representatives and just multiply them and then your answer will be the coset that contains the product.
>
> …
>
> **Interviewer**: Do you remember what the original definition is?
>
> **Jocelyn**: Uh, I think we had to go through and multiply every single element in the first coset by every single element in the second coset. (Asiala et al., 1997, p. 256)

In the teaching approach related to APOS theory (see Dubinsky & Leron, 1994) students are expected to produce computer code with the intention to help them construct the group concept as a generic object. Students are introduced to the group notion through a computer code called "name_group" that makes use of several functions that students themselves wrote. The following quote describes the general approach of the course:

> From early on in the course, even before the concept of group was mentioned, students were working with sets which were closed under binary operations, with closed subalgebraic structures, and with group theoretic concepts. By the time groups were formally introduced, the students had already worked with a variety of examples and group theoretic concepts. The preferred way of introducing a topic was to have students explore examples relating to the topic before any mention of the topic. In this way, we prepared very fertile ground in which to plant some mathematical seeds. (Smith, n.d., p.6).

About defining concepts in an Abstract Algebra course, Leron and Dubinsky (1995) state the following:

> When the students eventually come to learn the "official", general, abstract, formal version, this is perceived by them not as totally strange and prohibitive

> (as we believe is the case in standard lectures, where such abstractions are presented without any experiential basis), but as an elaboration of their previous experience. In popular terms we may say that the activities provide an initial intuitive familiarity with the topic to be learned. In more psychological terms (supported by an elaborate theoretical framework and research), we may say that the activities help the students to "construct" the mental processes, objects and relations necessary for a meaningful understanding of the topic. (p. 231)

According to APOS theory, a Schema is considered to be thematized when it is thought of as a total entity on which actions can be applied. For example, students in the study by Brown et al. (1997) were asked to work with the following question:

> Let $(G,*)$ be an abelian group, t a fixed element of G, and define the binary operation $\lozenge$ by
>
> $$x \lozenge y = x * y * t^{-1}, x, y \in G$$
>
> Prove or disprove that $(G,\lozenge)$ is a group. (p. 237)

The ability of students being able to "think about a generic group situation and distinguish among several instantiations-especially when these instantiations have something in common, such as the underlying set- and coordinate the application of these instantiations in order to compare them" (p. 226) was interpreted as the construction of their group Schema as an Object.

Findell's (2001) research also shows the difficulty that students have with defining properties as opposed to defining sets. For example, a student, when asked to give the definition of an identity element, wrote the following response:

> There is an identity element for the group so that every element in G, when multiplied by this identity element, e, will give you back the original element: $\{x \in G \mid xe = x\}$. (p. 170)

Although she uses quantifiers essentially in a correct manner, this student ends up defining the set of those elements that operated on the right with e, stay the same. Findell also reports that students seem to have more difficulty with the definition of the identity element than that of the inverse element.

3. Definitions and examples

> Fundamental definitions do not arise at the start but at the end of the exploration, because in order to define a thing you must know what it is and what it is good for (Freudenthal, 1973, p. 107).
>
> Unfortunately, neither Freudenthal, nor anyone else, has shown us how this transition - from exploration to formal presentation - can be achieved (Gardiner, 1995, p. 254).

Durand-Guerrier et al. (2015) mention that they would like to answer the question of in what ways definitions and examples of algebraic structures such as groups, rings, fields and vector spaces as well as of algebraic objects and notions such as neutral element, invertibility, irreducibility, equivalence relation and Euclidian division form a pre-requisite for further study of abstract structures, with the aim of developing an abstract theory. Definitions are seen as "labels put on bottles to be filled with classes of concrete examples that are come across over the course of mathematical activities"; identifying the common structure of these examples in each category would help the realization of an abstract theory (p. 103).

What is meant by "definition" consequently affects the way it is employed in research. It can refer to citing definitions, creating definitions, reinventing definitions, using definitions or consulting definitions, among other activities. This in turn influences the way with which it forms a prerequisite for Modern Algebra learning. If conceptual understanding of the underlying notions is the focus, then the nature and role of the definitions in mathematical activity enter into play.

If the concern in a study is about observing the way students make use of a definition when they search for examples of the concept being defined, one can for example provide the students with a definition that they have never seen before, which might be of an invented concept, and ask them to give examples of it. This way, methodologically speaking, the problem with some students not recalling a definition could be avoided. Also, and not less important from a methodological point of view, the risk of students relying on their memories both in case of trying to remember a definition and familiar examples seen in class or in the textbook, would be reduced. This way we could get a sense of the elements that they work with in generating examples. However, there are other considerations as the following research works illustrate.

Work done by Barbara Edwards (1997; Edwards & Ward, 2004, 2008) about the status, role and use of definitions by students of analysis and Abstract Algebra shows that students may fail to conceive the definitions as being *stipulated*, as opposed to *lexical* or *extracted*. This contrasts completely with mathematicians' viewpoint on definitions and can be the cause of serious difficulties when it comes to understanding concepts that are being studied. Extracted definitions are established based on observations while in mathematics, definitions are created by attributing a list of properties to the concept to be defined and are "imposed on the reader by decree" (Wells, 2016). This also has to do with the statement made by Durand-Guerrier et al. (2015) about definitions not having a truth value; although logically true, it seems that for some students this is not so. In fact extracted definitions do have truth values since they report usage; mathematical definitions, on the other hand, being stipulated, create or improve usage (Edwards & Ward, 2004; 2008).

Research shows that reciting a definition correctly does not imply an understanding of the concept being defined nor its application in proofs or usage in problem solving (e.g. Rasslan & Vinner, 1988). In some studies, like in Durand-Guerrier et al. (2015), students were asked to recall the definitions and afterwards solve problems using them. In this approach if a student could not remember a particular definition, he or she could not tackle the problems. In other studies the focus was on the ability to apply definitions, and therefore students were provided with the necessary formulations so that they could start working on the problems; this way their success in solving them would not be limited with the availability of those definitions (Edwards, 1997). In this spirit, Edwards and Ward (2004) worked with students in an Abstract Algebra course who had not studied the definitions that were provided to them during the interviews; they were forced to pay attention to how the concepts were formulated and could not rely on their memory.

Edwards and Ward (2008) claim that there may be two reasons why students do not apply a given definition correctly. One reason might be that the student's understanding of the content of a particular definition may be incorrect. The second reason is that the student's understanding of the characteristics of a mathematical definition in general may be incorrect. The results of these studies suggested that some students do not use the definitions appropriately in solving tasks, even when they are available to them. For example one student, working on a problem involving cosets, avoided referring to the definition and instead tried to remember how she had solved similar tasks before and at times manifested a belief that mathematical definitions are extracted as opposed to being stipulated. This might be understandable, from the point of view of the students' experiences; to them, a body of mathematical knowledge is presented as ready-made, and they perceive it as extracted (Edwards & Ward, 2004). In other words, the way mathematics is taught, does not allow them to live a mathematician's experience from the beginning to the end.

Edwards and Ward (2004) discovered that even in situations for which they conjectured there would be no other way but to rely on the mathematical definition to complete a task, for some students this was not the case. Participants in this study had worked with the coset formation previously; during the interview they were provided with the definition of coset multiplication and asked to perform some. To the authors' surprise, instead of using the definition that was available to them, some students recalled their FOIL (First-Outer-Inner-Last) method that is used for multiplying expressions such as $(a + b)(c + d)$, or suggested the union of two sets as possible answers.

Edwards and Ward (2008) discuss the role of defining activity as a possibility to engage students in thinking about the role that definitions play in mathematics, in the sense that students create their own definitions so that they participate in authentic mathematical experiences. However they warn against this kind of activities, especially if they are being employed in the case of existing mathematical concepts, since they might convert into “games that are won if the student can guess what the teacher is thinking” (p. 230), hence reinforcing the idea that mathematical definitions are extracted. In order for this kind of activity to work, students should be allowed to work their way through, until they discover the logical consequences of the definitions that they formulated, including the “unintended consequences” (p. 230). Only after this phase has been concluded should the students compare their definitions to the ones actually in use (Edwards and Ward, 2008).

Although different in approach, we also mention the work of Zandieh and Rasmussen (2010) for whom *defining* involves activities such as proposing conjectured definitions, testing them through examples created for this purpose and negotiating them as well as trying to demonstrate whether the definitions do the job that they are supposed to do. In doing this, both aspects of formulating the definition and the generation of meaning are given importance (Larsen & Zandieh, 2005). Larsen (2009) reports on a project in which students were involved in intensive defining activity as part of a developmental research project (Gravemeijer, 1998). In this approach focus was placed on the guided reinvention of the formal concepts of Abstract Algebra by students, starting with what the students already bring with them, in terms of informal knowledge and strategies, based on Freudenthal’s (1973) ideas about avoiding a teaching approach for teaching group theory where first a definition is given and then examples and other results will follow.

In Larsen’s (2013) teaching design students worked in pairs on the symmetries of an equilateral triangle in order to formulate a definition for the group concept, by first identifying the rules, then reducing them to a minimum, and then working on other examples with a group structure and identifying the invariant characteristics across these examples. Some axioms needed more prompting to be considered explicitly, such as the ones involving the inverse and associativity. Students then worked on proving theorems and went on to reinventing related concepts such as isomorphism and quotient group, with the guidance of the instructor. “[T]he notion of an abstract group emerges with the reinvention of the isomorphism concept in that isomorphism makes it possible for different groups (e.g., the symmetries of an equilateral triangle and the permutations of a set of three elements) to be seen as instances of the same abstract group” (p. 721). Students also worked on inventing their own notation systems. This approach may not be too practical to be applied in a whole Abstract Algebra course and research is necessary to determine what kind of structure sense students might develop as a result of it, however it might provide the students with worthwhile experiences about the defining process. Larsen (2013) notes that Dubinsky et al.’s (1997) warning about the difficulty of abstracting the properties of the general group concept from specific examples was held true in this experiment.

Fusaro Pinto and Tall (1999) present two ways definitions are employed in mathematics. The first one, *giving meaning* (to a definition), occurs when one uses previously built concept images in order to understand a definition, including examples and visualization. *Extracting meaning* (from a definition), on the other hand, refers to working with the definition by means of deductive reasoning. One might think that these two modes of usage would be required in different kinds of mathematical tasks, however, interestingly, Fusaro Pinto and Tall identified students who preferred one or the other approach when working on one task.

Bills and Tall (1998) state that “A (mathematical) definition or theorem is said to be formally operable for a given individual if that individual is able to use it in creating or (meaningfully) reproducing a formal argument” (p. 104). About the relationship between a definition and examples, they argue the following:

> If a student is focusing mainly on the essential properties in the definition then, in meeting new examples, there is the possibility of focusing only on these essentials, thus greatly reducing the cognitive strain. A more diffuse view of the possibilities means that successive examples may have a variety of extra detail that can cloud the issue. The former approach has prior focus on the "intersection" of the properties of the examples, the latter must sort out the important essentials from the "union" of the examples with their subtle irrelevancies that can lead to cognitive overload. (p. 111)

They add that “the struggle to make definitions operable can mean that some students meet concepts at a stage when the cognitive demands are too great for them to succeed” (p. 104). Once again, adopting the viewpoint of APOS Theory, we can say that without the mental structures that prepare students to understand the concept appearing in a definition, the pure statement of it will be of very little use to students, even if they can cite it correctly.

According to Zazkis and Leikin (2007)

> examples generated by participants – if solicited in a certain way – mirror their conceptions of mathematical objects involved in an example generation task, their pedagogical repertoire, their difficulties and possible inadequacies in their perceptions. However, there is a need for explicit criteria for evaluating examples generated by participants. (p. 15)

Starting from the assumption that “to understand mathematics means, among other things, to be familiar with conventional example spaces” (Watson and Mason, 2005, cited in Zazkis & Leikin, 2007, p. 21), they offer a framework in which emphasis is placed on three characteristics of examples generated by students: accessibility and correctness; richness; and generality. Conventional examples refer to the ones that mathematicians and the mathematical community accept; they usually form part of the curriculum and are privileged by instructors in their intent to enculture students.

Zazkis and Leikin suggest that studying the relationship between the personal and conventional example spaces of students through their framework might lead to an understanding of participants' mathematical knowledge and its characteristics. Later Zazkis and Leikin (2008) distinguish between two kinds of conventional example spaces: expert example spaces as revealed by mathematicians through their variety and richness, and instructional ones as promoted by textbooks and instructors.

Dahlberg and Housman (1997) in trying to get a sense of how undergraduates initially understand a notion, provided the students with written definitions of concepts new for them and interviewed them about their comprehension by means of questions and requests for explanations, examples or solution of tasks. The definition that was provided was that of a fine function, defined as a function that has a root at every integer point. Initially students were given the opportunity to generate their own strategies to try to understand the given definition, and after some time, depending on what the students chose to do, it was complemented by the interviewer's requests. There were four learning strategies observed: example generation, reformulation, decomposition and synthesis, and memorization. The authors found that the initial level of sophistication of understanding among the participants was highest for example generators and decreased in that order. Although the definition involved in this study was not that of an abstract algebraic structure and research can show whether the same conclusion can be reached in this case as well, user-generated examples and reflection on them as a didactical strategy might be a promising approach in helping students comprehend a new concept. However the authors warn that question design and instructor's pedagogical strategies play an important role in reaching this outcome. Iannone et al. (2011) on the other hand signal that there are not clear indications that example generation helps students in their understanding of mathematical concepts in general and with proof strategies in particular. They suggest that the quality of the way with which students engage in example generation tasks can play a significant role on what they gain from it.

There are several studies on different types and uses of examples in mathematics education literature, including at the university level. Antonini (2006) identified three types of strategies that graduate students used when generating examples: trial and error, transformation, and analysis. In this study all the tasks involved concepts already known to participants, with uncommon properties imposed on them.

Weber et al. (2008) consider three strategies that might help students use examples in furthering their understanding of mathematical concepts: "(1) by presenting examples, (2) by helping students generate examples, and (3) by asking students reason about given examples" (p. 247). They further suggest a type of task in which students are asked to provide examples of a concept that is being restricted more each time by imposing other constraints on it, in which they demand the students to make sure that no example generated for one item should satisfy the next one. After being introduced to the notion of convergent sequence and producing an example of it, students try to generate examples for a convergent non-monotonic sequence, a convergent sequence that does not approach its limit more with each term, a convergent sequence that reaches its limit and a convergent sequence whose formula, when thought of as a function, would not be continuous. If we try to employ this type of task in group theory, we might ask the students to give examples of a subgroup, a normal subgroup and an abelian subgroup of a group, for example. Or, to the tasks suggested by Durand Guerrier et al. (2015) in relation with the definition of a spanning set in Linear Algebra, we can add an item adding the condition that the spanning set be independent, hence working with the idea of a basis. Furthermore, if the students are asked first to give a spanning set that should not satisfy the conditions of the second item, i.e. linear independence, one can have the opportunity to distinguish between these two concepts, spanning set and basis, a confusion reported in the literature (Nardi, 1997).

It is also reported that for students it is easier to check whether a given object satisfies a definition or not, than to provide examples of a concept (Kú et al., 2008). This might be explained in terms of the mental constructions involved in each kind of activity. Checking properties could be done in an algorithmic fashion using Actions, whereas providing examples would require at least a Process conception. However, even when checking properties, there might be some conditions that are systematically overlooked by students. Kú et al. (2008) observe that when checking whether a given set is a spanning set for a vector space, students tend to ignore the condition that the elements of the set should belong to the space and they focus only on the generating part. This phenomenon is also reported in Durand-Guerrier et al. (2015).

Bogomolny (2006) reports about some students whose first reaction, when asked to give an example of a linear transformation, was to recall and cite the definition of this concept, and only based on that definition, search for an example. Even when their definitions mentioned the two linearity properties, these students did not seem to have a clear understanding of what the properties meant and this prevented them from giving correct or complete examples. This indicates, from the viewpoint of APOS Theory, that without having developed the necessary mental structures, it will be of little use for the student recalling the definition of a concept.

Roa-Fuentes and Oktaç (2010) describe two possible ways to construct the linear transformation concept, both of which involve coordination of the processes of the linearity properties. They (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012) report about a student who, although correctly stated the definition of a linear transformation, insistently used only one property when trying to decide whether a given transformation was linear or not. A similar phenomenon was observed by Bogomolny (2006), as well. This kind of results is a clear indication of the gap between a mathematical statement and a cognitive understanding of it.

4. Definitions and proofs

The use of definitions in proofs merits some discussion as well. The type of definition and the way with which it is employed in proof-making are important factors in determining student success and understanding.

Fusaro Pinto and Tall (1999) consider that the interplay between definitions and deductions is a two-way interaction since "[t]o truly understand the nature of a definition requires the use of deductions to construct its implications" (p. 66). Weber (2002) classifies proofs into four categories: proofs that convince, proofs that explain (these two as reported in Hanna, 1990 and Hersh, 1993, cited in Weber, 2002), proofs that justify the use of a definition or axiomatic structure, and proofs that illustrate technique. Each kind serves a related didactic purpose in the classroom and in students' mathematical preparation. Proofs that justify the use of a definition or axiomatic structure are usually employed after a new axiomatic structure is presented to students. And as opposed to proofs that convince or explain, they place the doubt on the logical progression of the proof whereas the result or theorem to be proved is generally obvious and not questioned by students. In a way the proposed axiomatic structure is being tested on results that are already known in order to show that it works. He gives the example of proving why two plus two equals four using Peano's system of arithmetic. He adds that this type of proofs tend to be very rigorous. Using them in teaching can provide the students with a meta-level experience in terms of the usefulness and purpose of axiomatic systems.

Weber (2004) also talks about different strategies that students use in trying to prove statements. One of these, namely syntactic proof productions, involve "manipulating correctly stated definitions and other relevant facts in a logically permissible way" (p. 428) and may be driven by an algorithm. In this kind of proof semantic meaning does not play an important role and rather than being a source for understanding, definitions serve as a first statement to be used in a chain of deduction and may not contribute much to comprehension of the meaning of the fact that is being proved.

The decision of whether to use definitions or other properties in order to prove a certain statement is also a relevant feature of student understanding of mathematical structure. Weber and Alcock (2004) observed several students who, in trying to establish whether different pairs of groups are isomorphic, tried to use the definition of isomorphic groups without success. For example, when comparing $\boldsymbol{Z}$ and $\boldsymbol{Q}$, they did not think about using the fact that $\boldsymbol{Z}$ is cyclic and $\boldsymbol{Q}$ is not.

5. Structure sense in Abstract Algebra

As Simpson and Stehlíková (2006) note, Abstract Algebra textbooks and courses usually follow one of two approaches: either the definitions of concepts are provided first, with the intention that students would see examples as different instantiations of these general definitions, or through the study of examples they aim to arrive at generalizations. The first route implies working at a higher abstraction level from the beginning, while the second one is seen as more pedagogical in terms of facilitating student understanding (Skemp, 1971). In terms of APOS Theory, understanding an example as a mathematical structure requires constructing it as an Object, around which a Schema can be built. For example a group of permutations constructed as Object opens the way to examining its properties and understanding the underlying structure as a group (Simpson and Stehlíková, 2006). These authors suggest that when this approach is chosen, care should be taken so that not only the particular example is investigated, but this exploration should lead to the identification of relationships between objects and operations such as associativity and inverses.

Simpson and Stehlíková (2006) identify the following steps as shifts that students go through when passing from working with examples to thinking abstractly about the mathematical structure:

1. Seeing the elements in the set as objects upon which the operations act (which may involve a process-object shift).
2. Attending to the interrelationships between elements in the set which are consequences of the operations.
3. Seeing the signs used by the teacher in defining the abstract structure as abstractions of the objects and operations, and seeing the names of the relationships amongst signs as the names for the relationships amongst the objects and operations.
4. Seeing other sets and operations as *examples* of the general structure and as *prototypical* of the general structure.
5. Using the formal system of symbols and definitional properties to derive consequences and seeing that the properties inherent in the theorems are properties of all examples. (p. 352)

The first stage implies understanding what the objects are and how the operations work, which is far from being trivial (Simpson and Stehlíková, 2006). According to the authors this sequence of steps is reminiscent of the schema development that passes through the intra-, inter- and trans- levels (Piaget & Garcia, 1989). They add that it is difficult for these shifts to occur spontaneously, hence the need for instructional strategies to help students advance through the steps required for structural understanding in Abstract Algebra.

> What seems important in the development of an examples-to-generality pedagogy is not the free-for-all of unguided discovery, but an emphasis on the guidance of *joint attention*: on teacher and learner making sense of structures together, with the teacher able to explicitly guide attention to, first, those aspects of the structure which will be the basis of later abstraction and, then, to the links between the formal and general with the specific example. (Simpson and Stehlíková, 2006, p. 368)

Structure sense can be described depending on the level of studies involved. For example it is not the same thing studying operations at the high school level or at the university. At the university level, for the case of binary operations in Abstract Algebra, Novotná et al. (2006) established two main stages for the development of structure sense, that correspond to the first two steps that Simpson and Sthelíková (2006) identified as mentioned before; the stages are further divided into substages:

> **SSE:** Structure sense as applied to elements of sets and the notion of binary operation
>
> A student is said to display structure sense if he/she can:
>
> (SSE-1) Recognise a binary operation in familiar structures.
>
> (SSE-2) See elements of the set as objects to be manipulated / understand the closure property.
>
> (SSE-3) Recognize a binary operation in "non-familiar" structures.
>
> (SSE-4) See similarities and differences of the forms of defining the operations (formula, table, other).
>
> **SSP:** Structure sense as applied to properties of binary operations
>
> A student is said to display structure sense if he/she can:
>
> (SSP-1) Understand ID in terms of its definition (abstractly).
>
> (SSP-2) See the relationship between ID and IN: ID → IN.
>
> (SSP-3) Use one property for another: C → ID, C → IN, C → A.
>
> (SSP-4) Keep the quality and order of quantifiers.
>
> (SSP-5) Apply the knowledge of ID and IN spontaneously.
>
> Abbreviations ID, IN, C, A stand for identity, inverse, commutative property, associative property. (pp. 250-251)

Even these first two stages in the path to constructing mathematical structures is complicated for students. About the recognition of the elements of a set and a binary operation defined on them, Parraguez and Oktaç (2010) observed that some students, although given explicitly the operations on a vector space, when trying to decide whether a set of vectors are linearly independent, set up the equations with the usual operations of addition and multiplication. Aguilar and Oktaç (2004) report about a group of teachers who, working on a cryptography problem in the context of modular arithmetic, use the usual operations of addition and multiplication and behave as if the elements of a set Z_n are rational numbers.

The identity element for many students is identified as being the zero-element, without paying attention to its properties in terms of the operation involved. So, some students will declare that a structure does not have an identity element if there is no zero in the set (Stehlíková, 2004, cited in Novotná et al., 2006). However the authors also note that "[t]he image of 0 as the additive identity does not always have to function as an obstacle. For some students, it serves as a generic model of additive identity and they can reconstruct its properties in ordinary arithmetic and use them as a tool for finding out the identity in another structure" (Stehlíková, 2004, cited in Novotná et al., 2006, pp. 255-256).

Novotná et al. (2006) identify at least three paths in coming to understand a structure (V stands for a property or an object, index A for a familiar structure, index B for an unfamiliar structure and D for a definition):

$$V_A \xrightarrow{abstraction} D \xrightarrow{construction} V_B$$

$$V_A \xrightarrow{analogy} V_B \xrightarrow{abstraction} D$$

$$D \xrightarrow{construction} V_A, V_B$$

In the first path properties are extracted from a familiar structure to form the basis of a definition, from which the abstract concept is constructed in a general context. In the second path extracted properties from a familiar structure lead to its generalization and then to a definition. The third one corresponds to the construction of a concept through logical deduction from its definition (Harel and Tall, 1989, cited in Novotná et al., 2006). As the authors note, this model serves only for the construction of the concept of binary operation; a model for a group, which involves a binary operation, a set and their coordination through axioms (Dubinsky et al., 1994) would have to be much more complex.

6. Conclusion

The learning of Abstract Algebra is a complex process, hence pedagogical strategies should take into account research results in trying to address the identified difficulties. Research design on the other hand plays an important role on the kinds of information that we can gather. Asking students to recall facts or definitions may provide access into their repertoire whereas resolving novel situations can give information about their mental structures. For example given a set asking for an operation to create a group structure would necessarily invoke students' conceptions of Process and Object. Given a set and a binary operation, defining the other operation to give rise to a vector space structure would shed light on the coordination of the two operations or its absence in the mind of the student (Parraguez and Oktaç, 2010); this kind of information would be difficult to obtain by asking to verify whether a given set and two operations satisfy the vector space axioms.

There is no doubt for the need to perform more studies on Abstract Algebra learning, with the hope that they in turn would help give rise to pedagogical suggestions in facilitating the transition to upper level courses where abstract structures are studied.

References

AGUILAR, P. & OKTAÇ, A. (2004). Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **7.2**, 117-144.

ANTONINI, S. (2006). Graduate students' processes in generating examples of mathematical objects. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. **2**, 57-64.

ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA FUENTES, S., TRIGUEROS, M. & WELLER, K. (2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York: Springer.

ASIALA, M., BROWN, A., KLEIMAN, J., & MATHEWS, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* **3.1**, 13-43.

ASIALA, M., DUBINSKY, E., MATHEWS, D. M., MORICS, S. & OKTAÇ, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior,* **16.3**, 241-309.

BILLS, L. & TALL, D. O. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. *Proceedings of PME 22,* Stellenbosch, South Africa, **2**, 104-111.

BOGOMOLNY, M. (2006). *The role of example-generation tasks in students' understanding in linear algebra*. Doctoral thesis. Simon Fraser University.

BROWN, A., DEVRIES, D. J., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, **16.3**, 187-239.

DAHLBERG, R. P. & HOUSMAN, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, **33**, 283-299.

DUBINSKY, E., DAUTERMANN, J., LERON, U. & ZAZKIS, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, **27.3**, 267-305.

DUBINSKY, E., DAUTERMANN, J., LERON, U. & ZAZKIS, R. (1997). A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?. *Educational Studies in Mathematics*, **34**, 249–353.

DUBINSKY, E. & LERON, U. (1994). Learning Abstract Algebra with ISETL. New York: Springer.

DURAND-GUERRIER, V., HAUSBERGER, T. & SPITALAS, C. (2015). Définitions et exemples: prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **20**, 101-148.

EDWARDS, B. (1997). An undergraduate student's understanding and use of mathematical definitions in real analysis. *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. **1**, 17-22.

EDWARDS, B. S. & WARD, M. B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *American Mathematical Monthly*, **111(5)**, 411-424.

EDWARDS, B. & WARD, M. B. (2008). The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. In M. Carlson & C. Rasmussen (eds.) *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics* (pp. 223-232). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

FINDELL, B. R. (2001). *Learning and understanding in abstract algebra*. Doctoral thesis, University of New Hampshire.

FREUDENTHAL, H. (1973). What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education. In A. G. Howson (Ed.), *Developments in mathematical education, Proceedings of ICME-2* (pp. 101–114). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

FUKAWA-CONNELLY, T. P. (2007). *A tale of two courses; teaching and learning abstract algebra*. Doctoral thesis. University of Maryland, College Park.

FUSARO PINTO, M. M. & TALL, D. (1999). Student constructions of formal theories: giving and extracting meaning. *Proceedings of the 23rd conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Israel, 281-288.

GARDINER, A. D. (1995). In Hilbert's Shadow: notes toward a redefinition of introductory group theory. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.) *Learn from the Masters* (pp. 253-266). United States of America: The Mathematical Association of America.

GRAVEMEIJER, K. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 277–296). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

HAZZAN, O. & LERON, U. (1996). Students' use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's theorem. *For the Learning of Mathematics,* **16.1**, 23-26.

IANNONE, P., INGLIS, M., MEJIA-RAMOS, J. P., SIMPSON, A. & WEBER, K. (2011). Does generating examples aid proof production? *Educational Studies in Mathematics*, **77**, 1–14.

IANNONE, P. & NARDI, E. (2002). A group as a 'special set'? Implications of ignoring the role of the binary operation in the definition of a group. *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for Psychology in Mathematics Education,* (Vol. **3**, pp. 121-128). Norwich, PME.

KÚ, D., TRIGUEROS, M. & OKTAÇ, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, **20.2**, 65-89.

LARSEN, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, **32.4**, 712–725.

LARSEN, S., & ZANDIEH, M. (2005). Conjecturing and proving as part of the process of defining. Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Roanoke, Virginia, USA. Retrieved May 03, 2016, from http://www.web.pdx.edu/~slarsen/ResearchPapers/pmena05LarsenZandieh.pdf

LERON, U., & DUBINSKY, E. (1995). An abstract algebra story. *American Mathematical Monthly*, **102.3**, 227-242.

NARDI, E. (1997). El encuentro del matemático principiante con la abstracción matemática: Una imagen conceptual de los conjuntos generadores en el análisis vectorial. *Educación Matemática,* **9.1**, 47-60.

PARRAGUEZ, M. & OKTAÇ, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, **432**, 2112-2124.

PIAGET, J. & GARCIA, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science*. Columbia University Press: New York.

RASSLAN, S. & VINNER, S. (1998). Images and definitions for the concept of increasing/decreasing function. *Proceedings of the Annual Meeting of the international Group for the Psychology of Mathematics Education*, **4**, 33-40.

ROA-FUENTES, S. & OKTAÇ, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **13.1**, 89 – 112.

ROA-FUENTES, S. & OKTAÇ, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **15.2**, 199 – 232.

SIMPSON, A. & STEHLÍKOVÁ, N. (2006). Apprehending mathematical structure: a case study of coming to understand a commutative ring. Educational Studies in Mathematics, **61.3**, 347-371.

SKEMP, R.R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin: London.

SMITH, R. S. (n.d.). A Collaborative Learning Constructivist Approach to Abstract Algebra using ISETL. Retrieved on May 03, 2016, from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.42.5029&rep=rep1&type=pdf

TRIGUEROS, M. & OKTAÇ, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 157-176.

WEBER, K. (2002). Beyond proving and explaining : proofs that justify the use of definitions and and axiomatic structures and proofs that illustrate techniques. *For the Learning of Mathematics*, **22.3**, 14-17.

WEBER, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Twenty-eighth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. **4**, pp. 425–432). Bergen, Norway.

WEBER, K. & ALCOCK, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, **56**, 209-234.

WEBER, K., PORTER, M. & HOUSMAN, D. (2008). Worked examples and concept example usage in understanding mathematical concepts and proofs. In M. P.

Carlson and C. Rasmussen (eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics* (pp. 245-252), Washington, DC: MAA.

WELLS, C. (2016). Definitions. Retrieved on May 03, 2016, from http://abstractmath.org/MM/MMDefs.htm

ZANDIEH, M. & RASMUSSEN, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, **29**, 57–75.

ZAZKIS, R. & LEIKIN, R. (2007). Generating examples: from pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, **27.2**, 15-21.

ZAZKIS, R. & LEIKIN, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, **69.2**, 131-148.

ASUMAN OKTAÇ
Cinvestav-IPN, México
oktac@cinvestav.mx

THOMAS BARRIER, ANNE-CECILE MATHE ET JORIS MITHALAL

FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE EN GEOMETRIE : QUELS SAVOIRS ?

Abstract. Initial teacher education in geometry at primary school. The context of the research is initial primary school teacher education in geometry. We study and compare three implementations of a collectively designed training sequence by three trainers with distinct status and/or research interest. We highlight some variations in the knowledge that the trainers institutionalize, with a specific focus on figure visualization. The research background concerns the potential effects of those variations on teacher training.

Résumé. Le contexte de notre recherche est celui de la formation initiale des professeurs des écoles en géométrie. Nous étudions les variations des savoirs institutionnalisés par trois formateurs aux profils différents, concernant notamment la visualisation en géométrie, sur la base d'une séquence conçue collectivement ; et le rôle de leur discours dans le processus d'institutionnalisation. En arrière-plan de ce travail se trouve la question des effets potentiels de ces variations sur la formation des enseignants.

Mots-clés. Didactique des mathématiques ; formation initiale des enseignants ; savoir ; institutionnalisation ; géométrie ; visualisation.

Introduction

Les résultats présentés dans cet article prennent leur source dans les travaux d'un groupe de recherche-action-formation regroupant des formateurs en mathématiques de l'ESPE Lille Nord de France (2013-2014), groupe auquel deux des auteurs de cet article ont participé. Ces travaux ont notamment donné lieu à la production collective d'un document dégageant les grandes lignes d'une séquence de formation en géométrie destinée à des étudiants de première année du Master préparant au métier de professeur des écoles. Ce document a servi de support à plusieurs mises en œuvre de séances, par différents collègues. Certaines d'entre elles ont fait l'objet d'un recueil de données à des fins comparatives (séances filmées, photos, productions d'étudiants). Dans cet article, nous nous intéressons spécifiquement aux mises en œuvre de trois formateurs expérimentés. Le formateur F1 est issu de l'enseignement secondaire, il intervient aussi bien en formation des professeurs des écoles qu'en formation des professeurs du second degré, sur des aspects disciplinaires et didactiques mais aussi transversaux. Le formateur F2 est enseignant-chercheur en didactique des mathématiques, il intervient également en formation des enseignants du primaire et secondaire pour des enseignements disciplinaires et didactiques. Enfin, le formateur F3 est enseignant-chercheur en mathématiques, il intervient essentiellement dans la formation disciplinaire et

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 317 - 342.

didactique des professeurs des écoles et, dans une moindre mesure, en dehors du contexte de la formation des enseignants[1].

Un premier retour sur les mises en œuvre de ces séances au sein du groupe de recherche-action-formation nous a conduits à prendre conscience de variations assez importantes dans les enjeux de savoir que ces formateurs attribuent, éventuellement à leur insu, à cette séquence pourtant conçue collectivement. L'objectif de ce texte est d'identifier de manière plus précise la nature de ces variations et d'illustrer le fait que la formation des enseignants en géométrie est lieu de tensions entre différents enjeux. À plus long terme, à travers cette première étude exploratoire, nous souhaitons interroger la manière dont les choix des formateurs, conscients ou non, les amenant à donner plus ou moins de visibilité à certains savoirs sont susceptibles de produire des effets différenciateurs dans la formation des enseignants.

Nous commençons cet article en donnant quelques éléments de contexte sur la formation des professeurs des écoles en mathématiques et les recherches la prenant pour objet. Nous présentons ensuite deux notions théoriques – celle de *visualisation non iconique* et celle de *savoir transparent* – qui nous permettront d'affiner notre problématique. D'un point de vue méthodologique, nous préciserons notamment les raisons pour lesquelles interroger les savoirs mis en avant au cours de cette séquence de deux séances par chacun des trois formateurs concernés nous a amenés à nous focaliser sur des épisodes que nous reconnaissons comme épisodes d'institutionnalisation, y compris inachevés, envisagés comme un contexte privilégié de manifestation de ces enjeux. Nous présenterons enfin une description et analyse croisée des mises en œuvre et formulerons les questions suscitées par la mise en regard des mises en œuvre observées.

1. Formation des professeurs des écoles en mathématiques : quels savoirs visés ?

Rares sont les étudiants se préparant au métier de professeur des écoles à l'aise avec les mathématiques, y compris élémentaires. Un enjeu fort de la formation est de faire évoluer leur rapport à cette discipline tout en leur permettant de s'approprier certains savoirs disciplinaires et didactiques dans la double perspective de la réussite au concours et de la professionnalisation. La situation est donc complexe. Kuzniak (2007) montre par exemple qu'un même support de formation peut conduire des formateurs à mettre en avant des savoirs de nature variée :

1 Ces formateurs ont été choisis pour rendre compte de la diversité des profils des formateurs en mathématiques. Nous ne visons néanmoins ni la représentativité, ni l'exhaustivité (pas de formateurs issus du premier degré par exemple).

mathématiques pour le concours ou pour la classe (contenu, progression, etc.), didactiques ou relatifs à la gestion de classe. Une *stratégie de formation* peut se caractériser par des décisions concernant la gestion de ces savoirs, leur articulation, le degré de responsabilité laissée aux étudiants (Houdement, 2013). Ces décisions sont notamment dépendantes du corpus de savoirs didactiques disponibles et de leur diffusion au sein des institutions de formation comme du volume horaire consacré à la formation en mathématiques. Notre choix de nous consacrer à la première année de formation peut se comprendre à l'aune de cette dernière remarque : elle concentre, dans le cas qui nous intéresse, l'essentiel des heures consacrées aux mathématiques et à leur enseignement (60h pour 84h au total à l'ESPE[2] Lille Nord de France l'année concernée).

Tout le monde s'accorde sur le fait qu'il est nécessaire qu'un enseignant de mathématiques en sache « plus » que ses élèves sur les contenus qu'il enseigne. Pour autant, le sens à donner à ce supplément de contenu est sans aucun doute moins consensuel. Les travaux impulsés par Shulman (1986) ont mis en évidence l'importance des compétences professionnelles des enseignants qui se situent à l'articulation des compétences disciplinaires et des compétences pédagogiques générales et ont creusé les premières tranchées du chantier de leur description. Dans la lignée de ces travaux inauguraux, Ball, Thames et Phelps (2008) ont proposé une typologie des connaissances pour l'enseignement des mathématiques, spécifiques de la discipline. Cette typologie est issue d'une analyse des connaissances en jeu dans les pratiques effectives d'enseignement des mathématiques. Cette typologie s'organise en deux pôles, le premier comprenant des connaissances (sur les) mathématiques et le deuxième des connaissances pédagogiques disciplinaires, tous deux nécessaires à l'enseignement[3].

Le premier pôle (*subject matter knowledge*) est composé des connaissances mathématiques spécifiques aux métiers d'enseignant de mathématiques, des connaissances communes avec d'autres professions ou contextes de mise en jeu des mathématiques, et des connaissances « sur les » mathématiques. Un exemple de connaissance mathématique spécifique à la profession d'enseignant de mathématiques est donné par Chevallard et Cirade (2009). Il s'agit du théorème

---

2 ESPE signifie École Supérieure du Professorat et de l'Éducation. Il s'agit de l'institution universitaire en charge, notamment, de la formation des enseignants. La formation initiale des enseignants du premier degré s'y déroule en deux ans (Master 1 et Master 2). Les étudiants passe un concours de recrutement au terme de la première année. La seconde année, les étudiants ayant eu le concours deviennent des étudiants-fonctionnaires-stagiaires et ont, entre autres, une classe en responsabilité à mi-temps, toute l'année.

3 Mais pas suffisants : l'attention aux compétences professionnelles liées aux contenus n'a pas vocation à minimiser l'importance des compétences professionnelles transversales.

méconnu selon lequel si un nombre fractionnaire *a*/*b* est un nombre décimal alors la division a/b doit s'arrêter au plus tard à la *n*-ième décimale, *n* étant le plus petit des entiers k vérifiant $2^k \geq b$. La familiarité avec ce théorème permet (ou permettrait) à un enseignant de mathématique de mieux gérer l'utilisation fréquente en classe de la calculatrice dans l'évaluation de la décimalité des nombres fractionnaires. À un niveau plus élémentaire, on peut aussi penser à la caractérisation des polygones symétriques par la propriété d'être superposable avec leur figure « retournée ». Cette connaissance a notamment une fonctionnalité forte dans le contexte du travail sur les formes géométriques en maternelle (boîte à formes, puzzle, *etc*.). Ces connaissances nous paraissent d'une certaine importance du point de vue de l'enseignement des mathématiques. Elles sont peut-être moins centrales en dehors de ce contexte particulier[4]. Pour ce qui est des connaissances « sur les » mathématiques, nous reprenons à notre compte l'élaboration de Carillo, Climent, Contreras et Munoz-Catalan (2013) qui distinguent la connaissance de la structuration des mathématiques (être en mesure de situer le contenu travaillé au sein des mathématiques) de la connaissance sur la manière dont les mathématiques s'élaborent. Savoir que d'autres ensembles de nombres seront construits à partir des entiers naturels relève de la première catégorie, savoir ce qui constitue un argument acceptable en mathématique relève de la seconde.

Venons-en maintenant au pôle des connaissances pédagogiques disciplinaires (*pedagogical content knowledge*). Ce qui distingue ce pôle du précédent réside dans le fait que les connaissances en jeu ne sont pas à proprement parler des connaissances (sur les) mathématiques, même si elles y sont intiment liées. Ball et al. (2008) considèrent, d'une part, les connaissances sur l'apprentissage des mathématiques. Ceci comprend ce qui concerne le fonctionnement cognitif des élèves (dans leur diversité), leur difficulté d'apprentissage. Les connaissances concernant la résistance modèle additif au moment de l'enseignement de la proportionnalité en sont un exemple. Côté enseignement, d’autre part, ces auteurs identifient des connaissances portant sur le matériel à utiliser pour l'enseignement d'une notion, sur les ressources disponibles, sur les représentations sémiotiques à utiliser, sur les manières de dire. Être en mesure de verbaliser le fonctionnement d'un algorithme de division en lien avec un problème donné et avec ses connaissances en numération relève de cette catégorie. Enfin, une catégorie est réservée à tout ce qui concerne les connaissances curriculaires.

---

4 Cette question mériterait une discussion délicate que nous n'engagerons pas. D'autres auteurs préfèrent se passer de cette distinction difficile à caractériser entre connaissance commune et spécifique à l'enseignement (Carillo, Climent, Contreras, Munoz-Catalan, 2013).

La maîtrise de ces connaissances pour l'enseignement des mathématiques est très certainement un aspect important de la professionnalisation des enseignants. Charalambous (2008) compare par exemple les enseignements de deux professeures dont les connaissances spécifiques pour l'enseignement des mathématiques se sont avérées fortement contrastés après mesure. L'enseignante ayant des connaissances avancées montrant une propension plus importante au maintien des enjeux cognitifs dans les déroulements qu'elle propose à ses élèves. Pour autant, nous n'en savons encore que très peu concernant la manière dont ces connaissances spécifiques, dans toutes leurs variétés, sont apprises et/ou enseignées en formation. L'enjeu est pourtant important du point de vue de la réflexion sur la professionnalisation de l'enseignement des mathématiques. Ce texte a pour objectif d'apporter une contribution à la réflexion sur les contenus de formation et leur gestion par les formateurs.

Dans ce texte, nous utiliserons les notions de *connaissance* et de *savoir* au sens de Margolinas (2014). Un savoir est une production sociale, qui dispose d'une forme textuelle et qui est reconnu et légitimé par une communauté donnée. Une connaissance vit pour sa part dans une situation, elle est locale, contextualisée, propre à un sujet. Toute situation d'enseignement ou de formation met en jeu de nombreuses connaissances chez les étudiants mais seules une partie d'entre elles sont verbalisées, institutionnalisées, c'est-à-dire transformées en savoir *via* un processus de dépersonnalisation, de décontextualisation, qui dans sa forme aboutie conduit à un texte (*processus d'institutionnalisation*). Par ce biais, la connaissance est signalée par le formateur et reconnue par les étudiants comme quelque chose de potentiellement réutilisable dans d'autres circonstances.

Étant donnée la complexité des enjeux de formation et la diversité des ancrages disciplinaires et institutionnels des formateurs[5], il est raisonnable de faire l'hypothèse de variations dans le choix des savoirs mis en avant. Prenons l'exemple de la formation en géométrie : que faut-il que les étudiants apprennent pour réussir le concours de recrutement ? Pour se préparer à en enseigner les contenus ?

---

5 Ancrages initiaux si l'on pense à leur formation initiale, actuels si l'on pense par exemple aux diverses sections CNU qui accueillent les enseignants-chercheurs impliqués dans la formation en mathématiques : 25 – 26 – 70 – 72.

Nous rappelons que le Conseil national des universités, abrégé par le sigle CNU, est une instance consultative et décisionnaire française chargée en particulier de la gestion de la carrière des enseignants-chercheurs. Il est composé de 11 groupes, eux-mêmes divisés en 52 sections, dont chacune correspond à une discipline. La 25e section correspond aux « mathématiques », la 26e section aux « mathématiques appliquées et application des mathématiques » (qui comprend la didactique des mathématiques), la 70e aux « sciences de l'éducation » et la 72e à l' « épistémologie, histoire des sciences et des techniques ».

Différentes œuvres, relatives chacune à leur institution légitimante, pourraient être convoquées pour contribuer à produire une réponse viable en formation (Chevallard & Cirade, 2009). On peut par exemple penser aux réponses plus ou moins toutes faites, ou au contraire à construire, que pourraient apporter les mathématiques et leur épistémologie, la psychologie cognitive, la didactique des mathématiques, voire encore les neurosciences. La construction d'une réponse viable dans les conditions actuelles de formation des professeurs des écoles passe notamment par une discussion sur ces choix d'œuvres de référence, sur leurs apports réciproques. Au sens de la typologie de Ball et al. (2008), il s'agit ainsi de préciser le type de savoir que l'on souhaite mettre en avant. Les éléments de réponses élaborés au sein des mathématiques ou de leur épistémologie relèvent du premier pôle décrit (*subject matter knowledge*), ceux relevant de la psychologie ou des neurosciences du second pôle (*pedagogical content knowledge*). Dans la séquence à laquelle nous nous intéressons dans cet article, divers savoirs sont susceptibles d'être institutionnalisés : des savoirs relatifs aux objets mathématiques et à leurs relations, à l'enseignement scolaire des contenus de géométrie, des savoirs relatifs à l'activité géométrique elle-même, *etc*.

Dans ce texte, nous avons choisi d'interroger en particulier la place donnée par les formateurs aux savoirs relatifs à la visualisation des figures géométriques. Ces savoirs relèvent de la didactique des mathématiques, tout du moins si l'on retient comme critère celui de la communauté de recherche qui en a favorisé l'émergence et la diffusion. Cette communauté lui donne aujourd'hui une place centrale dans ses travaux sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Pour autant, et contrairement au cas du théorème portant sur le nombre de décimales d'un nombre décimal écrit sous forme de fraction, les savoirs relatifs à la visualisation auxquels nous nous intéresserons dans ce texte relèvent plutôt du pôle « pédagogique disciplinaire », au sens où leur élaboration est issue d'une analyse cognitive des pratiques des élèves. Nous préciserons cette remarque dans la partie 2 de ce texte.

Notons que notre étude prend appui sur un seul et même document conçu collectivement. Ceci distingue notre recherche de l'exemple donné plus haut par Kuzniak, le document support ayant été apporté par le chercheur, mais aussi de celle de Sayac (2012). Celle-ci analyse les pratiques de six formateurs dans la perspective de décrire une diversité des pratiques de formation en mathématiques dans le premier degré. Comme nous, elle neutralise les composantes institutionnelles des pratiques, au sens de Robert et Rogalski (2002), en faisant la totalité de ses observations au sein de la même institution de formation. Elle s'intéresse alors à l'impact potentiel de la composante personnelle des pratiques (les formateurs ont des profils individuels propres) sur les composantes cognitives (quels savoirs ?) et médiatives (quelles postures pour les formés ?). Nous nous retrouvons dans ce questionnement. Néanmoins, notre recherche se différencie de celle de Sayac par deux aspects importants. Tout d'abord, nous avons fait le choix de nous centrer sur des étudiants n'ayant pas encore passé le concours de recrutement plutôt que sur des étudiants-fonctionnaires-stagiaires. Ceci a des conséquences tant du point de vue des postures médiatives susceptibles d'être adoptées par les formateurs (un étudiant de première année est par exemple moins souvent considéré comme un collègue qu'un étudiant en seconde année ayant eu le concours et exerçant le métier d'enseignants à mi-temps) que de celui des savoirs susceptibles d'être mis en lumière par les formateurs, ne serait-ce qu'en raison du positionnement vis-à-vis de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement. Ensuite, Sayac s'appuie sur des éléments empiriques – observation d'une séance par formateur – dont elle ne contrôle pas à priori les contenus. Ceci pose des difficultés méthodologiques importantes dans la mesure où les travaux sur les stratégies de formation ont montré l'influence des contenus : certains choix stratégiques sont relativement partagés par les formateurs et dépendent d'abord des contenus ; un même formateur est susceptible de changer de stratégie en fonction des contenus (Houdement, 2013, p. 15). Dès lors, il est délicat d'attribuer l'origine de variations dans les pratiques de formation à la composante personnelle des pratiques si ces variations ont été observées lors de séances ne portant pas sur les mêmes contenus. Ceci explique notre choix de ne travailler qu'à partir d'une seule et même séquence.

Sur le plan de la méthode, nous nous focalisons sur la première séance de la séquence de formation (annexe : partie 1 et 2)[6] et nous cherchons, dans le discours de chaque formateur – ce qu'il dit, mais aussi ses gestes, ses tracés – des traces de processus d'institutionnalisation : prise de distance par rapport à la tâche, dépersonnalisation, marques de secondarisation (Coulange, 2014). Nous aborderons ces processus comme un lieu de construction sociale d'une réalité partagée, sur la base des vécus des étudiants. Ces épisodes sont en grande partie marqués par une place prépondérante des déclarations des formateurs, sur lesquelles portera de fait notre attention. Nous nous appuierons alors sur la typologie introduite plus haut pour décrire et analyser les choix opérés par les formateurs.

Nous expliquons dans la suite de ce texte les raisons pour lesquelles nous avons voulu prendre en particulier en considération les savoirs relatifs à la visualisation. Nous reviendrons ensuite sur les raisons pour lesquelles nous concentrons notre attention sur les phases d'institutionnalisation.

6 Une version abrégée du document support est proposée en annexe (la mise à l'écrit du travail collectif est due à F2).

2. Géométrie et visualisation

Nous proposons dans ce paragraphe de préciser ce que nous entendons par « savoirs relatifs à la visualisation » en référence aux travaux de Duval (2005). L'apprentissage de la géométrie suppose la mise en place de fonctionnements cognitifs spécifiques coordonnant une activité sur des objets graphiques (les dessins) et d'idéalités géométriques dont ils sont des représentants nécessairement imparfaits. Duval souligne que la pratique géométrique nécessite une articulation délicate entre des compétences de visualisation spécifiques et des compétences discursives (i.e. verbales dans l'acception du terme par ce chercheur). Celui-ci oppose deux types de visualisation. La *visualisation iconique* s'appuie sur la reconnaissance globale de contours fermés, de formes : on reconnaît un carré car il ressemble aux carrés connus. Il en résulte plusieurs obstacles pour la géométrie : non-reconnaissance des figures qui ne sont pas dans une configuration particulière (carré « posé sur sa pointe » ou aux côtés prolongés), difficultés dans l'identification des propriétés géométriques en tant que relations entre des constituants de l'objet géométrique. La *visualisation non iconique* s'oppose à ce mécanisme en ce qu'elle repose justement sur l'identification de constituants de la figure (des sous-figures de même dimension dans le processus de division méréologique, ou des unités figurales de dimensions inférieures dans les processus de déconstruction) et des relations entre ceux-ci. Dans le cas de la déconstruction instrumentale, que nous évoquerons peu ici, ces relations reposent sur un processus de construction permettant de produire le dessin avec des instruments donnés. Duval insiste sur l'importance majeure du processus de *déconstruction dimensionnelle*, pour lequel il ne s'agit plus de reconnaître des objets mais de les reconstruire à partir de l'identification des unités figurales : « Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. » (Duval, 2005, p. 26). Un carré n'est alors plus une forme, mais un réseau de segments liés par des propriétés spécifiques, ou encore quatre points liés par des relations géométriques.

Ajoutons ici que la réalisation de tracés auxiliaires joue elle aussi un rôle dans les processus de visualisation non iconique. Un exemple célèbre est donné par Kant lorsque celui-ci considère la question de la valeur de la somme des angles d'un triangle au début de la *Critique de la Raison Pure*. Alors que le philosophe en resterait à l'analyse du concept de triangle, et se trouverait dès lors démuni, le géomètre procéderait par des constructions auxiliaires : se donner un triangle, prolonger un côté du triangle, tracer des lignes parallèles. Ces constructions sont au cœur de l'avancée du travail géométrique via un enrichissement du réseau de droites sous-jacent à la figure initiale laquelle est « reconstruite » à partir de ce réseau (en l'occurrence cet enrichissement permet de mettre en œuvre les connaissances liées aux angles).

Prenons maintenant un exemple en lien avec nos données.

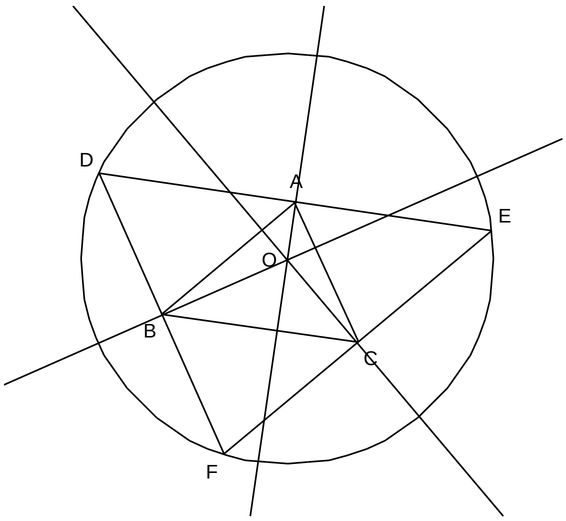


Figure 1

Plusieurs sous-figures peuvent être « détachées » dans la figure 1. Parmi celles qui ne nécessitent pas de tracés auxiliaires, et pour en rester aux formes de dimension 2 (surfaces), on peut repérer des triangles, un cercle (des « portions » de cercle), des parallélogrammes, des trapèzes, et bien d'autres polygones. Néanmoins, les mécanismes à l'œuvre ne sont pas tous équivalents. Ainsi, le disque, les triangles ABC ou DEF sont des contours fermés dont les côtés ne sont pas prolongés : en cela, ils sont « accessibles » à la visualisation iconique. À l'inverse, les parallélogrammes AECB, DACB, BACF seront plus difficilement perçus de cette manière : ils sont chacun constitués de deux sous-figures visuellement identifiables et de nature différente (les triangles) et leurs côtés sont prolongés. On peut donc s'attendre à ce que la visualisation non iconique, et en particulier la déconstruction dimensionnelle soient impliquées pour leur identification.

Imaginons maintenant que l'on ait pour tâche de reproduire cette figure, et que l'on commence à partir du triangle ABC[7]. Pour construire le point E, par exemple, il est très utile de le percevoir comme le point d'intersection entre les parallèles aux côtés

7 Cette tâche est proposée pendant la séquence étudiée (cf. annexe).

(AB) et (BC) passant respectivement par C et par A, comme sommet du parallélogrammes AECB (ou toute chose équivalente). Il faut donc passer d'un regard orienté sur le triangle à un regard orienté sur le parallélogramme par l'intermédiaire d'un réseau de droites parallèles. La suite de la construction procède de la même dynamique consistant à détacher successivement diverses figures. Sans même s'intéresser à une tâche de démonstration, qui supposerait le même type de fonctionnement cognitif au niveau de la visualisation[8]. Le fonctionnement non iconique de la visualisation semble mis en jeu dans cette tâche de reproduction.

Par ailleurs, le rôle de la visualisation (notamment non iconique) doit être pensé dans le cadre d'une dialectique avec la dimension discursive de l'activité géométrique. L'énonciation de relations suppose notamment la disponibilité d'objets susceptibles d'être mis en relation (et de noms d'objets), c'est-à-dire le plus souvent des points et des droites (alignement, parallélisme, etc.). Duval (2005, p. 23) souligne également le caractère fondamentalement discursif de la déconstruction dimensionnelle : « Elle se fait en articulation étroite avec une activité discursive. On pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif ». Si dans nombre de contextes, c'est la perception visuelle qui pilote l'identification des objets (par exemple lorsque la visualisation iconique est en jeu), il est fréquent en géométrie que ce soit le discours qui pilote la visualisation. Nous montrerons plus loin que ce type de mécanisme est à l'œuvre lors de l'identification des parallélogrammes de la figure 1 par les étudiants.

L'activité géométrique repose ainsi sur la mobilisation de compétences visuelles (et discursives) spécifiques reposant notamment sur un jeu de regard sur les figures (Duval et Godin, 2005) que nous avons analysé ci-dessus en termes de visualisation non iconique et de déconstruction dimensionnelle. Dans le contexte d'une formation en géométrie de futurs enseignants du premier degré, nous interrogeons le statut qui leur est donné, tant que point de vue de la formation disciplinaire que du point de la formation des étudiants à la didactique des mathématiques. Duval (2005, p. 8) considère par exemple que le développement et la coordination des fonctionnements cognitifs de la visualisation et de la production d'énoncés « doivent être considérés comme des objectifs d'enseignement aussi essentiels que les contenus mathématiques eux-mêmes ». Cette dernière citation de Duval ne concerne pas spécifiquement le contexte de la formation des enseignants. D'un certain point de vue, celui qui considère les formés comme étudiants de mathématiques, il s'agit de connaissances de nature épistémologique portant sur l'élaboration des contenus en géométrie. Leur maîtrise est pour Duval une condition de possibilité pour les apprentissages géométriques. Par ailleurs, ces

8 Pour un exemple, voir par exemple Perrin-Glorian, Mathé et Leclerc (2013).

connaissances peuvent aussi s'appréhender comme des connaissances pédagogiques disciplinaires portant sur l'apprentissage de la géométrie par les élèves, les formés étant cette fois considérés dans une posture de professionnels en formation. Nous considérons que ces connaissances constituent un outil didactique important, que ce soit pour concevoir des situations d'enseignement – voir par exemple Barrier, Hache et Mathé (2014) – ou pour penser la progression des apprentissages sur un temps long (Perrin-Glorian, Mathé et Leclerc, 2013). Ce type de connaissances nous semble enfin d'autant plus fonctionnel sur le plan professionnel si l'on tient compte de l'inflexion récente des nouveaux programmes français des cycles 2 et 3 en géométrie avec un renforcement sensible de la place accordée aux situations de reproduction de figure :

« La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes. » (Programme du cycle 2, B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015).

La reproduction d'une figure suppose en premier lieu de la part des élèves une analyse de la figure géométrique à reproduire. Par un jeu sur les figures à reproduire et sur les instruments et supports à disposition, l'objectif du travail autour de la reproduction de figures consiste, à l'école, à amener progressivement les élèves à enrichir leur regard sur les figures, d'une vision iconique à une vision non iconique des figures, dans un mouvement de déconstruction dimensionnelle. Dès lors, disposer de connaissances sur la manière dont les élèves appréhendent les figures nous semble nécessaire pour appréhender les enjeux d'un travail autour de telles situations en classe. Ces connaissances outillent les professeurs des écoles pour penser des progressions autour de ces situations et envisager leur mise en œuvre en classe.

3. Institutionnalisation : lumière et transparence

Revenons à la thématique de l'institutionnalisation. Nous avons souligné plus haut qu'elle était un moyen de mettre en avant un savoir, de légitimer une connaissance en l'ancrant dans une institution de référence. Pour autant, si certains savoirs profitent de la mise en lumière induite par ce processus et se trouvent affichés par le formateur, d'autres restent transparents. Il s'agit des savoirs qui sont effectivement en jeu dans les situations d'apprentissage mais qui restent invisibles dans le jeu didactique (Margolinas & Laparra, 2011). Nous nous inspirons d'une distinction de Perrenoud (1995) entre paradigme de la censure et paradigme de la méconnaissance pour préciser notre propos.

Dans le cadre du paradigme de la censure, le savoir n'est pas à proprement parler transparent pour l'enseignant. Il existe différentes raisons pour lesquelles un enseignant ou une institution peut souhaiter enseigner des savoirs à l'insu des élèves. Nous en retenons une en particulier explicitée par Brousseau (1986) sous une forme paradoxale : l'enseignant ne peut pas simplement dévoiler aux élèves les savoirs qu'il souhaite leur enseigner sans dans le même temps les soustraire aux conditions de possibilité de leurs apprentissages (les élèves ne pourraient plus agir de leur propre mouvement). En d'autres termes, le caractère caché des savoirs est, à un moment donné, une nécessité grammaticale des jeux didactiques (Sensevy 2008). Pour autant, les phases adidactiques des situations didactiques, phases dans lesquelles l'intention du professeur d'enseigner un savoir particulier n'est pas dévoilée, ne se suffisent pas à elles-mêmes. Il est tout aussi nécessaire d'ancrer les connaissances des élèves, ainsi construites, au sein d'une institution. Toute la difficulté pour l'enseignant est alors de lever le voile sur ses intentions, d'articuler les processus de dévolution et d'institutionnalisation, de se ressaisir « des savoirs dont il se départit nécessairement à un moment » (Coulange, 2014, p. 10), alors même que les expériences cognitives effectives des élèves relèvent du privé (nous ne pouvons, au mieux, que faire des hypothèses sur ce que les élèves ont effectivement vécu).

Le paradigme de la méconnaissance offre un regard complémentaire. Les difficultés identifiées ci-dessus se trouvent renforcées si le formateur (l'enseignant) éprouve lui-même des difficultés à identifier les enjeux de savoirs d'une situation didactique, ce qui peut être le cas notamment si les savoirs en question ne disposent pas d'une reconnaissance dans les programmes scolaires ou de formation. Dans ce cas, ces savoirs, bien qu'essentiels dans le fonctionnement adidactique des situations, ne font que rarement l'objet d'une institutionnalisation, et demeurent souvent invisibles tant pour les élèves que pour l'enseignant. L'énumération en est un cas emblématique (Margolinas et Laparra, 2011)[9]. Tout comme les savoirs relatifs à la visualisation géométrique, l'identification de l'énumération comme enjeu d'apprentissage est issu de la recherche en didactique des mathématiques, dont les productions peinent à diffuser dans l'enseignement comme dans la formation.

Notre choix méthodologique de nous concentrer sur les processus d'institutionnalisation dans l'analyse des trois mises en œuvre étudiées s'explique par la volonté d'identifier les savoirs que les formateurs souhaitent que les étudiants retiennent à l'issue de cette séquence de formation. Un ensemble varié de

---

9 Remarquons néanmoins que le terme *énumération* figure désormais dans les programmes de 2015 pour la maternelle, mais sans définition précise.

connaissances étant en jeu dans la séquence, ce type d'analyse nous donne accès à la conception en acte des enjeux de formation par les formateurs. L'hypothèse que nous explorons dans cet article est que l'ancrage disciplinaire des formateurs est susceptible d'avoir des effets différenciateurs sur les savoirs qui sont institutionnalisés.

Nous appuyons notre propos sur les travaux de Searle portant sur les systèmes de pouvoir et de devoir (les institutions sociales) produits par certaines de nos pratiques langagières (Searle, 2010, 2012 ; Dumez, 2010). Dans la continuité des travaux d'Austin sur les actes de langage, Searle insiste sur l'*engagement* des locuteurs. Faire une assertion (*il y a une tasse de café sur mon bureau*), c'est aussi s'engager sur sa vérité dont le locuteur devient redevable, faire une promesse (*je terminerai l'article avant la fin de la semaine*) c'est s'engager à la tenir. Le cas des déclarations nous semble apporter un éclairage sur la discussion précédente. Une déclaration (*je suis votre formateur en mathématiques*) est un acte de langage particulier qui crée une réalité sociale. Ce n'est pas tant les diplômes, les parcours académiques ou professionnels (dont savons qu'ils ont parfois peu en commun) qui confèrent aux individus le statut de formateur qu'un engagement partagé des sujets de l'institution envers ce type de déclaration. Ces engagements se traduisent par des pouvoirs déontiques, c'est-à-dire un système d'attentes réciproques, de droits et de devoirs. La notion de contrat didactique en est une expression dans le contexte de la classe de mathématiques. Parmi les pouvoirs déontiques associés à la fonction de formateur, il y a en particulier la possibilité *via* de nouvelles déclarations de situer l'activité des formés dans des cadre institutionnels donnés, en l'occurrence des systèmes de savoirs dont nous avons décrit plus haut la variété en appui sur la typologie de Ball *et al*. (2008). Les contraintes et possibilités associées à ces systèmes de savoirs dégagés des inclinaisons individuelles procurent de nouvelles possibilités d'agir, ce qui est bien sûr une des finalités d'une formation. Le processus d'institutionnalisation est typiquement le lieu de ce déplacement des vécus individuels et des connaissances mobilisées vers une réalité socialement construite, sous la houlette des déclarations du formateur. Notre étude des variations dans les types de savoirs mis en avant par les formateurs passe donc, sur le plan méthodologique, par une attention aux éléments déclaratifs de leur discours qui opèrent un tel déplacement dans le processus d'institutionnalisation.

4. Mobilisation de connaissances liées à la déconstruction dimensionnelle : exemples

L'ensemble de la séquence s'appuie sur un seul et même dessin (figure 1). Dans une première partie, il est projeté au tableau, puis caché. La tâche des étudiants est alors de le reproduire à main levée. Ils doivent ensuite en proposer une description. Dans une deuxième partie, les étudiants sont invités à écrire des programmes de construction. La troisième et dernière partie de la séquence porte sur la démonstration (et réinvestit les activités précédentes). Nous avons précédemment avancé des arguments selon lesquels le fonctionnement non iconique de la visualisation (déconstruction dimensionnelle notamment) serait potentiellement en jeu dans cette séquence. Nous montrons maintenant qu'il s'agit effectivement d'une facette centrale de l'activité géométrique effective des étudiants.

Commençons par nous intéresser à la première partie de la séquence. Une analyse des déroulements met en évidence des spécificités dans le processus qui a conduit les étudiants à l'identification des parallélogrammes. Ceux-ci ne semblent pas repérés dans les productions à main levée[10] (recueillies pour un seul groupe) et ne font l'objet d'aucune verbalisations spontanées et publiques lors de la phase de description (les trois groupes). Si l'on s'en tient aux figures planes, ce sont tout d'abord les « deux » triangles (ABC et DEF) et le cercle qui sont identifiés, avant les autres triangles, puis, mais seulement lors d'interactions avec le formateur, les parallélogrammes et des trapèzes. Prenons l'exemple de la séance menée par F3. Les étudiants réalisent le tracé à main levée, identifient collectivement divers éléments (triangles, cercle, droites, *etc.*) puis le processus s'épuise. Le formateur est alors amené à relancer l'activité du groupe sous la forme d'une phase dialoguée. Ceci amène une étudiante à repérer des relations de parallélisme et à en « déduire » l'existence des parallélogrammes (« *du coup* on peut voir des parallélogrammes »). Le passage par le registre langagier, registre privilégié du déductif, a selon nous permis à l'étudiante de s'engager dans un processus de déconstruction dimensionnelle, lequel se produit « pour une (re)construction déductive des objets représentés » (Duval, 2005, p. 24). De manière stable au sein des trois groupes, l'identification des parallélogrammes a émergé lors d'interactions verbales entre les formateurs et les étudiants, après épuisement des premières verbalisations. Il s'agit d'un indice fort pour attester du fonctionnement non iconique du processus de visualisation sous-jacent.

Il est légitime de se demander à quoi attribuer cette régularité dans les modalités d'identification des figures planes composant la figure 1. Nous nous contenterons ici de souligner que la nature des expériences scolaires liées à la visualisation évolue sensiblement du cycle 1 (où commencent à être abordés les triangles et les cercles) au cycle 3 (apparition des parallélogrammes) puis au-delà. La visualisation

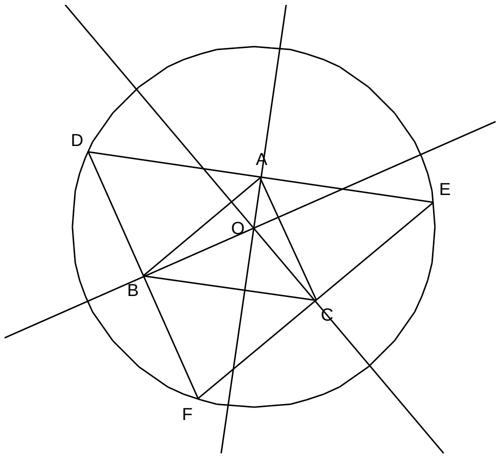
---

10 Sur le plan méthodologique, le recours à de tels tracés est intéressant dans la mesure où il permet de mieux accéder à l'intention des sujets : il est possible de tracer à main levée un petit triangle dont les sommets sont les milieux d'un plus grand sans pour autant tracer les parallélogrammes alors même que les deux constructions sont équivalentes sur le plan mathématique.

iconique devient moins prépondérante, les figures sont petit à petit appréhendées du point de vue de leurs propriétés, dans un registre discursif puis déductif[11].

D'autre part, il est intéressant de repérer que chacun des trois groupes a effectivement connu des difficultés pour rédiger le programme de construction commençant par le « petit » triangle ABC. Comme nous le soulignions plus haut, il est en effet nécessaire de repérer, au-delà des questions de technique de tracé, que le point E est un sommet du parallélogramme AECB et pas seulement un sommet du triangle DEF. Il s'agit pour nous d'un nouvel indice de la présence d'enjeux d'apprentissage liés à la visualisation non iconique dans cette séquence.

Prenons un dernier exemple relevant cette fois de la partie relative à la démonstration.



Dans le prolongement du travail autour des programmes de construction, nous permettant entre autres de mener une réflexion autour du statut des hypothèses en géométrie déductive, nous posons aux étudiants la question suivante (annexe : partie 3, séance 2, exercice 3) :

Soient un triangle ABC et O son orthocentre. Soit $\Delta 1$ la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, $\Delta 2$ la droite perpendiculaire à (OA) passant par A, $\Delta 3$ la droite perpendiculaire à (OC) passant par C. On appelle D le point d'intersection de $\Delta 1$ et de $\Delta 2$, E celui de $\Delta 2$ et de $\Delta 3$ et F celui de $\Delta 3$ et de $\Delta 1$. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF.

Cette démonstration suppose le recours à plusieurs points de vue successifs pour le trait joignant les point A et O (figure 1) : hauteur issue de A dans le triangle ABC, droite perpendiculaire à (BC), droite perpendiculaire à (DE), droite simultanément perpendiculaire à (BC) et (DE), médiatrice de [DE], diamètre du cercle circonscrit à DEF. Il s'agit donc de mettre successivement une même trace graphique en relation avec divers éléments de la figure au cours d'un processus reposant sur la

11 D'autres éléments ont bien sûr pu jouer : le codage, les caractéristiques spatiales de la figure, la proximité de la tâche de description avec la tâche de reproduction, etc.

décomposition de la figure initiale en sous éléments (notamment des droites ou des réseaux de droites).

5. Des mises en œuvres contrastées du point de vue des savoirs

Nous décrivons dans cette partie les choix d'institutionnalisation des formateurs dont nous avons observé la mise en œuvre en nous focalisant sur les deux premières parties de la séquence et en portant une attention particulière à la thématique de la visualisation. Notons que plusieurs passages du document collectif signalent des enjeux liés à la visualisation (objectif et mise en commun de la partie 1A, fin de la synthèse de la séance). Il faut néanmoins distinguer les phases de mise en commun ou de synthèse (qu'avons-nous fait ? comment ? etc.) des phases d'institutionnalisation que nous souhaitons comparer (qu'avons-nous appris qui soit réutilisable ?). Il n'a du reste jamais été question de cette thématique des savoirs et de l'institutionnalisation dans les travaux du groupe ayant produit ce document. Nous présentons maintenant de manière successive ce que nous retenons des trois mises en œuvre analysées en insistant sur leurs spécificités plutôt que sur les points de convergence.

5.1. Première mise en oeuvre

F1 est un formateur expérimenté, intervenant tant dans les aspects disciplinaires, didactiques ou transversaux de la formation professionnelle des professeurs du premier et du second degré. Il est par exemple en charge d'un cours sur le « métier » d'élève, il est donc sensibilisé à l'idée que seule une partie de l'activité des élèves fait l'objet d'une reconnaissance institutionnelle[12]. On peut penser que ce profil particulier est en lien avec un aspect de sa mise en œuvre qui contraste avec celles de F2 et F3 : le temps de la passation des consignes est plus long, F1 procède à des reformulations, explicite l'organisation pédagogique et matérielle des tâches, précise ce que les étudiants vont avoir à faire pour apprendre au-delà de la seule réalisation de la tâche (il est notamment question de la prise de notes). Pour autant, après avoir organisé une phase dialoguée au cours de laquelle les verbalisations de la partie 1 sont collectivement validées et complétées, le formateur poursuit avec la partie 2 relative aux programmes de construction sans que ne soit déclaré ce qui a été travaillé dans la première partie de la séquence. F1 semble considérer cette partie 1 comme un travail préparatoire pour la suite plutôt que comme une activité ayant ses propres objectifs d'apprentissage. Relevons néanmoins le fait qu'un document polycopié récapitulant les définitions et théorèmes usuels de la géométrie

12 Signalons que notre entrée dans cette thématique par l'intermédiaire des savoirs n'est pas la seule possible, ni même la plus courante en formation des enseignants. On peut aussi penser à des attitudes ou des compétences plus transversales que les curricula laissent dans l'ombre pour diverses raisons.

plane sera distribué en fin de séance. On peut y voir une forme de processus d'institutionnalisation minimaliste centré sur des définitions classiques de la géométrie plane dont certaines ont été abordées lors de la première partie. Pour ce qui est de la partie 2, une première prise de distance vis-à-vis de la tâche a lieu après qu'un premier programme de construction, commençant par DEF[13], a été écrit au tableau et collectivement discuté :

F1 : quand j'ai circulé parmi vous au début, vous étiez tous dans le même débat / la difficulté de l'exercice c'est de passer d'une figure statique à un programme qui véhicule une dynamique / c'est-à-dire qu'il faut trouver un début et un enchaînement / et vous avez beaucoup réfléchi sur le début

L'expression « l'exercice » a une valeur générique dans cette intervention et le formateur utilise ensuite beaucoup d'articles indéfinis. L'identification d'un programme de construction suppose une appréhension dynamique et séquentielle explicitant certains liens entre constituants d'une figure. Ceci relève de la déconstruction instrumentale, mais est en lien avec la déconstruction dimensionnelle (Mithalal, 2010). La dimension déclarative de cet énoncé tient au fait que F1 va au-delà de ce qui est effectivement vécu par les étudiants. Néanmoins, le projet didactique de F1 semble piloté par une autre préoccupation. Un étudiant propose un nouveau programme de construction, débutant cette fois par le tracé du cercle. F1 fait alors remarquer que ce deuxième programme est plus élémentaire, mais qu'il permet néanmoins de retrouver par déduction l'ensemble des observations effectuées sur la figure. Il s'ensuit des échanges portant sur la dimension déductive et axiomatique de la géométrie qui sera l'objet de la troisième partie de la séquence. La séance se termine par la distribution du document polycopié évoqué plus haut. F1 en précise alors l'organisation, dans la perspective de son usage dans le travail déductif. Il explicite alors des savoirs relatifs à la gestion des énoncés dans la production d'une démonstration. F1 cible donc implicitement des savoirs de nature épistémologique portant sur la manière dont les mathématiques s'élaborent. Formateur pour les enseignants de mathématiques du second degré, F1 est sans aucun doute conscient des difficultés rencontrées par les apprenants, élèves de collège ou étudiants en master MEEF (Métier de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) premier degré, au moment de l'entrée dans la démonstration. En revanche, étant donné le rôle que joue la visualisation pour ce passage vers la démonstration, on peut s'interroger sur ce choix de formation : F1 l'a-t-il mise de côté à dessein ? Quelle est la place de la visualisation dans sa conception de l'activité mathématique ?

---

13 Le formateur a fait le choix laisser ouvert le choix de ancrage initial pour la construction.

Le type de savoir mis en avant relève ainsi du pôle des connaissances (sur les) mathématiques plutôt que de celui des connaissances pédagogiques disciplinaires, dans la mesure où les étudiants eux-mêmes rencontrent des difficultés récurrentes avec le mode de raisonnement déductif, et qu'ils n'auront pas à l'enseigner.

5.2. Deuxième mise en œuvre

F2 est un formateur confirmé, par ailleurs chercheur en didactique des mathématiques et familier des concepts de didactique de la géométrie présentés plus haut. Sa mise en œuvre se distingue par des références régulières à la thématique de la visualisation. Par exemple :

F2 : « vous voyez qu'on en voit des choses sur cette figure / on a vu qu'on arrivait d'abord à décomposer cette figure en surfaces, en sous-éléments de surface / deux triangles et puis un cercle / et puis après là depuis tout à l'heure on est en train de décortiquer les postions relatives des sommets de A B C par rapport à D E F et puis ce que sont ces droites-là / ce que représente le point O pour A B C / ce que représente le point O pour D E F / est-ce que vous voyez d'autres choses ? »

Cette intervention vise à relancer la phase de recension des objets et relations perçus dans la figure (partie 1). Bien que contextualisée, elle thématise la visualisation des figures et peut s'interpréter comme un premier pas dans un processus d'institutionnalisation. Par exemple, F2 commence par dire « en surfaces, en sous-éléments de surface » avant de dire « deux triangles et puis un cercle ». F2 poursuit peu après :

F2 : « [...] qu'est-ce qu'on a fait en fait / on a essayé de matérialiser des relations que l'on voyait entre les objets / vous voyez que les contraintes de précision ici moi je m'en fiche / ça n'a pas d'importance / ce qui était intéressant c'était de déconstruire la figure de regarder les sous-éléments de la figure d'essayer de les mettre en relation / C'est ça que je voulais faire apparaître avec vous / ça nous a permis aussi un peu de rappeler les propriétés géométriques de se remettre un peu là-dedans / [...] »

Dans ces extraits, F2 va au-delà d'une simple description d'un état de choses. Il dévoile plus explicitement ses intentions didactiques en inscrivant l'activité des étudiants dans un système de savoirs particulier, les savoirs liés à la visualisation non iconique sont mis en avant, avant même ceux relatifs aux propriétés et définitions géométriques. Contrairement à notre analyse des intentions de F1, il nous semble ici possible d'interpréter les objectifs de formation de F2 comme relevant non seulement d'une mise en lumière du processus d'élaboration des contenus mathématiques, mais aussi d'une volonté de commencer à avancer des savoirs relatifs aux processus d'apprentissage des élèves. Ceci se traduit, lors de la mise en œuvre de la séance, par l'explicitation de savoirs liés à la visualisation, restés transparents dans la mise en œuvre de F1.

Les savoirs mathématiques relevant de la culture commune (propriétés et définitions géométriques) font néanmoins l'objet d'apartés occasionnels, parfois à partir de figures construites pour l'occasion et s'écartant du contexte initial (un polycopié sera également distribué). F2 engage ensuite les étudiants dans la réalisation des programmes de construction. À la manière de F1, il s'appuie sur ces programmes pour mettre au jour certains savoirs relatifs à la structure du discours déductif en géométrie.

5.3. Troisième mise en œuvre

F3 est un formateur expérimenté, par ailleurs chercheur en mathématiques fondamentales. Une originalité de sa mise en œuvre, au regard des deux autres, est d'avoir pris le temps d'une discussion assez fournie autour des droites remarquables des triangles. La figure présente d'ailleurs une configuration classique permettant de travailler sur ces notions (par exemple pour démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes). L'extrait qui suit est issu de la partie 1 de la séquence :

F3 : « y a quelque chose sur lequel je voudrais revenir / alors la première 'trois droites passant par le centre du cercle' [il entoure l'expression qui figure au tableau] / et la seconde que j'avais d'ailleurs négligée tout à l'heure qui est 'O est l'orthocentre de ABC' [il entoure également] / je vais m'occuper d'abord des droites sécantes au centre du cercle qui sont en fait les médiatrices / alors je vais faire disparaître progressivement le triangle ABC qui ne m'intéresse pas en l'occurrence [il le fait grâce à un logiciel de géométrie dynamique] [...] »

F3 s'appuie sur les assertions contextualisées des étudiants qui ont été relevées au tableau pour les situer dans son projet didactique. En effaçant certaines parties de la figure grâce au logiciel de géométrie dynamique et en opérant des déplacements de points, F3 procède à une recontextualisation des observations réalisées dans des configurations graphiques plus générales (des déplacements opérés sur les sommets du triangle contribuent par ailleurs à renforcer la généralité). Ceci amorce un processus d'institutionnalisation qui conduira F3 à énoncer et écrire au tableau certains théorèmes classiques sur les droites remarquables du triangle. Bien que le fait de cacher ou de réafficher certains éléments graphiques puisse être interprété comme une forme de modélisation d'une dynamique visuelle ce sont bien plutôt des configurations statiques qui sont étudiées, de manière indépendante. En résumé, une particularité de ce déroulement est d'avoir mis en avant, plus que les autres, des savoirs mathématiques relevant de la culture commune.

Conclusion

À l'instar de Kuzniak (2007), ce travail très prospectif nous a permis de mettre en évidence des variations dans les choix des systèmes de savoirs mis en avant par les formateurs alors même que les grandes lignes et le support de la séquence étudiée avaient été collectivement conçus. Les déroulements ont bien sûr bien des points communs mais celui de F1 se distingue par une centration sur la thématique de la démonstration, celui de F2 par la présence d'éléments relatifs à la visualisation, celui de F3 par une prise en charge plus appuyée des savoirs mathématiques portant sur les droites remarquables du triangle. Ces savoirs relèvent de catégories différentes au sens de la typologie des connaissances pour l'enseignement des mathématiques de Ball et al. (2008). Les savoirs relatifs au mode de raisonnement déductif peuvent être rapprochés des connaissances portant sur le processus d'élaboration des mathématiques (Carillo *et al.*, 2013), ceux portant sur les droites remarquables de la culture mathématique « commune ». Tous deux appartiennent au pôle des connaissances (sur les) mathématiques. Pour leur part, les savoirs portant sur les manières spécifiques dont les figures sont perçues en mathématiques peuvent aussi être rattachés au pôle des connaissances pédagogiques disciplinaires, dans la mesure où elles sont issues d'un point de vue cognitif porté sur l'appréhension des figures géométriques par les élèves (Duval, 2005), les élèves en question étant du niveau scolaire de ceux que les étudiants en formation auront à prendre en charge.

Il nous paraît raisonnable de rapprocher ces choix des profils spécifiques des formateurs, de leurs expériences professionnelles passées et présentes, de leur ancrage disciplinaire, même si nous ne nous sommes pas donnés les moyens d'étudier ces corrélations potentielles plus en détail. Quoi qu'il en soit, il y a bien sûr de bonnes raisons susceptibles de venir justifier tel ou tel choix. Nous ne chercherons pas ici à les mettre en balance les uns par rapport aux autres. La question de la nécessité d'un enseignement de savoirs relatifs à la visualisation géométrique, qui sont impliqués dans la séquence étudiée, reste d'ailleurs pour nous largement ouverte. Cette analyse nous semble malgré tout illustrer le fait que le corpus de connaissances et savoirs visés par la formation des enseignants de premier degré en géométrie est loin d'être stable et partagé, à la fois parce que les institutions susceptibles de les légitimer sont nombreuses et parce que la didactique de la géométrie est très certainement un champ de recherche ayant produit des savoirs encore peu disponibles, souffrant d'une faible diffusion au sein des institutions de formation.

Au-delà de la question des origines possibles des phénomènes mis au jour, l'identification même de ces variations nous invite à interroger le statut à accorder aux connaissances relatives à l'activité mathématique elle-même dans la formation des enseignants en mathématiques, que ces connaissances portent sur l'activité des individus en formation eux-mêmes ou sur l'activité de leurs potentiels élèves. Les stratégies de formation, au sens de Houdement (2013), mises ici en œuvre par les formateurs observés témoignent d'écarts importants quant à la gestion de ces connaissances, et la mise en regard de ces stratégies laisse entrevoir des degrés très variables dans ce qui est laissé à la charge des étudiants quant à l'identification de connaissances nécessaires à l'activité géométrique. Explorer ces stratégies à la lumière de la transparence des savoirs nous conduit à interroger la manière dont ces écarts sont susceptibles de générer des processus de différenciation, au sein même de nos formations. Un prolongement important de ce travail serait certainement d'essayer de saisir les effets des variations mises en évidence sur les pratiques des enseignants. Il s'agit d'un enjeu important dans la mesure où la professionnalisation du métier d'enseignant supposerait l'identification d'objectifs partagés de formation.

Bibliographie

BALL D.L., THAMES M.H. & PHELPS, G. (2008), Content knowledge for teaching: What makes it special?, *Journal of Teacher Education* **59(5)**, 389-407.

BARRIER T., HACHE C. & MATHE A.-C. (2014), Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N* **93**, 13-37.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7(2)**, 33-115.

CARRILLO J., CLIMENT N., CONTRERAS L.C. ET MUÑOZ-CATALÁN M.C. (2013), Determining specialised knowledge for mathematics teaching, dans *Proceedings of the CERME 8* (Eds. B. Ubuz & alii), 2985-2994, Ankara : Middle East Technical Universitiy.

CHARALAMBOUS C. Y. (2008), Mathematical knowledge teaching and the unfolding tasks in mathematics lessons: intergrating two lines of research, dans *Proceedings of PME 32* (Eds. O. Figuras & alii) **2**, 281-288, Morelia : PME.

CHEVALLARD Y. & CIRADE G. (2009), Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture, *Recherche et Formation* **60**, 51-62.

COULANGE L. (2014), Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation* **54**, 9-27.

DUMEZ H. (2010), Comment le monde social est-il construit ? Le point de vue de John R. Searle, *Le Libellio d'Aegis* **6(4)**, 21-26.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **10**, 5-53.

DUVAL R. ET GODIN M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* **76**, 7-27.

HOUDEMENT C. (2013), Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques, Note pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot.

KUZNIAK A. (2007), Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degré. Recherche et Formation **55**, 27-40.

MARGOLINAS C. (2014), Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières ?, dans Actes du colloque sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières (dir. P. Losego), 17-44, Lausanne : Haute École Pédagogique de Vaud.

MARGOLINAS C. ET LAPARRA M. (2011), Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire, dans *La construction des inégalités scolaires* (dir. J.-Y Rochex et J. Crinon), 19-32.

MITHALAL J. (2010), Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle. , thèse de doctorat, Université de Grenoble.

PERRENOUD P. (1995), *Métier d'élève et sens du travail scolaire*, Paris : ESF.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013), Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères-IREM* **90**, 7-41.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* **2(4)**, 505-528.

SAYAC N. (2013), Pratiques de formateurs en mathématiques dans le 1er degré : les savoirs de formation, *Recherche et Formation* **71**, 115-130.

SHULMAN L. S. (1986), Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15(2)**, 4-14.

SEARLE, J. (2010). Making the Social World. The Structure of Human Civilization. Oxford : Oxford University Press.

SEARLE, J. (2012). Qu'est-ce que le langage ? Pratiques, 155-156, 228-250.

SENSEVY, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique : une activité située ? Recherche et Formation, 57, 39-50.

THOMAS BARRIER

LML – Laboratoire de Mathématiques de Lens

Faculté des Sciences Jean Perrin, Université d'Artois

Rue Jean Souvraz SP 18, 62307 Lens Cedex, France

thomas.barrier@espe-lnf.fr

ANNE-CÉCILE MATHÉ

Laboratoire ACTé, ESPE Clermont-Auvergne

Université Blaise Pascal – Clermont Ferrand

36 av Jean-Jaurès CS 20001, 63407 Chamalières Cedex, France

a-cecile.mathe@univ-bpclermont.fr

JORIS MITHALAL

ESPE de Paris

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR – EA 4434), UPD, UPEC, UCP, U Rouen, U Artois.

Case 7018 - Bâtiment Sophie Germain

75205 PARIS Cedex 13

joris.mithalal@ens-lyon.org

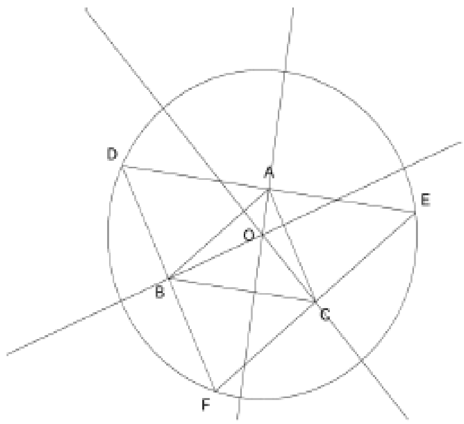
Annexe

Les séances élaborées et expérimentées
(dans le cadre du GRAF « géométrie » ESPE Lille Nord de France)

Séance 1

Partie 1 : Reproduction à main levée, identification perceptive de propriétés géométriques d'une figure donnée

A. Reproduction à main levée d'une figure projetée



Objectifs : identifier des sous-éléments (2D, 1D, 0D) d'une figure donnée, reproduire à main levée les relations perçues entre ces sous-éléments

Choix de commencer par une reproduction à main levée : permettre à la plus grande partie des étudiants de produire quelque chose, pas d'obstacle lié au vocabulaire, à la formulation, montrer aussi la pertinence (didactique) d'un travail sur le tracé à main levée. Aide à la formulation des propriétés et relations entre ces sous-éléments de la figure (être capable de voir avant d'être capable de dire).

Pas d'instrument pour se débarrasser des difficultés de manipulation et d'usage des instruments. Se libérer d'un contrat de précision en géométrie qui mette en échec les étudiants, pas d'attente concernant le soin pour privilégier réflexion sur propriétés et relations.

Déroulement prévu :

La figure ci-contre est projetée quelques minutes au tableau puis cachée.

Consigne : Reproduire la figure à main levée (individuelle, sur feuille isolée)

Mise en commun : Qu'avez-vous représenté ?

Première expression de difficultés des étudiants.

→ Vers l'identification de sous-éléments :

- on peut regarder les triangles DEF et ABC, DAB, BCF, AEF...,
- voir le cercle comme défini en premier ou cercle circonscrit à DEF,
- voir les parallélogrammes, etc...

À l'oral : de premières relations perçues entre ces sous-éléments (de premières formulations, rappels de vocabulaire)

Éventuellement à débattre : distinction dessin figure : quelles sont les propriétés que nous ne prenons pas en compte en géométrie ? Différents dessins représentent une même figure.

Quels types de propriétés prend-on en compte en géométrie ? (position relative de A par rapport à [DE] mais pas position de E, D, F sur le cercle par exemple...pas si simple). En fait, en ne regardant que ce dessin, on ne peut que faire des hypothèses sur les propriétés géométriques caractérisant la figure sous-jacente.

B. Formuler les propriétés perçues

En individuel, figure projetée au tableau. Formulation écrite individuelle

Consigne : «Objectifs : formuler les propriétés / relations que vous voyez dans cette figure. »

Mise en commun : formulation des propriétés géométriques, des relations perçues entre les sous-éléments de la figure, rappels sur le vocabulaire, les formulations des propriétés en géométrie.

Rappels sur les conventions de notation.

Partie 2 : Programme(s) de construction

Trois entrées différentes sont possibles pour rédiger un programme de construction de cette figure : en partant du cercle, en partant du triangle EDF, en partant du triangle ABC.

A. En collectif, construction de la figure sur logiciel de géométrie dynamique en partant du cercle, élaboration d'un premier programme de construction (simple), règles pour élaborer un programme de construction

Qu'est-ce qu'un programme de construction ?

Objet scolaire

But : communiquer une suite d'étapes permettant de construire sans ambiguïté une figure géométrique, caractérisée par des propriétés géométriques.

(→ Les énoncés, le grain, dépend du public visé, des connaissances et outils à disposition tant de celui qui l'émet que de celui auquel il est destiné)

Une suite d'étapes de construction d'une figure géométrique qui ne donne lieu à aucune ambiguïté.

Pas d'évocation des instruments.

Rq. : pour nous : on dira qu'on construit plutôt des points, des segments, des droites, des cercles que des carrés, des parallélogrammes.

Proposition alternative : Rédaction en utilisant des « étiquettes d'instruction ».

B. Individuellement, rédaction d'autres programmes de construction

a) En partant de EDF

b) En partant de ABC

Mise en commun : des étudiants décrivent leur programme de construction (ou affiche). On teste sur logiciel de géométrie dynamique la validité des programmes.

Des programmes de construction possibles

C. Question bonus

Soient A, B, C trois points. Comment construire, à règle et au compas, un triangle EDF tel que A, B, C soient les milieux respectifs de [ED], [DF], [EF].

D. Synthèse possible

Mise en regard des programmes de construction produits : des propriétés différentes, des instruments à utiliser différentes, retour sur le vocabulaire, sur les « règles d'un programme de construction », sur les écarts entre description et programme de construction

Peut-être retour sur des questions liées à la distinction dessin/figure : on reproduit la figure, pas le dessin donc pas de prise en compte des mesures (notamment des mesures des côtés du triangle DEF), on peut par exemple placer les points E, F et D n'importe où sur le cercle.

Retour sur les objets, propriétés, définitions

On peut construire différents regards sur la figure, isoler différents sous éléments, voir de différentes manières ces sous-éléments.

Exemple : Qu'est-ce que le point O ?

O est le centre du cercle.

O est le centre du cercle circonscrit.

O est le point d'intersection des médiatrices du triangle EDF.

O point de concours des hauteurs de ABC.

On formule les différentes figures englobantes, manières de voir…

Fin de la séance : travail sur tracés à la règle et au compas ; éventuellement : rappels sur des objets géométriques de base, des propriétés, exercices

Séance 2

Partie 3 : Démonstration, construction de preuves

On choisit un programme de construction, donc une définition de la figure. Comment peut-on en déduire des propriétés identifiées en séance 1, convoquées dans un autre programme de construction ?

Autrement dit : On a des propriétés en vrac (partie 1)

Certaines sont suffisantes pour construire, pour définir la figure.

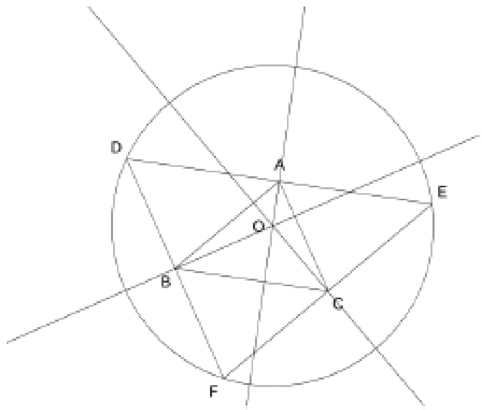
À partir de celles-ci, comment montrer que les autres sont vraies ?

En maths, pour montrer qu'une propriété est vraie, le système de validation repose sur raisonnement hypothético-déductif.

Appui sur banques de propriétés et théorèmes.

Quelques premiers exemples de démonstration. Discussion sur ce qu'est une démo.

Exemple : on part de DEF et A, B, C milieux respectifs. Montrer que ADCB est un parallélogramme.



Exemples :

1) *(On part du triangle ABC)*

Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre. Soient Δ1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, Δ2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A, Δ3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C. Δ1 et Δ2 se coupent en D, Δ1 et Δ3 se coupent en F, Δ2 et Δ3 se coupent en E.

Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

2) *(On part du triangle ABC)*

Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre. Soit F le point tel que ABFC soit un parallélogramme. Soit E le point tel que ABCE soit un parallélogramme. Les droites (AE) et (BF) se coupent en D. Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

Activités de prolongement

<u>Exercice 1</u>

Soit (C) un cercle de centre O

On considère trois points D, E et F appartenant à (C). Soient, respectivement A le milieu de [DE], B milieu de [DF] et C milieu de [EF]. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC.

<u>Exercice 2</u>

Soit DEF un triangle quelconque et O le centre de son cercle circonscrit. Soient A, B et C milieux respectifs des segments [DE], [DF] et [EF]. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC

<u>Exercice 3</u>

Soit ABC un triangle d'orthocentre O. Soit D1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, D2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A et D3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C. On appelle D le point d'intersection de D1 et de D2, E celui de D2 et de D3 et F celui de D1 et de D3. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF

<u>Exercice 4</u>

Soit ABC un triangle d'orthocentre O. Soit le point F tel que ABFC est un parallélogramme. Soit le point E tel que ABCE est un parallélogramme. Les droites (AE) et (BF) se coupent en D. Démontrer que O est le cercle du centre circonscrit à DEF

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à son adresse électronique qui est indiquée dans ce volume.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word*, accessible par un lien depuis la page des Annales à l'adresse URL :

http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de du ou des auteurs ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc « abstract – résumé – mots clés » ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes, mailto :

bibirem@math.unistra.fr

- pour des propositions d'articles, mailto :

fpluvinage@cinvestav.mx

eric.roditi@paris5.sorbonne.fr