ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : FRANCOIS PLUVINAGE & ERIC RODITI

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 22 **2017**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG Cedex
irem@math.unistra.fr

Tel. +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61

http://irem.unistra.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 22 – 2017

SOMMAIRE

EDITORIAL

Dans l'éditorial du volume 21 de cette revue, nous citions la théorie APOS, développée aux Etats Unis par Ed Dubinsky. Il se trouve que Ed Dubinsky a contribué au colloque intitulé *The influence of computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, colloque qui s'est tenu à Strasbourg du 25 au 30 mars 1985, sous l'égide de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (International Commission on Mathematical Instruction – ICMI). Le comité d'organisation de ce colloque était présidé par le regretté Jean-Pierre Kahane, qui nous a quitté ce 21 juin 2017. Aux nombreux hommages rendus à l'éminente personnalité du disparu, émanant tant de la communauté des mathématiciens que de responsables du système éducatif concernés par l'enseignement des mathématiques, nous souhaitons ici ajouter, en guise de témoignage, quelques commentaires sur ce colloque dans lequel Jean-Pierre Kahane s'était pleinement impliqué. Avec perspicacité, il avait bien senti qu'il était nécessaire, à cette époque où l'informatique commençait à se diffuser, de réunir les compétences de bons spécialistes de plusieurs domaines pour envisager son intégration en milieu scolaire et universitaire. Il avait su se montrer persuasif, de telle sorte que le colloque de Strasbourg a réuni tout à la fois des mathématiciens, des informaticiens, des spécialistes de l'enseignement.

La publication d'un ouvrage[1] fut l'une des retombées du colloque, mais ce ne fut pas la seule. Ainsi, bien des lycéens qui utilisent aujourd´hui une calculatrice programmable ne se doutent pas que la programmation de leur instrument le doit peut-être à des programmes qui ont été présentés et discutés lors du colloque. En effet, David Stoutemyer, promoteur avec Albert Rich du partenariat Softwarehouse fut un des intervenants. C'est la programmation de calcul symbolique de ces deux promoteurs, s'appuyant sur le langage de liste LISP, remarquable de convivialité et très performante, que l'entreprise Texas Instrument a adapté sur ses calculatrices. À l'époque du colloque, David Stoutemyer présentait le logiciel muMATH, qui fut réécrit en en 1988 pour devenir le système DERIVE, dont la version 6 est aujourd'hui téléchargeable sous Windows, preuve que le système reste valable aujourd´hui.

[1] Kahane, J.-P., Howson, A.G. (Eds.), 1986, *The Influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Cambridge University Press.

À l'époque, l'archivage laissait à désirer, car les supports (disquettes) devenaient rapidement caducs à cause de l'évolution rapide des matériels. C'était encore l'impression papier qui constituait la meilleure garantie de conservation. Mais la consultation d'un document papier demande de l'avoir en main, d'où une limitation évidente de son lectorat. Avant que soit édité en 1986 l'ouvrage issu du colloque, l'IREM de Strasbourg, qui édite les présentes Annales, avait publié une brochure des documents de travail pour le colloque. Et nous devons à la remarquable activité de Christine Carabin, bibliothécaire de l'IREM, la numérisation des publications de l'IREM. En particulier, la brochure du colloque est consultable en ligne à l'adresse
http://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Brochures/I118/I118.pdf

Ayant à l'esprit cette possibilité de consultation, nous avons pu nous limiter à une présentation extrêmement succincte du colloque, alors que bien des thèmes auraient pu ou dû être signalés, en raison de leur importance qui reste d'actualité. Bien sûr, la révolution numérique a gagné tous les secteurs d'activité depuis l'époque du colloque signalé. Des articles de ces Annales prennent ce phénomène en compte. Ceux de Jean Baptiste Lagrange et Janine Rogalski, de Michèle Tessier-Baillargeon, Nicolas Leduc, Philippe R. Richard et Michel Gagnon en sont des exemples dans ce volume 22.

FRANÇOIS PLUVINAGE ET ÉRIC RODITI

JEAN-PIERRE LEVAIN, PHILIPPE LE BORGNE,
ARNAUD SIMARD, ANDRE DIDIERJEAN

EFFET DE LA MASTERISATION SUR L'EXPERTISE DES ETUDIANTS ET PROFESSEURS DES ECOLES STAGIAIRES EN RESOLUTION DE PROBLEMES DE PROPORTIONNALITE

Abstract. The impact of the evolution into master courses on the expertise in proportinality problem solving among students and primary school trainee teachers. The aim of the research is to assess, in the French context, the impact of the evolution of the teachers trainings into master courses on the development of the expertise in proportionality problem solving. For this purpose, we will describe three successive periods from 2008 to 2015, each representing a teaching model. We will consider, for each of these models, the added value of every education year, the influence of the competitive exam, the specifics of the obtained licence. The exploitation of a questionnaire, constituted by 19 scaling and elargement problems, proposed to 1138 students, allows to check if the studied education model has an effect on the success and failures patterns,a as well as the levels of expertise that ensues.

Résumé. Le but de cette recherche est d'analyser, dans le contexte français, l'impact de la mastérisation des formations des professeurs des écoles sur le développement de l'expertise en résolution de problèmes de proportionnalité. Pour ce faire nous décrirons trois périodes successives dans la formation de 2008 à 2015 chacune de ces périodes correspondant à un modèle de formation. Nous prendrons en compte, pour chacun des modèles, l'apport de chaque année de formation, l'impact du concours, la spécificité de la licence obtenue. L'exploitation d'un questionnaire, constitué de 19 problèmes d'agrandissement et d'échelle proposés à 1138 sujets permet de vérifier si le modèle de formation considéré a une incidence sur la structure des réussites et des échecs ainsi que sur les niveaux d'expertise qui en découlent.

Mots-clés. Formation initiale des enseignants, développement des capacités professionnelles, résolution de problèmes de proportionnalité.

---

1. Problématique

Le travail de recherche que nous proposons concerne le développement de l'expertise en résolution de problèmes de proportionnalité chez des professeurs des écoles stagiaires et des étudiants en formation à travers la mise en place de deux réformes successives qui ont eu lieu en France instaurant la mastérisation des formations des enseignants. Notre étude s'intéresse donc à la formation initiale des enseignants de l'école primaire à un moment où les dispositifs de formation ont été profondément réaménagés par la mise en place des nouveaux masters intitulés :

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 9 - 42.

« Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation » (masters MEEF). Elle s'échelonne de 2008 à 2015 et privilégie trois périodes successives dans la formation des professeurs des écoles :

- tout d'abord avant 2010 la formation, dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM), comprenait une première année de préparation au concours pour des étudiants titulaires d'une licence et, après obtention du concours de recrutement, une seconde année de formation en alternance en tant que professeur des écoles stagiaires ;

- en 2010, la première mastérisation des formations initiée par le ministre Xavier Darcos et mise en place par le ministre Luc Chatel vise l'obtention d'un master MEEF à l'issue des deux années de formation ; elle promeut une passation des épreuves écrites du concours (admissibilité) au début de la deuxième année de formation et des épreuves orales (admission) en fin de cette même année ;

- enfin la réforme du ministre Vincent Peillon en 2013 instaure la création des Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation (ESPE) avec toujours une formation débouchant sur l'obtention d'un master MEEF tout en transférant les deux parties du concours de recrutement en milieu et fin de première année.

La mastérisation de la formation, telle qu'elle est instaurée, découple donc l'obtention du master, à l'issue de la formation, de la réussite au concours de recrutement. Ce découplage a nécessité de mettre en place des ajustements dans les offres de formation de deuxième année de master liés à la coexistence de ces deux populations : les étudiants ayant réussi le concours de recrutement (et qui ont un statut de professeur des écoles stagiaire rémunéré) et les autres qui restent de « simples étudiants » devant à nouveau préparer le concours ou envisager une réorientation à l'issue du master.

L'objet de notre étude consiste à analyser, dans une perspective comparative, les différents niveaux d'expertise en résolution de problèmes de proportionnalité développés par les étudiants au cours des trois périodes envisagées. Elle tente, dans cet objectif, de prendre en compte, pour chacune des trois périodes, l'année de formation, l'impact du concours, la spécificité de la licence obtenue et du cursus antérieur sur notre variable dépendante (soit la réussite globale au questionnaire, soit les différents niveaux d'expertise du domaine que nous en inférons).

Nos principaux objectifs consistent à :

- déterminer si les regroupements dans la structure des réussites ou échecs à certains types de problèmes mis en évidence à la fin du primaire par Levain (1996, 1997) et retrouvés au collège par Levain, Le Borgne et Simard (2008, 2009) perdurent avec des adultes et sont (ou ne sont pas) influencés par les différentes réformes de la formation des professeurs des écoles ;

- tenter d’inférer en les décrivant différents « niveaux d’expertise » en lien avec le développement professionnel ;

- tenter d’évaluer ces différents « niveaux d’expertise » de la proportionnalité à plusieurs moments clés du parcours de formation (première et deuxième année de formation pour les trois modèles étudiés).

Nous avons retenu cette thématique car la compréhension de la proportionnalité constitue un des apports essentiels des mathématiques au traitement de situations relevant aussi bien des champs scolaires que professionnels ou encore de l'exercice de la vie quotidienne. D’un point de vue théorique, nous considérons la proportionnalité comme un modèle mathématique (fonction linéaire) qui explicite la liaison entre deux grandeurs distinctes (exemple : problème prix/quantité) ou semblables (exemples : problèmes d’agrandissements d'une figure géométrique ou d'échelles). Lorsqu'une grandeur A est proportionnelle à une grandeur B, les rapports des mesures de A se transfèrent sur les rapports des mesures de B (les rapports internes aux grandeurs sont conservés, il s’agit de la propriété multiplicative de la linéarité). Le rapport de toute mesure de A sur sa mesure correspondante de B est constant. Ce rapport, qualifié d’externe, correspond au coefficient de proportionnalité lorsque celui-ci est objectivé.

Nous situons notre recherche dans une perspective cognitive convoquant différents cadres théoriques. Tout d’abord ce travail prend appui sur la théorie des champs conceptuels développée par Gérard Vergnaud (1983, 1991). Notre questionnaire est directement issue d’une thèse publiée en ce sens sous sa direction (Levain, 1997). Nous privilégions, dans cette perspective, l'aspect fonctionnel de l'utilisation des connaissances et de leur organisation en mémoire (Noelting, 1980 ; Bastien, 1997 ; Bastien et Bastien-Toniazzo, 2004 ; Didierjean, 2015). Nous insistons également sur l'importance du rôle des situations et des tâches proposées aux sujets dans la construction de savoirs et de savoir-faire dans une perspective davantage didactique (Douady, 1986 ; Artigue et Houdement, 2007 ; Houdement, 2011). Nous nous positionnons enfin, de manière plus générale, dans le cadre d'une psychologie éducationnelle (Thévenot, Coquin et Verschaffel, 2006 ; Sander, 2008 ; Crahay et Dutrévis, 2010) dans laquelle le développement des compétences scolaires se situe au carrefour entre processus de développement endogènes (maturation, autorégulation) et d'apprentissages tant implicites qu'explicites.

L’articulation entre problèmes d'agrandissement et problèmes d'échelle nous apparaît particulièrement propice, à l'interprétation des résultats obtenus en termes de niveaux d'expertise (ou de conceptualisation) spécifiques. La résolution des problèmes d’agrandissement s’appuie sur une utilisation implicite de la linéarité : la procédure de résolution s’exprime alors directement dans le contexte du problème sans référence à un objet du modèle mathématique. La résolution des problèmes d’échelle mobilise le modèle mathématique de façon plus explicite :

c’est le cas par exemple lorsqu’il s’agit de déterminer une échelle, la question portant sur l’échelle elle-même ou lorsqu’il est nécessaire de mobiliser cette dernière pour calculer la mesure d’une grandeur. De plus la notion d’échelle suppose une objectivation d’un rapport externe, de type $1/n$ pour lequel n est grand. Ce constat renvoie pour nous à la distinction, introduite par Régine Douady (1986) entre « concept outil » et « concept objet ». Le concept est dit « outil » lorsque l’on considère *l’usage qui est fait en résolution de problème*, alors que par concept « objet », il faut comprendre *l’objet culturel ayant sa place dans l’édifice du savoir savant* (Douady, 1986). En prenant en compte les remarques précédentes, les situations d'agrandissement mobilisent principalement le versant outil du concept alors que celles d'échelle convoquent davantage le versant objet du concept.

Outre la nécessité de penser un rapport comme un nombre rationnel (Adjiage et Pluvinage, 2000 ; Coquin et Camos, 2006 etc.), nous nous appuyons sur une hypothèse préalablement vérifiée (Levain et al. 1996, 1997, 2009). Dans les situations d’agrandissement, l’objet initial et l’objet agrandi sont souvent de taille comparable et interprétés d’emblée dans un registre de similitude. Par contre dans le calcul d’une échelle la différence de taille entre eux est telle que le rapport se construit davantage entre un signifiant et un signifié. Ce qui peut entrainer chez certains sujets des difficultés d’utilisation, de calcul ou d’appréhension du rapport, des erreurs récurrentes dans son écriture, dans l’harmonisation des unités, voire des abandons et des non-réponses (Levain, 1997).

2. Méthode

Nous utilisons une approche d’orientation quantitative à l’aide d’un questionnaire que nous soumettons à notre population au cours des trois périodes considérées (avant 2010, en 2011 et 2012, après 2013). Le questionnaire se compose de dix-neuf problèmes impliquant des situations d’agrandissement et d’échelle (identique à celui proposé en collège par Levain, Le Borgne et Simard, 2009). Il est organisé en deux grandes catégories :

- les huit premiers problèmes : agrandissement / réduction (de figure géométrique ou de type « word problems ») relèvent d’une dimension outil (utilisation des propriétés de la fonction linéaire) ;

- les onze suivants convoquent de manière plus ou moins marquée une dimension objet (calcul de l’échelle, calcul d’une dimension du représentant ou du représenté).

La consigne de passation est harmonisée. Elle énonce les principaux objectifs de la recherche. Elle précise que l’ordre des problèmes est aléatoire c’est-à-dire ne correspondant pas à un niveau croissant de difficulté, hormis pour les trois premiers qui sont les plus simples. Elle rappelle enfin le temps de passation d'environ une heure. Des calculatrices sont mises à disposition.

La passation se déroule, au début et à la fin de la première année de formation pour les étudiants de première année, puis en fin de seconde année de formation. Les groupes sont indépendants (chaque sujet passe une seule fois le questionnaire) ; ce qui a nécessité la participation des universités de Franche-Comté, Bourgogne et Champagne-Ardenne.

Notre population se compose de 1138 participants que nous identifions, dans la suite de ce travail, par la notation PE (comme Professeurs des Écoles) pour la formation se déroulant avant 2010 (niveau licence), par M_{2011} (M comme master avec l'année 2011 en indice) pour celle de la première mastérisation (deuxième période) enfin par M_{2015} pour la troisième et actuelle période de la formation. Les chiffres 1 et 2 indiquent les années de formation (PE_2 pour les futurs Professeurs des Écoles en deuxième année de formation ou M_2 pour les étudiants en deuxième année de Master). Les minuscules indiquent une passation en début d'année (pe_1 ou $m_{1\text{-}2011}$ par exemple), les majuscules une passation en fin d'année (PE_1 ou $M_{1\text{-}2015}$ par exemple).

Dans le détail notre population se compose de 154 pe_1 (étudiants de première année, première période, passation en début d'année) ; 126 PE_1 ; 105 pe_2 ; 131 PE_2 ; 115 $m_{1\text{-}2011}$; 119 $M_{1\text{-}2011}$; 109 $M_{2\text{-}2011}$ (dont 69 admissibles) ; 124 $M_{1\text{-}2015}$; 155 $M_{2\text{-}2015}$ (dont 90 admis au concours).

Nous avons analysé les données en deux temps à partir des 21622 problèmes recueillis qui sont corrigés et codés de manière binaire en réussite ou échec dans un tableau booléen dans lequel chaque colonne représente un problème et chaque ligne les résultats d'un sujet.

Un premier traitement statistique (ANOVA) porte sur les scores moyens globaux (réussite au questionnaire) et nous permet d'effectuer différentes comparaisons entre les groupes de sujets.

Un second traitement statistique croise une analyse factorielle des correspondance (Benzecri, 1973, 1976 ; Lebart, Morineau & Tabard, 1977) avec une classification ascendante hiérarchique à partir du logiciel ANACONDA développé par l'université de Franche-Comté (Girardot, 1982). L'analyse factorielle des correspondances (AFC) utilise des calculs d'ajustement qui font essentiellement appel à l'algèbre linéaire et produit des représentations graphiques à l'intérieur desquelles les objets à décrire deviennent des points sur un axe, un plan ou un espace de dimension supérieure. Cette technique permet d'analyser des tableaux de nombres positifs (ici 0 et 1). Le principe de cette analyse consiste à représenter chaque sujet dans un espace où chaque dimension correspond à un problème puis à déterminer les axes principaux sur lesquels le nuage de points ainsi obtenu a une projection maximale. La classification ascendante hiérarchique (CAH) produit, à partir de calculs algorithmiques, des classes qui permettent de grouper et ranger les objets à décrire. Elle s'applique aux mêmes tableaux de données que l'AFC et permet par là-même de compléter et nuancer les analyses de celle-ci. Les résultats se présentent sous la forme d'un arbre hiérarchique dont les principales branches définissent les différentes classes.

Ce double traitement nous permet de réaliser des regroupements entre des ensembles de sujets et les problèmes qu'ils réussissent électivement. Il nous permet de décrire et interpréter les caractéristiques des groupes obtenus en termes de niveaux d'expertise. Nous analysons enfin la répartition des étudiants dans ces différents groupes. Des Khis carrés d'indépendance (répartition dans les groupes) complètent l'analyse statistique.

L'originalité de cette approche réside en grande partie dans le fait de considérer la distribution des niveaux d'expertise inférés comme variable dépendante (au moins pour une part) des parcours de formation analysés.

3. Présentation du questionnaire

Notre questionnaire comporte 19 problèmes présentés en annexe de cet article (dans un format légèrement réduit). Il se décompose en deux grandes parties. D'une part les huit premiers problèmes qui traitent de situations d'agrandissement ou de réduction. De l'autre, les onze suivants nécessitant de calculer une échelle ou une dimension, soit sur le plan ou la carte, soit sur le terrain. Parmi ces derniers problèmes deux sont particulièrement complexes dans le sens où ils nécessitent une modélisation de la situation préalablement à une programmation des calculs. Comme ce questionnaire est identique à celui présenté à des élèves de collège lors de précédentes études (Levain, 1997 ; Levain, Le Borgne et Simard, 2008, 2009), nous nous autorisons à indiquer, en regard de la présentation des épreuves, les pourcentages de réussite d'élèves de première année et de quatrième année de collège (classes de sixième et troisième, élèves de 11 ans et 14 ans) à ceux de deuxième année de master (fin de la formation des professeurs des écoles) évalués en 2015.

3.1. Les problèmes d'agrandissement ou de réduction de figures

Les trois premiers problèmes sont extrêmement simples et ont pour fonction de ne mettre aucun sujet en difficulté dès l'abord du questionnaire. Le premier problème présenté (annexe n°1) nécessite de repérer graphiquement sur un quadrillage un agrandissement et une réduction d'une figure cible représentant une maison simplifiée. La reconnaissance se fait ici par comptage des carrés du quadrillage plutôt que par calcul. Ce problème est réussi par respectivement 45 % des élèves de sixième, 63 % des élèves de troisième et par 91 % des étudiants en fin de deuxième année de master. Nous retrouvons chez ces trois populations distinctes deux grandes catégories d'erreurs : soit la proportionnalité n'est pas reconnue à travers un choix erroné aussi bien de l'agrandissement que de la réduction, ce qui pose la question de la compréhension de ces deux termes, soit seul le choix de la réduction est erroné, celui de l'agrandissement étant mieux réussi.

Les quatre problèmes suivants (n°2 à 5) nécessitent de déterminer la largeur d'un rectangle agrandi connaissant sa longueur ainsi que les deux dimensions du rectangle d'origine. Ces quatre problèmes nous permettent, comme précisé au tableau 1, de croiser le type de rapport : interne ou externe avec son niveau de difficulté : simple ou complexe. Nous appelons rapport externe le rapport qui se calcule ici à partir des longueurs respectives des deux rectangles. Ce rapport traduit le coefficient de proportionnalité. Le rapport interne se calcule entre la longueur et la largeur d'un même rectangle.

Problèmes :	Rapport interne	Rapport externe
n°2	simple : 1/2	simple : 2/1
n°3	complexe : 3/5	simple : 2/1
n°4	simple : 1/2	complexe : 5/3
n°5	complexe : 3/5	complexe : 5/3

Tableau 1 : type et difficulté des rapports pour les problèmes 2 à 5

Les problèmes n°4 et n°5 sont réussis par respectivement 21 % et 29 % des élèves de sixième ; par 51 % et 57 % des élèves de troisième et enfin par 90 % et 92 % des étudiants en fin de master. Concernant le problème n°4, nous signalions en 2007 que la plupart des élèves de collège (même en troisième) ne reconnaissaient pas nécessairement les propriétés de linéarité de la fonction (la largeur est la moitié de la longueur) et préfèraient calculer un rapport d'agrandissement complexe (5/3) utilisant ainsi une procédure plus générale mais beaucoup plus coûteuse que de repérer que la longueur du rectangle correspondait au double de sa largeur. Nous posions alors l'hypothèse selon laquelle le contexte jouerait ici le rôle d'un « situateur » au sens défini par Bastien et Bastien-Toniazzo (2004) dans l'espace des schèmes mobilisés par le sujet. Nous renouvelons la même observation chez les étudiants de fin de master puisque plus de 90 % de ceux qui réussissent ce problème n°4 calculent la largeur à partir du rapport d'agrandissement plutôt que de simplement diviser par 2 la longueur du rectangle agrandie.

Le problème n°6 s'inspire de la fameuse épreuve de Karplus « Mr Short and Mr Tall » (Karplus & Peterson, 1970 ; Karplus, Karplus, Formisano & Paulson, 1979) testée dans de nombreux pays (Hart, 1981, 1988). La petite taille et la symétrie des valeurs numériques impliquées invitent fréquemment à l'utilisation d'une procédure additive erronée formulée en termes de différences constantes. Cette procédure fréquente chez certains élèves de collège n'est presque plus observable en fin de master. Le pourcentage moyen de réussite passe en effet de 14,6 % en sixième à 56 % en fin de troisième. Il est de 95 % en fin de master.

Les deux problèmes suivants n°7 et n°8 traduisent respectivement deux situations d'agrandissement et de réduction. Dans ces deux problèmes les rapports externes et internes sont égaux (respectivement 25 et 1,5). Nous observions chez les élèves de collège une plus grande familiarité de la situation d'agrandissement (plutôt que de réduction) aboutissant à une meilleure réussite. Ce que nous n'observons plus en fin de master puisque les pourcentages de réussite aux problèmes n°7 et n°8 sont respectivement de 40 % et 25 % en sixième, de 79 % et 66 % en troisième et 95 % et 94 % en fin de master.

3.2. Les problèmes d'échelle

Concernant les problèmes d'échelle, nous nous appuyons sur les travaux d'Antoine Bodin (1989) pour en proposer quatre types de présentation :

1- l'échelle de type 1 ou fractionnaire par exemple 1/100 000 ;

2- l'échelle de type 2 à partir d'un formulation type : « 4 cm pour 1 km » ;

3- l'échelle de type 3 à partir d'une représentation type : 1 km

4- l'échelle de type 4 avec une formulation explicite de type : « par quel nombre faut-il multiplier (diviser) cette dimension pour… » (cette « échelle de type 4 » privilégie alors plus directement l'aspect « outil » du concept).

Les problèmes n° 9 et n°12 nécessitent tous deux de calculer une échelle connaissant une dimension sur le terrain et celle qui lui correspond sur la carte. Échelle fractionnaire (de type 1) pour le n°9 et de type 4 pour le n°12. Concernant le n°9, seule une réponse sous forme de fraction est acceptable (pas nécessairement de forme canonique avec avec 1 au numérateur).

Dans le problème n°12, l'échelle de type 4 décharge l'élève de la nécessité d'objectiver le rapport d'agrandissement sous forme fractionnaire et renvoie davantage au concept familier d'opérateur multiplicatif (correspondant au coefficient de proportionnalité). Les valeurs numériques utilisées rendent les calculs particulièrement aisés. Le rapport d'agrandissement est le même pour les deux problèmes de manière à favoriser les comparaisons. Ces deux problèmes sont réussis par respectivement 7 % et 18 % des élèves de sixième, 16 % et 45 % des élèves de troisième et 70 % et 81 % des étudiants à la fin du master.

Les problèmes n°10 et n°11 nécessitent tous deux un changement de formulation dans l'écriture de l'échelle à partir, soit d'une écriture de type 2 pour le problème n°10, soit d'une écriture de type 3 pour le n°11 vers une écriture sous la forme d'une fraction (type 1). Le problème n°11 apparaît moins aisé car nécessitant d'effectuer une mesure à la règle pour déduire de l'information (« 2 cm pour 50 m » ou « 8 cm pour 200 m »), information qui était directement fournie dans l'énoncé du problème n°10. Ces deux problèmes ne sont réussis que par respectivement 10 % et 4 % des élèves de sixième ; par 25 % et 14 % de ceux de troisième et par 65 % et 63 % des étudiants à la fin du master.

Les problèmes n°13 et n°14 sont les plus complexes du questionnaire puisqu'il s'agit de calculer une échelle, de type 1 pour le n°13 et de type 4 pour le n° 14, qui maximise la représentation (taille du plan) dans les limites d'une feuille de format A4 (21 par 29,7cm). Ces deux problèmes nécessitent d'élaborer une procédure nécessitant de contrôler un nombre important d'informations : déterminer tout d'abord si le rapport d'agrandissement doit se calculer respectivement à partir des deux longueurs ou des deux largeurs, harmoniser les unités, calculer un coefficient d'agrandissement non entier, l'arrondir systématiquement par excès afin que le plan ne déborde pas du cadre, objectiver ce coefficient sous forme d'une fraction dont le numérateur est égal à un pour le problème 13 ou le proposer sous forme entière ou décimale pour le problème 14. Les résultats confirment la difficulté de la tâche avec des valeurs de réussite particulièrement faibles pour les étudiants en fin de master. La difficulté de la situation semble même déborder assez largement la simple écriture fractionnaire distinguant les deux problèmes. Ils sont respectivement réussis par 1 % et 1 % des élèves de sixième, 7 % et 7 % de ceux de troisième et par seulement 16 % et 17 % des étudiants en fin de master.

Les problèmes n°15 et 16 nécessitent de calculer une dimension sur le plan ou la carte connaissant sa correspondance sur le terrain, et l'échelle (type 1). Les valeurs numériques sont simples en ce qui concerne le n°15 (50 m et 1/100). Elles sont plus complexes pour le n°16 (76 km et 1/200 000) et nécessitent une conversion d'unités des kilomètres vers les centimètres, conversion qui n'était pas obligatoire pour le n°15. Ces deux problèmes n°15 et 16 sont respectivement réussis par 6 % et 5 % des élèves de sixième, par 35 % et 28 % de ceux de troisième et par 65 % et 66 % des étudiants en fin de master.

Les trois problèmes suivants impliquent le calcul d'une dimension du représenté (calcul de l'image par la transformation). Dans le n°17, l'échelle est de type 3 alors que dans le n°18, elle est de type 1. Ces deux problèmes nécessitent d'effectuer une mesure à la règle sur le plan ou la carte. Au contraire du dernier problème (n°19) dans lequel les deux données (échelle de type 1 et dimension sur la carte) sont fournies directement dans le texte d'énoncé. Ces trois problèmes sont respectivement réussis par 15 %, 5 % et 8 % des élèves de sixième, par 22 %, 14 %

et 15 % de ceux de troisième et par 66 %, 67 % et 66 % des étudiants à la fin de la deuxième année de master.

4. Résultats

4.1. Analyse globale des résultats en fonction des trois périodes envisagées

Le tableau n°2 présente les pourcentages moyens de réussite aux différents problèmes en fonction des différentes périodes de formation. Dans ce tableau, rappelons que les huit premiers problèmes sont des problèmes d'agrandissement, les problèmes 9 à 11 nécessitent de calculer une échelle, les problèmes n°13 et n°14 sont les deux problèmes complexes, les problèmes n°15 et n°16 nécessitent de calculer une dimension sur la carte ou le plan, enfin les problèmes n°17 à n°19 requièrent le calcul d'une dimension sur le terrain. Nous reprenons dans ce tableau les notations présentées précédemment (pe_1, PE_1, PE_2 pour la première période avant 2010 $m_{1\text{-}2011}$, $M_{1\text{-}2011}$, $M_{2\text{-}2011}$ pour la deuxième, et $M_{1\text{-}2015}$, $M_{2\text{-}2015}$ pour la dernière). Rappelons qu'une notation en lettres minuscules indique une passation du questionnaire effectuée en début d'année, et une notation en majuscules une passation en fin d'année universitaire. Concernant la deuxième période, outre l'année indiquée en indice, nous distinguons en ce qui concerne les étudiants en deuxième année du master de 2011 ($M_{2\text{-}2011}$), ceux ayant réussi la partie écrite du concours (admissibilité) effectuée en milieu d'année par l'indication : « admissible », figurant également en indice, et ceux l'ayant échoué (« non admissible »). L'admission définitive au concours se déroule en toute fin de deuxième année pour cette réforme dite de la première mastérisation. Nous n'avons, de ce fait, pas pu proposer une passation du questionnaire après la proclamation des résultats définitifs au concours de recrutement en raison de la trop grande proximité de la fin de l'année. Concernant la deuxième réforme en 2015, les deux épreuves écrites et orales ont lieu au cours de la première année du master, ce qui nous permet de différencier, en deuxième année, les étudiants « admis » qui sont également des professeurs stagiaires, des étudiants « non admis » qui devront, s'ils souhaitent toujours devenir professeur, passer à nouveau le concours.

Problèmes	pe_1	PE_1	PE_2	m_{1-2011}	M_{1-2011}	M_{2-2011} admissible	M_{2-2011} non admissible	M_{1-2015}	M_{2-2015} admis	M_{2-2015} non admis	Moyenne
n°1	91	96	88	80	84	97	92	97	100	80	91
n°2	99	99	100	100	100	100	100	100	100	100	99
n°3	99	99	99	100	100	100	100	100	99	100	99
n°4	88	96	98	84	92	96	96	90	94	85	92
n°5	90	98	98	83	94	97	94	90	94	90	93
n°6	92	100	99	85	93	98	90	89	97	93	94
n°7	95	95	96	97	92	98	98	95	95	96	96
n°8	91	85	96	90	88	98	92	92	93	96	92
n°9	55	75	88	51	62	78	60	56	78	59	67
n°10	51	75	92	47	66	81	48	55	70	59	65
n°11	35	61	77	47	65	73	35	50	76	46	59
n°12	84	77	94	79	88	97	96	86	87	73	86
n°13	9	13	13	6	16	16	10	9	21	10	13
n°14	18	17	19	15	26	41	21	21	24	9	21
n°15	65	71	92	57	76	91	62	62	78	49	73
n°16	60	79	88	51	66	85	60	65	74	57	70
n°17	63	74	82	60	74	81	67	73	78	50	73
n°18	74	79	93	63	77	91	79	80	74	61	78
n°19	76	76	94	67	75	94	81	77	78	53	79
Moyenne	**70**	**77**	**85**	**67**	**76**	**85**	**73**	**73**	**79**	**67**	**76**

Tableau n°2 : pourcentages de réussite aux différents problèmes

Les résultats montrent que les problèmes relevant de situation d'agrandissement ou de réduction (1 à 8) sont réussis en moyenne par 94 % des sujets de notre population. Par contre les problèmes d'échelle (9 à 19) ne sont réussis que par 62 % d'entre eux. Cette performance peut sembler relativement peu élevée concernant des étudiants se préparant à enseigner les mathématiques à l'école primaire. Les problèmes nécessitant le calcul d'une échelle sous sa forme fractionnaire (9, 10, 11 et 13) ne sont réussis que par 52 % des participants. Quant aux deux problèmes les plus complexes (13 et 14), ils ne sont réussis que par 17 % de l'ensemble des étudiants. Nous retrouvons bien dans la structure des résultats cette rupture entre les situations d'agrandissement et celles d'échelle, rupture déjà largement mise en évidence au collège.

Si nous croisons dans une analyse de variance (ANOVA) les 10 colonnes du tableau avec les résultats de tous nos sujets à l'ensemble des problèmes, les pourcentages moyens de réussite sont significativement différents ($F(8,1116) = 17,74$; $p < 0,001$). Cette conclusion statistique pourrait sembler d'une grande banalité : il y a bien des effets significatifs liés aux formations et / ou au développement professionnel des étudiants sur la réussite à l'ensemble des problèmes. Elle permet néanmoins de manière certes modeste et partielle de ne pas dénier le fait qu'il existe des effets significatifs liés à la formation sur les résultats aux problèmes proposés.

Si nous limitons la même analyse aux trois premières colonnes du tableau c'est-à-dire au premier parcours de formation avant la mastérisation (avant 2010) en croisant les résultats de cette population aux différents problèmes en fonction de l'avancement dans la formation : début de première année (pe_1), fin de première année (PE_1), fin de seconde année (PE_2). Nous trouvons là encore, et de manière un peu plus ciblée, des effets significatifs liés aux formations et / ou au développement professionnel sur la réussite à l'ensemble des problèmes ($F(2, 382) = 69,6$; $p < 0,001$).

Nous trouvons des résultats identiques en ce qui concerne la deuxième période analysée ou première mastérisation en comparant les résultats des étudiants de début, de fin de première année de master et de fin de deuxième année de master : $m_{1\text{-}2011}$ *vs* $M_{1\text{-}2011}$ *vs* $M_{2\text{-}2011}$ ($F(2, 347) = 14,86$; $p < 0,001$).

Par contre ce constat n'est plus vrai pour la troisième période de formation pour laquelle nous ne disposions il est vrai que des résultats en fin de master première et deuxième année : $M_{1\text{-}2015}$ *vs* $M_{2\text{-}2015}$ ($F(1, 279) = 0,079$; $p < 0,8$).

Ce dernier résultat nous a conduit à effectuer la même comparaison (fin de première année *vs* fin de deuxième année) pour les deux premières périodes (avant 2010 et première mastérisation). Les résultats convergent alors avec ceux de 2015 : PE_1 *vs* PE_2 ($F(1, 222) = 1,35$; $p < 0,3$) ; $M1_{2011}$ *vs* $M2_{2011}$ ($F(1, 233) = 3,46$; $p < 0,07$). L'ensemble des résultats précédents et notamment l'absence d'effet significatif sur les réussites moyennes aux problèmes entre la fin de la première et la fin de la seconde année de formation, nous permet d'étayer l'hypothèse selon laquelle la deuxième année ne contribuerait pas significativement à l'amélioration des performances aux 19 problèmes proposés. Ces résultats peuvent se comprendre dans la mesure où dans les trois périodes considérées c'est bien en première année que s'effectue principalement le travail sur la proportionnalité pour la préparation au concours de recrutement.

Nous avons également comparé les pourcentages moyens de réussite des étudiants en fin de formation pour les trois modèles considérés : PE_2 *vs* $M_{2\text{-}2011}$ *vs* $M_{2\text{-}2015}$. De manière à harmoniser les comparaisons entre les trois populations, nous avons resrestreint la population des étudiants de 2011 (première mastérisation) à ceux admissibles au concours. Nous rappelons que nous ne disposons pas des résultats après l'admission définitive trop tardifs. Nous limitons également la population de 2015 aux seuls admis. Les pourcentages moyens de réussite de ces trois populations (PE_2 *vs* $M_{2\text{-}2011\text{-admissible}}$ *vs* $M_{2\text{-}2015\text{-admis}}$) sont respectivement de 84,6 %, 85 % et 79,5 % et significativement différent ($F(2, 282) = 6{,}6$; $p < 0{,}01$). Nous nous permettons d'avancer ici l'hypothèse, qu'il conviendrait sans doute d'étayer davantage, d'un fléchissement de la performance en 2015 dû à une augmentation très importante du nombre de postes mis au concours[1], l'éventail horaire des formations en mathématiques dans les trois parcours restant du même ordre.

Une autre dimension intéressante de nos données concerne l'effet de la nature de la licence obtenue préalablement à l'entrée en formation en distinguant les quatre UFR (Unité de Formation et de recherche ou composante d'une université) : SLHS (lettres et sciences humaines), SJPEG (droit et sciences économiques), STAPS (éducation physique et sportive), et ST (mathématiques et sciences). La figure 1 illustre une strucutre du recrutement des étudiants en fin de formation relativement stable sur les trois périodes.

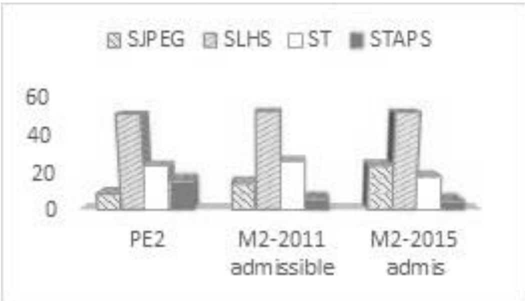


Figure 1 : pourcentages de recrutement en fonction du type de licence obtenue

On peut noter de manière intéressante que plus de la moitié d'entre eux a obtenu une licence en lettres ou sciences humaines. Nous observons également, entre 2009 et 2015, une augmentation relative de la part des licences en SJPEG (droit et

[1] Le nombre de postes mis au concours dans l'académie de Besançon est passé de 45 en 2011 (première « masterisation » des formations) à 265 en 2015 suite à la réforme du ministre Vincent Peillon.

sciences économiques), une diminution forte de cette même part en STAPS (EPS) et une diminution plus modérée en ST (sciences).

Si nous comparons maintenant (à partir d'une ANOVA) les pourcentages moyens de réussite au questionnaire à la fin de la deuxième année de master en 2015 en fonction de ces quatre UFR d'obtention de la licence, nous constatons des différences significatives ($F(3, 148) = 6{,}73$; $p < 0{,}001$). Il y a bien un effet significatif des différents UFR d'obtention de la licence sur les résultats globaux à notre questionnaire. Cet effet était déjà significatif à la fin de la première année (M_1) du master ($F(3, 122) = 3{,}25$; $p < 0{,}05$). Si l'on compare les pourcentages de réussite des étudiants ayant obtenu une licence en SLHS (lettres et sciences humaines) avec ceux ayant obtenu leur licence en ST (mathématiques et sciences), nous relevons une différence de 16 points en entrée de master ($F(1, 80) = 16{,}20$; $p < 0{,}001$), 14 points en fin de première année du master ($F(1, 86) = 6{,}99$; $p < 0{,}01$), et 19 points en fin de de deuxième année de master ($F(1, 108) = 21{,}99$; $p < 0{,}001$). La formation au professorat des écoles ne semble donc pas contribuer à réduire de manière efficace les différences de performance entre les étudiants d'orientation plutôt littéraire et ceux d'orientation scientifique.

Concernant enfin la réussite au concours, en fin de deuxième année de master (2011), la différence entre les pourcentages moyens de réussite des étudiants admissibles au concours et ceux non admissibles est de 12,3 points (85 % *vs* 72,7 % ; $F(1, 114) = 24{,}42$; $p < 0{,}001$). Nous retrouvons des résultats du même ordre à la fin de la deuxième année du master (2015) puisque la différence de réussite entre les moyennes des étudiants admis et non admis est de 13 points (79,5 % *vs* 66,5 % ; $F(1, 153) = 21{,}6$: $p < 0{,}001$). En fin de master, les scores moyens des étudiants n'obtenant pas le concours sont significativement inférieurs à ceux des étudiants ayant obtenu soit l'admissibilité (M_2 de 2011) ou étant définitivement admis (M_2 de 2015).

4.2. Concernant les niveaux d'expertise

4.2.1. Description des différents niveaux d'expertise

Les résultats du traitement statistique (AFC et CAH) portant sur l'ensemble des données obtenues se présentent sous la forme d'un arbre hiérarchique dont les principales branches définissent six groupes de sujets. Ces regroupements résultent du traitement des données par le logiciel ANACONDA. Ils traduisent des proximités (en termes de distance) entre des sous-ensembles de sujets et des problèmes qu'ils réussissent (ou échouent) de manière élective. Les groupes produits résultent donc d'un traitement automatisé ; la description et l'interprétation que nous en faisons *a posteriori* tentent de les valider comme autant de niveaux d'expertise. La figure 2 traduit une représentation schématique de cet arbre.

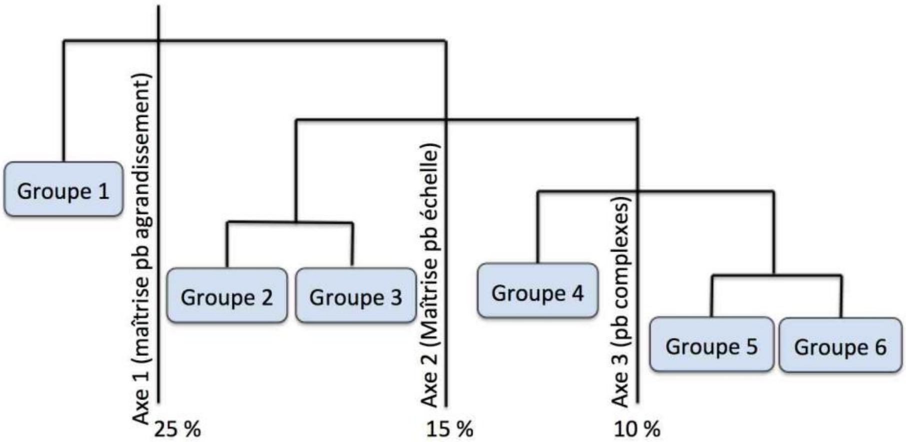


Figure 2 : Positionnement des groupes par rapport aux axes

L'axe principal de l'AFC (n°1) oppose le groupe 1 à l'ensemble des autres groupes. Nous l'avons intitulé : « maîtrise des problèmes d'agrandissement ». Il différencie les sujets qui réussissent presqu'exclusivement les problèmes d'agrandissement tout en échouant systématiquement les problèmes d'échelle.

L'axe n°2, que nous nommons « maîtrise des problèmes d'échelle », oppose plus particulièrement les groupes 2 et 3 aux groupes 4, 5 et 6. Les sujets de ces deux groupes ne maîtrisent que partiellement les problèmes d'échelle. Ceux du groupe 2 échouent à calculer l'échelle tout en réussissant mieux à calculer une dimension du terrain ou de la carte quand l'échelle est fournie comme donnée de l'énoncé. Inversement le groupe 3 réussit davantage à calculer l'échelle à partir d'une dimension de la carte et de sa correspondance sur le terrain tout en échouant davantage à calculer une dimension de la carte ou du territoire (tableau 3).

L'axe n°3, que nous intitulons « maîtrise des problèmes complexes », différencie principalement les deux groupes 5 et 6 qui se caractérisent par un niveau d'expertise élevé du domaine (réussite partielle ou totale aux deux problèmes complexes 13 et 14) du groupe 4 qui globalement échoue à ces deux problèmes réussissant tous les autres.

Les inerties des axes 1, 2 et 3 sont respectivement de 25 %, 15 % et 10 %. La segmentation des classes s'opère à 10% de l'indice de diamètre de l'ensemble. En AFC, l'inertie traduit la part de l'information représentée par chaque axe. Elle exprime le pourcentage de la variance expliquée par l'axe ou la composante que l'AFC a calculée. Plus cette valeur est importante, plus elle rend compte du pouvoir explicatif des données de l'axe.

Le tableau 3 précise les pourcentages de réussite des six groupes de sujets aux différentes catégories de problèmes permettant d'en illustrer les principales caractéristiques : situations d'agrandissement (n°1 à 8) ; calculs de l'échelle (n°9, 10 et 11) ; calcul d'une dimension du plan ou du territoire (n°15 à 19) et problèmes complexes (n°13 et 14). Nous indiquons en caractères gras, certains pourcentages de réussite caractéristiques des résultats de chaque groupe.

Problèmes : Groupes :	n°1,2,3,4, 5,6,7 & 8	n°9, 10 & 11	n°15, 16, 17, 18 & 19	13&14	Réussite totale
1° groupe N = 58 (5,1 %)	**81**	0	0	0	36
2° groupe N =195 (17 %)	93	**8**	64	0	60
3° groupe N = 120 (10 %)	93	66	**25**	0	60
4° groupe N = 502 (44 %)	96	82	89	**0**	82
5° groupe N = 153 (13 %)	97	81	89	**50**	87
6° groupe N = 117 (10 %)	96	85	86	**95**	92

Tableau 3 : pourcentages de réussite par groupe aux différents problèmes

Le groupe 1 représente, selon nous, le plus faible niveau d'expertise du domaine. Il est composé de 58 sujets (5,1 % du total) qui échouent systématiquement dans le passage des problèmes d'agrandissement aux problèmes d'échelle et ce, quelle que soit la forme de présentation de l'échelle et quelle que soit la nature de l'inconnue (calcul de l'échelle ou d'une dimension de la carte ou du territoire). Ce groupe, d'un niveau très faible, est intéressant dans la mesure où il traduit expérimentalement cette bipartition entre « concept outil » et « concept objet » (Douady, 1986) très caractéristique du niveau collège (au collège ce groupe est numériquement le plus important représentant un quart des élèves). En 2015, les sujets de ce groupe représentaient un peu plus de 2 % des étudiants de fin de master admis au concours de recrutement et près de 17 % des non admis.

Le groupe 2 traduit également un niveau d'expertise relativement faible du domaine. Il comprend 195 sujets (17 % du total) qui échouent massivement les problèmes nécessitant de calculer une échelle tout en réussissant ceux demandant de calculer une dimension de la carte (représentant) ou du territoire (représenté) connaissant l'échelle. De manière générale, ces étudiants ou professeurs stagiaires réussissent la plupart du temps à utiliser une échelle par contre ils échouent à l'objectiver sous la forme d'un rapport de type $1/n$ dans lequel n est grand. Dans nos travaux précédents, nous avancions l'hypothèse de la forte différence de taille entre l'objet initial et l'objet agrandi qui contribue à structurer la représentation du rapport non plus nécessairement dans un registre de similitude mais entre un signifiant et un signifié (Levain, 1997).

Le groupe 3 est composé de 120 sujets (10,5 % du total) qui, à l'inverse du groupe 2, réussissent parfaitement bien à objectiver et calculer l'échelle sous forme de rapport tout en échouant assez largement à calculer l'image ou l'antécédent connaissant la transformation. Les résultats des sujets de ce groupe apparaissent relativement paradoxaux dans la mesure où ils réussissent à calculer l'échelle exprimée sous la forme d'une fraction tout en échouant massivement à calculer une dimension du représentant ou du représenté (dimension sur la carte ou le terrain), alors que l'échelle est donnée dans l'énoncé. Ces résultats vont dans le sens d'une absence de relation d'ordre dans la maîtrise des problèmes qui irait des plus simples aux plus complexes. Ils plaident pour une organisation plutôt fonctionnelle que logique de l'organisation des connaissances en mémoire (Weil-Barais, 2004).

Le groupe 4 est numériquement le plus important (502 sujets, 43,8 % du total). Ils réussissent à l'ensemble des catégories de problèmes proposés (agrandissement, calcul d'une échelle ou d'une dimension de la carte ou du territoire) mais échouent systématiquement aux deux problèmes les plus complexes (n°13 et n°14). Rappelons que ces deux problèmes nécessitent d'élaborer une procédure impliquant de contrôler un nombre important d'informations. Pour ce faire, une modélisation mathématique articulant connaissances propositionnelles et connaissances opératoires devient nécessaire préalablement à la programmation et l'exécution des différents calculs.

Le groupe 5 est composé de 153 sujets (13,4 % du total) qui réussissent à l'ensemble des problèmes excepté le plus complexe : le n°13. Ce dernier reprend la même situation que le n°14, mais nécessite en plus d'objectiver le rapport d'agrandissement sous forme d'une fraction alourdissant par là-même la charge cognitive.

Le groupe 6 comprend 117 sujets (10,2 % du total) qui réussissent à l'ensemble des problèmes proposés y compris les plus complexes.

4.2.2. Niveaux d'expertise et répartition des sujets

Le tableau 4 présente la répartition des sujets (étudiants ou professeurs stagiaires) dans ces différents groupes pour chaque parcours de formation décrit précédemment. Les pourcentages indiqués en caractères gras seront discutés dans la suite du texte.

Groupes : Formation :	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4	Groupe 5	Groupe 6
pe_1	**5 %**	26 %	12 %	34 %	17 %	6 %
PE_1	0 %	9 %	13 %	56 %	14 %	8 %
pe_2	0 %	13 %	14 %	49 %	11 %	12 %
PE_2	0 %	2 %	5 %	**71 %**	11 %	11 %
$m_{1\text{-}2011}$	**18 %**	22 %	8 %	36 %	11 %	5 %
$M_{1\text{-}2011}$	5 %	18 %	11 %	38 %	14 %	14 %
$M_{2\text{-}2011\ \text{admissible}}$	1 %	10 %	3 %	42 %	**27 %**	**16 %**
$M_{2\text{-}2011\ \text{non admissible}}$	2 %	42 %	12 %	17 %	12 %	12 %
$M_{1\text{-}2015}$	6 %	28 %	13 %	31 %	12 %	9 %
$M_{2\text{-}2015\ \text{admis}}$	2 %	14 %	9 %	46 %	**12 %**	**17 %**
$M_{2\text{-}2015\ \text{non admis}}$	17 %	12 %	17 %	41 %	3,2 %	9 %

Tableau 4 : répartition des sujets dans les groupes en fonction de leur parcours de formation

À la lecture de ce tableau, nous pouvons constater, en entrée de formation, une plus forte répartition des étudiants dans le groupe 1 (groupe caractéristique d'un niveau très faible d'expertise du domaine) en entrée du master ($m_{1\text{-}2011}$) plutôt qu'en entrée à l'IUFM avant 2010 au niveau de la licence (pe_1). Nous pouvons également relever, en fin de formation cette fois, une forte proportion de professeurs stagiaires PE_2 (IUFM avant 2010) appartenant au groupe 4 (maîtrise de toutes les catégories de problèmes sauf les deux problèmes les plus complexes). On peut également noter en fin de master ($M_{2\text{-}2011}$ admissible) ou ($M_{2\text{-}2015}$ admis), à la fois une plus forte proportion d'étudiants appartenant aux groupes 5 et 6 (niveau d'expertise élevé) qu'en fin de formation à l'IUFM avant 2010 (PE_2) ; ainsi qu'une plus grande dispersion de la répartition dans les différents groupes y compris les groupes à plus faible niveau d'expertise (groupe 1 et 2). Les étudiants de fin de master semblent distribués de manière plus dispersée à la fois dans les groupes à plus forte, mais aussi à plus faible expertise que ceux relevant des formations en IUFM antérieures à 2010.

4.2.3. Niveau d'expertise et parcours de formation

Dans cette partie, nous reprenons certaines comparaisons effectuées dans la partie 4.1 : « analyse globale des résultats » en modifiant la variable dépendante. Au lieu de croiser certaines colonnes du tableau 2 avec les résultats de tous nos sujets à l'ensemble des problèmes, nous croisons ces mêmes colonnes avec la répartition des sujets dans les six groupes que nous considérons comme autant de niveaux d'expertise. Pour ce faire nous utilisons des tests de khi carré d'indépendance testant l'indépendance du lien entre les différents parcours de formation analysés et la répartition des sujets dans ces groupes. Un rejet de l'hypothèse nulle d'indépendance nous amène à accepter l'hypothèse de l'existence d'un lien entre parcours analysés et niveau d'expertise.

Dans un premier temps, nous avons testé l'existence d'un lien entre nos six niveaux d'expertise en fin de formation et les deux périodes avant 2010 et 2015 (PE_2 *vs* $M_{2\text{-}2015\text{-admis}}$). Nous sommes amenés à rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance ($\chi^2 = 22$; ddl =5 ; $p < 0{,}001$). La répartition des sujets dans les groupes en fin de formation est significativement différente pour ces deux parcours et après obtention du concours (avant 2010 et 2015).

Si nous renouvelons le test concernant la même période antérieure à 2010 (PE_2) mais cette fois croisée avec la première mastérisation de 2011 ($M_{2\text{-}2011\text{-admissible}}$), nous sommes également amenés à rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance ($\chi^2 = 23{,}1$; ddl = 5 ; $p < 0{,}001$). La répartition des sujets dans les groupes en fin de formation est différente pour ces deux parcours après obtention du concours avant 2010 et de l'admissibilité pour le master de 2011).

Par contre, si nous croisons cette fois la répartition des sujets dans les groupes à la fin des deux masters en 2011 et 2015 ($M_{2\text{-}2015\text{-admis}}$ *vs* $M_{2\text{-}2011\text{-admissible}}$), nous sommes cette fois amenés à accepter l'hypothèse nulle d'une absence de lien entre ces deux parcours et la répartition dans les groupes ($\chi^2 = 7{,}9$; ddl = 5 ; $p < 0{,}17$). Les distributions dans les groupes ne dépendent pas significativement de ces deux parcours de formation (fin de master de 2011 ou de 2015).

Ces résultats nous permettent d'étayer l'hypothèse d'un effet lié à la « masterisation » des formations sur la distribution des niveaux d'expertise en résolution de problèmes de proportionnalité.

4.2.4. Niveau d'expertise et obtention du concours

Concernant l'obtention du concours, nous avons voulu comparer d'une part la distribution des sujets admissibles *vs* non admissibles (master de 2011) ainsi que admis *vs* non admis (master de 2015) dans nos six goupes (niveaux d'expertise). Notre hypothèse portait bien évidemment sur l'existence d'un lien entre obtention du concours (ou du moins de l'admissibilité aux épreuves écrites) et degré d'expertise. Sans surprise, nous validons, en ce sens, un lien significatif entre l'obtention du concours et la distribution des sujets dans les différents niveaux d'expertise aussi bien concernant la seule admissibilité : Master 2 de 2011 ($\chi^2 = 15{,}4$; ddl = 5 ; $p < 0{,}01$), que l'admission Master 2 de 2015 ($\chi^2 = 17{,}3$; ddl = 5 ; $p < 0{,}01$).

4.2.5. Niveau d'expertise et UFR d'obtention de la licence

Concernant la formation en IUFM avant 2010 au niveau licence (professeurs stagiaires $PE_{2)}$, nous ne relevons pas de lien entre nos deux variables UFR d'obtention de la licence (quatre modalités : SJEPG, SLHS, ST, STAPS) et niveaux d'expertise à six modalités correspondant aux six groupes ($\chi^2 = 24{,}3$; ddl = 15 ; $p < 0{,}06$).

Par contre, et pour les mêmes variables, nous relevons un lien significatif aussi bien en ce qui concerne le master de 2011 ($\chi^2 = 15{,}4$; ddl = 15 ; $p < 0{,}01$), que celui de 2015 ($\chi^2 = 17{,}3$; ddl = 15 ; $p < 0{,}01$).

Nous pouvons relever, mais uniquement pour les parcours de master, un lien significatif entre l'UFR d'obtention de la licence et la répartition des niveaux d'expertise.

Conclusion

Nous avons tenté, dans cette recherche, d'analyser, sur trois périodes distinctes, l'impact de la mastérisation de la formation des professeurs des écoles sur le niveau d'expertise en résolution de problèmes de proportionnalité des différentes populations de notre étude.

Nous avons également pris en compte, et ce pour chacune des trois périodes envisagées, l'apport respectif de chaque année de formation en comparant les pourcentages de réussite à notre questionnaire en début et fin d'année, l'impact du concours, la spécificité de la licence obtenue sur deux variables dépendantes spécifiques : d'une part la réussite globale au questionnaire, d'autre part, les différents niveaux d'expertise du domaine qui en découlent.

Quel que soit le parcours considéré (avant 2010, première mastérisation de 2011 ou seconde mastérisation en 2015), nous constatons qu'il y a bien un effet de la formation sur la réussite globale au questionnaire. Néanmoins cet effet semblerait davantage imputable à la première année de formation qu'à la seconde. Comme attendu, l'obtention du concours a bien un effet significatif sur les résultats tant en ce qui concerne la comparaison entre étudiants admissibles et non admissibles (en fin de deuxième année de master de 2011) qu'en ce qui concerne la comparaison entre admis et non admis (en fin de deuxième année de master de 2015). Nous relevons également un effet sur les résultats lié à l'UFR d'obtention de la licence. Cet écart est particulièrement important en ce qui concerne la comparaison entre les licences SLHS (lettre et sciences humaines) et ST (mathématiques et sciences). Enfin nous observons un fléchissement significatif de la performance à l'issue de la formation en ESPE (master 2015). Fléchissement que nous interprétons en avançant l'hypothèse d'une forte augmentation du nombre de postes proposés au concours.

Le traitement des données recueillies nous a permis de mettre en évidence six groupes de sujets que nous décrivons en termes de niveaux d'expertise du domaine. Nous montrons que l'avancement dans la formation a bien un effet sur la répartition des sujets dans ces différents niveaux d'expertise. Il en va de même de l'admissibilité ou de l'admission au concours ainsi que du type de licence obtenu (sauf pour la formation en IUFM avant 2010). De manière plus surprenante, nous montrons que s'il n'y a pas de différence significative de répartition des sujets dans les six groupes entre les deux masters (2011 et 2015), il y en a bien une entre les master d'une part (2011 et 2015) et la formation en IUFM avant 2010 d'autre part. Cette dernière semblant plus homogène avec une répartition moindre tant sur les bas niveaux (groupes 1 et 2) que sur ceux les plus élevés (groupes 5 et 6).

Bibliographie

ADJIAGE R & PLUVINAGE F. (2000), Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **20.1**, 41-88.

ARTIGUE M & HOUDEMENT C. (2007), Problem Solving in France: Research and Curricular Perspectives, *Recherches Zentral Blatt für Didaktik der Mathematik* **39. 5-6**, 365-382.

BASTIEN C. (1997), *Les connaissances de l'enfant à l'adulte*, Armand Colin, Paris.

BASTIEN C & BASTIEN-TONIAZZO M. (2004), *Apprendre à l'école.* Armand Colin, Paris.

BENZECRI J.P. (1973), *L'Analyse des correspondances*, Dunod, Paris.

BENZECRI J.P & BENZECRI F. (1976), *Pratique de l'analyse des données*, Dunod, Paris.

COQUIN D & CAMOS V. (2006), Décimaux et fractions, dans *La cognition mathématique chez l'enfant* (Eds. Barouillet & Camos), 145-154, Solal, Paris.

CRAHAY M, VERSCHAFFEL, L., DeCORTE E & GREGOIRE J. (2008), Enseignement et apprentissage des mathématiques. De Boeck, Bruxelles.

CRAHAY M & DUTREVIS M. (2010), *Psychologie des apprentissages scolaires*, Bruxelles, De Boeck.

DIDIERJEAN A. (2015), *La madeleine et le savant. Balade Proustienne du côté de la psychologie cognitive*, Le Seuil.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* **7.2**, 5-31.

ESCARABAJAL M.C. (1984), Compréhension et résolution de problèmes additifs, *Psychologie Française* **29**, 247-252.

GIRARDOT J.J. (1982), ANACONDA, système conversationnel d'analyse des données, *Cahier du SURF* **1**, 137-174.

HART K.M. (1981), *Children Understanding of Mathematics*, J. Murray, London.

HART K.M. (1988), Ratio and proportion, dans *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (Eds. Hiebert & Behr), 198-219, VA: National Concil of Teachers of Mathematics. Hillsdale, N.J: Erlbaum/Reston.

HOUDEMENT C. (2011), Connaisances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école, *Annales de didactiques et de sciences cognitivesn* **16**, 67-96.

KARPLUS R & PETERSON R.W. (1970), Intellectual development beyond elementary school II : Ratio, a survey, *School, Science and Mathematics* **70-9**, 813-820.

KARPLUS R, KARPLUS E.F, FORMISANO M & PAULSON A.C. (1979), Proportional reasoning and control of variables in seven countries, dans *Cognitive process instruction* (Eds. Lochhead & Clement), 47-104, The Franklin Institute Press, Philadelphia.

LEBART L, MORINEAU A & TABARD N. (1977), *Techniques de la description statistique, Méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableaux*, Dunod, Paris.

LE BORGNE P & LEVAIN J.P. (2008), Territoires et résolution de problèmes au collège. *Diversité-Ville-École-Intégration,* ***155****,* 162-170.

LEVAIN J.P. (1996), Développement cognitif et acquisition des concepts de rapport et de proportion, *Revue européenne de psychologie appliquée* **46**, 131-138.

LEVAIN J.P. (1997), *Faire des maths autrement développement cognitif et proportionnalité*, Paris, L'Harmattan.

LEVAIN J.P, LE BORGNE P & SIMARD A. (2009), Territoires et conceptualisation de la proportionnalité, *L'orientation scolaire et professionnelle* **38**, 69-95.

NOELTING G. (1980), The development of proportional reasoning and the ratio concept, part 1, differentiation of stages, *Educational studies in mathematics* **11**, 217-253.

NOELTING G. (1980), The development of proportional reasoning and the ratio concept, part 2, problem-structure at successive stages : problem-solving strategies and the mecanism of adaptative restructuring, *Educational studies in mathematics* **11**, 331-363.

SANDER E. (2008), Les connaissances naïves en mathématiques dans *Les connaissance naïves* (Eds. Giraud, Sander & Tinberghien), 57-102, Armand Colin, Paris.

THEVENOT C, COQUIN D & VERSCHAFFEL L. (2006), La résolution de problèmes, dans *La cognition mathématique chez l'enfant* (Eds. Barouillet & Camos), 155-180, Peter Lang, Berne.

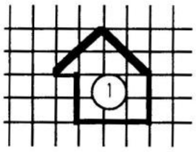
VERGNAUD G. (1983), Multiplicative structure, dans *Acquisition of mathematics concepts et processes* (Eds. Lesh & Landau), 127-174, Academic, New York.

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques* **10**, 135-169.

WEIL-BARAIS A. (2004), *Les apprentissages scolaires*, Breal, Paris.

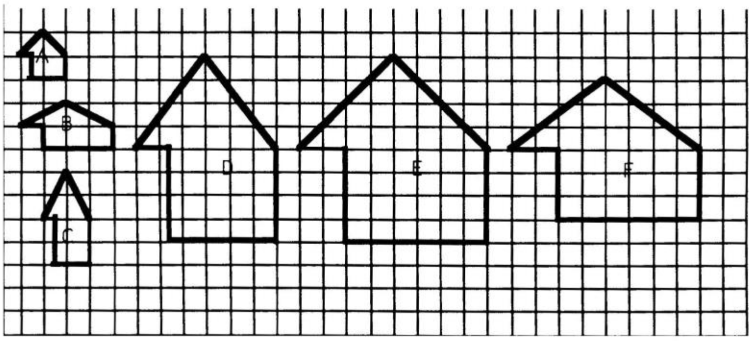
Annexe

n°1

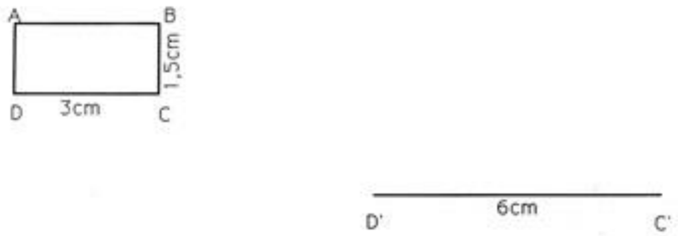


Parmi les dessins A, B, C, D, E et F ci-dessous, lesquels sont des agrandissements ou des réductions du dessin n°1 ?

Entoure les lettres correspondantes et barre les autres.



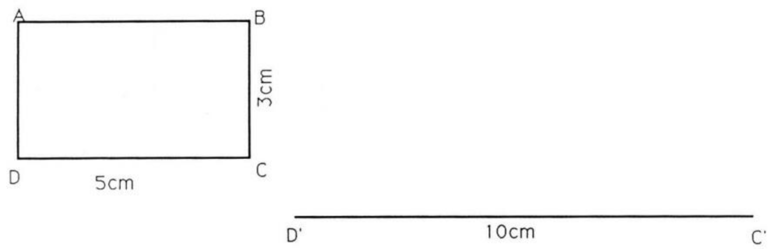
n°2



Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

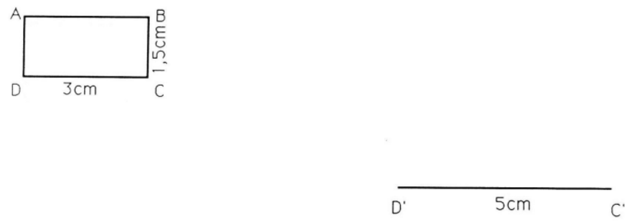
n°3



Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

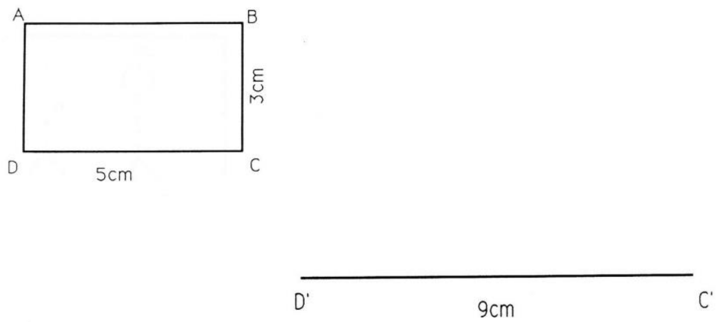
n°4



Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

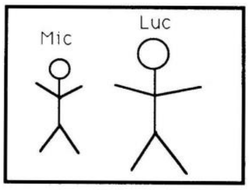
n°5



Termine le rectangle A'B'C'D', pour qu'il soit un agrandissement du rectangle ABCD.

Explique comment tu as fait (quels calculs as-tu effectués?):

n°6



Sur une photo, Mic mesure 4cm
et Luc 6cm.
Après agrandissement de la photo,
Mic mesure 6cm.

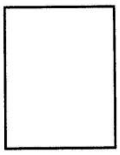
Combien Luc mesure-t-il sur la photo agrandie?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

N°7

Une photographie d'identité mesure 3,6 cm
de longueur et 2,4 cm de largeur.
Une fois agrandie, sous forme de poster, cette photo a
pour longueur 90 cm.
Quelle est sa largeur ?

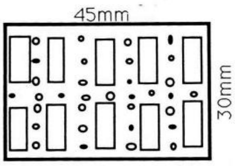


Quels calculs fais-tu ?

Écris ta réponse dans le cadre

n°8

Ce dessin est un agrandissement d'un petit circuit électrique:



Sur le dessin, ce circuit de forme rectangulaire mesure 45 millimètres de longueur et 30 millimètres de largeur.

La longueur réelle du circuit est de 1,8 millimètres.
Quelle est sa largeur?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

n°9

Un mur de 50m de long est représenté sur un plan par un segment de 10cm.

Quelle est l'échelle de ce plan?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

n°10

Sur une carte on peut lire: "2 centimètres pour 1 kilomètre"

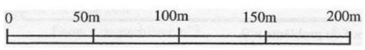
Quelle est l'échelle de cette carte?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

n°11

Sur une carte, on a relevé les indications suivantes :
Écris l'échelle de cette carte :



Écris tes calculs :

Echelle:

n°12

Un architecte a réalisé la maquette d'un nouveau quartier. Sur cette maquette, un immeuble de 25m de haut est représenté par une petite boîte d'allumettes de 5cm de hauteur.
Par quel nombre faut-il multiplier la hauteur de cette petite boîte pour obtenir la hauteur de l'immeuble?

Quels calculs fais-tu?

Écris ta réponse dans le cadre :
(tu peux faire les changements d'unités que tu désires).

N° 13

Tu veux faire le plan d'une salle des fêtes qui mesure 58 mètres de long et 28 mètres de large.
Calcule une échelle pour que ton plan tienne tout entier dans une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7 cm), et qu'il soit le plus grand possible :

Échelle de cette salle :

n°14

Tu veux faire le plan d'une classe de chimie qui mesure 14 mètres de long et 9 mètres de large.
Par combien dois-tu diviser les dimensions de cette classe pour la représenter sur une feuille comme celle-ci (format 21 X 29,7cm)?
(le plan doit être le plus grand possible)

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

n°15

Un jardin rectangulaire mesure 50 mètres de long et 30 mètres de large.

On représente ce jardin par un dessin à l'échelle $\frac{1}{100}$.

Quelle est la longueur du jardin sur ce dessin?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

n°16

A vol d'oiseau, 76 kilomètres séparent Besançon de Montbéliard.

La carte Michelin de Franche Comté est à l'échelle: $\frac{1}{200\,000}$

Combien de centimètres séparent, sur cette carte, Besançon de Montbéliard?

Quels calculs fais-tu?

Ecris ta réponse dans le cadre:

N° 17

Voici un plan de la ville de Besançon

Début de la rue C. Nodier

Fin de la rue C. Nodier

Quelle est sur le terrain la longueur en mètresde la rue C. Nodier ?

Ecris ta réponse dans le cadre

N° 18

Cette carte du guide Michelin est à l'échelle : $\frac{1}{3\,000\,000}$

Combien de kilomètres séparent Lyon d'Avignon à vol d'oiseau ?

Ecris ta réponse dans le cadre:

n°19

Pierre regarde une carte Michelin à l'échelle $\frac{1}{200\ 000}$.

Sur cette carte, il mesure 38 centimètres de Chaumont à Saint-Dizier.

Combien de kilomètres séparent Chaumont de Saint-Dizier

à vol d'oiseau ?

Quels calculs fais-tu ?

Ecris ta réponse dans le cadre :

JEAN-PIERRE LEVAIN
Université de Bourgogne-Franche-comté
Laboratoire de Psychologie (EA 3188)
30 rue Mégevand 25032 BESANCON CEDEX - France
jp.levain@orange.fr
PHILIPPE LE BORGNE
Laboratoire de mathématiques de Besançon
FR-EDUC de l’université de Franche-Comté
ESPE de l'université de Franche-comté
BP 41665 - 25042 BESANCON CEDEX - France
philippe.leborgne@univ-fcomte.fr
ARNAUD SIMARD
Laboratoire de mathématiques de Besançon
FR-EDUC de l’université de Franche-Comté
ESPE de l'université de Franche-comté
BP 41665 - 25042 BESANCON CEDEX - France
Arnaud.simard@univ-fcomte.fr
ANDRE DIDIERJEAN
Université de Bourgogne-Franche-Comté
Département et Laboratoire de Psychologie (EA 3188)
30 rue Mégevand 25032 BESANCON CEDEX - France
Andre.didierjean@univ-fcomte.fr

JEROME PROULX, MARIE-LINE L. LAMARCHE, KARL-PHILIPPE TREMBLAY

ÉQUATIONS ALGEBRIQUES ET ACTIVITE MATHEMATIQUE EN CALCUL MENTAL: REGARD SUR LES DEFIS D'ENSEIGNEMENT

Abstract. Algebraic equations and mathematical activity in mental mathematics: on teaching challenges. This article explores students' and teachers' strategies when solving algebraic equations without paper and pencil or any other material aid. The enactivist notions of problem-posing offer conceptual grounds to engage in analysis of students' and teachers' strategies, and in their comparisons. This leads to the exploration of differences in the nature and origin between the solving processes of students and those of teachers, as well as challenges in relation to teaching and learning of algebra equation solving. Final remarks reflect on the potential of being sensitized to the nature of these differences in solving processes.

Keywords. Mental calculations, algebraic equations, mathematical strategies, mathematical activity, teaching challenges.

Résumé. Dans cet article, nous explorons et comparons la nature de l'activité mathématique déployée par des élèves à celles déployée par des enseignants lors de la résolution d'équations algébriques en contexte de calcul mental. L'ancrage théorique de la recherche s'inspire de la théorie de l'enaction, précisément la notion de pose de problème, pour conceptualiser les différences entre les stratégies des élèves et des enseignants. Ces différences font ressortir certains défis relatifs à l'enseignement de la résolution d'équations en algèbre. Ces défis sont abordés et discutés en fin d'article, particulièrement sous l'angle de l'importance de la sensibilisation aux natures différentes des processus de résolution.

Mots-clés. Calcul mental, équations algébriques, stratégies mathématiques, activité mathématique, défi d'enseignement.

Introduction

Cet article se place en continuité avec un précédent publié dans cette même revue sur la résolution mentale d'équations algébriques (Proulx, 2013). Nous avons travaillé en ce sens à quelques reprises avec des élèves du début secondaire, mais aussi indépendamment avec des enseignants du secondaire, à la résolution d'équations algébriques usuelles de la forme Ax + B = C, Ax + B = Cx + D, Ax/B = C/D, sans utiliser papier-crayon ni tout autre aide matérielle, lors de séances de calcul mental. Notre intérêt de recherche est de mieux comprendre la nature des stratégies déployées, autant par les élèves que par les enseignants, lors de ces séances durant lesquelles nous leur avons demandé de faire la résolution mentale de ce type d'équations algébriques.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 43 - 65.

C'est donc dans ce cadre que nous abordons cet article, où nous offrons une analyse des stratégies dans lesquelles élèves et enseignants se sont engagés pour résoudre diverses équations algébriques. Ces analyses de stratégies permettent de dégager des différences significatives entre élèves et enseignants sur les façons de résoudre ces équations algébriques ; différences qui valent la peine d'être analysées en détail. Cette mise en contraste des stratégies des élèves et des enseignants permet de mettre de l'avant des défis que tout ceci pose pour l'enseignement-apprentissage de la résolution d'équations en algèbre.

Avant d'entrer sur l'analyse des processus de résolution développés par les élèves et les enseignants, nous présentons les bases théoriques de notre travail de recherche, ancrées dans une vision épistémologique de l'activité mathématique et de la résolution de problèmes en calcul mental.

1. Conceptualisation de l'activité mathématique en calcul mental : de la résolution de problèmes à la pose de problèmes[1]

Tel qu'expliqué dans Proulx (2013), des travaux récents soulignent le besoin de mieux comprendre et mieux conceptualiser le processus de développement de stratégies en calcul mental. Certains chercheurs ont critiqué l'idée usuelle suivant laquelle le « résolveur »[2] fait un choix de stratégie à partir d'un coffre à outils rempli de stratégies prédéterminées pour résoudre un problème de calcul mental. Threlfall (2002, 2009) insiste plutôt sur l'émergence organique et le caractère contingent des stratégies en fonction de la tâche *et* du résolveur, soit ce qu'il comprend, préfère, connait, a comme expérience, est confiant de, etc. (voir aussi Butlen & Pézard, 2000 ; Rezat, 2011). Cette idée d'émergence s'aligne avec les travaux de Lave (1988) en cognition située, où les stratégies mentales sont conceptualisées en tant que réponses flexibles, émergentes et adaptées, liées à un contexte spécifique.

En didactique des mathématiques, la théorie cognitive de l'enaction (inspirée des travaux de Maturana, 1987, 1988a, b ; Maturana & Varela, 1992 ; Varela, 1999 ; Varela, Thompson & Rosch, 1991) s'est intéressée aux notions d'émergence, d'adaptation et de contingence de l'activité mathématique. Ainsi, dans nos travaux, des aspects de cette théorie inspirent et enracinent la conceptualisation des processus de résolution en contexte de calcul mental. En particulier, la distinction proposée par Varela (1996) entre la « résolution de problème » et la « pose de

[1] Le début de cette section sur l'ancrage théorique reprend en 1er lieu les idées développées dans la Section 3 de l'article de 2013 et en 2e lieu les tire plus loin pour faire avancer la théorisation et la conceptualisation des processus de résolution en calcul mental.

[2] Le néologisme « résolveur » est créé dans le but de retrouver le sens de l'expression anglophone *solver*, soit celui qui résoud le problème.

problèmes » offre une réponse préliminaire pour mieux comprendre le processus de résolution au niveau de l'émergence et la génération de stratégies de résolution.

Pour Varela, la notion de « résolution de problèmes » implique que des problèmes sont déjà présents, en attente d'être résolus, indépendamment de nous. Or, pour Varela, nous spécifions les problèmes que nous rencontrons, à travers le sens que nous donnons au monde qui nous entoure et notre compréhension des choses, ce qui nous amène à reconnaitre les choses d'une façon spécifique, de le faire à notre façon. Nous ne « choisissons » pas ou ne « prenons » pas les problèmes comme s'ils existaient « à l'extérieur » de nous, de façon objective et indépendante de nos actions : plutôt, nous les faisons émerger.

> La plus importante faculté de toute cognition vivante est précisément, dans une large mesure, de poser les questions pertinentes qui surgissent à chaque moment de notre vie. Elles ne sont pas prédéfinies mais *enactées*, on les *fait-émerger* sur un arrière-plan, et les critères de pertinence sont dictés par notre sens commun, d'une manière toujours contextuelle. (Varela, 1996, p. 91)

En bref, nous posons les problèmes. Les problèmes que nous rencontrons et les questions que nous posons font autant partie de nous que de notre environnement : ils émergent de notre interaction avec lui. Nous interprétons les évènements qui nous entourent comme des éléments à aborder, nous les voyons comme des problèmes à résoudre. Nous n'agissons pas sur des situations préexistantes, notre interaction avec notre environnement crée les situations possibles sur lesquelles agir. Les problèmes que nous résolvons, alors, sont implicitement pertinents pour nous, car nous permettons à ceux-ci d'être des problèmes pour nous.

Cette perspective met de l'avant l'argument de Simmt (2000), qui affirme que ce n'est pas une tâche ou un problème qui est donné aux résolveurs, mais plutôt un énoncé, et que c'est le résolveur, en posant l'énoncé dans un contexte mathématique particulier, qui en produit une tâche. Un énoncé devient une tâche lorsque le résolveur le pose comme une tâche à résoudre. Mais, l'énoncé en lui-même, pour Simmt, n'est rien en soi : il devient une tâche ou un problème à résoudre à la rencontre du résolveur. Ainsi, divers résolveurs transforment l'énoncé en une tâche de multiplication, une de proportion, une de fonctions, une d'algèbre, etc., et font la résolution en fonction de cette transformation, de cette « pose[3] ». Et, cette pose n'est pas statique, ni fixée, car elle engage dans un processus de résolution qui en retour retransforme la tâche posée. La tâche ne se fixe pas au moment de la rencontre, au moment de sa pose : le processus est mouvant et c'est dans ce processus continu que la tâche émerge, de façon organique, toujours en train de se faire, de se développer, de se poser. Il y a en ce sens une interrelation mutuelle entre la pose et la résolution de la tâche.

---

[3] Nous parlons de « pose », par analogie à l'expression « poser un problème ».

À titre d’exemple, voici une stratégie tirée d’une étude conduite sur le calcul mental autour d’opérations arithmétiques (Osana et al., 2014 ; Proulx et al., 2014), qui permet d’illustrer le caractère émergent et interrelié de la résolution et de la pose de la tâche. Pour résoudre 741 – 75, un des résolveurs explique ainsi sa façon de faire :

> (a) 741 – 75 est comme 700 – 75 + 41.
>
> (b) 700 – 75 est comme avoir 7 dollars et y soustraire 3 vingt-cinq sous. Il me reste 6,25$. Et, 6,25$ est six-vingt-cinq, donc j’ajoute 41 à 625.
>
> (c) Pour faire ça, je fais 5+1 est 6, 4+2 est 6, et j’ai 600, donc 666.

Lorsque l’énoncé 741 – 75 a été donné, le premier pas a été de trouver une façon de résoudre, de trouver une façon « d’entrer », de poser la tâche. Cet énoncé a donc été posé comme une tâche de décomposition, qui a mené ce résolveur à décomposer 741 en 700 + 41 pour y soustraire 75 de 700. Cette décomposition a produit en retour une nouvelle situation pour le résolveur, soit de résoudre 700 – 75, laquelle a été posée comme une tâche en contexte monétaire (7 $ moins 75 sous). Cet autre pas de résolution mène en retour à 625 + 41, que le résolveur pose comme une tâche de décomposition des divers chiffres des deux nombres par rapport à leur position (centaines, dizaines, unités) et leurs additions successives. On voit bien aussi dans cet exemple ce qui a été avancé dans Proulx (2013) dans l’analyse des stratégies en calcul mental, où la création d’un contexte permet l’avancement dans la résolution de la tâche. Ainsi, chaque pas de résolution entraîne la (re-)pose de la tâche à résoudre, exigeant aussi de trouver une nouvelle façon « d’entrer » dans celle-ci pour continuer à résoudre.

On voit dans cet exemple les différents pas de résolution entrepris. Entrer dans la tâche c’est faire un pas, et puis un autre, et ce sont ces pas qui émergent dans la résolution. Ensuite, on peut dire qu'une « stratégie » a émergé, mais la stratégie est un regard *a posteriori*, après coup, alors que le tout se fait en continuité, pas par pas, pour avancer dans la tâche posée. Chaque étape est un pas, qui mène à une nouvelle pose de problème, à une nouvelle résolution contingente à ce pas, et qui fait une repose, menant à un autre pas, etc.

Et ces pas de résolution émergent de l’interaction du résolveur et de l’énoncé, influencés par les deux comme l’affirme Davis (1995) : pas uniquement reliés à l’énoncé (ses « propriétés » ou ses affordances, voir Proulx, 2015), ni uniquement reliés au résolveur (ses expériences, ses habitudes, ses succès, sa confiance, sa compréhension des directives, etc.), mais aux deux :

> As a result of this interaction between noticing and knowledge each solution ‘method’ is in a sense unique to that case, and is invented in the context of the particular calculation – although clearly influenced by experience. It is

> not learned as a general approach and then applied to particular cases. […] The 'strategy' (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges. (Threlfall, 2002, p. 42)

Les pas de résolution, ou les stratégies au sens de Threlfall[4], ne sont pas prédéterminés, mais générés pour résoudre, émergeant de l'interaction d'avec l'énoncé. Ainsi, le résolveur transforme l'énoncé en tâche mathématique, le fait sien, et génère une « stratégie » pour la tâche « posée », dans le but de résoudre « sa » tâche[5]. C'est cette entrée dynamique et émergente sur les stratégies qui caractérise notre entrée sur la compréhension des processus de résolution, enracinant notre façon de donner un sens aux données recueillies sur la résolution d'équations algébriques et d'aborder la question des défis de son enseignement.

2. Résolution d'équations algébriques sans papier-crayon

Tel qu'expliqué dans Proulx (2013), le fonctionnement que nous adoptons pour travailler le calcul mental est simple. Lors de séances de groupe, chacun assis à sa table sans papier ni crayon à sa disposition, les résolveurs doivent tenter de résoudre mentalement les énoncés offerts. L'organisation des rencontres s'apparente à celle proposée par Douady (1994), où une attention particulière à installer un climat respectueux qui permet le partage et l'écoute des solutions entre les résolveurs : (1) Le chercheur offre oralement et par écrit une équation algébrique ; (2) Les résolveurs font la résolution mentalement de cette équation ; (3) Au signal du chercheur, les résolveurs sont invités à partager oralement et en détails leur solution.

Les données recueillies pour l'analyse proviennent des explications orales des stratégies des résolveurs suite à leur résolution. Celles-ci sont prises sous forme de notes de terrain par deux (ou plus) assistants de recherche et sont jumelées aux réflexions collectives « à chaud » entre les membres de l'équipe (chercheur, assistants et parfois l'enseignant lorsque la disponibilité le permet) suivant immédiatement les séances d'expérimentation entre les membres de l'équipe. Les notes des assistants de recherche sont par la suite combinées pour former le corpus de données, soit un seul rapport de séance prenant en compte les notes des

---

4 Et c'est ce sens offert par Threlfall que nous utilisons dans le reste de l'article lorsque nous faisons référence à l'expression « stratégie », soit non pas en tant qu'entité figée et réifiée, mais en tant que *chemin de résolution,* dans sa totalité qui se trace et se représente par les divers *pas de résolution*.

5 Un des évaluateurs a souligné ici que l'expression « tâche mathématique » pourrait être mise au pluriel en lien avec ce qui est avancé. En effet, autant la stratégie comme chemin de résolution évolue à travers les divers pas et peut ainsi être vue comme nouvelle à chaque pas (donc multiple), la tâche qui est posée et re-posée à travers ces pas peut être vue nouvelle, donc multiple aussi. C'est ce que nous tentons de rendre par l'idée que cette tâche n'est pas statique et évolue en cours de résolution.

assistants et les réflexions des membres de l'équipe. Dans le cas des enseignants-résolveurs, la séance est aussi captée sous forme de vidéo, permettant un retour au besoin pour clarifier ou bonifier les notes de terrain.

Tel qu'expliqué en introduction, l'analyse des stratégies des élèves est effectuée ici dans une intention future de comparaison avec celles des enseignants. Ainsi, ce n'est pas une analyse pour les stratégies en elles-mêmes, mais bien plus pour établir un terrain de « comparaison » entre stratégies. La centration de l'analyse est sur le processus, sur les pas de résolution, et donc sur l'activité mathématique déployée dans la résolution.

2.1. Pose de problèmes et stratégies des élèves lors de la résolution des équations algébriques

Nous avons travaillé avec des élèves de 2e année du secondaire (13-14 ans, deux classes d'approximativement 30 élèves chacune, une période de 75 minutes pour chacune des deux classes). Malgré que les élèves en étaient à leurs débuts avec la résolution d'équations algébriques, notre expérimentation s'est déroulée en avril, soit au 8e mois de l'année scolaire, et donc les élèves avaient été confrontés à l'occasion à des équations de ce type. Les mêmes quatre équations algébriques ont été proposées aux élèves des deux groupes, et deux de celles-ci sont analysées dans cet article, soit « Résoudre pour x l'équation $2x+3=5$ » et « Résoudre pour x l'équation $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ ». Les stratégies émergeant de ces deux équations sont illustratives de la nature de l'activité mathématique déployée chez les élèves durant la séance. En ce sens, cette analyse ne s'intéresse pas aux occurrences des stratégies (i.e., nombre de fois que chacune des stratégies a été utilisée, par combien d'élèves, etc.), mais plutôt à leur nature, au sens de Douady (1994), pour bien comprendre le sens et la fonctionnalité des outils utilisés (i.e. les stratégies déployées). Pour cette raison, l'ensemble des stratégies recueillies dans les deux classes sont regroupées dans l'analyse.

Pour « Résoudre pour x l'équation $2x+3=5$ », les élèves ont produit les stratégies suivantes[6] :

Stratégie 1 : Méthode des opérations inverses

Un des élèves a expliqué que la réponse est $x=1$, car il a fait « moins 3 » au 5 à la droite de l'égalité pour donner $2x = 2$, ce qui donne $x=1$. Et ensuite il a divisé par 2. Questionné sur sa stratégie, il explique aussi que la division par 2 était directe et qu'il n'a pas eu besoin de la faire réellement.

[6] L'analyse des stratégies est plutôt à ce stade descriptive, mais ces descriptions sont reprises plus loin lors d'une mise en commun des stratégies dans le but d'aborder l'intention d'analyse pour cet article, soit la comparaison des stratégie des élèves et des enseignants.

Stratégie 2 : Méthode de la balance

Un autre élève explique qu'il a fait ce qu'on appelle souvent la méthode de la balance, soit en faisant la soustraction de 3 de chacun des côtés pour obtenir $2x = 2$ et puis en divisant par 2 des deux côtés pour obtenir $x = 1$.

Stratégie 3 : Lecture directe de l'équation

Un élève explique qu'avec $2x + 3 = 5$ il savait par « logique » que $x = 1$, car $2 + 3 = 5$ donc x vaut 1. Plusieurs élèves ont dit avoir fait la même chose. Un autre élève dit qu'il a enlevé dès le début le x de l'équation et qu'il voyait que $2 + 3 = 5$. Il explique qu'il s'est ensuite dit que lorsqu'il fera « fois quelque chose », donc le x, il faut que ça donne 2 encore et que par conséquent x doit être égal à 1. Un élève explique toutefois que, pour lui, ceci signifie que $x = 0$, car comme $2 + 3 = 5$ alors il n'a pas besoin du x (qui vaut alors 0).[7]

Pour « Résoudre pour x l'équation $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ », les élèves ont produit ces stratégies :

Stratégie 1 : Mise en fractions équivalentes puis en décimal

Un élève explique avoir voulu diviser $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{5}$, mais que cela ne fonctionnait pas. Plutôt, il a transformé $\frac{1}{2}$ en $\frac{10}{20}$ pour que ce soit plus simple. Il obtient alors $\frac{2}{5}x = \frac{10}{20}$. Il a fait la même chose avec le $\frac{2}{5}$ de « l'autre côté » pour obtenir $\frac{20}{50}x = \frac{10}{20}$. Il explique alors que ceci équivaut à $0{,}4x = 0{,}5$ et donc que la réponse est $x = \frac{0{,}5}{0{,}4}$.

Stratégie 2 : Nombre décimal

Un élève explique que la réponse est 1,25. Il a fait $\frac{5}{2}x = 2$, car $\frac{1}{2}$ se transforme par 2. Il a ensuite transformé en nombre décimal pour obtenir $2{,}5x = 2$. En divisant par 2, il obtient $1{,}25x = 1$ et donc que $x = 1{,}25$. [8]

Stratégie 3 : Produit croisé

Un élève dit qu'il a fait $\frac{2x}{5} = \frac{1}{2}$ pour ensuite faire le produit croisé. Il fait 5 fois $\frac{1}{2}$ ce qui donne 2,5. Ensuite, il obtient $2x = 2{,}5$ et donc que $x = 1{,}25$.

Stratégie 4 : Moitié

[7] Une discussion a évidemment eu lieu entre les élèves autour de ces idées.

[8] Il y a ici un certain nombre de transformations inadéquates cumulées, qui au final se compensent (équivalence d'équations, non-transformation de x à $1/x$, isolation du x).

L'élève dit qu'il y est allé par la « logique » en se disant que la moitié de 5 est 2,5 et que puisque ce qui est recherché est la moitié, alors x vaut 1,25.

Stratégie 5 : Dénominateurs communs

L'élève dit qu'il faut trouver la valeur de x pour que le $\frac{2}{5}$ vaille $\frac{1}{2}$. Il explique qu'en mettant la fraction sur 10, il sera capable d'y arriver. L'élève dit alors qu'il pense que x vaut 1,25, car 4 fois 1,25 donne 5 et que $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Stratégie 6 : Dénominateurs communs et contexte additif

L'élève dit qu'il a utilisé les dénominateurs communs en mettant tout sur 10. Il a donc $\frac{4}{10}\,x = \frac{5}{10}$. L'élève a ensuite soustrait $\frac{5}{10}$ de $\frac{4}{10}$ce qui lui donne $\frac{-1}{10}$. Il dit que le x vaudrait $\frac{1}{10}$.

Stratégie 7 : Élimination du dénominateur

Un élève suggère de multiplier par 5 pour donner $2x = \frac{5}{2}$ (mais n'avait pas continué son calcul, ce qui est fait par après).

Toutes ces stratégies, et leurs pas de résolution sous-jacents, ne sont pas nécessairement « adéquates » ou « standard », mais témoignent par contre d'une activité mathématique émergente, soutenue et diversifiée dans la recherche de la valeur de x qui satisfait l'équation algébrique. Par ces exemples de résolution d'équations algébriques, on voit l'émergence d'une diversité de pas de résolution, « d'entrées » pour résoudre ; qu'on peut penser provoquée par le contexte de calcul mental et ses contraintes implicites de rapidité, et celles explicites telles que de ne pas pouvoir prendre de notes ni produire de traces écrites. Encore ici, tel que nous le montrons dans Proulx (2013), l'aspect « mental » oriente vers la formulation d'une réponse, mais pas de la même façon qu'on l'entend habituellement : l'entrée est davantage sur la recherche d'une façon de voir vite, de trouver un contexte de résolution pour réussir à entrer dans le problème rapidement et efficacement, de faire un pas, pour *ensuite* s'orienter vers la recherche d'un résultat. De plus, la régulation de la résolution se fait par le résolveur lui-même, et non pas par le déroulement d'une procédure appliquée à l'équation (tel qu'on le fait fréquemment en contexte papier-crayon).

Pour ces exemples de calcul mental, tout semble orienté vers une réponse mais en procédant par raisonnements et par le sens sous-jacent, donc très peu sur l'application mécanique d'une méthode ou d'un algorithme. L'élève n'est pas dans une stratégie de résolution syntaxique (travail sur les règles), mais bien plus sémantique (travail sur les relations entre les grandeurs). On parle alors de la création de son propre contexte de résolution, de sa propre entrée adéquate et adaptée pour résoudre, où la part des résolutions mécaniques (dénominateur commun, opérations inverses, transformation en décimales, etc.) est réduite et se fond dans le contexte de résolution. C'est cette diversité qui ressort et qui se traduit par des stratégies différentes pour résoudre la même équation (qui n'est plus la même équation soudainement, car elle est contextualisée, *posée,* différemment et signifiée différemment d'un élève à l'autre). Les élèves développent leurs façons d'entrer dans l'équation. Ces considérations sur la création d'un contexte de résolution ramènent effectivement à la question de la « pose de problèmes » à la Varela, telle qu'expliquée à la Section 2. Cette variété mise de l'avant par les résolveurs, et ici uniquement pour deux équations, illustre bien comment les différentes façons de « poser » la tâche ont mené à des stratégies différentes. Les mêmes équations ont permis de faire émerger une variété de « poses », engageant alors sur une variété de stratégies.

2.2. Pose de problèmes et stratégies des enseignants lors de la résolution des équations algébriques

Nous avons travaillé avec une quinzaine d'enseignants pendant une journée complète. Le travail sur la résolution des équations algébriques s'est fait durant la matinée. Pendant ce temps, des équations algébriques similaires, voire identiques, à celles données aux élèves ont été données à résoudre aux enseignants.

De façon générale, les stratégies des enseignants se décrivent comme efficaces mais habituelles pour résoudre les équations algébriques : faisant intervenir la balance ou l'isolation du x, par exemple. Par contre, à l'occasion durant la séance, diverses stratégies de nature davantage arithmétique ont émergé pour résoudre les équations. Par exemple, certains enseignants ont utilisé quelques fois la méthode qu'ils appellent de « recouvrement » du x. Pour résoudre « Résoudre pour x l'équation
$x^2 - 4 = -3$ », un enseignant explique :

> Je cherche le nombre qui, si on lui soustrait 4, me donne –3. Je sais que c'est 1, donc quel nombre élevé au carré donne 1… c'est ±1.

Ce type d'approche est similaire aux méthodes de résolution « inverses » discutées par Hewitt (1996) et Filloy et Rojano (1989), ainsi que dans le *unwinding* de Nathan et Koedinger (2000) où les opérations sont défaites pour arriver à la valeur de x[9]. Tel que l'expliquent Filloy et Rojano (1989), pour arriver à résoudre une

[9] Avec ce type d'exemple, on peut penser, tel que l'a souligné un des évaluateurs, qu'on est sur « une recherche directe de valeurs en prenant x^2 comme inconnue intermédiaire ». Par contre, les enseignants qui ont, très occasionnellement, utilisé cette approche l'ont parlée en termes de recherche inverse comme ils le feraient pour $2(x - 3) = 7$ où on divise en 2 et on ajoute 3 (voir Hewitt, 1996, pour une description plus approfondie de cette approche de recouvrement).

équation algébrique de cette façon « il n'est pas nécessaire d'opérer sur ou avec les inconnues » (p. 20, notre traduction), le travail se ramenant à une suite d'opérations arithmétiques réalisées sur des nombres. Par contre, ces stratégies de type arithmétique ne sont pas majoritaires chez les enseignants, voire occasionnelles.

Pour « Résoudre pour *x* l'équation $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ », soit la même que pour les élèves, les enseignants ont produit les stratégies suivantes :

Stratégie 1 : Produit des extrêmes est égal au produit des moyens

Un enseignant affirme avoir fait comme avec les proportions, soit de faire ce qu'il appelle le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Il a multiplié le 2 et le 2, ainsi que le 5 et le 1, obtenant alors $4x = 5$ et $x = \frac{5}{4}$.

Stratégie 2 : Multiplier par l'inverse

Un enseignant explique avoir divisé par $\frac{2}{5}$ de chaque côté de l'égalité, revenant à multiplier par l'inverse, soit $\frac{5}{2}$, donnant alors $x=\frac{5}{4}$. Un autre enseignant explique avoir fait directement une multiplication par $\frac{5}{2}$ pour isoler le *x*.

Stratégie 3 : Isoler *x* en deux étapes

Un enseignant explique avoir multiplié l'équation par 5, obtenant $2x = \frac{5}{2}$, et ensuite diviser le tout par 2. Il obtient $x = \frac{5}{4}$.

Suite à ces trois stratégies, un des enseignants (le même ayant fait la méthode du recouvrement pour résoudre $x^2 - 4 = -3$) offre une stratégie quelque peu différente :

Stratégie 4 : Simplifier l'équation

L'enseignant explique avoir voulu se débarrasser de la demie en multipliant toute l'équation par 2. Ceci lui donne « 4 cinquièmes de *x* égale à 1 ». Par la suite, il multiplie par l'inverse $\frac{5}{4}$ pour trouver le *x*.

L'enseignant ici simplifie l'équation de départ, en éliminant la demie, pour après trouver la valeur de *x* en multipliant par l'inverse du coefficient de *x*. Plusieurs enseignants ont été intrigués par cette procédure et ont questionné l'enseignant. Ce dernier a expliqué que son intention n'était justement pas de travailler avec $\frac{2}{5}$ et de s'en débarrasser (tel que d'autres l'avaient fait auparavant dans les Stratégies 2 et 3), mais bien de travailler avec $\frac{1}{2}$ pour l'éliminer et « trouver 1 d'un côté » de l'équation, et aussi « parce que la multiplication par 2 était facile ici ». Questionné sur les nombres présents dans l'équation, l'enseignant explique aussi qu'il n'est pas clair pour lui si des nombres tels que $\frac{3}{2}$ ou $\frac{1}{6}$ l'auraient mené vers une stratégie similaire, mais que c'est la présence de la demie qui a guidé son activité. On voit alors l'impact des données concrètes dans l'équation pour orienter la stratégie de résolution : on sent la présence d'une stratégie locale, produite sur-le-champ pour cette équation, et non pas comme stratégie générale applicable à tous les problèmes (en effet, multiplier par 2 donne peu de résultats si l'équation est par exemple $\frac{2}{5}x = \frac{4}{3}$). L'entrée dans la résolution se fait localement par $\frac{1}{2}$ et non par l'équation prise dans son ensemble, ce qui est le cas pour une stratégie plus globale comme le produit croisé qui peut se faire indépendamment de la nature des nombres au numérateur et dénominateur. Il y a donc présence de stratégies de résolution de natures très différentes. Cette procédure de doubler $\frac{1}{2}$ est assez différente de celle que l'on retrouve habituellement pour l'isolation du *x*, alors qu'on fait des transformations pour se trouver une équation équivalente, mais plus simple, pour résoudre. On ne transforme pas l'équation pour isoler le *x* ici, mais bien pour obtenir une autre équation plus facile à lire ou plus parlante, pour ensuite trouver la valeur du *x*.

Bien que locale, cette stratégie relève d'un regard ancré directement dans les données de l'équation. L'enseignant simplifie l'équation, en doublant $\frac{1}{2}$, puisqu'il était « simple » de le faire, pour ensuite résoudre. On a vu plus haut que les élèves proposent aussi des stratégies de ce type, souvent locales, où des liens sémantiques et contextuels sont faits. Toutefois, ces stratégies diffèrent de la majorité des stratégies produites par les enseignants, qui tirent leurs stratégies d'automatismes syntaxiques, efficaces, qui s'apparentent presque à des « réflexes » mathématiques. Chez l'élève, on retrouve une sensibilité aux valeurs mises en relation dans l'équation, qui se traduit par des pas de résolution locaux, directement connectés à l'équation à résoudre. De son côté, les stratégies de l'enseignant peuvent paraître générales, plus centrées ou relatives à la syntaxe de l'équation et moins aux valeurs elles-mêmes mises en relation. En un mot, face aux mêmes énoncés les enseignants posent des problèmes bien différents de ceux posés par les élèves.

Cette différence entre enseignants et élèves se réflète bien dans le commentaire formulé par un autre enseignant suite au partage de la stratégie du doublage de l'équation. Ayant lui-même eu recours à l'occasion à des stratégies non-standard pour résoudre les équations offertes, cet enseignant commente sur l'équation en question et sur la stratégie de résolution « optimale » à utiliser, référant à ses élèves.

Enseignant : Mais en secondaire 2 [13-14 ans] vraiment la stratégie qui serait gagnante ici là c'est la stratégie du raisonnement proportionnel, la proportion. On la travaille tellement et moi là je les incite presque a vraiment utiliser la proportion lorsqu'on a ce genre d'équation. [Discussion sur la nature de la proportion dans l'équation] De faire tout le reste [i.e., les autres stratégies mentionnées], moi je veux bien, mais avec mes groupes à moi, je regarde mes élèves et puis [soupir et geste de la main de découragement].

Chercheur : Tu n'es pas sûr que ça sortirait comme ça ?

Enseignant : Non, je ne suis pas sûr que ça sortirait beaucoup surtout si on demande de ne faire aucun calcul papier. En calcul mental, ce n'est pas évident, tandis qu'avec la proportion je pense qu'avoir 2 fois $2x$ $4x$ et 1 fois 5, $4x$ sur 5 après ça ils savent qu'il doivent diviser par 4, c'est des règles de transformation des équations.

L'enseignant met ici de l'avant une entrée plus standard de résolution sur l'équation. Partagé par les autres enseignants, ce commentaire sur la stratégie à utiliser contraste avec et est éloigné des procédures utilisées par les élèves soulignées plus haut, dans laquelle on ne retrouve pas vraiment l'utilisation de procédures et algorithmes traditionnels, soit ceux souvent utilisés en contexte papier-crayon.[10] Souvent, avec ces algorithmes, le défi n'est pas de se demander comment entrer, mais simplement de les utiliser/appliquer correctement pour arriver à la réponse.

Toutefois, la centration sur les procédures plus standard par les enseignants concerne davantage leur enseignement de la résolution d'équations algébriques, lorsque ceux-ci aident et montrent aux élèves comment faire. Elle ne concerne pas une limitation des enseignants à comprendre, apprécier et connaître d'autres façons de résoudre. En effet, lorsque interrogés sur d'autres types de stratégies qui peuvent être utilisées, ces mêmes enseignants offrent d'autres stratégies, particulièrement en lien avec ce que leurs élèves feraient : transformer les fractions en nombre décimaux, éliminer les fractions en multipliant par 5 et par 2 toute l'équation ou, encore, mettre les fractions sur le même dénominateur pour ne s'intéresser qu'aux numérateurs. On voit donc qu'ils comprennent, peuvent faire et anticipent des procédures différentes lorsqu'on les questionne.

Par la suite, dans la séance, lorsque les enseignants ont dû « Trouver la valeur de $2t$ dans $3(2t) + 6 = 18$ », trois stratégies sont ressorties :

[10] La question des perception a déjà été traitée par Nathan et Koedinger (2000) dans leur étude sur la perception d'enseignants et de chercheurs sur ce qui est difficile et sur ce qui ne l'est pas chez les élèves, montrant que les réussites et difficultés vécues chez les élèves en algèbre et la perception des enseignants et des chercheurs sur ces possibles réussites et difficultés ne sont pas tout à fait arrimées.

Stratégie 1 : Procédure standard – balance/opérations inverses

Un enseignant dit avoir trouvé 4 en procédant par les opérations inverses. Il a soustrait 6 de chacun des côtés, a obtenu $3(2t) = 12$. Ensuite, en divisant par 3 de chacun des côtés, il a obtenu que $2t = 4$.

Stratégie 2 : Défaire les opérations

En lien avec la Stratégie 1, un enseignant explique avoir fait les opérations contraires (sans les avoir appliquées de chacun des deux côtés comme pour la balance précédente), soit de soustraire 6 et de diviser par 3.

Stratégie 3 : Recouvrement

Un enseignant dit avoir procédé par recouvrement, soit en cherchant le nombre qui additionné de 6 donne 18. Ce nombre est 12. Ensuite, il se demande quel est le nombre qui multiplié par 3 donne 12. Ce nombre est 4.

Ici aussi, cette dernière stratégie dite de recouvrement soulève un certain questionnement chez les enseignants, un questionnement qui ne résulte pas d'une incompréhension de la stratégie utilisée, mais bien (de la surprise) du fait d'avoir concrètement utilisé cette stratégie pour résoudre ce type d'équation algébrique. Un des enseignants souligne en fait que bien que lui-même fasse la résolution des équations algébriques de façon variée, il n'enseigne pas cela à ses élèves et considère important de procéder par étapes avec eux, par colonnes, de chacun des deux côtés de l'égalité, etc., ce que d'autres enseignants appuient. À la suite de ce commentaire, toutefois, une des enseignantes soulève la question suivante :

> J'ai une question. Moi je le montrerais vraiment tout comme ça, papier-crayon, [étape par étape, de chacun des côtés, comme l'explique l'enseignant auparavant], mais dans la vie moi je vais y aller par contre aussi vite que ça [i.e. autres méthodes, recouvrement, défaire les opérations]. Sauf que je me souviens que lorsque j'étais au secondaire, on ne m'a jamais montré la méthode du balancement [i.e., effectuer les mêmes opérations des deux côtés]. Il a fallu qu'un collègue me dise « regarde, moi, je l'enseigne comme ça » et qu'ensuite en secondaire 1 je commence tranquillement et on parlait tout le temps « tu fais l'opération inverse, bing, bang ». Puis je me dis que c'est peut-être rendu un automatisme… Est-ce que c'est parce que nous on en a tant fait, et qu'à un moment donné les élèves eux-mêmes se mettent à le faire aussi rapidement, est-ce que c'est correct ou faut-il vraiment qu'ils continuent [d'y aller avec diverses méthodes différentes] ? [Plus tard elle ajoute :] Mais est-ce que l'on doit encourager chez l'élève la variété des stratégies ?

Ce commentaire de l'enseignante offre une certaine réponse aux préoccupations et affirmations de Freudenthal (1983) sur la question des automatismes en enseignement des mathématiques :

> I have observed, not only with other people but also with myself […] that sources of insight can be clogged by automatisms. One finally masters an activity so perfectly that the question of how and why [students don't understand them] is not asked anymore, cannot be asked anymore and is not even understood anymore as a meaningful and relevant question. (p. 469)

Ce que Freudenthal souligne, tout comme l'enseignante, n'est pas une incompréhension des façons de faire non habituelles chez celui qui fait ou enseigne les mathématiques, mais plutôt une habitude bien ancrée qui (1) empêche de penser soi-même à ces façons de faire comme option pour résoudre, mais surtout (2) amène à questionner la pertinence de ces stratégies. La question de l'enseignante est directement sur ce point, non pas au niveau d'une incompréhension de leur efficacité et sens mathématique, mais de leur légitimité dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques : Doit-on les enseigner ? Doit-on les accepter ? Ces questions soulèvent, au-delà des valeurs et perspectives sur l'enseignement-apprentissage de l'algèbre, un certain nombre de défis. La prochaine section aborde ces défis sous deux angles : le processus de résolution de problèmes et la confrontation des perspectives.

3. Autour des défis pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre

3.1 Une réflexion sur les processus de résolution d'équations

La distance entre les stratégies déployées par élèves et les enseignants, et leur possible arrimage, sont sans contredit des sources de défis pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. Une façon d'aborder ces questions est de se pencher sur le processus de résolution de d'équations qui a cours autant chez l'élève que chez l'enseignant en contexte de calcul mental. Comment expliquer la variété, mais surtout les différences de résolution entre les enseignants et les élèves ? Reprenons la citation de Threlfall (2002) :

> As a result of this interaction between noticing and knowledge, each solution 'method' is in a sense unique to that case, and is invented in the context of the particular calculation – although clearly influenced by experience. It is not learned as a general approach and then applied to particular cases. The solution path taken may be interpreted later as being the result of a decision or choice, and be called a 'strategy', but the labels are misleading. The 'strategy' (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges. (p. 42)

Si on prend en compte ce que Threlfall mentionne, on peut considérer que la nature de ce qui émerge chez un élève « novice » est bien différente de celle qui émerge chez un enseignant « expert ». Dans le cas du novice, son bagage d'expériences, pour reprendre les mots de Threlfall, est différent de celui de l'expert. Chez l'expert, on a l'impression que certaines expériences dirigent fortement les façons de résoudre. Dans le commentaire de l'enseignante, et dans celui de Freudenthal ci-dessus mentionné, on entend bien qu'il est difficile de sortir du cadre prétracé par l'expérience répétitive gagnée en enseignant un programme prédéterminé. Suivant la responsabilité qui lui incombe de faire apprendre les élèves, l'enseignant se retrouve à faire des choix et ces choix dictent alors la nature de l'expérience qu'il vivra au fil des années pour ce contenu mathématique[11]. Lorsque l'enseignant finit par pencher vers une ou des méthodes ou approches, qui sont vues comme pouvant aider les élèves, ces dernières deviennent en retour, systématiquement, celles qui dirigent son propre processus de résolution ; phénomène qui est bien rendu par l'expression « automatisme » à laquelle l'enseignante fait allusion.

Les pas de résolution donnant lieu aux stratégies, tant des élèves que des enseignants, émergent suite à une pose de problème différente et propre à chacun. Ces stratégies émergent dans l'interaction avec l'équation, elles se manifestent au travers des mêmes idées (ou sous la même forme), mais elles n'ont pas les mêmes *origines* : elles sont distanciées, influencées par une expérience qui joue un rôle fort chez l'enseignant. L'enseignant est expert dans la résolution de ces équations. Il est capable de lire celles-ci sous un même angle algébrique, ramenant tout ou presque au même type de tâche, posant le tout comme la même tâche. Et on voit que, placés devant des équations similaires, voire identiques, enseignants et élèves procèdent différemment, posant alors des tâches bien différentes.

Une distance entre les stratégies chez l'élève-novice et chez l'enseignant-expert est bien existante. Malgré son succès dans la résolution, et paradoxalement, l'expertise de l'enseignant limite la variété des problèmes qu'il pose, étant moins sensible à souligner des variations, provoquant ainsi une certaine distance avec les poses des élèves. Cette expertise de l'enseignant, par la nature même de son travail depuis plusieurs années l'amène à concevoir, à poser dirait-on, ce type de problèmes toujours sous le même angle algébrique. Quant à l'élève, il n'est pas un « non-expert ». Par contre, il n'a pas encore vécu ces mêmes expériences, récurentes au fil des années, avec les équations algébriques. Ceci fait penser à la métaphore du lit de rivière (*riverbed* en anglais). Le lit de rivière de l'enseignant est bien creusé, donc très spécialisé, et la rivière y coule vraisemblablement. L'élève est quant à lui

---

[11] L'expérience mathématique de l'enseignant du secondaire est, plus souvent qu'autrement, exactement celle de son enseignement de ces contenus mathématiques. Mis à part les enseignants continuant des études en mathématiques, peu nombreux sont ceux qui font des mathématiques en dehors de leur pratique de classe.

semblable à un jeune ruisseau qui dévie au moindre changement de terrain, ce qui ne l'empêche pas de faire déboucher la rivière (parfois au même endroit, mais parfois à un endroit tout à fait imprévu tout aussi adéquat).

À travers les divers propos tenus par les enseignants, tels ceux relatés plus haut concernant leurs automatismes et leurs préférences envers des méthodes dites plus standard et générales, on y conçoit une certaine intention d'uniformisation des procédures des élèves (tout autant qu'un malaise vécu par certains face à cette intention). Cette situation porte en elle le risque d'éloigner les enseignants des élèves au niveau des problèmes posés et de la résolution de ces mêmes problèmes. Il devient alors difficile de faire des mathématiques différemment, tel que l'exprime l'enseignante ci-dessus, mais aussi d'apprécier pleinement la variété des solutions des élèves ; une variété qu'eux-mêmes enseignants ne vivent plus dans leur quotidien mathématique. On y voit poindre alors des questions de légitimité de ces stratégies « non-usuelles », tel qu'expliqué plus haut.

Il est important à nouveau de noter le fait que cette distance n'est pas due à un manque mathématique chez l'enseignant, mais bien à un enracinement profond, à travers son enseignement, de ses façons de poser et résoudre les équations algébriques. Ainsi, tel que le montrent les analyses ci-dessus, malgré leurs difficultés à se rappeler comment faire de la résolution de problème autrement, les enseignants sont tout à fait capables de comprendre ces autres stratégies mathématiques, voire à en imaginer certaines lorsqu'ils sont poussés à le faire.

Tout ce contexte fait écho aux travaux conduits sur la résolution de problèmes en arithmétique et le travail des algorithmes de calcul. Dans sa recension de certains écrits, Anghileri (2001) montre qu'avant l'apprentissage des algorithmes standard de calcul, les enfants ont des stratégies qui sont directement taillées sur leur compréhension des problèmes individuels. Toutefois, ces stratégies ne perdurent pas longuement, car elles sont tour à tour remplacées par les procédures standard enseignées en classe, alors que les enfants tentent de se conformer à ces algorithmes qui prennent une place importante en classe de mathématiques. On y perd alors toute la richesse mathématique chez l'élève au profit de méthodes standard de résolution (qui dans bien des cas applanissent l'activité mathématique de l'élève à une mécanique).

Anghileri (2001) montre de plus que cette situation est complexe, car sans renier la puissance des algorithmes de calculs, elle explique que ces algorithmes sont en conflit, en distance pour utiliser nos propres mots, avec le développement des aptitudes des élèves en résolution de problèmes. De plus, de la même façon que le souligne l'enseignante plus haut, il y a une question de familiarité des enseignants avec ces algorithmes, contrairement aux algorithmes personnels des élèves taillés en fonction des problèmes abordés. Toutefois, pour Anghileri, si l'intention est de développer des élèves qui peuvent réfléchir mathématiquement, s'adapter et être flexibles face aux situations mathématiques, en plus d'être outillés à communiquer leurs idées, il est important d'encourager l'efficacité des méthodes personnelles des élèves et de ne pas les enfouir sous les procédures standard. Et, en ce sens, elle fait un plaidoyer pour une augmentation du support destiné à aider les élèves à mieux structurer leurs idées et approches mathématiques et façons de faire, plutôt que de les remplacer par des procédures standards.

Cette distance entre élèves et enseignants, ce défi, pointe sur l'intérêt d'une sensibilisation, dans un premier temps, à la variété de l'activité mathématique possible et, dans un deuxième temps, à la présence d'une différence d'expertise entre enseignants et élèves ; tel que ceci s'est produit en séance chez les enseignants. Dans la prochaine section, une discussion est engagée sur l'ouverture et la sensibilisation à l'activité mathématique « différente » à travers une confrontation des perspectives mathématiques.

3.2 Qu'en est-il pour la formation des enseignants ? Une réflexion sur la confrontation des perspectives

Cette situation fait ressortir des enjeux de formation des maîtres en didactique de l'algèbre. La réaction des enseignants sur les automatismes et celles sur la nature des stratégies moins standard, de type arithmétique, souligne ces enjeux de formation. En fait, on peut s'intéresser justement aux commentaires et questionnements des enseignants, ceux-ci étant apparus suite à une certaine « confrontation » de perspectives.

Par exemple, la proposition de stratégies arithmétiques, ou celle axée sur le doublage de l'équation en simplifiant la demie, ont représenté des moteurs importants pour questionner les pratiques de résolution mais aussi d'enseignement des autres enseignants. En ce sens, la nécessité de mettre à plat et d'expliquer en détails le rationnel derrière ces pratiques (par exemple : efficacité de la proportionnalité, nécessité de travailler en colonne pour aider les élèves, recours à la technique de la balance) est survenue en réaction à certaines stratégies et/ou à une demande de clarification de la part des autres enseignants.

Dans ces demandes de clarification, au-delà de l'affirmation des automatismes et façons de faire ancrées dans l'expérience, on sent se mettre en place une certaine sensibilisation, non pas à l'importance de varier ou d'aller vers ces diverses stratégies, mais plutôt à une compréhension personnelle de la présence de ces automatismes et au déclenchement en retour d'une réflexion importante chez l'enseignant sur leurs propres processus de résolution. En résumé, on voit à travers les interactions entre les enseignants la naissance d'une sensibilisation de chacun vis-à-vis sa propre activité mathématique.

Et si des situations de sensibilisation de ce type étaient provoquées dans un cadre de formation des enseignants ? Faisant référence aux façons de faire et outils utilisés par divers professionnels, qui en deviennent des artéfacts de leur pratique, Pozzi, Noss et Hoyles (1998) parlent de situations qui impliquent ce qu'ils appellent des *breakdowns* dans les pratiques habituelles. Ces situations ont beaucoup de potentiel pour permettre d'expliciter le rationnel et de rendre plus visibles les aspects opaques des processus de décision des professionnels, tel qu'ils l'expliquent :

> Tools and artefacts shape activities and thoughts in ways that only become visible at times of breakdowns to routine. In disruption to routine, individuals need to develop a broader interpretative view of the model that underpins their routine practice (Noss, 2002, p. 53)

Dans le cas des enseignants qui nous concernent, ce sont leurs procédures et façons de faire qui deviennent réifiées comme outils et artéfacts de leur pratique, et qui sont fortement automatisées et ancrées dans des routines de fonctionnement, tel que l'explique l'enseignante. Ces situations de *breakdown* ont le potentiel de révéler, de mettre en lumière, l'activité professionnelle de l'enseignant concernant le processus de résolution d'équations en algèbre.

On peut penser, par exemple, à des situations de formation continue où les enseignants doivent comparer leurs méthodes de résolution à des méthodes d'élèves souvent moins conventionnelles quoique tout aussi valides. On peut vouloir provoquer de façon explicite ces situations pour faire avancer les enseignants tant au niveau mathématique que professionnel. Dans ces cas-ci, l'intention n'est pas de confronter l'enseignant avec une soi-disant incapacité ou limite personnelle, mais plutôt de l'aider à se sensibiliser à ses propres façons de faire, aux raisons qui le(s) guident, et à leur donner un sens.

La sensibilisation avec une diversité de façons de résoudre les mêmes équations n'est pas non plus dans le but de « changer » les enseignants, mais bien de les sensibiliser : à leurs propres façons de faire et à d'autres, à divers types d'efficacités mathématiques, à la richesse de façons alternatives de résoudre, etc. Cette sensibilisation peut potentiellement mener à des réflexions sur comment tirer profit de ces différentes façons de résoudre (les leurs, celles des autres) dans leur enseignement. Car, en effet, le cœur du défi de cette distance est pour les enseignants autant au niveau de l'approfondissement de leurs propres compréhensions, que dans la coordination des différentes stratégies des élèves avec les leurs. Par exemple : Comment coordonner la stratégie de recouvrement avec celle de la balance ou celle de multiplier par 2 avec le produit croisé ?

Remarques finales autour de la primauté de l'activité mathématique

Au-delà de la distance et des automatismes dans les procédures, la place accordée à la résolution de problèmes est elle-même matière à réflexion au niveau des défis d'enseignement. À travers les stratégies qu'ils déploient, autant élèves qu'enseignants montrent qu'ils peuvent entrer en activité algébrique (bien que celle-ci ne mène pas toujours directement à la réponse voulue dans le cas des élèves). En bref, autant enseignants qu'élèves font de l'algèbre. Donc, bien qu'il y ait une distance entre les divers pas de résolution et donc stratégies déployées, cette distance n'est pas présente au niveau de l'activité elle-même de résoudre. Les stratégies des élèves ne sont pas toutes « efficaces », mais elles émergent toutes d'une activité mathématique vivante et émergente. Peut-être que le défi de la distance réside aussi dans la prise en compte de cette activité mathématique pour en tirer profit, pour travailler avec et à travers celles-ci (et en même temps, pour explorer activement, à la Borasi (1996), les différentes « erreurs » commises).

Lors de l'enseignement de l'algèbre, on peut penser qu'une trop grande insistance est placée sur l'algèbre elle-même et non pas sur l'activité algébrique et la résolution d'équations. Fait-on une association, voire une fusion, entre la résolution algébrique et l'enseignement de la stratégie pour résoudre cette équation ? Le cas échéant cela résulte en un accent sur le résultat plutôt que sur l'activité elle-même. Une cause du défi est possiblement cette centration sur l'enseignement *de* l'algèbre, sur les choses à savoir et à faire, au lieu de l'être sur l'engagement dans la résolution d'équations algébriques. En faisant ainsi, ne s'éloigne-t-on pas des mathématiques comme résolution de problèmes ou comme activité humaine à la Freudenthal ? N'y a-t-il pas là un certain glissement, méta-didactique (Brousseau, 1998), où le moyen pour résoudre se substitue à l'activité de résoudre ?

Placer la résolution de problèmes au premier plan, se centrer sur l'activité mathématique, et non sur la solution elle-même, peut être conçue comme une façon de provoquer ce rapprochement, de réduire cette distance entre élèves et enseignants, pour revenir l'un vers l'autre et faire ensemble, plutôt que de faire chacun de son côté ou de faire comme on se le fait dicter.

Au final, cette activité de calcul mental apparaît comme un terreau fertile au niveau algébrique, dans lequel on retrouve une panoplie de pas de résolution et de stratégies, de façons de penser l'équation, d'entrer dans sa résolution, de la poser sous forme algébrique, arithmétique, hybride, etc. Le rapprochement, le défi, passe aussi par la façon dont, ensemble, élèves et enseignants prennent avantage de cette richesse et fonctionnent dans ce terrain de jeu : on avance dans les poses et résolutions plutôt que d'enseigner ou se faire enseigner ces poses et résolutions. Tel que le disent Sumara et Davis (1997), c'est une occasion d'y élargir l'espace du possible (algébrique), ce qu'Anghilieri (2001) aborde au niveau de l'activité mathématique elle-même :

> […] it is not the sole purpose in a calculation to find the answer, although this is not always made explicit to children. There is knowledge and understanding to be gained through *doing* calculations that can initiate children into the world of mathematics, revealing the patterns and

> relationships that will empower them to go on to more complex calculations, and that will be the basis for working with more abstract higher mathematics. (Anghileri, 2001, p. 93)

Ainsi, de la même façon que le contexte de calcul mental pour Threlfall (2002) permet de faire émerger des *possibilities for numbers*, ce contexte de calcul mental en algèbre peut être vu comme faisant émerger des « possibilités pour l'algèbre ». Cette variété de résolutions, et sa prise en compte comme activité mathématique, a beaucoup de portée pour l'enseignement de l'algèbre, parce qu'elle offre différentes voies pour la résolution d'équations algébriques et ne les restreint pas : c'est l'activité mathématique en elle-même qui est en jeu. Et, c'est bien cette activité mathématique, sa vivacité comme sa richesse, qui apparaît centrale dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre.

Bibliographie

ANGHILERI, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 79-94). Open University Press : Berkshire, UK.

BORASI, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors*. Ablex: NJ.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

BUTLEN, D., & PEZARD, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Repères IREM*, *41*, 5-24.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage: Grenoble.

DAVIS, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the Learning of Mathematics*, *15*(2), 2-9.

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM n° 15*, 25p.

FILLOY, E., & ROJANO, T. (1989). Solving equations : the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, *3*(3-4), 413-435.

FREUDENTHAL, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Netherlands.

HEWITT, D. (1996). Mathematical fluency: the nature of practice and the role of subordination, *For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 28-35.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge: Cambridge University Press.

MATURANA, H. R. (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65-82) Hudson, NY: Lindisfarne Press.

MATURANA, H. R. (1988a) Ontology of observing: The biological foundations of self-consciousness and the physical domain of existence. In R.E. Donaldson (ed.), Texts in cybernetic theory: An in-depth exploration of the thought of Humberto Maturana, William T. Powers, and Ernst von Glasersfeld. 53 pages. American Society for Cybernetics (ASC) conference workbook.

MATURANA, H. R. (1988b). Reality: The search for objectivity of the quest for a compelling argument. *Irish Journal of Psychology*, *9*(1), 25-82.

MATURANA, H. R., & VARELA, F. J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed.). Boston, MA: Shambhala.

Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ]. (1988). *Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes. Orientation générale.* Fascicule K. Québec : Gouvernement du Québec.

MURPHY, C. (2004). How do children come tu use a taught mental calculation strategy? *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 3-18.

NATHAN, M. J., & KOEDINGER, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(*2*), 168-190.

NOSS, R. (2002). Mathematical epistemologies at work. *Proceedings of PME-26* (vol. 1, pp. 47-63). Norwich, England: PME.

OSANA, H., PROULX, J., ADRIEN, E., & NADEAU, D. (2013). Developing relational thinking in preservice teachers. *Proceedings of PME-NA 35* (pp. 845-848). Chicago, US.

POZZI, S., NOSS, R., & HOYLES, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 105-122.

PROULX, J. (2015). Solving problems and mathematical activity through Gibson's concept of affordances. *Proceedings of PME-39* (vol. 4, pp. 49-56). Hobart, Tasmanie.

PROULX, J. (2013). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *18*, 61-90.

PROULX, J., OSANA, H., NADEAU, D., & ADRIEN, E. (2013). On the emergence of mental mathematics strategies. *Proceedings of PME-NA 35* (p. 328). Chicago, US.

REZAT, S. (2011). Mental calculation strategies for addition and subtraction in the set of rational numbers. *Proceedings of CERME-7* (pp. 396-405). Rseszow, Pologne: CERME.

SIMMT, E. (2000). Mathematics knowing in action: A fully embodied interpretation (PhD dissertation). Edmonton, Canada: University of Alberta.

SUMARA, D. J., & DAVIS, B. (1997). Enlarging the space of the possible: Complexity, complicity, and action-research practices. In T. R. Carson & D. J. Sumara (Eds.), *Action research as a living practice* (pp. 299-312). New York: Peter Lang.

THRELFALL, J. (2002). Flexible mental calculations. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47

THRELFALL, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*, 541-555.

VARELA, F. J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives* (P. Lavoie, Trans.) Paris: Éditions du Seuil.

VARELA, F. J. (1999). *Ethical Know-how*. Stanford: Stanford University Press.

VARELA, F. J., THOMPSON, E., & ROSCH, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

JEROME PROULX
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case Postale 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, Qc
H3C 3P8 Canada
proulx.jerome@uqam.ca

MARIE-LINE L.LAMARCHE
lavallee-lamarche.marie-line@courrier.uqam.ca

KARL-PHILIPPE TREMBLAY
tremblay.karl-philippe@courrier.uqam.ca

ASSIA NECHACHE

LA CATEGORISATION DES TACHES ET DU TRAVAILLEUR-SUJET : UN OUTIL METHODOLOGIQUE POUR L'ETUDE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS LE DOMAINE DES PROBABILITES

Abstract. The categorization of tasks and the worker-subject: a methodological tool for the study of mathematical work in the probability field This article focuses on the study of the mathematical work produced after the resolution of probabilistic tasks as well as the students' role in the elaboration of this mathematical work. This led us to categorize mathematical tasks (simple, standard, rich) according to their level of epistemological and cognitive demand. This categorization is associated with students' learning in the form of a worker-subject (jobber, technician, engineer). Using this categorization and the Mathematical Working Space (MWS) model, we analyzed the implementation of a probabilistic task in two tenth grade classes. This analysis of the two class sessions allowed us to characterize the transformations of the nature of the tasks by the teachers during its implementation. These transformations generate a decrease in the level of cognitive demand of the task and also in the students' role in solving the task.

Résumé. Le propos de cet article se centre sur l'étude du travail mathématique produit à l'issue de la résolution de tâches probabilistes et sur le rôle des élèves dans l'élaboration de ce travail mathématique. Cela nous a conduit à catégoriser les tâches mathématiques (simple, standard, riche) en fonction de leur niveau d'exigence épistémologique et cognitive. Cette catégorisation est associée aux apprentissages des élèves sous la forme d'un travailleur-sujet (tâcheron, technicien, ingénieur). À l'aide de cette catégorisation et du modèle des Espaces de Travail Mathématique, nous avons analysé la mise en œuvre d'une tâche probabiliste dans deux classes de seconde. Cette analyse de ces deux séances de classes nous a permis de caractériser des transformations de la nature de la tâche par les professeurs lors de sa mise en œuvre. Ces transformations génèrent la baisse du niveau d'exigence cognitive de la tâche et la réduction du rôle des élèves dans la résolution de la tâche.

Mots-clés. Catégorisation des tâches, travailleur-sujet, travail mathématique, probabilités, niveau d'exigence de la tâche, Espace de Travail Mathématique (ETM)

Introduction

En France, l'enseignement du domaine des probabilités débutait en classe de troisième[1]. À ce niveau de classe, « *la notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante* » (MENCOL 3^{e}, 2008, page 34). La notion de probabilité est introduite sous une double approche, laplacienne

[1] Depuis le 1er septembre 2016, le domaine des probabilités est introduit dès la classe de cinquième (grade 7).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 67 - 90.

et fréquentiste. Dans l'approche laplacienne, la probabilité d'un événement est définie « *à partir de consédirations de symétrie ou de comparaison* » (RESCOL-PROB, 2008, page 3). La probabilité d'un événement (sous l'hypothèse d'équiprobabilité) est donc le « *quotient du nombre d'issues favorables par le nombre total d'issues possibles* » (Ibid., page 4). Du point de vue de l'approche fréquentiste, la notion de probabilité est introduite « *à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes)* (MENCOL 3e, 2008, page 34). La probabilité est donc définie comme la « *fréquence limite* » (RESCOL-PROB, 2008, page 4) à partir d'expérimentations et d'études de fréquences des issues dans différentes situations liées à la vie courante.

L'introduction des nouveaux outils performants, tels que l'ordinateur ou la calculatrice, favorise l'initiation des élèves à la question de la modélisation du réel *via* la simulation d'expériences aléatoires (Parzysz, 2011). Proposer des situations probabilistes faisant appel à la modélisation accroît les possibilités de donner du sens aux connaissances enseignées. Le travail mathématique lié à la résolution des tâches probabilistes suppose donc une nouvelle démarche et des raisonnements différents des autres branches des mathématiques puisqu'ils accordent une place importante à la modélisation et à l'expérimentation.

Dans le cadre de cet article, nous étudierons le travail mathématique effectivement produit à l'issue de la mise en œuvre des tâches probabilistes dans les classes au niveau secondaire. Cette étude s'effectue à travers l'analyse de la mise en œuvre des tâches par les professeurs dans leurs classes. Des travaux montrent que la gestion par les professeurs de la mise en œuvre des tâches dans les classes est différente d'un professeur à un autre (Stein et al., 2007). Cela suppose-t-il que le travail mathématique produit à l'issue de la réalisation de ces tâches est également différent d'un professeur à un autre ? Dans notre travail de thèse (Nechache, 2016), nous avons constaté que dans le domaine de la géométrie, la gestion de la mise en œuvre des tâches est bien différente selon les professeurs alors que le travail mathématique effectivement produit à l'issue de la réalisation de ces tâches est similaire. Qu'en est-il alors du travail mathématique effectivement produit dans le domaine des probabilités ? Est-il différent ? Si oui, sur quoi portent ces différences ?

L'étude du travail mathématique s'effectue également par l'identification du rôle attribué aux élèves dans l'élaboration de ce travail. En effet, dans la classe, l'élaboration du travail mathématique s'appuie sur les interactions produites entre les élèves et le professeur lors de la mise en œuvre des tâches. Cela suppose que les élèves ont un rôle dans l'élaboration de ce travail mathématique. Son identification s'effectue à travers les activités des élèves lors de la résolution des tâches. Cela implique de caractériser le type de travail fourni par les élèves lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de ces tâches.

Ces questions autour du travail de mathématique effectivement produit lors de la résolution des tâches probabilistes nous ont conduit à construire une catégorisation des tâches et du travailleur-sujet traitant ces tâches. Cette catégorisation constitue pour nous un outil méthodologique pour analyser le travail mathématique produit à l'issue de la résolution des tâches probabilistes.

Dans cet article, nous commençons par préciser notre cadre théorique et nos questions de recherche (section 1). Nous expliciterons ensuite notre catégorisation de tâches et du travailleur-sujet (section 2). Enfin, nous présenterons un exemple d'une tâche probabiliste (section 3) illustrant notre étude du travail mathématique mis en œuvre et privilégié par deux professeurs dans deux classes de même niveau. L'étude de cet exemple de tâche nous permet aussi d'analyser le rôle donné aux élèves par les professeurs dans l'élaboration du travail mathématique.

1. Cadre théorique et questions de recherche

Dans cette section, nous présenterons tout d'abord (§ 1.1.) le modèle des Espaces de Travail Mathématique utilisé pour analyser le travail mathématique produit lors de la résolution des tâches probabilistes. Ensuite, nous expliciterons (§ 1.2.) nos questions de recherche.

1.1. Espace de travail mathématique

L'étude du travail mathématique produit lors de la résolution de tâches probabilistes au niveau secondaire a été étudiée sous l'angle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2016), notés ETM. Tel qu'il a été défini, le modèle des ETM a pour objectif de décrire et d'analyser la nature du travail mathématique attendu dans une institution scolaire donnée. Au sein de ce modèle, il existe une forte articulation entre les plans épistémologique et cognitif :

- Le *plan épistémologique* est composé de trois pôles : representamen, artefact et référentiel théorique. Il permet de structurer le contenu mathématique.
- Le *plan cognitif* est composé de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant l'activité de résolution d'une tâche.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- La *genèse sémiotique* donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- La *genèse instrumentale* a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- La *genèse discursive* permet de donner sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les plans épistémologique et cognitif en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans. L'étude des trois genèses passe par l'identification des dimensions associées (sémiotique, instrumentale, discursive). L'analyse de ces dimensions

rend compte du développement du travail mathématique élaboré dans l'Espace de Travail Mathématique.
Cet ensemble de relation peut être visualisé grâce au diagramme suivant :

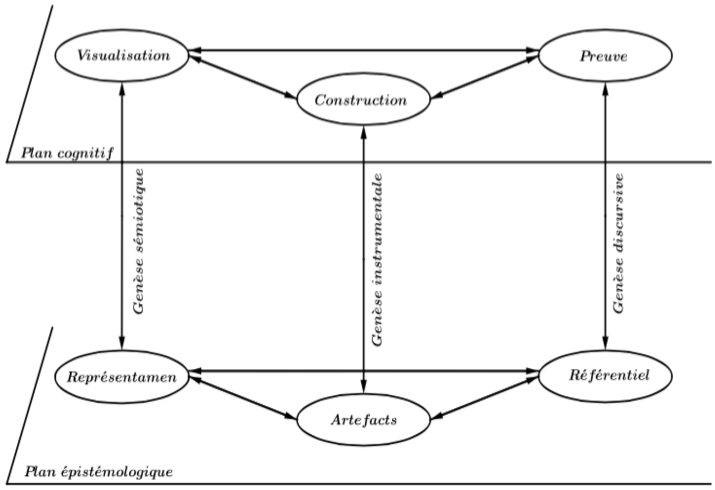
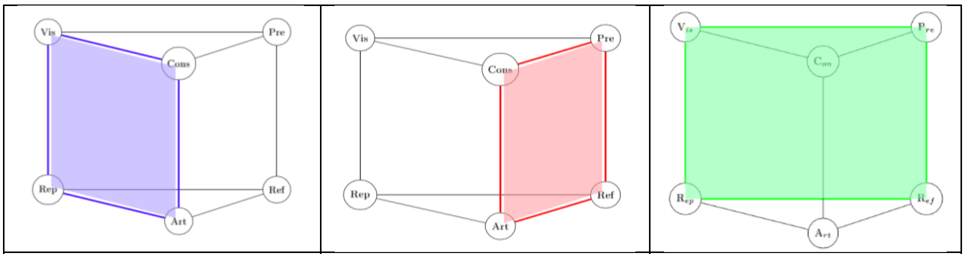


Figure 1 : Diagramme de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011).

1.1.1. Interaction et articulation des genèses

Le diagramme de la Figure 1 fait apparaître un certain nombre de plans verticaux qui rendent compte des connexions entre les trois genèses et de la circulation du travail mathématique au sein de l'ETM. Ces trois plans peuvent être décrits à partir des genèses qu'ils mettent en œuvre : sémiotique-instrumentale ([Sem-Ins]), instrumentale-discursive ([Ins-Dis]) et semiotique-discursive ([Sem-Dis]).



[Sem-Ins]	[Ins-Dis]	[Sem-Dis]

Figure 2 : Les trois plans verticaux de l'ETM (Kuzniak et Nechache, 2014)

L'analyse du travail mathématique à partir de ces trois plans verticaux permet d'identifier la manière dont les trois dimensions (sémiotique, instrumentale, discursive) interagissent afin de constituer un travail mathématique complet (Kuzniak et Nechache, 2014).

Pour comprendre la nature et la circulation du travail mathématique à travers les plans verticaux de l'ETM, il est nécessaire d'examiner le rôle des outils *sémiotique, technologique, théorique* du plan épistémologique (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) associés à chacune des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Il est également important d'examiner la manière dont un sujet utilise et transforme ces outils en des instruments *sémiotique, technologique, théorique* du plan cognitif (Ibid ., 2016).

1.1.2. Différents type d'Espace de Travail Mathématique

Il existe trois types d'Espace de Travail Mathématique permettant de décrire le travail mathématique dans le cadre scolaire. Ils sont respectivement qualifiés d'ETM de *référence, idoine* et *personnel* (Kuzniak et al., 2016, page 729 ou Kuzniak, 2010, page 79). Dans le cadre de cet article, nous avons choisi de nous polariser particulièrement sur les ETM idoines.
Le contenu mathématique à enseigner est défini par une institution et est décrit dans les ETM de *référence*. Ces ETM doivent par la suite être adaptés et aménagés par les professeurs en des ETM qualifiés d'ETM *idoines* afin de permettre la mise en place effective de l'enseignement de ce contenu dans les classes. La conception de ces ETM *idoines* dépend de l'institution mais également du professeur chargé de la mise en œuvre de ces espaces dans la classe.
En outre, la réussite de l'enseignement d'un contenu dépend naturellement du professeur mais aussi de l'élève. Un ETM *idoine* est donc un environnement organisé de telle manière qu'un élève s'engage dans la résolution de problème. Cet ETM *idoine* doit permettre à la fois un travail dans le paradigme correspondant à la problématique visée et ses différentes composantes doivent être organisées de manière valide.
On distingue deux types d'ETM *idoines* : potentiel et effectif. L'ETM *idoine potentiel* est celui qui est construit au préalable pour être mis en place dans les classes. Il s'agit par exemple des ETM *idoines* construits par les auteurs des documents ressources ou des manuels scolaires mais aussi ceux construits par les professeurs pour leurs classes. Les ETM *idoines effectifs* sont les ETM *idoines* potentiels effectivement mis en place dans les classes par les professeurs.

1.2. Questions de recherche

Notre objectif est d'étudier le travail mathématique effectivement produit lors de l'exécution des tâches probabilistes en classe. Il s'agit d'étudier la mise en œuvre de ces tâches dans des ETM probabilistes (noté $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$) idoines. Les deux questions principales guidant cette étude sont les suivantes :

1°) Quel travail mathématique est effectivement produit autour d'une même tâche probabiliste dans le cadre des interactions entre les élèves et le professeur dans les différents $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ idoines de même niveau de classe ?

2°) Quel rôle est attribué aux élèves dans l'élaboration du travail mathématique autour de cette tâche probabiliste ?

L'étude du travail mathématique autour d'une même tâche probabiliste s'effectuera par l'analyse de la circulation du travail mathématique dans l'$\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ et par l'identification du rôle attribué aux élèves dans l'élaboration de ce travail. Or la nature du travail mathématique dépend du degré d'exigence des tâches. Il est donc nécessaire de les catégoriser en déterminant le rôle attribué aux élèves sous la forme d'un travailleur-sujet.

2. Catégorisation des tâches et du « travailleur-sujet»

Dans cette section, nous définissons d'abord (§ 2.1.) la notion de tâche mathématique dans le modèle de l'Espace de Travail Mathématique. Ensuite, nous exposons (§ 2.2.) la catégorisation des tâches que nous avons établie pour analyser les tâches probabilistes. Enfin, nous présentons (§ 2.3.) la catgéorisation du travailleur-sujet associée à la catégorisation des tâches.

2.1. Tâche mathématique et travailleur-sujet

Dans son article sur les tâches de problématisation, Sierpinska (2004) procède à une revue exhaustive de la notion de tâche mathématique dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques. Sierpinska retient alors la définition suivante de la tâche mathématique : « *dans un sens large, pour se référer à n'importe quel type de problèmes mathématiques, dont les hypothèses et les questions sont clairement formulées, et dont on sait que les élèves peuvent les résoudre dans un temps que l'on peut prévoir* »[2] (Sierpinska, 2004, p. 10).

En adaptant la définition de Sierpinska au modèle des Espaces de Travail Mathématique, la tâche mathématique est pour nous tout exercice, question ou problème réalisé dans un temps limité et dans un contexte donné. Les conditions de réalisation de ce travail mathématique sont définies par l'Espace de Travail Mathématique dans lequel la tâche est proposée.

Selon Stein et Smith (1998), l'entraînement des élèves à penser de façon mathématique est cultivé par les tâches mathématiques que les élèves rencontrent. Confronter les élèves à diverses tâches leur permet non seulement d'utiliser leurs connaissances, mais aussi de développer des compétences et de construire des concepts mathématiques. L'apprentissage des concepts mathématiques s'appuie sur les tâches mathématiques que les élèves rencontrent. La mise en œuvre de ces tâches par des professeurs dans les classes induit les élèves à endosser un rôle que nous avons qualifié de « travailleur-sujet » dans l'élaboration du travail mathématique de ces tâches.

2.2. Trois catégories de tâches

L'étude du travail mathématique produit lors de l'exécution des tâches nécessite d'analyser les tâches mises en œuvre dans les ETM idoines. Cette analyse doit prendre en compte selon nous les exigences épistémologiques liées à la conception de la tâche. La résolution de cette dernière est réalisée par des sujets et son analyse tient donc également compte des exigences cognitives liées à sa réalisation. Par conséquent, l'analyse d'une tâche est associée aux aspects épistémologique pour sa conception et cognitif pour sa réalisation par un sujet. Le modèle des Espaces de Travail Mathématique permet de mettre en relation ces aspects et nous conduit à effectuer l'analyse d'une tâche selon deux points de vue :

- Du point de vue épistémologique, cette analyse prend en compte les outils sémiotiques, technologiques et théoriques disponibles dans l'ETM pour

[2] Notre traduction.

résoudre la tâche. Nous pourrions également utiliser, pour cette analyse, les outils de praxéologie (Bosch et Chevallard, 1999) pour déterminer les différentes techniques utilisées et les technologies de références justifiant ces techniques.

- Du point de vue cognitif, l'analyse de la tâche permet de rendre compte de la manière dont le sujet interagit avec les outils (sémiotiques, technologiques, théoriques) et les transforme en instruments (sémiotiques, technologiques, théoriques) pour résoudre la tâche. Cette analyse s'appuie sur l'identification des *demandes cognitives* (Stein et Smith, 1998) nécessaires pour effectuer la tâche et des différentes *adaptations des connaissances* (Robert, 2007) que le sujet doit réaliser.

L'analyse d'une tâche à travers le modèle des ETM nous permet de rendre compte à la fois des exigences épistémologiques de la tâche prescrite et des exigences cognitives pour résoudre la tâche. Les exigences épistémologiques et cognitives d'une tâche définissent, selon nous, le niveau d'exigence d'une tâche. La catégorisation des tâches en fonction de leur niveau d'exigence devient nécessaire pour les analyser afin de caractériser le travail mathématique produit. Pour construire ces catégories, nous nous sommes inspirés des travaux de Stein et Smith (1998), White et Mesa (2014) et Robert (2007).

Stein et Smith (1998) proposent une catégorisation des tâches fondée sur le niveau des *demandes cognitives* des tâches mathématiques : des tâches à faible niveau d'exigences cognitives et des tâches à haut niveau d'exigences cognitives.

White et Mesa (2014) propose une catégorisation fondée sur *l'orientation cognitive* des tâches, autrement dit sur les exigences cognitives potentielles de ces tâches. Elles distinguent trois catégories de tâches selon les connaissances mises en jeu et le niveau du processus cognitif : *mémorisation, application, compréhension, analyse ou création* (White et Mesa, 2014, p. 7).

Robert (2007) propose une catégorisation fondée sur *les adaptations des connaissances* que le sujet doit effectuer pour résoudre les tâches. Ces connaissances « *peuvent être anciennes ou en cours d'acquisition* » (Robert, 2007, p. 309) et sont soit *mobilisables* (lorsqu'elles sont indiquées dans l'énoncé), soit *disponibles* (dans le cas contraire).

À partir de ces travaux, nous avons développé une catégorisation des tâches dans le modèle des ETM. Une catégorisation fondée sur le niveau d'exigence des tâches.

2.1.1 Tâches simples

Ce sont des tâches à faible niveau d'exigence. Leur résolution nécessite l'usage des procédures « simples » qui font appel aux connaissances déjà mémorisées et aux techniques de résolution connues. Ces connaissances et ces techniques sont indiquées dans l'énoncé de la tâche et font partie de l'ETM idoine et de l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches mobilise des outils soit sémiotiques, soit technologiques, soit théoriques et ne nécessite pas d'interaction entre les trois dimensions de l'ETM. Cela entraîne un travail mathématique souvent confiné dans l'une des trois dimensions.

Les tâches simples ont pour but de réinvestir et de mettre en œuvre les connaissances et les techniques déjà étudiées et assimilées.

2.1.2 Tâches standards

Ce sont des tâches à un niveau d'exigence moyen. Leur résolution nécessite d'identifier et d'appliquer des connaissances ou des techniques utiles. Ces connaissances et ces techniques ne sont pas indiquées dans l'énoncé de la tâche mais elles sont disponibles dans l'ETM idoine et l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches nécessite les interactions entre les différentes dimensions de l'ETM et la mobilisation d'au moins deux outils (sémiotique, technologique, théorique). Cela entraîne un travail mathématique souvent élaboré dans au moins un des trois plans de l'ETM.

Ces tâches nécessitent éventuellement d'enchaîner et de mettre en lien plusieurs procédures.

2.1.3 Tâches riches

Ce sont des tâches à haut niveau d'exigence. Leur résolution fait appel à des connaissances et à des techniques de résolution qui ne sont pas nécessairement apprises et qui ne sont pas disponibles dans l'ETM idoine et l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches requiert la mobilisation de l'ensemble des outils (sémiotique, technologique et théorique) et l'interaction entre les différents plans verticaux de l'ETM. Cela permet de développer un travail mathématique complet (Kuzniak et Nechache, 2014). La résolution de ces tâches peut recourir au changement de domaines mathématiques (Montoya et Vivier, 2014), de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) et à la modélisation, à la charge du sujet.
Ces tâches visent à développer l'esprit critique et le raisonnement. Ces tâches supposent une prise d'initiative plus grande.

Selon les catégories de tâche, la résolution des tâches par un sujet génère différentes activités lui permettant d'appliquer ou de comprendre des notions mathématiques, d'établir des liens entre les notions mathématiques et d'approfondir des connaissances mathématiques. La réalisation de ces tâches suivant leurs catégories entraîne un développement des formes particulières du travail du sujet. Ainsi à chacune des trois catégories de tâches est associée une catégorie de travailleur-sujet.

2.2 Trois catégories de travailleur-sujet

La catégorisation des tâches mathématiques dans le modèle de l'ETM selon leur niveau d'exigence nous induit à distinguer trois catégories du travailleur-sujet qui exécute ces tâches. En effet, un travailleur qui effectue une tâche simple ne fournit pas les mêmes efforts et le même travail que celui qui effectue une tâche standard; de même pour le travailleur qui réalise une tâche standard et celui qui réalise une tâche riche. Un sujet qui est confiné constamment dans l'une des trois catégories de tâches mathématiques acquiert une identité de travailleur-sujet. Le travail mathématique du sujet au sein de l'ETM dépend fortement de la catégorie des tâches effectuées. Ainsi à chacune des trois catégories de tâches, nous associons une catégorie de travailleur-sujet particulière :

2.2.1 Tâcheron

Dans le cas d'exécution de tâches simples, où il s'agit d'appliquer des techniques connues, le travailleur endosse le rôle du travailleur « tâcheron » ;

2.2.2 Technicien

Dans le cas d'exécution de tâches standards, où il s'agit de reconnaître la (ou les) technique(s) disponible(s) dans l'espace de travail mathématique adéquat pour effectuer la tâche, le travailleur endosse le rôle du travailleur « technicien » ;

2.2.3 Ingénieur

Dans le cas d'exécution de tâches riches, où il ne suffit pas de reconnaître une technique mais plutôt plusieurs techniques disponibles ou non dans l'espace de travail. Lorsqu'elles ne sont pas disponibles, le travail du sujet est de créer la technique pour pouvoir effectuer la tâche. Dans ce cas, le travailleur endosse le rôle du travailleur « ingénieur ».

Dans cette étude, et c'est une de ses originalités, nous avons défini trois catégories de tâches mathématiques et nous avons associé à chacune d'elle une catégorie homologue de travailleur-sujet qui rend compte de la forme de travail produite par un sujet. Cette double catégorisation constitue un outil méthodologique pour étudier et identifier le travail mathématique produit lors de la mise en œuvre des tâches dans les ETM idoines.

3. L'étude du travail mathématique à travers les catégories de tâches et du travailleur-sujet.

Pour étudier le travail mathématique à travers les catégories de tâches et du travailleur-sujet, nous avons sélectionné quatre tâches probabilistes. Ces tâches sont extraites des documents ressources de différents niveaux de classe (3^e, 2^{nde}, 1^{re} S, Terminale S). Nous avons proposé à cinq professeurs de mettre en œuvre ces tâches dans leur classe. Les mises en œuvre des tâches dans les classes ont été filmées et transcrites. Les données recueillies ont été analysées avec le modèle des ETM utilisé comme outil méthodologique (Nechache, 2016).

Dans cette section, nous avons choisi de présenter une des quatre tâches probabilistes et sa mise en œuvre par deux professeurs en classe de seconde (les transcriptions des deux séances sont proposées en annexes 1 et 2). Ceci nous permet d'illustrer l'usage des catégories de tâches et du travailleur-sujet pour étudier le travail mathématique produit lors de la mise en œuvre d'une même tâche probabiliste dans des ETM_{PROBA} idoines différents et pour identifier le rôle des élèves dans l'élaboration de ce travail mathématique.

La tâche choisie intitulée « la politique nataliste » est présentée ci-dessous. Elle est extraite des documents ressources de la classe de 1re S (2010) et ceux de la classe de 2nde (2002) :

> *Pour limiter le nombre de filles dans un pays imaginaire, on décide que :*
> *a) chaque famille aura au maximum 4 enfants;*
> *b) chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.*
> *On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents.*
> *Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?*

Nous proposons ensuite d'analyser brièvement cette tâche dans l'ETM_{PROBA} idoine potentiel afin de décrire le travail mathématique produit *a priori* à l'issue de l'exécution de la tâche et d'identifier le rôle *a priori* des élèves dans l'élaboration de ce travail. Par la suite, nous analyserons la mise en œuvre de cette tâche dans deux ETM_{PROBA} idoines effectifs afin d'examiner le travail mathématique privilégié par les professeurs.

L'analyse détaillée de cette tâche dans l'ETM_{PROBA} idoine potentiel et dans quatre ETM_{PROBA} idoines effectifs (niveau 2nde et 1er S) est présentée dans notre travail de thèse (Nechache, 2016).

3.1 Analyse de la tâche dans l'ETM_{PROBA} idoine potentiel

L'expérience aléatoire décrite dans cette tâche consiste à observer une succession de naissances dans une famille au sein d'une population donnée. Si à la première naissance un garçon naît, la famille arrête de procréer. Sinon, elle continue à procréer jusqu'à la naissance d'un garçon ou jusqu'à quatre enfants maximum. On a donc une expérience aléatoire de une à quatre épreuves maximum.

L'énoncé de la tâche décrit une expérience aléatoire avec deux informations :

1- « Chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille » traduit l'hypothèse d'équiprobabilité d'un garçon et d'une fille.

2- « Le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents » traduit l'hypothèse de l'indépendance des naissances.

3.1.1 Résolution de la tâche

Plusieurs méthodes sont possibles pour traiter cette tâche :

- **Méthode 1** : Usage de variables aléatoires et de la loi de probabilité associée à celles-ci.

  L'expérience aléatoire, telle qu'elle est décrite dans cette tâche, consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre p (la probabilité d'avoir un garçon) avec au maximum quatre répétitions ($n \leq 4$) et arrêt du processus au premier succès. On définit Y comme la variable aléatoire qui représente le rang du 1er succès tel que :

  $Y = 0$ s'il n'y aucun succès

  $Y = k$ avec $1 \leq k \leq 4$ si le premier succès est obtenu à l'étape k.

La loi de probabilité de *Y* est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
P(Y=k)	1/16	1/2	1/4	1/8	1/16

On considère une deuxième variable aléatoire *X* qui prend la valeur 0 s'il y a eu un garçon et 1 s'il n'y a pas eu de garçon. Alors :

- $P(X=0) = P(Y = 0) = (1\text{-}1/2)^4 = 1/16$

- $P(X = 0) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) = 15/16$
- L'espérance de la variable aléatoire *X* est $E(X) = 15/16$

En considérant une troisième variable aléatoire *N* qui prend comme valeurs le nombre d'enfants nés dans une famille, alors l'espérance de *N* est $E(N) = 15/8$. D'où $E(X)/E(N) = 1/2$. On conclut que cette politique nataliste n'a aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

Le traitement de la tâche à l'aide de cette méthode requiert l'identification des outils théoriques telles que les variables aléatoires, la loi de probabilité et l'espérance mathématique. Il sollicite également l'usage d'outils technologiques pour déterminer la loi de probabilité associée à une variable aléatoire et pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire. Ces outils ne sont pas indiqués dans l'énoncé de la tâche. La résolution de cette tâche nécessite des interactions entre les dimensions discursive et instrumentale. Le travail mathématique produit à l'issue de la résolution de cette tâche est ainsi construit dans le plan [Ins-Dis].

- **Méthode 2 :** Usage d'un arbre pondéré et d'un tableau de dénombrement.

On note G l'événement « l'enfant né est un garçon » et l'événement
F : « l'enfant né est une fille ».
Les probabilités des événements G et F sont égales à $\frac{1}{2}$. On a alors l'arbre pondéré « asymétrique » ci-dessous représentant les différentes sortes de familles ayant un à quatre enfants:

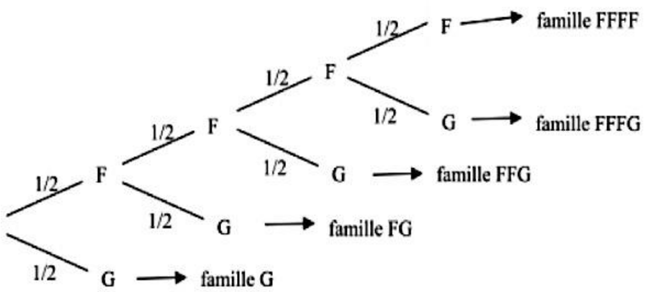


Figure 3 : Arbre pondéré décrivant les issues de l'expérience aléatoire

On peut évaluer le résultat cherché, en présentant les calculs sous la forme d'un tableau de dénombrement en considérant par exemple 16 familles :

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d'enfants	Nombre de garçons	
G	8	8	8	
FG	4	8	4	
FFG	2	6	2	
FFFG	1	4	1	
FFFF	1	4	0	
	16	30	15	Total

Tableau 1 : Le nombre de garçons pour 16 familles

Sur 30 enfants, il y a autant de garçons que de filles dans cette population de 16 familles. La politique nataliste n'a donc aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

Le traitement de la tâche à l'aide de cette méthode nécessite l'usage de l'arbre pondéré « asymétrique » comme outil sémiotique pour représenter l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé de la tâche et pour décrire les issues de cette expérience aléatoire et comme un outil technologique pour calculer la probabilité de chacune des issues. L'élaboration du travail mathématique est donc initié dans le plan [Sem-Ins]. L'usage d'un tableau de dénombrement comme un outil théorique permet de communiquer et de justifier la solution. Cela implique que le travail mathématique est initié dans le plan [Sem-Ins] puis basculé dans le plan [Ins-Dis].

- Méthode 3 : Usage d'une simulation informatique.

La simulation informatique de l'expérience aléatoire peut s'effectuer à l'aide du générateur pseudo aléatoire ALEA() du tableur (logiciel Excel) ou avec celui de la calculatrice (fonction Random). Nous choisissons par exemple une simulation informatique à l'aide de la fonction ALEA().
La conception et la mise en œuvre de cette simulation nécessite plusieurs étapes. Tout d'abord, traduire les deux informations données dans l'énoncé dans le langage de tableur et à l'aide de la fonction ALEA(). Ensuite, en considérant un échantillon de taille donnée (par exemple 1000), on simule l'expérience (1000 fois) et on calcule la fréquence d'apparition de l'événement G (qui est égale à environ 0,5) dans l'échantillon considéré. Enfin, à l'aide de la loi des grands nombres, on conclut que 0,5 est une valeur estimée de la probabilité de l'événement G.
La résolution de la tâche à l'aide de cette méthode implique dans un premier temps la construction d'une simulation informatique. Cette dernière mobilise des outils technologiques tels que le tableur et la fonction ALEA(). Dans un second temps, l'estimation de la probabilité de l'événement G à partir des résultats fournis par la simulation suggère l'usage de l'outil théorique de la loi des grands nombres afin de justifier la solution attendue. Ainsi, le travail mathématique élaboré dans cette méthode pour répondre à la tâche est produit au sein du plan [Ins-Dis].

3.1.2 Caractérisation a priori du travail mathématique et du rôle attribué à l'élève

Le traitement de la tâche par la méthode 1 mobilise des outils théoriques technologiques disponibles dans les ETM idoines et personnels des élèves, à partir de la classe de 1re. Cette méthode ne peut donc pas être envisagée en classe de 2nde. En revanche, le traitement de la tâche *via* les deux autres méthodes est envisageable à ce niveau de classe. On peut néanmoins souligner certaines difficultés des élèves liées à l'usage des méthodes 2 et 3. Dans la méthode 2, la difficulté est liée à l'arbre pondéré « asymétrique », méconnu des élèves de 2nde. Dans la méthode 3, la difficulté pour des élèves de 2nde est liée principalement à la construction de la simulation nécessitant un « savoir faire technique ». Nous considérons ainsi, que cette tâche probabiliste relève de la catégorie des tâches riches lorsque celle-ci est prescrite à des élèves de 2nde. Dans ce cas, les élèves ont *a priori* un rôle de travailleur-ingénieur. En revanche, l'usage des trois méthodes explicitées précédemment dans la classe de 1re est envisageable puisque ces trois méthodes font partie de l'ETM de référence, idoine et personnel de l'élève à ce niveau de classe. Dans ce cas, la tâche relève de la catégorie des tâches standards et les élèves ont *a priori* un rôle de travailleur-technicien dans la résolution de cette tâche.

Nous avons donc *a priori* trois sortes de travail mathématique qui peuvent potentiellement être produits dans les $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ idoines. Ces trois sortes de travail mathématique impliquent des rôles *a priori* différents attribués aux élèves.

Dans la suite, nous proposons d'analyser deux exemples de mise en œuvre de cette tâche probabiliste dans deux classes de 2nde.

3.2 Etude de la mise en œuvre de la tâche dans deux $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ idoines de deux classes de 2nde

Les deux classes de 2nde sont respectivement notées : 2nde A et 2nde B. Les deux extraits de discussion entre les élèves et les deux professeurs sont proposés en annexes 1 et 2.

3.2.1 Dans l' $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ de la classe de 2nde A (professeur A)

Les élèves ont disposé d'environ 40 minutes pour résoudre la tâche. Un élève est désigné par le professeur pour exposer sa procédure. L'élève construit alors l'arbre des possibles décrivant l'expérience aléatoire et écrit les cinq issues de l'expérience aléatoire (cinq sortes de familles ayant un à quatre enfants) :

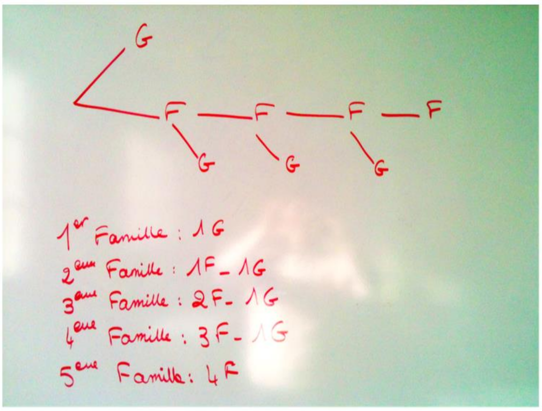


Figure 4 : La procédure du premier élève[3]

Un deuxième élève est invité à présenter au tableau son raisonnement (voir les lignes 5 à 14 de la transcription de la séance dans l'annexe 1). Il propose de considérer un échantillon de 100 familles. En utilisant l'arbre des possibles construit par le premier élève, il comptabilise le nombre de famille ayant un garçon, ou une fille et un garçon, …, ou 4 filles. Il obtient alors 50 familles ayant un garçon, 25 familles ayant un garçon et une fille, « 12,5 » familles ayant un garçon et deux filles, « 6,25 » familles ayant un garçon et trois filles, et « 6,25 » familles ayant quatre filles. Le raisonnement de cet élève n'a pu aboutir au résultat cherché, faute de temps. En effet, le professeur A a décidé de mettre fin à la correction et a conclu que « *la politique nataliste n'est pas efficace* ».

Le raisonnement établi par ce deuxième élève est similaire à celui que nous avons décrit dans la méthode 2 (Voir § 3.1.1.). En reprenant le raisonnement de cet élève, avec l'échantillon de 100 familles, on en déduit le tableau suivant :

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d'enfants	Nombre de garçons	
G	50	50	50	
FG	25	50	25	
FFG	12,5	37,5	12,5	
FFFG	6,25	25	6,25	
FFFF	6,25	25	0	
	100	187,5	93,75	Total

Tableau 2 : Le nombre de garçons pour 100 familles

Sur 187,5 enfants, on a donc autant de garçons que de filles dans cette population de 100 familles. La politique nataliste n'a de fait aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée. Ainsi, le raisonnement du deuxième élève aurait pu aboutir à la solution attendue. Cependant, le choix de la taille de l'échantillon n'est pas judicieux puisque avec un échantillon de taille 100, on obtient 6,25 familles, ce qui n'est pas possible dans la réalité.

[3] La procédure présentée par le premier élève a été constatée chez les autres élèves de la classe de 2nde A.

Bien que le professeur A ait rapidement conclu sur l'influence de la politique nataliste, il a néanmoins laissé les élèves chercher la réponse de la tâche pendant 40 minutes. Les élèves ont proposé un raisonnement à l'aide de l'outil sémiotique l'arbre des possibles pour représenter l'expérience aléatoire et décrire les issues de l'expérience aléatoire (voir la procédure de l'élève 1). Cet outil sémiotique est alors utilisé comme outil technologique pour comptabiliser le nombre de familles ayant un à quatre enfants (voir la procédure de l'élève 2). Il en résulte que le travail mathématique mis en œuvre pour résoudre la tâche a été construit au sein du plan [Sem-Ins]. Comme nous l'avons souligné auparavant, le raisonnement mis en place pour répondre à la tâche n'a pas pu aboutir au résultat attendu faute de temps. Cela entraine que le travail mathématique reste bloqué dans le plan [Sem-Ins] au lieu de basculer dans le plan[Ins-Dis] pour ainsi communiquer et justifier la solution.

Dans cet ETM_{PROBA} de la classe de 2^{nde} A, on constate que le travail mathématique construit pour répondre à la tâche est pris en charge par les élèves. Le professeur A a donc attribué à ses élèves, tel que nous l'avons prévu, le rôle d'ingénieur. Un rôle qu'ils ont conservé tout au long de la séance. Précisons néanmoins que l'intervention du professeur à la fin de la séance a empêché les élèves de terminer la résolution de la tâche.

3.2.2. Dans l'ETM_{PROBA} de la classe de 2^{nde} B (professeur B)

Après la lecture de l'énoncé de la tâche, le professeur laisse 10 minutes aux élèves pour chercher une réponse. Des élèves sont sollicités pour proposer leurs raisonnements. Aucun raisonnement ne semble correct. D'autres élèves proposent l'usage d'un arbre des possibles, mais le professeur B a rapidement rejeté cette proposition en affirmant que « *l'arbre des possibles ne permet pas de modéliser cette expérience*». Le professeur B propose directement de réaliser une simulation de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé en utilisant la fonction Random (fonction qui fournit un nombre au hasard compris entre 0 et 1) de la calculatrice (voir les lignes 28 à 37 de la transcription de la séance dans l'annexe 2) . Le professeur dicte toutes les étapes nécessaires pour réaliser la simulation :

Étape 1 : Faire afficher un nombre compris entre 0 et 1 sur l'écran de la calculatrice

Professeur B : La calculatrice affiche un nombre au hasard.

Étape 2 : Considérer uniquement la partie décimale du nombre affiché

Professeur B : On va essayer de travailler à partir de ça. On ne va pas s'occuper de la partie entière car cela fait toujours 0, et donc on va s'occuper que de la partie décimale.

Étape 3 : Considérer qu'un chiffre pair est associé à la naissance d'un garçon, et qu'un chiffre impair est associé à la naissance d'une fille.

Professeur B : Ce que je vous propose, si on a un chiffre pair on dit que c'est un garçon, sinon c'est une fille.

Étape 4 : S'arrêter dès qu'il y a une naissance d'un garçon

Professeur B : Pour le premier enfant, (dans le nombre 0,2342398...) 2 est un chiffre pair donc c'est un. . .

Élèves : C'est un garçon.

Professeur B : Donc est-ce que on arrête ou on continue ?

Élèves : On s'arrête.

> Professeur B : On a donc une famille [...]. Je vous laisse continuer par groupe de deux.

Chaque élève réalise la simulation sur sa calculatrice. Les résultats obtenus par chacun sont par la suite relevés au tableau. Le professeur B fait le constat que sur un échantillon de taille 179 (en regroupant l'ensemble des résultats), il y a 93 filles et 86 garçons. Les élèves ont alors conclu qu'il y a plus de filles que de garçons. Le professeur ajoute que ces résultats (93 filles et 86 garçons) sont liés à l'échantillon d'une taille donnée. Il conclut alors qu'« *en théorie, le nombre de filles et le nombre de garçons sont identiques* » (Ligne 58 de la transcription de la séance dans l'annexe 2). Le professeur utilise un argument d'autorité qui s'appuie sur la théorie mathématique pour formuler et justifier la solution attendue (la politique nataliste n'est pas efficace).

Dans cet $\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine, le professeur B a fait le choix d'utiliser la simulation *via* la calculatrice pour effectuer la tâche. Cette simulation mobilise l'outil technologique qui est la fonction Random() de la calculatrice. Le travail mathématique produit à l'issue de la résolution de la tâche est alors confiné sur la dimension instrumentale.

Le professeur B n'a pas laissé le temps aux élèves de chercher une solution au problème posé. Il a fait le choix de prendre en charge l'élaboration du travail mathématique en fournissant toutes les étapes de la construction de la simulation, la communication et la justification de la solution. Les élèves se sont contentés d'exécuter la simulation sur leurs calculatrices. Par conséquent, lors de la mise en œuvre de la tâche dans l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine de cette classe de 2^{nde}, le professeur a transformé la tâche qui était *a priori* une tâche riche en tâche simple lors de sa réalisation et a attribué à ses élèves le rôle de travailleur-tâcheron au de lieu de travailleur-ingénieur tel que nous l'avions prévu.

4. Discussion et réponse à nos deux questions principales

Notre analyse de la mise en œuvre d'une même tâche dans deux $\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoines au niveau de la classe de 2^{nde} nous permet de répondre à nos deux questions principales.

4.1 Caractérisation du travail mathématique effectivement produit

Notre analyse du travail mathématique effectivement produit dans les $\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoines (1^{re} question) met en évidence deux sortes de travail mathématique.

Dans l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine de la classe de 2^{nde} A, l'élaboration du travail mathématique est basée principalement sur l'usage des arbres des possibles (voir Figure 4) en tant qu'outil sémiotique afin de représenter l'expérience aléatoire et de décrire les issues de celle-ci. L'arbre des possibles a également été utilisé dans l'élaboration du travail mathématique en tant qu'outil technologique pour dénombrer (voir la procédure de l'élève 2 dans § 3.2.1.). Le travail mathématique produit à l'issue de la résolution de cette tâche est donc construit dans le plan [Ins-Dis]. Dans l'ETM_{PROBA} idoine de la classe de 2^{nde} B, l'élaboration du travail mathématique est, elle, fondée sur les outils technologiques associés à la dimension intrumentale. Effectivement, le professeur B a proposé aux élèves sans leur laisser le choix d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire à l'aide de la calculatrice et de la fonction Random (voir § 3.2.2.). À partir des résultats fournis par la simulation, le professeur B donne la solution attentue en la justifiant à l'aide d'un argument d'autorité qui n'est pas une justification rationnelle (voir les lignes 56 à 58 de la transcription de la séance dans l'annexe 2). Le travail mathématique produit dans cet ETM_{PROBA} idoine est alors confiné sur la dimension instrumentale.

4.2 Le rôle attribué aux élèves dans l'élaboration du travail mathématique

Concernant le rôle attribué aux élèves ($2^{ème}$ question), notre analyse révèle que les élèves n'ont pas le même rôle dans l'élaboration du travail mathématique dans les deux classes de 2^{nde}. Le professeur A a tenté de conserver le niveau d'exigence de la tâche tout au long de la séance et a laissé les élèves en tant que travailleur-ingénieur produire le travail mathématique. Pris par le temps, il a dû mettre fin à l'élaboration du travail mathématique par les élèves et a donné la solution attendue sans aucune explication et ni justification (voir § 3.2.1.). Le professeur B a, lui, guidé les élèves tout au long de la séance (voir l'extrait de dialogue proposé dans l'annexe 2). Lors de la mise en oeuvre de la tâche dans la classe, le professeur B a donc transformé la nature de la tâche initialement riche en une tâche simple. Cette transformation a conduit à la baisse du niveau d'exigence cognitive de la tâche et à la révision du rôle des élèves en leur attribuant le rôle de travailleur-tâcheron. Le rôle attribué par les professeurs aux élèves dans les deux classes de même niveau observées est ainsi différent.

Conclusion et perspectives

La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet pour analyser le travail mathématique et le rôle des élèves dans la mise en œuvre d'une tâche probabiliste a permis d'identifier et de caractériser des transformations de la nature des tâches probabilistes par les professeurs lors de leurs mises en œuvre en classe. Des transformations ayant pour conséquence d'abaisser le niveau d'exigence des tâches, notamment cognitive. Du point de vue du modèle des ETM, ces transformations des tâches par le professeur impliquent un travail mathématique confiné sur l'une des dimensions de l'ETM et donc très peu de circulation du travail mathématique dans l'ETM. Cela nous interroge sur l'origine de ces transformations et sur la manière de conserver le niveau d'exigence des tâches lorsqu'elles sont mises en œuvre dans les classes.
Une autre conséquence de ces transformations de tâches réside dans la réduction du rôle des élèves dans l'élaboration du travail mathématique qui se réduit au rôle de tâcheron. Cela questionne alors les apprentissages des élèves puisque les transformations de tâches entrainent la dénaturation de celles-ci en faisant perdre

le sens mathématique et privant les élèves d'établir des liens entre les notions mathématiques.

Les travaux de Henningsen et Stein (1997) ainsi que ceux de Stein et al.(1996) portant sur la question de la conservation des exigences cognitives des tâches lors de leurs mises en œuvre dans les classes soulignent l'importance du « *scaffolding* » comme facteur favorisant la conservation de ces exigences. Il s'agit par exemple des questions que le professeur peut poser aux élèves lorsqu'ils sont bloqués. Il s'agit aussi des aides proposées par le professeur aux élèves sans pour cela divulguer trop d'informations sur la (ou les) solution(s) et sur la (ou les) procédure(s) possible(s) conduisant à la (ou les) solution(s). Selon nous, ces aides doivent être pensées au préalable par le professeur en effectuant un travail sur les énoncés des tâches (Robert, 2003), en particulier lorsqu'il est question des tâches riches. Pour le professeur, il convient d'élaborer une analyse *a priori* de la tâche afin de dégager les « *activités potentielles des élèves et de prévoir leurs réactions* » (Robert, 2003, p.70) et ceci dans le but de « *prévoir des interventions conduisant, s'il le faut, à des tâches intermédiaires, accessibles mais non isolées (non simples)* » (Ibid., p.70). En outre, les aides fournies par le professeur permettent d'une part de soutenir les élèves et de les motiver tout au long de leur travail de recherche et d'autre part de maintenir le niveau d'exigence de la tâche sans la dénaturer.

Ces transformations de la nature de la tâche peuvent se produire lorsque les professeurs n'accordent pas suffisamment de temps aux élèves pour chercher la réponse au problème posé. On retrouve ce constat dans les résultats des travaux de Stein et al. (1996) où il est souligné que le fait d'accorder une quantité adéquate de temps aux élèves pour répondre à la tâche participe au maintien de son niveau d'exigence cognitive.

L'utilisation de l'outil de la catégorisation des tâches et du travailleur-sujet pour étudier le travail mathématique et le rôle des élèves dans l'élaboration de ce travail dans le domaine des probabilités s'est révélée intéressante. Cet outil peut être utilisé dans le cadre de la formation des enseignants (initiale ou continue) pour analyser des séances d'enseignement. Cette analyse à l'aide de la catégorisation des tâches et du travailleur-sujet peut permettre aux enseignants de prendre conscience de l'importance du maintien du niveau d'exigence des tâches pour développer l'apprentissage des élèves. Cette analyse peut également permettre aux enseignants de prendre conscience des formes de travailleur-sujet qu'ils développent chez leurs élèves.

Du point de la recherche, l'usage de cette catégorisation peut être envisagée pour étudier les représentations des enseignants qui prescrivent des tâches et qui attendent une forme de travail mathématiques de leurs élèves. En effet, c'est le professeur *via* son choix de la catégorie des tâches qui donne le rôle de travailleur-sujet à ses élèves. En outre, l'usage de cette catégorisation articulé avec l'usage du modèle des Espaces de Travail Mathématique peut être intéressante pour penser à la manière d'envisager la mise en œuvre des tâches dans les classes sans être dénaturées et en maintenant leur niveau d'exigence. Cette question fait d'ailleurs l'objet d'un travail de recherche en cours portant sur la notion de la tâche emblématique dans le domaine des probabilités (Kuzniak & Nechache, 2016, ETM5).

Bibliographie

BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.1**, 77-125.

DUVAL, R. (1995), Semiosis et pensée humaine. Peter Lang, Bern

HENNINGSEN M. & STEIN M.K. (1997), Mathematical tasks and student cognition : Classroom based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education* **28.5**, 524-549.

KUZNIAK A. (2010), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **15**, 73-93.

KUZNIAK A. (2011), L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **16**, 9-24.

KUZNIAK A. & NECHACHE A. (2014), Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *Acte du 41^e^ colloque COPIRELEM*, Mont de Marsan.

KUZNIAK A. & NECHACHE A. (2016), Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existance et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématique*, Florina, Grèce, juillet 2016 (en cours de publication).

KUZNIAK A., NECHACHE A. & DROUHARD JP. (2016), Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education* **48.6**, 861-874.

KUZNIAK A., TANGUAY D. & ELIA I. (2016), Mathematical Working Spaces in schooling : an introduction. *ZDM Mathematics Education* **48.6**, 721–737.

MENCOL. (2008), Les programmes du collège-bulletin officiel de l'Éducation Nationale, BO spécial numéro 6 du 28 août 2008. http://cache.media.education.gouv.fr.

MONTOYA-DELGADILLO E. & VIVIER L. (2014), Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **19**, 73–101.

NECHACHE A. (2016), *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.

PARZYSZ B. (2011), Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **16**, 127–147.

RESCOL-PROB. (2008), Ressources pour les classes de collège-Probabilités, mars 2008. http://eduscol.education.fr.

ROBERT A. (2003), Tâches mathématiques et activités des élèves une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège, *Petit x* **62**, 61-71.

ROBERT A. (2007), Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **27.3**, 271-311

SIERPINSKA A. (2004), Research in mathematics education through a keyhole : task problematization. *International Journal of Mathematics Education* **24.2**, 7-15.

STEIN MK., GROVER D. & HENNINGSEN M. (2016), Building student capacity for mathematical thinking and reasoning : an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal* **33.2**, 455–488.

STEIN MK., REMILLARD J. & SMITH M. (2007), How Curriculum Influences Student Learning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. In Frank K. & Lester Jr (Eds), 319–369.

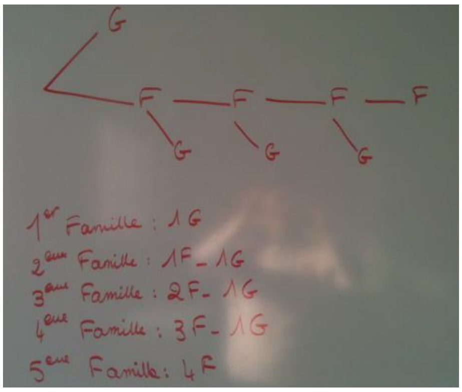
STEIN MK. & SMITH MS. (1998), Mathematical tasks as a framework for reflection : From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School* **3.4**, 268-275.

WHITE N. & Mesa V. (2014), Describing cognitive orientation of Calculs I tasks across different types of coursework. *ZDM Mathematics Education* **46.4**, 675-690.

ASSIA NECHACHE
Université d'Orléans
& Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
assia.nechache@hotmail.fr

Annexe 1: La transcription de la séance avec le professeur A

Les élèves ont eu 25 minutes pour chercher l'exercice individuellement. Un élève (Élève 1) est invité au tableau pour écrire sa réponse. Par la suite le professeur commente la solution de cet élève.

Ligne	**Locuteur**	**Verbatim**
L1	Professeur A	J'ai demandé à votre camarade d'expliquer son raisonnement parce qu'il a dit qu'il y a 8 possibilités en tout. Donc il écrit quatre huitièmes, mais je ne sais pas d'où ça vient. Il écrit par la suite qu'il y a un demi d'avoir une fille, enfin je ne comprends pas très bien. Je te demande de m'énumérer tous les types de famille. Alors, il y a les familles avec un garçon, les familles avec une fille et un garçon, il n'y a jamais des familles avec deux filles puisque la famille doit avoir au moins un garçon. On aurait pu mettre dans l'énoncé, qu'ils ne s'arrêtent que lorsqu'ils ont un garçon ou bien quatre enfants. Est-ce que tous ces types de familles ont la même chance d'exister ? Donc ce n'est pas équiprobable. Je n'ai pas autant de chance d'avoir une famille avec deux filles et un garçon, qu'une famille avec un seul garçon. On a donc cinq types de famille, est-ce que tout le monde est d'accord ?
L2	Élèves	Oui.
L3	Professeur A	Une famille ayant un garçon unique. Une famille avec une fille et un garçon. Une famille avec deux filles et un garçon. Une famille avec trois filles et ungarçon. Et une famille avec quatre filles. C'est bon pour tout le monde ?  *[Solution de Élève 1]*
L4	Élèves	Oui.
L5	Professeur A	On décide qu'ils continuent à procréer tant qu'ils n'ont pas de garçon, mais qu'ils s'arrêtent au quatrième enfant. Regardez bien. Élève 2 considère qu'il y a 100 familles, 50 familles vont avoir un garçon. Tu écris, 50 familles vont avoir un garçon unique. C'est donc une chance sur deux. C'est pas mal. Ensuite, deuxième type de famille avec un garçon et une fille. Il y a combien de familles dans ce cas-là ?
L6	Élève 2	25 familles.
L7	Professeur A	D'accord. Donc 25 familles ont une fille et un garçon. Après, c'était deux filles et un garçon.

L8	Élève 2	12,5.
L9	Professeur A	Oui. Après combien de familles avec trois filles et un garçon ?
L10	Élève 2	6,25.
	Professeur A	Très bien. Et quatre filles ?
L11	Élève 2	Pareil.
L12	Professeur A	[*première sonnerie*] 6,25, d'accord. Il considère 100 familles, et il dit qu'il y a une chance sur deux d'avoir un garçon en premier. Donc la moitié des familles ont un enfant unique garçon. Après on a une chance sur d'avoir une fille en premier et une chance sur deux d'avoir un garçon en second. Comment trouve-t-on le nombre de filles ?
L13	Élève 2	25 fois 1 plus 12,5 fois 2 plus 6,25 fois 3 plus 6,25 fois 4.
L14	Professeur A	[*deuxième sonnerie*] Enfin bon, la politique de natalité n'est pas efficace.… *[le professeur n'a pas eu le temps de conclure.]*

Annexe 2 : La transcription de la séance avec le professeur B

Les élèves ont eu dix minutes pour chercher l'exercice individuellement.

Ligne	Locuteur	Verbatim
L1	Professeur B	Est-ce que tout le monde a compris la politique nataliste de ce pays imaginaire ?
L2	Élèves	Oui.
L3	Professeur B	Quelqu'un me fait un résumé ?
L4	Élève 1	On a droit à quatre enfants maximum.
L5	Professeur B	Oui.
L6	Élève 1	Si on a un garçon, on arrête de procréer.
L7	Professeur B	D'accord. Dès que l'on a un garçon, on arrête. Dans ce pays, ce qui est important, c'est le garçon.
L8	Élève 1	On a une chance sur deux que ce soit un garçon ou une fille.
L9	Professeur B	Très intéressant. Ici, on va prendre comme modèle que la probabilité d'avoir un garçon est de un demi. Est-ce que tout le monde a compris ce que veut dire « indépendant » ?
L10	Élève 2	C'est soit un garçon soit une fille.
L11	Professeur B	En fait, indépendant, c'est si on a eu une fille la première fois, au deuxième accouchement, la probabilité d'avoir une fille est toujours un demi et la probabilité d'avoir un garçon est toujours un demi. C'est valable pour le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième accouchement. Est-ce que tout le monde a compris la question ?
L12	Élèves	Oui.
L13	Professeur B	Il s'agit de voir, est-ce que cette politique nataliste va influer sur le nombre de garçons et le nombre de filles.

L14	Élèves	Bah. Il y a plus de filles que de garçons.
L15	Professeur B	On aura peut-être plus de filles, ou plus de garçons, cela ne change rien. Je vous laisse quelques minutes pour finir l'exercice.
L16	Élève 2	En fait, on ne peut pas savoir si cela va diminuer ou augmenter.
L17	Professeur B	Alors Élève 2 dit qu'on ne sait pas. Peux-tu expliquer ?
L18	Élève 2	En fait si, ça va changer, mais on ne sait pas si c'est le nombre de filles qui change ou si c'est le nombre de garçons.
L19	Professeur B	Y a-t-il d'autres propositions ?
L20	Élève 3	Si dès que l'on a un garçon, on arrête d'avoir des enfants, on ne pourra jamais avoir quatre garçons, mais on peut avoir jusqu'à quatre filles.
L21	Professeur B	Donc Élève 3 dit qu'on peut avoir quatre filles mais qu'un seul garçon par famille. Donc Élève 3 pense qu'il y aura plus de filles. Êtes-vous d'accord les autres ?
L22	Élève 4	Non, pas forcément.
L23	Professeur B	Ah ! Peux-tu expliquer pourquoi ?
L24	Élève 4	Soit ils ont un garçon en premier, et dans ce cas ils arrêtent. Sinon, il y aura forcément une fille en premier et du coup ils feront plus d'enfants.
L25	Professeur B	D'accord. Vous avez du mal à modéliser la situation. Ce n'est pas très grave. Je vous ai dit dans le cours que lorsqu'on ne sait pas trop bien modéliser, on peut faire des ?
L26	Élèves	Des arbres.
L27	Professeur B	Alors, les arbres, c'est quand on n'arrive pas à trouver un modèle. Mais quand on ne sait pas bien faire, on fait des expériences. Donc je vous propose que, comme on n'arrive pas à dégager un modèle mathématique, on fasse des expériences.
L28	Professeur B	Vous allez prendre vos calculatrices. Je vous propose de faire une simulation. Sur vos calculatrices vous avez une touche qui s'appelle alea() ou nombre aléatoire. Dans la calculatrice type casio, vous allez dans *menu*, *option* et vous appuyez sur *proba*. Puis sur *Rand*, qui veut dire *hasard* en anglais. Puis vous avez une touche *Rand#* vous appuyez dessus et vous faites entrée.
L28	Élèves	Cela fait 0,2342398…
L29	Professeur B	La calculatrice affiche un nombre au hasard. On va essayer de travailler à partir de ça. On ne va pas s'occuper de la partie entière car cela fait toujours 0. On ne va s'occuper que de la partie décimale. Ce que je vous propose : si on a un chiffre pair, on dit que c'est un garçon sinon c'est une fille. Pour le premier enfant, *[dans le nombre 0,2342398…]* 2 est un chiffre pair donc c'est un…
L30	Élèves	C'est un garçon.
L31	Professeur B	Donc est-ce qu'on arrête ou on continue ?
L32	Élèves	On arrête.

L33	Professeur B	On a donc une famille. Pour la deuxième famille, on a 3, c'est... ?
L34	Élèves	Impair.
L35	Professeur B	On continue ?
L36	Élèves	Oui.
L37	Professeur B	Et pour le troisième chiffre, on a 4, donc on s'arrête. On a une deuxième famille. Je vous laisse continuer par groupe de deux. Je vais faire quelques relevés de vos résultats que je vais écrire au tableau.
L38	Élève 5	6 filles et 5 garçons.
L39	Élève 6	7 filles et 3 garçons.
L40	Élève 7	3 filles et 7 garçons.
L41	Élève 8	9 filles et 9 garçons.
L42	Élève 9	7 filles et 4 garçons.
L43	Élève 10	9 filles et 11 garçons.
L44	Élève 11	11 filles et 10 garçons.
L45	Élève 12	6 filles et 13 garçons.
L46	Élève 13	27 filles et 22 garçons.
L47	Élève 14	8 filles et 2 garçons.
L48	Professeur B	Vous avez des résultats qui sont tout à fait différents les uns des autres. C'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage. Qu'est-ce qui se passe lorsqu'on prend un échantillon de taille importante ?
L49	Élèves	Cela se stabilise.
L50	Professeur B	Oui. Et la fréquence observée est proche de la probabilité. On compte le nombre de filles et le nombre de garçons et on obtient alors... ?
L51	Élèves	93.
L52	Professeur B	93 filles, et... ?
L53	Élèves	86.
L54	Professeur B	86 garçons.
L55	Élèves	Donc, il y a plus de filles que de garçons.
L56	Professeur B	Je vous rappelle que ce n'est qu'un échantillon et que cela peut évoluer. Mais est-ce que la différence entre le nombre de filles et le nombre de garçons peut évoluer ?
L57	Élèves	Non.
L58	Professeur B	Je vous donne le résultat de la théorie mathématique. Alors en théorie mathématique il y aurait autant de filles que de garçons, une chance sur deux.

MICHELE TESSIER-BAILLARGEON, NICOLAS LEDUC,
PHILIPPE R. RICHARD, MICHEL GAGNON

ETUDE COMPARATIVE DE SYSTEMES TUTORIELS POUR L'EXERCICE DE LA DEMONSTRATION EN GEOMETRIE

Abstract. Comparative study of tutorial systems for geometry proof learning. This article proposes a state of the art of tutorial systems for high school planar geometry proof learning. The chosen approach is part of exploring the research problem that motivates the development, by our research team, of a tutorial system named QED-Tutrix, that we will present in another paper. In the following article, a synthesis and a comparison of existing tutorial systems is carried out on the basis of a set of original indicators highlighting the differences between the systems covered by our analysis. Each indicator aims to describe the functioning of the studied software according to the geometric work made possible at their interface. Eleven tutorial systems are compared according to their integration of a geometric figure, the structure they impose on the student's reasoning and the tutorial intervention they offer.

Résumé. Cet article propose un état de l'art sur les systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie plane à l'école secondaire. La démarche employée s'inscrit dans l'examen d'un problème de recherche motivant le développement par notre équipe de recherche d'un tutoriel, nommé QED-Tutrix, lequel sera l'objet d'un second article. Dans l'article qui suit, une synthèse et une comparaison du fonctionnement de systèmes tutoriels existants est menée à partir d'un ensemble d'indicateurs originaux permettant de mettre en valeur les différences entre les systèmes sur lesquels porte notre analyse. Chaque indicateur vise à décrire le fonctionnement des logiciels étudiés en fonction du travail géométrique rendu possible à l'interface de chacun d'eux. Onze systèmes tutoriels sont comparés en fonction de l'intégration que ceux-ci font d'une figure géométrique, de la structure qu'ils imposent au raisonnement de l'élève et de l'intervention tutorielle qu'ils proposent.

Mots-clés. Système QED-Tutrix, étude comparative, systèmes tutoriels, découverte guidée et démonstration en géométrie.

Introduction

Les EIAH sont venus bouleverser les habitudes didactiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et plus particulièrement en géométrie. Bien que la recherche technologique ait évolué rapidement ces dernières années et que les systèmes informatiques semblent prometteurs, aucun EIAH (environnement informatique d'apprentissage humain) pour l'apprentissage de la démonstration, n'a réussi à s'imposer.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p.91 - 117.

Avec QEDX, l'objectif de notre équipe de recherche multidisciplinaire est de développer un système tutoriel par la modélisation didactique et informatique des schèmes d'action instrumentés de l'apprenti géomètre et de son enseignant. En choisissant cette méthode de développement anthropocentrique (Rabardel, 1995, p.^pp.), nous visons un système qui respecte l'exercice géométrique authentique grâce à l'analyse des modalités du contrat didactique observé en classe réelle.

Dans le cadre de l'examen de notre problème de recherche pour le développement de QED-Tutrix (QEDX), nous avons mené une revue des environnements informatiques d'apprentissage humain conçus pour l'exercice de la pensée géométrique afin de prendre connaissance de l'offre actuelle. Dans un contexte d'effort conjoint entre informatique et didactique, cet exercice de recension a mis en lumière l'absence d'articles en didactique des mathématiques qui font l'état de l'art des systèmes existants pour l'apprentissage de la démonstration chez l'apprenti géomètre. En revanche, de tels bilans sont communs dans un cadre informatique. L'étude comparative qui suit répond à une volonté d'abord méthodologique afin de regrouper, de décrire et de retracer l'évolution des deux dernières décennies en ce qui a trait aux logiciels pour le développement des compétences de démonstration en géométrie plane.

Sans recenser les système existants, Balacheff, dans son article *Didactique et intelligence artificielle* (1994), se livre à un exercice de classement des EIAH en mathématiques en trois types : les micromondes, les tuteurs et les environnement de découverte guidée. Prenant appui sur les catégories avancées par Balacheff, qui propose d'ordonner les EIAH en fonction du degré d'initiative laissée à l'élève ou, réciproquement, selon le degré de directivité du système (Balacheff, 1994), nous allons préciser notre échantillon d'EIAH à analyser en se restreignant aux systèmes qui offrent une assistance à l'élève en résolution de problème. Ensuite chaque section fera état des fonctionnalités d'un de ces systèmes en décrivant la manière dont est intégrée la figure géométrique, la façon dont est coordonné le travail de l'élève ainsi que les interventions tutorielles disponibles.

1. La directivité du système : Micromondes, Tuteurs et environnement de découverte guidée

Selon Balacheff (1994), l'initiative laissée à l'élève dans son processus de résolution de problèmes mathématiques constitue un bon critère de classification des environnements informatiques d'apprentissage humain. Balacheff propose un continuum qui s'échelonne d'une totale liberté accordée à l'élève à une prise en charge complète du travail mathématique par l'EIAH.

Les micromondes conçus pour la construction et l'exploration des propriétés de figures dynamiques sont classés par Balacheff comme étant les EIAH les moins directifs : puisque sans régulation enseignante extérieure, ces systèmes ne proposent pas de tâche à résoudre ni d'aide à l'élève. Conséquemment, à l'exception des exigences minimales régissant une communication mathématique, aucune contrainte ou intention didactique ne vient encadrer l'interaction entre l'élève et l'EIAH. Ainsi, dans un contexte d'apprentissage de la démonstration en géométrie, Hanna (2000) suggère que l'exploration des limites d'une construction géométrique pour en déduire ses propriétés intrinsèques mène à un apprentissage grâce à l'organisation de ces découvertes sous forme de démonstration. Selon elle, le défi de l'enseignant est d'exploiter cet engouement qui découle de l'exploration des figures dynamiques pour amener les élèves à produire une démonstration. Cette idée est partagée par De Villiers :

> *It is far more meaningful to INTRODUCE proof within a dynamic geometry context, NOT as a way of making sure, but rather as a means of explanation, understanding, and discovery before dealing with the more formal and abstract functions of verification and systematisation.* (Villiers, 2007, p. 50)

Toutefois, la tâche d'amener l'élève à systématiser ses découvertes et à en vérifier la démarche sous-jacente est traditionnellement assumée par l'enseignant, mais elle peut aussi être la responsabilité d'un agent tutoriel intégré à l'EIAH. La directivité de ces agents tutoriels est variable et dépend du type de soutien envisagé par les concepteurs du système tutoriel et elle vient justifier la distinction des deux autres catégories d'EIAH proposées par Balacheff (1994), soit les tuteurs comme tels et les environnements de découverte guidée.

Les tuteurs sont pour Balacheff (1994) à l'opposé des micromondes sur l'axe continu de directivité imposée par les EIAH. S'apparentant à un enseignement, que Balacheff qualifie de frontal ou directif, les tuteurs, sans réel souci ou moyen d'assurer la compréhension de l'élève et au risque de dénaturer le problème à résoudre, s'assurent, grâce à des indices ou à des instructions, que l'élève produise sans détours la ou les solutions déterminées comme étant admissibles ou idéales. Ainsi, sans accorder de valeur didactique à l'erreur ou aux aléas du raisonnement mathématique, les tuteurs font preuve d'une *impatience pédagogique* en « souhaitant que soit abordé au plus vite l'objet d'apprentissage visé » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008, p. 57). Cette impatience a pour effet d'amener l'élève à suivre passivement le déroulement séquentiel d'une méthode sélectionnée et d'inhiber le processus idiosyncratique de résolution de problème de démonstration, ce qui peut à terme nuire à la compréhension de ce processus mathématique. D'ailleurs comme le dit Tanguay :

> *La compréhension de la structure d'une démonstration tant soit peu complexe nécessite de la part de l'élève un travail – de lecture ou d'écriture – ponctué de pauses, de retours sur les propositions déjà énoncées, de réaménagement et simultanéisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions non contigus dans le texte), de recul, d'appréhension globale (pour saisir certains éléments de macro-organisation), de contrôle, de réflexion. Toutes choses que ne permet pas cette [...] pratique orale du texte, faite de fluence, de séquentialité, d'irréversibilité.* (Tanguay, 2005, p. 64)

De ce fait, il serait souhaitable qu'un système d'aide tutorielle puisse accompagner l'élève dans sa recherche heuristique d'une solution et, au final, susciter les apprentissages nécessaires à la rédaction de sa démonstration. Balacheff propose l'appellation *environnements de découverte guidée*[1] pour désigner les EIAH qui parviennent à un équilibre entre respect du raisonnement personnel et imprévisible de l'apprenti géomètre et accompagnement de l'élève lorsqu'il se trouve en difficulté.

Les environnements de découverte guidée ou systèmes *coach* (Balacheff, 1994) imposent une directivité intermédiaire entre celle du micromonde et celle du tuteur en laissant « une liberté apparente, ce qui signifie qu'il n'y a pas de rétroaction systématique ou immédiat suite aux erreurs commises par l'élève, mais certaines règles permettent au système de planifier l'interaction en fonction d'une évaluation du comportement de l'apprenant » (Balacheff, 1994, p. 27). Par conséquent, cette liberté calculée dont jouit l'élève assure que la résolution effective d'un problème découle directement des compétences mathématiques de l'élève. Toutefois, cette autonomie de pensée n'est pas menacée par un soutien qui est prévu si et seulement si le système tutoriel détermine que l'élève ne parviendra pas à une solution sans l'intervention d'un agent aidant, puisque alors cette intervention rend possible un apprentissage autrement inaccessible. Ainsi, les environnements de découverte guidée obéissent à la règle de ne pas intervenir tant que l'élève a une chance de parvenir seul à une solution et, en cas de blocage, de guider l'élève pour maximiser les opportunités d'apprentissage de ce dernier.

Dans ce qui suit, nous allons considérer toute forme de soutien à la résolution de problèmes comme étant accompli par un système tutoriel, puisque bien qu'une assistance agisse de manière plus ou moins directive, elle intervient à titre d'aide

[1] La formulation découverte guidée est inspirée du principe de découverte guidée proposé par Elsom-Cook, M. (1990), principe selon lequel l'équilibre entre directivité et non directivité prend appui sur une prise en compte simultanée de l'état de l'apprenant et de la complexité de l'objet d'enseignement (Balacheff, 1994).

tutorielle. Ainsi, les systèmes étudiés présentent tous uns composante tutorielle et sont conçus pour l'exercice de la démonstration en géométrie. Cet article ne constitue pas une description exhaustive, un recensement systématique ou un ordonnancement à proprement parler des systèmes tutoriels sélectionnés en fonction de leur niveau de directivité, mais plutôt une étude comparative des aspects clés de leur fonctionnement. Cet exercice permettra au lecteur d'avoir un portrait d'ensemble des particularités des systèmes tutoriels disponibles pour l'exercice de la géométrie plane au secondaire, mais aussi de préciser et de mettre en contexte le fonctionnement de QEDX, un système tutoriel de type environnement de découverte guidée.

2. Un ensemble novateur de variables pour décrire le fonctionnement des systèmes étudiés

Pour notre comparaison, nous avons d'abord cherché un ensemble d'indicateurs existants pour décrire et comparer des systèmes tutoriels conçus pour l'exercice de la démonstration en géométrie. Nous avons principalement identifié des descriptions d'EIAH données à titre de revue de littérature pour justifier la pertinence d'un système tutoriel donné, sans toutefois pouvoir trouver de précision explicite quant aux indicateurs ad hoc utilisés. Nous avons alors élaboré notre propre ensemble d'indicateurs en fonction des systèmes tutoriels sélectionnés. Pour ce faire, nous avons d'abord identifié un ensemble de systèmes conçus pour la production de démonstrations géométriques avec comme objectif le dégagement de différents marqueurs qui qualifient le fonctionnement et la logique didactique de chacun d'eux tout en faisant ressortir les particularités qui les distinguent. Plus précisément, cette méthode d'analyse qualitative de *questionnement analytique* (Paillé & Mucchielli, 2013) nous a permis de dégager non pas des invariants, mais des indicateurs éloquents qui servent notre ambition de décrire et de comparer les systèmes tutoriels étudiés.

Une première analyse a d'abord mis en lumière trois grands volets qui caractérisent les systèmes tutoriels :

- L'intégration de la figure géométrique au sein du système tutoriel.
- Les interfaces et les structures sous-jacentes prévues pour l'exercice du raisonnement mathématique et pour sa communication.
- Les modes d'intervention des systèmes tutoriels.

Ensuite, les analyses itératives subséquentes ont révélé différentes variables qui précisent ces trois grands volets et permettent par le fait même de mettre en évidence les particularités propres à chacun des systèmes tutoriels analysés. Par exemple, si nous prenons le second volet qui concerne le raisonnement géométrique de l'élève au sein des systèmes tutoriels décrits, au fil des lectures et des relectures du matériel et en fonction de ce qui a été recensé, le questionnement analytique s'est précisé comme suit :

- Comment s'opère la résolution de problème pour chaque système tutoriel ?
- Est-ce que l'élève est contraint de raisonner dans un ordre prédéterminé ?
- Est-ce que le système fonctionne selon un chaînage avant, arrière, mixte ou sans chaînage ?

L'arborescence finale qui résulte de notre analyse et qui fera office de grille d'observation pour notre étude comparative est illustrée au tableau I.

Tableau I
Caractéristiques des systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie

Intégration de la figure géométrique				Structure prévue pour l'exercice du raisonnement de démonstration géométrique						Intervention tutorielle							
Figure statique		Figure dynamique		Solutions admises				Ordres des entrées		Intervention		Accompa-gnement	Rétroaction				
													Validation				
Dessin	Figure interactive	Exploration	Construction	Moteur de déduction automatique	Programmées par un expert ou un enseignant	Exploration simultanée de multiples stratégies / Reconnaissance de plan	Phases séquentielles du raisonnement	Chaînage (avant, arrière)	Chaînage mixte ou exploration libre	À la demande de l'élève	Gérée par le système tutoriel	Indication prochaine étape (chaînage)	Locale : énoncés, inférences	Globale : solution, démonstration	Démonstration en graphe (réseau déductif)	Annotation de la démonstration	Explication des erreurs

Afin d'éviter d'alourdir la description de chaque système tutoriel présenté, nous allons définir d'entrée de jeu chacune des variables (les ramifications des trois catégories qui forment la première ligne du tableau I). Ainsi, un lecteur souhaitant s'informer à propos d'un système tutoriel en particulier peut se référer à ces explications et aux paragraphes dédiés au système tutoriel concerné.

2.1. Intégration de la figure géométrique

« Le raisonnement en géométrie est favorisé par la présence d'une figure qui permet une saisie globale du problème et aide à la création d'images mentales » (Bernat, 1993, p. 27). Cette affirmation fait l'objet d'un consensus au sein de la communauté didactique, mais l'introduction des environnements informatiques pour l'exercice de la géométrie vient redéfinir les effets potentiels de l'intégration d'une figure géométrique sur le raisonnement géométrique figural. S'il est évident que la géométrie dynamique a révolutionné la construction et l'exploration de figures géométriques, avant d'aborder ce type de figure, deux catégories de figures statiques ont été observées au sein des systèmes tutoriels analysés.

D'abord, la figure statique qui accompagne l'énoncé d'un problème peut être un simple dessin semblable à celui que l'élève retrouve conjointement à l'énoncé d'un problème traditionnel. La figure géométrique statique peut aussi être interactive et s'animer en fonction des actions de l'élève ou du tuteur. Par exemple, un segment peut changer de couleur lorsqu'il est nommé dans un énoncé soumis par l'élève, ou la mesure d'un angle peut s'afficher lorsque le curseur le survole. La figure interactive ne doit pas être confondue avec la figure dynamique puisque bien qu'elle soit plus sophistiquée que le dessin et qu'elle puisse attirer l'attention de l'élève sur certains éléments figuraux et potentiellement initier une réflexion chez ce dernier, la figure interactive demeure une figure statique ne pouvant être déformée ou modifiée par l'élève.

Pour sa part, la figure dynamique existe et évolue en fonction des relations géométriques (appartenance, équidistance, parallélisme, perpendicularité, etc.) qui lient les éléments géométriques qui la constitue (Baulac, 1990). Conséquemment, la figure dynamique se « déforme en respectant les propriétés géométriques qui ont servi à son tracé et celles qui en découlent » (Laborde & Capponi, 1994, p. 173). Ce dynamisme particulier, qui maintient la logique interne d'une construction lors d'un déplacement (*dragging*), permet la visualisation d'un nombre de cas de figures autrement inaccessible pour une définition géométrique donnée. De ce fait, le registre des figures dynamiques constitue un registre sémiotique distinct de celui des figures traditionnelles ou statiques (Coutat *et al.*, 2014) puisqu'il permet l'exploration des limites de la construction géométrique et des invariants géométriques qui révèlent les propriétés géométriques sous-jacentes. En ce sens, la figure dynamique peut contribuer davantage que la figure statique au raisonnement de preuve de l'élève puisqu'elle lui permet à la fois de poser et de mettre à l'épreuve des conjectures (Hanna, 2000).

Aussi, une figure dynamique au sein d'un micromonde permettra la construction de nouveaux éléments figuraux par l'élève. Cet atout supplémentaire n'est pas exigé pour qu'une figure soit qualifiée de dynamique, mais s'avère essentiel dans le cas d'un EIAH qui prend en compte les actions graphiques comme éléments d'une démonstration.

Comme l'apport d'une figure dynamique pour l'exploration de propriétés géométriques et pour l'examen d'un problème de démonstration est abondamment discuté dans la littérature (Coutat *et al.*, 2014), il semble qu'un environnement de découverte guidée en géométrie puisse difficilement renoncer à l'inclusion de la géométrie dynamique pour l'obtention d'un milieu pertinent pour l'exercice de la démonstration (Balacheff & Margolinas, 2005).

2.2. Structure prévue pour l'exercice du raisonnement de démonstration géométrique

Comment est orchestré le raisonnement géométrique de l'utilisateur des différents systèmes tutoriels ? Comment l'élève chemine-t-il au sein de l'espace du problème ? À la lumière de l'analyse des différents systèmes tutoriels étudiés, nous avons divisé ce questionnement en sous-questions ciblées qui permettent de différencier les systèmes tutoriels. D'abord, comment sont élaborées les solutions expertes (ou témoins) à partir desquelles les solutions de l'élève sont évaluées ? Ces solutions étant admises par le système, l'élève peut-il en explorer plusieurs à la fois dans sa résolution d'un problème? L'élève doit-il articuler les phases de son raisonnement selon une séquence prédéterminée ? Enfin, lorsque l'élève soumet les éléments de sa solution, doit-il les soumettre suivant un ordre particulier ?

Dans un premier temps, en ce qui concerne les solutions, c'est-à-dire les démonstrations reconnues comme admissibles par le système tutoriel, celles-ci peuvent être produites de manière autonome par le système grâce à un moteur de déduction automatique ou par des experts didacticiens ou enseignants. Dans le cas d'un traitement par moteur de déduction automatique, cette informatisation du raisonnement déductif implique, du moins actuellement, une modélisation selon un paradigme de géométrie formelle (Houdement & Kuzniak, 2006). Un paradigme de géométrie formelle limite la gestion de l'erreur et l'emploi des raccourcis inférentiels[2]. Qui plus est, les moteurs de déduction automatiques, au lieu d'un

[2] À titre d'exemple de raccourci inférentiel, la propriété qui dit qu'un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle peut être perçue comme un raccourci inférentiel puisque cette propriété résulte d'une suite d'inférences logico-déductives. Une démonstration qui fait appel à cette propriété est donc plus courte que celle qui inclut l'ensemble des inférences desquelles découle cette propriété.

éventail de solutions possibles, ne génèrent communément qu'une seule démonstration, celle jugée la plus *heuristiquement efficace* (Richard & Fortuny, 2007), solution qui n'est toutefois pas nécessairement la plus compréhensible pour l'élève utilisateur, ni celle qui concorde avec la pratique ou les exigences habituelles de son enseignant. Ainsi, malgré les avantages logistiques évidents associés à l'intégration d'un moteur de déduction automatique à un système tutoriel, certains systèmes tutoriels s'appuient plutôt, et avec le coût que cela représente, sur des solutions expertes préalablement programmées par un expert didacticien ou un enseignante En effet, afin de respecter le contrat didactique (Brousseau, 1998) auquel les élèves et les enseignants utilisateurs sont accoutumés, les solutions admises doivent permettre une flexibilité quant au paradigme géométrique de référence, tandis que les démonstrateurs automatiques obéissent par défaut à une géométrie formelle.

Indépendamment de la manière avec laquelle sont implémentées les différentes solutions idéales auxquelles se mesurent les raisonnements des apprentis géomètres, la plupart des systèmes tutoriels reconnaissent plusieurs solutions à un même problème. Cependant, lorsque l'élève est invité à résoudre le problème, certains systèmes tutoriels cherchent à dégager le plus rapidement possible une solution dominante à partir des actions de l'élève, et le contraignent ensuite à conclure cette solution sans changement possible de stratégie au cours de son raisonnement. Qui plus est, certains systèmes obligent l'élève à résoudre le problème en enchainant séquentiellement en premier lieu les phases de résolution heuristique associées à la recherche d'une solution et en second lieu les phases de rédaction, et ce, sans retours en arrière possibles. Pourtant, la résolution d'un problème de mathématique s'effectue rarement de manière séquentielle, et l'élève choisit rarement une stratégie au début de la résolution pour ensuite rédiger sa solution sans questionner sa stratégie ou la changer complètement : « *we learn by establishing connections and relationships, by building a web of ideas rather than a linear and logical sequence of implications; ideas grow synergetically rather than strictly on top of each other* » (Dreyfus, 1999, p.98). C'est pourquoi il apparaît pertinent de souligner la capacité qu'ont certains systèmes tutoriels de reconnaitre différentes stratégies présentes dans les actions des élèves et de permettre à ceux-ci de faire des allers-retours entre ces solutions distinctes tout au long du processus de résolution. Cette capacité de s'adapter dynamiquement aux changements de stratégie repose sur la *reconnaissance de plan,* qui implique qu'un système soit doté d'un algorithme qui permette de reconnaitre les différents plans mis en œuvre par l'élève en fonction de ses actions et de distinguer le plan dominant qui se dégage de ses actions les plus récentes afin de fournir à ce dernier une aide ou une rétroaction juste et adaptée à son statut cognitif du moment.

En ce qui concerne l'ordre dans lequel les étapes d'une solution donnée doivent être soumises au système tutoriel par l'élève, le concept informatique de chaînage permet au système tutoriel d'ordonner les étapes d'une solution afin de reconnaitre le raisonnement d'un élève. On appelle chaînage avant, le fait de n'utiliser que des hypothèses ou des résultats intermédiaires prouvés comme antécédents de chaque inférence ajoutée à la démonstration jusqu'à atteindre la conclusion. Le chaînage arrière consiste à faire le chemin inverse : on part d'une inférence ayant comme conséquent la conclusion et on ajoute, à rebours, des inférences pour prouver les antécédents qui ne sont pas des hypothèses du problème, jusqu'à ce que tous les antécédents non prouvés soient des hypothèses. Pour sa part, le chaînage mixte, évoqué par Py (2001), consiste en un mélange de chaînages avant et arrière. Comme ce chaînage n'impose pas d'ordre quel qu'il soit, nous allons assimiler le chaînage mixte à ce que nous appellerons une exploration libre des solutions.

Le fait d'imposer une structure en chaînage avant ou arrière a pour effet de contraindre l'élève à raisonner de manière séquentielle, allant à l'encontre d'une pensée éclatée nécessaire lors d'un processus de découverte et aussi d'une réalité fondamentale en éducation : « *students frequently understand and construct their knowledge in ways quite different from what is anticipated or planned, and confirms the basic thesis of constructivism that learning is idiosyncratic* » (De Villiers, 2007, p. 53).

2.3. Intervention tutorielle

Dans un premier temps, l'aide tutorielle peut être fournie à la demande de l'élève au moyen d'un bouton par exemple, ou bien être assurée de manière autonome par le système tutoriel. Dans le premier cas, plusieurs concepteurs soulèvent le risque d'abus des demandes d'aide chez l'élève qui ne souhaite pas s'investir dans la compréhension du problème à résoudre. En ce qui a trait à la gestion autonome de l'aide par le système tutoriel, ceci implique que ce dernier soit en mesure d'identifier avec justesse le moment où l'élève requiert de l'assistance. Dans les deux cas de figure, l'enjeu consiste à offrir de l'aide au bon moment sans dénaturer le problème à résoudre. Ce délicat équilibre entre directivité et liberté concerne l'ensemble des interventions tutorielles, qui se retrouvent sous trois formes dans les systèmes tutoriels analysés.

L'aide tutorielle peut être proactive et accompagner l'élève dans son raisonnement. L'accompagnement s'opère grâce à l'émission d'indices par rapport à la prochaine étape à effectuer. Cette prochaine étape peut être déterminée par le système tutoriel, qui a recours au chaînage, ou selon la reconnaissance de la stratégie actuellement mise en œuvre par l'élève.

Inversement, l'action tutorielle peut être rétroactive et réagir, après coup, aux actions de l'élève sans que ce dernier questionne directement le milieu. Les rétroactions peuvent simplement consister en une validation des actions de l'élève. Cette validation peut s'opérer localement après que l'élève ait soumis un énoncé (une justification, une conjecture ou une hypothèse) ou encore nécessiter l'entrée d'un triplet inférentiel (antécédent(s), justification, conséquent). Dans les deux cas, la validation est qualifiée de locale, car elle pose un jugement sur la validité d'une action indépendamment des actions posées précédemment ou du plan de résolution de l'élève. Naturellement, la validation peut aussi être globale et retourner à l'élève une appréciation générale de sa solution prise dans son ensemble. La solution peut prendre la forme d'une démonstration ou d'une construction géométrique selon les systèmes tutoriels étudiés. La validation est souvent communiquée à l'élève sous la forme d'un message très concis ou encore d'un symbole évocateur. Conséquemment, la validation ne fournit pas de précisions à l'élève quant à la pertinence, au rôle d'un énoncé ou d'une inférence correcte ou encore quand à la nature d'une erreur commise. La validation à elle seule est donc une forme de rétroaction assez primitive qui offre peu de soutien à l'élève en difficulté. C'est pourquoi la rétroaction peut aussi prendre d'autres formes plus complexes et détaillées. D'abord, en parallèle avec une validation qui souligne la présence d'erreurs, celles-ci peuvent être expliquées par le système tutoriel, donnant à l'élève la chance d'en comprendre la nature. Ce type de rétroaction suppose qu'un système reconnaisse ces déductions erronées, ce qui implique un travail préalable d'identification des erreurs les plus probables. Dans le même ordre d'idée, le système tutoriel peut annoter une solution finale et mettre en évidence les erreurs et les bons coups de l'élève, de manière à lui offrir une appréciation globale de la validité de son raisonnement. Cette façon d'intervenir du système tutoriel peut permettre à l'élève de prendre connaissance du contexte de chacun des commentaires du tuteur et ainsi, de mieux en saisir la portée. Finalement, le système tutoriel peut représenter les étapes de la solution fournies par l'élève sous forme de graphe déductif (Tanguay, 2005). Ce type de représentation facilite la visualisation par l'élève des liens logiques entre les propositions qu'il soumet en mettant en évidence la structure ternaire des inférences (Tanguay, 2006).

Maintenant que les différentes variables émergentes de l'analyse des systèmes tutoriels sélectionnés sont définies et expliquées, nous pouvons procéder à la comparaison des différents systèmes tutoriels entre eux en fonction de ces caractéristiques. Pour ce faire, nous allons décrire chacun des systèmes tutoriels, du plus ancien au plus récent, puisque nous ne souhaitons pas classer les systèmes les uns par rapport aux autres, mais plutôt dresser un portrait objectif de leurs caractéristiques. Les systèmes précédents QEDX sont décrit en fonction de la littérature disponible les concernant et aussi en fonction de notre expérience utilisateur à leur interface, lorsque celle-ci était disponible. En ce qui concerne

QEDX, sa description qui sera abordée dans la seconde partie de cet article, sera plus exhaustive puisque nous avons accès à l'interface mais aussi aux algorithmes et choix didactiques sous-jacents.

3. Synthèse du fonctionnement de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie

3.1. Geometry Tutor (Anderson *et al.*, 1985, Ritter *et al.*, 2010)

Une première version de Geometry Tutor a été publiée en 1985 et la dernière version analysée date de 2010. Nous allons d'abord décrire la première de ces versions pour ensuite préciser la nature des modifications apportées pour donner lieu à la plus récente.

La fenêtre d'accueil de Geometry Tutor comprend un dessin de figure géométrique qui accompagne l'énoncé du problème ainsi qu'un début de réseau déductif (arbre de démonstration) où sont inscrites les hypothèses et la conclusion du problème. L'élève doit compléter ce réseau d'inférences qui reliera les hypothèses du problème à la conclusion en y ajoutant des nœuds, c'est-à-dire des déductions (conséquents) et des justifications. Le choix des concepteurs d'organiser la preuve sous forme de graphe avait pour objectif de communiquer la structure logique de la preuve et du raisonnement déductif. Geometry Tutor ne permet pas à l'élève d'ajouter des nœuds au fil de ses besoins puisque le système ne permet que le chaînage avant et arrière. Les quelques solutions admises par le système pour chaque problème sont préalablement programmées par un expert didacticien ou un enseignant. Le système tutoriel permet à l'élève d'explorer plusieurs solutions en même temps et effectue une reconnaissance de plan (*model-tracing paradigm for instruction*) en analysant pas à pas la validité locale des actions de l'élève et en les comparant aux solutions témoins. Chaque action de l'élève est analysée, et le système tutoriel détermine si elle est correcte ou erronée. Si elle est erronée, le tuteur intervient et offre un indice pour rediriger l'élève vers une des solutions admises. Si l'entrée appartient à une des solutions, le tuteur détermine si cette action est indicative d'un nouveau plan de solution, mais n'intervient pas tant que l'élève ne commet pas d'erreur. Si l'entrée n'appartient ni à une solution ni à une erreur connue, ou si l'élève requiert de l'aide, le système tutoriel dicte la prochaine étape du dernier plan reconnu.

Dans la version de 2010, au fur et à mesure que l'élève fait référence aux éléments géométriques de la figure dans les inférences du schéma déductif, ils sont surlignés à même la figure, qui obtient donc le statut de figure interactive. Quant aux rétroactions du système tutoriel, les inférences erronées sont dorénavant ornées de rouge, ajoutant à l'aspect visuel de la validation. En ce qui a trait à l'accompagnement et à l'aide à la prochaine étape, au lieu de dicter directement la prochaine étape du dernier plan de solution reconnu, la directivité des indices du système tutoriel évolue graduellement.

3.2. Angle (Koedinger & Anderson, 1990, Koedinger & Anderson, 1993)

Le logiciel Angle s'inspire des compétences d'experts en résolution de problèmes de démonstration pour assister l'apprenti géomètre. Son fonctionnement s'appuie sur l'hypothèse que les experts en résolution de problème de démonstration imaginent un plan de résolution (*implicit planning*, Koedinger et Anderson, 1993), qui est composé de moments clés tirés de la démonstration détaillée. Ces moments remarquables reposent sur l'adéquation *entre raisonnement de démonstration* et *construction géométrique*, et correspondent à des constructions intermédiaires qui découlent d'un ensemble de déductions et qui lient une figure de départ (les hypothèses) et une figure finale (la conclusion). Ces constructions intermédiaires sont appelées *Diagram configuration* (DC) et chaque solution admise pour un problème donné est composée d'un enchainement de ces figures géométriques indicatives d'une étape clé des solutions des experts. En quelque sorte, les DC montrent où l'attention du géomètre était concentrée à un moment précis de la démonstration. Par exemple, si l'utilisateur veut démontrer qu'un segment donné est la médiatrice BH de la base d'un triangle ABC, il peut d'abord identifier la perpendicularité de ce segment BH avec la base AC du triangle avec une construction qui illustre seulement ces deux segments et la relation entre eux. La démonstration détaillée prend donc la forme d'un réseau déductif où *énoncés discursifs* et *figures statiques* (dessins) cohabitent. À chaque fois que l'élève soumet un DC, les déductions (liens entre le DC) dont cette configuration intermédiaire découle sont considérées comme prouvées. L'élève peut compléter cet organigramme (graphe) au fil de son exploration du problème et dans l'ordre qui lui plait, et la figure interactive adjacente à la fenêtre du schéma s'anime lorsque l'élève fait mention des éléments figuraux dans sa solution. L'élève, qui peut explorer plusieurs pistes de solution simultanément, complète une solution lorsqu'il réussit à relier par une suite ininterrompue de DC et de déductions sous-jacentes les hypothèses (figure initiale) à la conclusion (figure finale). À la demande de l'élève, le système tutoriel peut le diriger vers le prochain DC (en chaînage avant) de la solution identifiée comme dominante parmi celles qu'il a travaillées pour ensuite l'aider à compléter le détail des déductions.

3.3. Chypre (Bernat, 1993)

Pour ce qui est de Chypre (acronyme pour Conjecture HYpothèse PREuve), l'élève ne rédige pas de démonstrations comme telles, mais crée plutôt un réseau déductif en soumettant des assertions (hypothèses, conclusions intermédiaires ou finale) découlant de l'examen de l'énoncé du problème et de l'exploration d'une figure dynamique. Ces énoncés sont tirés d'un répertoire limité, et l'élève peut les proposer dans l'ordre qui lui plaît; le système, doté d'un module de déduction automatique, valide de manière locale et autonome le statut logique d'une entrée (prouvée ou non) et ajoute les liens logiques entre les différentes propositions du réseau déductif. Chypre se distingue par sa capacité à identifier la justification à laquelle fait appel chaque inférence et l'ajoute automatiquement au réseau déductif, mais cet atout dépend d'une programmation humaine préalable. De ce fait, l'élève n'a pas à fournir de propriétés ou de définitions pour compléter une inférence ; le conséquent obtient donc le statut de prouvé dès que tous les antécédents nécessaires à l'inférence sont soumis. Le problème est résolu lorsque le réseau déductif est complet et ne contient que des conséquents prouvés. Le module d'aide suggère, sous forme de menu déroulant, les énoncés que l'élève peut sélectionner pour éventuellement générer son réseau déductif. Toutefois, Chypre n'offre pas d'aide du type « prochaine étape » et les affirmations hors contexte ne sont pas identifiées comme telles, ne donnant pas l'opportunité à l'élève de se rendre compte qu'il s'écarte des possibilités de raisonnements valides.

3.4. Mentoniezh (Py, 1994, Py, 1996, Py, 2001)

Le projet Mentoniezh, appellation qui signifie *géométrie* en breton (Py, 1996), est un système qui date du début des années 1990. Au sein de Mentoniezh, la résolution d'un problème de démonstration s'opère en quatre phases : « lecture et analyse de l'énoncé (1), exploration du problème et recherche d'un plan (2), élaboration de la démonstration (3) et rédaction de la preuve (4) » (Py, 1996, p. 229).

Durant la phase 1, l'élève dégage les informations données dans l'énoncé du problème, soit les hypothèses et la conclusion à démontrer. Comme Mentoniezh ne fournit pas de figure géométrique, l'élève qui souhaite raisonner à l'aide d'une construction géométrique réelle doit la réaliser lui-même, en dehors de l'environnement de Mentoniezh, à partir des informations contenues dans l'énoncé du problème. Ensuite, l'élève sélectionne un par un les énoncés qu'il souhaite soumettre à l'aide d'un menu déroulant de mots clés, les complète avec les paramètres appropriés et les classe dans un tableau à trois colonnes : une colonne pour les hypothèses, une colonne pour la conclusion à démontrer et une colonne pour les observations supplémentaires. Le système tutoriel procède à une validation locale de la syntaxe de chaque entrée et à une validation globale du tableau. Il est en mesure de retourner des messages quant au statut des affirmations, par exemple indiquer à l'élève qu'il a classé la conclusion dans les hypothèses, diriger l'élève vers un énoncé manquant ou soulever les conjectures mentionnées de manière prématurée. L'élève peut passer à la prochaine étape de la résolution seulement lorsqu'il a correctement complété le tableau pour lequel il n'y a qu'une solution programmée préalablement par un enseignant.

La seconde phase, destinée à l'exploration du problème, vise l'élaboration d'un plan de démonstration. L'exploration prend la forme d'un dialogue entre le système tutoriel et l'élève, où ce dernier doit statuer s'il serait en mesure de prouver des propriétés de la figure géométrique (décrite dans l'énoncé) ciblées par le tuteur. Au cours de cette phase, une fenêtre affiche l'état de la démonstration en précisant si les propriétés invoquées par le système tutoriel sont étudiées, en cours d'étude ou à étudier. Une propriété est considérée comme étudiée lorsque l'élève a correctement identifié un plan (théorèmes, antécédents) pour la démontrer. Si l'élève est bloqué, il peut demander de l'aide au système tutoriel, qui lui proposera des théorèmes en lui demandant s'ils sont applicables. L'élève peut passer à la prochaine phase de résolution lorsqu'il aura étudié toutes les propriétés et donc établi un plan pour chacune des inférences formant la démonstration globale.

Au cours de l'élaboration de la preuve, troisième phase du processus de résolution, l'élève construit une preuve valide en articulant hypothèses, théorèmes et conclusion, et ce, en chaînage avant, arrière ou mixte. Durant cette étape, l'interface est divisée en trois fenêtres : une fenêtre de travail (brouillon), une fenêtre où s'affiche l'état de la démonstration en fonction du statut des énoncés la constituant (données et propriétés démontrées, à démontrer et conjectures) et une troisième fenêtre où s'affiche l'inférence courante sur laquelle l'élève travaille. En effet, dans Mentoniezh, bien que l'élève puisse élaborer sa preuve sans ordre prescrit, il doit soumettre ses pas de déduction sous forme de triplets inférentiels (hypothèse, théorème, conclusion) au tuteur. Au fur et à mesure que les inférences sont soumises par l'élève, elles sont validées par le tuteur qui les compare à une liste d'inférences produites par un moteur de déduction automatique, et l'état de la démonstration est mis à jour. Bien que Mentoniezh sache reconnaitre le plan de résolution de l'élève, la dernière version disponible n'est pas en mesure de proposer d'aide à la prochaine étape et se contente de corriger les inférences proposées par l'élève. Conséquemment, l'intervention tutorielle décrite par Py ne s'appuie pas sur la reconnaissance de plan pour fournir une aide plus personnalisée à l'élève.

Finalement, la quatrième et dernière phase de résolution consiste en la rédaction en langage naturel de la démonstration. L'élève rédige chacune des phrases constitutives de la preuve à partir d'une liste d'éléments susceptibles d'y figurer (hypothèses, théorème, conclusion, mots de liaison, symboles de ponctuation), et le système tutoriel valide chacune de ces phrases en procédant à un contrôle de la validité grammaticale (ordonnancement des éléments) et à une vérification de la logique géométrique (contenu et continuité thématique).

3.5. Cabri-DEFI (Luengo & Balacheff, 1995) et Cabri Euclide (Luengo, 2005)

Cabri-DÉFI (DÉFI : Démonstration et exploration de la figure interactive) et son successeur Cabri-Euclide sont tous deux le résultat d'une fusion de Cabri-Géomètre, un environnement de géométrie dynamique, et d'un module de rédaction de démonstrations, respectivement DÉFI et Euclide. Le développement de ces deux systèmes successifs est fondé sur l'idée d'une distinction entre le processus non contraignant de résolution de problème qui s'articule grâce à la figure dynamique et la rédaction séquentielle d'une démonstration. Comme le dit Luengo, concepteur de Cabri-Euclide :

> *In Cabri-Euclide, we chose to create a figure (graphic) workspace for heuristic analysis and the production of pragmatic proofs, and a separate text workspace for intellectual proofs (processing of linguistic expressions and analysis of their organisation). The system manages the relations between these two workspaces.* (Luengo, 2005, p. 20)

Dans Cabri-DÉFI, l'élève peut construire une figure dynamique en fonction de l'énoncé de problème fourni et l'explorer librement. Le système tutoriel graphique valide la construction de l'élève en vérifiant la présence d'éléments figuraux clés à l'aide des oracles de Cabri-Géomètre. Une fois la construction complétée, le système tutoriel dirige l'attention de l'élève sur des éléments figuraux de la construction qui véhiculent une ou des déductions en commençant par la conclusion du problème et en parcourant, à rebours (en chaînage arrière), les déductions sous-jacentes. Selon les concepteurs de Cabri-DÉFI, cette démarche heuristique d'exploration guidée précédant l'activité de rédaction permet de mettre en lumière des sous-problèmes de démonstration plus élémentaires tout en étant constitutifs du problème original. Pour chaque conjecture ciblée, le tuteur demande à l'élève s'il se croit capable de la démontrer et, dès que l'élève se dit en mesure de se lancer, le système bascule vers le module de rédaction. Même si au début du problème, l'exploration heuristique de la figure précède l'activité de rédaction, en cours de résolution du problème, l'élève peut alterner librement entre les modules d'exploration figurale et de rédaction.

Pour rédiger sa démonstration, l'élève doit d'abord choisir, à l'aide de mots clés, un théorème qui justifie la conjecture retenue parmi une liste d'énoncés de géométrie euclidienne programmée par un expert. Il doit ensuite fournir les antécédents qui complètent l'inférence. Le module de rédaction fonctionne en chaînage avant, et l'élève doit compléter une inférence avant d'en entamer une nouvelle. Chaque inférence est vérifiée, à la demande de l'élève, par le système tutoriel qui s'assure d'une part, à l'aide d'un moteur de déduction automatique, de la validité de la déduction logique et, d'autre part, de la présence des éléments figuraux mentionnés dans l'inférence. Les messages d'erreur retournés portent sur le statut opératoire des énoncés qui forment les inférences et non sur la pertinence de l'inférence dans la résolution du problème. Toutefois, le système tutoriel vérifie aussi automatiquement que chaque inférence ne mène pas à une preuve sans issue et interrompt le travail de l'élève si c'est le cas.

Pour ce qui est de Cabri-Euclide, son fonctionnement ressemble quelque peu à celui de son prédécesseur Cabri-DÉFI, moyennant quelques ajouts. D'abord, une fenêtre entièrement gérée par Cabri-Graph (Carbonneaux *et al.*, 1995) a été ajoutée à l'espace de travail de l'élève. Cabri-Graph réorganise les inférences fournies par l'élève en un graphe déductif. L'élève peut s'y référer à n'importe quel moment pour vérifier la progression de son raisonnement sans toutefois pouvoir modifier directement le graphe.

En ce qui a trait à l'aide tutorielle à la démonstration, d'entrée de jeu, lorsque l'élève soumet un énoncé qui se révèle faux, le système tutoriel retourne un contre-exemple sous forme de construction géométrique permettant à l'élève de percevoir concrètement son erreur. Cabri-Euclide se démarque aussi de Cabri-DÉFI par sa capacité de réfutation et de négociation avec l'élève (Luengo, 2005). Les messages retournés par l'agent tuteur ressemblent davantage au propos que tiendrait un tuteur humain, et le système tutoriel s'adapte selon les arguments avancés par l'élève. Les concepteurs de cet environnement souhaitent même qu'une version ultérieure du logiciel accepte des théorèmes applicables qui n'étaient pas préalablement implémentés sur les bases d'une argumentation de l'élève validée par un moteur de déduction automatique. Cet aspect très prometteur révolutionnerait le potentiel des systèmes tutoriels pour l'apprentissage de la démonstration en géométrie. Toutefois, pour le moment, Cabri-Eulcide se limite à la validation locale des inférences et n'offre pas une aide adaptée ou des indices quand l'élève est incapable d'avancer, à cause du choix des concepteurs de ne pas donner de « réponses » à l'élève.

3.6. Baghera (Webber *et al.*, 2001)

Baghera est un environnement dont l'interface est divisée en trois fenêtres. Dans la première, on peut prendre connaissance de l'énoncé du problème. La seconde fenêtre est consacrée à une figure dynamique. Celle-ci a été préalablement conçue grâce au logiciel Cabri-Java par l'expert qui a créé le problème, et elle peut être manipulée librement par l'élève. Toutefois, Cabri-Java ne permet pas l'ajout d'éléments figuraux à la construction d'origine. La dernière fenêtre est dédiée à la rédaction d'une démonstration formelle en chaînage avant.

Les concepteurs de Baghera lui donnent l'appellation de système multi-agents puisque l'intervention tutorielle de Baghera intervient à plusieurs niveaux. En fait, le système comporte trois agents aidants : le compagnon, le tuteur et le médiateur. Le compagnon guide l'élève qui ne maîtrise pas les différents aspects techniques de l'interface du logiciel. Quant à lui, le tuteur gère l'itinéraire de problèmes proposés à l'utilisateur en fonction de son parcours personnalisé. Enfin, le médiateur fournit une aide à l'élève en processus de rédaction de démonstration en vérifiant systématiquement la validité locale de chacune des justifications et des conjectures les unes par rapport aux autres à mesure qu'elles sont soumises par l'élève. Une fois que l'élève indique avoir terminé sa démonstration, un moteur de déduction automatique procède à l'évaluation formelle de la démonstration et, en guise de rétroaction, propose une annotation de celle-ci pour souligner les erreurs, proposer des contre-exemples ainsi que des alternatives au raisonnement soumis.

Baghera est aussi doté d'une interface expert où l'enseignant peut composer de nouveaux problèmes à résoudre et où il peut dialoguer librement avec ses élèves, à distance, dans des classes virtuelles.

3.7. Turing (El-Khoury *et al.*, 2005)

Turing est le premier système développé par le laboratoire de recherche du même nom. Son évolution a menée au développement de GeogebraTUTOR (GGBT) et, plus récemment, de QEDX. Turing comprend deux interfaces : une pour l'enseignant et une pour l'élève.

Turing est conçu comme une plateforme où aucun contenu ou problème n'est initialement implémenté. L'interface enseignante demande à l'enseignant de concevoir ses propres problèmes et d'implémenter des solutions qui concordent avec le paradigme géométrique qu'il exige habituellement. Dans Turing, l'aide tutorielle n'est ni générée ni gérée par un système tutoriel autonome, mais doit être programmée préalablement par l'enseignant. Les messages d'aide associés à des énoncés déductifs prédéterminés (hypothèses, justifications, conjectures) sont donc formulés et divulgués en fonction des choix ad hoc de l'enseignant. Comme l'enseignant peut également prévoir des « solutions » sans issue découlant d'erreurs communément observées dans ses classes, il peut aussi enregistrer des messages d'aide pour rediriger l'élève lorsque ce dernier s'écarte des solutions admises. Bien que Turing permette une grande souplesse à l'enseignant, son utilisation exige un investissement non négligeable de sa part.

Pour sa part, l'élève a accès à une figure dynamique qui peut être manipulée, modifiée et complétée dans l'environnement Cabri-Géomètre, qui est intégré à l'interface de Turing. L'espace de travail de l'élève comprend aussi une fenêtre pour la construction d'une démonstration. L'élève y complète sa solution en soumettant des hypothèses, des conjectures et des justifications sans être contraint au chaînage avant ou arrière, et le système valide chacune des entrées en vérifiant sa présence dans les solutions expertes. L'apprenti géomètre peut explorer simultanément plusieurs chemins de solution, mais Turing ne fait pas de reconnaissance de plan puisque l'aide tutorielle ne dépend pas de l'identification de la solution travaillée par l'élève. Pour valider le raisonnement global de l'élève, le système tutoriel ordonne les pas de déduction soumis pour recréer les différentes avenues de démonstration explorées par l'élève et les comparer à celles implémentées préalablement par l'enseignant. L'élève est réputé avoir résolu le problème lorsqu'il a réussi à reproduire une des solutions expertes.

3.8. Advanced Geometry Tutor (Matsuda & VanLehn, 2003)

L'Advanced Geometry Tutor s'inspire de son ancêtre Geometry Tutor, mais la genèse des solutions aux problèmes, au lieu d'être assurée par un enseignant expert, est prise en charge par un moteur de déduction automatique. Advanced Geometry Tutor établit un parallèle entre la construction d'une figure géométrique et le processus déductif de démonstration. Le moteur de déduction automatique GRAMY (Matsuda & VanLehn, 2004) génère, de manière autonome, les démonstrations admissibles à partir des hypothèses initiales du problème, d'une figure initiale associée à l'énoncé du problème et de la conclusion à démontrer. Le moteur de déduction automatique connaissant la conclusion à prouver procède en chaînage avant à partir des hypothèses pour construire les solutions admissibles. Chemin faisant, à chaque fois qu'une solution fait appel à un élément figural absent de la figure courante, le moteur de déduction ajoute l'élément et redémarre en chaînage avant. Ainsi, le moteur de déduction génère une suite de propositions discursives formant une démonstration ainsi que l'ensemble des éléments figuraux manquant à la figure initiale pour faire correspondre le raisonnement déductif et la complétion de la figure géométrique.

L'élève doit rédiger une démonstration en deux colonnes (propositions, justifications), soit en chaînage avant soit en chaînage arrière, tout en complétant la figure au fur et à mesure que de nouveaux éléments figuraux sont mentionnés, faute de quoi le système refuse le pas de déduction proposé. La plupart de ces éléments à construire consistent en des segments reliant deux points de la figure initiale. Toutefois, comme la figure n'est pas dynamique mais interactive, l'ajout d'éléments figuraux se fait grâce à des commandes en mode texte.

Comme l'élève ne peut changer de stratégie une fois sa solution entamée, le système tutoriel identifie, dès les premières actions de l'élève, la stratégie de ce dernier. L'intervention tutorielle est de directivité variable et dépend du niveau de compétence de l'élève. Concrètement, le système valide automatiquement chaque action de l'élève et, ce faisant, mesure le niveau de compétence de ce dernier (il augmente si l'action est reconnue ou diminue s'il y a erreur). En s'appuyant sur ce diagnostic, le système tutoriel accompagne l'élève pour l'amener à compléter la prochaine étape de sa démonstration, soit en expliquant la prochaine étape et en l'exécutant pour l'élève, soit en laissant l'élève l'exécuter par lui-même ou encore, en encourageant simplement l'élève à procéder à la prochaine étape.

3.9. Agent Geom (Cobo *et al.*, 2007)

Agent Geom permet, d'une part, la construction et l'exploration de figures dynamiques et, d'autre part, la rédaction de preuves discursives. L'élève peut alterner librement entre le module figural et le module de démonstration tout au long de sa résolution du problème. Ce système permet l'exploration en parallèle de plusieurs solutions et ne contraint pas l'apprenant au chaînage avant ou arrière.

Agent Geom est aussi doté d'une interface destinée à l'enseignant, qui peut concevoir des problèmes ou sélectionner les énoncés préalablement implémentés qu'il souhaite soumettre à ses élèves en identifiant les chemins de solution qu'il juge admissibles en fonction de sa pratique enseignante.

Supporté par les oracles de l'environnement de géométrie dynamique, le système tutoriel procède à un diagnostic quantitatif (pourcentage) de complétion de la figure géométrique à construire. La validation de la démonstration s'opère grâce à une comparaison de la solution de l'élève à celle créée ou choisie par l'enseignant. Le système tutoriel renvoie à l'élève des messages préprogrammés par l'enseignant en fonction des lacunes observées dans la démonstration. La structure de l'intervention tutorielle ne prévoit pas la gestion autonome par le système tutoriel d'un accompagnement personnalisé. Néanmoins, l'enseignant volontaire peut programmer des messages et des instructions en fonction de difficultés qu'il aurait anticipées, et l'élève peut solliciter cette aide quand il juge qu'elle s'avère nécessaire.

3.10. Geometrix (Gressier, 2011)

Geometrix est divisé en deux interfaces : une pour l'enseignant et une autre pour l'élève. La conception de problèmes de démonstration et l'élaboration des solutions s'opèrent grâce à la collaboration entre l'enseignant et un moteur de déduction automatique. Pour générer un problème de preuve, l'enseignant construit une figure géométrique (finale) et cache ensuite une partie des traces de cette construction pour générer une figure initiale. Cette figure initiale accompagnera l'énoncé du problème proposé à l'élève. À partir de la figure finale, le moteur de déduction automatique génère une liste de propriétés démontrables et demande à l'enseignant de choisir la conclusion qu'il souhaite voir l'élève démontrer en fonction du problème qu'il souhaite concevoir.

L'interface de l'élève est divisée en deux modules : un pour la reproduction de la construction finale de l'enseignant et un pour la construction de la démonstration discursive associée. Dans le module de construction, l'élève doit dupliquer la figure finale de l'enseignant en reproduisant exactement la démarche de l'enseignant faute de quoi le système ne reconnaitra pas le processus de construction. L'enseignant peut lui-même prévoir des messages à l'intention de l'élève, mais les messages divulgués automatiquement par le système tutoriel en fonction des constructions intermédiaires de l'enseignant sont souvent dépourvus de sens pour l'élève puisqu'ils font référence aux mêmes étapes de la construction avec lesquelles l'élève éprouve des difficultés.

Pour ce qui est de la rédaction de la démonstration, l'élève doit d'abord avoir résolu le problème de construction, qui lui donne accès à la figure finale ainsi qu'à l'énoncé du problème de démonstration. L'élève qui souhaite explorer les propriétés de la figure dynamique doit le faire dans le module de construction puisqu'une fois dans le module de rédaction, la figure fournie est statique. L'énoncé est accompagné de la liste des hypothèses et des justifications (avec explications) à employer et de la conclusion à démontrer. L'élève doit former des triplets inférentiels (hypothèses, justification, conséquent) et lorsqu'un conséquent est prouvé, il obtient le statut de donnée et peut être employé comme antécédent pour un prochain triplet inférentiel. Autrement dit, l'élève construit graduellement la preuve en chaînage avant jusqu'à ce qu'il complète le dernier triplet inférentiel qui démontre la conclusion au problème. La figure interactive met en surlignage les éléments figuraux au fur et à mesure que ceux-ci sont choisis par l'élève. Chaque triplet inférentiel est validé par le système, et ce dernier attire l'attention de l'utilisateur sur les erreurs commises le cas échéant (exemple, une hypothèse manquante pour démontrer une conjecture). Une fois la démonstration complétée, l'élève peut la visualiser.

4. Synthèse

Voici la grille d'observation complétée (Tableau II) en fonction des caractéristiques propres à chaque système tel que décrit dans la section précédente. Le crochet (✔) signifie que le système présente cette caractéristique et le rond (◦) signifie que cette particularité est envisagée pour le développement futur du système concerné.

Tableau II
Grille synthèse du fonctionnement des systèmes tutoriels analysés

	Intégration de la figure géométrique				Structure prévue pour l'exercice du raisonnement de démonstration géométrique						Intervention tutorielle							
	Figure statique		Figure dynamique		Solutions admises				Ordres des entrées		Intervention		Accompa-gnement	Rétroaction				
														Validation				
	Dessin	Figure interactive	Exploration	Construction	Moteur de déduction automatique	Programmées par un expert ou un enseignant	Exploration simultanée de multiples stratégies / Reconnaissance de plan	Phases séquentielles du raisonnement	Chaînage (avant, arrière)	Chaînage mixte ou exploration libre	À la demande de l'élève	Gérée par le système tutoriel	Indication prochaine étape (chaînage)	Locale : énoncés, inférences	Globale : solution, démonstration	Démonstration en graphe (réseau déductif)	Annotation de la démonstration	Explication des erreurs
Geometry Tutor		✔				✔	✔		✔		✔	✔	✔	✔		✔		✔
Angle	✔	✔				✔	✔			✔	✔	✔	✔	✔		✔		
Chypre			✔	✔	✔	✔				✔	✔	✔		✔		✔		
Mentoniezh					✔	✔	✔	✔		✔	✔			✔	✔			
Cabri-DÉFI			✔	✔	✔	✔		✔	✔		✔	✔		✔				
Cabri-EUCLIDE			✔	✔	✔	✔		✔	✔		✔	✔		✔		✔		✔
Baghera			✔		✔				✔			✔		✔	✔		✔	✔
Turing			✔	✔		✔	✔			✔		✔		✔	✔			
Advanced Geometry Tutor		✔			✔				✔			✔	✔	✔				
Agent-Geom			✔	✔		✔	✔			✔		✔		✔	✔			
Géometrix		✔	✔	✔	✔	✔		✔	✔			✔	✔	✔				

Si nous nous concentrons sur le premier volet de notre analyse, soit *l'intégration de la figure géométrique au sein du système tutoriel*, l'analyse comparative révèle de la section 4 révèle que les systèmes tutoriels les plus récents, Chypre et les suivants utilisent principalement la géométrie dynamique comme moyen pour l'élève d'explorer les propriétés de la figure géométrique, à l'exception de Mentoniezh qui ne fournit pas de figure géométrique et de l'Advanced Geometry Tutor qui intègre une figure statique interactive. De plus, la plupart de ces figures géométriques évoluent dans un authentique micromonde où l'élève peut, d'une part, explorer les limites de celles-ci et d'autre part, construire de nouveaux éléments figuraux. Seul Baghera ne permet pas à l'élève de modifier la figure initiale par un processus de construction géométrique.

En ce qui concerne la seconde catégorie qui articule notre analyse, c'est-à-dire la *structure prévue pour l'exercice du raisonnement de démonstration géométrique*, on remarque quant aux solutions admises que la plupart des systèmes exigent une programmation humaine à un moment ou à un autre pour assurer leur fonctionnement. De plus, les quelques systèmes tutoriels qui reposent entièrement sur un moteur de déduction automatique, soit Baghera et Advanced Geometry Tutor, forcent l'élève à travailler en chaînage. Nous avons aussi remarqué une relation entre le déroulement imposé au raisonnement global et à l'ordonnancement exigé pour la rédaction de la démonstration (le chaînage). En effet, une minorité des systèmes tutoriels imposent un déroulement séquentiel au raisonnement de l'élève, mais ces systèmes, soit Cabri-DÉFI, Cabri-EUCLIDE et Géométrix, obligent aussi l'élève à opérer en chaînage avant. Finalement, le peu de systèmes qui accomplissent la reconnaissance de plan, la fonction qui permet à l'élève d'explorer plusieurs stratégies simultanément (Geometry Tutor, Angle, Montoniezh, Turing et Agent-Geom), reposent aussi sur la programmation des solutions par un expert et non par un moteur de déduction automatique. En somme, on peut déduire qu'une approche qui admet les aléas du raisonnement de l'élève en cours de processus de découverte ne semble pas compatible avec le paradigme de géométrie formelle imposé par un moteur de déduction automatique.

Pour ce qui est des interventions tutorielles, dernier volet de notre étude comparative, la majorité des systèmes tutoriels, à l'exception de Mentoniezh, gèrent en totalité ou en partie le déclenchement des rétroactions ou des messages d'aide à la prochaine étape. Par ailleurs, cette dernière forme d'accompagnement, qui implique que le système tutoriel puisse identifier la solution travaillée par l'élève pour le guider vers la prochaine action à poser, est rare. Seuls Geometry Tutor, Angle, Advanced Geometry Tutor et Géométrix sont en mesure d'offrir des indices quant au prochain pas de raisonnement attendu. En outre, l'aptitude à fournir une aide à la prochaine étape semble aller de pair avec l'imposition à l'élève d'une structure plus rigide pour l'exercice de son raisonnement. En effet, parmi les 11 systèmes tutoriels étudiés, Angle est le seuls à accomplir la reconnaissance de plan et à fournir une aide à la prochaine étape tout en laissant l'élève travailler des solutions en exploration libre (sans chaînage). En ce qui a trait à la rétroaction, tous les systèmes tutoriels analysés offrent une rétroaction sous forme d'une validation locale des inférences ou des énoncés soumis par l'élève, et on recense peu de validation globale de démonstrations (Mentoniezh, Baguera, Turing et Agent-Geom), et encore moins d'annotation des solutions (Baguera) ou d'explication des erreurs (Geometry Tutor, Cabri-EUCLIDE et Baguera). De plus, seulement quatre systèmes tutoriels, soit Geomtry Tutor, Angle, Chypre et Cabri-EUCLIDE, ont recours au réseau déductif pour permettre à l'élève de visualiser sa démonstration dans son ensemble. Ainsi, la rétroaction fournie par les systèmes étudiés semble privilégier une validation locale d'actions isolées (première ramification de la colonne rétroaction) au détriment d'une appréciation de la démonstration et de la structure logique sous-jacente dans leur globalité, soit les modes de rétroaction décrits par les quatre dernières ramifications de la colonne rétroaction.

Conclusion

Le présent bilan permet une vue d'ensemble des technologies disponibles pour l'accompagnement d'élèves en résolution de problème de démonstration en géométrie plane. Cette analyse a aussi permis de dégager des ilôts conceptuels autour desquels, grâce à une recherche didactique poussée, nous avons construit un ensemble de concepts et de positions théoriques sur lesquel s'est appuyé la conception du tutoriel QEDX qui sera l'objet de la deuxième partie de notre article. Éventuellement, les indicateurs retenus pour comparer les systèmes tutoriels pourront aussi servir de base théorique pour une analyse plus fine du fonctionnement de ces systèmes. Cette analyse s'appuyant sur les fondements de modèles et de théories didactiques établis permettra un regard sur le travail mathématique assisté par des système tutoriels et sur la contribution de ceux-ci aux apprentissages géométriques.

Bibliographie

ANDERSON J. R., BOYLE F. & YOST G. (1985), The goemetry tutor, *Advanced Computer Tutoring Project*.

BALACHEFF N. (1994), Didactique et intelligence artificielle, *Recherche en didactiques des mathématiques* **14(1/2)**, 9-42.

BALACHEFF N. & MARGOLINAS C. (2005), *Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BAULAC Y. (1990), *Un micromonde de géométrie, cabri-géomètre*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier.

BERNAT P. (1993), Chypre : Un logiciel d'aide au raisonnement, *Repères-IREM* **10**, 25-46.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CARBONNEAUX Y., LABORDE J.-M. & MADANI R. M. (1995), Cabri-graph : A tool for research and teaching in graph theory, dans *Graph drawing* (Eds. F. J. Brandenburg), **1027**, 123-126, Springer, Berlin Heidelberg.

COBO P., FORTUNY J. M., PUERTAS E. & RICHARD P. R. (2007), Agentgeom: A multiagent system for pedagogical support in geometric proof problems, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **12**, 57-79.

COUTAT S., LABORDE C. & RICHARD P. R. (2016), L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : Propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, **93(2),** 195–221.

DREYFUS T. (1999), Why johnny can't prove, *Educational Studies in Mathematics,* **3**, 85-109.

EL-KHOURY S., RICHARD P. R., AIMEUR E. & FORTUNY J. M. (2005), Development of an intelligent tutorial system to enhance students' mathematical competence in problem solving, Dans *World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education* (Eds. G. Richards), Vancouver.

ELSOM-COOK M. (1990), *Guided discovery tutoring*, Paul Chapman Publishing, Londre.

GRESSIER J. (2011), *Http ://geometrix.Free.Fr/jgressier/*, en ligne, 2011.

HANNA G. (2000), Proof, explanation and exploration: An overview, *Educational Studies in Mathematics,* **44(1/2),** 5-23.

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **11**, 175-193.

KOEDINGER K. R. & ANDERSON J. R. (1990), Theoretical en empirical motivations for the design of angle : A new geometry learning environment, *Knowledge-Based Environments for Learning and Teaching, AAAI Spring Symposium Series*, Standford.

KOEDINGER K. R. & ANDERSON J. R. (Eds.) (1993), *Reifying implicit planning in geometry: Guidelines for model-based intelligent tutoring system design,* Hillsdale.

LABORDE C. & CAPPONI B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en didactiques des mathématiques,* **14(1.2),** 165-210.

LUENGO V. (2005), Some didactical and epistemological considerations in the design of educational software : The cabri-euclide example, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **10**, 1-29.

LUENGO V. & BALACHEFF N. (1995), Contraintes informatiques et environnements d'apprentissage de la démonstration en géométrie.

MATSUDA N. & VANLEHN K. (2003), Modeling hinting strategies for geometry theorem proving, *9th international conference on User modeling.* Springer-Verlag, Johnstown, Pensylvania.

MATSUDA N. & VANLEHN K. (2004), Gramy: A geometry theorem prover capable of construction, *Journal of Automated Reasoning*, **32**, 3-33.

PAILLE P. & MUCCHIELLI A. (2013), *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales (3e édition),* Armand Colin, Paris.

PLUVINAGE F. & RIGO LEMINI M. (2008), Mais non, marina!, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **13**, 40-61.

PY D. (1994), Reconnaissance de plan pour la modélisation de l'élève, le projet mentoniezh, *Recherche en didactiques des mathématiques,* **14(1.2),** 113-138.

PY D. (1996), Aide à la démonstration en géométrie : Le projet mentoniezh, *Sciences et techniques éducatives*, **3(2),** 227-256.

PY D. (2001), *Environnements interactifs d'apprentissage et démonstration en géométrie*, Thèse de doctorat, L'Université de Rennes 1.

RABARDEL P. (1995), *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments comtemporains,* Armand Colin, Paris.

RICHARD P. R. & FORTUNY J. M. (2007), Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **12**, 83-116.

RITTER S., TOWLE B., MURRAY R. C., HAUSMANN R. G. M. & CONNELLY J. (2010), A cognitive tutor for geometric proof, dans *Lecture notes in computer science* (Eds. J. K. V. Aleven, And J. Mostow), **6095**, Springer, Berlin.

TANGUAY D. (2005), Apprentissage de la démonstration et graphes orientés, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **10**, 55-93.

TANGUAY D. (2006), Comprendre la structure déductive en démonstration, *Envol*, **134**, Groupe des responsables en mathématique au secondaire inc, Boucherville, Québec.

TESSIER-BAILLARGEON M., RICHARD P. R., LEDUC N. & GAGNON M. (2014), Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : Genèse d'un espace de travail géométrique idoine, *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa,* **17(4-I),** 191-210.

VILLIERS M. D. (2007), Some pitfalls of dynamic geometry software, *Teaching Mathematics*, **4**, 46-52.

WEBBER C., BERGIA L., PESTY S. & BALACHEFF N. (2001), Baghera project: A multi-agent architecture for human learning, *Workshop Multi-Agent Architectures for Distributed Learning Environments, AIED2001,* San Antonio, Texas.

MICHELE TESSIER-BAILLARGEON
PHILIPPE R. RICHARD
Université de Montréal
Faculté des sciences de l'éducation
Département de didactique
Case postale 6128, succursale Centre-Ville
Montréal, QC H3C 3J7
Tb michele@hotmail.com
Philippe.r.richard@umontreal.ca

NICOLAS LEDUC
MICHEL GAGNON
École Polytechnique Montréal
2900 Boulevard Edouard-Montpetit
Montréal, QC H3T 1J4
nicolas.leduc@polymtl.ca
michel.gagnon@polymtl.ca

JEAN-BAPTISTE LAGRANGE, JANINE ROGALSKI

SAVOIRS, CONCEPTS ET SITUATIONS DANS LES PREMIERS APPRENTISSAGES EN PROGRAMMATION ET EN ALGORITHMIQUE

Abstract. Knowledge, concepts, and situations in first learning of programming and algorithmics. In several countries including France, there is a growing interest for the teaching and learning of algorithmics and programming at school and college level. It is then necessary to question the objectives of this teaching and learning, and to propose controlled implementations. This article, written by a researcher in cognitive ergonomics and a researcher in didactics, aims at assessing some research results in this field, on the basis of research work conducted sporadically since thirty years. It first attempts to show the permanence of questions related to beginners' conceptual difficulties, and then tackles the issue of learning situations. Then it takes stock of results obtained in psychology of programming, focusing on a conceptual field precisely identified around the concept of computer variable. The conclusion gives evidence of a broad field of research now open.

Résumé. Dans de nombreux pays, dont la France, l'intérêt se porte actuellement sur l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation aux niveaux scolaire et pré-universitaire, et la nécessité se fait sentir de travaux questionnant les objectifs d'un tel enseignement et proposant des mises en œuvre et des évaluations. Cet article, écrit par un chercheur en psychologie cognitive et un didacticien des mathématiques, vise à un premier bilan sur la recherche dans ce domaine en s'appuyant sur des travaux menés de façon sporadique depuis une trentaine d'années. Il s'attache d'abord à montrer la permanence de questions posées par les difficultés conceptuelles des élèves débutants, puis étudie la question des situations d'apprentissages. Ensuite il fait le point sur les acquis de la psychologie de la programmation, en se centrant sur un champ conceptuel précisément identifié, celui de « la variable informatique ». La conclusion montre qu'un champ de recherche très large est ouvert.

Mots-clés. Savoirs, concepts et situations en algorithmique, difficultés conceptuelles, élèves débutants, situations didactiques, variable informatique, psychologie de la programmation.

Introduction

En France, l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation est revenu récemment dans le curriculum scolaire des mathématiques[1]. Précisons d'emblée

[1] L'informatique comme science ne se réduit certes pas à l'algorithmique et la

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p.119 - 158.

que le curriculum de mathématiques de 2009 pour la classe de Seconde (élèves de 15 ans) nous semble illustrer la difficulté à opérer une distinction nette entre algorithmique et programmation : « Ce qui est proposé [pour la démarche algorithmique] est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. ». L'indifférenciation entre algorithmique et programmation s'exprime aussi dans les capacités attendues des élèves : « écrire une formule permettant un calcul », « écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrée et sortie nécessaires au traitement » ; « programmer un calcul itératif » ; « programmer une instruction conditionnelle ». L'incertitude quant à la dualité algorithmique / programmation se retrouve dans les représentations exprimées par les enseignants et dans leur pratique (Couderette, 2016 ; Haspékian & Nijimbéré, 2016)[2]. Notre postulat dans cet article est que l'on peut porter un regard didactique et psychologique sur les savoirs, concepts et situations en jeu, sans poser l'élucidation de cette dualité comme un préalable.

Dans d'autres pays, l'intérêt se porte aussi sur ce type d'enseignement au niveau scolaire (par exemple en Uruguay : daRosa, 2015) ou dans les premières années d'université (par exemple au Canada : Broley, 2016). Ces deux exemples illustrent que, dans ces pays aussi, algorithmique et programmation sont peu distinguées. Les exemples montrent aussi que le développement de ce type d'enseignement peut être soutenu par des travaux en didactique questionnant ses objectifs et proposant des mises en œuvre et des évaluations. Cependant, comme nous l'avons noté (Lagrange, 2014) la recherche en didactique sur l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation reste encore très peu développée ; en effet, de tels enseignements ont existé depuis plus de trente ans dans différents pays et ont donné lieu à diverses recherches, mais leur caractère sporadique n'a pas permis pas de capitaliser des acquis, ce à quoi cet article souhaite remédier.

Cet article est écrit par deux chercheurs travaillant dans le même laboratoire, mais appartenant à des champs différents, la didactique des mathématiques et la

---

programmation, mais c'est en revanche le cas dans les programmes de mathématiques de lycée, le niveau essentiellement considéré dans cet article. Nous n'avons pas d'éléments pour anticiper les changements que pourraient produire les introductions de l'informatique dans les niveaux antérieurs (primaire et collège).

[2] Une étude de la dualité algorithmique/programmation dans les ouvrages universitaires de référence dépasserait le cadre de notre article. Notons seulement que Knuth (2011), contraste algorithme et programme sur la dimension abstrait / concret : *Les algorithmes sont des procédures de calcul abstraites pour transformer des informations ; les programmes en sont leurs incarnations concrètes* (p. 317).

psychologie cognitive. Dans de nombreux domaines de l'enseignement et de l'apprentissage, un double point de vue impliquant ces deux champs[3] s'est montré pertinent et fructueux. Du point de vue de la didactique, nous considérons ici les apprentissages en programmation et en algorithmique dans un contexte scolaire que nous allons préciser. Du point de vue de la psychologie cognitive, ces apprentissages concernent l'informatique « objet », à la fois champ scientifique et domaine professionnel, et l'informatique « outil » comme technologie. La programmation y est considérée dans un sens large, incluant différents aspects du développement logiciel. L'existence depuis bientôt 30 ans, dans la psychologie cognitive, d'un champ de recherche sur la programmation rend incontournable la prise en compte de ses acquis dans toute recherche y compris sur des débutants.

Les premières parties de cet article se basent sur des recherches menées dans le contexte français à deux époques différentes. Nous rappelons d'abord dans quelles conditions des apprentissages en programmation et en algorithmique ont pu exister antérieurement dans le curriculum scolaire français. Dans une première partie nous recherchons s'il existe une continuité dans les phénomènes concernant les apprentissages en programmation et en algorithmique, en mettant en correspondance des observations sur le comportement des élèves dans le contexte curriculaire récent, avec des analyses dans un contexte plus ancien. De manière similaire nous recherchons comment la question des situations d'apprentissage s'est posée dans différents contextes. Ces deux parties s'appuient sur l'expérience du premier auteur et des travaux d'étudiants en didactique des mathématiques. La troisième partie répond à la nécessité d'élargir le propos au-delà des expériences isolées qui alimentent les deux premières parties, et se place du point de vue du développement de la conceptualisation chez les élèves. Nous recherchons quels acquis de la psychologie de la programmation sont utiles dans le contexte actuel, à travers une présentation de ses acteurs et de son évolution. Nous particularisons sur un champ conceptuel précisément identifié, celui de « variable informatique » un terme que nous allons préciser dans la suite. Pour conclure, nous joignons les deux points de vue pour établir un bilan et souligner les questions qui nous semblent prioritaires.

D'un contexte à l'autre

Au début des années 1980, l'ordinateur est devenu un objet assez accessible, mais sur les machines grand public ou pour l'enseignement, les usages possibles sont

---

[3] La Double Approche pour les mathématiques a été développée par Robert et Rogalski (2004). Voir aussi Vandebrouck (2008, 2013).

restés limités à la programmation. « *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt* » est paru en 1977 et a été traduit en français au début des années 1980 (Engel, 1980). Il proposait que les mathématiques scolaires mettent l'accent sur les algorithmes, leur construction et leur mise à l'épreuve. Un autre livre, « *Mindstorm* » sur les apports de la programmation Logo est paru aussi en français à la même époque (Papert, 1981). Ces ouvrages témoignent de ce que les activités de programmation ont été vues par beaucoup d'innovateurs comme pouvant contribuer aux apprentissages dans les domaines scientifiques existants, les mathématiques en premier lieu. Cela s'est traduit par quelques pratiques et groupes de recherche dans les IREM, sans toutefois qu'il y ait un impact sur le curriculum, au moins en France. En revanche, l'institution a mis en place un enseignement centré sur l'informatique comme champ scientifique, l'option informatique des lycées. Il s'agissait d'offrir aux élèves de lycée un nouveau champ d'étude, en soulignant les liens qu'il entretient avec les autres champs scolaires, avec une forte dimension programmation (Baron, 1989)[4].

Au tournant des années 1990, les activités de programmation ont disparu du curriculum avec l'arrêt de l'option informatique[5]. Un retournement de point de vue a eu lieu : de l'informatique comme discipline « objet » on passe à son utilisation comme « outil ». En mathématiques, le développement de progiciels comme les tableurs, ainsi que des applications dédiées aux mathématiques comme le calcul formel et la géométrie dynamique y ont contribué. Ainsi, Ruthven (1996) écrit :

> Building expertise and fluency in programming requires a considerable investment of time and effort, and imposes significant intellectual demands in its own right. In purely instrumental terms, newer tools, such as the spreadsheet, offer comparable power and versatility with lower overheads of technique and greater interactive flexibility. (p.458)

La résurgence actuelle des activités de programmation en relation avec

---

[4] Le volume horaire est alors de 2,5 h par semaine, avec le thème central de construction de programmes. La récursivité est objet d'enseignement en terminale. La dimension sociale de l'informatique y avait également une place explicite. Il est prévu une épreuve d'option au baccalauréat, avec question de cours sur l'informatique, traitement d'un « thème de société », et élaboration d'un programme. Des enseignants formés en « stages lourds » y enseignent, de diverses disciplines – souvent mais pas seulement scientifiques. La dimension sociale de l'informatique y avait également une place explicite.

[5] Le travail avec Logo, engagé hors curriculum en primaire, s'arrête pratiquement aussi.

l'algorithmique peut s'interpréter comme une prise de conscience, 20 ans après, de deux réalités. D'une part les activités avec des progiciels ou des applications dédiées ne sont pas non plus faciles à mettre en œuvre et ne conduisent pas nécessairement à la compréhension des principes essentiels qui sous-tendent leur conception. D'autre part, le besoin de compétences pour la programmation professionnelle appelle des étudiants motivés et suffisamment « débrouillés » en informatique pour suivre les cursus nécessaires. D'où une demande dans de nombreux pays d'un enseignement dès le secondaire « long ».

Observations dans le contexte actuel et dans l'option informatique des années 1980

L'expérience des années 1980 telle qu'évoquée par Ruthven, contredit l'idée d'un accès aisé des élèves à une expertise suffisante pour que les activités en programmation et algorithmique puissent contribuer à des apprentissages. Nous recherchons, à travers des exemples pris dans des travaux de recherche, comment des questions liées la construction de cette expertise se posent dans les deux contextes, et comment elles renvoient à des savoirs et aux situations qu'il est nécessaire de mettre en place pour que les élèves se confrontent à ces savoirs. Nous considérons dans cette première partie deux exemples de difficultés résistantes, déjà observées dans les travaux de l'époque de l'option informatique et retrouvées dans l'introduction de l'algorithmique et de la programmation au lycée dans le curriculum de mathématiques depuis 2009. Le premier exemple concerne les spécificités des langages informatiques, et le second porte plus particulièrement sur le statut donné aux « conditions » dans les langages informatiques.

Comprendre les spécificités des langages informatiques

Les langages informatiques se définissent comme des langages formels utilisés pour l'exploitation d'un système. Nous désignerons par « dispositif », tout système commandé par un tel langage. Un texte syntaxiquement correct écrit avec le langage peut être interprété comme organisant un « traitement », c'est-à-dire une suite de modifications apportées à l'état du dispositif. Dans une large classe de langages, l'état du dispositif à une étape du traitement se décrit comme l'ensemble des valeurs prises par des « variables ». Ces variables sont caractérisées par leur « type ». Nous considérerons ici des types « simples » définis par un ensemble de valeurs et un jeu d'opérateurs. Nous considérons : 1°) le type « nombre » avec comme ensemble de valeurs les décimaux de taille et de précision donnée et comme opérateurs les opérations arithmétiques (+, -, *, /) ; 2°) le type « chaîne », dont les valeurs sont des assemblages séquentiels de caractères reconnus par le dispositif et les opérateurs des « fonctions » que nous préciserons plus loin ; 3°) le type « booléen » avec deux valeurs (Vrai et Faux) et les connecteurs logiques (négation, conjonction, disjonction) qui opèrent sur ce type de variables.

Nous nous intéressons ici aux langages impératifs, qui sont les langages généralement proposés aux débutants. Ils permettent d'exprimer le traitement à l'aide d'instructions organisées sous forme séquentielle, alternative (`SI <condition> ALORS <instructions> SINON <instructions>`) ou itérative (par exemple `TANT QUE <condition> FAIRE <instructions>`). Dans ces langages, les types nombre et chaine disposent d'instructions de lecture et d'affichage généralement utilisées avec les débutants pour marquer respectivement les données initiales et le ou les résultats[6]. Ces caractéristiques font que les algorithmes ou programmes écrits en langage impératif « ressemblent » à l'expression de traitements « familiers ». Notre hypothèse est que, pour des débutants, cette similarité peut être initialement une aide, mais qu'elle peut aussi constituer un obstacle à la compréhension de propriétés générales des langages informatiques, et de l'expression appropriée des traitements.

Nous prenons un premier exemple dans la thèse de Briant (2013). L'auteure présente une situation dont l'objectif est de montrer aux élèves que la résolution de certaines équations peut se faire de manière algorithmisée. Une tâche consiste pour les élèves à réaliser un traitement prenant en entrée trois réels `a`, `b` et `c`, et donnant en sortie la solution, quand elle existe et est unique, de l'équation `ax+b=c`, ou un message adéquat dans les autres cas[7]. L'auteure donne une variété de solutions d'élèves, dont certaines sont présentées dans le tableau 1.

La solution attendue est proche de la solution « élève » n°1 du tableau 1[8]. Certains élèves produisent cette solution. Elle témoigne d'une prise de conscience de la capacité du dispositif à traiter une formule écrite dans une syntaxe très proche de

---

[6] Dans les exemples qui sont donnés plus loin, les écritures sont produites par les élèves dans différents environnements dont les différences ne sont pas significatives pour notre propos ; les lecteurs reconnaitront l'environnement Algobox (affection notée « prend la valeur », Tableau 1) et les langages LSE (affection notée ←, Tableau 2) et Pascal (affection notée :=, Tableau 3).

[7] Nous ne discutons pas ici la pertinence de la tâche en regard de l'objectif de l'auteure. Nous nous intéressons seulement à l'écart entre la solution attendue et les réalisations des élèves, en fonction de notre hypothèse.

[8] Pour que cette solution soit complète, il faudrait aussi que l'élève prenne en compte les différents cas où n'existe pas une solution unique. Cette prise en compte est importante à la fois d'un point de vue informatique et d'un point de vue mathématique, elle sera analysée dans la troisième partie.

l'algèbre habituelle, en instanciant les trois paramètres selon les valeurs données en entrée. D'autres élèves produisent des solutions du type de celles numérotées 2 et 3 dans le tableau : ils essaient de traduire l'équation avec les éléments syntaxiques du langage, soit par une affectation (Solution « élève » n°2), soit par une condition (Solution « élève » n°3) puis « délèguent » au dispositif la résolution et l'expression des solutions. Les solutions du type de celle numérotée 4 dans le tableau sont aussi très souvent rencontrées : la variable I prend les valeurs successives du « second membre » quand on résout l'équation en papier/crayon. Même si la solution est syntaxiquement correcte, Briant relève que les élèves sont réticents à une formulation comme celle de la solution n°1, ce qu'elle analyse comme une résistance à adopter un traitement qui ne coderait pas les actions successives.

Solution « élève » n°1 DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b LIRE c x PREND_LA_VALEUR (c-b)/a AFFICHER x FIN_ALGORITHME	Solution « élève » n°3 DEBUT_ALGORITHME SI (ax+b=c) ALORS DEBUT_SI FIN_SI FIN_ALGORITHME
Solution « élève » n°2 DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b c PREND_LA_VALEUR aX+b FIN_ALGORITHME	Solution « élève » n°4 DEBUT_ALGORITHME LIRE a LIRE b LIRE I I PREND_LA_VALEUR I-b I PREND_LA_VALEUR I/a x PREND_LA_VALEUR I AFFICHER x FIN_ALGORITHME

Tableau 1: quatre solutions pour une équation du 1er degré. D'après Briant (2013, p. 414)

Des difficultés elles-aussi relatives aux spécificités des langages informatiques, avaient été antérieurement observées et analysées dans le contexte de l'option informatique (Lagrange, 1991). Il s'agissait d'une séquence d'apprentissage sur le type « chaîne » en classe de Seconde, dont l'objectif général était la prise de conscience par les élèves du caractère calculable des objets liés aux variables de ce type. Notre hypothèse était que, à la différence du type « nombre » dans l'exemple précédent, les écritures impliquant des chaînes ne seraient pas associées par les élèves à des expressions manipulées en algèbre et que donc les difficultés observées renverraient plus directement à des spécificités des langages informatiques.

Outre l'affectation, la lecture et l'affichage, ce type offre une fonction `longueur` rendant le nombre de caractères d'une chaîne et une fonction `souschaine` rendant une chaîne d'une longueur donnée (troisième paramètre) constituée de caractères consécutifs d'une chaîne donnée (premier paramètre) à partir d'un rang donné (second paramètre). Nous analysons ici une tâche typique (question 2, tableau 2), donnée à des élèves ayant eu une quarantaine d'heures en informatique avec une initiation au type chaîne de caractères (sans l'opération de concaténation).

<table>
<tr>
<td>On donne le programme :
<pre>Lire X
A←souschaine(X,1,1)
L←longueur(X)
B←souschaine(X,L,1)
afficher A;B</pre>1. Indique ce que l'ordinateur affiche pour l'entrée de « BONJOUR », de « B ».

Réponse attendue : BR, BB</td>
<td>2. Ecris un programme pour que l'utilisateur ayant entré une chaîne, l'ordinateur affiche la chaine en passant la première lettre à la fin. (BONJOUR → ONJOURB)

Réponse attendue :
<pre>Lire X
L←longueur(X)
A←souschaine(X,2,L-1)
B←souschaine(X,1,1)
afficher A;B</pre></td>
</tr>
</table>

Tableau 2 : Une tâche « classique » sur les chaînes

La première question demandait d'interpréter un petit programme : les variables `A` et `B` prennent respectivement comme valeur le premier caractère et le dernier caractère d'où les réponses attendues. Une réponse correcte à la question 2 consiste à affecter à une variable `L` la longueur de la chaine entrée `X` comme dans la question 1, puis à une variable `A` la sous-chaine de la chaine entrée `X` commençant à `2` et de longueur `L-1`, à une variable `B` le premier caractère comme dans la question 1, et à afficher la chaîne `A`, suivie de la chaîne `B`.

Pour la première question, les résultats avaient été donnés correctement (sauf par un élève qui donnait B au lieu de BB pour l'entrée de la lettre B). Pour la seconde question, environ la moitié des élèves ne donnaient pas de réponse syntaxiquement correcte. Une réponse typique d'élève est la suivante :

```
A←souschaine(X,2,L+souschaine(1,1))
```

L'élève imbrique deux appels à la fonction sous-chaine. Les deux premiers arguments sont corrects, mais le troisième est syntaxiquement incorrect et d'interprétation peu aisée : l'élève « additionne » une variable représentant probablement la longueur (mais non affectée préalablement) et un appel à `souschaine` incorrect puisqu'avec deux arguments seulement.

L'épreuve a été suivie d'un entretien devant l'ordinateur avec des élèves ayant donné ce type de réponse. Dans l'exemple qui suit, l'observateur (**O**) a d'abord tenté une correction syntaxique, soulignant l'absence d'affectation à L, l'addition d'un nombre et d'une chaîne et l'absence d'une instruction de sortie du résultat. Il a constaté que les corrections apportées ne faisaient pas sens pour l'élève (**E**). Revenant à la réponse de l'élève, il a demandé ce que cette réponse signifiait pour elle :

> **O**. Tu avais mis un « + » ici, que signifie-t-il ?
>
> **E**. Ben, là… j'avais écrit `BONJOUR` donc `X,` à partir de la deuxième, on prend la longueur totale, plus la première lettre, on en prend une.
>
> **O**. C'est quoi souschaine(1,1)… ?
>
> **E**. La longueur de `X` et `1 et 1.`

Les réponses montrent que cette élève se servait des fonctions sur les chaînes pour coder des actions, sans exprimer ces actions comme la modification de valeurs des variables. Pour cette élève, `L` n'est pas la valeur d'une variable mais l'action de « prendre la longueur totale » ; `souschaine(1,1)` est l'action de « prendre la première lettre » et cette action s'exerce sur l'objet en jeu (qu'il n'est alors pour cette élève pas nécessaire de renommer). L'affectation répond à une simple nécessité syntaxique[9].

Dans un langage impératif, le traitement s'exprime comme une succession d'affectations de variables qui modifient l'état du dispositif. Dans les deux exemples, nous voyons qu'à des titres divers, les élèves observés ne saisissent pas ce fonctionnement. Les solutions 2 et 3 du premier exemple ignorent la nécessité d'exprimer le traitement pour que le dispositif puisse l'opérer. Dans le cas des chaînes nous voyons que les objets en jeu ne sont pas clairement identifiés comme des variables, que les fonctions sur les chaînes sont conçues comme des actions qui modifient ces objets et que l'affectation n'a pas de signification fonctionnelle. Ceci

---

[9] Ceci est attesté par le fait suivant : dans un exercice traité ensuite, l'élève produit deux affectations sur la même variable A dont la valeur n'est pas réutilisée (Lagrange, 1991).

nous permet d'interpréter la solution 4 du tableau 1 : bien qu'objectivement l'évolution de la variable I soit correctement organisée, les réticences des élèves à adopter la solution 1 montrent que subjectivement ils restent attachés à un traitement congruent à la succession d'actions dans la résolution papier/crayon : « soustraire b au second membre », puis « le diviser par a ».

Le traitement des booléens qui intervient nécessairement dans l'expression des conditions des alternatives nous fournit un autre exemple du caractère récurrent des difficultés de débutants.

Booléens et « conditions »

Dans les pratiques actuelles courantes au lycée, le type booléen dont nous avons donné plus haut les caractéristiques, n'est pas explicitement rencontré. Les expressions dans la partie condition des alternatives ou structures itératives sont cependant de nature booléenne, c'est-à-dire que dans une écriture comme `SI (A=0) ALORS…`, `A` étant une variable de type nombre, l'expression `(A=0)` peut comme variable de type booléen prendre deux valeurs (`VRAI` ou `FAUX`) et entrer dans la formation d'expressions plus complexes par le biais de connecteurs booléens. Comme dans la partie précédente, nous commençons par un exemple tiré du contexte actuel de l'algorithmique au lycée en France, que nous mettons en relation avec les données d'une recherche menée antérieurement dans le cadre de l'option informatique.

L'extrait suivant est tiré d'un épisode observé dans le cadre d'un mémoire de master (Guy, 2013) mettant en place une ingénierie sur laquelle nous reviendrons en deuxième partie de cet article. Il s'agit d'une phase de mise en commun après la construction d'un traitement comportant une boucle dont la condition de sortie est qu'une variable `A` prenne une des deux valeurs 495 ou 0. Il s'agit d'une bonne classe de Terminale Scientifique Option Math qui fait de l'algorithmique depuis la seconde[10]. Le langage choisi impose une structure TANT QUE, c'est-à-dire avec une condition en début de boucle.

Voici un extrait d'une discussion collective sur l'écriture de la condition de continuation sous la forme `(A différent de 495) ou (A différent de 0)` par un des groupes (« les filles devant »). Ce groupe ne comprend pas pourquoi l'exécution ne termine pas. Interviennent l'enseignante (P), différents

---

[10] Cette option comporte un enseignement d'arithmétique (théorie élémentaire des nombres). Comme on le voit dans l'extrait qui suit, l'environnement dans lequel travaillent les élèves est AlgoBox, mais cette donnée n'est pas nécessaire à la compréhension de notre analyse.

élèves (E_i) et le professeur habituel de la classe (O).

> **P.** …vous les filles devant, vous m'avez dit que le test qu'on fait là c'est A différent de 495 **ou** A différent de 0, au fond, tu m'as dit…
>
> **E_3.** A différent de 0 **et** A différent de 495.
>
> **P.** Alors, qu'est-ce qui est correct, qu'est-ce qui ne l'est pas ? … Oui ?
>
> **E_7.** Ben moi ça me parait bizarre qu'un nombre soit égal à deux nombres différents.
>
> **P.** Voilà, donc, quand tu dis le et, tu vois, un nombre qui est différent de deux nombres, c'est vrai, tu vas trouver des nombres qui sont différents de 495 et différents de 0. … Mais tu vas jamais satisfaire la condition être égal à 495 et à 0. … Finalement, ton algorithme, il s'arrêtera quand tu obtiendras un nombre égal à 495 et à 0, d'accord ? Et ça tu vas pas pouvoir le trouver.
>
> **E_3.** On l'a fait fonctionner et ça a marché.
>
> **P.** Tu l'as fait tourner et ça marche…
>
> **O.** Tu l'as fait… Ça devrait pas marcher.
>
> **P.** Oui, mais, AlgoBox il a des conditions d'évaluation des…
>
> …
>
> **P.** Bon, on va y réfléchir, c'est une question à laquelle il faut réfléchir ...

L'enseignante (P) essaie de provoquer un débat. Un élève (E_3) corrige sans plus d'explication. Une élève (E_7) fait une intervention peu explicite, mais on imagine qu'elle pense à ce qui ferait sortir de la boucle, c'est-à-dire la négation de la condition `(A différent de 495) ou (A différent de 0)` qu'elle conçoit comme `(A=495) et (A=0)`. L'enseignante reprend cette idée, mais de façon assez confuse, puisqu'elle considère en même temps une condition de continuation correcte « *des nombres qui sont différents de 495 et différents de 0* » et une condition d'arrêt toujours fausse « *être égal à 495 et à 0* ». La discussion tourne court, quand l'élève E_3 qui a corrigé propose une validation pragmatique, reprise par le professeur. Le débat est relancé par (O) qui semble très étonné que la condition avec le « ET » fonctionne. L'enseignante semble prise au dépourvu et se réfère au logiciel plutôt qu'à la logique, et, après une phase confuse, clôt le débat.

Pourquoi l'enseignante ne relève-t-elle pas que la condition `(A différent de 495) ou (A différent de 0)` est toujours vraie ? Pourquoi ne reprend-elle pas la remarque de E_7, en l'exprimant en termes de condition d'arrêt, et en soulignant que la condition dans le TANT QUE est une condition de continuation, négation de la condition d'arrêt ? Ceci suggère que les difficultés liées aux conditions (valeurs logiques de type booléen) sont sous-estimées. La ressemblance entre ces conditions et celles que l'on exprime dans le langage « ordinaire » est trompeuse dès le problème impose l'emploi de connecteurs logiques.

Comme annoncé, nous revenons à cette hypothèse à partir d'une recherche menée dans le cadre de l'option informatique. Lagrange (1991) présente une ingénierie sur le type « booléen » expérimentée avec des élèves d'une classe scientifique dans leur deuxième année d'option, après qu'ils aient été initiés à ce type. Le tableau 3 donne l'énoncé du premier problème de cette ingénierie, une solution attendue et une solution-élève typique. L'énoncé est conçu pour confronter les élèves aux calculs sur les booléens via les connecteurs logiques de façon à les différencier des expressions du langage courant. Il introduit ainsi une rupture entre d'une part la première et la deuxième condition qui peuvent s'exprimer sous une forme proche du langage courant, et d'autre part la troisième qui implique d'articuler trois variables dans une formule non triviale, notamment parce qu'elle met en jeu une implication.

La solution attendue exprime les trois conditions et les affecte séparément à trois variables booléennes. Une alternative finale conditionnée par la conjonction des trois variables permet la sortie de la réponse. La solution « élève » typique privilégie la structure alternative, en emboîtant plusieurs instances. Ceci permet une expression congruente à l'énoncé pour les deux premières conditions et évite le recours à la négation. Les solutions recueillies ne vont pas plus loin, car les élèves échouent à exprimer la troisième condition de cette manière.

Enoncé

J'ai 5 amis : Marie, Marc, Jean, Janine et Jean. Quand je veux les inviter à dîner, il me faut tenir compte des contraintes suivantes:

Marie et Jean ne s'entendent pas.

Marc et Marie ne viendront pas l'un sans l'autre.

Si j'invite Janine, il faut que j'invite Luc ou Jean, mais on ne peut pas les inviter tous les trois ensemble.

Après avoir déclaré 5 variables booléennes, chacune prenant la valeur vraie si la personne correspondante est invitée, écrire un programme qui permet de savoir si une invitation est possible.

Solution attendue[11]	Une solution « élève » typique

`C1:=Not (Marie and Jean)`
`C2:=(Marc=Marie)`
`C3:=(Luc≠Jean)or not Janine`
`If C1 and C2 and C3 then`
`   display 'Possible'`
` else`
`   display 'Impossible'`
	`If (Marie and Jean) then`
	` display 'Impossible'`
	`else`
	`  if (Marc<>Marie) then`
	`     display 'Impossible'`
	`  else…`

Tableau 3 : un problème sur les booléens

Notre interprétation est que les élèves conçoivent les expressions booléennes comme des « conditions » telles qu'elles s'expriment dans le langage usuel, plutôt que comme un calcul sur des valeurs logiques. À la différence des élèves observés sur le type chaîne, ceux-ci sont d'un bon niveau scientifique et maîtrisent les éléments de base du langage. Nous observons cependant que confrontés à un type non numérique et malgré l'enseignement reçu, ils se montrent très peu capables d'exploiter les possibilités d'expression qu'il offre. Lagrange (1991) montre dans la suite de l'ingénierie une difficile progression. Les élèves restent attachés aux alternatives et très réticents à l'emploi de variables booléennes. Une progression souvent constatée est l'emploi d'un type connu pour « contourner » le problème. Par exemple les élèves déclarent une chaîne à laquelle ils affectent « OUI » ou « NON », ou une variable numérique à laquelle ils affectent 0 ou 1 ; dans ce dernier cas, les conditions peuvent être calculées – ainsi (`AxB=1`) exprime la conjonction – ce qui constitue une étape vers la compréhension des booléens.

Quels savoirs sous-jacents ?

Nous avons commencé cette première partie en soulignant que l'expérience des années 1980 contredisait l'idée d'un accès aisé des élèves à une expertise suffisante pour que les activités en programmation et algorithmique puissent contribuer aux apprentissages visés par les différents curricula en informatique et en mathématiques. Nous avons montré à l'aide d'exemples que les difficultés

[11] La troisième condition peut s'exprimer de façon plus proche de l'énoncé, par exemple en séparant les deux sous-conditions :

```
C3a:=Luc or Jean or not Janine
C3b:=not (Luc and Jean and Janine)
C3:= C3a and C3b
```

demeurent dans le contexte actuel de l'algorithmique au lycée. Faisant le lien avec des exemples similaires étudiés dans le contexte de l'option informatique, nous avons analysé quelques aspects de cette question, que l'on peut résumer par une difficulté à comprendre un programme ou un algorithme comme organisant un traitement pour un dispositif, à percevoir ce traitement comme l'évolution des valeurs d'un ensemble de variables, et à concevoir ces variables comme des objets calculables. Les exemples présentés montrent que ces difficultés ne sont ni anecdotiques ni passagères. C'est pour nous l'indice qu'il existe des savoirs conceptuels sous-jacents.

Comment ces savoirs se situent-ils dans les enseignements de mathématiques et d'informatique ? Nous esquissons quelques repères à ce propos en conclusion de cette première partie.

Concernant les mathématiques, il est possible de faire le lien d'une part avec l'algèbre et d'autre part avec la logique. Concevoir les variables informatiques comme représentant des objets familiers mais avec un fonctionnement différent, présente en effet une certaine similarité avec la compréhension du symbolisme algébrique comme outil de modélisation du réel, une dimension importante de l'enseignement de l'algèbre soulignée par exemple par Chevallard (1989). Cependant Duval et Pluvinage (2016) montrent que les apprentissages algébriques restent peu assurés au moment où commencent les apprentissages en algorithmique et programmation. Nous observons quant à nous que ces apprentissages ne se transfèrent pas à des types non numériques, et que même lorsqu'il s'agit de nombres, les variables des langages informatiques prennent une signification différente pour les élèves.

De manière assez semblable, les problèmes sur les booléens paraissent relever de l'articulation entre « logique de sens commun » et « logique formelle » identifiée par Durand-Guerrier (1996) et largement étudiée depuis. Cependant cette articulation s'opère en mathématiques dans des activités de raisonnement impliquant des énoncés souvent quantifiés de façon implicite. La conception d'un traitement à implémenter sur un dispositif informatique fait apparaître d'autres obstacles sur la représentation et le traitement d'expressions booléennes.

Les travaux menés dans le contexte de l'option des années 1980 indiquent que les savoirs relatifs aux spécificités des langages informatiques étaient considérés comme des prérequis par les enseignants et les ressources pour la classe, ce qui semble être une des causes d'un fort taux d'abandon en fin de première année (Lagrange 1991). Plus récemment, au lycée, nos observations suggèrent que les difficultés conceptuelles ne sont pas davantage prises en compte. En particulier la complexité propre de la notion de variable dans le contexte informatique et la rupture qui s'opère ainsi avec la notion de variable mathématique sont sous-estimées. Ce sera l'objet plus spécifiquement de la troisième partie.

2. Quelles situations pour les premiers apprentissages ?

Dans la première partie, nous avons souligné la similarité des difficultés rencontrées par les élèves dans les deux contextes de l'option informatique (années 80) et celui, actuel, de l'algorithmique au lycée. Ce constat montre la nécessité, après avoir commencé à cerner des savoirs relatifs aux spécificités des langages informatiques de questionner les situations d'apprentissages. Nous faisons pour cela un détour par une synthèse de Crahay (1987) sur l'impact réel des activités de programmation en LOGO. Ces activités ont été présentées notamment par Papert (1981) comme devant favoriser l'accès à la « pensée procédurale », c'est-à-dire à la capacité de penser une série d'actions comme une procédure paramétrable et réutilisable dans un traitement plus complexe. Crahay fait une revue des évaluations et conclut qu'elles ont toutes montré des résultats décevants. Il les attribue à la conception et à la conduite des situations didactiques par les enseignants : donnant des tâches ouvertes et laissant aux élèves une grande liberté dans une approche « constructiviste naïve », ils étaient conduits ensuite à intervenir individuellement auprès des élèves en finissant par écrire la solution à leur place[12].

Nous souhaitons montrer dans cette partie comment la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1988) a pu, dans certaines recherches plus récentes, poser les conditions d'expérimentations mieux contrôlées rompant avec le constructivisme naïf dénoncé par Crahay.

D'une étude épistémologique du développement des machines mathématiques à une situation d'apprentissage de l'itération

La première recherche considérée ici est la thèse de Nguyen (2005) menée dans le contexte du curriculum de mathématiques en classe de Première[13] dans les années 2000. Nguyen s'intéresse à l'itération et montre que c'est une structure qui émerge dans l'évolution des machines mathématiques de la machine à calculer simple à la machine de Babbage. Cette dernière était conçue pour tabuler des fonctions de façon automatique, grâce à deux innovations : 1°) un emplacement mémoire correspondant à une donnée au cours d'un calcul répétitif peut prendre successivement des valeurs différentes ; 2°) le contrôle de l'exécution est fait non par l'opérateur, mais par la machine en fonction de l'état de la mémoire, ce qui

[12] Généralement les productions obtenues se limitaient à une seule procédure et étaient en cela proches d'écritures en langage impératif, malgré le caractère « fonctionnel » de LOGO.

[13] Deuxième année de Lycée (grade 11, élèves de 16 ans).

rend possible l'itération. La situation d'apprentissage de l'itération proposée par Nguyen est basée sur cette étude.

Elle conduit tout d'abord à considérer un dispositif (au sens où nous avons défini ce terme en première partie) proche d'une machine concrète comportant un ensemble de mémoires A, B, C pouvant stocker un nombre, résultat d'un calcul dont les opérations sont activées par des touches[14]. L'étude épistémologique conduit à confronter les élèves à la tabulation de fonctions dans des situations où il devient avantageux d'abord d'utiliser des mémoires, puis d'organiser l'activation des calculs et des mémoires dans une structure se répétant et finalement d'imaginer une instruction de répétition. Ce choix d'une situation « a-didactique » est différent d'autres choix où les possibilités du dispositif sont présentées aux apprenants par « monstration ».

Énoncé : Soit *f* une fonction. Calculer les images par cette fonction de nombres espacés d'un pas donné dans un intervalle donné. $f(x) = x^2+1$, intervalle [–3 ; 2], pas 0,2 puis 0,03. (Calculatrice avec mémoires STO)	

T1 Écrire la suite des touches nécessaire pour la faire exécuter par un robot	`-3   Sto A  AxA+1=`
	`-2.8 Sto A  AxA+1=`
	`-2.6 Sto A  AxA+1=`
	`...`
	`2    Sto A  AxA+1=`

T2 Écrire un groupe de touches à faire répéter par le robot	**Groupe de touches à répéter :** . A + 0,03 → STO B . B x B + 1 = . B STO A

[14] Ce choix est différent de celui adopté dans les enseignements où nous avons fait les observations de la première partie. Ce choix reste compatible avec notre analyse des spécificités des langages informatiques : les suites de touches constituent un langage avec sa syntaxe propre, et le dispositif évolue par affectation des variables-mémoires (touche STO). Nous n'entrons donc pas dans l'analyse que fait l'auteur des différentes « stratégies » relativement au dispositif considéré.

T3 Ecrire un message le plus court possible pour que le robot fasse tout le calcul de lui-même	-3 STO A répéter 166 fois A × A + 1 = A + 0,03 STO A

Tableau3. Une situation d'apprentissage de l'itération : l'énoncé, les trois tâches (à gauche), et des réponses d'élèves (à droite). D'après Nguyen et Bessot (2010).

La première tâche (T1, Tableau 3) implique l'écriture fastidieuse d'une série de touches. Pour un pas de 0,2, il y a 26 séries de touches, chaque série commençant par l'entrée d'une valeur de la variable qui est stockée dans la mémoire A. Pour un pas de 0,03, il faudrait 166 séries de touches. Les élèves voient donc l'intérêt d'un bloc d'instructions qui pourrait être répété, ce qui est l'objet de la tâche T2. Mais cela implique une rupture, puisque dans ce bloc chaque valeur de la variable ne peut plus être entrée individuellement. Dans la tâche T3, les élèves doivent imaginer une structure dans laquelle insérer ce bloc d'instructions. Cette structure comprend une instruction spéciale de répétition quantifiée et une initialisation de la mémoire utilisée.

Cette ingénierie met en valeur le fonctionnement des variables dans l'itération. Selon Samurçay (1985) les relations entre ces deux éléments de l'itération sont particulièrement délicates, et même après une première initiation avec un enseignant analysant un programme itératif simple, cette complexité entraîne des difficultés persistantes chez les débutants. Un des points forts, lié à la construction d'une structure en réponse à un problème sur des objets mathématiques bien identifiés avec un contrôle direct de l'implémentation sur le dispositif invoqué, est que les élèves distinguent bien les opérations d'initialisation de celles constituant le corps de boucle (voir Nguyen, 2005, notamment p. 225).

La planification dans la construction d'un traitement par des élèves

À la différence de l'exemple précédent qui partait d'une étude épistémologique, nous nous intéressons ici à une problématique issue de la psychologie de la programmation. Comment des débutants peuvent-ils construire un algorithme ou un programme alors qu'ils ne maîtrisent pas les contraintes d'expression du dispositif auquel ce traitement est destiné ? Rogalski et Samurçay (1990) ont introduit cette problématique en distinguant les positions d'expert et de novice dans l'activité de « planification », c'est-à-dire de conception des étapes pour un traitement. Elles introduisent deux autres notions : les « schémas » qui sont les structures utilisées dans le traitement des informations pour atteindre des objectifs à petite échelle, et les « plans » qui sont des ensembles organisés de schémas. Les experts, c'est-à-dire les personnes qui maîtrisent les contraintes d'expression du dispositif, combinent généralement une approche descendante (top-down) où le plan est d'abord pensé, puis organisé en schémas élémentaires et une approche ascendante (bottom-up) qui part de schémas connus pour les organiser en un plan. De façon générale si l'expert voit bien où il va, il construit un plan et ensuite s'intéresse à des sous-objectifs et aux structures correspondantes. Quand il voit moins bien comment commencer, il peut partir de schémas qu'il connait. Le problème des débutants est qu'ils ne disposent pas d'un répertoire de schémas et que les plans auxquels ils pensent sont directement transposés d'un traitement manuel ce qui rend difficile la spécification des sous-objectifs pour un dispositif informatique. Ils ne peuvent par conséquent adopter ni une approche descendante ni une approche ascendante.

Nous avons abordé cette problématique dans le contexte actuel de l'algorithmique au lycée ; cette étude s'intéresse donc aussi aux interactions mathématiques-algorithmique. Un travail autour de la « recette » de Kaprekar, présentée dans le tableau 4, a été retenu de façon à mettre en jeu à côté des savoirs mathématiques, des savoirs relatifs à la planification. Les savoirs mathématiques concernent la représentation des nombres, et plus généralement l'arithmétique. Ceci est discuté plus complètement par Lagrange et Guy (2015). La situation s'adresse à des élèves de Terminale Scientifique (élèves de 17 ans, grade 12).

1. Choisir un nombre entier de trois chiffres.
2. Former le nombre obtenu en arrangeant les chiffres du nombre choisi en 1. dans l'ordre croissant.
3. Former le nombre obtenu en arrangeant les chiffres du nombre choisi en 1. dans l'ordre décroissant.
4. Calculer la différence des nombres obtenus en 2. et 3.
5. Recommencer (à partir de l'instruction 2.) avec le résultat obtenu en 4, jusqu'à obtenir un nombre déjà obtenu.

Tableau 4 : La « recette » de Kaprekar

Nous avons mis en place une situation didactique reposant sur le fait que dans cette recette, le nombre courant est considéré sous deux représentations. Pour le tri (rangement dans l'ordre croissant ou décroissant), c'est un triplet de chiffres et pour la soustraction c'est un nombre au sens habituel du terme. À la main, la différence de représentation n'apparait pas : un opérateur humain (du niveau lycée) n'a pas nécessairement conscience d'isoler des chiffres puis de les ordonner. Le traitement par un dispositif « arithmétique », c'est-à-dire un dispositif dont le langage de commande comporte les 4 opérations dans les entiers et des instructions de comparaison, impose de considérer le nombre courant sous ses deux représentations et donc de construire des traitements partiels de conversion du nombre ordinaire en triplet de chiffres et inversement.

Après que les élèves aient constaté sur quelques exemples que le traitement termine soit sur 0 soit sur 495, il leur est demandé de concevoir un traitement dans leur environnement de programmation habituel de façon à examiner la généralité de ce constat[15]. La conception de la situation repose sur les hypothèses suivantes : 1°) spontanément, les élèves vont s'engager vers un plan calqué directement sur la recette, car ils ne disposent pas des schémas de décomposition et de recomposition d'un nombre ; 2°) par confrontation au dispositif « arithmétique » il peut se produire une prise de conscience de la nécessité d'aménager le plan du traitement, et plus généralement de ce qu'un plan convenant à un traitement manuel doit être adapté en fonction des capacités du dispositif destiné à l'exécuter.

Précisons le milieu. Il est constitué d'objets mathématiques avec leurs propriétés arithmétiques qui exercent certaines rétroactions. Ce sont aussi des objets à codifier pour un traitement destiné à être exécuté par un dispositif « arithmétique ». Les rétroactions du langage résultent des possibilités d'expression et des contraintes perçues de façon interne au langage, (cette écriture n'est pas « conforme ») ou en référence au dispositif (l'ordinateur ne va pas comprendre) et souvent les deux à la fois[16].

Un autre choix essentiel est de mettre l'accent sur la représentation des données (choix des variables) pour engager une dynamique de planification productive : pensant à un plan calqué sur l'exécution manuelle, les élèves vont d'abord se contenter d'une variable pour le nombre courant et éventuellement de variables pour les nombres obtenus par rangement croissant et décroissant des chiffres ; il est possible que certains élèves perçoivent que, pour un traitement par un dispositif « non humain », il est nécessaire de prévoir les variables sur lesquelles opérer le rangement des chiffres du nombre courant ; si ce n'est pas le cas, l'enseignant peut enclencher cette réflexion en demandant aux élèves si leur choix permettrait de traiter par exemple un nombre à 10 chiffres. La prise de conscience de la nécessité

---

[15] Nous ne considérons pas ici la variable de situation « langage utilisé », pourvu que ce langage puisse commander un dispositif arithmétique au sens que nous venons de préciser. L'expérimentation est celle qui a déjà été rapportée en partie 1, avec des élèves de Terminale Scientifique (grade 12) utilisant Algobox.

[16] Bien que la situation ait été expérimentée avec un langage « évolué", cette conception du milieu est compatible avec celle mise en place par Nguyen. Lagrange & Guy (2015) détaillent ce milieu et les choix relatifs aux variables didactiques.

de variables pour les chiffres devra ensuite engendrer le besoin de traitements partiels correspondant à des schémas de décomposition et de recomposition d'un nombre, s'ajoutant au tri (rangement dans l'ordre croissant) des chiffres. Ainsi les élèves rencontreront la nécessité de penser l'écriture d'un traitement en traitements partiels[17] conçus de façon autonome (par exemple par des concepteurs différents) mais qui devront être coordonnées : c'est ce que nous désignons par « modularité ».

Les 4 phases résultent de ces choix. Dans une première phase, il est demandé aux élèves quelles variables sont à utiliser, et on s'attend, comme nous venons de le dire, à ce que se produise une prise de conscience de la nécessité d'introduire des variables pour les chiffres du nombre courant. Ensuite on peut penser que cette prise de conscience va être partagée dans la classe et qu'un plan incluant des schémas de conversion va être identifié. Dans une seconde phase, les élèves ont à concevoir les trois traitements partiels de la figure 1. L'écriture de chacun des trois traitements partiels est confiée à des groupes différents. La troisième phase consiste à rédiger le traitement complet en organisant les trois traitements partiels dans une itération. Il ne s'agit d'une simple concaténation puisque les trois traitements partiels sont rédigés avec des variables spécifiques qui doivent être harmonisées pour un traitement itératif : la modularité n'est pas un simple découpage. En quatrième phase, les élèves ont à construire l'itération avec une condition adéquate (épisode discuté en partie 1).

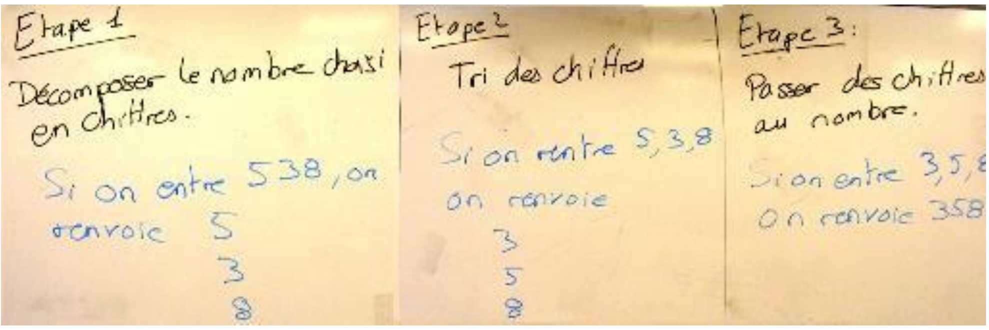


Figure 1 : Trois traitements partiels tels que spécifiés à la fin de la première phase (d'après Guy 2013) [18]

Voici quelques éléments d'analyse *a posteriori* dans chacune des phases. Dans la

---

[17] Désignés par le professeur par le terme « étape » dans l'ingénierie (Cf. figure 1).

[18] L'étape 3, pour être complète, doit se terminer par la donnée de la différence des nombres obtenus en arrangeant les chiffres dans l'ordre décroissant (resp. croissant).

première phase, nous assistons bien à une prise de conscience de la nécessité de deux représentations sous l'influence du dispositif. Pour l'illustrer, voici deux prises de parole successives par deux élèves, l'un fait référence au traitement manuel « on va prendre » et présente un choix naïf des variables, dans un schéma itératif. Le second élève fait lui référence au dispositif (« il ») et à ses capacités et identifie la nécessité de variables pour les chiffres.

> **E1. On va prendre** A en nombre initial, **on va prendre** B arrangé en ordre décroissant, C en ordre croissant, **on va faire** la différence de, euh, C moins B. O**n va le remettre** dans A, et **on va refaire** avec B et C.
>
> **E2.** Ben si A c'est une variable où c'est un nombre, pour qu**'il** puisse le ranger dans l'ordre croissant et décroissant, faut d'abord séparer les chiffres des dizaines, des unités et des centaines. Donc il faut trois variables…

Comme prévu aussi, les élèves, dans une phase collective, identifient les étapes et, par groupe sur ordinateur, conçoivent les traitements partiels. Les solutions sont variées, et là aussi on constate à nouveau que le dispositif joue un grand rôle dans la réflexion des élèves. Dans la dernière phase, on rencontre la difficulté attendue à assembler les traitements partiels avec des variables cohérentes entre les traitements partiels, mais aussi en entrée et en sortie du corps de boucle. Certains élèves ont construit des solutions pour plusieurs traitements partiels à la seconde phase et rencontrent moins de difficulté à les assembler, ce qui indique que la modularité ne va pas soi.

Un des points forts repérés par Lagrange et Guy (2015) est que les élèves ont progressé seuls sur les points critiques : prise de conscience de la nécessité d'étapes de conversion, conception et assemblage des traitements partiels, et plus généralement prise de conscience de la nécessité de penser un plan, non en fonction d'un traitement manuel, mais pour l'expression pour un dispositif spécifique. Une phase ultérieure visant à l'étude de la terminaison a été mise en place dans le cadre d'un travail de thèse. L'analyse de cette phase par Laval (2015) montre que ce travail en a-didacticité donne aux élèves une conception des objets en jeu adéquate pour cette phase centrée sur la preuve.

L'apport de la théorie des situations didactiques

La conception et l'analyse dans les deux exemples qui viennent d'être rapportés brièvement sont inspirées de la « théorie des situations didactiques » de Brousseau. L'apport théorique est une meilleure identification des savoirs en jeu, grâce à la conception du milieu pour une interaction a-didactique. Pour l'itération, ce travail de conception permet de répondre à des questions telles que : Quels problèmes font ressentir la nécessité d'une structure itérative ? Quelles étapes sont à franchir ?

Comment le langage évolue-t-il avec ces étapes ? Le milieu pour la planification comprend quant à lui un objet sous deux représentations pour les nécessités du traitement par un dispositif spécifique. Les savoirs sous-jacents sont la capacité à concevoir ces deux représentations, à déterminer des variables adéquates pour cela et à assurer une gestion cohérente de ces variables dans l'assemblage de traitements partiels.

Les acquis de la recherche en psychologie de la programmation

L'enseignement de l'algorithmique et de la programmation est revenu en France dans le curriculum du lycée, dont on rappelle la *visée générale* : « à l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de petits programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur », et les *objectifs* : « écrire une formule permettant un calcul ; écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction… », sans expliciter ce qu'est un algorithme, un programme ni leur différence.

Ce retour se fait sans référence à l'expérience acquise antérieurement, en particulier à propos de l'option informatique des lycées (en gros, une décennie entre 1981 et 1992), et sans exploitation du questionnement déjà ouvert alors sur les apports potentiels de l'enseignement de l'informatique (essentiellement au niveau du lycée). Les collègues moins anciens que nous ignorent sans doute les recherches qui se sont parallèlement développées en didactique de l'informatique et en psychologie de la programmation (en particulier à propos des débuts des apprentissages). Ce sont les acquis de ces recherches sur lesquels nous voulons attirer l'attention, en faisant un point rapide sur les mouvements qui ont eu lieu dans ce domaine, en soulignant un certain nombre d'acquis stables sur l'activité de programmation et sur les concepts et obstacles épistémologiques et en relevant l'existence de deux questions récurrentes : celle des précurseurs potentiels de la programmation et celle des impacts mutuels entre informatique et mathématique. Une attention sera portée à la notion de « variable » dans le contexte de la programmation informatique (notion que nous avons condensée sous le terme de « variable informatique »).

L'évolution des objets de recherches en psychologie de la programmation et en didactique de l'informatique

L'évolution de ce domaine a été présentée en détail lors du Congrès de 2013 de didactique de l'informatique (Rogalski, 2015). Nous en donnons ici un bref résumé. Dans les années 1970, des théoriciens de l'informatique ont recherché des concepts puissants de programmation, d'abord du point de vue du développement du domaine scientifique (et ensuite technique). La référence centrale est l'ouvrage initiateur de Knuth (1968). Ensuite est venue une « seconde génération », celle d'études expérimentales d'informaticiens largement tournées vers les propriétés souhaitables des langages informatiques. La décennie des années 1980 a vu le déploiement des études en psychologie de la programmation (portant particulièrement – mais pas seulement – sur des débutants) et l'émergence d'une didactique de l'informatique (sous ce nom dans la communauté francophone européenne) pour une « alphabétisation informatique » scolaire dans ce champ (qui allait au-delà de la programmation). On observe ensuite, dans une « troisième génération », un « rétrécissement » des recherches sur l'informatique scolaire avec en contrepoint une ouverture des recherches de psychologie de la programmation vers les initiations du niveau universitaire ou professionnel. En conséquence l'intérêt des recherches s'est porté sur d'autres langages que les langages « *impératifs* » qui dominaient dans les recherches sur le secondaire. Il faut cependant relever une continuité de recherches en psychologie de la programmation via le groupe « *The Psychology of Programming Interest Group* » (PPIG) constitué à Cambridge (UK) en 1987, et qui depuis poursuit son activité dans le but de réunir des acteurs de diverses communautés pour explorer des intérêts partagés dans les aspects psychologiques de la programmation et dans les aspects « computationnels » de la psychologie.

La quatrième génération (après les années 2000) s'est orientée vers une didactique pour l'informatique universitaire et professionnelle – au sens où les questions traitées sont d'une part celles des premiers enseignements universitaires, *i.e.* les initiations à la programmation, et d'autre part, celles des acquisitions de concepts avancés, en relation en particulier avec le développement de la programmation « parallèle ». Deux ordres de raisons semblent à l'origine de ces nouvelles recherches, essentiellement conduites par les informaticiens enseignant à des niveaux post-secondaire : le manque menaçant d'informaticiens dans les pays occidentaux et le besoin d'avoir des professionnels du niveau exigé pour la sécurité et la fiabilité des programmes à concevoir dans nombre de domaines sensibles (dont ceux touchant les bases de données), alors que les étudiants se dirigent moins vers les études scientifiques en général et l'informatique en particulier. Une triple contrainte semble apparaître : il faut attirer des étudiants en initiation à l'informatique, les garder pour la poursuite d'études dans ce champ – ce qui suppose qu'ils réussissent « suffisamment », et les préparer à être des informaticiens répondant aux attentes de la qualité de la programmation – ce qui suppose qu'ils atteignent un niveau « suffisant » dans leurs acquisitions. Le retour de l'informatique dans la scolarité du secondaire apparaît un moyen de préparer un « vivier » d'étudiants qui permette de répondre à ces contraintes, comme l'exprime l'introduction d'un papier récent :

> While needs of high school students in the US are being prioritized through courses such as Exploring Computer Science (ECS) (…), there is a growing belief that experiences with computing must start at

an earlier age. (Grover, Pea & Cooper, 2016).

Le questionnement proprement didactique (élaboration et conduite de situations appropriées aux acquisitions visées, pour dire vite) est toutefois resté limité par rapport à celui orienté vers ces acquisitions, y compris en France. Un article (da Rosa, 2015), d'orientation piagétienne et se référant à la Théorie des Situations Didactiques, regrette d'ailleurs, lors du congrès PPIG2015, que cette dimension « didactique » reste marginale dans les recherches au niveau international. Pourtant, comme l'illustrent les exemples développés dans la première partie de cet article, non seulement on observe une persistance des questions pertinentes soulevée par la seconde génération de recherches, mais on relève aussi la validité de résultats de la recherche des années 1980, dont nous allons rappeler les grandes lignes.

Des acteurs dans la communauté française

Il est utile de citer d'abord quelques acteurs qui ont marqué ce domaine dans la seconde génération en France (travaillant dans le contexte de l'introduction de l'informatique au lycée) et dont les travaux ont été repris comme références (lorsqu'ils étaient publiés en anglais), car ils offrent des références toujours pertinentes (et qu'ils ont concerné le contexte scolaire institutionnel en France). Pour la didactique de l'informatique, on peut retenir André Rouchier et Renan Samurçay. Le texte de Rouchier : « *Objets de savoir de nature informatique dans l'enseignement secondaire* » situe l'informatique dans un champ d'interrogation didactique, puis analyse les objets informatiques en jeu dans l'écriture de programmes élémentaires, objets d'un domaine de savoir qui peut constituer un « habitat » nouveau pour des savoirs mathématiques (Rouchier, 1990). La disparition d'un enseignement de la programmation au niveau scolaire n'a pas permis à ce travail conceptuel de didactique d'avoir l'impact qu'il aurait mérité[19].

En revanche, des acquis sur la psychologie de l'activité de programmation portant sur les concepts informatiques et les activités cognitives en jeu dans la programmation par des débutants sont restés « vivants ». Leur caractère conceptuel a certainement joué~~.~~ Il en est ainsi de la recherche de Renan Samurçay sur le concept de variable informatique sur lequel on revient plus loin qui est une référence toujours citée (Samurçay, 1989). Dans la même ligne, un ouvrage de synthèse « *Psychology of programming* » (Hoc, Green, Samurçay & Gilmore, 1990) d'un groupe européen de recherche sur la programmation a été mis en ligne

19 En fait, l'approche didactique, en tant que telle, a été essentiellement engagée en France et en Allemagne (Laborde, 1988).

pour les étudiants en informatique de Cambridge comme référence sur la dimension humaine de la programmation.

Des acquis sur l'activité de programmation

Après les acteurs, faisons un point sur les acquis des recherches de la décennie 1980. Ces acquis sont de nature épistémologique et cognitive. Ils sont relatifs aux spécificités de la discipline[20] : a) l'informatique est à la fois science et pratique (prenant en compte la dimension technologique, on parle de génie informatique, comme on parle par exemple de génie civil pour l'ingénierie du bâtiment) ; à ce titre, elle pose un double problème de transposition dans l'enseignement ; b) l'activité cognitive de programmation présente des spécificités ; c) l'informatique comporte des concepts-clés qui n'ont pas de précurseurs[21] ou ont des précurseurs qui peuvent jouer un double rôle : à la fois producteur (facilitateur) et réducteur (éloignant du concept à acquérir) ; enfin, d) des connaissances opérationnelles particulières sont en jeu pour la programmation, en particulier des méthodes de programmation.

Ces spécificités ont des implications didactiques, dans la conception de situations didactiques et dans la prise en compte des difficultés cognitives des élèves face aux tâches proposées.

Tout d'abord, le double problème de transposition de la pratique de la programmation et du savoir informatique comme savoir scientifique se manifeste dans la conception de situations didactiques. On peut le caractériser par la question suivante : comment articuler l'élaboration de situations didactiques centrées sur l'acquisition de concepts déterminés (variables, boucles, conditionnelles) avec une activité de programmation partant de problèmes consistants, plus ouverts ? Dans le premier cas, les tâches des élèves sont des problèmes bien circonscrits – comme dans les exemples des première et deuxième parties de cet article ; dans le second cas, des situations de « projet » transposent la programmation professionnelle (et les concepts apparaissent « à la demande » du problème.

Concernant ces situations de « projet », le constat général issu des études récentes comme de celles conduites autrefois – en particulier avec LOGO – est le fait que

---

[20] Nous nous centrons toujours ici sur l'informatique « objet » (comme « discipline ») et non sur l'informatique comme technique ou technologie, « outil » pour d'autres disciplines ou d'autres domaines d'action.

[21] La notion de récursivité non terminale (Rouchier, 1987) introduite à travers une procédure ou une fonction est cognitivement éloignée de la récurrence en mathématique (et celle-ci présente un obstacle épistémologiques aux élèves même scientifiques).

l'action didactique de l'enseignant est cruciale pour que l'engagement des élèves ou étudiants se traduise par l'acquisition de concepts de programmation : le projet doit être « porteur » et sa réalisation étayée par l'enseignant pour en faire apparaître l'utilisation des concepts visés[22].

La nature de cette action enseignante reste à notre point de vue une question didactique ouverte. Dans les recherches des années de l'option informatique, la centration était clairement sur la conception de situations didactiques plutôt que sur l'intervention didactique des enseignants conduits à gérer ces situations. Il en était alors de même en didactique des mathématiques. Les recherches sur les pratiques des enseignants acteurs individuels et sur leurs actions didactiques en classe se sont développées seulement à partir de la fin des années 90. Nous faisons l'hypothèse que les concepts et méthodes qui y sont développées seraient productives pour étudier l'action enseignante dans le champ de l'algorithmique en relation avec la programmation informatique.

En second lieu, l'analyse des spécificités de l'activité cognitive lors de la programmation informatique a conduit à souligner plusieurs points :

- en programmation il s'agit de passer de « faire » à « faire faire » (Samurçay & Rouchier, 1985) : l'exécution est déléguée à une « machine », avec perte de contrôle de celui qui a conçu le programme ; cela implique de se constituer une représentation opérationnelle de la machine ou plus précisément du « dispositif informatique »[23] (Rogalski, 1988 ; Rogalski & al., 1989) ou de la *notional machine* (Du Boulay, 1986).
- il faut effectuer un changement de niveau entre réalisation d'une occurrence particulière d'une procédure et élaboration d'une procédure générique[24] : cela suppose de passer d'une connaissance « en acte » à une analyse des objets et des actions en jeu ; il s'agit aussi de se questionner sur les entrées qui peuvent être pertinentes et sur la validité de la procédure selon le domaine sur lequel elle va « tourner » ;
- l'analyse des objets et des actions possibles dans le dispositif informatique

[22] Il sera intéressant de mettre en regard l'expérience LOGO des années 1980 avec les usages de SCRATCH préconisés par le curriculum du collège.

[23] La stratégie (implicite) d'enseignement (Ngyuen, 2006) est ici l'écriture d'un message à une machine ordinateur de Von Neumann pour obtenir l'exécution d'un algorithme.

[24] Ce passage « spécifique » / « générique » se pose évidemment pour la conception d'un algorithme, hors de tout contexte de programmation.

appelle des acquisitions sur le « système de représentation et de traitement » des données informatiques (SRTI), dont Lagrange (1991) a montré combien c'était un processus difficile, en particulier pour les booléens, en jeu notamment dans les alternatives, l'itération et la récursivité.

- le fait que les élèves « contrôlent » un algorithme par son exécution constitue par ailleurs un obstacle à l'accès à la dimension fonctionnelle de la récursivité[25] ; il en est de même quand l'approche de la récursivité commence par une situation où l'appel récursif est en fin de traitement (récursivité « *terminale* »), ce qui fait que les élèves peuvent interpréter le traitement comme une itération (Pirolli, 1986 ; Kurland & Pea, 1986 ; Rinderknecht, 2014) ;
- il y a besoin d'un contrôle logique, et donc syntactique des structures conditionnelles – et non plus du contrôle sémantique, qui est d'ailleurs souvent présupposé et non explicité dans les exécutions « à la main ». Ainsi, dans une alternative, le dispositif informatique est censé « comprendre » que : 1°) lorsque le traitement d'une condition A (si A alors faire) est terminée, la suite du programme concerne la condition non A (sinon...), alors qu'il n'y a pas nécessairement explicitation du « sinon » ; et 2°) lorsque les deux cas d'une alternative (A ou non A) ont été traités, on passe à la suite de la procédure (en sortant de la conditionnelle) (Rogalski & al., 1989) ;
- dans la conception d'un programme interactif destiné à un utilisateur (qui peut-être le concepteur lui-même, mais plus tard), la représentation du triplet < « je conçois », « un dispositif informatique exécute », « un humain utilise » > appelle une articulation de la procédure « noyau » du programme (l'algorithme exprimé dans le langage de programmation utilisé) avec des opérations d'entrées de données par une saisie d'écriture par l'utilisateur (une « lecture » pour le dispositif) et de sortie à destination de l'utilisateur sous forme d'affichage (une « écriture » par le dispositif) que va lire l'utilisateur, opérations dont la formulation ne va pas de soi lors de l'alphabétisation[26].

En troisième lieu, des difficultés, voire des obstacles, se présentent régulièrement

[25] Les environnent de programmation utilisés actuellement en lycée en France ne proposent pas une écriture « naturelle » de fonctions, et n'offrent guère d'opportunité pour introduire la récursivité.

[26] Cela dépend évidemment des spécificités des langages. Les « entrées » et « sorties » d'un programme peuvent être respectivement des prises d'information sur le « monde » et l'exécution matérielle d'actions (programmation de robots par exemple).

dans l'acquisition des deux grands concepts clés lors de l'enseignement des bases de la programmation (ce qu'on a appelé l'alphabétisation) : 1°) la variable informatique, qui est une fonction de l'exécution (elle peut changer à chaque pas d'un programme), avec des rôles différenciables dans le programme, nous y revenons ; 2°) la notion d'invariant de boucle (au cœur des écritures récursives), une clé pour la validité des programmes : elle est difficile à dégager – même en acte – pour l'écriture de boucles, avec la nécessité de mettre en relation la valeur des données dans l'entrée dans la boucle, l'exécution du corps de boucle et la valeur des données à la sortie de la boucle. Le contrôle de la fin de l'itération ou de la procédure récursive est une difficulté particulière pour les débutants (voire au-delà…). Dans l'étude récente citée plus haut d'un enseignement des bases de la programmation au niveau collège (« middle school » US) les auteurs soulignent :

> Serial execution was the easiest to learn, as expected. Between conditionals and loops, learners found loops harder to tackle. Most of the assessment questions concerning loops required manipulation of variables as well, which seemed to be the hardest topic for students to grasp. [...] Both these aspects have been known to be particularly difficult for novice programmers (…) Despite our conscious efforts, students struggled with these topics. (Grover, Pea & Cooper, 2016).

Ces constantes ont été relevées dans des introductions faites le plus souvent dans une approche utilisant des rédactions d'algorithmes exprimés en « pseudo-code », c'est-à-dire ni dans un langage de programmation particulier, ni dans un format syntaxiquement contraint, mais dans une forme proche du langage naturel et supposée comprise de tous.

D'autres difficultés/obstacles spécifiques ont été relevés pour la programmation en langage orienté objet (LOO), dont les relations entre classes et les processus d'héritage entre classes et objets. Mais l'écriture des « méthodes » des objets fait rencontrer aux élèves les mêmes notions clés de variables, alternatives et itérations. Il faut souligner l'existence de multiples interactions, d'une part entre les concepts informatiques eux-mêmes, et d'autre part entre les concepts et les activités cognitives.

Ainsi, une des difficultés de la conception de programmes utilisant la récursivité est la nécessité de faire des « raisonnements sous hypothèse », dont le schéma est alors le suivant lors de l'écriture d'un module récursif ou itératif (pour simplifier, récursivité sur n entier) : je suppose que j'ai traité mon problème jusqu'à n, le problème actuel est de trouver comment passer de n à n+1 [c'est justement l'invariant de boucle], puis de chercher quelle valeur de n me permet d'initialiser le processus. Notons que cet obstacle de la récursivité est partagé avec celui de la récurrence en mathématique. Le mode spontané des élèves (pas seulement du secondaire) est de partir de $n = 1$, de chercher à passer à 2, et de coder une forme de « etc. »[27]. Ils « rabattent » ainsi la récursivité sur l'itération, processus mis en échec lorsque l'appel récursif est situé à l'intérieur de procédure et non en la fin de celle-ci. Nous renvoyons à Samurçay et Rouchier (1990) pour une approche didactique de la récursivité lors de l'alphabétisation informatique, et à Rinderknecht (2014) pour une revue de cette question.

Les structures itératives comme récursives illustrent bien le fait que la variable informatique est une fonction de l'exécution. Ce n'est pas sa seule complexité en tant que concept et selon leur rôle dans les programmes, les débutants rencontrent plus ou moins de difficultés.

La variable (en informatique) est un concept difficile

Nous prenons ici le point de vue de la discipline informatique. Nous avons explicité dans (Rogalski et al, 1987) en quoi il est justifié de considérer la variable informatique comme une fonction, au sens où sa valeur dépend du moment de l'exécution du programme. La variable est évidemment aussi une fonction de l'entrée : c'est un composant de la complexité du concept de « variable informatique ». Cette fonction peut être constante, si la variable ne change pas de valeur au cours de l'exécution.

Cette spécificité de la variable informatique comme « état d'un processus » est relevée par Knuth à propos des différences entre modes de pensée des mathématiciens et des informaticiens (2011, p. 46-47) : « *Un concept manquant qui semble séparer les mathématiciens des informaticiens est relatif à l'opération d'affectation :=, qui change la valeur des quantités. Je devrais dire plus précisément que le concept manquant est celui de notion dynamique d'état d'un processus... La plupart des structures de données si fondamentales en informatique dépendent très fortement de la capacité à raisonner sur la notion d'état de processus.* »

La variable informatique se différencie ainsi de la variable mathématique telle qu'elle apparaît en algèbre, qu'il s'agisse de l'écriture d'expressions, de la résolution d'équations ou des variables dans les fonctions.

La notion mathématique de variable mathématique, telle que les élèves la rencontrent dans le secondaire, peut cependant servir de précurseur : elle a ainsi un rôle producteur, via la familiarité possible de l'élève de manipulation formelle

[27] Raisonner « sous hypothèse » à partir d'une prémisse dont la validité est inconnue ou qui est fausse s'est confirmé difficile, même pour des étudiants candidats au professorat de mathématiques (Rogalski et Rogalski, 2004).

d'expressions algébriques ; mais elle joue aussi un rôle réducteur, par son caractère de permanence au cours d'un traitement (dans la résolution de l'équation $ax + b = c$, x est toujours « le même » et cette invariance est encore plus importante pour résoudre un système d'équations ; qui plus est, il s'agit d'une variable mathématique particulière : l'inconnue, qui n'a pas de pendant en informatique)[28].

L'appropriation de la notion de fonction (en mathématiques) peut limiter ce rôle réducteur, ce qui pourrait d'ailleurs contribuer à expliquer l'impact du niveau mathématique des élèves sur leurs acquisitions en informatique[29].

Par ailleurs, le champ conceptuel de la variable informatique fait intervenir les notions de type de variable, la représentation dans une donnée structurée, et l'existence d'un ensemble d'opérations sur la variable. Il comporte aussi des rôles fonctionnels de la variable dans le programme. Enfin, dans la mesure où un programme suppose une modélisation du problème dans les termes du langage utilisé, les relations des variables utilisées avec les composants du problème sont plus ou moins délicates (cf. les exemples traités dans les deux premières parties). Une analyse de ce champ conceptuel a été développée pour l'alphabétisation par Samurçay (1985/1989) et pour la programmation dans l'enseignement supérieur Sajaniemi (2008) et Sorva (2008), qui font référence à Samurçay (1989).

Dans le premier article Samurçay explique comment l'analyse du lien entre les

---

[28] La variable mathématique n'est pas pour autant un objet simple pour les élèves (voir Duval & Pluvinage, 2016), en particulier du fait du statut du symbole d'égalité pour les élèves : une indication de résultat ($2x+3x=5x$), une marque d'équivalence entre expressions avec des variables ($(x+3)^2=x^2+6x+9$), la marque d'une inconnue dans une résolution d'équation ($x+1=7$). De plus, le fait que la variable soit un outil pour exprimer une relation (« exprimer l'aire du carré en fonction de son côté ») n'implique pas pour l'élève que le terme « en fonction » exprime une relation particulière entre deux variables.

[29] L'importance de la notion de variable en programmation informatique a conduit des chercheurs à élaborer un test sur l'interprétation de relations impliquant l'affectation à des étudiants allant entrer dans leur premier cours d'informatique et ignorant de la programmation. Une méta-analyse (Dehnadi, Bornat & Adams, 2009) a montré qu'une bonne cohérence dans l'interprétation de l'opération d'affectation (avant toute introduction à un langage informatique) présageait un meilleur succès dans le début de l'apprentissage de la programmation (mais que leur épreuve ne pouvait pas servir valablement de test de sélection). On pourrait faire l'hypothèse ce qui est en jeu n'est pas tant le concept de variable (que les étudiants construiront plus ou moins bien au cours de leur alphabétisation informatique) que la manipulation d'un registre symbolique arbitraire.

trois concepts articulés de variable, boucle et affectation a conduit à concevoir une séquence didactique (10 leçons, avec des élèves de la classe de Seconde, utilisant le langage PASCAL) autour de l'organisation d'une série de problèmes de sommation de nombres, faisant rencontrer systématiquement quatre formes d'occurrence de l'affectation : valeur constante ; valeur calculée ; duplication A:=B ; accumulation.

Samurçay a distingué de manière générale quatre rôles de la variable, lors de l'alphabétisation (entre parenthèses les termes retenus plus tard par Sajaniemi) : 1°) donnée (*fixed value*) ; 2°) compteur (*stepper*) ; 3°) accumulateur (*gatherer*) ; 4°) intermédiaire pour la programmation (*temporary*). Pour la programmation plus avancée, Sajaniemi a enrichi cet herbier de rôles, en identifiant 6 autres rôles, qui avec les précédents couvrent plus de 99% des rôles rencontrés dans l'enseignement de la programmation, qu'elle soit procédurale ou orientée-objet. (Il n'y a pas de relation univoque avec les statuts différents de la variable mathématique qui apparaissent au cours de l'enseignement secondaire). Certains de ces rôles s'actualisent dans le traitement de types de données comme les listes, les arbres, les tableaux.

Les propriétés des variables et de leur traitement qui présentent des accès plus ou moins délicats pour les élèves sont leur statut dans la modélisation :

- une variable qui a un rôle d'intermédiaire présentant du sens dans le problème (externalité de la variable) est plus accessible cognitivement que celle nécessitée par l'existence du dispositif informatique (internalité de la variable) ;

- un compteur qui reflète les étapes d'un traitement « à la main » est plus aisé à représenter et utiliser, de même qu'un accumulateur.

L'impact des rôles interfère avec les types de données et les opérations en jeu (en particulier l'initialisation et le test – par sa nature, la structure de données retenue, sa place dans une boucle... Au-delà de l'alphabétisation, Sorva (2008) a souligné par ailleurs que :

> The behavior of a variable, that is the logic that dictates how the variable is used, is often defined at multiple distinct locations in program code [...], may be described by inconsecutive lines of code within a function or a method, located in a number of functions or even located in several program modules (p. 64).

Il a également montré que si on explicite aux étudiants les rôles des variables dans les programmes, ils font davantage de progrès en programmation.

Les élèves (et étudiants) débutants rencontrent des difficultés différentes selon les activités cognitives portant sur la variable informatique

Parmi les activités cognitives spécifiques à la programmation informatique, qui posent problème au débutant, se pose la constitution d'une représentation des différentes opérations que l'on peut effectuer sur les composants du programme, en particulier les variables auxquelles on s'intéresse ici. La déclaration explicite de variable en début de programme (pas toujours imposée par le langage) peut contribuer positivement à la construction d'une représentation du langage de programmation (à un niveau « logique ») ; elle peut contraindre aussi à rencontrer des types de variable non familiers à l'élève (caractères alphanumériques, booléens, tableaux, listes).

Nous avons montré en première partie le saut cognitif que constitue l'utilisation de booléens – et de leur combinatoire – pour exprimer des conditions.

Les registres de représentation (au sens de Duval, 1995) utilisés en mathématiques peuvent ne pas suffire à traiter informatiquement un problème, dès lors que celui-ci fait intervenir d'autres registres dont le sujet n'est pas conscient parce qu'il les a « naturalisés ». Il en est ainsi dans la lecture d'un nombre entier à la fois comme liste de ses chiffres et comme nombre objet potentiel des « quatre opérations »[30]. L'exemple de l'algorithme de Kaprekar développé en seconde partie illustre cette problématique – en même temps qu'il constitue une situation didactique qui peut être exploitée pour donner du sens à la notion de type de variable (qu'on utilise ou non ce terme). Rôle et déclaration sont des éléments indépendants dans le champ conceptuel de la variable : « *declaring a variable, if it is explicitly done in the language at all, is a matter separate from the variable's behavior* » (Sorva, 2008). Le contrôle des valeurs dans le programme suppose de s'affranchir des présuppositions des traitements à la main (tout au moins de certains). On peut voir dans les exemples d'écriture du programme de résolution de l'équation du premier degré $ax + b = c$, l'absence de prise en compte du cas $a = 0$: le contrat didactique courant appelle à éventuellement préciser $a \neq 0$ dans l'expression du calcul $x = (c - b) / a$, sans que le statut du cas $a = 0$ soit pour autant repéré : la présupposition sous-jacente est que si on parle de résoudre l'équation du premier degré c'est que la variable x apparaît effectivement dans l'expression, ce qui n'est pas le cas si $a = 0$. Il y a certainement interaction entre la tâche mathématique du point de vue algébrique et la notion informatique.

De manière générale, les opérations sur les variables – initialisation, mise à jour, test – peuvent constituer en elles-mêmes des ruptures avec la pratique habituelle

[30] Sur cet exemple, on pourrait aussi faire l'hypothèse que la distinction nombre/chiffres dans son écriture en base 10 n'est pas construite par l'enseignement de primaire et collège alors qu'elle devrait l'être, et qu'il s'agit là d'un obstacle didactique (nous reprenons cette remarque d'un des relecteurs).

des élèves, même avec l'écriture d'un algorithme « papier-crayon », encore plus dans l'exécution d'un algorithme, lors de laquelle l'élève sait bien quelle est la valeur de la variable qu'il traite... L'organisation séquentielle des opérations sur les variables peut aussi être en rupture avec les traitements « à la main » – ce qu'on a observé dans la difficulté plus grande à utiliser des boucles conditionnelles plutôt que des itérations en nombre déterminé (pas de test explicite), la difficulté plus grande à maîtriser les boucles de forme TANT QUE (où on teste une variable avant tout traitement) par rapport aux boucles de forme « jusqu'à » (le test sur la variable est un test d'arrêt en position finale dans la boucle). On rencontre aussi la question de la relation entre le problème à modéliser et la forme plus ou moins appropriée de la modélisation. Le contrôle des valeurs prises par une variable au cours de l'exécution d'un programme est une activité cognitive qui n'est pas non plus dans la continuité des opérations « à la main » ; ici le traitement logique des variables dans le programme interagit avec la manière dont l'élève se représente l'exécution du programme (une perspective de recherche a concerné les outils logiciels qui peuvent aider). En fait, une propriété fondamentale sous-jacente à nombre de ces difficultés cognitives de représentation et de traitement de la variable informatique est que celle-ci est une fonction. On pourrait la rapprocher de ce qui est rencontré plus tard par les élèves (dans la seconde année de lycée, en France), à savoir la notion de suite numérique – dont on peut se demander quand elle a pour eux le statut de fonction[31].

4. Conclusion

Nous reprenons ici des éléments de bilan en mettant en avant les problématiques de recherche qui auraient matière à se développer en didactique des mathématiques.

Confrontant des observations dans l'enseignement de l'algorithmique et de la programmation – revenu en France dans le curriculum du lycée depuis quelques années – à l'expérience acquise antérieurement, nous avons montré la persistance de difficultés conceptuelles chez les élèves débutants, souvent mal connues des acteurs du terrain ou institutionnels. Il apparaît que l'enjeu central est, pour les élèves que nous avons observés, de comprendre la construction d'un programme ou d'un algorithme comme l'organisation d'un traitement sur un dispositif ; ils doivent percevoir ce dispositif comme un ensemble de variables, et concevoir ces variables comme des objets « calculables » et le traitement comme l'évolution de leurs

[31] À notre connaissance, la question d'une interaction constructive entre la conception de la variable informatique comme variable « indexée » par l'étape du traitement et la notion de suite numérique en mathématique n'a pas été étudiée.

valeurs. Il existe peu de travaux proprement didactiques sur la manière d'amener les élèves à cette compréhension. Ceci renvoie – avec des années de décalage – à l'époque des travaux initiaux en didactique des mathématiques et en didactique des sciences qui étaient centrés soit sur des approches purement épistémologiques, soit sur les « erreurs » ou « *misconceptions* » des élèves. Quelques études, rappelées ici, ont cependant montré comment, dans des mises en œuvre de la théorie des situations didactiques, un travail de conception d'un milieu adéquat permet au chercheur de bien caractériser les savoirs en jeu dans l'activité des élèves. Dans le contexte de la responsabilité dévolue aux enseignants de mathématiques de prendre en charge l'enseignement d'éléments d'algorithmique et de programmation, ces travaux sont des points d'appui pour la pratique enseignante et pour les développements de recherches didactiques.

Alors que la didactique des mathématiques s'est assez peu saisie de la problématique de l'enseignement de la programmation, c'est la psychologie cognitive qui a d'abord approfondi la compréhension des enjeux épistémologiques et cognitifs dans les apprentissages en programmation – notamment par la mise en évidence d'une pluralité de rôles attribués aux variables et de la nécessité de considérer des invariants dans les traitements conditionnels – ceci renvoyant aux difficultés rencontrées lors de « l'alphabétisation informatique ». La psychologie cognitive a aussi souligné le rôle de savoirs précurseurs qui peuvent jouer un rôle producteur en permettant aux élèves qui en disposent d'entrer dans les tâches d'algorithmique et de programmation, mais qui peuvent aussi jouer un rôle réducteur dont l'enseignement doit tenir compte.

Cela conduit à questionner plus avant les concepts communs[32] en mathématiques et en algorithmique, et les convergences dans l'activité souvent relevés au plan de l'épistémologie. Des compétences en mathématiques sont-elles réellement des précurseurs pour les apprentissages en algorithmique et programmation ou existe-t-il plutôt des corrélations tenant à des précurseurs communs plus généraux, comme par exemple une bonne manipulation des opérations de raisonnement, en particulier pour les tests, ou de bonnes représentations des nombres ou de l'espace ?

Par ailleurs, la psychologie cognitive montre que la notion de « variable informatique » est cruciale, mais aussi plus largement qu'algorithmique et

[32] Les concepts qu'on pourrait identifier comme communs au niveau universitaire ou dans l'informatique théorique, ne sont pas ceux que nous avons considérés dans cet article, centré sur le lycée et des élèves débutants. Une analyse de ces concepts en termes de paradigmes pourrait être menée, comme celle qui a été faite pour la géométrie par Houdement et Kuzniak (2006).

programmation mettent en jeu des registres symboliques spécifiques. Comme ceux-ci s'articulent (plus ou moins aisément pour les élèves) avec les registres mathématiques, les travaux sur la dimension sémiotique dans l'activité mathématique pourraient donc fournir des appuis, avec en particulier la notion de registres de représentation (Duval, 1995), pour un meilleur contrôle didactique des situations proposées en classe. Quelles activités de programmation peuvent permettre effectivement à ces registres, avec les traitements et les conversions qui leur sont attachés (op. cit.), d'être des outils disponibles chez les élèves, conduisant à des effets en retour de l'apprentissage de la programmation sur les compétences algébriques des élèves ?

Une autre perspective de convergence concerne la modélisation. Alors que l'enseignement de l'informatique dans des options spécifiques au lycée, et à l'université, proposent des situations de « projet » partant problèmes « consistants » en termes de conception d'un modèle de la situation permettant son traitement informatique, les travaux que nous avons repérés dans les premières parties de cet article concernent des situations « simplifiées » visant spécifiquement à faire rencontrer certains concepts clés de l'algorithmique. Un courant de recherche sur la modélisation s'est développé en didactique des mathématiques : par exemple Barquero, Bosch et Gascón (2013) soulignent le rôle de la conception de parcours de recherche et de leur mise en œuvre par l'enseignant pour que l'engagement des élèves se traduise par l'acquisition de concepts mathématiques. La question est ouverte de la contribution de ce courant à l'étude de la modélisation dans le contexte de l'algorithmique et programmation. L'intégration de ce domaine dans le champ de l'enseignement mathématique introduit également la question spécifique de la modélisation d'objets mathématiques (concepts et traitements) dans le cadre de traitements exprimés en vue de leur exécution par un dispositif informatique (Lagrange et Guy 2014, Briand 2015).

Un thème de recherche plus spécifiquement didactique concerne l'impact des enseignements introduits dans les programmes français de primaire et de collège sur l'enseignement en lycée, puis les prolongements dans l'enseignement supérieur (largement considérés maintenant dans les recherches internationales). Les interrogations sont multiples. Elles portent à la fois sur les effets de maturation conceptuelle des élèves, sur le rôle de précurseurs nouveaux potentiels et sur les phénomènes liés à la transition entre collège et lycée (à supposer que celle entre primaire et collège soit réglée par la considération de cycles couvrant les deux niveaux scolaires). Cela devrait par ailleurs conduire aussi à des recherches sur ce qu'il en est pour l'enseignement technique et professionnel, qui reste un parent pauvre des recherches de didactique des mathématiques en France.

Il nous a paru nécessaire de rappeler à la fois les acquis de travaux anciens sur les difficultés et acquisitions des élèves débutants en informatique et leur pertinence dans le contexte actuel en France au lycée, car nous les considérons comme une base pour développer la recherche sur de nouvelles problématiques. Nous les considérons aussi comme des données utiles pour les enseignants, non pour les décourager face aux difficultés des élèves, mais pour que la rencontre de ces difficultés ne les conduise pas à des désillusions sur l'intérêt, la nécessité et la possibilité cet enseignement.

Nous partageons la visée sociale d'enseignements intégrant la programmation et ouverts aux jeunes de tous âges, de façon que, élèves puis citoyens, elles et ils prennent conscience par leur propre expérience de l'activité humaine à l'origine de toute application informatique, et de la rationalité qui préside à cette activité. Nous prenons acte de ce que, en France notamment, ces enseignements sont pour partie intégrés au curriculum de mathématiques. Ceci donne des responsabilités particulières à la didactique de cette discipline et c'est pourquoi nous avons insisté sur les acquis pour ouvrir à de nouveaux développements de la recherche.

Bibliographie

BARON, G.-L. (1989). *L'informatique discipline scolaire*. Paris : PUF.

BARQUERO, B., BOSCH, M. GASCÓN, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **33.3**, 307-338.

BRIANT, N. (2013). *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français*. Thèse Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc.

BROLEY, L. (2016) The place of computer programming in (undergraduate) mathematical practices. In Nardi & Winslow (Eds), *Proceedings of the First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, 31 Mar-2 Apr 2016*, 197-206, Montpellier.
http:// sciencesconf.org:indrum2016:84523

BROUSSEAU, G. (1988) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, **19**, 43-72.

COUDERETTE, M. (2016). Enseignement de l'informatique en classe de seconde : une introduction curriculaire problématique. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, **21**, 267-296.

CRAHAY, M. (1987). Logo, un environnement propice à la pensée procédurale ? *Revue française de pédagogie*, **80.1**, 37-56.

DA ROSA, S. (2015). The construction of knowledge of basic algorithms and data structures by novice learners. In M. Coles & G. Ollis (Eds.), *Proceedings of the Psychology of Programming Interest Group Annual Conference 2015* (pp. 37-47). http://ppig.org/sites/default/files/2015-PPIG-26th-proceedings.pdf (consulté 17/2/2016).

DEHNADI, S., BORNAT, R., & ADAMS, R. (2009). Meta-analysis of the effect of consistency on success in early learning of programming. *Proceedings of the 21th PPIG Conference*.

DROT-DELANGE, B. (2012). Enseignement de l'informatique, éducation aux technologies de l'information et de la communication en France, dans l'enseignement général du second degré. *Spirale : revue de recherches en éducation*, Lille : Association de pédagogie et de didactique de l'École normale de Lille, **50**, 25-37.

DROT-DELANGE, B. (2014). Littératie informatique : quels ancrages théoriques pour quels apprentissages ? *Spirale : revue de recherches en éducation*, **53**, 121-132.

DU BOULAY, B. (1986). Some difficulties of learning to program. *Journal of Educational Computing Research*, **2.1**, 57-73.

DURAND-GUERRIER,V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon 1.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern : Peter Lang.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (2016). Apprentissages algébriques - première partie ; points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 117-152.

ENGEL, A. (1979) *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique* : (adapté par Daniel Reisz), Paris : CEDIC.

GROVER, S., PEA, R.D., & COOPER, S. (2016). Factors influencing computer science learning in middle school. *SIGCSE '16*, March 02-05, Memphis, TN.

GUY, M.-N. (2013). *Utilisation du cadre théorique de la planification pour la conception d'algorithmes complexes par des élèves de lycée*. Mémoire de master de Didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 175-195.

HASPEKIAN, M., & NIJIMBERE, C. (2016). Favoriser l'enseignement de l'algorithmique en mathématiques. *Éducation et Didactique*, **10.3**, 121-135.

HOC, J. M., GREEN, T. R. G., SAMURCAY, R., J. GILMORE D. J. (Eds). (1990). *Psychology of programming*. London: Academic Press.

KNUTH, D. (1968). *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley.

KNUTH, D. (2011). *Éléments pour une histoire de l'informatique*. (Articles choisis, traduction de P. Cégielski). Stanford CSLI Publications & SMF.

KURLAND, D. M., PEA, R. D. (1986) Children's Mental Models of Recursive Logo Programs, Journal of Educationa1 Computing Research, **1.2**, 235-243.

LABORDE, C. (Ed.) (1988). *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

LAGRANGE, J-B. (1991) *Des situations connues aux traitements sur des données codifiées : représentations mentales et processus d'acquisition dans les premiers apprentissages en informatique*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7. http://jb.lagrange.free.fr/

LAGRANGE J.B. (2014). Algorithmics. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, DOI 10.1007/978-94-007-4978-8, Springer Science+Business Media Dordrecht 2014.

LAGRANGE, J.-B., & GUY, M.-N. (2015). Planification et connaissances mathématiques dans une situation d'apprentissage au lycée : l'algorithme de Kaprekar. *Petit x*, **97**, 45-70.

LAVAL, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international Espace de Travail Mathématique* (pp. 103-116). Madrid : I.M.I.

NGUYEN, C. T. (2005). *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*. Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble.

NGUYEN, C. T., & BESSOT, A (2010). Introduire des éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire ? Une ingénierie didactique. *Petit x*, **83**, 27-49.

PAPERT, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit, ordinateurs et apprentissages* (texte français de R.M. Vassallo-Villaneau). Paris : Flammarion.

PIROLLI, P. L. (1986). A cognitive model and computer tutor for programming recursion. *Human Computer Interaction*, **2.4**, 319-355.

RINDERKNECHT, C. (2014). A Survey on Teaching and Learning Recursive Programming. *Informatics in Education*, **13.1**, 87-119.

ROGALSKI, J. (1988). Les représentations mentales du dispositif informatique dans l'alphabétisation. in C. Laborde (Ed.), *Actes du 1er colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 237-245). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROGALSKI, J. (2015). Psychologie de la programmation, didactique de l'informatique : déjà une histoire… In G.-L. Baron, E. Bruillard, E., & B. Drot-Delange (Éds.), *L'information en éducation : perspectives curriculaires et didactiques* (pp. 279-305). Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.

ROGALSKI, J., & HÉ, Y. (1989). Logic abilities and mental representations of the informatical device in acquisition of conditional structures by 15-16 year-old students. *European Journal of Psychology of Education*, **4.1**, 71-82.

ROGALSKI, M., SAMURÇAY, R. (1990) Acquisition of programming knowledge and skills. In J. M. Hoc, T. R. G. Green, R. Samurcay, D. J. Gilmore (Eds) *Psychology of programming* (pp. 157-173). London: Academic Press.

ROGALSKI, J., ROGALSKI, M. (2004). Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **9,** 175-203.

ROUCHIER, A. (1987). The writing and interpretation of recursive procedures in LOGO. *Psychologie Française*, **32.4**, 281-285.

ROUCHIER, A. (1990). Objets de savoir de nature informatique dans l'enseignement secondaire. *ASTER*, **11**, 29-44.

RUTHVEN, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: The scope of personal computational technology. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 435-468). Dordrecht : Kluwer.

SAJANIEMI, J. (Ed.). (2008). Special issue on Psychology of Programming. *Human Technology*, **4.1**.

SAMURÇAY, R. (1985). Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants. *Educational Studies in Mathematics*, **16.2**, 143-161.

SAMURÇAY, R. (1989). The concept of variable in programming : Its meaning and use in problem solving by novice programmers. In E. Soloway & J.-C. Spoher (Eds.), *Studying the novice programmer* (pp. 161-178). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

SAMURÇAY, R., & ROUCHIER, A. (1990). Apprentissage de l'écriture et de l'interprétation des procédures récursives. *Recherches en didactique des Mathématiques*, **10.2-3**, 287-327.

SORVA, J. (2008). A Roles-Based Approach to Variable-Oriented Programming. *Human Technology*, **4.1**, 62-74.

TALL, D.O., & THOMAS, M.O.J. (1986). The value of the computer in learning lgebra concepts. *Proceedings of the 10th Conference of PME* (pp. 313-318). London : University of London Institute of Education.

VANDEBROUCK, F. (Ed.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

VANDEBROUCK, F. (Ed.). (2013). *Mathematics classrooms. Students' activities and teachers' practices*. Sense Publishers.

JEAN-BAPTISTE LAGRANGE

Adresse

jb.lagrange@casyopee.eu

JANINE ROGALSKI

Adresse

rogalski.muret@gmail.com

REBECA GUIRETTE, ANA GÓMEZ-BLANCARTE, RICARDO VALERO-PÉREZ

RECONOCIMIENTO DE LAS VARIABLES VISUALES Y UNIDADES SIMBÓLICAS SIGNIFICATIVAS DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS

Recognition of visual variables and significant symbolic units of quadratic functions. Abstract. In this paper, we explore the qualitative recognition by 144 high school students of the visual variables of the graphical representation of a quadratic function and the significant symbolic units of its algebraic writing. This recognition emerges when students are asked to move from the graphical register to the algebraic register, and conversely. The results show that the association between the visual variables of the graphic register and the symbolic units of algebraic writing has not been fully recognized. It is considered that, although the students study the effects of the coefficients of a quadratic function, they tend to only associate them with translations through the axes, instead of with pertinent visual changes. This is not sufficient for a qualitative global apprehension that allows the coordination between the visual variables of the graphical representation of a quadratic function and the significant symbolic units of its algebraic representation.

Keywords. Quadratic function, conversion, relevant cognitively units, visual variables and significant symbolic units.

Reconnaissance des variables visuelles et des unités symboliques significatives des fonctions quadratiques.
Résumé. Dans cet article on explore la reconnaissance qualitative, par 144 élèves de baccalauréat, des variables visuelles de la représentation graphique d'une fonction quadratique et des unités symboliques de sa représentation algébrique. Cette reconnaissance se manifeste quand on demande aux élèves de passer du registre graphique à l'algébrique et vice-versa. Les résultats montrent que l'association entre des variables visuelles du registre graphique et des unités symboliques de l'écriture algébrique n'a pas été complètement reconnue. Bien que les élèves aient abordé l'étude des effets des coefficients d'une fonction quadratique, on observe qu'ils tendent à ne leur associer que des translations selon les axes, au lieu des changements visuels pertinents. Cela n'est pas suffisant pour une appréhension globale qualitative, qui permet la coordination entre les variables visuelles de la représentation graphique et les unités symboliques de la représentation algébrique d'une fonction quadratique.

Mots-clés. Fonction quadratique, conversion, unités cognitivement pertinentes, variables visuelles et unités symboliques significatives.

Resumen. En este artículo se explora el reconocimiento cualitativo que hacen 144 estudiantes de bachillerato sobre las variables visuales de la representación gráfica y las unidades simbólicas de la representación algebraica de una función cuadrática. Este reconocimiento se manifiesta cuando se pide a los estudiantes pasar del registro gráfico al algebraico, y viceversa. Los resultados muestran que la asociación entre las variables visuales del registro gráfico y las unidades simbólicas de la escritura algebraica no ha sido

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 159 – 184.

completamente reconocida. Se considera que, si bien los estudiantes abordan el estudio del comportamiento de los coeficientes de la función cuadrática, tienden a sólo asociarlos con traslaciones a través de los ejes, en lugar de variables visuales pertinentes. Lo cual no es suficiente para una aprehensión global cualitativa que permite la coordinación entre las variables visuales de la representación gráfica y las unidades simbólicas de la representación algebraica de la función cuadrática.

Palabras clave. Función cuadrática, conversión, unidades cognitivamente pertinentes, variables visuales y unidades simbólicas significativas.

---

1. INTRODUCCIÓN

La relevancia de las representaciones semióticas de un concepto matemático, el dominio de estas representaciones y sobre todo la coordinación de distintas representaciones del contenido matemático en cuestión, se ponen en juego en cada momento del proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Duval (1998), es esa coordinación la que menos se promueve en la enseñanza de las matemáticas, lo cual puede provocar dificultades por parte de los estudiantes en el aprendizaje de éstas. Ejemplos de tales dificultades se pueden apreciar cuando los estudiantes realizan actividades que involucran la articulación entre registros de representación semiótica (lenguaje natural, algebraico, tabular y gráfico) del concepto de función. García, Vázquez e Hinojosa (2004), al explorar las dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería, encontraron que la gran dificultad radica en pasar de un registro gráfico a uno algebraico y viceversa. Fue de mayor dificultad pasar del registro gráfico al algebraico. Los autores reconocen que estas dificultades pueden deberse a que en la enseñanza del concepto de función "pocas veces se busca de manera sistemática reforzar el domino de tareas que impliquen el pasaje entre registros" (p. 31). Dificultades similares, con estudiantes también de ingeniería, fueron reportadas por Guzmán (1998) quien aplicó diversos problemas que implicaban, entre otras tareas, escribir la ecuación que satisficiera las condiciones exigidas en la representación gráfica de una parábola de la forma $ax^2 + c, c = 1$. De los resultados incorrectos a esta tarea, el autor infiere un desconocimiento, por parte de los estudiantes, de la correspondencia entre las unidades significativas gráficas y las algebraicas. Es decir, una dificultad para coordinar los registros. El reconocimiento de que los estudiantes presentan dificultades de coordinación entre los registros gráfico y algebraico de una función cuadrática es apoyada también por Bouciguez, Irassar y Suárez (2008). Ellos afirman que los estudiantes tienen dificultades porque "en las clases de matemáticas los profesores privilegiamos las escrituras simbólicas" (p. 179).

Duval (1992) señala que "el paso de la representación gráfica a la escritura algebraica proviene de una interpretación global" (p. 130). Esta interpretación "depende de una identificación precisa de *todos los valores de las variables visuales pertinentes* y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica que corresponden" (p. 138). Un reconocimiento cualitativo significa que en el paso del registro gráfico al algebraico y viceversa "están excluidos toda consideración de los números y todo recurso a cálculos" (Duval, 1999, p. 75). Sin embargo, la mayoría de los estudios sobre la coordinación entre los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática, tema de estudio en este artículo, van más allá de solicitar un reconocimiento cualitativo al incluir también valores particulares o tratamientos numéricos. Por ejemplo, en el estudio de Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) se reportan las dificultades que tuvieron estudiantes (entre 17 y 20 años de edad) para articular los registros gráfico y algebraico de la función lineal y cuadrática. En el caso de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$), en la conversión del registro algebraico al gráfico, se indagó si los estudiantes: 1) asociaban la expresión algebraica de la función con la gráfica de una parábola, 2) asociaban la relación entre los signos de a con la concavidad y de c con la ordenada al origen y 3) interpretaban la condición gráfica de $b \neq 0$. Los autores señalan que una de las dificultades con mayor presencia fue el desconocimiento de que la ausencia o presencia del coeficiente del término lineal de una función cuadrática ($b = 0$, $b \neq 0$) determina si la posición del eje de la parábola correspondiente coincide o no con el eje y. Cuando se pide a los estudiantes establecer la correspondencia del registro gráfico al algebraico, los autores exploran si los estudiantes, dada una gráfica que indica los valores en los que la curva intersecta a los ejes, encontraban los datos necesarios para determinar tanto el signo como el valor de los parámetros de la expresión algebraica correspondiente. Los estudiantes tuvieron dificultad para identificar los signos y valores de los coeficientes, en particular, los valores de a y b en la expresión $y = ax^2 + bx + c$. Ellos lograron identificar el carácter negativo del coeficiente a, pero no pudieron determinar su valor exacto mediante la información que mostraban los puntos de intersección de la parábola con los ejes. Se puede apreciar que los autores al solicitar los valores exactos de los parámetros de la expresión algebraica promueven un tratamiento numérico, lo cual contradice la condición antes señalada para el proceso de conversión: "están excluidos toda consideración de los números y todo recurso a cálculos".

Otros estudios, en los que se ha recurrido al uso de herramientas tecnológicas como un *software* dinámico para favorecer la coordinación entre los registros de la función cuadrática, también centran la atención en valores puntuales como las raíces de la función, los máximos, mínimos, valores de los parámetros y tratamiento de la función que implican procesos numéricos o de cálculo (e.g., Oaxaca y Valderrama, 2000; Huapaya, 2012; Gutiérrez, Araujo y Prieto, 2012; Opazo, Grajeda y Farfán, 2014).

El presente artículo se deriva de dos investigaciones previas sobre el estudio de la conversión entre los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática. La primera investigación (ver Valero-Pérez, 2015) indagó la discriminación de tales variables y unidades simbólicas que hacen estudiantes de bachillerato (N = 169) y licenciatura (N = 5) ante tareas de reconocimiento (como la que se muestra en la figura 2 de la siguiente sección). Los resultados pusieron en evidencia que los estudiantes para resolver dichas tareas recurren al tratamiento numérico de las expresiones algebraicas dadas, así como al uso de fórmulas para la determinación de puntos específicos (e.g., determinar el vértice y las raíces) que les permitieran identificar el registro solicitado. El autor reporta que cuando las tareas van del registro algebraico al gráfico los estudiantes discriminan los coeficientes a y c del término cuadrático y término independiente, respectivamante, pues reconocen que el signo de a determina el sentido de la concavidad y que el el valor de c indica en qué punto del eje y intersectará la gráfica correspondiente de la función. Cuando las tareas van del registro gráfico al algebraico, el autor identificó que los estudiantes tienen un mayor reconocimiento de la característica concavidad de la gráfica, ya que identifican que si la gráfica es cóncava hacia arriba, la expresión algebraica tendrá un signo positivo en el coeficiente a; si la concavidad es hacia abajo, el signo del coeficiente en cuestión será negativo. La siguiente característica que más reconocen los estudiantes es la intersección que se da con el eje y, la cual les permitió identificar el coeficiente c. En cuanto a la discriminación del coeficiente b, tanto en las tareas que van del registro algebraico al gráfico como las del gráfico al algebraico, la gran mayoría de los estudiantes mostraron un desconocimiento de la correspondencia semiótica que tiene esta unidad simbólica con el comportamiento de la gráfica de la función. Menos del 3% de los estudiantes de bachillerato y ninguno de los estudiantes de licenciatura identificaron la correspondencia semiótica del parámetro b. De las conclusiones del estudio de Valero-Pérez (2015) se observa, por un lado, que el uso de tratamientos numéricos a los que recurrieron los estudiantes para pasar de un registro a otro evidencia una falta de reconocimiento cualitativo y que este uso es más evidente en estudiantes de licenciatura (futuros matemáticos), tal vez por el domino que tienen en los cálculos. Por otro, los pocos estudiantes que reconocieron la unidad simbólica b saben que si $b > 0$, la gráfica se desplaza a la izquierda; si $b < 0$, a la derecha, pero esto sucede sólo si $a > 0$. Sin embargo, parecen desconocer que cuando $a < 0$, el desplazamiento que indica b, se invierte.

En la segunda investigación, como continuación del estudio de Valero-Pérez (2015), se presenta una propuesta del conjunto de unidades simbólicas del registro algebraico y variables visuales del registro gráfico de la función cuadrática, pertinentes para la conversión entre los registros. La propuesta se ejemplifica mediante un proceso de discriminación usando el *software* GeoGebra y propone una nueva unidad simbólica que toma en cuenta la relación entre los signos de los parámetros a y b (Gómez-Blancarte, Guirette y Morales-Colorado, en prensa). El objetivo del presente estudio es indagar el reconocimiento cualitativo que hacen estudiantes de bachillerato al coordinar las variables visuales (*concavidad, posición del vértice respecto de eje* y*, e intersección de la curva con el eje*) y unidades simbólicas (a, b y c) de los registros gráfico y algebraico de la función cuadrática en su forma general $y = ax^2 + bx + c$. El interés de la investigación radica en explorar el reconocimiento meramente cualitativo entre las variables visuales del registro gráfico y las unidades simbólicas significativas del registro algebraico de la función cuadrática.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Conversión de registros

Duval (1998) distingue dos actividades cognitivas fundamentales relacionadas con las transformaciones de las representaciones semióticas: el *tratamiento* y la *conversión*. El tratamiento es la transformación de una representación en otra dentro del registro donde fue creada y la conversión es la transformación de una representación en un registro inicial en otra representación en un registro final, actividades cognitivas independientes entre sí. Profundizamos en la actividad de conversión por ser el objeto de estudio de esta investigación.

En los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, la conversión, es decir, el cambio de una representación de un objeto matemático de un registro de representación semiótico a otro, se da entre los registros de representación semiótica discursivos y no discursivos, por ejemplo en los registros algebraico y gráfico. En el registro algebraico (registro discursivo) se formulan expresiones y en el registro gráfico (no discursivo) se representan configuraciones de formas. Por lo que en el registro algebraico se podrá inferir, razonar y calcular, mientras que en el gráfico se podrá visualizar lo que no es dado de manera visible (Duval, 2004).

Dado que la conversión no es una actividad cognitiva inmediata, no es suficiente poner lado a lado la representación algebraica y la gráfica de un objeto matemático para que los estudiantes comprendan la conversión, es decir, “la simple presentación no permite que se aprenda a discriminar en el contenido de cada representación, lo que son las unidades significantes pertinentes para representar el objeto matemático… y lo que no lo es” (Duval, 2004, p.49). Al ser la conversión una tarea cognitiva compleja, ya que no hay reglas explícitas que permitan dicha transformación de forma directa, ya sea en uno u otro sentido en que se realice ésta (Duval, 1998), se debe diferenciar lo que es observable en un gráfico y lo que las particularidades observadas permiten identificar. Al respecto, Duval (2004) plantea tres formas de ver las gráficas cartesianas: 1) aprehensión local por punteo, de manera puntual, esto es, por el comportamiento de un valor particular (puntos, parejas de números); 2) aprehensión icónica, por desplazamientos en relación con un nivel horizontal y 3) aprehensión global cualitativa, la manera de ver que permite visualizar las relaciones entre dos conjuntos de valores (orientación y posición en relación con los ejes). Cada una de estas formas toma en cuenta distintos aspectos en el gráfico. La dificultad radica en poder pasar de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa.

2.2 Aprehensión global cualitativa

Para saber que se ha dado el paso de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa, Duval (2004) propone atender tres exigencias en una terea de conversión:

1. La tarea de conversión sólo es requerida en un sentido, el que va del registro gráfico al registro algebraico.

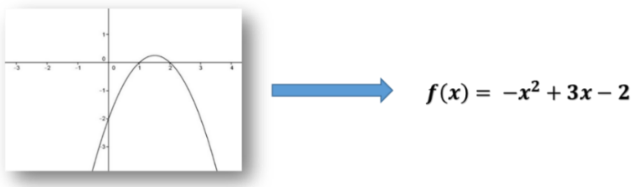


Figura 1. Conversión, sentido gráfico - algebraico.

2. La tarea debe ser sólo una tarea de reconocimiento, ya que de esta manera se reflejará qué ha sido automatizado, interiorizado o integrado y sobre todo, “condiciona la iniciación de todos los tratamientos consientes que puede proponerse un sujeto” (Duval, 2004, p.70).

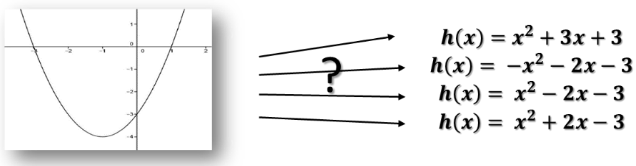


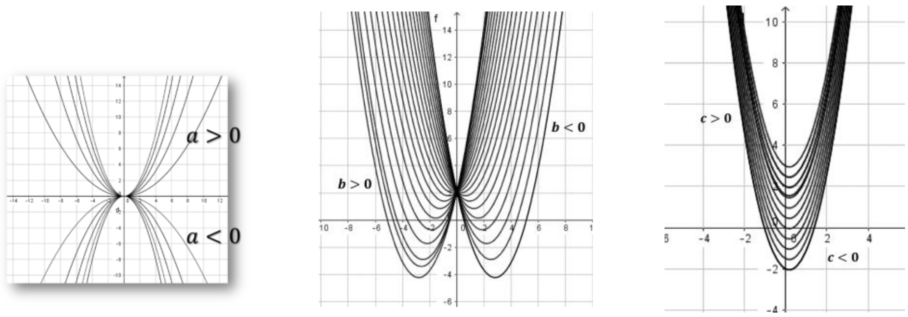
Figura 2. Tarea de reconocimiento.

3. La tarea debe permitir examinar “el conjunto de las variaciones de representación cualitativamente discernibles a la vista” (Duval, 2004, p.70). Es decir, las opciones dadas deben reflejar valores en oposición (como se muestra en la figura 2).

Estas exigencias favorecen la coordinación entre los registros gráfico y algebraico porque los valores visuales del registro gráfico se ponen en correspondencia con las unidades simbólicas (signos) de la expresión algebraica y no con valores numéricos (Duval, 2004). Por ello, la aprehensión global culitativa conlleva una asociación "*variable visual de la representación-unidad significativa de la escritura algebraica*" (Duval, 1992, p. 127).

La discriminación de tales variables visuales y unidades simbólicas requiere de identificar las unidades cognitivamente pertinentes a través de una variación estructural de una representación y de una asociación con otra representación en un registro diferente. Por ejemplo, se analiza el registro gráfico y se asocia con el registro algebraico, de tal forma que cuando se varía la representación gráfica también se producirá una variación en la representación algebraica. Así pues, las unidades cognitivamente pertinentes en el registro gráfico (variables visuales) serán aquellas cuya variación también produce un cambio en el registro algebraico (unidades simbólicas). Este tipo de variación estructural es la que se planteó en Gómez-Blancarte et al. (en prensa).

En la enseñanza de la función cuadrática en su forma general ($y = ax^2 + bx + c$; a, b y c en $\mathbb{R}$ y $a \neq 0$), se estudian tres unidades cognitivamente pertinentes: la concavidad: hacia arriba ($a > 0$) y hacia abajo ($a < 0$) (figura 3a); desplazamiento horizontal de la curva respecto del eje y: a la izquierda ($b > 0$, cuando $a > 0$), sobre el eje y ($b = 0$) y a la derecha ($b < 0$, cuando $a > 0$) (figura 3b); intersección de la curva con el eje y, arriba del origen ($c > 0$), en el origen ($c = 0$) y abajo del origen ($c < 0$) (figura 3c).



(a) (b) (c)

Figura 3. Unidades cognitivamente pertinentes de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$.

El modo en que estas unidades cognitivamente pertinentes son estudiadas en algunos libros de texto en México, no promueve una discriminación a través de una variación estructural y de una asociación, pues se explican como algo acabado. El tratamiento de ellas toma en cuenta aspectos más numéricos que cualitativos, sobre todo en el caso del parámetro b, lo cua promueve más una aprehensión local e icónica. En algunos libros de textos, el parámetro b suele asociarce con el eje de simetría y la coordenada del vértice (ver figura 4); en otros, con un desplazamiento horizontal. Además, se suele estudiar con mayor énfasis los coeficientes a y c que el coeficiente b (Opazo et al., 2014).

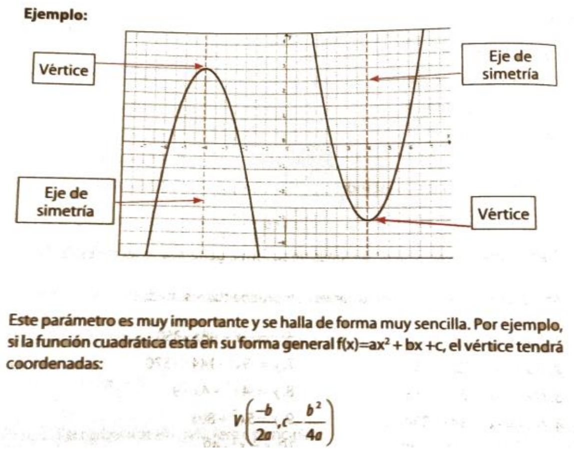


Figura 4. Ejemplo de cómo se estudia el parámetro b en la enseñanza.
Fuente: Matemáticas IV (Carrillo, 2014, p.146).

2.3 Propuesta para la aprehensión global cualitativa de la función cuadrática

Basados en la discriminación de las variables pertinentes de la función lineal, $y = ax + b$, hecha por Duval (1988), se discriminaron el conjunto de unidades cognitivamente pertinentes de la función cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$ (a, b y c, números reales con $a \neq 0$) para coordinar sus registros gráfico y algebraico de manera cualitativa, utilizando el *software* GeoGebra (ver Gómez-Blancarte et al., en prensa). La Tabla 1 presenta el resultado obtenido.

Variables visuales	Valores	Unidades simbólicas
Concavidad	Hacia arriba	$a > 0$
	Hacia abajo	$a < 0$
Posición del vértice respecto del eje y	A la izquierda	$ab > 0$
	Sobre el eje	$b = 0$
	A la derecha	$ab < 0$
Intersección de la curva con el eje y	Arriba del origen	$c > 0$
	En el origen	$c = 0$
	Abajo del origen	$c < 0$

Tabla 1. Variables visuales y unidades simbólicas significativas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

La discriminación de las unidades simbólicas propias al registro algebraico son: el signo relacional $(=)$ y los signos $(+, -)$ de los coeficientes (a y b) y de la constante (c). Mientras que la discriminación para las variables visuales de la representación gráfica son: la concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección de la curva con el eje y. Cada una de estas variables visuales de la representación gráfica admite distintos valores: la concavidad del trazo puede tomar dos valores; la posición del vértice respecto del eje y toma tres valores y la intersección del trazo con este eje toma otros tres valores. Cada uno de estos valores de las variables visuales se asocia con una unidad significativa en la notación algebraica de la función cuadrática. Las tres variables se asocian con una característica visual, y no numérica, que implican el carácter semántico de los tres parámetros (a, b, y c) incluidos en la notación algebraica. Cuando se varían las variables visuales del registro gráfico se produce una variación en las unidades simbólicas de la escritura algébrica, y viceversa, que muestran 18 (9 para $a > 0$ y 9 para $a < 0$) posibles combinaciones de gráficas, visualmente distintas y con expresiones algebraicas particulares (ver figura 5).

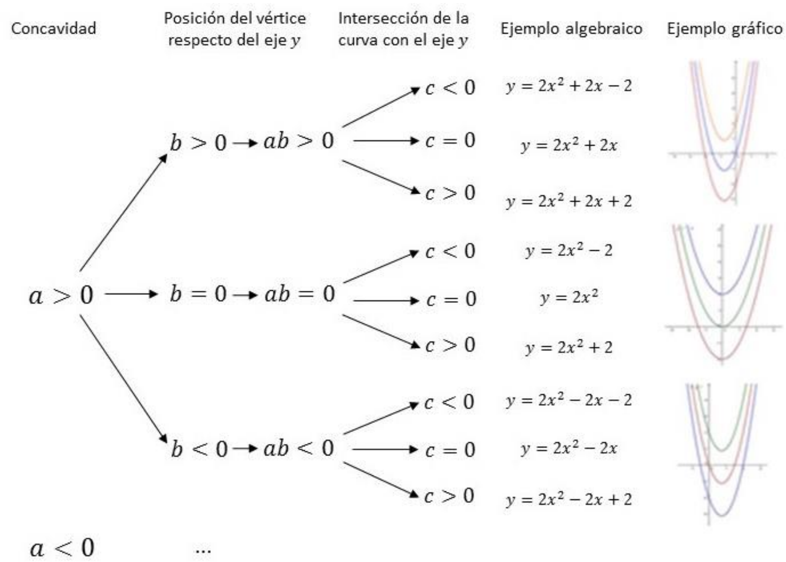


Figura 5. Combinaciones de las variables visuales y unidades simbólicas significativas de la función $y = ax^2 + bx + c$.

Obsérvese que en esta propuesta no se considera sólo el carácter positivo y negativo del coeficiente b para el desplazamiento horizontal de la curva, pues dicho desplazamiento está asociado con el signo del coeficiente de a. Para observar esta asociación basta fijar $a > 0$ y variar b y notar que cuando $b > 0$ el desplazamiento de la curva es a la izquierda; cuando $b < 0$, es a la derecha. Pero, si $a < 0$, al variar b, se observa que el desplazamiento de la curva es a la derecha cuando $b > 0$ y a la izquierda cuando $b < 0$ (ver Gómez-Blancarte, et al., en prensa). Para resumir estas distintas implicaciones, recurrimos al producto de signos de ambos parámetros. Así, la unidad simbólica que determina la posición del vértice respecto del eje y es el producto de signos de los parámetros a, b. Aunque se prefirió nombrar esta variable visual como posición del vértice en lugar de desplazamiento de la curva, como suele ser nombrada en la enseñanza, es importante notar que el nombre no hace referencia al valor de la coordenada, sino a su posición (derecha, sobre, izquierda) respecto del eje y.

Abordar el estudio de la función cuadrática desde una aprehensión global cualitativa, como la que se presenta en este artículo, promueve el análisis del funcionamiento cognitivo de las representaciones al considerar de manera simultánea los registros de representación algebraico y gráfico. Es decir, se han hecho visibles las unidades cognitivamente pertinentes del contenido de las representaciones del registro algebraico en relación con las del registro gráfico de la función cuadrática en su forma general. Sin embargo, es posible identificar otras unidades cognitivamente pertinentes si la escritura de la función cuadrática es distinta. En este estudio, es de interés explorar la escritura general porque lo que importa de la escritura son los coeficientes a y b y la constante c.

3. DISEÑO DEL ESTUDIO

Se diseñó un estudio cualitativo tomando en cuenta algunos aspectos que Duval (2004) señala respecto de las tareas de conversión (ver sección 2.2). Dado que el objetivo es indagar el reconocimiento cualitativo a través de la conversión entre los registros algebraico y gráfico de la función cuadrática en su forma general, se decidió evitar tareas cuyas respuestas implicaran opciones (ver figura 2). La experiencia en el estudio de Valero-Pérez (2015) mostró que al dar opciones en el registro final, ya sea en el sentido gráfico-algebraico o algebraico-gráfico, los alumnos recurren a tratamientos numéricos para encontrar la representación solicitada. Por ejemplo, los estudiantes calculan las raíces de la función convirtiendo la escritura general de la función a una escritura factorizada. De esta manera, no es posible identificar si el estudiante reconoce la correspondencia semiótica que hay entre las unidades simbólicas a, b y c de la escritura algebraica y sus correspondientes variables visuales del registro gráfico. Así pues, para que ese reconocimiento fuera más evidente, se diseñó un cuestionario con seis tareas de reconocimiento cualitativo, planteadas de manera que el estudiante no tuviera elementos que lo motivaran a recurrir a algún tratamiento numérico.

3.1. Cuestionario

El cuestionario está compuesto de seis tareas organizadas en dos secciones de tres tareas cada una. En la primera sección, el registro de inicio es el algebraico y el de destino el gráfico (A-G); en la segunda, el registro de inicio es el gráfico y el de destino el algebraico (G-A). En las tareas A-G, el estudiante, dada la escritura algebraica de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$), debía trazar la gráfica correspondiente (registro de destino) bajo ciertas condiciones (Tabla 2). Estas condiciones implicaban la relación de los coeficientes a, b y constante c respecto de 0, lo cual centraba la atención en el reconocimiento cualitativo de esas unidades simbólicas en la gráfica trazada.

Expresión algebraica	***Condiciones***	***Gráfica****
1. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 7}$	$\boldsymbol{a < 0}$ **y** $\boldsymbol{b < 0}$	
2. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$	$\boldsymbol{a > 0, b = 0}$ **y** $\boldsymbol{c > 0}$	
3. $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$	$\boldsymbol{a < 0\ y\ b > 0}$	

Tabla 2. Tareas de reconocimiento cualitativo del registro algebraico al gráfico.
**En la hoja que se les dio a los estudiantes, esta columna tenía un espacio suficiente para trazar la gráfica.*

En la tarea 1, la condición es trazar una parábola cuya concavidad se corresponda con las condiciones dadas para los parámetros a y b, la condición del parámetro c está explícita en la expresión. De acuerdo con estas condiciones, la unidad simbólica $a < 0$ determina una parábola cóncava hacia abajo, la posición del vértice debe ubicarse del lado izquierdo del eje vertical, para que se corresponda con $b < 0$; el trazo de la parábola debe intersectar al eje vertical en $c < 0$ o específicamente en $c = -7$. En la tarea 2, la parábola debe ser cóncava hacia arriba para que se corresponda con la unidad simbólica $a > 0$; dado que $b = 0$, la posición del vértice se encuentra sobre el eje y; el corte del trazo debe pasar por arriba del origen. En la tarea 3, de nuevo se debe trazar una parábola cóncava hacia abajo, pues se indica que $a < 0$, ahora la posición del vértice se ubicará del lado derecho para que se corresponda con $b > 0$; en este caso el corte del trazo pasa por arriba del origen, específicamente en $c = 3$.

La segunda sección (Tabla 3) contiene tres parábolas distintas entre sí de la función cuadrática; para cada una, el estudiante debía determinar el signo relacional ($>$, $=$ o $<$) con respecto a 0 de cada uno de los parámetros a, b y c. En este caso, el proceso de conversión va del registro gráfico al algebraico. La tarea 1 es una parábola cuyas variables visuales (concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección con el eje y) son las mismas que están implicadas en la tarea 2 del registro A-G. De manera que en la tarea 1 del registro G-A, las respuestas son: $a > 0$, $b = 0$ y $c > 0$. En las tareas 2 y 3 del registro G-A, de nuevo se tienen parábolas cóncavas hacia abajo, por lo que $a < 0$; en la tarea 2, la posición del vértice se encuentra a la derecha, $b > 0$ y en la tarea 3, se encuentra a la izquierda, $b < 0$. En la tarea 2, la intersección del trazo pasa por el origen, $c = 0$; en la tarea 3, por debajo, $c < 0$. Las tarea 1 del registro A-G y la tarea 3 del registro G-A implican las mismas unidades simbólicas y variables visuales: $a < 0$ (cóncava hacia abajo), $b < 0$ (posición del vértice a la izquierda del eje y) y $c < 0$ (intersección del trazo abajo del origen).

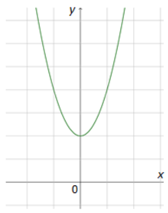
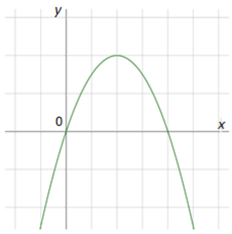
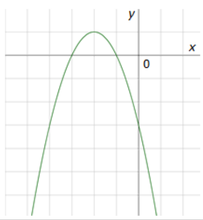
1. 	**a____0** **b____0** **c____0**
2. 	**a____0** **b____0** **c____0**
3. 	**a____0** **b____0** **c____0**

Tabla 3. Tareas de reconocimiento cualitativo del registro gráfico al algebraico.

Tanto en las tareas del registro A-G como en las del registro G-A se tomó la decisión de explorar la unidad simbólica $a < 0$ con dos de las tres posiciones del vértice ($b < 0$ y $b > 0$) a fin de indagar si los estudiantes en ambos sentidos reconocen de manera conjunta los parámetros a y b. La decisión de darles valores específicos a la unidad simbólica c, en las tareas 1 y 3 del registro A-G fue la de identificar cómo asocian dicho valor con los ejes. Además, el hecho de que las unidades simbólicas y variables visuales de las tareas 1 (A-G) y 3 (G-A) son los mismas, así como las de las tareas 2 (A-G) y 1 (G-A), tiene la intención de explorar si el reconocimiento es consistente cuando se cambia el sentido del registro.

El cuestionario se aplicó en las aulas donde los estudiantes toman sus cursos regulares y de acuerdo con su horario de la clase de matemáticas. La aplicación se llevó a cabo por uno de los autores, sin supervisión de la profesora de matemáticas de los grupos mencionados. Para evitar que los estudiantes recurrieran a tratamientos numéricos, se les aclaró que no debían darle valores a los parámetros. Además, en el caso de las tareas del registro G-A (Tabla 3), las gráficas no señalan puntos específicos al intersectar con los ejes, lo cual evita el intento de operaciones.

3.2. Características de los participantes y aplicación del cuestionario

El cuestionario se aplicó a 144 estudiantes del quinto semestre de bachillerato (entre los 16 y 18 años edad). De acuerdo con los programas de estudio, en los semestres I, III y IV los estudiantes participantes estudian temas relacionados con la función cuadrática (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2014). De hecho uno de los libros de texto que estos estudiantes utilizan es el citado en la figura 4. La selección de los estudiantes fue por conveniencia, pues son estudiantes de un bachillerato en el que labora uno de los autores. Los estudiantes no tenían ninguna particularidad, más que la de disponibilidad por responder el cuestionario y ser estudiantes del 5º semestre, quienes ya habían abordado el estudio de la función cuadrática.

Desde el primer semestre del bachillerato, los estudiantes abordan distintos tratamientos de la escritura de la función cuadrática y su representación gráfica, por ejemplo:

- Resuelven por el método algebraico de despeje ecuaciones de segundo grado incompletas: $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$; $a \neq 0$.
- Completan y factorizan trinomios cuadrados perfectos para resolver la ecuación cuadrática en su forma general ($ax^2 + bx + c$).
- Reconocen la función cuadrática en su forma general ($y = ax^2 + bx + c$) y, mediante el método de tabulación, trazan la gráfica de ésta.
- Identifican en la gráfica el vértice como el punto en el que la curva cambia su comportamiento, así como, el punto más bajo o más alto de la parábola.
- Determinan las coordenadas (h, k) del vértice de una parábola transformando la escritura general del registro algebraico, $y = ax^2 + bx + c$, a la forma estándar o canónica, $y = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$, la cual también es usada para graficar la función cuadrática por el método de tabulación.
- Los estudiantes al término del primer semestre identifican que el coeficiente a del término cuadrático de la función determina la concavidad de la parábola y resuelven actividades como las que muestra la figura 6.

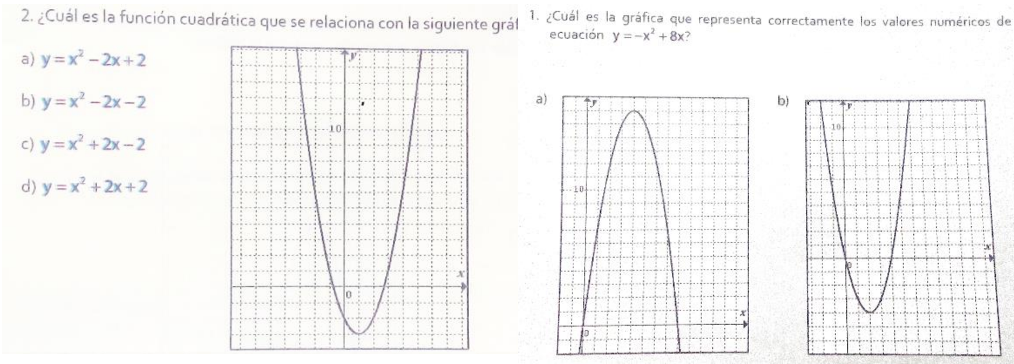


Figura 6. Ejemplos de actividades que resuelven los estudiantes en el primer semestre.
Fuente : Matemáticas I (Ríos y Callejas, 2015, pp. 326-327).

En el tercer semestre los estudiantes participantes estudian a la parábola como el lugar geométrico de todos los puntos que están a la misma distancia de un punto fijo, el *foco*, y una recta fija perpendicular al eje, la *directriz*. Reconocen la ecuación de la parábola, $x^2 = 4ay$, con vértice en el origen y foco en $(0, a)$. Identifican de nuevo que el signo del coeficiente a determina la concavidad de la parábola.

En el cuarto semestre se define la función cuadrada como una función polinomial de grado dos y su escritura general: $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. En este semestre, los estudiantes:

- Reconocen la forma mixta $(f(x) = ax^2 + bx; a \neq 0)$ y pura $(f(x) = ax^2 + c; a \neq 0)$ de la función.
- Reconocen y determinan a partir de la escritura general de la función cuadrática la forma estándar o canónica de ésta, $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$, grafican la función identificando las coordenadas del vértice mediante el método de tabulación.
- Identifican las características de la función cuadrática en relación con su gráfica. Es decir, reconocen que la gráfica de una función cuadrática es una parábola, la cual abrirá hacia arriba o hacia abajo según el signo del coeficiente a, que el valor de c, el término independiente, indica la intersección de la parábola con el eje y. Además, se establece la relación del discriminante de la función con la intersección de la gráfica con el eje x.
- Identifican analíticamente y gráficamente el eje de simetría, el vértice (h, k) y los valores máximos y mínimos de la parábola.

En este semestre los estudiantes resuelven actividades como las siguientes:

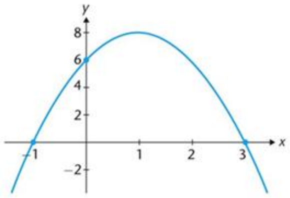
19. Dada la función cuadrática $f(x) = -2x^2 - 3x + 20$, determina:

A. Hacia dónde se abre la gráfica de la función (concavidad).

a. Hacia arriba

b. Hacia abajo

22. Determina la expresión de la función cuadrática cuya gráfica se ilustra a continuación.



a. $y = 2x^2 - 6x + 4$

b. $y = -2x^2 + 6x - 4$

c. $y = -2x^2 + 5x + 6$

d. $y = -2x^2 + 4x + 6$

Figura 7. Ejemplos de actividades que resuelven los estudiantes en el cuarto semestre.
Fuente : Matemáticas IV (Cuellar, 2012, pp.137-138).

En este mismo semestre, un contenido, previo al de la función cuadrática, es el de “traslación de funciones”. Los estudiantes analizan la traslación vertical, $f(x) \pm k$, y horizontal, $f(x \pm k)$, de la gráfica de una función, cuando a ésta se le suma o resta una constante distinta de cero. Es común que la función utilizada para estudiar la traslación de funciones sea la función cuadrática.

De acuerdo con los estudios previos de los estudiantes participantes en esta investigación, se reconoce que ellos han desarrollado competencias gráficas y algebraicas sobre la función cuadrática, propias al tratamiento de un mismo registro, pero también sobre la correspondencia semiótica entre las variables visuales del registro gráfico y la unidades simbólicas pertinentes del registro algebraico, con mayor énfasis: la concavidad y su relación con el coeficiente a del término cuadrático; la intersección de la curva con el eje y y su relación con el valor de c, el término independiente.

3.3. Análisis de datos

El análisis de las respuestas a cada una de las tareas del cuestionario se centró en identificar la asociación que hicieron los estudiantes entre las tres unidades simbólicas del registro algebraico (a, b y c) y sus respectivas variables visuales (concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección de la curva con el eje y) del registro gráfico. Esto a fin de indagar el reconocimiento cualitativo que hacen los estudiantes sobre dicha asociación. Así, si en las 6 tareas la asociación entre las tres unidades simbólicas y sus respectivas variables visuales era correcta, se asumiría que el reconocimiento era consistente, en el sentido de mantener el reconocimiento en las 6 tareas. Esto es, asociar correctamente el valor de la variable visual con su respectiva unidad simbólica en todas las tareas (las 6 tareas). Asociar de manera errónea una variable visual con su respectiva unidad simbólica en, al menos una tarea, sería categorizado como un reconocimiento inconsistente, en el sentido de que no se mantuvo dicho reconocimiento.

Los datos se analizaron utilizando una estadística descriptiva, basada en la interpretación de tablas. La interpretación es una lectura cuantitativa y cualitativa de los datos. Cuantitativa porque muestra las frecuencias de los reconocimientos identificados; cualitativa porque se plantea una descripción más allá de los datos en las tablas, es decir lo que esos reconocimientos pueden significar según las variables visuales y unidades simbólicas propuestas en el marco.

4. RESULTADOS

4.2. Reconocimiento de la asociación entre las unidades simbólicas a, b y la concavidad y posición del vértice respecto del eje y

En la tabla 4 se presentan las asociaciones que se identificaron sobre las unidades simbólicas a y b. Las cuales se han organizado en dos grandes casos relacionados con la asociación de la unidad simbólica a:

Caso 1. Estudiantes que en no todas las 6 tareas asociaron correctamente la concavidad con la unidad simbólica a. Es decir, fallaron en al menos una tarea. En este caso se tienen 70 estudiantes.

Caso 2. Estudiantes que en las 6 tareas asociaron de manera correcta la concavidad con la unidad simbólica a. En este caso se tienen 74 estudiantes.

Cada uno de los dos casos está vinculado con 5 asociaciones de la unidad simbólica b. Por ejemplo, la asociación número 1 de la unidad simbólica b, en el caso 1, significa que los estudiantes no fueron consistentes en asociar correctamente la concavidad de la parábola con el signo del coeficiente a, pero sí fueron consistentes en asociar la unidad simbólica b con las posiciones derecha, sobre e izquierda del vértice de la parábola respecto del eje y. La asociación número 1 de la unidad simbólica b, en el caso 2, significa que los estudiantes fueron consistentes en asociar de manera correcta tanto la concavidad con su unidad simbólica a, como la posición del vértice con su unidad simbólica b. Esta asociación número 1, caso 2, ejemplifica a los únicos 18 estudiantes (12.5%) que parecen reconocer que tanto la unidad simbólica a, como la unidad simbólica b, se relacionan con la posición del vértice respecto del eje y. Sin embargo, como se verá más adelante, dicho reconocimiento parece estar basado en otras asociaciones.

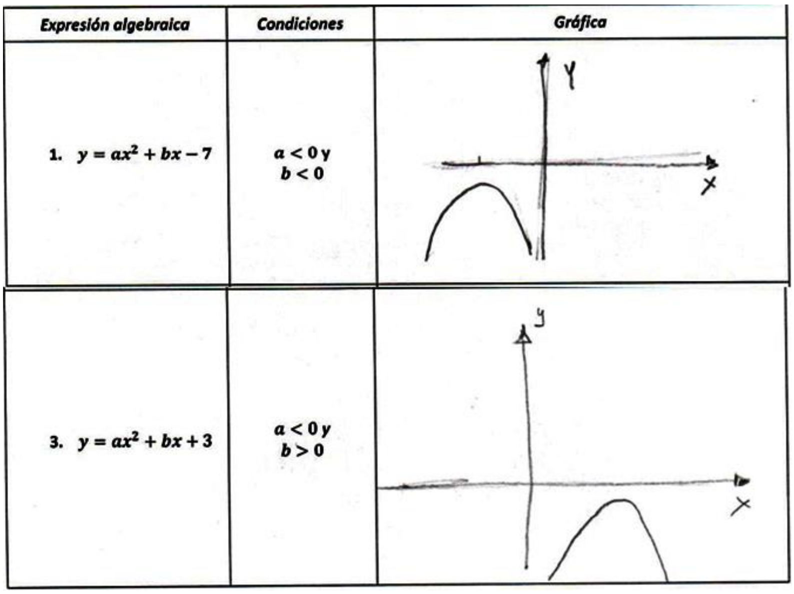
Los 126 estudiantes restantes (87.5%) no fueron consistentes en asociar de manera correcta la concavidad ni la posición del vértice respecto del eje y. La asociación 1 de la unidad simbólica b en el caso 1, muestra inconsistencia en la unidad simbólica a; las asociaciones números 2, 3, 4, 5 y 6 de la unidad simbólica b, en el caso 1, muestran un reconocimiento inconsistente en ambas unidades simbólicas; las asociaciones números 2, 3, 4, 5 y 6, en el caso 2, muestran inconsistencia en la unidad simbólica b.

Asociación de la unidad simbólica b		**Asociación de la unidad simbólica a**	
		Caso 1 (No en todas las tareas)	**Caso 2** (En todas las tareas)
1	En todas las tareas asocian $b > 0$, $b = 0$ y $b < 0$.	8	18
2	En todas las tareas asocian $b > 0$ y $b < 0$, pero en no todas asocian $b = 0$.	3	4
3	En todas las tareas asocian $b = 0$, pero en no todas asocian $b > 0$ y $b < 0$.	17	19
4	En no todas las tareas asocian $b > 0$, $b = 0$ ni $b < 0$.	41	25
5	*En todas las tareas asocian $b > 0$ y $b < 0$, en no todas reconocen $b = 0$.	1	0
6	*En todas las tareas asocian $b > 0$, $b = 0$ y $b < 0$.	0	8
Totales		70	74

Tabla 4. Asociación de las unidades simbólicas a y b.
**El reconocimiento es consistente, pero se cumple sólo si a > 0.*

No se puede afirmar que los 18 estudiantes que asociaron correctamente las unidades simbólicas a y b en todas las tareas conozcan la relación que guardan estas dos unidades para determinar la posición del vértice respecto del eje y. En otras palabras, no es posible saber si estos estudiantes usaron conscientemente las unidades simbólicas de los parámetros a y b para determinar la posición del vértice respecto del eje y. Suponemos que estos estudiantes asociaron el valor de la unidad simbólica b con los valores numéricos del eje horizontal: negativos (a la izquierda, $b < 0$) y positivos (a la derecha, $b > 0$), independientemente de la concavidad. Esta suposición se fundamenta en que, por un lado, en los libros de texto que se utilizan en la escuela, el estudio del desplazamiento horizontal de la parábola no se analiza para cuando $a < 0$, sólo se estudia para cuando $a > 0$. Por ello, los 8 estudiantes de la asociación número 6 y un estudiante de la número 5, en todas las tareas asociaron la unidad $b > 0$ con un desplazamiento a la izquierda y $b < 0$ con un desplazamiento a la derecha, pues esto sucede cuando $a > 0$. Por otro, como se muestra en los siguientes figuras, 3 de los 18 estudiantes en las tareas 1 y 3 del registro A-G dibujaron la posición del vértice respecto del eje y tomando en cuenta la unidad simbólica de c y no la de b.

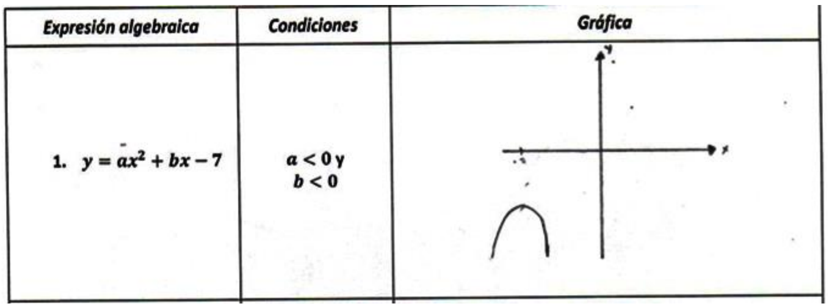
En la figura 8, se muestran las parábolas trazadas por uno de los 18 estudiantes, quien asoció correctamente la concavidad y la posición del vértice respecto del eje y. Sin embargo, en la tarea 1, se observa que la posición del vértice a la izquierda del eje y coincide con $c < 0$, hay una marca representando el valor de c. De igual forma, en la tarea 3, la posición del vértice coincide con $c > 0$.



Expresión algebraica	Condiciones	Gráfica
1. $y = ax^2 + bx - 7$	$a < 0$ y $b < 0$	
3. $y = ax^2 + bx + 3$	$a < 0$ y $b > 0$	

Figura 8. Reconocimiento consistente de a y b (estudiante No. 92).

El siguiente ejemplo, también proviene de los 18 estudiantes, en este caso, el estudiante sólo asoció el parámetro c con un desplazamiento horizontal en la tarea 1. En esta figura se observa que el estudiante señala el punto -7 sobre el eje horizontal.



Expresión algebraica	Condiciones	Gráfica
1. $y = \bar{a}x^2 + bx - 7$	$a < 0$ y $b < 0$	

Figura 9. Reconocimiento consistente de a y b (estudiante No. 117).

Se puede observar que estos dos estudiantes no lograron dibujar una parábola que intersectara en algún punto al eje y. Lo cual confirma que el reconocimiento de que las unidades simbólicas $ab > 0$ ($a < 0$ y $b < 0$) o $ab < 0$ ($a < 0$ y $b > 0$) se asocian con la posición del vértice a la izquierda o a la derecha, respectivamente, en realidad coincidió con el reconocimiento de la asociación entre la constante c con el eje horizontal.

4.2. Reconocimiento de la asociación entre la unidad simbólica c y la intersección de la curva con el eje y

En el reconocimiento de la asociación entre la unidad simbólica c y la intersección de la curva con el eje y se identificaron 4 casos. El caso 1 es un ejemplo de un reconocimiento consistente de dicha unidad simbólica, ya que en todas las tareas se asociaron correctamente el signo de c ($c > 0, c = 0, c < 0$) y su respectiva variable visual en la gráfica. Los casos 2 y 3, son ejemplos de tareas cuyo reconocimiento no fue consistente porque la asociación de alguno de los signos de c no se corresponde con la variable visual que muestra la gráfica. El caso 4 es totalmente contrario al caso 1, es decir, en no todas las tareas se asoció correctamente el signo de c con las variables visuales mostradas. Así pues, los casos 2, 3 y 4 muestran que 138 estudiantes (aproximadamente 96%) fallaron en el reconocimiento de la correspondencia semiótica que implica la unidad simbólica c.

Casos	Asociación de la unidad simbólica c	Frecuencia
1	En todas las tareas asocian $c > 0$, $c = 0$ y $c < 0$.	6
2	En todas las tareas asocian $c > 0$ y $c < 0$, pero no reconocen $c = 0$.	2
3	Asocian $c = 0$, pero no en todas las tareas asocian $c > 0$ y $c < 0$.	26
4	No en todas las tareas asocian $c > 0$, $c = 0$ y $c < 0$.	110

Tabla 5. Asociación de la unidad simbólica c.

En la tabla 6 se ilustran las respuestas de uno de los 6 estudiantes que en todas las tareas asoció correctamente $c > 0$, $c = 0$ y $c < 0$ con sus respectivas variables visuales en la gráfica. Aunque el estudiante en todas las tareas reconoce correctamente esa asociación, se observa cómo en la tarea 1 traza una parábola cóncava hacia arriba cuando la condición es $a < 0$ y ubica la posición del vértice del lado derecho del eje vertical cuando debe estar del lado izquierdo, pues $b < 0$. La parábola trazada en la tareas 2 y 3 cumplen con el reconocimiento de las tres variables visuales: concavidad, posición del vértice respecto del eje y e intersección de la curva con el eje y. Es importante resaltar que este alumno sólo falló en la tarea 1 del registro A-G; en las tres tareas del registro G-A asoció correctamente la relación que guardan las unidades simbólicas a, b y c respecto de 0, según las variables visuales de las parábolas trazadas.

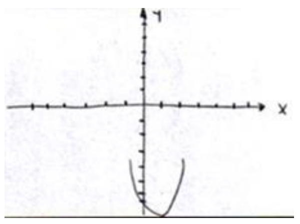
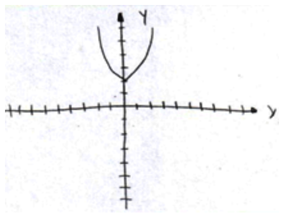
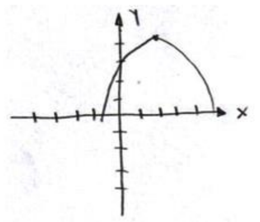
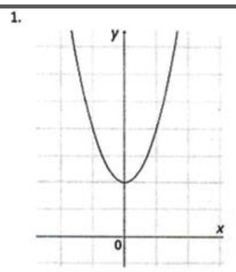
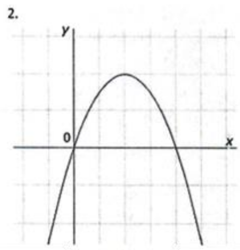
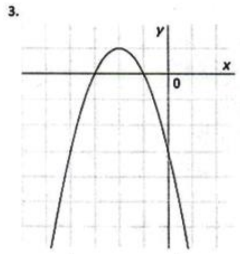
Tarea 1 $\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 7}$; $\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b < 0}$	**Tarea 2** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$; $\boldsymbol{a > 0, b = 0}$ y $\boldsymbol{c > 0}$	**Tarea 3** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$; $\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b > 0}$
		
Tarea 1	**Tarea 2**	**Tarea 3**
 $a > 0$ $b = 0$ $c > 0$	 $a < 0$ $b > 0$ $c = 0$	 $a < 0$ $b < 0$ $c < 0$

Tabla 6. Reconocimiento consistente de c (estudiante No. 121).

Cabe recordar que la tarea 1 del registro A-G y la tarea 3 del registro A-G implican las mismos valores de las unidades simbólicas ($a < 0$, $b < 0$ y $c < 0$). El estudiante falló en la tarea 1 y acertó en la tarea 3, lo cual ejemplifica un reconocimiento inconsistente cuando se cambia el sentido del registro.

En los siguientes ejemplos se ilustran cuáles fueron las asociaciones de mayor frecuencia que presentaron los estudiantes que en no todas las tareas asociaron correctamente la unidad simbólica c con la intersección de la curva con en el eje y.

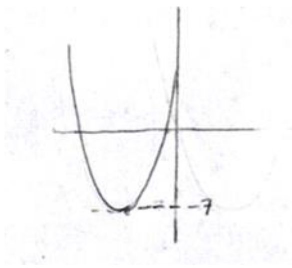
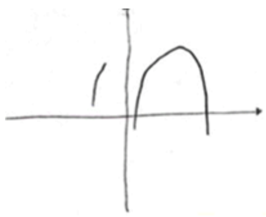
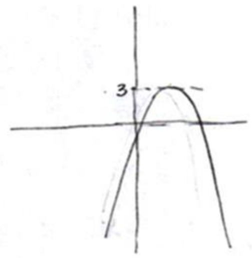
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Asociación de la unidad simbólica c con un desplazamiento arriba-abajo del eje vertical, pero la parábola trazada no corta al eje en c.</th><th colspan="3">Frecuencia</th></tr>
<tr><th>Tarea 1
52</th><th>Tarea 2
2</th><th>Tarea 3
44</th></tr>
<tr><td>Tarea 1
$y = ax^2 + bx - 7$;
$a < 0$ y $b < 0$</td><td>Tarea 2
$y = ax^2 + bx + c$;
$a > 0, b = 0$ y $c > 0$</td><td colspan="3">Tarea 3
$y = ax^2 + bx + 3$;
$a < 0$ y $b > 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla 7. Ejemplo de asociaciones de la unidad simbólica c (estudiante No. 128, tareas 1 y 3; estudiante No. 86, tarea 2).

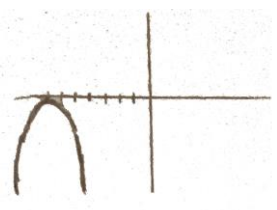
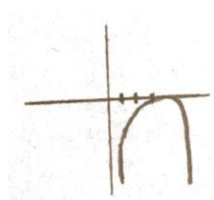
<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Asociación de la unidad simbólica c con un desplazamiento (derecha-izquierda) de la curva sobre el eje x.</th><th colspan="3">Frecuencia</th></tr>
<tr><th>Tarea 1
10</th><th>Tarea 2
8</th><th>Tarea 3
6</th></tr>
<tr><td>Tarea 1
$y = ax^2 + bx - 7$;
$a < 0$ y $b < 0$</td><td>Tarea 2
$y = ax^2 + bx + c$;
$a > 0, b = 0$ y $c > 0$</td><td colspan="3">Tarea 3
$y = ax^2 + bx + 3$;
$a < 0$ y $b > 0$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

Tabla 8. Ejemplo de asociaciones de la unidad simbólica c (estudiante No. 23).

Asociación de la unidad simbólica c con un desplazamiento (derecha-izquierda) de la corva sobre el eje x tomando el inverso de c: $-c$.	**Frecuencia**		
	Tarea 1 7	**Tarea 2** 2	**Tarea 3** 9

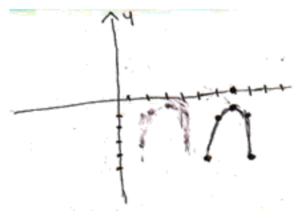
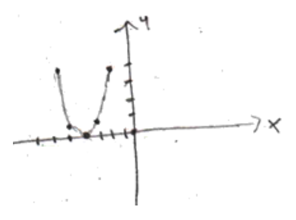
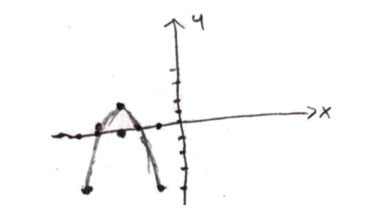
Tarea 1 $\boldsymbol{y = ax^2 + bx - 7}$; $\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b < 0}$	**Tarea 2** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$; $\boldsymbol{a > 0, b = 0}$ y $\boldsymbol{c > 0}$	**Tarea 3** $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + 3}$; $\boldsymbol{a < 0}$ y $\boldsymbol{b > 0}$
		

Tabla 9. Ejemplo de asociaciones de la unidad simbólica c (estudiante No. 70).

En la siguiente tabla se resumen las asociaciones de mayor frecuencia cuando el registro de inicio es el gráfico.

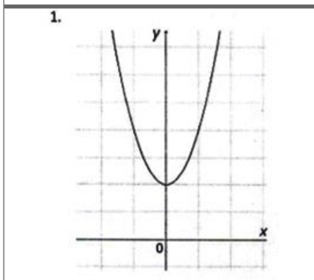
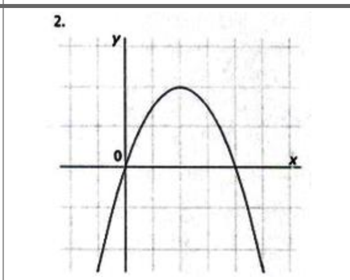
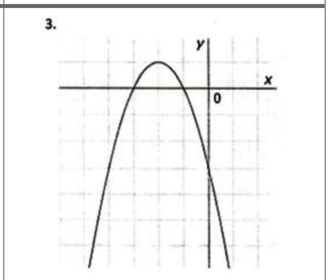
Tarea 1	**Tarea 2**	**Tarea 3**
		
31 estudiantes asociaron la posición del vértice sobre el eje $\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{b = 0}$) con $\boldsymbol{c = 0}$.	98 estudiantes asociaron la intersección de la curva en el origen ($c = 0$) con $c > 0$ o $c < 0$.	71 estudiantes asociaron la intersección de la curva abajo ($c < 0$) del origen con $c > 0$.

Tabla 10. Asociaciones de mayor frecuencia de la unidad simbólica c en el registro G-A.

En la tarea 1, los 31 estudiantes parecen confundir la posición del vértice de la parábola ($b = 0$) sobre el eje y con la intersección de la curva en el origen ($c = 0$). Cuando la curva intersecta al eje y en el origen (tarea 2), 98 estudiantes no lograron asociarlo con $c = 0$. En el caso de la tarea 3, aproximadamente la mitad de los estudiantes asociaron la intersección de la curva que pasa por abajo del origen con la unidad simbólica $c > 0$.

No hubo ningún caso que mostrara un reconocimiento consistente de la asociación entre las tres unidades simbólicas (a, b y c) con sus respectivas variables visuales. La correspondencia semiótica (asociación) entre la variable concavidad y la unidad simbólica a fue la que mayor reconocimiento tuvo, aproximadamente 51% de los estudiantes fueron consistentes en reconocer esa correspondencia. La correspondencia entre la posición del vértice respecto del eje y y la unidad simbólica b fue reconocida de manera consistente por aproximadamente un 18% de los estudiantes, independientemente de la relación entre b y a. La correspondencia semiótica entre la intersección de la curva con el eje y y la unidad simbólica c, fue la que menor reconocimiento tuvo, aproximadamente el 4% de los estudiantes la reconocieron consistentemente.

CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

En el presente estudio se investigó la asociación que hacen los estudiantes entre las unidades simbólicas (a, b y c) del registro gráfico de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) y sus rescpectivas variables visuales del registro gráfico. Dicha asociación se categorizó como un reconocimiento consistente si la asociación se hacía de manera correcta en todas las tareas propuestas; inconsiste, si la asociación fallaba en al menos una tarea. Los resultados presentan evidencias de que dicho reconocimiento tiende a ser más inconsistente. Estas inconsistencias se pueden entender en las distintas maneras en que los estudiantes asociaron las unidades simbólicas con sus respectivas variables visuales:

- A un mismo signo de una unidad simbólica, el estudiante asocia valores distintos a la variable visual correspondiente. Por ejemplo, asociar a la unidad simbólica $a < 0$ parábolas cóncavas hacia abajo y hacia arriba.
- A dos unidades simbólicas distintas, el estudiante asocia un mismo valor de la variable visual correspondiente. Por ejemplo, los estudiantes que tanto para $b < 0$, como para $b > 0$ trazaron parábolas con posición del vértice de un mismo lado del eje y.
- A dos valores distintos de variables visuales, el estudiante corresponde un mismo signo de la unidad simbólica. Por ejemplo, estudiantes que en dos parábolas con posición del vértice del lado derecho e izquierdo, respectivamente, les asocian el mismo signo de la unidad simbólica b. Así como, estudiantes que asociaron a dos parábolas con valores distintos de la variable intersección de la curva con el eje y (una intersección arriba del origen y otro abajo) el mismo signo de la unidad simbólica c.
- A una misma variable visual, el estudiante asocia unidades simbólicas distintas. Por ejemplo, los estudiantes que, a dos parábolas cóncavas hacia abajo, les asocian $a < 0$ y $a > 0$, respectivamente.

– La correspondencia semiótica entre las unidades simbólicas y variables visuales difiere cuando se cambia de registro de inicio. Por ejemplo, los estudiantes que en la tarea 2 del registro A-G trazaron correctamente una parábola cóncava hacia arriba porque $a > 0$, la posición del vértice sobre el eje y porque $b = 0$ y la curva intersecta al eje vertical arriba del origen porque $c > 0$, pero en la tarea 1 del registro G-A, cuya parábola presentaba las mismas variables visuales (cóncava hacia arriba, posición del vértice sobre el eje y y la curva intersecta al eje vertical arriba del origen) le asociaron unidades simbólicas diferentes. Por ejemplo, asociaron la intersección de la curva arriba del origen con $c = 0$. También sucedió lo contrario, estudiantes que no trazaron correctamente una parábola en la tarea 1 del registro A-G y sí asociaron correctamente las unidades simbólicas de la parábola en la tarea 3 del registro G-A.

Además de las inconsistencias anteriores, es importante señalar que el reconocimiento que muestran los estudiantes no es completo si se considera que no hubo un caso en que se reconociera correctamente la asociación de las tres unidades simbólicas con sus respectivas variables visuales. Por ejemplo, el estudiante puede reconocer correctamente la asociación entre la constante a y la concavidad, pero no asocia la constante b con la posición del vértice respecto del eje y o asociar (o no) la unidad simbólica c con el corte de la curva en el eje y. En la propuesta que aquí se plantea, el reconocimiento de la asociación o correspondencia semiótica que guardan las unidades simbólicas a y b es importante porque la posición del vértice respecto del eje y depende no sólo de b, sino también de a.

Aun cuando los estudiantes habían estudiado previamente diferentes tratamientos de la función cuadrática, se reconoce en los resultados que ese estudio no garantiza que la correspondencia semiótica entre las variables del registro gráfico y las unidades simbólicas del registro algebraico de la función haya sido reconocida correctamente. En el estudio de Valero-Pérez (2015), se verificó que los estudiantes ante tareas como las de la figura 2 (sección 2.2.) logran ir de un registro a otro porque ellos son capaces de realizar algún tratamiento numérico. Sin embargo, al condicionar el uso de esos tratamientos, como se hizo en el presente estudio, la aprehensión global cualitativa se vuelve necesaria, pues les permite ir de un registro a otro tomando en cuenta sólo las reglas semióticas de correspondencia entre las unidades simbólicas del registro algebraico de la función cuadrática y las variables visuales del registro gráfico. En su lugar, la asociación que muestran los estudiantes parece deberse a una aprehensión icónica, por desplazamiento. Esto es un conocimiento acerca de la "traslación de funciones a través de los ejes", pues es uno de los temas que estudian y el cual se ejemplifica con la función cuadrática. Por ejemplo, suponemos que los estudiantes asocian el coeficiente b con un desplazamiento horizontal de la curva, pero no necesariamente identifican que eso es una variable visual pertinente para coordinar ambos registros. De igual forma, asocian el coeficiente c con un desplazamiento vertical, pero no necesariamente como una variable visual que representa la intersección de la curva con el eje y, de hecho, no logran representar dicha intersección cuando se les pide dibujar la parábola.

Consideramos que abordar el estudio de la función cuadrática en su forma general desde una aprehensión global cualitativa, como la que se presenta en este artículo, puede promover que el estudiante alcance a establecer la coordinación de los registros de representación semiótica de la función cuadrática, lo cual le permitirá tener un mayor conocimiento de dicha función.

BIBLIOGRAFÍA

BOUCIGUEZ M., IRASSAR L. Y SUÁREZ M. (2008), Análisis de estrategias: Un estudio de caso para la función cuadrática, *II REPEM-MEMORIAS,* 172-180.

CARRILLO C. (2014), *Matemáticas IV,* Veracruz, México: SEV.

CUELLAR J. (2012), *Matemáticas IV,* México: McGraw Hill.

DÍAZ M., HAYE E., MONTENEGRO F. Y CÓRDOBA L. (2013), Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas, *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe*, 1-13, República Dominicana.

DUVAL R. (1988), Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **1**, 235-253.

DUVAL R. (1992), Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos registros [Parra, B., Trad.]. En R. Cambray, E. Sánchez, y G. Zubieta (Eds.), *Antología en educación Matemática,* Ciudad de México, México: Departamento de Matemática Educativa, 125-139.

DUVAL R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. F. Hitt), 173-20, Grupo Editorial Iberoamericana, S. A. de C. V, México.

DUVAL R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

DUVAL R. (2004), *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Cali, Colombia: Universidad del Valle (Edición en castellano).

GARCÍA L., VÁZQUEZ R. E HINOJOSA M. (2004), Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería, *Ingenierías*, **VII.24**, 27-34.

GÓMEZ-BLANCARTE A., GUIRETTE R., Y MORALES-COLORADO F. (En prensa), Propuesta para el tratamiento de interpretación global de la función cuadrática mediante el uso del *software* GeoGebra, *Educación Matemática*, México.

GUTIÉRREZ R., ARAUJO Y. Y PRIETO J. (2012), Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilzando GeoGebra, *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*, 511-519, Uruguay.

GUZMÁN I. (1998), Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de estudiantes, *Revista Lationamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **1.1**, 5-21.

HUAPAYA E. (2012), *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*, Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Obtenido de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/HUAPAYA_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf

OAXACA J. Y VALDERRAMA M. (2000), Enseñanza de la función cuadrática, interpretando sus parámetros. Obtenido de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at05/PRE1178753682.pdf

OPAZO C., GRAJEDA J. Y FARFÁN R. (2014), Visualización de la función cuadrática, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1539-1546, CLAME, México.

RÍOS R. y CALLEJAS L. (2015), *Matemáticas I*, Veracruz, México: SEV.

SEP (2014), *Programa de estudios*. Obtenido de http://www.dgb.sep.gob.mx/

VALERO-PÉREZ R. (2015), *Dificultades por parte de alumnos de educación media superior y superior en la conversión de los resgistros algebraico y gráfico y viseversa : el caso de la función cuadrática*. Xalapa, Veracruz: Universidad Veracruzana. Tesis de Licenciatura.

REBECA GUIRETTE

guirette-saldana@gmail.com

ANA GÓMEZ-BLANCARTE,

Instituto Politécnico Nacional, CICATA-Legaria,

algomezb@ipn.mx

RICARDO VALERO-PÉREZ

ricval5692@gmail.com

JOSE CARRILLO, MIGUEL MONTES, LUIS C. CONTRERAS, NURIA CLIMENT

LES CONNAISSANCES DU PROFESSEUR DANS UNE PERSPECTIVE BASÉE SUR LEUR SPÉCIALISATION : MTSK

THE TEACHER'S KNOWLEDGE FROM A PERSPECTIVE BASED ON ITS SPECIALIZATION: MTSK

Abstract. This paper shows the conceptualization of an analytical model of mathematics teacher's specialized knowledge, which is based on the seminal work of Lee Shulman. In order to show the potential of the model, it is used here to analyze a particular case of a teacher of Spanish Secondary Education. The analysis shows the intertwining between different features of the knowledge of the teacher, reflecting the integrated nature of that knowledge, allowing, at the same time, a work of decomposition and synthesis of it. That will allow us to manage the design of teachers' education, conducing also to a better understanding of mathematics teaching.

Résumé. Un modèle analytique des connaissances spécialisées du professeur de mathématiques est l'objet de cet article : Sa conceptualisation et sa genèse sont inspirées par les travaux fondateurs de Lee Shulman. Pour montrer le potentiel du modèle, on analyse le cas particulier d'un professeur de l'enseignement secondaire. Cette analyse met en évidence l'interrelation entre les différents aspects des connaissances du professeur, reflétant la nature intégrée de ses connaissances. En même temps elle permet un travail de décomposition et de synthèse qui peut être utilisé en formation initiale des enseignants et qui peut enrichir la compréhension de l'enseignement des mathématiques.

Mots-clés. MTSK, Connaissances du professeur de mathématiques, Modèle analytique

---

Introduction

L'importance de l'enseignant pour promouvoir l'apprentissage de ses élèves est incontestable. Plusieurs variables entrent en jeu lorsqu'un professeur exerce son enseignement dans la salle de classe (Paries, 2010). En particulier, la valeur des connaissances de l'enseignant dans sa capacité à promouvoir le développement des connaissances de ses élèves est un fait connu (Kilpatrick, Swaford, Findell, 2001).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 185 - 205.

Les multiples facettes du savoir qu'un enseignant peut mettre en jeu pour planifier, développer son action en classe et y réfléchir constituent un axe de réflexion usuel de la recherche dans le domaine. Il faut alors se demander quel savoir propre à un professeur de mathématiques peut être utile pour contribuer à l'apprentissage et, d'un point de vue théorique, comment ce savoir peut être modélisé.

Au cours des trente dernières années, la discussion en didactique des mathématiques sur le savoir qui peut être d'utilité pour un enseignant s'est avérée fructueuse dans des modèles qui approchent les différentes manifestations de ce savoir. Shulman (1986, 1987) a introduit la distinction entre le savoir disciplinaire, la connaissance des programmes scolaires et la connaissance didactique du contenu. Voici la définition que Shulman donne de cette dernière connaissance : « *the blending of content and pedagogy into an understanding of how topics, problems, or issues are organized, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction. Pedagogical content knowledge is the category most likely to distinguish the understanding of the content specialist from that of the pedagogue*[1] » (1987, p. 8).

Ce positionnement reconnaît le caractère intrinsèquement professionnel de certains éléments du savoir possédé et mobilisé par les professeurs dans le cadre de leur enseignement. En ce sens, Chevallard (1986) introduit l'idée de la transposition didactique, dans laquelle le professeur est l'agent de la transformation du contenu du niveau académique au niveau scolaire, transformation qui exige de s'appuyer sur des connaissances professionnelles spécifiques.

Des efforts supplémentaires ont tenté d'améliorer cette distinction en ce qui concerne les composants ou les sous-domaines du savoir des enseignants, en prenant en compte la différence entre les mathématiques académiques et les mathématiques scolaires (Bromme, 1994), les différentes situations qui mettent en jeu les connaissances (Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep, 2005), la complexité de ces connaissances et de leur développement (Davis, & Simmt, 2006), ou la spécificité du savoir de l'enseignant par opposition à d'autres professionnels utilisateurs des mathématiques (Ball, Thames, & Phelps, 2008). En outre, il y a des approches où a été discutée la formation mathématique et didactique des professeurs de mathématiques dans l'enseignement secondaire, où les connaissances sont des éléments sous-jacents à la discussion au sujet des types d'activités de formation des enseignants (Chevallard, Cirade, 2006).

---

[1] Traduction : « *le mélange du contenu et de la pédagogie au regard de la façon dont les sujets, problèmes ou questions, sont organisés, représentés, adaptés aux intérêts divers et aux capacités des élèves et présentés pour l'enseignement. La connaissance du contenu pédagogique est la catégorie la plus appropriée pour distinguer les contenus de la compréhension du spécialiste et de celle du pédagogue* »

Les objectifs de ces modèles ont été mis en liaison avec la discussion et la mise en évidence des différents éléments de savoir nécessaires à un professeur pour l'exercice de sa profession en relation avec l'enseignement d'une matière, particulièrement dans le cadre de la salle de classe.

Dans cet article, nous présentons un modèle de *Connaissances Spécialisées du Professeur de Mathématiques* (MTSK, de l'anglais *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*) (Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán, 2013) qui aborde, d'un point de vue analytique, le savoir que le professeur utilise professionnellement dans le cadre de son enseignement mathématique, en considérant la préparation de ses cours, l'activité propre durant le cours et la réflexion après son enseignement, la nature de ce savoir étant supposée complexe, dynamique et tacite (Ponte, 1994).

1. Connaissances Spécialisées du Professeur de Mathématiques

Dans l'étude de Barrera, Liñán, Muñoz Catalán et Contreras (2016), quand la professeure de la cinquième année d'enseignement primaire travaille avec ses élèves la position relative de deux lignes droites, surgissent dans la classe deux situations qui exigent des connaissances qui vont au-delà de celles d'un professeur d'école. La première de ces questions fait référence à la notion de distance entre deux lignes droites, utilisée intuitivement par l'enseignante lorsque deux lignes sont parallèles ; la deuxième porte sur la pertinence d'examiner les cas des lignes droites coplanaires ou non coplanaires lors de l'étude des positions relatives.

Pour la première situation, l'enseignante trace au tableau (Figure 1) deux segments parallèles, signalant par un geste évident leur continuité infinie, et en même temps parallèles à la base du tableau. Elle note (cette fois-ci sans dessin) la distance entre deux points, sans préciser que le segment qui les joint est perpendiculaire aux deux lignes droites ; elle le fait avec plusieurs paires de points comme distance (intuitivement) constante qui, en même temps, caractérise deux lignes droites parallèles.

Figure 1. Représentation au tableau noir de deux droites parallèles *a* et *b*

La deuxième situation résulte de l'intervention d'une étudiante qui, à l'aide de ses index, éloignés l'un de l'autre et pointant dans des directions différentes, interroge sur le parallélisme des deux lignes droites.

Une vision simplifiée du savoir (de nature mathématique) de l'enseignant pour gérer ces situations permet de qualifier comme suffisantes les connaissances sur les positions relatives de deux lignes droites, situées dans un même ou dans des plans différents, et les connaissances sur la notion de distance. Toutefois, les connaissances qui permettraient une gestion adéquate de ces deux situations comprennent également des aspects intrinsèquement liés aux mathématiques comme objet d'enseignement et d'apprentissage. Ainsi, il semble nécessaire de savoir que les différentes façons de dessiner les segments (ou de représenter les lignes droites) ont des répercussions sur la compréhension des étudiants, notamment parce que l'idée de distance que les élèves ont pu capter au travers du dessin réalisé par l'enseignant, peut ne pas être associée à l'idée de perpendicularité aux deux segments (mais à celle d'un segment vertical qui les relie), l'exemple utilisé n'étant pas transparent (Lesh, Behr, & Post, 1987) en ce qui concerne l'idée de distance. En revanche, à propos de deux aspects des situations précédentes, on peut débattre sur la pertinence d'aborder, en cinquième année de l'enseignement primaire, les positions relatives de deux droites uniquement dans le cas où elles sont coplanaires ou, au contraire, de les traiter dans tous les cas.

Quand Lee Shulman (1986) nommait « paradigme perdu » (p.6) le regard sur le savoir du professeur en relation avec le contenu qu'il enseigne, il voulait souligner que pour « gérer les classes, organiser et structurer les activités, planifier les cours, formuler des questions et apprécier la compréhension des élèves » (p.8), il faut prendre en compte des connaissances centrées sur le contenu, différentes du savoir pédagogique général.

Il n'est pas nouveau d'attirer l'attention sur *le savoir concernant le contenu* qui est enseigné ; en effet, Shulman (1986) signale que le savoir disciplinaire et le savoir pédagogique ont été de manière séparée des protagonistes du mouvement pendulaire qui a caractérisé les paradigmes précédents. Ce qui est nouveau est la description détaillée de l'essence de ce savoir disciplinaire, qui ne tient pas seulement compte de son étendue, ni même de la distinction entre les connaissances mathématiques formelles et les connaissances mathématiques scolaires, mais qui insiste surtout sur ses structures substantives et syntaxiques (Shulman cite Schwab, 1978). Pour Shulman, l'important des connaissances substantives du contenu est d'aller au-delà des faits ou de concepts d'un domaine, d'envisager les « diverses façons dont les concepts et les principes de base de ces faits et concepts sont organisés » (p. 9). Le savoir syntaxique, en revanche, désigne l'ensemble des formes qui servent à construire ou à valider les connaissances, les règles qui sont utilisées pour cette construction, un peu comme sa propre grammaire, qui permet à l'enseignant de montrer aux étudiants ces vérités.

La connaissance didactique du contenu, en revanche, peut être considérée comme un apport révolutionnaire à son époque, en rupture avec le mouvement pendulaire et en marche vers un amalgame entre le contenu et la pédagogie, ou, ainsi que Shulman (1986) l'affirme, elle va « au-delà des connaissances du contenu *per se* vers une dimension des connaissances du contenu de l'enseignement » (p.9). Cette connaissance didactique englobe tout ce qui permet d'édifier des ponts entre deux connaissances du contenu, celle de l'étudiant et celle de l'enseignant, ce qui implique de connaître différentes façons de représenter ces contenus, des exemples et des analogies, différentes manières de les expliquer. Elle demande aussi, par exemple, de connaître les raisons qui font qu'un contenu donné soit plus difficile pour les étudiants et les conceptions erronées que les étudiants peuvent présenter, de savoir ce qui est adéquat ou inadéquat pour les enfants d'un âge donné, de connaître les stratégies alternatives fréquemment utilisées par les étudiants pour résoudre des problèmes.

Enfin, l'idée de *connaissance du programme d'études* est également pertinente, allant au-delà des simples connaissances de ce qui est inclus dans les normes locales ou nationales. Elle envisage également la variété du matériel didactique disponible en relation avec les programmes éducatifs qui émanent de ces normes.

Tout cela nous place face à un savoir qui permet à l'enseignant de voir le contenu en tant qu'objet d'enseignement et d'apprentissage et qui attire notre attention sur l'importance de connaître le contenu d'une manière sensiblement différente de ce qui avait été imaginé jusqu'alors. Nous l'avons appelé *Savoir Spécialisé du Professeur de Mathématiques* (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge - MTSK) (Carrillo, *et al.*, 2013), étant donné qu'il s'agit d'un savoir qui est spécifique à l'enseignant et qui ne serait utile ni pour d'autres professionnels qui utilisent les mathématiques, ni pour d'autres professionnels de l'enseignement.

Le modèle MTSK comprend divers éléments qui soutiennent sa conceptualisation, et qui, à leur tour, montrent la perspective qui a été à l'origine de son développement. Ces éléments sont le caractère spécial du savoir du professeur, la perspective interprétative (non évaluative) où il se développe et l'approche focalisée sur les mathématiques.

L`activité professionnelle de professeur de mathématiques exige des compétences et des connaissances mathématiques (Ruiz-Olarría, & Sierra, 2011), qui lui confèrent de la spécificité en tant que profession. En particulier, la spécialisation des connaissances du professeur de mathématiques est considérée, du point de vue présenté ici, comme dérivée de la nature professionnelle de son usage. Cela exige un changement d'approche par rapport à des approches antérieures, dans lesquelles le savoir était considéré comme spécialisé lorsqu'il était du ressort exclusif du professeur (Ball, *et al.*, 2008). Ainsi, on prétend que le savoir du professeur est spécialisé dès lors qu'il est utile dans des contextes d'enseignement et d'apprentissage, dans la ligne proposée par Schoenfeld (2010). De même, ce modèle se focalise également sur le savoir propre à un enseignant dont l'activité professionnelle est liée à l'enseignement des mathématiques, de telle sorte que ne constituent la conceptualisation que les éléments dans lesquels le contenu mathématique est pertinent. Par exemple, les aspects liés à la gestion de la classe, propres du savoir pédagogique général, ne sont pas considérés, sans préjudice de leur pertinence. En outre, nous nous concentrons sur l'enseignant par rapport à ses prises de décisions en lien direct avec l'enseignement du contenu mathématique. Il y a beaucoup d'autres éléments impliqués dans cette prise de décision et dans d'autres aspects du rôle de l'enseignant qui n'ont aucun rapport avec le contenu mathématique (comme les considérations sur le contexte culturel et social où se déroule son travail, ses valeurs ou sa vision de l'école et son rôle au sein du système éducatif) et nous sommes conscients que ces aspects se situent au-delà de ce que nous traitons ici.

Le paradigme depuis lequel le modèle est développé et qui constitue le point de départ de l'approche des connaissances professionnelles est interprétatif. Il est lié à la compréhension de la nature des savoirs mis en jeu par l'enseignant et à l'articulation des différentes composantes de ces savoirs. Cela implique que ce n'est pas sur la correction ou non de ces savoirs que le modèle a été construit, pas plus qu'à partir d'une description de ce que devraient être ces connaissances. Cela ne signifie pas que le modèle ne puisse pas être utilisé dans un objectif d'évaluation, comme cela se produit, par exemple, quand il est employé en formation initiale des enseignants. Dans ce cas-là, évidemment, la confrontation des connaissances des futurs enseignants avec un programme des connaissances souhaitables a évidemment un sens.

La figure 2 illustre le modèle MTSK avec ses domaines et sous-domaines. MTSK est composé de deux des domaines du modèle de Shulman, le domaine mathématique (MK) et le domaine des connaissances didactiques de contenu (PCK). Dans l'un des sous-domaines de ce dernier (celui des connaissances des normes (ou : *standards*) d'apprentissage des mathématiques- KMLS), nous avons inclu les connaissances scolaires au sens de Shulman; et nous avons de plus considéré les conceptions et convictions du professeur en ce qui concerne les mathématiques et ses processus d'enseignement et d'apprentissage comme un élément qui imprègne toutes les connaissances.

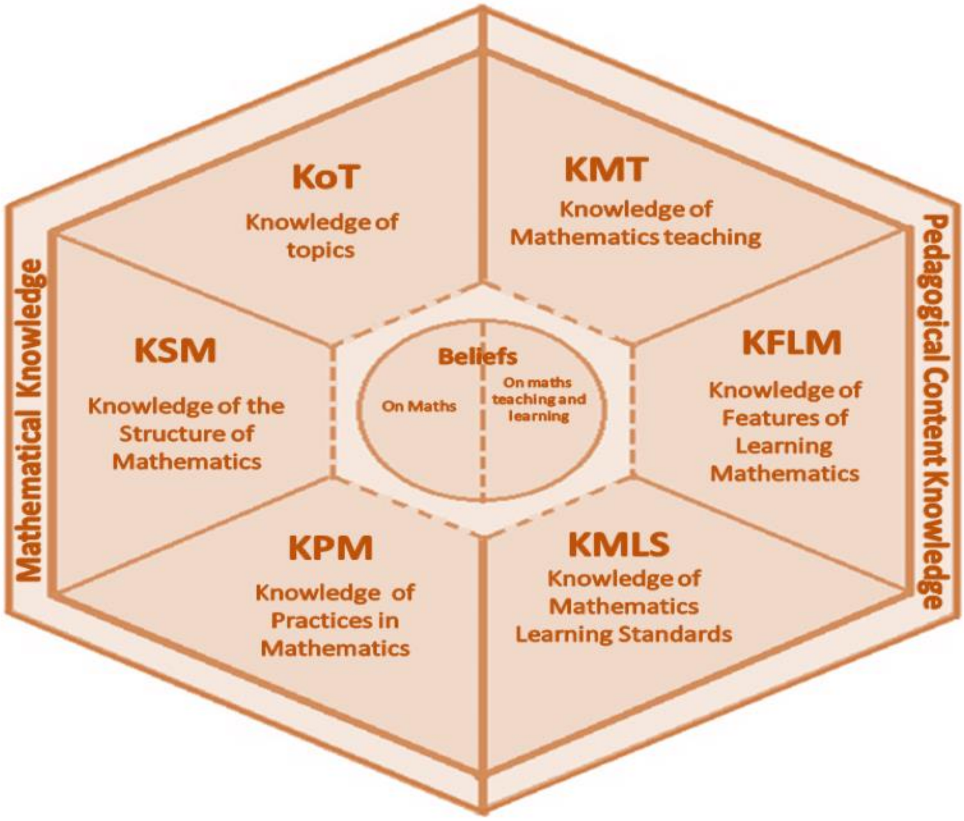


Figure 2. Modèle MTSK (extrait de Carrillo, *et al*., 2013)

Les sous-domaines du domaine mathématique (MK) apparaissent, inspirés en grande partie par l'idée de Ma (1999) de « connaissance profonde des mathématiques fondamentales », comme un type de connaissances qui est connectée, structurée et en accord longitudinal avec le noyau des idées mathématiques. Le premier des sous-domaines inclus est constitué par la connaissance des thèmes (KoT), comprise comme une connaissance disciplinaire qui englobe la phénoménologie et les applications d'un contenu, les procédures, les définitions, les propriétés et leurs fondements, les différents registres de représentation.

La connaissance de connexions est pour nous l'essence de la connaissance de la structure mathématique (KSM), qui permet d'avoir une vue d'ensemble des connaissances mathématiques, avec leurs connexions de simplification ou de complexification (qui permettent de voir tant un contenu élémentaire d'un point de vue avancé que des connaissances avancées d'un point de vue élémentaire), des connexions auxiliaires (qui permettent de faire un usage instrumental d'un concept ou une procédure en travaillant avec d'autres contenus) et les connexions transversales (qui traitent des idées mathématiques qui relient plusieurs noyaux de contenus).

Par ailleurs, la structure syntaxique de Shulman fait partie de notre connaissance de la pratique mathématique (KPM), qui consiste en la connaissance des manières d'agir propres au travail mathématique, incluant des aspects de la communication, l'argumentation et la démonstration mathématiques, et aussi la connaissance de ce que définir signifie et les caractéristiques que doit avoir un énoncé mathématique (définitions, propositions...), la connaissance des processus associés à la résolution de problèmes (heuristique) et d'autres pratiques mathématiques (telle la modélisation).

Les sous-domaines et catégories relatifs à la Connaissance Didactique du Contenu sont étroitement liés à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. L'idée d'amalgame de Shulman est puissante dans la mesure où elle nous fait voir qu'il ne s'agit pas d'une simple juxtaposition de connaissances.

Il faut aussi y inclure la connaissance de ressources matérielles ou virtuelles, y compris celles conçues par l'enseignant lui-même, et, en ce qui concerne leur potentialité et les activités mathématiques qu'elles renferment, la connaissance des stratégies d'enseignement, des techniques, des tâches et des exemples. Toutes deux font partie de ce que nous avons appelé *la connaissance de l'enseignement des mathématiques* (KMT), complétée par une connaissance de théories personnelles ou formelles de l'enseignement.

Un autre aspect qui apparaît utile est la connaissance des formes d'interaction entre les étudiants et le contenu mathématique, y compris les savoirs du professeur au sujet des modes possibles d'appréhension associés à la nature du contenu mathématique. Dans leur voisinage, nous plaçons la connaissance des forces et des faiblesses associées à l'apprentissage, lesquelles joignent des connaissances sur des erreurs, des obstacles, des faiblesses et des capacités potentielles des étudiants, en liaison avec les mathématiques en général ou avec des thèmes spécifiques. Il convient aussi de citer comme pertinente la connaissance de théories personnelles ou formelles sur l'apprentissage des mathématiques en général et celui de contenus particuliers et la connaissance des attentes et des intérêts que les élèves ont tendance à avoir en relation avec les contenus mathématiques. Toutes ces connaissances constituent le sous-domaine de la *connaissance des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques* (KFLM).

Comme nous l'avons indiqué précédemment, l'enseignant doit connaître les contenus mathématiques que les étudiants sont censés apprendre à chaque niveau d'enseignement. À cette connaissance normative, nous ajoutons la pertinence du savoir sur les apports que la didactique des mathématiques a produits dans ce sens et qui permettent à l'enseignant la prise de décisions sur la façon d'organiser et de planifier le contenu mathématique dans les différents niveaux de scolarité. Dans ce sous-domaine, que nous avons dénommé *Connaissance des standards de l'apprentissage des mathématiques* (KMLS), nous avons distingué la connaissance que l'on veut que nos élèves acquièrent et l'acquisition du niveau de développement conceptuel et procédural prévu, aussi bien pour un contenu particulier et un niveau particulier que pour la connaissance du séquençage du contenu. Ce sous-domaine guidera les décisions de l'enseignant sur ce qui doit être enseigné, et indiquera comment les contenus doivent être adaptés aux besoins intellectuels et culturels de ses étudiants (Giroux, 1997).

En synthèse, le modèle MTSK envisage la spécialisation du savoir du professeur de mathématiques touchant à tous les domaines. Il ne s'agit pas d'associer le caractère spécialisé à un domaine ou à un sous-domaine particulier, au contraire cette spécialisation part de la connaissance qui sert ou est nécessaire pour l'enseignement des mathématiques, peu importe que cette connaissance soit, en tout ou partie, partagée par d'autres personnes. Avec cohérence, le domaine du savoir mathématique se divise d'une manière qui est intrinsèque aux mathématiques. De la même manière, dans le domaine des connaissances didactiques du contenu, il n'y a de place que pour les sujets sur lesquels les mathématiques influent. Enfin, l'inclusion des convictions et conceptions permet de mieux comprendre l'enseignant. Pour cette étude, nous nous appuyons sur Carrillo et Contreras (1995), qui établissent des catégories et des indicateurs pour les conceptions sur les mathématiques et les conceptions sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Malgré tout, les convictions et les conceptions ne seront pas dans cet article objet de notre intérêt.

Plus avant, on va illustrer le MTSK en action, en l'appliquant à l'analyse du savoir d'un professeur de l'enseignement secondaire. Dans l'analyse, on parlera d'« indice » pour signaler les extraits qui semblent indiquer l'existence d'un élément donné de savoir, mais qui ne peuvent cependant pas être considérés comme une preuve.

2. Le savoir spécialisé de Philippe

Joana, une jeune fille de 15 ans, doit faire face à ce problème : *La place du village de Villaonuba a été décorée pour les fêtes. Des chaînes de guirlandes relient entre eux tous les sommets de la place. Pour cela, il a fallu utiliser 4 boîtes de 15 chaînes de guirlandes chacune, et il est resté quelques chaînes. Combien de côtés a la place de Villaonuba ?*

Ce problème a été posé par Philippe, professeur de mathématiques au 3ème niveau d'enseignement secondaire (élèves de 14-15 ans) dans un centre éducatif en milieu urbain situé à Huelva (Espagne). Le problème permet une approche soit géométrique (en considérant que les chaînes correspondent aux côtés et aux diagonales du polygone équivalant à la forme de la place), soit arithmétique. Par exemple, si on considère le nombre de sommets, on remarque que le nombre de chaînes de guirlandes correspond à la somme des nombres naturels consécutifs de 1 au nombre de sommets moins un. En outre sont possibles une résolution par tâtonnements, en essayant avec différents nombres de côtés, pour approcher le nombre possible de chaînes (qui se situe entre 45 et 60, valeurs extrêmes exclues), ou une recherche de relation entre le nombre de sommets et le nombre de chaînes de guirlandes nécessaires. L'interprétation géométrique peut donner un sens à l'arithmétique. Le problème génère la mise en place de conjectures et la discussion sur sa validation.

Le centre éducatif où se situent les interactions décrites ici est de niveau moyen, tant en ce qui concerne le milieu socio-économique que le niveau de compétence des élèves. Le groupe de Joana est hétérogène, et Joana est une élève de niveau moyen, intéressée et désireuse d'apprendre. Cela fait dix ans que Philippe enseigne dans le collège, son expérience professionnelle totale étant de 16 ans. Considéré comme un bon professionnel par ses collègues et toujours disposé à coopérer dans la recherche, bien qu'il ne soit pas possible d'enregistrer ses cours en raison du refus de certains parents. La classe accueille 30 élèves, dont 14 garçons et 16 filles, répartis en 6 groupes de 5 élèves. Anne, Ester, David et Pierre appartiennent au groupe de Joana. Le climat de travail est positif dans la classe de même que dans le groupe de Joana.

Les étudiants ont déjà travaillé, parmi d'autres contenus mathématiques, les équations du second degré et les éléments des polygones, y compris la formule pour obtenir le nombre de diagonales d'un polygone connaissant son nombre de sommets. Ces élèves sont aussi habitués à faire face à des problèmes mathématiques, dont certains sont travaillés en groupe. Normalement, chaque groupe a un membre qui agit comme porte-parole tout au long de la mise en commun. Joana est particulièrement active et s'implique dans la résolution du problème, ce qui attire l'attention de Philippe.

En prenant en compte la planification du professeur, l'observation de classe et les entretiens, nous effectuerons une analyse de contenu (Bardin, 1998) afin de réaliser une approche du savoir du professeur en relation avec l'enseignement des mathématiques, dans le but de le comprendre. Dans cette analyse émergent les catégories qui composent chacun des sous-domaines précédemment présentés.

Quand nous avons lu la planification de la séance, nous avons pensé que le professeur avait conçu ce problème dans le but de vérifier si les élèves peuvent mettre en jeu des contenus qui n'ont pas été abordés d'une manière mécanique, comme Philippe lui-même nous l'a confirmé lorsqu'il a été interrogé sur l'objectif du problème :

I (investigateur) : Pourquoi est-ce que vous choisissez ce problème ?

P (Philippe[2]) : Je ne choisis pas vraiment le problème. Tout simplement, je l'élabore **{KMT : tâches} {KoT : phénoménologie et applications}[3];** pour voir si mes élèves sont capables d'appliquer leurs connaissances d'une manière non mécanique **{conceptions : apprentissage significatif}[4]**. Ils ont vu la formule des diagonales [cela fait référence à l'expression $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$]. Pour obtenir cette formule, les élèves ont suivi un raisonnement, et je souhaite voir s'ils l'appliquent, c'est-à-dire s'ils ont vraiment compris **{conceptions : apprentissage significatif}.** Les étudiants ont tendance à faire plus ou moins bien les problèmes directs (je leur donne les côtés et ils calculent les diagonales), mais ils ont plus de difficultés pour les problèmes inverses (je leur donne le nombre de diagonales et ils doivent trouver celui des côtés), et plus encore quand, de fait, cela n'est pas suffisant **{KFLM : points forts et difficultés}**. C'est le cas ici, car ils doivent ajouter côtés et diagonales [puisque les chaînes de guirlandes joignent chaque sommet avec tous les autres sommets] **{indice de KoT : procédure}.** En outre, c'est un problème très riche, qui permet de travailler des aspects arithmétiques et géométriques en même temps et qui peut servir de précurseur du sujet de la succession à travers de la recherche du terme général **{KSM : complexité et connexions transversales}.**

I : Vous croyez que vos élèves sont prêts à faire face à ce genre de problèmes qui ne sont pas seulement inverses, mais pour lesquels il n'y a pas de formule immédiate à appliquer ?

P : Peut-être n'est-ce pas immédiat pour eux, ils feront probablement des erreurs, mais le niveau de difficulté correspond à ce qu'on attend d'eux dans ce cours, au moins en première instance **{KMLS : attentes de l'apprentissage du contenu mathématique à un niveau donné}.** Je crois, par ailleurs, que certains de mes étudiants résoudront bien le problème {**KMLS : niveau de développement conceptuel ou procédural attendu pour un contenu à un moment particulier de l'école**}[5].

[2] On souligne l'initiale de l'enseignant pour différencier facilement son intervention de celle de ses élèves dans les fragments d'interaction entre eux.
[3] Les symboles { } sont utilisés pour inclure le sous-domaine et la catégorie de MTSK signalée, est écrite en caractères gras.
[4] Même si les conceptions ne sont pas l'objet de cet article, elles sont incluses pour fournir une meilleure compréhension du savoir de l'enseignant.
[5] Notons que dans cette assignation, comme dans d'autres cas, on n'évalue pas le savoir du professeur, on ne montre que la catégorie à laquelle appartient l'information.

En classe, les étudiants ont commencé à travailler en groupe. Philippe leur a donné l'énoncé du problème et leur a dit de le lire attentivement. Ils ont réfléchi un peu et puis ils se sont mis à discuter dans chaque groupe. On dirait que Philippe sait que souvent les étudiants ne comprennent pas l'énoncé **{KFLM : points forts et difficultés},** d'où l'importance de la lecture.

Après dix minutes de travail, une intéressante discussion s'établit dans le groupe de Joana (c'est la première fois qu'ils se mettent à discuter sur le problème. Auparavant, chacun l'avait affronté individuellement) :

D (David) : La solution est 12, la place de Villaonuba a 12 côtés.

E (Ester) : Ce n'est pas mon résultat.

A (Anne) : Mon résultat est un nombre décimal.

J (Joana) : Un nombre décimal ? Impossible !

P (Pierre) : Pourquoi ?

J : Parce que le nombre de côtés ne peut pas être un nombre décimal.

D : Moi, je pense que le nombre de diagonales doit être 60.

J : Mais 60 est impossible, il y a trop de chaînes.

D : Oui, mais attends. J'ai résolu l'équation $\frac{n(n-3)}{2} = 60$ et le résultat est n = 12.56. Alors, comme le résultat ne peut pas être un nombre décimal, la solution est 12.

A : J'obtiens un autre nombre décimal. J'ai fait comme toi [David], mais j'ai ajouté le nombre de côtés [$\frac{n(n\text{-}3)}{2} + n = 60$] et ça fait 11.47.

Philippe observe la discussion et il se rend compte que David ne comprend pas la résolution d'Anne, alors il décide d'intervenir.

P : Vous avez égalé à 60 des choses différentes, pourquoi ? Qu'est-ce qui s'ajuste à l'énoncé du problème ?

J : Monsieur, je pense que la solution de David n'est valable que s'il y a des chaînes tout autour de la place. Comme il est dit que les chaînes sont placées entre tous les sommets, ce ne sont pas seulement les diagonales.

Face à l'incompréhension de David, Philippe propose de faire le dessin d'une place avec moins de côtés, par exemple, moins de 6 côtés et il dessine les chaînes dans ce cas **{KPM : heuristique}** ; {**KMT : des stratégies, des techniques, des tâches et des exemples pour l'enseignement du contenu mathématique, dans ce cas-là, en rapport avec les stratégies pour aider les étudiants**}. David dessine une place pentagonale.

D : Oui, c'est vrai !

E : La solution est donc 11 côtés, n'est-ce pas ?

P : Avec 11 côtés on obtient 55 chaînes et avec 10 côtés on en a 45, donc il y a deux solutions.

J : Je pense que la bonne solution est 11, car avec 45 chaînes, on n'a pas besoin de 4 boîtes.

Dans l'entretien qui a eu lieu après le cours on interroge Philippe sur son avis à propos de l'erreur de David.

P : David n'a pas commis une grave erreur, car il pensait à une distribution des chaînes qui ne correspondait pas avec l'énoncé, mais qui avait du sens. Par contre, l'erreur d'Anne était plus grave ; elle croyait possible une solution décimale. L'erreur de David montre une mauvaise interprétation de l'énoncé, peut-être à cause des problèmes travaillés en cours jusqu'au présent, qui parlaient des diagonales selon le nombre de sommets et non des côtés s'ajoutant aux diagonales. **{KFLM : formes d'interaction des étudiants avec un contenu}.**

I : Comment vous avez trouvé l'intervention de Joana à cet égard ?

P : J'ai été surpris, parce qu'elle n'est pas souvent si active, mais cette fois-ci, elle était très impliquée dans le problème et elle a capté l'essence.

I : Quelle est, d'après vous, l'essence du problème ?

P : C'est comprendre l'énoncé comme donnant un éventail de réponses possibles, de 46 (pas 45) à 59 (pas 60), étant donné qu'on a employé 4 boîtes et qu'il y a encore des chaines **{KoT : procédures}.** Et quelque chose d'essentiel est aussi que les solutions doivent être des nombres entiers positifs, {**KoT : définitions, propriétés et leurs fondations**} {**KPM : heuristique**}.

I : Et je suppose que, comme vous l'avez dit précédemment, l'application de la formule pour le nombre de diagonales en mode inverse est aussi quelque chose d'important dans le problème.

P : Oui, bien sûr, mais, une fois qu'ils décident de l'appliquer, ce qui suit est quelque chose de mécanique, le plus important est d'interpréter le nombre qu'ils obtiennent comme solution pour n [le nombre des sommets du polygone] {**conception : importance de la plausibilité du résultat au-dessus des algorithmes**}.

Retournons à la salle de classe. Pour effectuer la mise en commun des résolutions des groupes, le porte-parole (Marie) de l'un des groupes explique :

M (Marie) : Nous avons fait le problème d'une manière similaire à ce qu'on a fait en cours pour obtenir la formule des diagonales. On a pensé que chaque sommet s'associe avec tous les autres, sauf lui-même, donc nous avons multiplié n par n-1, et ensuite nous avons divisé par 2.

P : Pourquoi est-ce que vous avez divisé par 2 ?

M : Parce que chaque chaîne relie deux sommets, donc nous les avons comptés deux fois.

P : Alors, quelle formule avez-vous obtenue ?

M : $\frac{n(n-1)}{2}$

P : Et quelle est la solution ?

M : La place de Villaonuba aurait 11 côtés.

E : Mais, c'est le résultat d'Anne et elle ne l'a pas fait comme ça.

P : Pensez-vous qu'il est possible de le faire de deux façons différentes et d'obtenir le même résultat ? [On interroge Philippe dans l'entretien sur le sens de cette question et il répond que de nombreux étudiants pensent que chaque problème n'a qu'une résolution et une solution unique, ce que l'on interprète comme **{KFLM : connaissances des intérêts et des attentes des étudiants}**]

Certains sont d'accord et d'autres sont en désaccord. Un étudiant d'un autre groupe prend la parole :

R (Richard) : Mon résultat est $\frac{n(n-1)}{2}$, mais je le n'ai pas fait comme ça. J'ai commencé par faire une grille. Dans une colonne, j'ai mis le nombre de côtés et dans l'autre colonne, le nombre de chaînes, et j'ai remarqué que si je multiplie le nombre de côtés par lui-même moins 1, j'obtiens le double du nombre de chaînes.

P : Richard, passe au tableau et mets cette grille pour que tes camarades puissent te comprendre. [Philippe est conscient des difficultés que certains étudiants éprouvent pour comprendre des messages mathématiques sans support visuel **: {KFLM : connaissances des points forts et des difficultés}]**

Richard écrit au tableau, la grille suivante :

3	3
4	6
5	10
6	15
7	

Et il explique :

R : Voyons. Si je multiplie 3 fois 2, ça fait 6. Si je multiplie 4 fois 3, le résultat est 12. Et 5 multiplié par 4 est égal à 20 ; 6 fois 5 ça fait 30 ; et 7 fois 6, 42, qui est le double des chaînes que je dois mettre dans la case vide.

P : Y comment as-tu fini le problème ?

R : J'ai résolu l'équation $\frac{n(n\text{-}1)}{2} = 60$ et puis j'ai fait la même chose que mes camarades.

P : Vous êtes d'accord avec la solution de Richard ?

Tous les étudiants manifestent leur accord avec cette solution.

P : Comment peut-on être sûr que cette règle appliquée par Richard sera valable pour les numéros suivants ?

J : Parce que c'est la même trouvée par Marie.

P : Oui, bien sûr, mais vous devez penser qu'on ne connaît pas la formule, puisque Marie ne l'a pas encore montrée.

Plusieurs étudiants disent que la formule de Richard est valable dans tous les cas, parce que « on peut l'appliquer pour les premiers nombres ».

P : Si seulement nous avions regardé le 3, on aurait dit que les chaînes correspondent aux sommets. Ou si nous n'avions regardé que le 3 et le 4, nous aurions pu dire que la formule est $n + (n\text{-}3)2$, ou $3n\text{-}6$. **{KoT : procédures ; KPM : formes d'argumentation, de validation et de vérification** (rôle des exemples dans la démonstration)}

Certains élèves disent : « c'est vrai, mais alors pour 5 cette formule ne vaut pas, tandis que celle de Richard est valable ».

P : En effet, mais on sait qu'elle est valable parce que nous avons fait le calcul pour 5. Mais est-ce que ça sert pour 11 ? Et si, au lieu de 11, la solution était 11000 ? Va-t-on continuer à faire la grille jusqu'à 11000 ?

La porte-parole d'un autre groupe, Hélène, intervient :

H : Et notre travail, est-il bien ? Nous avons fait des dessins des cas de 4, 5, 6 et 7 côtés, et nous avons remarqué que le résultat est 6, 10, 15 et 21 chaînes. Nous avons fait la même grille que le groupe de Richard et nous avons remarqué que le nombre de chaînes à ajouter d'un nombre de sommets au suivant est à chaque fois un de plus.

P : Tu peux venir au tableau et l'expliquer à partir de la grille de Richard, s'il te plaît ?

H : De 6 à 10 s'ajoutent 4 ; de 10 à 15, 5 ; de 15 à 21, 6. Alors nous avons pensé qu'avec 8 côtés, ça doit être 21+7 = 28 chaînes ; avec 9 côtés, 28+8 = 36 chaînes ; avec 10 côtés, 36+9 = 45 chaînes; et avec 11 côtés 45+10 = 55 chaînes. Il y a 11 côtés car 55 + 11 = 66 et le résultat dépasse les 4 boîtes de 15 chaînes.

P (à tous les élèves) : Qu'en pensez-vous ? Etes-vous d'accord avec l'argumentation d'Hélène ou partagez-vous l'idée du groupe de Richard ? On peut garantir que, vu que jusqu'à 7 côtés on ajoute un de plus, cela doit continuer à se produire ?

Jean, un autre étudiant du groupe d'Hélène, intervient :

J : Mais si on le vérifie avec 11 côtés et on obtient 11 x 8/2 = 44 diagonales ; plus 11 côtés, ça fait 55 chaînes, alors on a prouvé que cette formule est valable.

P : Avez-vous vérifié qu'elle est valable en tant que solution du problème ou que votre hypothèse de la différence entre le nombre de chaînes est vraie ? {**KPM : formes d'argumentation, de validation et de vérification**}.

J : La première chose.

P : Aurait-il été possible de le résoudre de cette façon si le problème avait parlé de 3000 boîtes de 15 chaînes ?

Certains élèves répondent négativement.

Philippe montre les différents éléments du modèle MTSK dans ses interventions. On a déjà signalé les connaissances procédurales associées à la résolution de l'expression générale de suites arithmétiques. Pour la première résolution, on a comme seule donnée $a_1 = 3$. Pour la deuxième a_1=3 y a_2=6 {**KSM : connexions de complexité**}. De même, nous reconnaissons des connaissances de tâches à l'approche des questions sur la généralisation des étudiants et qui présentent des variantes de la tâche proposée ("et si, au lieu de 11, la solution était 11000 ? ») : {**KMT : connaissances des stratégies, des techniques, des tâches et des exemples pour l'enseignement des contenus mathématiques**}. Mais tout ce qui précède, du moins sa manifestation dans la classe, est réellement conditionné par la finalité de l'approche des questions de Philippe.

I : On dirait que la solution de Richard a été spéciale pour toi, n'est-ce pas ? Pourquoi ?

P : Parce que Richard a abordé le problème d'une façon arithmétique et cela n'a aucun sens ici, parce qu'il n'y a aucun argument géométrique qui garantit que cette règle, que ce patron va être poursuivi {**KPM : formes d'argumentation, de validation et de vérification de mathématiques}**. Le groupe d'Hélène a également fait quelque chose de semblable, sans doute inspiré par certains problèmes que nous avons travaillé sur l'observation des régularités {**KFLM :**

formes d'interaction des étudiants avec un contenu}. Même s'ils n'ont pas pu le prouver de manière géométrique, ils ont prouvé que le résultat de son hypothèse était valable à la suite du problème. Si vous essayez de prouver de façon géométrique, vous pouvez voir que la différence entre le nombre de diagonales d'un polygone de n côtés et celui de n+1 côtés est n-1 ; comme vous devez également ajouter un autre côté, vous avez une différence de n, qui coïncide avec la conjecture des étudiants {**KoT : procédures**}; {**KPM : formes de l'argumentation, validation et vérification de mathématiques**}. Cela je l'ai vérifié ensuite ; en classe, je n'ai pas considéré convenable de le prouver, cela aurait provoqué des confusions, mais son argument (à partir de quelques exemples) n'était pas valable {**KFLM : connaissance des points forts et des difficultés**}. En outre, j'estime que mon intention de leur faire reconnaître que la résolution du problème a été valable dans le cas du groupe d'Hélène (ils ont atteint « intuitivement » un cas possible et l'ont testé), mais que leur proposition n'était pas argumentée, sera passée à côté de beaucoup d'élèves, qui restent sans savoir si celle-ci est la solution (le nombre de côtés, dans ce cas-là) {**KFLM { : connaissances des intérêts et des attentes des étudiants**}.

Discussion de l'analyse et conclusions

L'analyse du savoir spécialisée de Philippe nous permet de comprendre comment il reconnaît dans le contenu en question un objet d'enseignement et d'apprentissage et comment il met en œuvre ce savoir dans la classe.

Du point de vue de la Connaissance des Thèmes (KoT), Philippe connaît la relation entre le nombre de côtés et celui des diagonales d'un polygone, ainsi qu'une situation où l'application d'un tel contenu a du sens. Il sait créer une tâche à partir de cette situation (KMT) et apprécier les difficultés éventuelles des élèves par rapport à la tâche, tant sur les aspects concernant le contenu en question (difficultés d'application de la formule en mode inverse, ou envisager des solutions décimales) que sur les aspects mathématiques généraux (difficultés à comprendre l'énoncé d'un problème ou à comprendre un argument en l'absence de support visuel - quand Richard explique sa résolution) (KFLM).

De même, du point de vue du KFLM, il comprend la pensée habituelle des étudiants sur le contenu en question (parce que dans la tâche seules les diagonales peuvent être considérées) et leurs attentes (les élèves pensent souvent que la résolution et la solution d'un problème sont uniques, et aussi que, si le résultat est correct, la procédure suivie pour y arriver est également valable). Il peut également évaluer la tâche en rapport aux savoirs qu'il veut faire apprendre à un élève quant au contenu à ce niveau (KMLS).

Revenant au savoir mathématique du professeur, ses connaissances des différentes procédures pour résoudre la tâche, du fait que les côtés et les diagonales doivent être des nombres naturels (KoT), ainsi que des formes d'argumentation, validation et vérification en mathématiques, et de la stratégie heuristique de réflexion pour savoir si la solution est valable (KPM), lui permettent d'évaluer la pertinence des résolutions des élèves et la compréhension du contenu découlant de ces résolutions. Donc, il peut identifier quels sont les éléments clés dans la compréhension de la tâche (par exemple, en considérant seulement comme solutions des nombres naturels) et reconnaître que les résolutions arithmétiques réalisées par les étudiants ne permettent pas une démonstration de la situation. Le professeur sait établir géométriquement les hypothèses numériques des étudiants (KoT), bien qu'il refuse de traiter ce point en cours, en raison de considérations relatives aux attentes des étudiants signalées dans le paragraphe précédent (KFLM). En outre, son KPM concernant les formes d'argumentation, validation et vérification et son KoT pour obtenir le terme général d'une suite arithmétique connaissant certains de ses termes, lui permettent de remettre en cause les résolutions arithmétiques des élèves, en proposant d'autres solutions à la tâche initiale, pour laquelle leurs résolutions ne seraient pas applicables. Son KPM en relation avec l'heuristique pour la résolution de problèmes (en particulier dans le cas présent, celui de la simplification du problème) est liée à ses connaissances de l'aide aux étudiants (KMT). Il semble également avoir une vision du problème, ce qui lui permettra ultérieurement des transferts vers d'autres contenus (KSM).

Par ailleurs, certaines conceptions mises en évidence chez l'enseignant, concernant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, permettent de mieux comprendre son intervention en classe, en complément de la vision donnée par les sous-domaines de connaissances spécialisées. Par conséquent, la tâche qu'il propose et l'analyse qu'il fait des difficultés des élèves se comprennent à partir de sa vision qu'un apprentissage mathématique efficace doit présenter des situations qui donnent un sens au contenu et une application non mécanique du contenu. En outre, dans la résolution des problèmes par les élèves, il donne plus d'importance au processus de résolution et à la plausibilité du résultat qu'au résultat lui- même.

Dans l'analyse des connaissances du professeur grâce aux outils fournis par le MTSK, nous voulons mettre en évidence comment se voit l'interrelation entre les différents aspects du savoir de l'enseignant : sa connaissance du contenu (phénoménologique, de procédures et de propriétés - KoT), sa connaissance de la tâche (KMT) et de l'apprentissage des élèves en ce qui la concerne (KFLM), sa connaissance des formes d'argumentation et de validation et de l'heuristique (KPM), sa connaissance de l'apprentissage des élèves en rapport avec la tâche (KFLM) et des stratégies d'enseignement en ce qui concerne cet apprentissage (KMT). De notre point de vue, cet exemple des interrelations entre les connaissances du professeur relatives à différents aspects et sous-domaines est le reflet de la nature intégrée de ces savoirs. Bien que le MTSK, comme n'importe quel modèle analytique, procède à une décomposition du savoir du professeur, il prend du sens en permettant des travaux ultérieurs de synthèse de cette décomposition. Ce genre de compréhension des connaissances du professeur facilite l'intervention en formation (Climent. *et al.*, 2016) et enrichit la compréhension de l'enseignement des mathématiques.

Bibliographie

BALL, D. L., THAMES, M. H. & PHELPS, G. (2008), Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education* **59.5,** 389-407.

BARDIN, L. (1998), *L'analyse de contenu*, Presses Universitaires de France - Le Psychologue, Paris.

BARRERA, V. J., LIÑÁN, M. M., MUÑOZ-CATALÁN, C. & CONTRERAS, L. C. (2016), Conocimiento especializado, movilizado y emergente, en una clase de primaria sobre las posiciones relativas de las rectas, en *Investigación en Educación Matemática XX* (Eds. Macías & alii), 167-176, SEIEM, Málaga, Espagne.

BROMME, R. (1994), Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' profesional knowledge, in *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Eds. Biehler & alii), 73-88, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS L.C. & MUÑOZ-CATALÁN, M.C. (2013), Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching, dans *Proceedings of CERME 8* (Eds. Ubuz & alii), 2985-2994, ERME, Antalya, Turquie.

CARRILLO, J. & CONTRERAS, L.C. (1995), Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza, *Educación Matemática* **7.3**, 79-92.

CHEVALLARD, Y. (1986), La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, *Revue française de pédagogie* **76**, 89-91.

CHEVALLARD, Y. & CIRADE, G. (2006), Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, dans *De l'integration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants* (Eds. Chiocca & alii), ENFA & IUFM Midi-Pyrénées, Toulouse, France.

CLIMENT, N., MONTES, M.A., CONTRERAS, L.C., CARRILLO, J., LIÑÁN, M.M., MUÑOZ-CATALÁN, M., BARRERA, V.J. & LEÓN, F. (2016), Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos, *Avances de Investigación en Educación Matemática* **9**, 85-103.

DAVIS, B. & SIMMT, E. (2006), Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know, *Educational Studies in Mathematics* **61.3**, 293-319.

FLORES-MEDRANO, E., MONTES, M.A., CARRILLO, J., CONTRERAS, L.C., MUÑOZ-CATALÁN, M.C. & LIÑÁN, M.M. (2016), El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático, *Bolema* **30.54**, 204- 221.

GIROUX, H.A. (1997), *Los Profesores como Intelectuales: Hacia una pedagogía crítica del aprendizaje*. Paidós. Barcelona

KILPATRICK, J., SWAFFORD, J. & FINDELL, B. (EDS.). (2001), *Adding it up: Helping children learn mathematics*, National Academy Press, Washington, DC.

LESH, R., BEHR, M. & POST, T. (1987), Rational number relations and proportions, dans *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (Ed. Janvier), 41-58, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, USA.

MA, L. (1999), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, VA.

PARIES, M. (2010), Circulation du savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Étude de cas. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **15**, 9 – 44.

PONTE, J.P. (1994), Mathematics teachers' professional knowledge, in *Proceedings of PME 18, Vol. 1*(Eds. Ponte & alii), 195-210, PME, Lisbonne.

ROWLAND, T., TURNER, F., THWAITES, A. & HUCKSTEP, P. (2005), *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*, SAGE, Londres.

RUIZ-OLARRÍA, A. & SIERRA, T. (2011), La formación Didáctico-Matemática del profesorado de Secundaria, dans *Un panorama de la TAD* (Eds. Bosch & alii), 465-483, CRM, Barcelona, Espagne.

SCHOENFELD, A. (2010), *How we think*, Routledge, New York.

SCHWAB, J.J. (1978), Education and the structure of the disciplines, in *Science, curriculum and liberal education* (Eds.Westbury & alii), 229-272, University of Chicago Press, Chicago.

SHULMAN, L.S. (1986), Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* **15.2**, 4-14.

SHULMAN, L.S. (1987), Knowledge and teaching: Foundations of a new reform. *Harvard Educational Review* **57.1**, 1-21.

JOSÉ CARRILLO[6]
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
carrillo@uhu.es
MIGUEL MONTES
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
miguel.montes@ddcc.uhu.es
LUIS C. CONTRERAS
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
lcarlos@uhu.es
NURIA CLIMENT
Université de Huelva (Espagne), Faculté d'education, Avenida 3 de marzo s/n
climent@uhu.es

[6] El IREM de Strasbourg proporciona, en su sitio Internet http://irem.unistra.fr/, la versión en español de este artículo en acceso libre.

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à son adresse électronique qui est indiquée dans ce volume.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word*, accessible par un lien depuis la page des Annales à l'adresse URL :

http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de du ou des auteurs ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc « abstract – résumé – mots clés » ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes, mailto :

  bibirem@math.unistra.fr

- pour des propositions d'articles, mailto :

  fpluvinage@cinvestav.mx

  eric.roditi@paris5.sorbonne.fr