

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef :

PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER

Volume 26 - 2021

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 – 7576

Rédacteurs en chef

Philippe R. RICHARD, Université de Montréal, Montréal, Canada

Laurent VIVIER, Université Paris Diderot, Paris, France

Conseillers scientifiques

Raymond DUVAL
Lille, France

Athanasios GAGATSIS
Université de Chypre, Nicosie, Chypre

Alain KUZNIAK
Université Paris Diderot, Paris, France

Eric RODITI
Université Paris Descartes, Paris, France

Comité de rédaction

Alain BRONNER
Université de Montpellier, France

Lalina COULANGE
Université de Bordeaux, France

Iliada ELIA
Université de Chypre, Nicosie, Chypre

Cécile De HOSSON
Université Paris Diderot, Paris, France

Inés M^a GOMEZ-CHACON
Université Complutense, Madrid, Espagne

Nadia HARDY
Université Concordia, Montréal, Canada

Fernando HITT
Université du Québec à Montréal, Canada

Catherine HOUEMENT
Université de Rouen, France

Maria Alessandra MARIOTTI
Université de Sienne, Italie

Asuman OKTAÇ
CINVESTAV, Mexico, Mexique

Luis RADFORD
Université Laurentienne, Sudbury, Canada

Jean-Claude REGNIER
Université Lumière, Lyon, France

Maggy SCHNEIDER
Université de Liège, Belgique

Denis TANGUAY
Université du Québec à Montréal, Canada

Laurent THEIS
Université de Sherbrooke, Canada

Carl WINSLØW
Université de Copenhague, Danemark

Moncef ZAKI
Université de Fès, Maroc

Responsable de publication

Mohamed ATLAGH
Directeur de l'IREM de Strasbourg

Conseil éditorial

Charlotte DEROUET
Université de Strasbourg, France

Secrétariat d'édition

Bruno METZ
IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. : +33 (0)3 68 85 01 65
irem@math.unistra.fr

Bibliothèque

Christine CARABIN
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61
<http://irem.unistra.fr>

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 26 – 2021
SOMMAIRE

ÉDITORIAL	7
SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO, CECILE OUVRIER-BUFFET, JOSE LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS (Brésil, France) <i>Le concept de limite de fonction - une analyse des schèmes d'étudiants à la transition secondaire-supérieur en France et au Brésil</i>	9
SOPHIE ROUSSE (France) <i>Le discret et le continu dans l'enseignement des suites et des fonctions en fin de collège et au lycée</i>	45
PATRICIA MARCHAND, CLAIRE GUILLE-BIEL WINDER, LAURENT THEIS, TERESA ASSUDE (Québec, France) <i>Difficultés d'un système didactique à propos de l'enseignement du volume au primaire</i>	85
SEBASTIEN JOLIVET, ELANN LESNES-CUISINIEZ, BRIGITTE GRUGEON-ALLYS (France) <i>Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en compte et apports de modèles didactiques</i>	117
CELINE CONSTANTIN (France) <i>La substitution, points de vue écologique et sémiolinguistique</i>	157
JOSEP MARÍA FORTUNY, TOMÁS RECIO, PHILIPPE R. RICHARD, EUGENIO ROANES-LOZANO (Espagne, Québec) <i>Análisis del discurso de los profesores en formación en un contexto de innovación pedagógica en geometría</i>	195
INFORMATIONS POUR LES AUTEURS	221

ÉDITORIAL DU NUMÉRO 26

Cette année encore nous avons vécu au rythme d'une crise sanitaire qui s'accroche et qui a copieusement bouleversé nos habitudes de travail. S'il est évident que la recherche sur le terrain a quelque peu souffert de la pandémie, surtout au sein des écoles, de nouvelles avenues se sont ouvertes avec le télétravail et les approches mixtes. Certes, ces changements nous ont obligés à une grande souplesse d'adaptation avec, pour beaucoup, une surcharge de travail. Mais pour certains, la période a permis de faire évoluer ou de faire des projets ou d'initier des études sur des sujets que l'on souhaitait préciser depuis un certain temps. L'année 2021 se caractérise par une sorte d'exacerbation du tout au numérique pour lequel les conséquences demeurent difficiles à prévoir. Au point qu'on se demande régulièrement qui préside à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques d'aujourd'hui, ballotés sans relâche entre la tradition, les moyens numériques et l'incontournable quête des connaissances. On pourrait craindre qu'une perte de nos références communes nous guette dans l'ombre d'un doute, mais il faut plutôt y voir le fait d'un moment privilégié où l'innovation et la découverte d'un vaste espace de possibilité nous obligent à repenser ce qui hier nous semblait pourtant si évident.

Les projets des *Annales de didactique et de sciences cognitives* sont bien en selle. Le dossier du portail de publication OpenEdition Journals (OEJ), visant à favoriser l'accès ouvert des articles de nos auteurs ainsi que la valorisation de la recherche d'information induite par le numérique, notamment par un référencement systématique, devrait voir le jour en cette fin d'année 2021. Si ce nouvel accès en ligne n'a pas d'incidence particulière sur le site Web habituel de la revue, hébergé par l'Université de Strasbourg, il rend caduque l'intérêt d'avoir des sites miroirs sur des serveurs de l'Université de Paris et de l'Université de Montréal. Dans le catalogue de OEJ, les *Annales* seront bientôt visibles et accessibles à l'adresse <https://www.openedition.org/33742>.

Quant à l'autre grand dossier, celui sur les publications thématiques, il s'est enrichi d'un nouveau projet. Alors que le numéro spécial intitulé *Les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques*, coordonné par Valentina Celi, Caroline Lajoie et Frédérick Tempier, sortira au cours de l'année universitaire, une publication dans la foulée des *Rendez-vous en didactique, recherches, dialogues et plus si affinités...*, organisées par le Laboratoire de Didactique André Revuz à la fin du printemps 2022, est en cours de préparation. Les articles du numéro spécial, inspirés des conférences plénières du colloque, portera sur des thématiques importantes de la didactique des mathématiques et des sciences. Comme toujours, nous profitons de l'éditorial pour renouveler notre appel à des numéros spéciaux. N'hésitez pas à communiquer avec la rédaction scientifique des *Annales* pour nous faire part de vos projets.

Nous devons remercier l'équipe de l'IREM de l'Université de Strasbourg, et de son UFR de mathématique et d'informatique, pour leur soutien à la publication et à la diffusion. Nous tenons également à rappeler l'importance du travail bénévole pour la publication des *Annales*. Que ce soit les auteurs, les nombreux rapporteurs, le

comité de rédaction et les autres responsables, tous participent d'un même mouvement pour nous amener invariablement à un numéro de la qualité. Toutefois, ce chemin n'est jamais déterminé à l'avance : il avance par boucles interactives entre les auteurs et tous ceux qui prennent soin de réviser les textes, les boucles se resserrent et convergent à des rythmes différents jusqu'à la publication de l'article que le lecteur a sous les yeux. Dans ce numéro 26, nous sommes heureux de vous présenter six contributions particulièrement intéressantes.

La couverture mathématique des contributions est assez équilibrée : deux textes portent sur l'analyse, trois composent avec la géométrie et deux autres font intervenir l'algèbre. Les deux premiers articles abordent directement certaines questions propres à l'acquisition des connaissances mathématiques. Il en est de même pour les deux articles suivants, quoique les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage à travers la résolution de problème et les moyens mis en place, que ce soit la conception d'un dispositif didactique ou celle d'un environnement informatique pour l'apprentissage humain, se traitent conjointement aux contenus, parfois avec une emphase spécifique sur les moyens. Pour les deux derniers articles, ce sont des questions d'ordre sémiotique qui rejoignent les mathématiques, d'abord en se centrant sur la substitution syntaxique d'un élément par un autre dans une expression algébrique, ensuite en analysant le discours réflexif des enseignants dans une activité instrumentée en géométrie.

Dans le premier texte, Sonia Maria Monteiro Da Silva Burigato, Cécile Ouvrier-Buffet et José Luiz Magalhães De Freitas comparent le développement du concept de limites de fonction entre la France et le Brésil à partir des schèmes des étudiants. Le second texte, de Sophie Rousse, amène son propos sur le discret et le continu dans l'enseignement des suites et des fonctions au lycée en France, soulignant l'existence de continuités et de ruptures tout aussi significatives. Le troisième texte, de Patricia Marchand, Claire Guille-Biel Winder, Laurent Theis et Teresa Assude, aborde les difficultés d'un système didactique sur l'enseignement du volume au primaire, montrant que l'origine des difficultés relève du projet d'enseignement, du choix du matériel et du concept de volume. Le quatrième texte, de Sébastien Jolivet, Elann Lesnes-Cuisiniez et Brigitte Grugeon-Allys, témoigne de la conception d'une plateforme d'apprentissage interactive en algèbre et en géométrie, réaffirmant l'importance du travail et de la réflexion *a priori* pour modéliser le raisonnement et les parcours d'apprentissage. Le cinquième texte, de Céline Constantin, s'intéresse à la dimension sémiolinguistique de la substitution en algèbre au collège, postulant que si ce savoir est souvent perçu à l'école comme étant transparent, il gagne plutôt à se considérer sous certaines conditions en tant qu'objet d'étude. Le sixième texte, de Josep María Fortuny, Tomás Recio, Philippe R. Richard et Eugenio Roanes-Lozano, propose une analyse du discours d'enseignants en formation issus d'un projet d'innovation pédagogique dans lequel les enseignants sont invités à réfléchir sur leurs acquis, dégageant plusieurs points de tension entre l'enseignement traditionnel et celui qui utilise de façon novatrice la géométrie dynamique.

Nous vous souhaitons une excellente lecture.

L'équipe de direction scientifique des ADSC : Philippe R. Richard et Laurent Vivier

**SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO, CÉCILE OUVRIER-BUFFET,
JOSÉ LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS**

**LE CONCEPT DE LIMITE DE FONCTION
UNE ANALYSE DES SCHÈMES D'ÉTUDIANTS À LA TRANSITION
SECONDAIRE-SUPÉRIEUR EN FRANCE ET AU BRÉSIL**

Abstract. The levels of education and the ways to teach the limits of function are different in France and in Brazil. However, we make the hypothesis that the schemes developed by students regarding the concept of limit can be compared. In this article, we develop a methodology to analyze the students' schemes involving the concept of limit of function with two aims: to finely analyze the processes of today's students (in France and in Brazil) at the beginning of the learning of this concept and to highlight the evolution of their schemes, taking into account that these two countries are different in terms of the teaching of this concept.

Key-words. Limit, function, schemes, concept image.

Résumé. Les niveaux de scolarité et les modes d'enseignement des limites de fonction sont différents en France et au Brésil. Nous faisons l'hypothèse que les schèmes développés par les étudiants sur ce concept peuvent cependant être comparés. Nous développons dans cet article une méthodologie pour analyser les schèmes des étudiants sur le concept de limite de fonction avec un double objectif : analyser finement les processus d'étudiants d'aujourd'hui (en France et au Brésil) en début d'apprentissage du concept de limite de fonction et mettre en évidence l'évolution des schèmes dans ces deux pays, différents quant à l'enseignement de ce concept.

Mots-clés. Limite, fonction, schème, *concept image*.

Introduction

Dans le cadre d'un travail de thèse, nous avons investigué l'enseignement et l'apprentissage de la notion de limite de fonctions. Notre problématique était d'enquêter sur les schèmes des élèves (Vergnaud, 1991) dans la construction du concept de limite de fonction. Dans le cadre de cet article, nous interrogeons les différences et les similitudes entre des élèves de deux systèmes d'enseignements dont les approches, que nous présenterons plus loin, diffèrent quant à l'enseignement des limites, le Brésil et la France (Burigato, 2019). En France, le concept de limite

est introduit au lycée, et, au Brésil, à l'université. Pour faciliter la lecture, nous utiliserons dorénavant le terme générique d'étudiant.

Rappelons que le concept de « limite » est historiquement complexe et génère des ruptures dans son apprentissage (e.g. Artigue, 1995 ; Cornu, 2002 ; Lecorre, 2016 ; Chorlay, 2019 ; Nascimento, 2003). Ces auteurs pointent les aspects mathématiques fondamentaux à la construction du concept de limite¹, à savoir : l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels est complet, ce qui apporte certaines propriétés importantes dans la construction du concept de limite, comme les conditions de convergence des suites (Bergé et Sessa, 2018), la quantification et la notion de variable. On peut également noter le difficile passage discret/continu lorsque les élèves traitent des propriétés portant sur les limites de suites puis sur les limites de fonctions (e.g. Bloch, 2017). Les difficultés relatives à l'apprentissage du concept de limite de suites et de fonctions, à l'université, dans différents pays, semblent stables depuis de nombreuses années (e.g. Robert, 1982 ; Cornu, 1983 ; Sierpiska, 1985 ; Swinyard, 2011 ; Bloch, 2017). Régulièrement, les obstacles épistémologiques en lien avec l'infini, le concept de fonction, la logique et le symbolisme sont cités. Le fait que la limite peut ne pas être « atteinte » s'érige en difficulté, tout comme « l'obstacle du non calculable pour les fonctions² » (Bloch, 2017). Les étudiants n'identifient en général pas le statut opératoire de la définition formelle de limite et préfèrent utiliser des *concept images* (e.g. Tall et Vinner, 1981 ; Roh, 2008) et des conceptions spontanées et intuitives (Alcock et Simpson, 2009) où la représentation graphique peut alors, elle aussi, devenir un obstacle (e.g. Bloch, 2017 ; Vinner et Dreyfus, 1989). Les travaux s'accordent sur la nécessaire transition entre « des conceptions intuitives, dynamiques, voire graphiques, et la définition formelle qui s'avère seule efficace pour valider les propriétés des limites et des fonctions » (Bloch, 2017, p. 7) et sur le saut conceptuel entre l'approche intuitive et l'approche formelle (cf. Okaç et Vivier, 2016, pour une synthèse). En ce qui concerne l'introduction du concept de limite au lycée, on retrouve les difficultés précédemment citées, et en particulier celle relative aux nombres réels (e.g. Durand-Guerrier et Vergnac, 2014). De récentes ingénieries ont été mises en œuvre, au lycée, en France, pour contourner les difficultés précédentes, avec un travail spécifique sur les définitions, leur construction et leur

¹ Ce sont les mêmes aspects mathématiques, mais aussi les mêmes types de difficultés d'apprentissage, que l'on retrouve dans l'étude du concept de fonction (e.g. Sierpiska, 1992 ; Krysinska et Schneider, 2010 ; Vandebrouck, 2011).

² Pour les élèves, une limite peut ne pas exister s'ils ne parviennent à effectuer le calcul d'une image.

opérationnalité, et la quantification notamment (e.g. Lecorre, 2016 ; Chorlay, 2019³). Dans ces ingénieries, le temps long passé sur la formulation, les définitions, les exemples et contre-exemples, et les différents registres de représentation (Duval, 1993) utilisés porte ses fruits. Nous souhaitons étudier le contexte de classe ordinaire contemporain ; nous cherchons à caractériser les schèmes des étudiants lorsqu'ils sont confrontés à l'introduction du concept de limite de fonction, avec deux questions de recherche principales :

- Quels sont les schèmes élaborés par les étudiants français et brésiliens en début d'apprentissage du concept de limite de fonction ?
- Comment évoluent les schèmes d'étudiants de deux pays (Brésil et France) où l'introduction du concept de limite de fonction diffère ?

Nous présenterons les contextes d'enseignement au Brésil et en France (curricula en vigueur lors de notre expérimentation en 2017/2018), afin de montrer la différence d'approche du concept de limite de fonction, puis la méthodologie de recueil de données et d'analyse des schèmes des étudiants utilisée dans notre recherche. Nous détaillerons une étude de cas avec les productions de deux élèves : Baptiste en France et Mateus au Brésil. Nous ouvrirons des perspectives sur la méthodologie d'analyse utilisée et la portée de cette étude de cas extraite d'un travail de doctorat conséquent (Burigato, 2019).

1. Présentation des curricula en France et au Brésil

1.1. L'introduction du concept de limite en France, au lycée

En France, le concept de limite de fonction est introduit dans les classes de première et terminale⁴ (grades 11 et 12). Dans le programme de première :

On introduit un nouvel outil : la dérivation. L'acquisition du concept de dérivée est un point fondamental du programme de première. Les fonctions étudiées sont toutes régulières et on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point. Le calcul de dérivées dans des cas simples est un attendu du programme ; dans le cas de situations plus complexes, on sollicite les logiciels de calcul formel. (MEN, 2010, p. 2).

³ Chorlay (2019, p. 275-277) présente une excellente synthèse des ingénieries existantes et choix possibles, prenant en compte les principales difficultés, *concept images* et *misconceptions* des étudiants connus de la littérature.

⁴ Suite aux changements de programmes, le concept de limite de fonction reste aujourd'hui présenté au lycée dans le même esprit que dans les programmes de 2010.

La dérivée apparaît pour l'étude de la tangente à une courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. Sont également abordées les fonctions dérivables, la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient, et les fonctions usuelles : $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$, etc. Dans les commentaires, il est indiqué que « le nombre dérivé est défini comme limite d'un taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 », que l'« on ne donne pas de définition formelle de la limite » et que l'« on évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation ». Cela vient après un enseignement sur les limites de suites. Le bulletin officiel préconise une présentation des suites par l'étude de phénomènes discrets, avec l'utilisation de différents registres : algébrique, graphique, numérique et géométrique. Il souligne également qu'il est important de proposer des questions sur leur comportement « [...] conduisant à une première approche de la notion de limite qui sera développée dans la classe terminale » (MEN, 2010, p.2). Dans la classe de terminale (MEN, 2011), les limites finies et infinies d'une suite sont abordées, ainsi que l'étude de suites qui n'ont pas de limites. Les limites sont aussi travaillées par comparaison et le théorème des gendarmes est admis. Les définitions des limites doivent être abordées, pour les cas limites finis à l'infini, où « la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu ». Une étude approfondie est proposée pour l'introduction de limites de fonctions en terminale (MEN, 2011).

1.2. L'introduction du concept de limite au Brésil, à l'université

Au Brésil, le lycée est une formation généraliste dans laquelle les étudiants étudient les mêmes matières puis décident, à la fin du lycée, d'une spécialisation pour la suite de leurs études. L'étude des limites au Brésil n'est généralement introduite que dans l'enseignement supérieur, dans les cours de sciences exactes. Les directives curriculaires pour le lycée (Ministério Da Educação Secretaria De Educação Básica, 2006), qui guident les contenus d'enseignement, ne mentionnent pas l'étude de ce concept au lycée. Nous sommes actuellement au Brésil dans une période de mise en œuvre de nouveaux programmes, mais les lignes directrices en vigueur dans le secondaire restent d'actualité. Si l'étudiant choisit de suivre les cours en sciences exactes en premier cycle universitaire, il étudiera le concept de limite de fonctions en première année, dans le cours appelé « Calcul I » qui représente environ 100 heures par semestre. Les contenus du programme de ce cours sont : fonctions d'une variable réelle, limites et continuité des fonctions, dérivées, intégrales et applications. Dans ce cours, en général, est présentée d'abord la limite d'une fonction en un point, de manière dite « intuitive » (au sens de Guidorizzi, 2013, voir plus loin), puis vient ensuite la définition mathématique dite « formelle », où interviennent symbolisme et quantificateurs, généralement appelée « définition en *epsilon* et *delta* ». Le concept de limite apparaît aussi

comme objet d'étude dans le calcul différentiel et intégral et dans les cours de fondements en analyse. Il est également repris comme outil dans d'autres disciplines.

2. *Concept image* et schèmes : étudier le rapport des étudiants à un concept

2.1. La notion de *concept image* – un focus sur les définitions

Il existe un écart entre le processus de conceptualisation et l'approche formelle des définitions (Mariotti et Fischbein, 1997). Tall et Vinner (1981) ont développé les notions de *concept image* et *concept definition*⁵ : le *concept image* rassemble les images mentales et toutes propriétés associées à un concept et processus le mobilisant, et le *concept definition* représente les définitions formelles d'un concept, définies comme faisant consensus au sein d'une communauté scientifique. Ce qui est notable, c'est que plusieurs *concept images* peuvent coexister chez un même élève et être en contradiction entre eux (tout comme les conceptions, au sens de Balacheff, 1995) et/ou avec le *concept definition*. L'intérêt de cet outil théorique réside dans le diagnostic des *concept images*. Celui-ci permet de déterminer des implicites qui peuvent être en contradiction avec la théorie mathématique formelle. La caractérisation de *concept images* se fait par l'établissement de propriétés utilisées par les élèves, face à certains types de problèmes, et est mis en regard du *concept definition*. Ainsi, dans ce cadre théorique, il est nécessaire d'étudier les processus, représentations, propriétés mobilisés (*concept image*) par des élèves relatifs à un concept et de les mettre en regard des définitions formelles utilisées dans un ouvrage ou dans un cours (*concept definition*). Cela permet d'analyser le décalage entre *concept images* et *concept definition(s)* et ainsi de faire des hypothèses sur les problèmes d'apprentissage que cela génère (et, en conséquence, faire de nouveaux choix d'enseignement).

Ce cadre théorique apporte une orientation globale à notre méthodologie d'analyse : analyser les *concept images* des étudiants, mais aussi, quand cela est possible, identifier les *concept images* des concepts liés à celui de limite de fonction (en particulier les nombres réels et les fonctions), nous permettra de pointer des contradictions éventuelles chez les étudiants. Nous complétons ensuite cette analyse avec les schèmes.

⁵ Nous conservons les termes « *concept image* » et « *concept definition* » en anglais d'origine de Tall et Vinner (1981) et les écrivons en italiques pour l'indiquer.

2.2. Les schèmes

L'hypothèse sous-jacente à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991) est que l'acquisition du sens ou des significations d'un concept se fait à partir de la confrontation à des situations problématiques qui mettent en jeu le concept. Vergnaud (1991) parle d'un « processus d'élaboration pragmatique » du concept, affirmant que ce processus est « essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il est d'ailleurs essentiel pour l'histoire des sciences. [...] C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (p. 136). Dans ce cadre, un *schème* est défini comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée » (Vergnaud, 1991, p. 136) et comprend des règles d'actions, des invariants opératoires et des inférences (Vergnaud, 1991, p. 142). Vergnaud (1991) distingue plusieurs types d'invariants opératoires qui sont en fait de trois types logiques : des invariants de type « propositions », de type « fonction propositionnelle », et de type « arguments ». Nous ferons un focus sur les invariants opératoires des deux premiers types, en particulier les théorèmes-en-acte, règles d'actions, propriétés-en-acte et concepts-en-acte. Les *théorèmes-en-actes* sont des propositions tenues pour vraies par le sujet dans l'activité et qui lui permettent de traiter une information. Les *concepts-en-acte* sont des fonctions propositionnelles, ils permettent l'élaboration de théorèmes-en-acte. Les *règles d'actions* et *propriétés-en-acte* sont des règles et propriétés pour lesquelles les stratégies (correctes ou non) des élèves sont conformes aux concepts-en-acte et théorèmes-en-acte : leurs caractérisations permettent d'identifier les propriétés attribuées à un concept par un élève.

2.3. Méthodologie d'une analyse fondée sur les *concept images* et schèmes

Une étude via les théorèmes-en-acte et règles d'action (Vergnaud, 1991) permet de décrire les processus des élèves relativement à un certain type de problème et à un concept mathématique en particulier et ainsi, d'avoir accès aux conceptions des élèves. L'approche de Tall et Vinner (1981) permet d'insister sur le décalage entre des conceptions et des définitions formelles pour étudier l'impact de ce décalage sur de futurs apprentissages. C'est aussi une méthodologie globale pour identifier et anticiper des difficultés d'élèves. Elle est utile en particulier lorsqu'un concept mathématique (comme celui de la limite) implique de nombreux autres concepts, et dans le cas où l'on n'a pas accès à tous les schèmes des étudiants. L'expérimentation se déroule en amont et en parallèle du cours sur les limites (en France et au Brésil). Notre méthodologie d'analyse prend ainsi en compte les étapes suivantes :

- L'étude des *concept images* des étudiants associées au concept de limite de fonction mis en regard avec le cours dispensé aux étudiants, qui permettra de déterminer d'éventuelles contradictions avec l'apprentissage en cours ;
- L'étude des règles d'action, de leurs domaines de validité et des théorèmes-en-acte mis en œuvre dans différentes activités, en début d'apprentissage du concept de limite, qui nous renseignera précisément sur les schèmes disponibles des étudiants.

L'étude des concepts images, des règles d'actions et théorèmes-en-acte nous permet d'analyser les différences et les similitudes entre les connaissances et procédures mobilisées par les élèves brésiliens et français. Notre recherche est de nature expérimentale : nous plaçons les étudiants face à des activités de type « exercices » de complexité variables et nous discutons, en entretiens individuels, de leurs résolutions.

3. Objectifs et modalités du recueil de données

Nous avons décidé d'utiliser trois modalités de recueil de données, mais qui n'ont pas pu rigoureusement être mises en œuvre de manière identique dans les deux pays (au Brésil, aucun enseignement sur les limites de fonctions n'avait été réalisé en début d'expérimentation, alors qu'en France, un cours avait déjà eu lieu) : un questionnaire, des activités (qui sont en fait des exercices, avec traces écrites des élèves) et des entretiens individuels (figure 1).

La modalité « questionnaire » avait deux objectifs principaux : avoir une première vision rapide des procédures d'un nombre relativement grand d'étudiants, de telle façon à ne retenir que certains étudiants pour la suite de l'étude et enquêter sur leurs connaissances et l'évolution de celles-ci. Ce questionnaire a ainsi permis : d'identifier des étudiants volontaires pour la recherche, d'identifier leurs difficultés par rapport aux concepts mathématiques impliqués dans l'étude des limites, d'étudier l'éventuelle utilisation de définitions de limite (pour le cas des étudiants français) et d'étudier les procédures initiales des étudiants face à des études de limites dans un registre graphique. Le questionnaire était composé de questions ouvertes et fermées. Les questions ouvertes permettaient d'avoir accès à une réponse et une justification nous renseignant ainsi sur les difficultés des étudiants, notamment sur les nombres réels et les fonctions. Nous avons préparé des questions fermées à choix multiples (Mazucato, 2018), en proposant des réponses couvrant plusieurs aspects du sujet. Ces deux types de questions ont été mobilisés dans les questionnaires utilisés au Brésil et en France. L'annexe 1 présente les principales questions utilisées dans les deux pays.

Les activités ont cependant varié selon le pays en raison du temps dont nous disposions (moins de temps en France qu’au Brésil) et le fait qu’un cours sur les limites de fonctions avait déjà été proposé aux étudiants en France. Elles ont été conçues à partir d’exercices proches de ceux proposés par les enseignants et conformément aux curricula des deux pays (MEN, 2011 ; UFMS, 2014). Les résultats des recherches antérieures épistémologiques et didactiques sur les difficultés des élèves dans l’enseignement et l’apprentissage du concept de limite mentionnées en introduction ont été pris en compte et ont permis de faire des choix en termes d’activités et de guides pour les entretiens (variation dans les registres de représentation, demande de justifications en termes de définitions, calculs et représentations, etc.).

Questionnaire, activités et entretiens nous ont permis de travailler avec les étudiants individuellement en France, individuellement et par binôme au Brésil, et d’interagir avec eux afin d’obtenir plus d’informations sur leurs processus de résolution. Nous avons ainsi obtenu des productions écrites et orales (retranscrites).

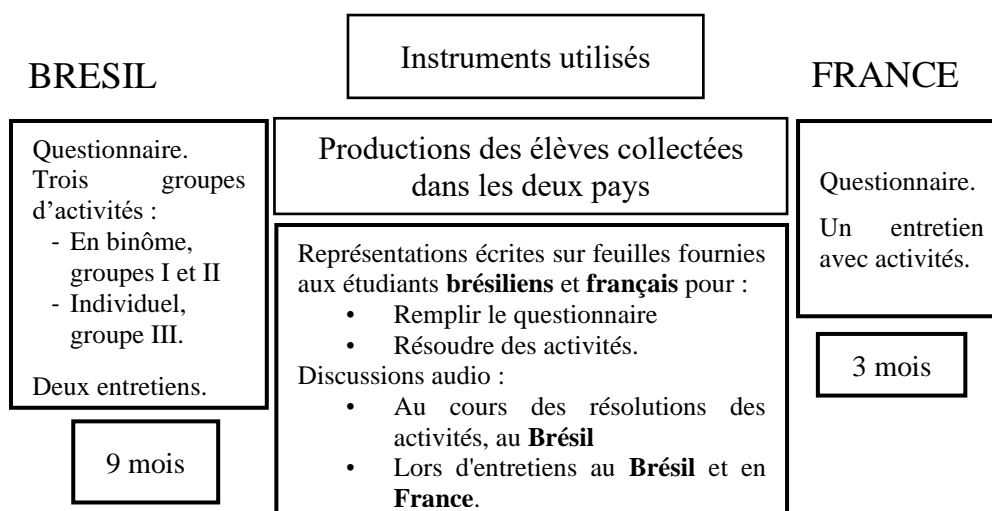


Figure 1. Recueil de données au Brésil et en France

3.1. Méthodologie de l’expérimentation au Brésil

Au Brésil, nous avons utilisé le questionnaire dans une classe du cours de mathématiques (Calcul I, que nous avons observé) de première année de l’Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul (UFMS) : 37 étudiants ont répondu au questionnaire, 12 ont accepté de participer à l’étude, 4 sont allés jusqu’au deuxième entretien, mais seulement 2 étudiants ont suivi l’ensemble du processus. Ensuite, nous avons élaboré – en prenant en compte les observations de classe et les

premiers résultats du questionnaire – et expérimenté trois groupes d'activités (voir section 4), où les cas suivants ont été considérés : (I) étude des valeurs prises par une fonction (continue ou non) dans le voisinage d'un point de son domaine de définition ; (II) étude de la limite finie d'une fonction en un point ; (III) étude de limites finies et infinies à l'infini et de limites infinies en un point. Après les deux premiers groupes d'activités (I et II) traitées en binôme, nous avons réalisé un entretien avec les étudiants volontaires, puis avons mis en œuvre le troisième groupe d'activités (III) à résoudre individuellement. Nous avons alors conduit un entretien individuel avec les étudiants. Six mois après les activités III, nous avons réalisé un dernier entretien individuel. L'ensemble du processus est représenté dans la figure 2. En gris apparaissent les temps de recueils de données. Afin d'élaborer les activités au plus proche de ce qui était travaillé en classe, nous avons observé des séances de classe, étudié le projet de l'enseignant, les activités travaillées avec les étudiants, ainsi que l'ouvrage utilisé par l'enseignant. Nous avons également pris en compte les résultats intermédiaires obtenus au fur et à mesure du processus de recueil de données (cela est représenté par des flèches courbes dans la figure 2). De plus, nous avons intégré, dans certaines questions, des concepts problématiques pour les étudiants, notamment ceux de nombres réels et de fonction (Artigue, 1995 ; Cornu, 1983), et ce de manière différenciée. Toutes les activités ont été enregistrées en audio et chaque étudiant avait sa propre fiche d'activité. Nous avons également utilisé la modalité « entretien semi-structuré » pour approfondir les faits observés et intégrer d'autres questions (Toloi et Manzini, 2013).

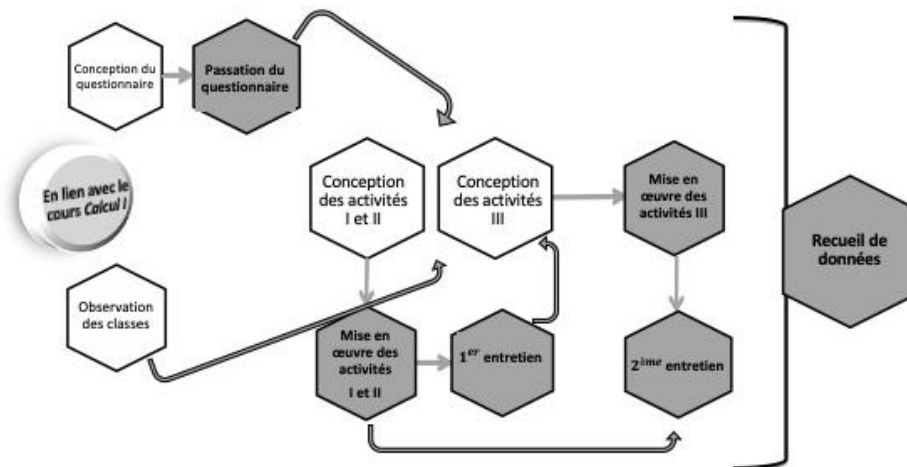


Figure 2. Étapes de l'expérimentation conduite au Brésil

3.2. Méthodologie de l'expérimentation en France

Nous avons effectué notre recherche en 2017-2018, en France, dans une classe de terminale (Grade 12) scientifique, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT)⁶. 27 élèves ont répondu au questionnaire et 5 ont réalisé les activités couplées à une interview. En France, nous avons eu moins de temps pour conduire l'expérimentation. Nous avons tout d'abord suivi l'enseignant introduisant le concept de limite de fonction dans la classe de Terminale. Nous avons élaboré une grille d'observation de séances pour analyser ses choix. Nous avons alors préparé un questionnaire similaire à celui utilisé au Brésil pour inclure certains étudiants dans l'étude et avons élaboré des questions pour les entretiens. Nous avons construit l'entretien à partir d'activités où les étudiants devaient résoudre des exercices et justifier leurs choix. Cet entretien avait pour but de mieux comprendre les procédures des étudiants ainsi que leurs justifications, mais aussi d'inciter les étudiants à travailler dans divers registres de représentation. Nous avons retranscrit les entretiens et analysé le corpus avec la méthodologie décrite précédemment (cf. Figure 3).

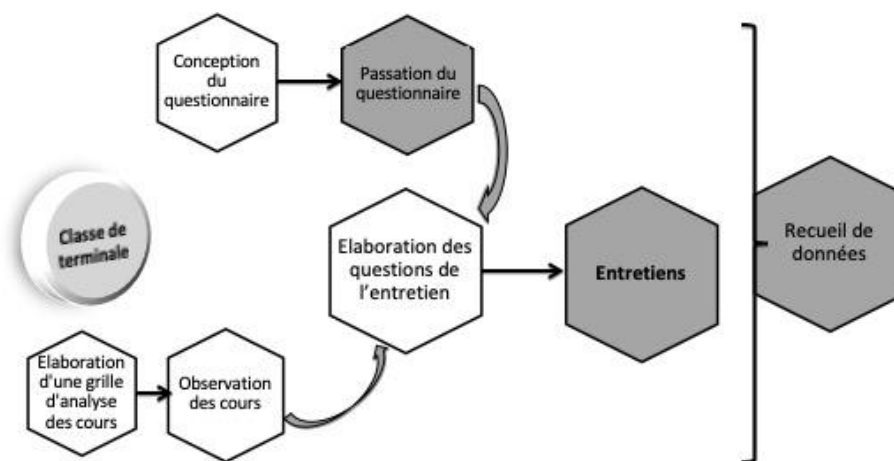


Figure 3. Étapes de l'expérimentation conduite en France

⁶ Les étudiants pouvaient choisir différentes spécialités (ISN soit Informatique et Sciences du Numérique, Physique Chimie, SVT, ou Mathématiques).

4. Définitions intuitives et formelles. Activités utilisées dans l'expérimentation

Au Brésil, l'approche du concept de limite mobilise une définition dite « intuitive » de la limite d'une fonction (pas nécessairement continue), telle qu'elle est présentée dans un ouvrage très utilisé au Brésil, proposant une approche conceptuelle valorisant la présentation des définitions et des démonstrations, ainsi que le registre graphique. Il s'agit d'une définition dynamique dans le registre graphique, introduisant une égalité symbolique, mais sans quantificateurs ni *epsilon-delta* : « Intuitivement, dire que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers p , est égale à L , ce qui s'écrit symboliquement $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, signifie que quand x tend vers p , $f(x)$ tend vers $f(p)$. » (Guidorizzi, 2013, p. 55, cf. figure 4). Au Brésil, la présentation est faite avec l'idée d'approcher le point de l'investigation en adoptant des valeurs de plus en plus proches du point, avec des fonctions polynomiales et rationnelles, par exemple, avec les fonctions $f(x) = x + 1$ et $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (Guidorizzi, 2013). Sont alors utilisés un tableau avec ces valeurs, une manipulation de la représentation algébrique si nécessaire, puis une discussion éventuelle sur la confrontation des résultats numériques avec la représentation graphique. La définition « formelle » utilisée au Brésil est celle en *epsilon* et *delta*.

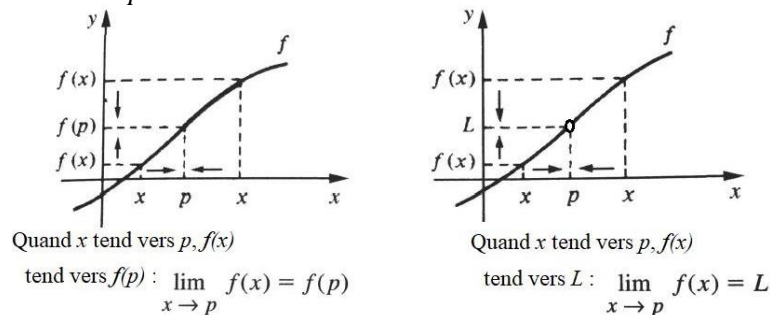


Figure 4. Définition « intuitive » de limite (Guidorizzi, 2013, p. 55)

Les trois groupes d'activités (I, II, III) sont résumés en Annexe 2. Le groupe I avait pour objectif d'identifier les procédures des étudiants dans l'étude de fonctions (domaine de définition, intervalles, images, antécédents, approximation en un point, étude de comportements au voisinage d'un point) dans les registres graphique, numérique (tableaux de valeurs) et algébrique. Les activités du groupe II engageaient une discussion sur la définition intuitive de limite vers la définition formelle (en *epsilon* et *delta*) dans l'étude de limites finies en un point avec un focus sur l'utilisation d'encadrements, valeurs absolues et inégalités en lien avec la représentation graphique. Ces activités débouchaient sur la présentation de la définition formelle de limite et un débat sur les liens avec la définition intuitive. Les activités du groupe III prolongeaient cette discussion dans les entretiens pour le cas

de limites à l'infinie et limites en un point, de telle façon à approfondir les propriétés des nombres réels et l'interprétation de la représentation graphique.

En France et au Brésil, les fonctions retenues pour les études de limite étaient proches de ce que l'enseignant avait l'habitude de proposer en classe. Nous avons également fait varier les registres de représentation. Les activités retenues pour les entretiens sont présentées dans le tableau 1. Au Brésil et en France, les deuxième et troisième cas de limites de fonctions sont traités avec la représentation algébrique de fonctions similaires. Dans les activités, les étudiants doivent identifier les limites et les justifier. En général, nous leur demandons de représenter graphiquement ces fonctions. Nous avons également inséré, en France, en accord avec les programmes, manuels et observations de classe, des activités de recherche graphique de limites.

Tableau 1. Limites et représentations étudiées en France et au Brésil

Limites	France		Brésil
	Algébrique	Graphique	Algébrique
Cas (1) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$		$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $f(x) = x + 1$ $f(x) = 2x - 5$
Cas (2) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$	-----	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$
Cas (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$		$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$
Cas (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$	-----	-----

Nous avons choisi de travailler avec les fonctions suivantes dans les deux pays :

$$f(x) = \frac{n}{x}, \text{ où } n > 0 \text{ et } x \in \mathbf{R}; f(x) = \frac{a \pm x}{x}, \text{ où } a \in \mathbf{R} \text{ et } x \in \mathbf{R}.$$

Ce sont des fonctions connues des étudiants qui permettent une discussion relative au concept de limite et qui sont source de difficultés (notion d'infiniment petit ou grand, valeurs de la fonction tendant vers l'infini, valeurs de x devenant infiniment proches d'un nombre (e.g. Cornu, 2002 ; Artigue, 1995)). Par ailleurs, nous souhaitons faire varier les registres de représentation, chacun impliquant différents aspects et relations (e.g. Duval, 1993 ; Vergnaud, 1991 ; Tall et Vinner, 1981). Ainsi, nous avons cherché à obtenir une variété en termes de représentations mobilisées par les étudiants : algébrique, graphique, numérique, langage naturel (écrit et oral).

Au Brésil, seul le cas (1) a déjà été traité en classe (voir Annexe 3) avec introduction d'une définition intuitive et d'une définition formelle. Pour l'étude des cas (2) et (3) de notre expérimentation, l'étudiant doit étudier la fonction lorsque les valeurs de x tendent vers le point d'investigation de la limite, par valeurs supérieures et inférieures. Un tableau avec des valeurs données doit être renseigné. L'étudiant doit expliquer ce que fait la fonction selon la limite étudiée et représenter graphiquement la fonction en expliquant, dans la construction, les limites identifiées. À différents moments, l'étudiant doit expliquer oralement ce qu'il a fait sur la fiche d'activité.

En France, les cas (2) et (3) ont été traités dans l'entretien. Le cours sur les limites a déjà été mené en classe, sans définition formelle en *epsilon* et *delta* (voir Annexe 3). L'étudiant doit identifier la limite de chaque fonction. Nous lui demandons de le justifier par écrit et de nous expliquer oralement ce qu'il a fait sur la fiche d'activité. Une représentation graphique de la fonction a été parfois demandée.

5. Une étude de cas - Mateus au Brésil et Baptiste en France

Afin d'avoir accès aux schèmes, nous avons retenu des étudiants ayant résolu toutes les activités et fourni des justifications, à l'oral durant l'entretien en France, mais aussi dans les discussions au sein des binômes au Brésil. Nous avons recherché des étudiants ayant mobilisé des représentations graphiques, le langage écrit et oral (formel et naturel), ainsi que des représentations algébriques et avons sélectionné des étudiants n'ayant pas ou peu de difficultés dans les concepts « autres » tels que la factorisation et les fonctions. Pour cela, nous avons mis en place une étude globale fondée sur l'étude des *concept images* qui transparaisaient dans les productions des étudiants : il s'agissait d'identifier les conflits potentiels générés par des *concept images* avec le *concept definition* chez un même étudiant (Vinner et Dreyfus, 1989 ; Tall & Vinner, 1981), de sélectionner des étudiants pour conduire des études de cas, puis d'approfondir l'étude en analysant les schèmes. Nous avons retenu, pour cet article, les productions de deux étudiants dans des activités similaires afin d'identifier les différences et les similitudes dans les schèmes et leurs évolutions : Mateus (17 ans, 1ère année d'université en licence de mathématiques au Brésil) et Baptiste (16 ans, Terminale, ayant déjà étudié les limites de suites, en France).

5.1. Le concept image de Mateus : prédominance du registre graphique

Tout au long de notre étude (Burigato, 2019) et des cours, le *concept image* de Mateus s'est enrichi au niveau des registres mobilisés, seul le registre graphique étant mobilisé initialement. Mateus a réussi à résoudre les questions correctement, la plupart du temps par observation de la représentation graphique de la fonction et en faisant des calculs des images de plusieurs points lorsque c'était possible. Ce type de calculs lui a permis de construire des représentations graphiques dont il connaissait l'allure. Au début de l'expérimentation, Mateus ne faisait référence qu'aux valeurs de la fonction qui grandissent vers l'infini, puis il a intégré d'autres éléments vus en cours, comme les notions de *maxima* et de *minima* d'une fonction, ainsi que le comportement des images de la fonction. Lors du dernier entretien, nous lui avons demandé ce que signifiait pour lui « $f(x)$ tend vers l'infini ». Il a répondu :

Ici, il n'y aura jamais de maximum, [...] il est toujours plus gros que n'importe quel nombre. C'est $f(x)$, ça va toujours... plus grand que n'importe quel nombre... à partir d'ici. Il n'aura pas de maximum.

Dans l'interview, nous lui avons demandé d'expliquer les cas où la fonction tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Mateus a montré la représentation graphique de la fonction en expliquant :

Vous voyez comme tous les nombres ici vont à l'infini... Ils ne dépasseront jamais 0, mais si vous prenez chacun d'eux, ils s'approcheront d'un nombre proche de 0, cela aussi ne le sera jamais... il n'y aura jamais de limite, car vous voyez qu'il approche de 0, mais si vous n'en voyez qu'un, il se rapprochera d'un nombre.

Mateus a alors expliqué que « x va à l'infini » et que, pour chaque x , « son $f(x)$ » est un nombre qui se rapproche de zéro, mais ne sera jamais nul. C'est le seul aspect que l'on pourrait rapprocher du concept de nombres réels chez Mateus, obstacle épistémologique ici de la limite qui n'est pas atteinte.

Nous avons vu qu'en justifiant ses choix, à l'écrit ou à l'oral, lors des activités et entretiens, Mateus a corrigé des erreurs, utilisant sa mémoire de problèmes précédemment résolus, refaisant certaines représentations et parvenant progressivement, avec un accompagnement, à mobiliser la représentation algébrique, ce qui nous conduit à souligner l'évolution de son *concept image*. On peut s'interroger sur les obstacles ultérieurs liés à cette prédominance initiale du registre graphique et numérique chez Mateus, conforme à l'approche d'enseignement au Brésil.

5.2. Le concept image de Baptiste - Plusieurs registres mobilisés

Dans les activités, Baptiste mobilise des justifications qui s'inscrivent dans plusieurs registres : numérique, algébrique et graphique. Pour étudier son *concept image*, nous avons listé les arguments de Baptiste dans chacun de ces registres et recherché les liens que Baptiste était à même de tisser entre ceux-ci. Dans le registre numérique, Baptiste exploite des substitutions de valeurs et les formes indéterminées. Dans le registre algébrique, il simplifie l'écriture lorsqu'il y a une indétermination. Le registre graphique est mobilisé pour appréhender des fonctions proches de fonctions de référence. D'une manière générale, Baptiste a clairement une vision dynamique des limites (« dans la limite, le x s'approche du point » ; « les images de la fonction peuvent s'approcher infiniment d'un certain nombre »). Son *concept image* s'enrichit lorsqu'il intègre les apports du cours de l'enseignant (Annexe 3). Certains éléments et phrases des cours de l'enseignant pouvaient cependant générer des obstacles (e.g. Cornu, 1983) : « x tend vers a par valeurs supérieures [...] dès que x est suffisamment proche de a », « Si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut », « si x est suffisamment grand ».

Mais, en classe, l'enseignant a discuté la signification de ces expressions à partir des représentations des élèves, utilisant par exemple la fonction $f(x) = 1/x$. Cela a vraisemblablement contribué à ce que Baptiste fasse des relations pour les fonctions travaillées avec d'autres concepts (réels, asymptotes) et varie les registres de représentation dans les activités (figure 5).

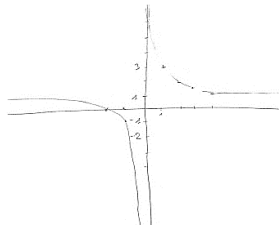
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{2}{x} + 1 \right)}{x(1+1)} = 1$ <p>car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$</p>	
x peut être plus grand et la limite tend vers 0	Je fais la simplification. La limite d'une fonction constante est la constante elle-même.	Représentation graphique et asymptotes

Figure 5. Baptiste – Cas (3) : limite en l'infini des fonctions $f(x) = 2/x$ et $f(x) = (2+x)/x$

L'enseignant a ensuite introduit une notation plus formelle en *epsilon* (Annexe 2). Ainsi, des expressions telles que « si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ proches de l » et « si les images de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de l » évoluent vers

l'expression « si tout intervalle ouvert contient toutes les valeurs de $f(x)$ ». Il est clair que le souci de l'enseignant est ici de travailler avec les expressions et conceptions « naturelles » considérées comme problématiques dans la littérature (Cornu, 2002). Les éléments décrivant le *concept image* de Baptiste indiquent qu'il fait systématiquement des associations pertinentes avec les définitions présentées par l'enseignant. Cependant, une étude sur un plus long terme serait nécessaire pour étudier les conflits potentiels entre le *concept image* de Baptiste décrit ci-dessus et les définitions formelles en *epsilon* et *delta* qu'il devra mobiliser plus tard.

5.3. Conclusions sur les *concepts images*

Sur l'ensemble de l'expérimentation, l'étude des *concept images* a été guidée par la recherche de conflits potentiels, soit au sein du *concept image* de limite de fonction, soit au niveau des objets mathématiques liés (fonctions, nombres réels, algèbre). Nous avons trouvé deux phénomènes susceptibles de générer des conflits :

- Mateus associe l'étude des fonctions à des problèmes à résoudre en fonction des valeurs de $f(x)$; il associe le domaine de définition et les valeurs des images par la fonction, en particulier aux bords de l'intervalle de définition de la fonction.
- Baptiste associe l'existence de la limite en un point à la valeur de la fonction en ce point au niveau de la représentation graphique.

Dans le cas de Mateus, l'un des problèmes ultérieurs sera relatif à des situations mobilisant la définition formelle, en *epsilon* et *delta*. Il devra alors manipuler des inégalités et des valeurs absolues et cherchera à mettre en relation des éléments du domaine de définition de la fonction avec des valeurs prises par la fonction. Dans le cas de Baptiste, les difficultés ultérieures seront relatives à sa conception de la limite de fonction en un point. L'étude de ces *concept images* montre par ailleurs des différences initiales entre ces deux étudiants, notamment au niveau des registres. L'étude des schèmes va nous permettre de discuter davantage les différences et les similitudes et, en particulier, de voir l'impact de la prédominance de certains registres sur les schèmes.

5.4. Etude des schèmes de Mateus et Baptiste

Pour faire l'étude fine des schèmes mobilisés par Mateus et Baptiste, nous étudions leurs productions lors de l'étude des fonctions utilisées dans les deux pays : $f(x) = n/x$, où $n > 0$ et $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = (2+x)/x$, $x \in \mathbf{R}$ pour les cas (2) et (3). Notons que, dans les activités, ces études de limites devaient être traitées en utilisant les registres algébrique, numérique, graphique et en langage naturel. L'intégralité des analyses de l'évolution des règles d'actions (notées R avec l'initiale du pays) et théorèmes-

en-acte (notés TA avec l'initial du pays) de Mateus et Baptiste sont dans (Burigato, 2019). Nous en reprenons ici les éléments principaux.

5.4.1. Les schèmes de Mateus et Baptiste pour le cas (2) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$

Suite à plusieurs activités, Mateus mobilise régulièrement, dans ses schèmes, le théorème-en-acte (TAB.iv.a⁷) fondé sur l'étude de représentation graphique. Comme il connaît l'allure de la représentation graphique de la fonction $f(x) = 1/x$, son schème se rapproche en fait des théorèmes-en-acte (TAB.v.a) et (TAB.v.b) par observation du graphique, mais sans réaliser de calculs de valeurs (cf. Figure 6).

Dans l'étude de la fonction $f(x) = (2+x)/x$, Mateus doit apporter de nouvelles adaptations à son schème initial. Il reconnaît la similitude de cette fonction avec celle d'autres activités et éprouve des difficultés dans la manipulation algébrique, dans les calculs de valeurs de la fonction (il obtient donc une représentation graphique incorrecte) et dans la simplification algébrique de l'écriture. Avec l'aide d'un collègue, il réussit à simplifier l'expression : $f(x) = 2/x+1$ et corrige ainsi sa représentation graphique. La figure 6 permet d'identifier la filiation des théorèmes-en-acte et règles d'action selon les fonctions étudiées.

Baptiste a correctement identifié la limite des deux fonctions. Il a mobilisé plusieurs théorèmes-en-acte relatifs aux limites de fonction, représentés sur la figure 7, ainsi que (TAF.vi.a) et (TAF.vi.b) que l'on peut rapprocher des théorèmes-en-acte de Mateus (TAB.v.a) et (TAB.v.b). Dans les deux cas, ces théorèmes-en-acte ont été construits avec un appui sur la mémorisation d'activités similaires précédemment traitées. La différence entre Baptiste et Mateus réside dans le fait que Mateus mobilise d'abord le registre graphique, alors que Baptiste se situe dans le registre numérique et algébrique. En plus de ces deux théorèmes-en-acte, Baptiste en a mobilisé d'autres, différents suivant la fonction travaillée (figure 7).

⁷ Nous conservons dans cet article les notations utilisées dans la thèse (Burigato, 2019) par souci de cohérence.

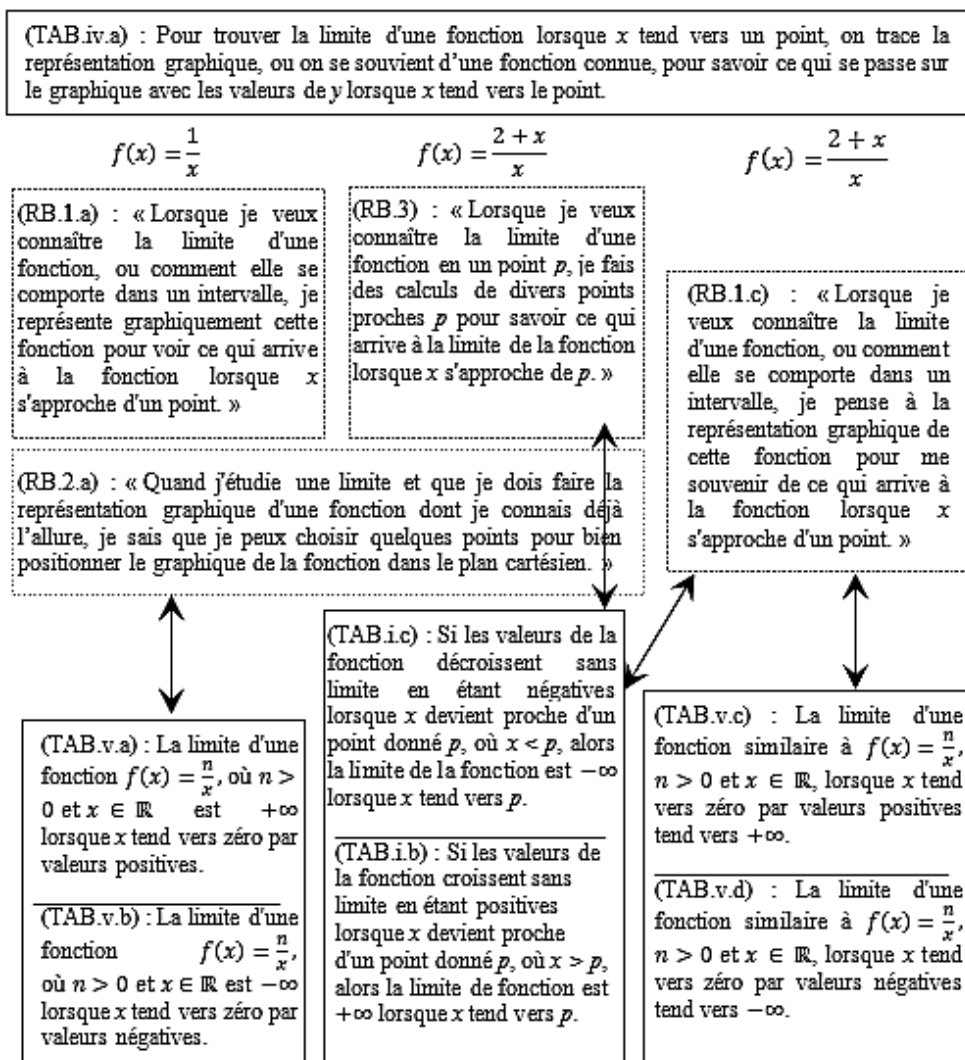


Figure 6. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Mateus⁸, cas (2) : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$

⁸ Dans les activités conduites au Brésil, correspondant à l'étude de la fonction $f(x) = (2+x)/x$ dans la figure 6, la fonction est étudiée avec des tableaux de valeurs et une représentation graphique, pour des pas de plus en plus petits de x . Des formulations décrivant le phénomène observé graphiquement et par le calcul sont demandées aux étudiants.

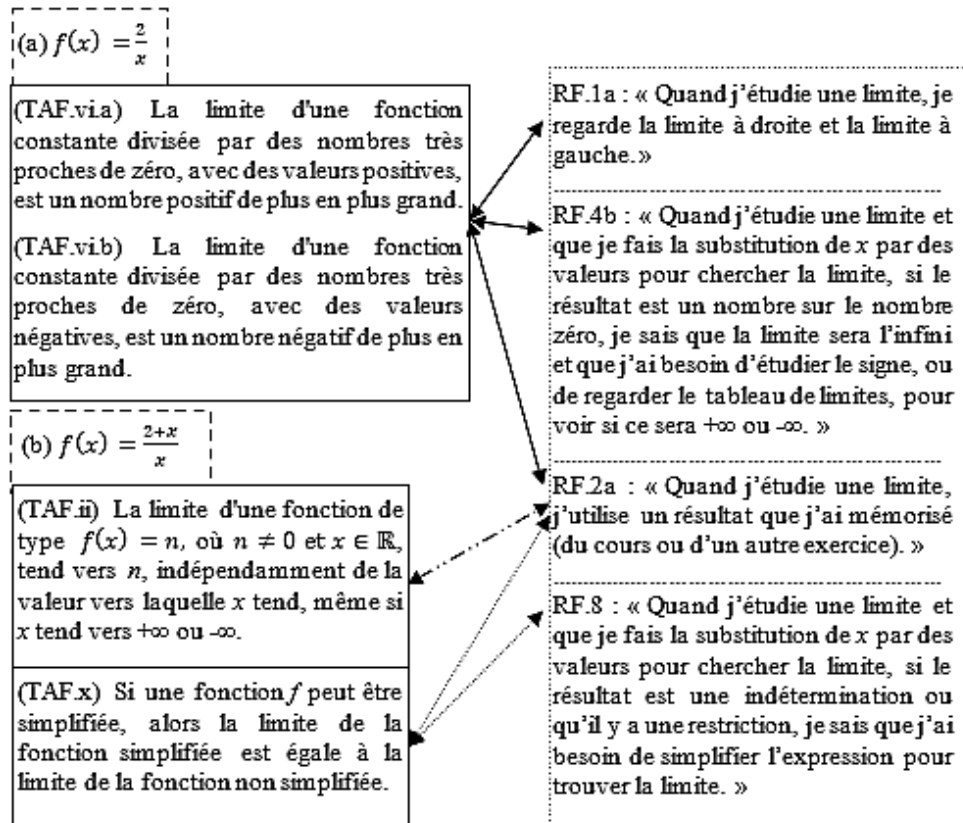


Figure 7. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Baptiste, cas (2) : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$

5.4.2. Les schèmes de Mateus et Baptiste pour le cas (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

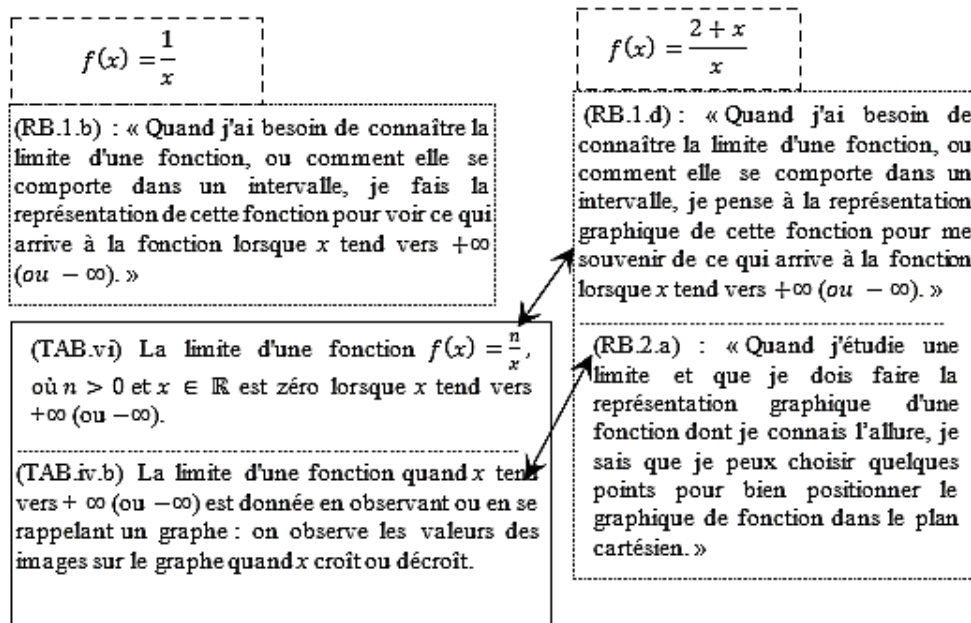


Figure 8. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Mateus, cas (3) : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

L'étude du cas (3) confirme la prédominance de la représentation graphique chez Mateus (cf. Figure 8). Cependant, l'étude des fonctions proposées (similaires à celles connues de Mateus) engage l'étudiant à vérifier algébriquement et numériquement le comportement de cette fonction pour répondre aux questions. Dans l'entretien, il précise qu'il utilise toujours la représentation graphique des fonctions pour traiter les activités, mais qu'il n'a jamais rencontré de situations nécessitant une réflexion sur les comportements graphiques de fonctions. Avec la fonction $f(x) = (2+x)/x$, il a dû revoir sa représentation car, bien qu'il sache que c'est la « même fonction », tradlatée, il doit mobiliser d'autres connaissances, notamment le fait que les valeurs de la fonction se rapprochent de $y = 1$, lorsque x prend des valeurs plus grandes ou plus petites. Une autre adaptation du schème de Mateus concerne les moyens de contrôle et de validation : il n'aime pas faire des calculs numériques et a déclaré qu'il trouvait que cela prenait beaucoup de temps, même avec la calculatrice. Au cours des activités, nous avons souvent constaté qu'il avait du mal à faire des calculs et à utiliser les résultats obtenus. Sa confiance dans les représentations graphiques des fonctions obtenues dans des situations rencontrées précédemment est relative. Lorsque Mateus a été confronté à la fonction $f(x) = (2+x)/x$ il a commencé par

effectuer plusieurs calculs. Il s'agit d'une action significative reflétant une adaptation du schème, relativement à des erreurs liées aux choix précédents (cas (2)).

Les schèmes de Baptiste sont eux aussi en lien avec la connaissance des cas précédemment traités, avec une adaptation selon la fonction en jeu. Dans le cas de la fonction $f(x) = 1/x$, la mémorisation des activités précédentes, les propriétés des nombres réels et l'idée des limites à gauche et à droite ont guidé les actions constitutives du schème de Baptiste. Baptiste a adapté son schème pour la fonction $f(x) = (2+x)/x$ utilisant des opérations d'addition et de division des limites de fonctions, de simplification de l'expression algébrique de la fonction initiale pour traiter l'indétermination. Ici, Baptiste semble bien connaître la division pour les nombres réels, ainsi que les limites de la fonction de référence. Quand nous l'avons interrogé sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x}$, il nous a répondu :

On voit que c'est zéro, parce qu'on va diviser un nombre donné qui ne changera pas, par un plus gros. Le résultat va s'approcher de plus en plus près, enfin il va être de plus en plus près ...nul, zéro.

Et il a écrit sur sa feuille d'activité (figure 9) ses justifications, montrant que la fonction peut tendre vers zéro de deux manières, par valeurs négatives ou positives.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

Parque nous divisons un nombre donné (nommé a (par exemple)), si nous le divisons par un nombre de plus en plus grand, il peut y avoir deux résultats :

- Soit a est négatif : dans ce cas l'image de f tend vers 0 (avec des valeurs toujours négatives)
- Soit a est positif : dans ce cas l'image de f tend vers 0 (avec des valeurs positives (toujours)).

Figure 9. Résolution écrite de Baptiste pour le cas (3) : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

Pour traiter la fonction $f(x)=(2+x)/x$, Baptiste s'appuie sur la mémorisation de situations précédentes, l'identification d'une contrainte et la nécessité de simplifier la fonction et d'identifier les limites connues de fonctions de référence.

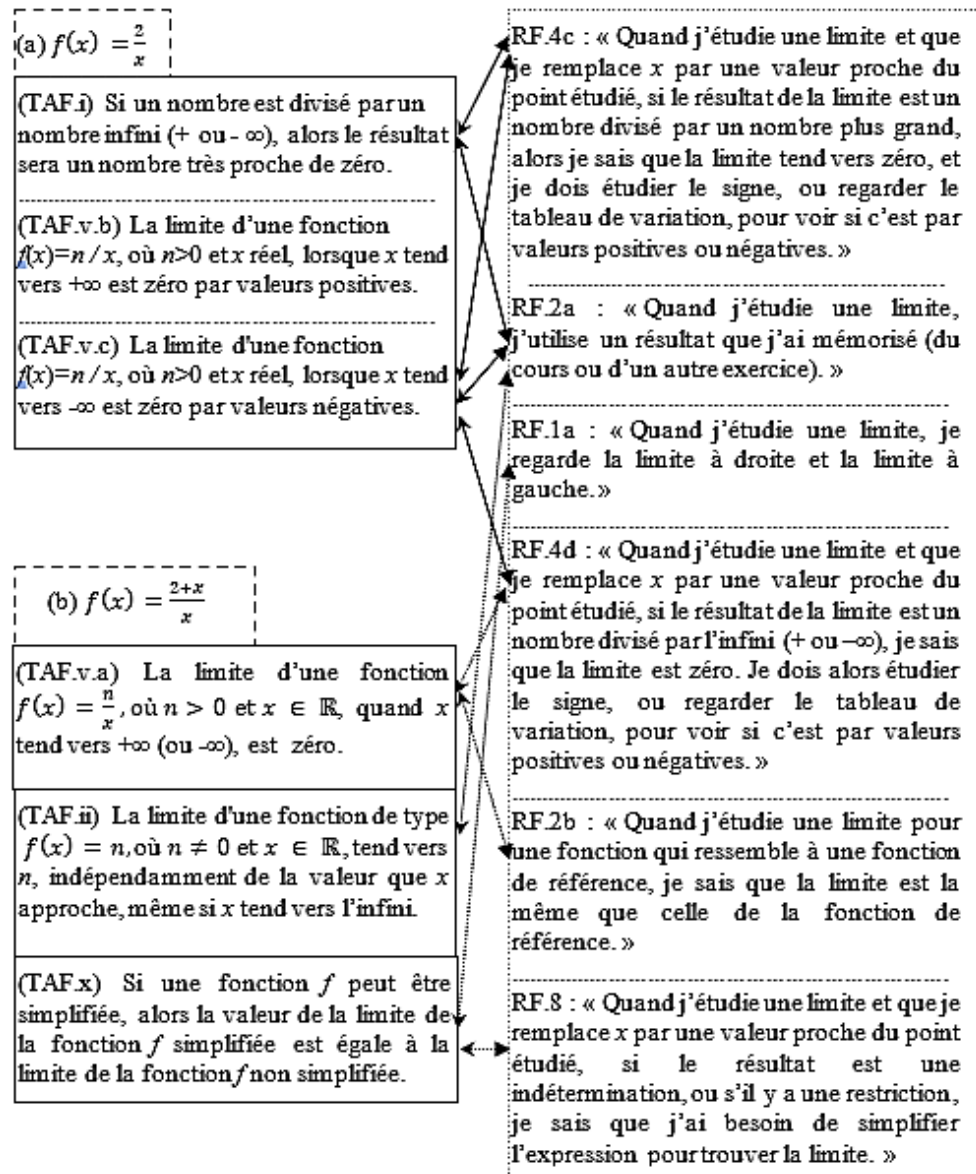


Figure 10. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Baptiste, cas (3) : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

Les théorèmes-en-acte (TAF.v.b) et (TAF.v.c) précèdent le théorème-en-acte (TAF.v.a) du schème de l'étudiant, montrant ainsi une adaptation (cf. Figure 10). Ainsi, après simplification lui permettant d'identifier la fonction $f(x) = 1/x$, Baptiste élargit son schème initial, prévoyant qu'il ne sera pas nécessaire d'étudier les limites à droite et à gauche, car la fonction $f(x) = (2+x)/x$ tend vers 1 et « peu importe si $f(x) = 2/x$ tend vers zéro par des valeurs positives ou négatives, car cela ne changera pas le résultat final de la limite ». Baptiste a un schème très stable pour identifier les limites de fonction du type $f(x) = n/x$, $n > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, et du type $f(x) = (a \pm x)/x$, $n > 0$ et $x \in \mathbf{R}$. Il sait également traiter des limites de fonctions et des cas d'indétermination connus. Ses schèmes ont été adaptés, non seulement de manière opérationnelle, en-acte, en mobilisant des tableaux de valeurs et de variations et des résultats mémorisés de certaines limites, mais aussi en intégrant de nouveaux éléments du concept de limite. En effet, Baptiste comprend les connaissances mobilisées dans les activités, par exemple, lors de la représentation graphique de la fonction $f(x) = (2+x)/x$, le comportement de la fonction est justifié lorsque x est proche de zéro (cas (2)). Les représentations mobilisées, à l'écrit et à l'oral par Baptiste, sont cohérentes pour les deux registres travaillés ici (explication de la limite obtenue dans le registre algébrique et au niveau de la représentation graphique, incluant l'identification du comportement de la courbe par rapport à son asymptote horizontale $y = 1$).

5.5. Poursuite de l'évolution des schèmes de Mateus et Baptiste

L'étude du parcours de Mateus et Baptiste sur un temps relativement long, en prenant en compte les activités conduites en cours par l'enseignant et notre expérimentation, nous a permis de montrer l'évolution de leurs schèmes dans notre travail de thèse (Burigato, 2019). À titre d'exemple représentatif, dans le tableau 2, nous présentons l'étude de la limite en 1 de la fonction $f(x) = (x^2-x)/(x-1)$, proposée aux étudiants dans le registre algébrique.

Ce type de fonction est généralement utilisé pour montrer qu'une limite peut exister en un point où la fonction n'est pas définie. Les deux étudiants ont encore mobilisé les schèmes précédemment décrits, tout en faisant des adaptations. Le premier théorème-en-acte (simplification algébrique) est commun aux deux étudiants, mais l'action diffère :

- l'étudiant brésilien étudie les points voisins et voit que les valeurs s'approchent d'un nombre qui est la limite (registre numérique prédominant) ;
- et l'étudiant français reconnaît la fonction et sait que la limite sera la valeur que la fonction simplifiée prend en ce point (registre algébrique).

Nous retrouvons ici les registres mobilisés dans les schèmes précédents de ces étudiants. Cela est en accord avec les schèmes décrits dans les sections précédentes.

Le répertoire de représentations de fonction de Mateus s’est enrichi, et ses actions s’orientent sur le registre numérique. Basptiste, quant à lui, reste fidèle au registre algébrique et au recours de résultats mémorisés et fonctions de référence.

Tableau 2. Règles d’action et théorèmes-en-acte, pour la fonction $f(x) = (x^2-x)/(x-1)$

Mateus	Baptiste
Règles d’actions	
<p>« Lorsque je dois trouver la limite d'une fonction rationnelle, je sais que je peux simplifier l'expression algébrique de la fonction pour travailler avec une expression plus simple, afin de faciliter les calculs. »</p> <p>« Lorsque je résous une activité de limite et que je dois traiter des éléments aux bords du domaine de définition, je sais que je dois travailler avec des valeurs proches du point considéré pour l'étude de la limite. »</p>	<p>« Quand j'étudie une limite et que je remplace x, et que le résultat est une indétermination, ou s'il y a une restriction, je sais que j'ai besoin de simplifier l'expression pour traiter la limite. »</p>
Théorèmes-en-acte	
Si une fonction f est simplifiée,	
alors la valeur de la limite de la fonction f simplifiée est égale à la limite de la fonction f .	
<p>Si les valeurs de la fonction se rapprochent d'une valeur L lorsque x devient proche d'un point donné p, alors la limite de la fonction est L lorsque x tend vers p.</p>	<p>La limite d'une fonction, quand il n'y a pas restrictions, est obtenue en remplaçant dans $f(x)$ la valeur x par la valeur où l'on cherche la limite.</p>

Le concept de fonction est ici un point central : certains aspects de ce concept peuvent être à la fois un point d'appui pour l'évolution des schèmes mais aussi un point de déséquilibre, comme le souligne Vergnaud (2015). Tout au long de l'enseignement, le concept de fonction nécessite l'étude de phénomènes aux points considérés comme problématiques pour la fonction, aux bornes du domaine de définition par exemple, dans des registres variés.

Conclusion et perspectives

Nous avons vu dans notre expérimentation que la mémorisation de résultats, tels que des tableaux de variations de fonctions, des tableaux de valeurs, des propriétés sur les nombres réels, et des représentations graphiques, apparaît comme centrale. Ici, la compréhension de la construction de ces premiers résultats sur les fonctions est fondamentale pour que l'élève puisse les utiliser correctement par la suite. Par

exemple, dans le cas de l'élève brésilien, son utilisation d'une représentation graphique d'une fonction mémorisée a été un point d'appui à plusieurs reprises dans son travail : dans certains cas, cela était « efficace » (et lui permettait d'accéder au résultat), dans d'autres non. Il lui fallait donc reprendre cette représentation, réfléchir à sa construction, afin de pouvoir réorganiser son schème face à la situation. D'une manière globale, les schèmes de l'étudiant brésilien, initialement dans le registre graphique, ont progressivement glissé vers le registre numérique et algébrique. La confrontation de ces registres de représentation dans les activités et entretiens lui a permis d'appréhender le fait que la limite peut exister en un point n'appartenant pas au domaine de définition de la fonction, ce qui est un gain par rapport au *concept image* initial.

L'étudiant français a également revu les résultats mémorisés lorsqu'il a trouvé un résultat incorrect et n'a pas pu expliquer la limite obtenue : il a soutenu que, dans le cas précédent (vu en cours), c'était possible, car il s'agissait d'une valeur exacte, et, dans l'activité proposée, il obtenait une valeur approximative. Il a évoqué une autre situation dont la limite avait été obtenue par substitution directe de la valeur d'étude dans la fonction donnée. Mais, dans l'activité proposée, Baptiste n'a réalisé son erreur que lorsqu'on lui a demandé de représenter graphiquement la fonction : il a alors refait toute l'activité, corrigeant et justifiant le résultat trouvé. Ce n'est pas la construction de la représentation graphique elle-même qui a joué ce rôle, mais les règles d'action mobilisées pour sa construction et théorèmes-en-acte afférents. Pour l'étudiant français, les schèmes initiaux ancrés dans le registre algébrique et calculatoire se sont enrichis avec le registre graphique, lors des entretiens. Le registre graphique est devenu pour lui plus qu'une simple représentation de fonction de référence mémorisée.

Ces résultats confirment les résultats de la littérature dans le cas de l'analyse et en montrent les aspects dans un contexte de classe ordinaire (e.g. Cornu, 2002 ; Reis, 2001 ; Nascimento, 2003) : l'expérimentation complémentaire au cours d'une grande variété de situations, mobilisant divers registres de représentations, permet aux étudiants d'enrichir leur domaine d'expérience, de faire évoluer leurs *concept images* et leurs schèmes. Les schèmes des deux étudiants sont à l'origine chacun conformes au type d'enseignement en France et au Brésil et évoluent au cours de l'expérimentation. Si certains théorèmes-en-acte sont communs, les règles d'actions diffèrent, elles sont guidées par le répertoire de l'élève, obtenu au fil des années. Ces règles d'actions constituent la véritable partie génératrice des schèmes (Vergnaud, 1991) et nous renseignent sur la continuité des actions d'un sujet (recherche d'informations, actions, contrôles des résultats d'une action). Ainsi, ce sont elles qui sont intéressantes à exploiter pour identifier les apports de ces différentes approches

d'enseignement (Brésil et France) pour la conception d'activités futures pour la classe ordinaire.

Par ailleurs, notre méthodologie d'analyse s'est avérée pertinente, étant données les différences que nous avons présentées des deux pays étudiés. La modélisation théorique retenue nous a permis d'identifier des éléments communs et les spécificités dans les productions des élèves brésiliens et français en termes de *concepts images*, de schèmes, et ce en lien avec les registres de représentation. En particulier, nous avons relevé des théorèmes-en-acte communs à ces étudiants, mais qui étaient guidés par des règles d'action différentes.

Le travail de thèse (Burigato, 2019), dont sont extraites ici les études de cas, a ouvert différentes perspectives. En ce qui concerne la modélisation théorique retenue, nous remarquons qu'elle s'avère pertinente pour l'étude des élèves en difficulté. À titre d'exemple, nous avons étudié le cas d'un élève sans difficulté avec les concepts de base, mais en grande difficulté dans les activités travaillées dans notre recherche. Dans notre étude, nous avons été en mesure d'identifier les représentations les plus problématiques et celles qui lui ont permis d'établir des liens et relations pertinents pour faire face aux activités. Nous envisageons des études ultérieures sur divers concepts mathématiques (dont ceux de limite et de fonction), avec la méthodologie suivante :

- Etudier le *concept image* d'un concept donné, en identifiant les images qui peuvent entraîner des conflits, soit avec d'autres images de ce concept, soit avec la définition du concept ;
- A partir de cela, réaliser une modélisation en termes de règles d'action et de théorèmes-en-acte, en relation avec les activités ou situations travaillées, afin d'analyser plus en détail les difficultés en vue de l'apprentissage de la définition formelle ;
- Construire des situations en prenant en compte les obstacles et conflits possibles identifiés dans le *concept image* et les schèmes des étudiants et ainsi aller vers la définition formelle.

Cette démarche s'inscrit dans un contexte de l'enseignement ordinaire et n'adopte pas la démarche d'ingénierie didactique et de construction de définitions telles que développées dans les travaux de Lecorre (2016) et Chorlay (2019) sur un temps long.

À termes, il serait nécessaire de croiser ces deux types d'approches (ingénierie de construction de définitions et activités locales s'inscrivant dans les curricula) afin d'étudier comment articuler le local et le global (au sens de Bloch, 2017) pour permettre l'accès aux étudiants au domaine mathématique qu'est l'Analyse. Cela rejoint le nécessaire travail sur le concept de fonction caractérisé à la fois par la

multiplicité de registres de représentation (algébrique, symbolique, formel, numérique, graphique) (Duval, 1995) et plusieurs perspectives (ponctuelle, globale et locale) (e.g. Vandebrouck, 2011 ; Montoya Delgadillo et al., 2018) que nous n'avons pas exploitées dans notre expérimentation.

Bibliographie

ALCOCK, L. et SIMPSON, A. (2009). The role of definition in example classification. Dans M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, et H. Sakonidis (Dir.), *Proceedings of the 33th conference of the international group for the Psychology of Mathematic Education*, (Vol. 2, p. 33-40). IGPME.

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Dans M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gomez (Dir.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (p. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. Dans D. Grenier (Dir.), *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (p. 219-244). IMAG.

BERGÉ, A. et SESSA, C. (2018). Complétude et continuité à travers 23 siècles : contributions à une recherche en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 38(2), 157-205.

BLOCH, I. (2017). L'enseignement de l'analyse : de la limite à la dérivée et au EDO, questions épistémologiques et didactiques. Dans Y. Matheron et al. (Dir.), *Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 67-91). La Pensée Sauvage.

Ministère de l'Éducation Nationale (2010). *Bulletin officiel Spécial n°4 du 29 avril 2010*. <https://www.education.gouv.fr/pid23972/special-n-4-du-29-avril-2010.html>

Ministère de l'Éducation Nationale (2011). *Bulletin officiel Spécial n°8 du 13 octobre 2011*. https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=25847

BURIGATO MONTEIRO DA SILVA, S. M. (2019). *Um Estudo Sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França* [Thèse de doctorat, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul]. <https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/6246>

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. [Thèse de doctorat, Université de Grenoble].

CORNU, B. (2002). Limits. Dans D. Tall (Dir.), *Advanced Mathematical Thinking*, (p. 153-166). Kluwer.

CHORLAY, R. (2019). A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(3), 267-314.

DURAND-GUERRIER, V. et VERGNAC, M. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x*, 96, 7-30.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

LECORRE, T. (2016). *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01421117/document>

GUIDORIZZI, H. L. (2013). *Um Curso de Cálculo: volume 1*. LTC (5ème édition).

KRYSINSKA, M. et SCHNEIDER, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Les Éditions de l'Université de Liège.

MARIOTTI, M.A. et FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.

MAZUCATO, T. (Dir.). (2018). *Metodologia da pesquisa e do trabalho científico*. FUNEPE.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Volume 2*. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

MONTOYA DELGADILLO, E., PÁEZ MURILLO, R., VANDEBROUCK, F. et VIVIER, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 139-160.

NASCIMENTO, J. C. (2003). *O conceito de limite em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática* [Thèse de doctorat, Universidade Federal de Pernambuco]. <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/8244>

OKTAÇ, A. et VIVIER, L. (2016). Conversion, Change, Transition... in Research About Analysis. Dans B.R. Hodgson, A. Kuzniak et J.-B. Lagrange (Eds), *The Didactics of mathematics: approaches and issues. A homage to Michèle Artigue* (p. 87-122). Springer.

REIS, F. S. (2001). *A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de Professores- Pesquisadores e autores de Livros Didáticos* [Thèse de doctorat, Universidade Estadual de Campinas].

<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253451>

ROBERT, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 307-341.

ROH, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 217–233.

SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

SIERPINSKA, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans E. Dubinsky, G. Harel (Dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, (p. 23-58, MAA notes, 25). Washington DC.

SWINYARD, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 93–114.

TALL, D. et VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 3(12), 151-169.

TOLOI, G. et MANZINI, E. J. (2013). Etapas da Estruturação de um Roteiro de Entrevista e Considerações Encontradas Durante a Coleta dos Dados. Dans ABPEE (Dir.), *VIII Encontro da Associação Brasileira de Pesquisadores em Educação Especial* (p. 3299-3306). Universidade Estadual De Londrina.

<http://www.uel.br/eventos/congressomultidisciplinar/pages/arquivos/anais/2013/AT14-2013/AT14-008.pdf>

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS) (2014). *Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Matemática – Licenciatura*. UFMS : Instituto de Matemática (INMA), Campo Grande.

VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 16, 149-185.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 133-169.

VERGNAUD, G. (2015). Entrevista com Gérard Vergnaud. [Entrevista cedida a] Candy Marques Laurendon. *Revista do GEEMPA: 45 anos de Pesquisa Formação e Ação*, 11, 15-23.

VINNER, S. ET DREYFUS, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

sonia.burigato@ufms.br

CECILE OUVRIER-BUFFET

Université Paris-Est Créteil, LDAR, France

cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

JOSE LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

jose.freitas@ufms.br

Annexe 1. Questionnaires utilisés au Brésil et en France

Dans ces questionnaires préalables aux entretiens et activités conduits avec les étudiants, des informations générales sont demandées aux étudiants (nom, prénom, âge, souhaits d'études, motivations, souhait d'intégrer l'expérimentation).

Au Brésil, les étudiants n'avaient pas encore eu de cours sur les limites, il s'agissait d'identifier certaines difficultés déclarées par les étudiants, en particulier en lien avec les nombres réels.

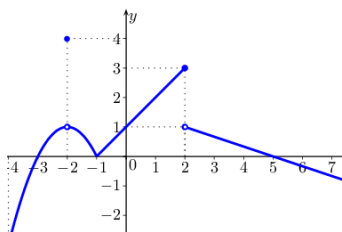
Voici des exemples de questions posées :

6. En pensant aux ensembles numériques que vous avez étudiés, quelles difficultés de compréhension aviez-vous et avez-vous ?
7. Citez des opérations mobilisant des nombres réels où vous rencontrez quelques difficultés (par exemple $2/3+1/2$)
8. Dans l'ensemble des nombres réels, citez 3 nombres qui sont dans chacun de ces intervalles

a) $] -1 ; 20]$	b) $] 0 ; 1]$	c) $[-2 ; 0]$
d) $[0 ; \frac{2}{3}[$	e) $[-\frac{7}{8} ; 0]$	f) $] -\infty ; 0[$

En France, l'enseignement des limites avait commencé en classe, il s'agissait donc d'appréhender les éléments déjà intégrés par les étudiants. Voici des exemples de questions posées (un focus est fait sur le registre graphique, afin d'avoir des éléments de comparaison avec les étudiants brésiliens où ce registre prédomine avec le registre numérique) :

6. Écrivez ce que vous avez compris intuitivement de la limite d'une fonction.
8. Écrivez ce que vous avez compris en ce qui concerne la définition formelle de la limite d'une fonction.
9. Présentez des concepts que vous connaissez déjà et qui sont utilisés dans le concept de limite.
10. Analysez le graphique et déterminez les limites demandées. Justifiez ensuite chaque résultat trouvé.



- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

Annexe 2. Activités des groupes I, II et III

Contenus des activités du Groupe I

Fonction, représentation graphique et tableau de valeurs, $f(x) = \left| \frac{x^2-x}{x-1} \right|$ pour $x \neq 1$.

- Construire un tableau de valeurs
- Représenter les valeurs sur une droite numérique
- Trouver des valeurs entre deux valeurs données
- Étudier les valeurs de la fonction dans le voisinage de 1
- Construire la représentation graphique et l'analyser pour x proche de 1
- Études de la fonction sur des intervalles (par exemple $1,2 < f(x) < 2,8$).

Contenus des activités du Groupe II (limite finie en un point)

Exemples de fonctions étudiées (quand x tend vers 1) dans les registres algébriques et graphiques : $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$; $f(x) = x+2$ si $x \neq 1$ et 1 si $x=1$

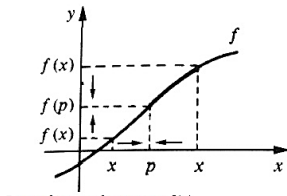
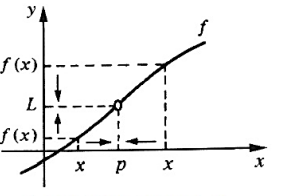
- Calculs en $x=1$
- Pour un ε donné, étude des valeurs de x telles que $2 - \varepsilon < f(x) < 2+\varepsilon$
- Introduction de δ
- Utilisation d'inégalités avec valeurs absolues (de type $|f(x) - 2| < \varepsilon$)
- Liens entre registres algébriques et graphiques.

Contenus des activités du Groupe III (limites à l'infinie et limites en un point)

Exemples de fonctions étudiées : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; 2]$ et $[-2 ; 0[$ puis sur $] -\infty ; -1]$ et $[1 ; +\infty[$ (étude des valeurs proches de 0 et représentation graphique, étude des valeurs de la fonction à gauche et à droite de 0, étude des valeurs au voisinage de $\pm\infty$).

Annexe 3. Définitions introduites en classe

Au Brésil, avant l'expérimentation des cas (2) et (3), seules la définition intuitive et la définition formelle du cas (1) sont introduites en classe par l'enseignant.

Définition du cas $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = k$	
<p>Définition intuitive</p> <p>Intuitivement, on dit que limite de $f(x)$ lorsque x tend vers p, est égale à L, symboliquement s'écrit : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ signifie que, lorsque x tend vers p, $f(x)$ tend vers L.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;">  <p>Quand x tend vers p, $f(x)$ tend vers $f(p)$: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Quand x tend vers p, $f(x)$ tend vers L : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$</p> </div> </div>	
<p>Définition formelle</p> <p>Soit f soit une fonction et p un point appartenant au domaine de définition de f ou à l'extrémité de l'un des intervalles qui composent le domaine de définition de f. Nous disons que f a pour limite L, en p, si, pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour chaque $x \in Df$, $0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$.</p> <p>Ce nombre L, quand il existe, est unique, il sera indiqué par $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$. Ainsi :</p> <p>$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que pour chaque } x \in Df, 0 < x - p < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon)$</p>	

Au Brésil, après l'expérimentation, les définitions ont été introduites par l'enseignant de la façon suivante.

<p>Définition du cas $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$</p>
<p>Définition</p> <p>Soit f une fonction, p un nombre réel et supposons qu'il existe b tel que $]p; b[\subset D_f$. Nous définissons</p> $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ avec } p + \delta < b, \\ \text{tel que } p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \end{array} \right.$ <p>On procède de manière analogique pour définir :</p> $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty$ <p>et $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -\infty$</p>
<p>Définition du cas $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$</p>
<p>Définition 1</p> <p>Soit f une fonction et supposons qu'il existe a tel que $]a; +\infty[\subset D_f$.</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ avec } \delta > a, \\ \text{tel que } x > \delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{array} \right.$ <p>Définition 2</p> <p>Soit f une fonction et supposons qu'il existe a tel que $] -\infty; a[\subset D_f$.</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ avec } -\delta > a, \\ \text{tel que } x > -\delta \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \end{array} \right.$

En France, avant l'expérimentation, la définition des cas (2) et (3) est introduite par l'enseignant de la façon suivante.

Définition cas (2) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a; b[$.

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut dès que x est suffisamment proche de a dans l'intervalle $]a; b[$.

On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f .

On a des définitions analogues pour $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.

Définition cas (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$

(1.a) Soit f une fonction définie sur un intervalle $] * ; +\infty[$, ($*$ pouvant être un nombre réel ou $-\infty$). f a pour limite le réel l quand x tend vers l'infini si les images $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de l , à condition de prendre x suffisamment grand.

On peut formaliser les choses en s'inspirant de la définition donnée pour les limites finies des suites :

(1.b) La fonction f admet pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$.

On dit alors que la droite d'équation $y=l$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .

On a des définitions analogues pour : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$.

SOPHIE ROUSSE

LE DISCRET ET LE CONTINU DANS L'ENSEIGNEMENT DES SUITES
ET DES FONCTIONS EN FIN DE COLLEGE ET AU LYCEE

Abstract. “The discrete” and “the continuous” in teaching sequences and functions in French secondary school. Notions pertaining to the Calculus field in France, up to the end of Seconde (10th grade), are mainly functions and their graphical representations. Curricula, followed by textbooks, integrate these notions into “the continuous”. This appears to be self-evident since “the discrete” is not explicitly addressed. Sequences, which are *a priori* part of “the discrete”, are first studied in Première.

However, “the discrete” and “the continuous” have mathematical aspects and constitute two worlds (in a sense that we will define) between which it is difficult to delineate a boundary. Students’ activities on tasks which mobilize continuous functions may be carried out in the discrete world as much as in the continuous one. Furthermore, sequences and functions in secondary school count numerous interactions and correct or incorrect analogies. Textbooks make choices in the graphical and algebraical registers which differ from one book series to another, which testifies to the existence of objective difficulties. Lastly, in secondary school and MEEF master, students’ work shows a number of confusions between sequences and functions. This leads us to reflect on a possible introduction of sequences prior to functions.

Keywords. Discrete, continuous, sequence, function, mathematics activities

Résumé. En France, jusqu’en fin de Seconde, le domaine de l’analyse est « peuplé » de notions (fonction, représentation graphique), que les programmes officiels, suivis par les manuels, inscrivent dans le continu. Ce continu semble d’autant plus aller de soi que le discret, malgré tout présent, n’est pas abordé explicitement. Les suites, qui s’inscrivent *a priori* dans le discret, sont abordées en Première. Or le discret et le continu présentent des aspects mathématiques et constituent deux « mondes » (en un sens qui sera précisé) entre lesquels il s’avère complexe de délimiter une frontière ; si les fonctions continues sur un intervalle s’inscrivent dans le continu d’un point de vue mathématique, les tâches qui les mobilisent peuvent inscrire les activités des élèves aussi bien dans monde du discret que celui du continu ; de plus, dans les savoirs à enseigner au lycée, les interactions et analogies (exactes ou erronées) entre suites et fonctions sont nombreuses. Dans les registres graphique et algébrique, les manuels effectuent des choix qui diffèrent d’une collection à l’autre, ce qui témoigne de l’existence de difficultés objectives. En dernier lieu, les travaux d’élèves et d’étudiants en master MEEF montrent de multiples confusions entre suites et fonctions. Ceci nous mène à une réflexion sur une éventuelle introduction des suites avant les fonctions.

Mots-clés. Discret, continu, suite, fonction, activités mathématiques

Introduction

En Troisième et en Seconde générale en France, le domaine de l'analyse est aujourd'hui « peuplé » de notions (fonction, représentation graphique...), que les programmes officiels (précisés plus loin), suivis par les manuels, inscrivent dans le continu : les fonctions sont majoritairement définies sur un intervalle de \mathbf{R} et continues sur cet intervalle, même si ce n'est pas explicite. Cela semble d'autant plus aller de soi que les fonctions apparaissent comme des outils de modélisation de phénomènes continus. Pour les élèves, il se pourrait que ce ne soit pas si clair.

Les suites, qui s'inscrivent *a priori* dans le discret, sont introduites en Première. Les manuels les définissent comme des fonctions définies sur \mathbf{N} . Elles sont source avérée de difficultés pour les élèves et les étudiants ; le discret et le continu pourraient y jouer un rôle. D'où les questions : comment et en quoi les activités mathématiques des élèves mettent-elles en jeu le discret et le continu dans l'enseignement des suites et des fonctions au secondaire ? Quelles en sont les conséquences possibles sur les apprentissages ? Nous nous appuyerons sur une nécessaire étude du relief des notions de suite et de fonction sous l'éclairage du discret et du continu, ce qui nous amène à formuler ces deux questions préliminaires : qu'est-ce que le discret et le continu épistémologiquement et mathématiquement ? Comment les caractériser du point de vue des activités mathématiques des élèves ? Ce sera l'objet de la partie 2 dans laquelle nous définissons deux « mondes » dans lesquels situer ces activités mathématiques. Puis nous aborderons nos questions :

- Du côté du savoir à enseigner (les programmes en partie 3, les manuels en partie 4) et du savoir enseigné (vu à travers les manuels) : les activités sur les suites et les fonctions s'insèrent-elles effectivement dans deux mondes distincts ? Comment l'ordre d'introduction dans les programmes actuels (fonctions continues sur un intervalle suivi de suites) est-il susceptible d'influer sur les apprentissages des élèves ?
- Du côté des élèves et étudiants en master MEEF en partie 5 : comment les confusions entre suites et fonctions se manifestent-elles ? En effet, ce sont les traces d'activités mathématiques effectives des élèves et des étudiants qui nous servent d'indicateur des éventuelles difficultés et confusions, et *in fine* des apprentissages des élèves et des étudiants.

En conclusion nous développerons ce en quoi une introduction des suites avant les fonctions continues sur un intervalle nous semble une voie prometteuse à explorer.

Malgré la disparition des séries L, ES et S au lycée, remplacées par les spécialités en 2019, les propos de cet article se prolongent dans l'actualité. S'agissant des suites et

des fonctions, les programmes de la spécialité mathématiques en Première et en Terminale sont dans les grandes lignes similaires à ceux de la série S.

1. Contexte, éléments théoriques et méthodologiques de l'étude présentée

Les recherches en didactique de l'analyse dans le secondaire abordent les problématiques du discret et du continu, de façon indirecte, par le biais de l'étude de thèmes qui figurent au programme officiel : les nombres réels, les limites (de suites, de fonctions), la continuité, les dérivées et les intégrales. En effet, comme le note Durand-Guerrier (2012), le continu (de même que le discret) est présent dès l'enseignement primaire et jusqu'à l'université, bien que de façon essentiellement implicite. Quelques travaux rencontrent tout de même le sujet de cet article, de façon incidente, principalement concernant les confusions (en germe ou avérées) des élèves et étudiants.

Deux d'entre eux situent leur recherche dans le supérieur, sur le thème des limites de suites et de fonctions : Vandebrouck (2011) décrit le résultat d'une étude de la CI2U sur des étudiants de Licence 1 de mathématiques. Il note que la suite de terme général $u_n = \sin(2\pi n)$ n'aurait pas de limite d'après un sixième des étudiants : la fonction $x \rightarrow \sin(2\pi x)$ n'ayant pas de limite en $+\infty$, la suite n'en aurait pas non plus.

Fernandez-Plaza et al. (2016) confirment ce résultat, à un niveau d'enseignement comparable en Grande-Bretagne : ils proposent différentes limites de suites et de fonctions à des étudiants et leur demandent de les regrouper selon des critères de leur choix. Les auteurs écrivent que de nombreux étudiants se réfèrent indifféremment à des limites de suites ou des limites à l'infini de fonctions selon des critères de forme algébrique. En particulier, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(2\pi x)$ sont regroupées par plusieurs étudiants.

Ces deux recherches montrent que pour bon nombre d'étudiants, la forme algébrique semble suffire à définir l'objet mathématique, entraînant une confusion entre suites et fonctions.

Dans Coppé et al. (2006), les auteurs situent leur recherche en classe de Seconde et questionnent ce qu'ils nomment « les trois ostensifs que sont le tableau de valeurs, le tableau de variation et la courbe » d'une fonction (implicitement définie sur un intervalle réel). Ils notent que les élèves ont tendance à penser qu'un tableau de valeurs comportant les valeurs entières d'une variable suffit à définir la fonction, de même que des points d'une courbe suffisamment rapprochés suffisent pour la tracer.

Nous appuyons nos analyses sur notre travail de thèse (Rousse, 2018) qui est centré sur le discret et le continu (au niveau du secondaire)¹.

La démarche théorique suivie s'inscrit dans les recherches qui admettent que ce sont les activités mathématiques des élèves qui permettent de développer leurs apprentissages (Vandebrouck, 2008). Ces activités sont des segments de leur activité, au sens plus large de ce qu'ils font, pensent, écrivent, disent, mais aussi n'écrivent pas, ne disent pas... Nous nous intéressons uniquement aux activités mathématiques des élèves ; c'est pourquoi, dans la suite de cet article, « activités » désignera « activités mathématiques ». Celles-ci sont générées par les tâches qui sont proposées aux élèves, ainsi que par les déroulements en classe, organisés dans un contexte précis. Inaccessibles, elles sont appréciées en comparant les activités mathématiques attendues et ce qui est observable à travers les productions (qui fournissent des traces d'activités « effectives »²). Ainsi, nous approchons le sujet de l'enseignement des suites et des fonctions par le double questionnement : qu'est-ce qui caractérise les activités qui s'inscrivent dans le discret et celles qui s'inscrivent dans le continu, comment ces activités vivent-elles dans les mathématiques à enseigner, enseignées, chez les élèves et les étudiants ?

Nous appuyons nos réponses sur une étude du « relief » (Robert et al., 2012, p. 78) du discret et du continu ainsi que celui de l'enseignement des suites et des fonctions. Une analyse épistémologique et mathématique préalable est croisée avec une étude des mathématiques à enseigner (les programmes officiels, les manuels qui les mettent en œuvre) et les aspects cognitifs (les difficultés des élèves).

Nous mobilisons les jeux de registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993) en tant qu'outils d'analyse ; en effet, ses travaux montrent que c'est dans un travail articulé entre différents registres (ici : graphique, algébrique, numérique) que la conceptualisation d'une notion peut s'effectuer. Nous nous appuyons de surcroît sur Vandebrouck (2011) qui a discerné trois domaines de travail sur le thème des fonctions : un domaine F1 d'entrée dans la pensée fonctionnelle qui coordonne plusieurs registres, de la Troisième au début de la Première ; un domaine F2 très lié à l'algèbre, à partir de la Première, qui masque en partie la richesse donnée par F1 et s'appuie sur l'intuition graphique sans véritablement s'interroger sur le rapport entre graphique et fonction. Quant au domaine F3 dont le fondement est la complétude de \mathbf{R} , il est présent à l'Université.

¹ Nous y étudions l'enseignement de l'analyse et des probabilités, thèmes porteurs de nombreuses interactions entre le discret et le continu. Le thème des probabilités ne sera pas abordé dans cet article.

² L'analyse de vidéos de cours permet d'apprécier les activités « possibles » des élèves, nous n'investissons cependant pas ce type d'analyse dans cet article.

Nous convoquons le filtre des trois perspectives dans le thème des fonctions (Vandebrouck, 2011 ; Montoya Delgadillo et al., 2018) : les activités des élèves qui mettent en jeu les propriétés d'une fonction sur un intervalle embarquent une perspective globale ; celles qui mettent en jeu les propriétés sur des voisinages « aussi petits soient-ils » embarquent une perspective locale ; enfin, les autres propriétés qui mettent en jeu la valeur de la fonction en un point embarquent une perspective ponctuelle. En particulier, quand elles mettent en jeu une propriété ponctuelle universelle (i.e. énoncée par un quantificateur universel, par exemple le sens de variation d'une fonction déterminé par le signe de sa dérivée), elles n'embarquent qu'une perspective ponctuelle (et pas la perspective globale). Il en est de même lorsque des expressions algébriques de fonctions sont mobilisées. D'après ces auteurs, seules les activités effectuées dans le registre graphique peuvent embarquer les trois perspectives et faciliter les changements de perspectives.

L'étude du relief et le filtre des perspectives permettent de constituer une référence qui guide le chercheur dans son analyse des activités attendues des élèves qui interagissent avec toutes les ressources autour d'eux, y compris les discours des manuels et des enseignants. Elle nous sert aussi à analyser les traces d'activités effectives des élèves et étudiants et finalement à émettre des propositions curriculaires. En effet, la conceptualisation visée, en tant que processus aboutissant à une certaine disponibilité des connaissances sur un ensemble de tâches, dépend non seulement des tâches proposées et des déroulements, mais aussi de l'ordre choisi pour aborder les notions et de l'organisation des connaissances à construire qui peut en résulter. C'est la variabilité de cette organisation que nous allons explorer puis partiellement investir en fin d'article.

Du point de vue méthodologique, nous avons mené plusieurs enquêtes, à partir d'ouvrages d'historiens et épistémologues des mathématiques, d'analyses de programmes et de manuels. Les manuels nous renseignent à la fois sur les mathématiques à enseigner (les manuels mettent en œuvre les programmes officiels) et les mathématiques enseignées (en tant que ressources pour l'enseignant). Nous complétons notre étude par diverses observations d'élèves et de futurs enseignants (étudiants en master MEEF).

Nous restreignons nos analyses au secondaire dans lequel les notions de fonction et de suite sont introduites, c'est-à-dire à partir de la Troisième. Contrairement aux mots « discret » et « continu », le mot « dense » est absent des programmes officiels de ces niveaux d'enseignement. C'est pourquoi nous avons choisi, à ce stade de notre recherche, de guider nos analyses par les distinctions entre le discret et le continu, bien qu'un grain plus fin d'analyse, prenant par exemple en compte le dense entre le discret et le continu, pourrait être employé. Le dense joue malgré tout un rôle dans l'étude qui suit.

Par « suite » nous désignerons une suite numérique définie sur \mathbf{N} et par « fonction » une fonction réelle d'une variable réelle.

Nous désignerons par « représentation graphique » d'une fonction (resp. d'une suite) l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$, x appartenant à l'ensemble de définition de f (resp. $(n ; u_n)$, $n \in \mathbf{N}$) dans un repère du plan. Le mot « courbe » sera, selon l'usage au lycée, réservé aux représentations graphiques de fonctions continues sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de \mathbf{R} ; une courbe « lisse » désignera la courbe d'une fonction de classe C^1 .

La notion de suite est abordée en classes de Première et de Terminale (dans le cas des suites de nombres réels). Les programmes des séries ES (Economique et Sociale) et L (Littéraire) concernant les suites sont essentiellement des versions allégées de ceux de série S (Scientifique)³, c'est pourquoi nous nous bornons à l'analyse des programmes officiels et de manuels de la série S. De plus, les « contenus » et « capacités » qui sont les plus porteurs de possibles interactions entre les suites et les fonctions sont essentiellement présents au niveau de la Première et le texte a peu évolué entre 2000 et 2010 ; c'est pourquoi nos analyses portent sur le programme et les manuels de Première S de 2010.

2. Discret et continu : deux mondes dans lesquels se situent les activités

Que sont le discret et le continu ? La question concerne bien entendu les mathématiques. La poser aussi des points de vue épistémologique et historique permet de mieux identifier ce qui a présidé à leur développement, mais aussi ce qui a freiné celui-ci, dans le but de pouvoir les identifier dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées aujourd'hui, ainsi que dans les productions des élèves et étudiants, de mieux en comprendre les jeux et les enjeux d'enseignement. Dans cette visée, nous avons consulté des ouvrages d'historiens et épistémologues des mathématiques (Cousquer, 1994 ; Dhombres, 1978 ; Longo, 1999).

Le mot « discret » vient du latin *discretus* qui signifie séparé, isolé. L'être humain, dans l'action de comptage d'éléments d'une collection finie, dispose d'une expérience du discret ; celle du mouvement par sauts en est une autre.

Étymologiquement, le mot « continu » vient du latin *continuus* qui désigne ce qui est d'un seul tenant. L'individu dispose de multiples expériences du continu, citons-en quelques-unes :

³ Mis à part le prolongement des suites géométriques par les fonctions exponentielles en série ES, que nous n'aborderons pas ici, mais que nous avons analysé dans Rousse (2018).

- Celle du temps. Par exemple, le temps de la physique représenté sur un axe orienté présuppose un temps continu. Cependant, sa mesure par un instrument le discrétise. Ainsi s'expliquent les dénominations de « temps discret » et de « temps continu », déjà présentes dans le programme officiel de Terminale S de 2001, toujours là en 2019 dans celui de spécialité de Première, et qui témoignent de cette dualité ;
- Celle du mouvement sans saut d'un objet ;
- Celle du tracé d'une ligne au crayon, sans le lever. C'est d'ailleurs l'idée retenue pour la « définition » d'une fonction continue au lycée dans les manuels correspondants aux programmes officiels de Terminale générale de 2011 qui proposent une « *approche intuitive de la continuité* ». (Ministère de l'Education Nationale, 2011).

Nous avons mentionné *supra* que le temps peut se situer dans le discret ou dans le continu. C'est ainsi que, dès l'antiquité, deux conceptions s'opposaient dans les paradoxes de Zénon sur la nature des grandeurs temps et espace. Selon Dhombres (1978) et Cousquer (1994), les conceptions discrète et continue des grandeurs s'opposaient de deux façons possibles :

- La conception atomiste, selon laquelle le temps, l'espace seraient constitués d'éléments insécables s'oppose à la conception continuiste selon laquelle ils sont divisibles à l'infini ;
- Une opposition d'ordre quantitatif : selon la conception discrète, ces grandeurs seraient constituées d'un nombre fini d'éléments insécables alors que selon la conception continue, elles le seraient d'un nombre infini d'éléments insécables.

Ainsi, deux aspects permettraient de distinguer discret et continu :

- L'aspect 1, que nous nommons « avec ou sans sauts ». Aujourd'hui, cet aspect est formalisé dans les ensembles ordonnés par la notion d'ensemble dense en lui-même⁴, correspondant à la conception continuiste des grandeurs divisibles à l'infini présente dès l'antiquité. Dans les espaces topologiques, cet aspect est formalisé par les notions de point isolé et de point limite.
- L'aspect 2, quantitatif. Cet aspect inclut l'opposition fini-infini présente dès l'antiquité, ainsi que l'opposition infini dénombrable-infini indénombrable.

Aujourd'hui, d'un point de vue mathématique, la notion de discret est clairement définie : un espace topologique est discret lorsque ses points sont isolés. Ceci dépend

⁴ Un ensemble ordonné (E, \leq) est dit dense en lui-même si, pour tout couple $(x ; y)$ d'éléments de E tels que $x < y$ il existe un élément z de E tel que $x < z < y$.

de la topologie choisie. Un ensemble discret est donc un ensemble « avec sauts » (aspect 1). Des prototypes du discret sont les ensembles finis, les ensembles des entiers naturels et relatifs, les ensembles \mathbf{D}_n des décimaux à n décimales (qui sont infinis dénombrables, aspect 2). Une des propriétés des ensembles \mathbf{N} , \mathbf{Z} et \mathbf{D}_n est l'existence pour tout élément d'un unique successeur⁵.

Par ailleurs, il apparaît que le continu n'est à ce jour formalisé que pour les corps totalement ordonnés ; dans ce cas les ensembles continus sont isomorphes à l'ensemble des nombres réels⁶. Celui-ci est dense en lui-même (aspect 1) et il est infini indénombrable, son cardinal porte même le nom de « continu » (aspect 2).

Ainsi, les ensembles de nombres entiers naturels et de nombres réels sont prototypiques respectivement du discret et du continu. Les intervalles de \mathbf{R} , même s'ils ne peuvent pas être mathématiquement qualifiés d'ensembles continus selon la définition retenue⁷, présentent aussi les aspects 1 et 2 du continu : ils sont denses en eux-mêmes, leurs points sont tous des points limite et ils ont le même cardinal que \mathbf{R} . Ils relèvent bien de l'expérience du continu pour les élèves et étudiants, ne serait-ce que par leur tracé sans lever le crayon sur la droite des réels.

Le continu présente d'autres aspects mathématiques, dans Rousse (2018) nous en distinguons quatre ; nous ne présentons ici que les aspects 1 et 2 qui servent le propos de cet article. Quant aux décimaux et aux rationnels, ils ne présentent pas de saut (ils sont denses en eux-mêmes et n'ont pas de point isolé pour la topologie naturelle). Par conséquent, ils ne sont pas discrets pour la topologie usuelle ; et bien qu'ils présentent l'aspect 1 du continu et qu'ils soient infinis (aspect 2), ils ne sont pas continus⁸.

Les activités mathématiques possibles des élèves peuvent, selon les aspects mathématiques et les perspectives qu'elles mettent en fonctionnement, selon les expériences qu'elles véhiculent, s'inscrire dans le discret ou dans le continu. Prenons pour exemple une notion mathématique à la présence récurrente dans la scolarité des élèves : la droite. Elle est prototypique du continu : pour ce qui est des

⁵ La notion de successeur est à la base de l'axiomatisation de \mathbf{N} par Peano (1889).

⁶ Nous ne retiendrons que cette définition mathématique d'ensemble continu ; des auteurs utilisent localement une définition (par exemple Choquet (2000) définit les ensembles continus dans son cours de topologie par les ensembles compacts connexes, définition que nous n'adoptons pas car elle exclut \mathbf{R}).

⁷ En effet, les intervalles strictement inclus dans \mathbf{R} ne sont pas des corps ; cependant nous avons montré dans Rousse (2018) qu'ils sont largement mobilisés dans les tâches et les déroulements au lycée dans le but d'orienter les activités des élèves vers le monde du continu.

⁸ Ainsi, la densité ne caractérise pas le continu.

mathématiques (il est même question de « la droite des réels »), comme de l'expérience (l'individu la trace sans lever le crayon). La droite est alors perçue globalement et nous faisons l'hypothèse que la perspective globale peut situer les activités des élèves dans le continu. Cependant, la droite peut être aussi perçue comme un ensemble de points et nous faisons ici l'hypothèse que la perspective ponctuelle peut plutôt situer les activités dans le discret. Ainsi, les perspectives ponctuelle et globale et les expériences du discret et du continu cohabitent lorsque le travail des élèves relève :

- Du cadre géométrique : par exemple lorsqu'une transformation opère sur des points d'une droite vs lorsque l'on considère l'image de la droite par cette transformation ;
- Du cadre numérique, avec le registre graphique. En effet, la droite munie d'un repère, communément nommée « droite numérique », joue le rôle de frise des nombres entiers positifs au primaire. Puis elle sert de support intuitif du continu des nombres réels au secondaire – bien qu'étant essentiellement mobilisée pour représenter des entiers, quelques décimaux et rationnels ;
- Du cadre fonctionnel ; par exemple dans la définition d'une fonction affine f : à chaque x (de \mathbf{R}) on associe $f(x)$, vs lorsque x décrit \mathbf{R} , on associe $f(x)$ à x^9 .

Cependant, au collège et au lycée, le discret et le continu ne se constituent pas en tant que cadres : à ce niveau d'enseignement il n'y a pas de définition possible, peu de propriétés sont explicitables, discret et continu ne font l'objet d'aucune tâche spécifique. Les activités ne se font pas *sur* le discret ou *sur* le continu, mais *dans* le discret ou *dans* le continu.

Nous avons choisi d'utiliser le mot « monde » pour situer les activités relativement au discret et au continu. Le tableau 1 récapitule nos exemples d'expériences individuelles, d'ensembles de nombres et de notions mathématiques, les aspects mathématiques et les perspectives susceptibles de situer les activités des élèves dans l'un ou l'autre monde.

Au secondaire, compte tenu de la nature de leurs ensembles de définition (les suites sont définies sur \mathbf{N} , les fonctions sont le plus souvent définies sur un intervalle de \mathbf{R}), on peut considérer dans une première approche que la mobilisation des suites et des fonctions situe les activités des élèves respectivement dans le monde du discret et dans celui du continu. Par ailleurs, ne dit-on pas que les suites fournissent des modèles discrets et les fonctions des modèles continus ? Pourtant ce n'est pas si simple puisque les suites numériques sont aussi des fonctions ; elles sont définies sur

⁹ Définitions rencontrées au cours de nos analyses de manuel.

l'ensemble discret des entiers naturels, mais prennent leurs valeurs dans l'ensemble continu des réels ; l'ensemble des termes d'une suite n'est d'ailleurs pas nécessairement discret – il ne l'est pas dès lors que la suite a une limite sans être stationnaire à partir d'un certain rang, cas le plus répandu au lycée. Nous verrons que ce n'est pas si simple non plus dans le thème des fonctions définies sur un intervalle de \mathbf{R} : les activités possibles n'y relèvent pas seulement du monde du continu.

Tableau 1. Exemples relevant des mondes du discret et du continu au lycée

Convocation de...	Monde du discret	Monde du continu
Expériences individuelles	Grandeurs discrètes (dont temps) Comptage Points isolés Mouvement « par sauts »	Grandeurs continues (dont temps, espace) Tracé sans lever le crayon Mouvement continu
Aspect mathématique 1 – ensemble ordonné	Successeur	Ensemble dense en lui-même
Aspect mathématique 1 – espace topologique	Points isolés	Points limite
Aspect mathématique 2 – quantitatif	Fini Infini dénombrable	Infini Infini indénombrable
Perspectives	Ponctuelle	Globale
Ensembles de nombres	Ensemble fini, \mathbf{N} , \mathbf{D}_n	\mathbf{R} et ses intervalles
Notion de droite au secondaire	Droite : ensemble de points	Droite considérée dans sa globalité

Nous avons constaté le rôle que peut jouer le registre graphique dans l'articulation des deux mondes. En particulier, un nombre fini de points étant connu, les relier situe *a priori* l'activité associée dans le monde du continu, ne pas les relier la situe dans le monde du discret. D'où l'attention portée dans nos analyses à la façon dont les tâches incluant des représentations graphiques sont travaillées : un « petit » nombre de points d'une représentation graphique (de suite, de fonction) étant connu, les relie-t-on ou non, si oui comment ? De la façon dont ces tâches sont travaillées découle ce qui différencie pour les élèves du secondaire un ensemble de points à abscisses entières positives d'un ensemble de points dont les abscisses décrivent un intervalle de \mathbf{R} . Cela peut jouer sur ce qui peut distinguer pour eux les suites numériques des fonctions définies sur un intervalle de \mathbf{R} .

En résumé, dans le but de déterminer dans quelle mesure les activités des élèves sur les suites et les fonctions sont susceptibles de s'inscrire dans le monde du discret ou celui du continu, nous repérons au fil de nos analyses essentiellement :

- Les ensembles de nombres mobilisés, ici nombres entiers vs intervalles de \mathbf{R} ;
- L'aspect 1 : avec ou sans sauts ;
- L'aspect 2, quantitatif, ici : fini vs infini, ou infini dénombrable de \mathbf{N} vs infini indénombrable des intervalles de \mathbf{R} ;
- Les perspectives ponctuelle et globale convoquées ;
- Les grandeurs en jeu dans les modélisations par les fonctions et les suites ;
- Le vocabulaire et les notations associés au discret et au continu ;
- Les traitements dans le registre graphique, ici : points isolés vs courbe.

3. Dans quels mondes les programmes officiels sur les suites et les fonctions situent-ils les activités des élèves au collège et au lycée ?

Nous présentons dans cette partie les résultats d'une analyse de programmes officiels de 1999 à 2018. La sous-partie 3.1 a pour objet l'introduction des fonctions en classes de Troisième et de Seconde. La sous-partie 3.2 présente l'introduction des suites en classe de Première, alors que les fonctions définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de \mathbf{R} restent explicitement présentes à ce niveau d'enseignement. C'est pourquoi nous y abordons suites et fonctions sous l'angle de leurs éventuelles analogies.

3.1. Les fonctions en Troisième et en Seconde

En 1999 (Ministère de l'Education Nationale, 1998), seules la fonction linéaire et la fonction affine sont introduites en classe de Troisième, en tant que « *processus de correspondance* », définition porteuse de la perspective ponctuelle et situant plutôt les activités des élèves dans le discret selon notre hypothèse émise en section 2.

Dans les deux programmes officiels de Troisième suivants (Ministère de l'Education Nationale, 2008 et 2015), la notion de fonction est introduite dans une relative généralité, dégagée du cas particulier des fonctions affines.

En 2008, la fonction y apparaît toujours comme un « *processus de correspondance* ». Les fonctions doivent cependant être « *déterminées par une courbe, un tableau de données ou une formule* » (Ministère de l'Education Nationale, 2008). Or, dans le cas où ces fonctions sont définies sur un intervalle de \mathbf{R} (ce qui est le plus souvent le cas en Troisième et au lycée), il est erroné de pouvoir les déterminer par un tableau de données dès lors qu'elles ne sont pas des fonctions de référence connues des élèves (par conséquent connues à un ou des paramètres près). Dans le registre graphique, l'éventuel prolongement correspondant revient à dire que la donnée d'un nombre fini de points d'une courbe de fonction continue sur un intervalle permet de

définir cette courbe de façon univoque. Les activités possibles des élèves associées à ce registre se situent donc *a priori* dans le monde du continu puisque les courbes se tracent « sans lever le crayon ». Cependant, il n'est pas certain que les quelques valeurs prises par la variable dans les tableaux de valeurs soient effectivement perçues par les élèves comme des cas particuliers de nombres de l'intervalle de définition ; leurs activités peuvent rester dans le monde du discret.

En Troisième en 2015, les fonctions apparaissent comme un outil de modélisation de phénomènes continus (elles sont donc implicitement continues sur un intervalle), en plus d'un « *processus de correspondance* » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2015). Les activités possibles des élèves peuvent donc relever du continu en référence au phénomènes modélisés, mais peuvent aussi rester dans le monde du discret de par le point de vue de correspondance entre un nombre et son image. La question de relier ou non les points ne se pose plus, reste éventuellement celle de la façon dont ils sont reliés.

Le programme officiel de Seconde de 2001 préconise de donner « *quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini* » (Ministère de l'Éducation Nationale, 2001). Celui de 2009 (Ministère de l'Éducation Nationale, 2009) ajoute le cas des fonctions définies sur \mathbf{N} . Cependant, dans l'aménagement de programme de mai 2017, l'étude des fonctions définies sur un ensemble discret est abandonnée. Implicitement, seule l'étude de fonctions définies sur des intervalles de \mathbf{R} (voire une réunion finie d'intervalles de \mathbf{R}) subsiste ; de plus, la notion de fonction ne figure plus qu'en tant qu'outil de modélisation permettant de résoudre des problèmes issus de phénomènes continus, ancrant potentiellement les activités des élèves dans le continu.

Conjointement, en 2009, la notion d'ensemble de définition d'une fonction disparaît et le tableau de valeurs apparaît comme pouvant caractériser une fonction (implicitement définie sur un intervalle) – dans les mêmes termes que pour la classe de Troisième. La question se pose à nouveau : dans quel monde les activités des élèves sur les fonctions s'inscrivent-elles effectivement en seconde ?

3.2. Les suites en Première et les analogies avec les fonctions

Localement, dans cette sous-partie et selon l'usage prédominant au lycée, « fonction » fait référence à une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle de \mathbf{R} , par opposition à « suite ».

Nous y désignons par « notions analogues » des notions qui présentent des similarités, que ce soit dans le vocabulaire ou les notations, la forme algébrique, ou le procédé sous-jacent. Les définitions, théorèmes et propriétés peuvent être identiques aux notations près.

Compte tenu du sujet de cet article, nous présentons les définitions, notations, propriétés et techniques liées à l'introduction des fonctions (en Troisième et en Seconde), suivie de celle des suites qui figure aux programmes officiels de la classe de Première (Ministère de l'Éducation Nationale, 2000 et 2010) ; nous ne développons pas les notions de limite et de continuité, de suite et fonction convexes, de suite géométrique et de fonction exponentielle, et n'abordons pas le raisonnement par récurrence.

3.2.1 Notions de suite et de fonction : définitions

Par définition, une fonction définie sur un intervalle est une correspondance qui associe à tout nombre de cet intervalle un unique réel, son image. De ce fait, au lycée, hors de tout contexte (intra ou extra mathématique), en dehors de cas particuliers, une fonction définie sur un intervalle I peut être définie de deux manières : soit par l'expression algébrique, pour tout $x \in I$, de $f(x)$, soit par son graphe¹⁰ (par l'intermédiaire, dans le registre graphique, de sa représentation graphique dans un repère, nous y reviendrons). Comme nous avons déjà dit, l'utilisation de la première définition met en jeu la perspective ponctuelle et peut ancrer les activités dans le discret tandis que la définition par la représentation graphique permet d'ancrer les activités dans le continu.

La notion de suite numérique peut être définie quant à elle de deux façons qui véhiculent des points de vue différents :

- Une suite numérique est une liste infinie dénombrable, ordonnée, de nombres réels (le premier terme, le deuxième terme, etc.) ;
- Une suite numérique est une fonction réelle définie sur \mathbf{N} .

La première définition repose sur l'existence, pour chaque entier naturel, de son unique successeur. En cela, elle s'inscrit dans le discret et n'a pas d'analogue pour définir la notion de fonction définie sur un intervalle de \mathbf{R} .

La deuxième définition véhicule le double point de vue de processus de correspondance et de dépendance d'une variable en fonction d'une autre, l'ensemble de définition étant discret dans le cas des suites et d'aspect continu dans le cas des fonctions définies sur un intervalle.

¹⁰ Le graphe d'une fonction f définie sur un ensemble D est défini par $\{(x ; f(x)), x \in D\}$. Cette notion ne figure pas au programme officiel du lycée.

Les termes d'une suite peuvent eux aussi être définis de deux façons : par une relation de récurrence (en plus d'un ou plusieurs termes) ou en fonction de n (nous désignons par « définition explicite » ce type de définition d'une suite).

Le premier type de génération des termes d'une suite s'inscrit bien entendu dans le discret en ce qu'il repose sur la notion de successeur. Dans les cas les plus simples, la relation de récurrence exprime un terme en fonction de son prédécesseur et la forme algébrique de cette relation permet d'écrire qu'il existe une fonction réelle d'une variable réelle g telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. Nous nommerons g : « fonction qui génère la suite ».

Dans l'autre type de génération, les termes d'une suite sont définis *en fonction* de n . Lorsque f est une fonction réelle définie sur $[0 ; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$, nous la nommerons « fonction qui définit ». Notons qu'elle n'est pas unique, mais son expression algébrique permet d'identifier l'une d'elles. Dans certains cas, il n'existe pas de « fonction qui définit »¹¹.

Ainsi dans le thème des suites, les termes peuvent être définis *en fonction* de n ; des fonctions qui définissent et des fonctions qui génèrent coexistent ; de plus les suites sont des fonctions définies sur \mathbf{N} , qui ne se distinguent des fonctions qui définissent une suite que par leur ensemble de définition. Ceci peut amener des confusions entre suites et fonctions et contribuer à situer les activités sur le thème des suites dans les deux mondes s'ils ne sont pas clairement identifiés par les élèves.

Les définitions relatives aux suites et aux fonctions et leurs éventuelles analogies sont résumées dans le tableau 2¹².

¹¹ C'est le cas de la suite de terme général $(-1)^n$.

¹² Légende pour les tableaux :

- an. : notions, définitions, notations, propriétés, théorèmes ou techniques analogues
- id. : définitions, propriétés, théorèmes équivalents ; notations identiques
- impl. : implications – la réciproque est fautive si pas de signe d'équivalence
- rien : notions, définitions, notations, propriétés, théorèmes sans analogue ou avec analogue erroné

Tableau 2. Suites et fonctions : définitions

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de suite (définition) : liste infinie de réels indexée par les entiers naturels		Pas de définition analogue
Notion de suite (définition) : à tout $n \geq n_0$ est associé un réel	id.	Notion de fonction (définition) : à tout x d'un intervalle de \mathbf{R} est associé un réel
Notion de suite (définition) : dépendance d'une variable réelle en fonction d'une variable numérique discrète	id.	Notion de fonction (définition) : dépendance d'une variable réelle en fonction d'une variable numérique continue
Définition des termes par récurrence		Pas de définition analogue
Définition des termes en fonction de n	id.	Définition de $f(x)$ en fonction de x

3.2.2 Notations

La notation usuelle du terme général d'une suite u est u_n ; il est cependant possible d'utiliser la notation fonctionnelle $u(n)$, qui est d'ailleurs celle des calculatrices graphiques des élèves du lycée (voir tableau 3). Les programmes officiels de lycée en vigueur jusqu'en 2018 ne spécifient pas les notations à adopter.

Tableau 3. Suites et fonctions : notations

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notation : $u(n)$	an.	Notation : $f(x)$
Notation : u_n		Pas de notation usuelle analogue

3.2.3 Représentations graphiques

Les suites étant des fonctions définies sur \mathbf{N} , la notion de graphe est identique pour les suites et les fonctions. Cependant, les représentations graphiques des suites (resp. des fonctions définies sur un intervalle, qui y sont généralement continues) sont porteuses des expériences et aspects du discret (resp. du continu) : une suite peut être représentée dans un repère en dimension 2 par l'ensemble des points isolés de coordonnées $(n ; u_n)$ tandis qu'une représentation de fonction continue se fait sans lever le crayon. Les représentations graphiques d'une suite et d'une fonction continue qui définit, si elle existe, cette suite, sont liées en ce que les points isolés représentant la suite se situent sur la représentation graphique de cette fonction qui la définit. Ceci peut amener une absence de distinction entre la suite et la fonction en question et, à nouveau, situer les activités conjointement dans les deux mondes.

Récapitulons dans le tableau 4 :

Tableau 4. Suites et fonctions : graphe et représentation graphique

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de graphe d'une suite (définition)	id.	Notion de graphe d'une fonction (définition)
Représentation graphique en dimension 2 : points isolés		Représentation graphique en dimension 2 : points généralement « reliés »

3.2.4 Suite des accroissements ; dérivée

Les notions de suite et de fonction comportent davantage que des analogies puisque les suites sont des fonctions définies sur \mathbf{N} . Ce n'est pas le cas des notions de suite des accroissements et de fonction dérivée en un point.

Cependant, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{1} = \frac{u_{n+1} - u_n}{n+1-n}$ est un taux d'accroissement entre deux valeurs consécutives d'une suite. De façon imagée, les termes de la suite des accroissements et les nombres dérivés sont, compte tenu de la nature de la variable qui appartient à un ensemble discret dans un cas et d'aspect continu dans l'autre, « des taux d'accroissement on ne peut plus proches¹³ ». (Tableau 5).

Tableau 5. Suites et fonctions : accroissement et dérivée

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Notion de suite des accroissements $u_{n+1} - u_n$	an.	Notion de fonction dérivée

3.2.5 Sens de variation

Les deux notions analogues de suite des accroissements et de fonction dérivée en un point permettent, par une recherche de signe, de déterminer un sens de variation.

Les programmes officiels ne spécifient pas quelle définition du sens de variation d'une suite est attendue. Or deux énoncés équivalents caractérisent la stricte croissance d'une suite :

¹³ Cela a par exemple pour conséquence, en économie, sous certaines conditions, d'approcher le coût marginal pour une production discrète par la dérivée de la fonction qui modélise le coût.

- $(\forall n \in \mathbf{N}, u_n < u_{n+1})$, énoncé habituel au lycée comme dans le supérieur. Il est de type ponctuel universel et fait intervenir tout terme et son successeur ; en cela il s'inscrit clairement dans le monde du discret ;
- $(\forall n \in \mathbf{N}, (\forall p \in \mathbf{N}, \text{si } n < p \text{ alors } u_n < u_p))$ est l'énoncé de la stricte croissance d'une fonction, doublement quantifié, restreint à \mathbf{N} . Il s'inscrit également dans le discret.

La démonstration de l'équivalence des deux énoncés est à la portée d'un élève de Terminale, mais pas d'un élève de Première du fait qu'elle comporte un raisonnement par récurrence. Choisir le premier énoncé en tant que définition en classe de Première n'exclut pas de « donner une intuition » aux élèves de ce que le premier énoncé implique le second et de montrer avec eux que le second implique le premier. Cela présente l'intérêt :

- De légitimer l'utilisation du vocabulaire commun aux suites et aux fonctions quant à leur sens de variation (« sens de variation », « croissant », « décroissant », « monotone » sont utilisés pour les unes comme pour les autres) ;
- De justifier la propriété mobilisée dans la résolution de certaines tâches au lycée : si (u_n) est croissante alors pour tout $n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$.

Un analogue de la définition classique de la stricte croissance d'une suite pourrait être, pour une fonction définie sur un intervalle I de \mathbf{R} : $\forall x \in I, f(x+1) > f(x)$. Cet énoncé ne constitue pas une définition de la stricte croissance de la fonction f sur I ; nous verrons comment des élèves de Première S et des étudiants en Master MEEF s'en emparent dans la partie 5.

Au lycée (général), la recherche du sens de variation d'une suite mobilise le plus souvent une des techniques suivantes :

- La recherche du signe de la différence de deux termes consécutifs ;
- La comparaison du quotient de deux termes consécutifs à 1 dans le cas d'une suite à termes strictement positifs ;
- La propriété : si une fonction f est monotone sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite de terme général $f(n)$ a le même sens de variation que f .

Les deux premières techniques insèrent les activités possibles dans le monde du discret en ce qu'elles reposent sur l'existence de termes consécutifs. La troisième mobilise un va-et-vient entre les mondes du discret et du continu (figure 1).

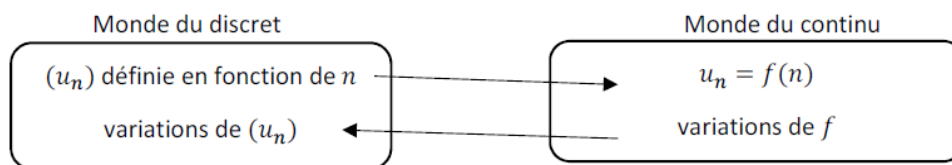


Figure 1. Mobilisation d'une fonction dans la recherche du sens de variation d'une suite

Le changement de notation usuel, de u à f , souligne que l'un désigne un objet « suite » et l'autre un objet « fonction » (sous-entendu comme étant définie sur un intervalle). Ce qui permet de mobiliser des propriétés de monotonie de fonctions de référence, de certaines fonctions composées (voir *infra*) ou les outils de calcul différentiel.

Les élèves peuvent ne voir dans ce changement de notation qu'une habitude puisqu'ils effectuent des calculs de dérivées de fonctions le plus souvent nommées f , et se demander pourquoi ne pas tout simplement calculer $f'(n)$. Cette incursion dans le monde du continu à partir de celui du discret peut échapper aux élèves qui n'y verraient alors qu'un jeu de symboles.

En Première S, les élèves peuvent dans certains cas trouver le sens de variation d'une fonction composée en mobilisant les propriétés qui figurent dans le thème des fonctions (figure 2).

Sens de variation des
fonctions $u + k$, λu , \sqrt{u} et
 $\frac{1}{u}$, la fonction u étant
connue, k étant une fonction
constante et λ un réel.

Figure 2. Extrait du programme officiel de Première S (Ministère de l'Education Nationale, 2010, p.2)

La notation u choisie pour énoncer ces propriétés peut prêter à confusion puisque u est aussi le nom de la suite de terme général u_n dans les mêmes programmes officiels. Cela concourt sans doute à « brouiller les repères ».

Récapitulons (tableau 6) :

Tableau 6. Suites et fonctions : sens de variation

Suites		Fonctions définies sur un intervalle
Monotonie (définition - cas stricte croissance) : $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} > u_n$		Définition analogue fausse
Monotonie (définition équivalente - cas stricte croissance) : $\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, n > p \Rightarrow u_n > u_p$	id.	Monotonie (définition - cas stricte croissance) : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,$ $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$
Monotonie (technique) : recherche du signe des accroissements $u_{n+1} - u_n$	an.	Monotonie (technique) : recherche du signe de la dérivée
La suite de terme général $f(n)$ est croissante	impl.	La fonction f est croissante (implique...)
Propriété : monotonie de $\lambda u, u + k, \sqrt{u}, 1/u$ connaissant la monotonie de u	id.	Propriété : monotonie de $\lambda f, f + k, \sqrt{f}, 1/f$ connaissant celle de f

3.3. Conclusion de la partie 3

Dans les deux dernières décennies, la fonction et sa représentation graphique sont envisagées par les programmes officiels de Troisième et de Seconde comme des outils d'étude de phénomènes, discrets ou continus dans un premier temps, puis uniquement continus. La fonction a d'emblée des aspects continus :

- Elle est généralement définie sur un intervalle de \mathbf{R} ;
- Elle est à valeurs dans \mathbf{R} ;
- Elle est un outil de modélisation de phénomènes continus ;
- Elle est donc continue.

Parallèlement, les tâches au sein desquelles les mondes du discret et du continu peuvent interagir se raréfient, en particulier celles qui questionnent explicitement la façon dont des points isolés sont reliés pour obtenir un tracé de courbe. Ainsi, le thème des fonctions est plongé dans ce qui apparaît comme un « tout continu » implicite qui semble aller de soi. Mais les fonctions sont définies comme un processus de correspondance et un travail sur les notions d'image et d'antécédent est attendu, dans les registres algébrique et graphique, ce qui peut situer certaines activités sur le thème des fonctions dans le monde du discret.

En classe de Première, les tâches faisant intervenir la notion de successeur sont susceptibles d'inscrire les activités sur les suites dans le monde du discret.

Cependant, la notion de suite peut être abordée de deux points de vue (l'un d'entre eux est qu'une suite est une fonction définie sur \mathbf{N}) ; hors contexte, les suites peuvent être générées de deux façons (toutes deux en interaction avec les fonctions) ; deux notations du terme général d'une suite sont correctes (dont l'une est fonctionnelle). Par ailleurs, les analogies entre suites et fonctions définies sur un intervalle sont nombreuses (parfois erronées) et le vocabulaire est en partie commun. Une des techniques de recherche du sens de variation d'une suite situe les activités dans un va-et-vient entre les deux mondes. Leur non-distinction peut renforcer la confusion entre suites et fonctions et contribuer aux difficultés des élèves sur ces deux notions.

Dans ce qui suit, nous analysons comment les manuels de la période correspondante s'emparent de ces programmes officiels et dans quel(s) monde(s) ils inscrivent les activités mathématiques proposées sur les thèmes des suites et des fonctions.

4. Suites et fonctions lors de leurs introductions au collège et au lycée, dans quel(s) monde(s) ? Les manuels

4.1. Manuels de Troisième et de Seconde

4.1.1 En troisième

Nous synthétisons ici l'analyse de cinq manuels de Troisième de (Rousse, 2018).

Au cours des 20 dernières années, les tâches concernant la question « relier ou non les points ; si oui, comment ? » se raréfient. À ce propos, les choix des manuels de 2008 sont explicites et diffèrent de l'un à l'autre : l'un d'eux préconise de relier les points par des courbes lisses, l'autre de ne pas les relier. Les choix des manuels de 2016 (dans lesquels les points sont reliés) sont, eux, implicites. Par ailleurs, les représentations graphiques qui sont données dans les expositions de connaissances et les énoncés d'exercices sont toutes des courbes lisses. Rares jusqu'en 2008, les tâches de tracés de courbes à la main sont quasi absentes en 2016 (à part les représentations graphiques de fonctions affines).

Malgré l'évolution des programmes, les fonctions restent outils de modélisation de phénomènes discrets (du type « offre tarifaire ») comme de phénomènes continus. Depuis le programme de 2008, le domaine d'adéquation d'un modèle continu d'un phénomène discret n'est pas abordé et les résultats de modèles qui « ne tombent pas juste » et qui demandent un travail d'interprétation en contexte ont disparu des manuels. Les valeurs de la variable (et celles de leurs images) sont par conséquent essentiellement des entiers strictement positifs ; c'est aussi le cas dans les exercices sans modélisation.

Ainsi, les tâches pouvant provoquer des activités se situant dans les deux mondes en interaction et permettant d'en expliciter des spécificités disparaissent. Comment dès lors les élèves pourraient-ils les identifier ?

4.1.2 En Seconde

Nous avons analysé les chapitres concernant les généralités sur les fonctions de quatre manuels de Seconde édités entre 2000 et 2010 (Rousse, 2018).

Ils définissent tous la fonction par un processus de correspondance. Le vocabulaire concernant la variable (nommée x) diffère cependant : dans les manuels de 2000 et de 2005, il est écrit de surcroît que x « décrit » l'ensemble de définition, ce qui véhicule une perspective globale associée au monde du continu. Mais les manuels de 2010 écrivent que la fonction « associe à chaque » x son image, l'emploi du mot "chaque" véhiculant une perspective ponctuelle associée au monde du discret.

Les fonctions à variables discrètes sont présentes dans chaque manuel ; la place qui leur est faite, leur représentation graphique, les questions abordées à leur propos diffèrent cependant largement d'un manuel à l'autre. En particulier, les représentations graphiques sont abordées différemment selon les manuels :

- Les manuels de la collection « Math'x » explicitent le fait que la représentation graphique d'une variable discrète est un ensemble de points isolés ; les activités possibles des élèves se situent clairement dans le monde du discret ;
- Les autres manuels, l'un de 2000 et l'autre de 2010, ne montrent des représentations graphiques de variables discrètes que dans des contextes d'évolution d'un phénomène au cours du temps. Les points sont reliés par des segments : la représentation graphique est alors un modèle continu d'un phénomène discret. En l'absence de discours clair de la part de l'enseignant, les activités possibles des élèves autour de ces représentations graphiques peuvent se situer dans l'un ou l'autre monde (ou les deux à la fois ?).

Par opposition aux manuels de collège, ceux de Seconde abordent dans quelques exercices ciblés le fait que la donnée des $f(n)$, où n prend un « petit » nombre de valeurs entières, n'est pas équivalente à celle des $f(x)$, où x appartient à un intervalle de \mathbf{R} .

Comme en Troisième, les fonctions présentées dans les expositions de connaissances et les exercices sont majoritairement continues sur un intervalle ; cependant, même quand la variable est continue, les nombres mobilisés dans les tâches numériques et dans les lectures graphiques sont pour la plupart entiers. Les activités des élèves peuvent donc se situer à la fois dans les mondes du continu et du discret.

4.2. Manuels de Première

Nous avons analysé trois manuels de Première S qui mettent en œuvre le programme paru en 2010 (Rousse, 2018).

Les manuels font des choix différents sur de nombreux points, en voici trois qui servent notre propos.

Les manuels « Math'x » et « Sésamath » proposent quelques tâches variées sur la représentation graphique d'une suite par l'ensemble de points de coordonnées $(n ; u_n)$. La toute première met en scène une situation discrète et deux représentations graphiques dont l'une est « continue » et l'autre « discrète », parmi lesquelles il est demandé de choisir. Ces mêmes manuels comportent quelques tâches de construction de ce type de représentation graphique ; ils l'utilisent afin d'illustrer les notions de sens de variation et de limite et d'émettre des conjectures. Pour sa part, le manuel « Transmath » ne le mobilise que pour illustrer les notions de sens de variation et de limite.

Les trois manuels diffèrent aussi dans l'explicitation de la propriété d'une suite croissante : « pour tout $n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0}$ » qui ne figure explicitement que dans l'un d'eux ; ce même manuel la mobilise 12 fois dans les tâches (elle l'est 21 fois dans un autre et 2 fois dans un troisième). Le fait que l'on ne s'interroge pas sur cette propriété, alors que sa forme algébrique est analogue à celle de la définition de la croissance d'une fonction, peut contribuer à brouiller les pistes entre les mondes du discret et du continu.

Malgré sa place dans le programme officiel, la modélisation de phénomènes discrets et continus par les suites ne fait l'objet d'un discours explicite que dans un des manuels.

Les manuels font des aussi des choix identiques : dans les définitions (une suite est une fonction définie sur \mathbf{N}) et les notations ; les tâches sur les suites sont essentiellement cantonnées au registre algébrique. Ils situent les activités attendues des élèves dans l'un ou l'autre monde en mobilisant les supports décrits dans la partie 2 : les ensembles de définition (essentiellement \mathbf{N} par opposition à \mathbf{R} et ses intervalles) ; les suites par opposition aux fonctions par l'intermédiaire du vocabulaire (mots : suite/fonction) et des notations associées (u/f et n/x ; notation indicée pour les suites) ; les notions de successeur et de prédécesseur qui n'ont pas d'équivalent dans le continu (par exemple la relation de récurrence « *permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant* ») ; épisodiquement une représentation graphique faite de points isolés par opposition à une courbe lisse.

4.3. Conclusion de la partie 4

En Troisième et en Seconde, conformément aux programmes officiels, les chapitres dédiés aux fonctions placent, à de rares exceptions près, les activités possibles des élèves dans le monde du continu ; les tâches qui permettent d'explicitier les deux mondes se sont raréfiées pour devenir quasi inexistantes. En particulier, les tracés à la main de courbes (qui véhiculent l'expérience du continu) disparaissent au profit de courbes lisses déjà tracées.

Cependant, au travail sur les notions d'image et d'antécédent qui situe l'activité dans le monde du discret, s'ajoute la prédominance de l'utilisation de nombres entiers strictement positifs. Les entiers, qui sont les valeurs les plus simples du continu de \mathbf{R} , pourraient progressivement devenir emblématiques de ce continu.

Dans ces conditions, on peut se demander si les activités effectives des élèves de Troisième et de Seconde concernant les fonctions ne s'inscrivent pas, dans le même temps, dans les mondes (non distingués explicitement) du continu et celui du discret.

En Première, ce sont en grande partie les notations (f et x vs u et n) qui semblent attester de la notion mobilisée. Or la génération des termes d'une suite par leur définition en fonction de la variable n est analogue à la définition d'une fonction par son expression algébrique ; les rares exemples de fonctions définies sur \mathbf{N} proposés en Seconde et de représentations graphiques par points isolés par opposition à points reliés en Première suffisent-ils à établir les liens et la distinction entre les deux notions ? Ces représentations graphiques, déjà tracées dans les manuels, ne permettent pas l'expérience individuelle du tracé à la main de quelques points (monde du discret) par opposition au tracé de points reliés (monde du continu).

Les suites sont, en effet, essentiellement travaillées dans le registre algébrique. C'est en particulier vrai pour les tâches dans lesquelles suites et fonctions interagissent. Or ce registre ne porte que la perspective ponctuelle ; par conséquent les activités, qu'elles mobilisent des suites ou des fonctions, s'inscrivent en grande partie dans le monde du discret.

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons nous demander :

- ce qui distingue, pour un élève de lycée, une suite u telle que pour tout n , $u_n = f(n)$, et « la » fonction f qui la définit ;
- si les activités d'un élève associées aux fonctions définies (voire continues) sur un intervalle de \mathbf{R} se situent effectivement dans le monde du continu.

Nous apportons quelques éléments de réponse dans la partie suivante.

5. Analyses de productions d'élèves de première et d'étudiants de Master MEEF

Dans cette partie, nous exposons d'abord deux exemples de productions d'élèves de Première S, l'une dans le registre algébrique et l'autre dans le registre graphique. Ces exemples illustrent des confusions possibles entre les notions de suite et de fonction telles que nous en avons décrit dans les parties 3 et 4.

Une tâche proposée à des élèves de Première S et des étudiants en première année de master MEEF¹⁴ parcours mathématiques est l'objet de la deuxième sous partie : après une analyse *a priori* de la tâche et des activités attendues des élèves et étudiants, nous présentons leurs réponses. Nos analyses sont guidées par les éléments mis en lumière dans les parties 2, 3 et 4.

5.1. Élèves de Première : observations préliminaires

Le registre algébrique est porteur de confusion entre suites et fonctions : que l'ensemble de définition soit discret ou continu, la forme algébrique définirait l'objet. Nous en avons donné en introduction quelques exemples, issus de Vandebrouck (2011) et Fernandez-Plaza et al. (2016). D'autres exemples figurent dans Rousse (2018), voici l'un d'eux (figure 3).

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{u_n}{4} \end{cases}$
 c'est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$

b) $u_n = \frac{2n-1}{3}$; ce n'est pas une suite mais une fonction.

c) $u_n = (n+1)^n$, c'est aussi une fonction.

Figure 3. Exemple de production d'un élève de Première S

Il s'agit d'un extrait de copie d'élève de Première S. Il répond à la question : « dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une suite géométrique, d'une suite arithmétique, ni l'un ni l'autre ». Lorsque la suite est définie de façon explicite, l'élève estime qu'il s'agit d'une fonction, pas d'une suite (et donc, ne répond pas à la question). La forme algébrique, *en fonction* de n , aiguille l'élève vers le thème des fonctions qui, pour

¹⁴ MEEF est l'acronyme de « Métiers de l'enseignement, de l'Éducation et de la Formation ». En France, le Master MEEF parcours mathématiques prépare au métier d'enseignant de mathématiques du second degré.

lui, est disjoint de celui des suites ; par contre, la présence d'une relation de récurrence inscrit clairement son activité dans le monde du discret et l'aiguille vers le thème des suites.

Bien que (peut-être aussi *puisque*) peu de tâches mobilisent le registre graphique dans le thème des suites, c'est un registre lui aussi porteur de non-distinction entre suite et fonction. En voici un exemple provenant d'un entretien avec un élève de Première S après un devoir surveillé dans lequel sa copie montrait une confusion entre une suite (h_n) et « la » fonction f qui la définit. Dans l'extrait du récit de cet entretien qui suit, il est question de déterminer le sens de variation de la suite (h_n) en utilisant le sens de variation de f :

L'élève s'étonne de ce que l'écriture $h(n) = f(x)$ ne soit pas correcte. Il ne voit pas le problème « puisque le but est d'utiliser la dérivée ». Nous lui faisons remarquer que la suite est définie sur \mathbf{N} et lui posons la question de l'existence d'une dérivée pour une fonction définie sur \mathbf{N} . L'élève ne voit toujours pas de problème puisqu'« on imagine la courbe lorsqu'on place les points à coordonnées entières, la courbe a des tangentes donc il y a une dérivée ».

L'élève ne voit aucun inconvénient à dériver une fonction définie sur \mathbf{N} . Le registre graphique sert de support à son raisonnement : il lie l'existence d'une dérivée à celle d'une tangente à la courbe. Celle-ci est « la » courbe lisse que depuis la classe de Troisième les élèves tracent (ou plus exactement dont ils voient le tracé dans leur manuel et les énoncés d'évaluations, sur leur calculatrice ou un logiciel traceur) à partir de quelques points reliés (dont, rappelons-le, les abscisses sont le plus souvent entières et positives). L'activité de cet élève se place dans le monde du continu qui apparaît comme prolongement univoque et « qui va de soi » du monde du discret.

Les élèves expriment volontiers en classe que les suites sont difficiles pour eux, car elles sont, disent-ils, trop abstraites : ce thème étant fortement lié à l'algèbre, ils ne peuvent pas s'appuyer sur le registre graphique. Il en est autrement dans le thème des fonctions ; l'articulation entre les registres graphique et algébrique y est un des aspects du domaine de travail F1 (Vandebrouck, 2011) ; le registre graphique y est largement investi en Troisième et en Seconde, dans des tâches de recherche d'images et d'antécédents, de solution d'équations et d'inéquations, de sens de variation, sur une courbe lisse déjà tracée. Cependant, l'absence de questionnement sur la façon dont les points sont reliés ne permet pas de distinguer les mondes du discret et du continu. Par conséquent, comme nous venons de le voir, le registre graphique est potentiellement porteur de sens incorrect. Cette absence a aussi pour conséquence de ne pas exploiter le potentiel heuristique de la représentation graphique, dont nous voyons un exemple ci-après.

5.2. Résolution d'une tâche similaire en Première S et en Master MEEF

5.2.1. Description de la tâche, analyse a priori

La tâche donnée aux élèves de Première est : « Si on sait qu'une fonction f définie sur \mathbf{R} vérifie : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$, que peut-on dire sur le sens de variation de f ? ». Elle est complexe (Vandebrouck, 2008), c'est pourquoi nous l'avons donnée à résoudre par groupes de deux ou trois élèves, pendant 50 minutes.

Les élèves disposaient de leur calculatrice graphique, en plus de leur papier et de leur crayon. Nous avons mis en place ce dispositif deux années consécutives dans une classe d'une trentaine d'élèves de Première S, en fin d'année scolaire.

Nous avons par ailleurs soumis un questionnaire individuel à des étudiants en Master MEEF première année de deux promotions successives (au total 70 étudiants), dont la dernière question comporte deux sous-questions :

- 6 Que peut-on dire d'une fonction définie sur \mathbf{R} qui vérifie « pour tout x réel $f(x+1) = f(x)$ » ?
Même question avec « pour tout x réel $f(x+1) > f(x)$ ».

Procédons à une analyse *a priori* de la tâche.

La forme algébrique $f(x+1) > f(x)$ est, bien entendu, proche de la forme $u_{n+1} = u_n$. Les étudiants risquent donc de répondre de façon erronée que la fonction f est constante. Cette réponse permet de situer leur activité dans le monde du discret.

Cependant, la fonction est définie sur \mathbf{R} et les notations f et x sont congruentes avec les habitudes de travail dans le monde du continu. Les étudiants peuvent répondre qu'il se peut que la fonction soit constante, ou pas, ou plus simplement que la fonction n'est pas nécessairement constante.

De plus, la forme algébrique $f(x+T) = f(x)$, est celle qui exprime la périodicité de période T . Les étudiants peuvent répondre que la fonction est périodique de période 1. Ces réponses situent plutôt l'activité dans le monde du continu.

Nous avons choisi de soumettre cette sous-question aux étudiants uniquement : en Première, les suites constantes sont peu mobilisées et la notion de fonction périodique ne figure pas au programme officiel.

Dans la deuxième sous-question, si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$, f peut être strictement croissante, mais ne l'est pas nécessairement.

La tâche peut être résolue en exhibant un contre-exemple :

- Dans le registre graphique ;
- Dans le registre algébrique.

Prenons pour exemple la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x / \sin(2\pi x) + 2/$ et dont une portion de la représentation graphique figure ci-contre. Elle vérifie : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) = (x+1)|\sin(2\pi(x+1)) + 2| = f(x) + |\sin(2\pi x) + 2|$, on a donc $f(x + 1) > f(x)$. f n'est cependant pas croissante : $f(0,5) = 1$ alors que $f(0,75) = 0,75$. Cette fonction est représentée graphiquement en figure 4.

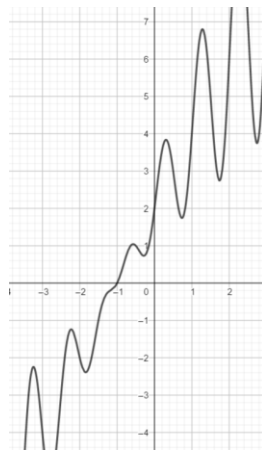


Figure 4. Représentation graphique d'une fonction faisant office de contre-exemple

La reconnaissance de la forme algébrique issue de la définition de la croissance d'une suite peut bien entendu induire des élèves et étudiants en erreur. Ils répondent alors que la fonction est strictement croissante¹⁵. Cette réponse fautive permet de situer leur activité dans le monde du discret.

Ils peuvent tester des fonctions dans le registre algébrique. En l'absence de fonctions trigonométriques dans le cursus des élèves de Première, un contre-exemple dans ce registre est cependant exclu. Un tel contre-exemple est par ailleurs peu disponible pour un étudiant de Master MEEF.

Certains devraient penser à tester des fonctions dans le registre graphique et arriver à imaginer dans ce registre qu'entre deux entiers, ou du moins deux réels distants de 1, la fonction peut prendre des valeurs qu'ils peuvent faire varier, et ainsi tester différentes possibilités.

La tâche requiert donc des prises d'initiatives, d'autant plus que la question est ouverte. Enfin, la réponse correcte n'est pas simple à formuler puisque f peut être croissante, ou pas.

¹⁵ Ou plus simplement que la fonction est croissante, surtout parmi les élèves de Première qui sont peu exposés aux fonctions qui ne sont pas strictement monotones par intervalle.

La construction d'un contre-exemple graphique qui tient compte de l'ensemble \mathbf{R} sur lequel la quantification porte est délicate. Il est possible que les élèves et peut-être même les étudiants pensent seulement à des x entiers, compte tenu de l'usage prépondérant des entiers au collège et au lycée. En pensant x seulement entier, il est assez simple d'imaginer une représentation graphique de fonction dont la restriction à \mathbf{Z} est strictement croissante, mais qui ne l'est pas sur \mathbf{R} , sans toutefois vérifier la condition « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) > f(x)$ »¹⁶. La réponse est alors qu'on ne peut rien dire, ou que f n'est pas nécessairement croissante, qui sont des réponses correctes attendues.

Le détail des réponses permet d'évaluer dans quel monde les élèves et étudiants situent leurs activités, via quel registre, de voir si une fonction définie sur \mathbf{R} est perçue en tant que telle ou comme une suite. Pour l'élève, ou l'étudiant, le nombre réel x décrit-il effectivement un ensemble continu ou bien l'ensemble des entiers, voire des entiers positifs ? S'il décrit un ensemble continu, f est-elle « la » fonction représentée par les points à abscisses entières reliés de façon lisse ?

Les détails des résultats figurent en annexe 1 ; en voici une courte analyse.

5.2.2. Résultats en Première

Dans tous les groupes, les élèves pensent dans un premier temps que f est croissante. Puis les trois quarts se posent des questions et testent des expressions algébriques, des représentations graphiques, ou les deux. Finalement, au total, environ un tiers répond que la fonction est croissante, un autre tiers que l'« on ne peut pas savoir », 7 % que la suite est croissante, un quart ne conclut pas.

Le quart des groupes qui répond sans graphique ni expression algébrique invoque la définition formelle de la croissance d'une fonction. L'un d'eux conclut convenablement (voir figure 5). Les élèves y écrivent : « si $f(x + 1) > f(x)$, alors $f(x + 0,5)$ peut être inférieur à $f(x)$ et on ne peut rien dire du sens de variation de f ». Ils conçoivent qu'entre deux nombres (réels ou entiers ?) distants de 1 il en existe au moins un, leur moyenne. Cette propriété constitue pour le moins un précurseur de la densité de l'ensemble des réels (aspect 1 du continu).

Les autres groupes qui s'appuient sur la définition formelle de la croissance concluent que « la fonction est croissante » (trois quarts de ces groupes), ou que « la suite est croissante » (un quart de ces groupes) : ils reconnaissent la forme algébrique de la définition correcte dans le thème des suites qui les éloigne de la prise en compte du continu des réels.

¹⁶ Nous en donnons un exemple plus loin.

S, $f(x+1) > f(x)$ abs $f(x+0,5)$ peut être inférieur
à $f(x)$ et on ne peut donc rien dire du sens de variation
de f

Figure 5. Production d'un groupe d'élèves de Première S dans laquelle la définition de la croissance d'une fonction sert d'argument

7 % des groupes répondent « *la suite est croissante* » ; 7 % des groupes produisent un graphique de points isolés et concluent « *la fonction est croissante* ». Donc pour 14 % des groupes, l'énoncé semble bien être compris en termes de suites. Une fonction serait une suite, les activités se situent dans le monde du discret

Le cumul du taux de réponses correctes et de celui de recherches de fonction qui constitue un contre-exemple sans aboutir est globalement de 58 % sur les deux années. Les activités des élèves de ces groupes se situent dans le monde du continu, les élèves perçoivent bien les fonctions définies sur \mathbf{R} comme des objets différents des suites. Le taux de contre-exemple graphique correct sur un intervalle de longueur supérieure à 2 est d'environ 1/6. Notons que dessiner un contre-exemple n'est pas facile, d'où une certaine tolérance dans notre appréciation. Pour ces élèves, une fonction définie sur \mathbf{R} n'est pas une suite. Les activités se situent au moins en partie dans le monde du continu

Les contre-exemples qui ne sont pas corrects ne prennent en compte la condition $f(x+1) > f(x)$ que sur un ensemble d'abscisses appartenant à $\{x_0 + n, n \in \mathbf{N}\}$; x_0 est explicitement entier (un réflexe dû aux activités des élèves dans le monde du discret depuis la Troisième ?), sauf dans un groupe d'élèves (voir figure 6).

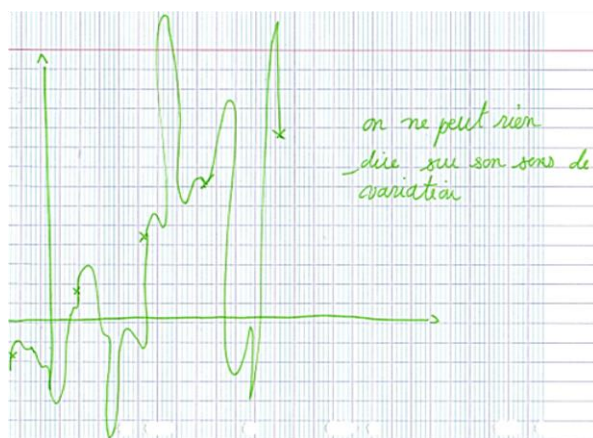


Figure 6. Production d'un groupe dans laquelle le contre-exemple n'est pas correct

5.2.3. Résultats en Master MEEF

Résultats de la sous-question : *Que peut-on dire d'une fonction f définie sur \mathbf{R} qui vérifie « pour tout réel x , $f(x + 1) = f(x)$ » ?*

Le taux d'étudiants qui répondent que la fonction est périodique de période 1 est d'environ 50 %.

Cependant environ un étudiant sur cinq en fin d'année de formation répond qu'une telle fonction est constante (non pas qu'elle pourrait l'être) ; une partie d'entre eux répond que f est stationnaire, mobilisant ainsi un élément de vocabulaire spécifique aux suites. Leurs activités se situent clairement dans le monde du discret.

Résultats de la sous-question : *Que peut-on dire d'une fonction f définie sur \mathbf{R} qui vérifie « pour tout réel x , $f(x + 1) > f(x)$ » ?*

Au total, sur les deux promotions, 10 % des étudiants donnent une réponse correcte à la seconde sous-question, avec ou sans contre-exemple. Ces étudiants ont tous répondu correctement aussi à la première sous-question.

Le taux d'étudiants qui ne répondent pas à cette question est le même (10 %) que pour la première sous-question. Ce sont presque exclusivement les mêmes étudiants.

Le taux le plus important est de loin celui des étudiants qui répondent que la fonction est strictement croissante. Il est de 36 % sur les deux promotions.

Chez certains étudiants, la résolution de la tâche est faite explicitement dans le monde du discret ; rien ne semble distinguer une suite d'une fonction définie sur \mathbf{R} . En voici deux exemples.

Dans ce premier exemple (figure 7), l'étudiant fait appel à la notion de successeur et mobilise la technique de la recherche du signe de la suite des accroissements.

Si quelque soit $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) = f(x)$ alors $f(x+1) - f(x) = 0$. Donc la fonction définie sur \mathbf{R} est constante.
 Si quelque $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$, alors $f(x+1) - f(x) > 0$. " $x+1$ " est le successeur de " x " donc $x < x+1$.
 Or si on obtient $f(x) < f(x+1)$, alors f est strictement monotone et croissante.

Figure 7. Production d'étudiant faisant appel à la notion de successeur

L'exemple qui suit (figure 8) fait lui aussi référence au discret de \mathbf{N} : l'étudiant donne à x les valeurs 0 puis 1 ; il suggère que l'énumération qu'il a commencée peut se poursuivre par un : « *Et ainsi de suite* ».

Lorsque une fonction définie sur \mathbb{R} et qui vaut $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $f(x+1) = f(x)$ alors cette fonction est constante. C'est à
 dire que $f(0+1) = f(1) = f(2)$
 $f(-1+1) = f(0) = f(1) = f(2)$
 et ainsi de suite.
 Lorsque, en revanche la fonction est définie telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,
 par $f(x+1) > f(x)$, alors dans ce cas la fonction est
 strictement croissante.

Figure 8. Production d'étudiant faisant appel à l'énumération

L'argument peut aussi être graphique, en voici un exemple en figure 9. Deux points
 d'abscisses x et $x+1$ sont reliés par un segment. L'étudiant ne semble pas imaginer
 l'infinité des valeurs que peut prendre x ni d'autre façon de relier ces points. Il est
 difficile de savoir si pour lui, f est une suite ou une fonction définie sur \mathbf{R} . On peut
 même se demander s'il distingue les suites des fonctions (une fonction périodique
 de période 1 serait constante). Tout du moins peut-on affirmer que bien qu'il relie
 des points à la main sans lever le crayon (ce qui relève du monde du continu), il se
 cantonne aux possibilités qu'offre le discret de \mathbf{N} (ses activités pourraient se
 cantonner au monde du discret).

$f(x+1) = f(x)$ f est périodique de période 1
 donc f est constante

$f(x+1) > f(x)$ f est strictement croissante

Figure 9. Production d'étudiant faisant appel à un argument graphique

5.3. Conclusion de la partie 5

La présence d'une relation de récurrence dans une tâche inscrit les activités des
 élèves dans le monde du discret. Leur assimilation d'une suite à une fonction définie
 sur $[0; +\infty[$ peut se manifester dans le registre graphique, « la » courbe lisse de « la »
 fonction qui définit la suite jouant le rôle d'intermédiaire. Leur confusion peut aussi
 tenir à la forme algébrique d'une suite définie de façon explicite qui ne se distingue
 de celle d'une fonction définie sur $[0; +\infty[$ que par l'usage de la lettre n pour désigner
 la variable.

Nous venons d'observer la confusion inverse : une fonction définie sur \mathbf{R} serait une
 suite pour 14 % des groupes d'élèves ayant effectué la tâche : « Si on sait qu'une
 fonction f définie sur \mathbf{R} vérifie : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$, que peut-on dire sur

le sens de variation de f ? ». Cependant, leur réflexion en groupes permet à 58 % d'entre eux d'élaborer une réponse à l'aide de fonctions continues.

Quant aux étudiants en Master MEEF première année, ils sont environ un quart à considérer qu'une telle fonction est strictement croissante après avoir affirmé qu'une fonction f définie sur \mathbf{R} qui vérifie : « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + 1) = f(x)$ » est constante.

Bien que l'influence de la forme algébrique de l'énoncé sur les activités des élèves et étudiants ne puisse pas être sous-estimée, ces résultats nous amènent à nous interroger sur les impacts de l'introduction des fonctions en Troisième et en Seconde sur l'apprentissage des suites. Alors que les définitions, le vocabulaire, les propriétés, les types de tâches et les techniques sont en partie analogues entre les suites et les fonctions définies sur un intervalle de \mathbf{R} , la mobilisation de notions, de notations, de propriétés et de techniques en partie différentes peut paraître comme un jeu démuné de sens pour les élèves et les étudiants, voire un effet de contrat didactique entre l'enseignant et l'élève. Tout au moins, l'existence des mondes du discret et du continu, leurs spécificités respectives, la pertinence de situer les activités dans l'un ou l'autre monde, peut leur échapper.

Par ailleurs, nous pouvons inférer des résultats que nous venons de présenter que, pour une tâche du type de celle de la sous-partie 5.2, qui peut provoquer des activités dans les mondes du discret et du continu en interaction, le registre graphique est porteur d'heuristique et donc de sens. Ceci nous amène à considérer un domaine de travail, nommons-le S1, pour l'étude des suites qui, au lieu d'être essentiellement basé sur le registre algébrique, articulerait davantage les registres graphique, numérique et algébrique.

Conclusion : bilan et perspectives

L'approche du discret et du continu que nous avons effectuée montre leur apparente simplicité lorsqu'il est fait référence à l'expérience individuelle ; cette simplicité contraste avec la difficulté à définir le continu mathématiquement et la complexité des interactions entre les mondes du discret et du continu.

Du point de vue de la théorie mathématique, la notion de discret est aujourd'hui formalisée, ainsi que celle de continu dans le cas des corps totalement ordonnés ; elles ne le sont bien entendu pas encore au secondaire. Pouyanne (2004, cité dans Robert et al., 2012, p. 83) qualifie ce type de notion de « non encore formalisée ». Selon notre étude, la notion de continu en dehors des corps isomorphes à \mathbf{R} pourrait être qualifiée de « non encore formalisable ». D'après Pouyanne, « *la conscience des mécanismes de formalisation, de l'existence de notions cachées et de leur détection influe sur l'organisation et la cohérence des notions sur le long terme et permet de prendre en compte la dualité entre intuition et rigueur qui lie l'objet « vraiment*

pensé » (*conceptualisé ?*) à son statut logique ». Les analyses présentées dans cet article, et particulièrement celles des résultats des étudiants en Master MEEF, viennent appuyer ses propos. Dans le but de favoriser de meilleurs apprentissages à court et à long terme, nous souhaiterions développer une réflexion concernant les notions non encore formalisées/formalisables au niveau du secondaire. Il s'agirait d'identifier ces notions et de détecter si elles génèrent des problématiques d'enseignement communes. Ce travail pourrait amener des propositions à tester, de tâches, de déroulements, de choix d'ordre pour les scénarios.

Revenons aux suites et aux fonctions. Parmi les principaux éléments qui peuvent situer les activités mathématiques dans le monde du discret ou celui du continu (voir partie 2), c'est essentiellement le tracé des courbes qui vient attester en Troisième et en Seconde l'inscription du thème des fonctions dans le monde du continu. Or la partie 5 montre que pour un nombre non négligeable d'élèves et de futurs enseignants, le tracé d'une courbe de fonction continue n'implique pas que la variable appartienne à un ensemble continu. L'enseignement des suites et des fonctions présente donc bel et bien un problème.

Nos analyses nous poussent à faire l'hypothèse, à tester, que ceci est lié à ce que, dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées, en analyse, tout se passe trop souvent « comme si » le continu allait de soi ; « comme si » un objet défini sur des entiers revenait à un objet analogue sur le continu d'un intervalle de \mathbf{R} . « Le » prolongement du discret au continu s'opérant de façon ostensible dans le registre graphique.

Nos résultats concernant les étudiants en Master MEEF montrent que chez un tiers d'entre eux, la confusion semble installée. Ils montrent par ailleurs, avec les résultats concernant les élèves sur la même tâche, les potentialités aujourd'hui peu exploitées de la représentation graphique en tant qu'outil heuristique au sein d'activités mathématiques articulant les domaines de travail F1 et S1 (dans lesquels les fonctions, resp. les suites, sont abordées en tant qu'objet et outil, en coordonnant différents registres, permettant ainsi la coexistence des différentes perspectives).

Ces constats nous mènent à envisager l'inversion de l'ordre dans lequel les suites et les fonctions sont introduites. En effet, les enfants développent leurs connaissances sur les nombres entiers strictement positifs bien avant celles sur d'autres nombres ; ils développent leur raisonnement probabiliste sur des espaces finis (à petit cardinal) avant d'aborder les calculs de probabilités sur des espaces continus. Historiquement, les entiers strictement positifs ont préexisté aux autres nombres pendant des siècles ; d'après Dhombres (1978), lorsque Leibniz a inventé le calcul différentiel et intégral, il raisonna dans un premier temps en termes de différences entre deux valeurs

entières de la variable ; le continu a questionné les mathématiciens dès l'antiquité et n'a reçu de définition (partielle) que 2000 ans plus tard.

Tout porte à penser que la simplicité du continu tel qu'il est présenté dans les classes de Troisième et de Seconde est illusoire, alors que le discret fini et celui de l'infini dénombrable du « et ainsi de suite » semblent naturels au regard du développement de l'enfant ainsi que de l'histoire de l'humanité. Dès lors, pourquoi ne pas enseigner aux élèves les suites avant les fonctions ? C'est déjà le cas dans certains curricula à l'étranger qui investissent le thème des suites dès le collège, voire auparavant¹⁷.

Au collège aujourd'hui, le programme officiel préconise l'élaboration d'algorithmes. Ceux-ci permettent de générer des termes de suites de façon explicite aussi bien que récurrente. De nombreux phénomènes discrets ont l'avantage d'être simples à appréhender par les élèves ; en témoigne le nombre d'exercices portant sur des phénomènes discrets dans les manuels de Troisième (bien que les programmes correspondants stipulent que les fonctions sont des modèles de phénomènes continus).

Il est possible de travailler dès le collège les deux points de vue de liste ordonnée et de processus de correspondance des suites (en les associant aux notations indicée et fonctionnelle), d'aborder la représentation graphique d'une suite en dimension 2 par des points isolés. Ceci n'exclut pas la mobilisation de modélisations continues dans le registre graphique (courbes de fonctions affines par morceaux ou courbes de fonctions de classe C^1), telles que les élèves les rencontrent en sciences physiques, de la vie et de la terre ou économiques, en les accompagnant d'un discours clair concernant la nature, discrète ou continue, des variables.

En parallèle, le thème des statistiques offre lui aussi la possibilité de tenir un discours clair sur la nature des variables en jeu, de mobiliser les registres numérique et graphique dans des tâches qui permettent de distinguer les activités des élèves qui se situent dans le monde du discret de celles qui se situent dans celui du continu (de façon adaptée à ce niveau d'enseignement).

Le sens de variation d'une suite peut être défini en Seconde, de façon habituelle (simplement quantifiée), en lien avec la représentation graphique d'une suite en dimension 2. Un domaine de travail S1 sur les suites peut être développé : peu lié à l'algèbre, articulant différents registres : graphique, algébrique, numérique.

La fonction définie sur un intervalle peut être abordée ensuite avec son double point de vue de processus de correspondance et de dépendance d'une variable en fonction d'une autre. La notion de fonction incluant celle de suite, les fonctions définies sur

¹⁷ Par exemple en Ontario, en Grande Bretagne.

un intervalle de \mathbf{R} pourraient être clairement distinguées des suites par l'absence d'un successeur dans l'ensemble \mathbf{R} (absence aisément démontrée par l'absurde à l'aide de l'aspect 1 du continu des réels). Elle fournirait de nouveaux modèles aux élèves, continus (si la fonction est continue), qui offrent de nouveaux outils de résolution de problèmes. La nécessité de la double quantification dans la définition du sens de variation d'une fonction, mise en regard avec celle du sens de variation d'une suite, peut être aisément appuyée par des contre-exemples graphiques. Il s'agit d'un travail dans F1 en articulation avec S1 qui permet de faire vivre et interagir les mondes du discret et du continu de façon explicite. La panoplie d'outils du continu peut s'enrichir en Première et en Terminale avec les techniques provenant du calcul différentiel¹⁸ et intégral, dont les élèves peuvent éprouver l'efficacité en rapport avec les outils analogues du discret (voir tableaux d'analogies, partie 3).

Parallèlement, dans le thème des probabilités, les élèves peuvent voir aussi leur panoplie d'outils de calcul se développer : au collège sur des univers finis, au lycée sur des univers finis puis infinis discrets ; comme c'est le cas depuis 2001, quelques exemples de variables aléatoires continues peuvent figurer au programme de Terminale, en lien avec le calcul intégral. Dans ce thème, la modélisation est un incontournable (Henry, 2003, 2009), en conséquence le discours concernant la réalité et ses modélisations (discrètes ou continues) l'est aussi.

Ainsi que le préconisent les programmes officiels des deux dernières décennies, les suites et les fonctions resteraient outils de modélisation de phénomènes discrets et continus ; dans les mathématiques à enseigner et les mathématiques enseignées, dans le domaine de l'analyse et en parallèle avec ceux des statistiques et des probabilités, un discours clair pourrait être tenu sur la nature, discrète ou continue, des grandeurs en jeu dans les phénomènes modélisés, ainsi que le monde, discret ou continu, au sein desquels les activités sont effectuées.

Le délicat rapport des mathématiques au réel, qui est parfois malmené jusque dans les énoncés d'exercices de Baccalauréat¹⁹, pourrait dans le même temps être clarifié. Cela permettrait de contribuer à donner davantage de sens, auprès des élèves de lycée, non seulement aux notions mathématiques qu'ils rencontrent, mais aussi à leur activité en classe de mathématiques et à ce qu'ils perçoivent du rôle des mathématiques dans leur vie et dans notre société.

¹⁸ Citons à ce propos Weigand (2014) qui analyse une approche discrète de la dérivée.

¹⁹ Voir Rousse (2018).

Bibliographie

CHOQUET, G. (2000). *Cours de topologie*. Dunod.

COPPE, S., DORIER, J.L. et YAVUZ, I. (2006). Éléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*, 71, 29-60.

COUSQUER, E. (1994). *Histoire du concept de nombre*. IREM de Lille.

DHOMBRES, J. (1978). *Nombres, mesure et continu*. Cedic / Fernand Nathan.

DURAND-GUERRIER, V. (2012). Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques. Dans M. Ouelbani (Dir.), *Des mathématiques à la philosophie. Regards Croisés : Didactique, Histoire et Philosophie* (pp.163-183). Université de Tunis, Faculté des Sciences Humaines et Sociales.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

FERNANDEZ-PLAZA, J. A. et Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 93(3), 315-332.

GRENIER, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x*, 88, 27-47.

HENRY, M. (2003). Des lois de probabilités continues en Terminale S, pourquoi et pour quoi faire ? *Repères IREM*, 51, 5-25.

HENRY, M. (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. *Repères IREM*, 74, 67-89.

LONGO, G. (1999). The math continuum: from intuition to logic. Dans J. Petitot, F. J. Varela, B. Pacoud et J.M. Roy (Dir.), *Naturalizing Phenomenology*. Stanford University Press.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (1998). *Bulletin Officiel*, 15 octobre 1998, 10.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2000). *Bulletin Officiel hors série*, 31 aout 2000, 7.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2001). *Bulletin Officiel*, 30 aout 2001, 2.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2008). *Bulletin Officiel*, 28 aout 2008, 6.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2009). *Bulletin Officiel*, 23 juillet 2009, 30.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2010). *Bulletin Officiel spécial*, 30 septembre 2010, 9.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2011). *Bulletin Officiel spécial*, 13 octobre 2011, 8.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (2015). *Bulletin Officiel*, 26 novembre 2015, 11.

MONTOYA DELGADILLO, E., PÁEZ MURILLO, R., VANDEBROUCK, F. et VIVIER, L. (2018). The three localization perspectives in the learning of analysis, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 134-160.

PEANO, G (1889). *Arithmetices principia: nova methodo exposita*. Bocca.

ROBERT, A., PENNINGCKX, J. et LATTUATI, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe*. Presses Universitaires de Franche-Comté.

ROUSSE, S. (2018). *Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot].

http://theses.md.univ-paris-diderot.fr/ROUSSE_Sophie_2_complete_20181130.pdf

VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 16, 149-185.

VANDEBROUCK, F. (Dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.

WEIGAND, H. G. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM*, 46(4), 603-619.

Manuels

ALVEZ, Y., CAREME, A., CHAREYRE, B., CLEIREC, N., LE YAOUANQ, M. H. et SAINT-RAYMOND, C. (2005). *Math 'x Seconde*. Didier.

ALVEZ, Y., BEAUVOIT, E., GUILLEMET, D., LAVIGNE, D., LE YAOUANQ, M. H., ROXVAL, E., SALIBA, G. et TADEUSZ, L. (2011). *Math 'x 1^{re}* S. Didier.

ANTIBI, A., CROC, C., LALLEMAND, M. F., NOGAREDE, S. et ROUMILHAC, J. P. (2010). *Math 2^{de}*. Nathan.

ARTIGALAS, A. L., BEASSE, C., BRAUN, F., DEVYS, A., DOS SANTOS, R., FAVERO, S., GRISONI, M. D., LEVI, M. C., MARDUEL, S., PHILIPPE, C., REYNIER, C., ROUZE, P. et TREVISAN, H. (2016). *Maths 3^e (collection Dimensions)*. Hatier.

BARRA, R., BARROS, J. M., BENIZEAU, P. et MORIN, J. (2011). *Transmath 1^{re} S*. Nathan.

BRAULT, R., DARO, I., FERRERO, C., PERBOS, D. et TELMON, C. (2008). *Mathématiques 3^e (collection Phare)*. Hachette.

CARLOD, V., COURBON, D., FNDAKOWSKI, M., MALAVAL, J., MAZE, M., PLANTIVEAU, A. et PUIGREDO, F. (2008). *Transmath 3^e*. Nathan.

CARLOD, V., CHRETIEN, B., DESROUSSEAUX, P. A., JACQUEMOUD, D., JORIOZ, A., KELLER, A., LECOLE, J. M., MAHE, A., MAZE, M. PLANTIVEAU, A. PUIGREDO, F., VERDIER, F. (2016). *Transmath 3^e*. Nathan.

CHESNE, J. F., GASTIN, H., GUIGNARD, M. GUILLEMET, D. et LE YAOUANQ, M. H. (2010). *Math 'x 2^{de}*. Didier.

COSTE, R., GUERLOU, C., LOTZ, E., MISSET, L. et TURNER, J. (2000). *Maths Seconde (collection Déclic)*. Hachette.

MALAVAL, J. MAZE, M., PLANCHAT, C., PUIGREDO, F., SAINFORT, A. et SERES, P. (2003). *Math 3^e (collection Transmath)*. Nathan.

ASSOCIATION SESAMATH. *Maths 1^{re} S. Consulté à l'adresse* https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1s_2015&ticket=none

SOPHIE ROUSSE

LDAR Université de Paris

roussesophie@orange.fr

Annexe 1. Résultats des tâches données aux élèves de Première S et aux étudiants de Master MEEF

Résultats de la tâche donnée à des élèves de Première S

« Si on sait qu'une fonction f définie sur \mathbf{R} vérifie : « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$ », que peut-on dire sur le sens de variation de f ? »

Les élèves testent :	Juin 2015	Juin 2016	Cumul
Avec graphe sans expression	86 %	33 %	59 %
Avec graphe et expression	0 %	27 %	14 %
Avec expression sans graphe	0 %	7 %	3 %
Sans graphe ni expression	21 %	31 %	28 %
Avec graphe de points isolés	7 %	7 %	7 %

Les élèves répondent :	Juin 2015	Juin 2016	Cumul
La suite est croissante	7 %	7 %	7 %
La fonction est croissante	29 %	40 %	34 %
Pas de conclusion (bien que recherche de contre-ex)	14 %	33 %	24 %
« On ne peut pas savoir » ou « f pas toujours croissante »	50 %	20 %	34 %

Résultats des tâches données aux étudiants de Master MEEF 1

Sous question : Que peut-on dire d'une fonction f définie sur \mathbf{R} qui vérifie « pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$ » ?

	Mars 2016	Septembre 2016	Cumul
f est 1-périodique	50 %	46 %	47 %
f est $\frac{1}{n}$ périodique	0 %	2 %	1 %
$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, f(x+n) = f(x)$	4 %	0 %	1 %
f est constante	17 %	35 %	29 %
f est constante ou discontinue	0 %	2 %	1 %
Il manque la continuité	4 %	0 %	1 %
f n'est pas injective	4 %	7 %	6 %
Rep graph : droite	4 %	0 %	1 %
Pas de réponse	17 %	7 %	10 %

Sous question : Que peut-on dire d'une fonction f définie sur \mathbf{R} qui vérifie « pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) > f(x)$ » ?

	Mars 2016	Septembre 2016	Cumul
f n'est pas forcément croissante avec exemple	4 %	4 %	4 %
f n'est pas forcément croissante sans exemple	0 %	7 %	4 %
f est « globalement croissante »	0 %	4 %	3 %
f est pseudo périodique	0 %	2 %	1 %
Discussion non concluse	4 %	2 %	3 %
Il manque la continuité	8 %	0 %	3 %
f n'est pas constante	0 %	2 %	1 %
f est strictement croissante	29 %	39 %	36 %
f ne converge pas	0 %	2 %	1 %
f tend vers $+\infty$	0 %	2 %	1 %
Pas de réponse	17 %	7 %	10 %

Résultats croisés des deux sous questions :

	Mars 2016	Septembre 2016	Cumul
Deux réponses correctes	4 %	13 %	10 %
$f(x+1) = f(x)$: f est constante et $f(x+1) > f(x)$: f est croissante	13 %	30 %	24 %
Pas de réponse aux deux	17 %	4 %	9 %

**PATRICIA MARCHAND, CLAIRE GUILLE-BIEL WINDER, LAURENT THEIS,
TERESA ASSUDE**

**DIFFICULTES D'UN SYSTEME DIDACTIQUE A PROPOS DE
L'ENSEIGNEMENT DU VOLUME AU PRIMAIRE**

Abstract. *Difficulties of a didactic system on teaching volume at primary school.* Our work studies didactic systems including the main didactic system, essentially the classroom, and the auxiliary didactic system which is peripheral to the former. Through a case study, this paper deals with the difficulties of the didactic system encountered when setting up an aid session prior to the resolution of a volume problem. This type of aid session having proved worthy in the context of previous research, has led us to study the difficulties encountered during its implementation. Three difficulties emerged from this study: those related to the teaching project, to the choice of didactic material and to the concept of volume itself. These difficulties had consequences, mainly, on the mesogenetic function of the didactic system, but also, systemically, on the other functions.

Keywords. Didactic system, volume, aid session, student in difficulty.

Résumé. Nos travaux étudient les systèmes didactiques, dont le système didactique principal qui est la classe et les systèmes didactiques auxiliaires qui aident et accompagnent l'étude des mathématiques. Par une étude de cas, le présent article traite des difficultés du système didactique rencontrées lors de la mise en place d'un dispositif d'aide lié à la résolution d'un problème de volume. Ce type de dispositif, ayant pourtant fait ses preuves dans le cadre de recherches antérieures, nous a menés à étudier les difficultés rencontrées lors de sa mise en place. Trois difficultés ont émergé de cette étude : celles liées au projet d'enseignement, au choix du matériel et au concept même de volume. Ces difficultés ont eu principalement des répercussions sur la fonction mésogénétique du système didactique, mais aussi, de manière systémique, sur ses autres fonctions.

Mots-clés. Système didactique, volume, dispositif d'aide, élèves en difficulté.

Au Québec, l'inclusion des élèves en difficulté est opérationnalisée par leur intégration à la classe ordinaire et par les différentes mesures mises en place afin de faciliter cette inclusion (MELS, 2003). Dans le cadre de nos travaux visant le développement de systèmes didactiques pour aider les élèves en difficulté, nous nous référons à des « difficultés d'un système didactique » pour insister moins sur des caractéristiques individuelles de l'élève que sur l'étude des systèmes didactiques

auxquels ils prennent part (Assude et al., 2016a ; Giroux, 2014 ; Mary et al., 2014). La question générale ciblée par nos recherches est la suivante : *quelles sont les conditions favorables à l'engagement des élèves en difficulté et à l'apprentissage de concepts mathématiques lors d'une résolution de problème ?* La méthode valorisée pour traiter de cette question est l'accompagnement d'enseignants dans la planification, la réalisation et l'analyse de systèmes didactiques. Nous avons expérimenté un dispositif d'aide qui se situe en amont de la séance de classe et qui vise à permettre aux élèves en difficulté d'entrer dans la tâche avant les autres : il s'agit ainsi de changer la manière dont ces élèves prennent position dans le *topos* d'élève (Theis et al., 2014). Cinq fonctions potentielles de ce dispositif ont pu être identifiées (Theis et al., 2014 ; Assude et al., 2016a) : la fonction topogénétique, la fonction chronogénétique, la fonction mésogénétique (Chevallard, 1992 ; Sensevy et al., 2000), la fonction de distanciation et celle de questionnement. Nous nous sommes centrés, jusqu'à présent, sur la modélisation du dispositif et son impact, entre autres, sur l'engagement et la synchronicité des élèves en difficulté avec le temps didactique. Dans le présent article, nous nous intéressons, par le biais d'une étude de cas, aux difficultés du système didactique rencontrées lors de sa mise en place pour la résolution d'un problème de volume auprès d'une classe d'élèves de 10 à 12 ans. Après avoir rappelé les fondements du dispositif, nous présentons une analyse du concept de volume. L'accompagnement réalisé auprès de cette enseignante et le dispositif d'aide élaboré et expérimenté sont décrits dans la méthodologie. Enfin, les résultats reprennent les cinq fonctions du dispositif en mettant en exergue les difficultés du présent système didactique.

1. Cadre de référence

Nos travaux s'insèrent ainsi dans le courant des recherches qui étudient les systèmes didactiques (Chevallard, 1999 ; Tambone, 2014). Dans ce cadre, le contexte que constitue la classe représente le système didactique principal (SDP) et les contextes périphériques à celui-ci, internes ou non à l'institution, comme l'aide aux devoirs, sont représentatifs d'un système didactique auxiliaire (SDA). Le SDA, qui dépend du SDP par les savoirs en jeu, se déroule ici en amont du SDP avec certains élèves ciblés par l'enseignante comme pouvant manifester des difficultés lors de cette séance. Il a pour objectif de fournir une occasion de rencontrer la situation ou certains de ses objets avant les autres élèves sans toutefois faire avancer le temps didactique au sens de Chevallard et Mercier (1987). Les interventions de ce type de SDA peuvent porter sur des contenus anciens, mais utiles pour la situation, sur une appropriation du contexte de la résolution ou sur une anticipation des techniques pouvant être déployées lors de la séance en classe. Le système didactique entourant ce dispositif d'aide possède cinq fonctions qui sont décrites brièvement ci-dessous.

1.1. Fonctions du dispositif d'aide

La *fonction topogénétique* est liée aux différents rôles et responsabilités que l'enseignant ou l'élève peut prendre dans un système didactique (principal ou auxiliaire). L'un des problèmes de l'élève en difficulté est qu'il n'arrive pas à prendre sa place d'élève dans le système didactique et qu'il perd de la « valeur scolaire » (Tambone, 2014). En ce sens, un SDA réalisé en amont de la séance de classe semble modifier la place des élèves en difficulté dans le SDP : il a en effet été possible d'observer à travers nos diverses expérimentations que ces derniers osaient répondre aux questions lors de l'explication de la consigne et s'engageaient activement dans la résolution (Theis et al., 2014 ; Assude et al., 2015).

La *fonction chronogénétique* traite des différentes temporalités qui se chevauchent dans un tel système didactique, comme le temps didactique (Chevallard & Mercier, 1987), le temps d'enseignement (Assude, 2005 ; Chopin, 2011), le temps d'apprentissage (Assude, 2005) ainsi que le temps praxéologique (Assude et al., 2016b). Ce dernier correspond à la :

[...] temporalité qui rend compte de l'évolution de chacune des composantes d'une praxéologie, toute progression dans l'une au moins de ces composantes. Ainsi, toute évolution dans la manipulation d'une technique ou dans le discours permettant de la justifier, ainsi que dans la connaissance du type de tâches dans lequel elle s'utilise, marque une avancée du temps praxéologique. (*ibid.*, p. 10-11)

Cette fonction se manifeste ici en donnant l'opportunité aux élèves en difficulté, lors du SDA, de « rencontrer la situation » en amont du SDP afin de favoriser une synchronisation avec le temps didactique du groupe (Theis et al., 2016).

La *fonction mésogénétique* traite des conditions mises en place afin que les élèves rencontrent le savoir dans le système didactique. Dans le SDA, les élèves rencontrent des éléments constituant le milieu initial avant les autres élèves et avant sa réalisation en classe, par une discussion autour des règles définitives de la situation problème (Sensevy & Mercier, 2007) ou encore des règles plus implicites liées à la gestion d'informations contextuelles. Cette rencontre avec le milieu lors du SDA peut rester une étape d'anticipation lorsqu'il est question des savoirs visés par le SDP. Cette anticipation peut représenter un défi dans l'action puisqu'elle exige une certaine vigilance de la part de l'enseignant concernant les savoirs en jeu dans le SDA afin de ne pas faire avancer le temps didactique et provoquer l'évanouissement de la situation en classe.

Ce défi introduit la fonction de *distanciation* correspondant à la dialectique entre la suspension et l'anticipation de l'action des élèves dans le SDA. L'intention de cette suspension est de permettre aux élèves en difficulté d'entrer en contact avec le problème qui sera traité en classe afin de faciliter leur entrée dans l'action et éviter

qu'ils soient face à une page blanche. Cependant, la ligne délimitant l'anticipation et l'action n'est pas évidente à maintenir. Cette fonction est possible par le fait que les élèves rencontrent le milieu lors du SDA sans qu'ils n'entrent dans l'action et qu'il y a un temps entre ce dernier et le SDP. Ce laps de temps, entre une et trois journées, permet alors une prise de distance et crée une attente chez les élèves (Assude et al., 2015).

La dernière fonction consiste à valoriser un *espace de questionnement* afin que les élèves du SDA puissent échanger sur leurs techniques ou leurs anticipations. Rappelons qu'une validation ou invalidation de ces techniques ferait avancer le temps didactique et irait au-delà de l'anticipation visée. Le nombre réduit d'élèves (habituellement entre 3 et 6) permet à l'enseignant d'observer plus finement leurs propositions (raisonnements et difficultés) et de créer un espace de questionnement partagé dans lequel les élèves peuvent s'exprimer, écouter les autres, pour ainsi se préparer à la situation du SDP avant les autres (Assude et al., 2016a ; Theis et al., 2016). Cette prise de distance par le questionnement est vécue positivement par les élèves. Elle semble créer une attente menant à un éventuel engagement de ces élèves dans le SDP (Assude et al., 2016a ; Theis et al., 2016).

Ces cinq fonctions ne sont pas indépendantes les unes des autres : elles sont donc analysées dans leurs interactions ainsi que dans l'interaction avec le savoir en jeu. Pour l'étude de cas qui nous concerne, le savoir visé par le SDP (le volume) semble être à l'origine de difficultés du système didactique lors de sa mise en place.

1.2. Concept de volume

Le concept de volume fait référence à l'étude d'une grandeur, plus spécifiquement à l'espace qu'occupe un corps (Piaget et al., 1973, p. 433). Alors qu'en sciences le volume est étudié autant pour les solides que les liquides (Javoy et al., 2018, p. 2), l'étude du volume en classe de mathématiques au primaire au Québec se centre essentiellement sur celle d'objets physiques ou géométriques¹. De plus, en classe de sciences, l'étude du volume se fait essentiellement à l'aide d'objets physiques, alors qu'en mathématiques, le but est de partir de l'étude du volume d'objets physiques pour arriver ensuite au volume d'objets géométriques (Molvinger & Munier, 2014). Ces deux exemples illustrent le fait qu'il existe une certaine polysémie entourant l'étude du concept de volume en fonction de la discipline de référence qui peut constituer un obstacle pour les élèves (Javoy et al., 2018), mais celle-ci ne sera pas développée dans cet article.

¹ Le volume d'un liquide en classe de mathématiques au primaire est principalement vu en termes de contenance ou de capacité comme nous le verrons plus bas.

La grandeur volume représente une relation qui caractérise une classe d'objets qui auront le même volume « si plongés dans une même quantité d'eau contenue dans des récipients identiques, la hauteur de l'eau montera de la même façon dans les deux récipients. » (Charnay & Mante, 2008, p. 410). Il est possible de comparer ainsi, par immersion, le volume de deux objets physiques. Mais il est aussi possible de mesurer cette grandeur à l'aide d'unités. En ce sens, Anwandter-Cuellar (2013) souligne qu'il y a deux points de vue qui peuvent être associés au volume : « le point de vue géométrique qui considère le volume comme partie de l'espace et le point de vue numérique caractérisé par les mesures et leurs interrelations » (Anwandter-Cuellar, 2013, p. 54). Le volume fait référence à l'identification d'une caractéristique concernée par une classe d'objets (grandeur) et à l'opération de l'assignation d'un nombre accompagné d'une unité (volume) (Janvier, 1997) comme rapport entre la grandeur mesurée et la grandeur étalon de même espèce (Chesnais & Munier, 2016). Le volume peut être vu en tant que grandeur unidimensionnelle, bidimensionnelle ou tridimensionnelle :

avant d'être analysé comme le produit de trois longueurs ou comme le produit d'une surface par une longueur, le volume est d'abord une grandeur physique directement mesurable, qui se prête à des comparaisons, à des mesures, évaluations et approximations, à des inférences qualitatives par union et complémentation [...] et à des additions et soustractions. (Vergnaud, 1983, p. 12)

Ces différents points de vue sur le volume, déterminants pour son enseignement, peuvent être exemplifiés en prenant l'étude du pavé droit, solide sur lequel nous focaliserons notre attention. Les différentes facettes de ce concept rendent son enseignement complexe en classe de mathématiques. Afin d'approfondir ce concept de volume dans le cadre d'un travail mathématique dans l'enseignement primaire, nous nous appuyons sur les quatre exemples ci-dessous (figure 1).

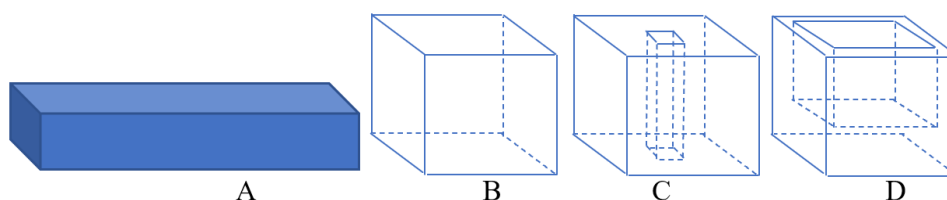


Figure 1. Quatre solides dont deux évidés (C et D)

Les solides B, C et D sont des cubes isométriques dont : C a été évidé au centre de haut en bas et D a été évidé sur le dessus afin de former un récipient. Le solide A est un pavé droit de longueur double et de hauteur moitié de celle de l'arête du cube. Il est possible de calculer le *volume* des solides A et B en multipliant la mesure des trois dimensions ou en multipliant l'aire de la base par la hauteur. Dans le cas où les

mesures sont entières, nous pouvons aussi trouver le nombre de cubes-unités sur la première tranche multiplié par le nombre de tranches ou encore reconstituer l'objet à l'aide de cubes-unités occupant le même espace (Roegiers, 2011). Les solides A et B ont le même volume même s'ils n'ont pas la même forme (conflit volume-forme). De plus, l'un semble plein et l'autre vide, mais l'espace qu'ils occupent est équivalent². Pour les solides C et D, il est possible de partir du volume de B (mêmes dimensions) et d'y soustraire le volume de la partie évidée. Ainsi, si nous plongeons ces quatre solides dans l'eau, il est possible de comparer leur volume ($v_A = v_B$, $v_B > v_C$ et $v_B > v_D$).

Andreucci et Mercier (2005) ont également soulevé, à partir d'une description d'un parcours didactique d'un enseignant basée sur les connaissances premières des élèves, le fait que le volume faisait intervenir la notion de capacité et d'encombrement. La *capacité*³ d'un récipient est une grandeur unidimensionnelle qui représente la quantité de liquide qu'il peut contenir (De Champlain et al., 1996). Un récipient est un « objet creux capable de contenir, de conserver ou de transporter, un liquide [...] ou un solide »⁴. Par exemple, en tant que récipient, D possède une capacité qui correspond à la quantité de liquide que D peut contenir. Il est donc possible de parler de la capacité et du volume du récipient D, mais seulement du volume de A, B et C (figure 1). Quand il est question d'un récipient, par exemple une casserole, il faut préciser la grandeur à l'étude : « est-ce [...] sa contenance ou [...] tout l'espace qu'elle occupe, une fois pleine, ou de l'espace occupé par le matériau qui la constitue (y compris le manche) ? » (Salin, 2006, p. 7). La clarification de ce qui est à mesurer, le contenant ou le contenu (liquide ou matière), apparaît donc nécessaire pour déterminer la grandeur qu'on veut mesurer, ce que les métrologues énoncent comme le *mesurande*⁵. En ce sens, une confusion du *mesurande* est possible, le volume du contenant ou celui de son contenu (espace occupé *versus* capacité) (Janvier, 1997). Par exemple, un élève « pour mesurer la

² Le fait qu'un objet est plein ou vide influence sa masse pas son volume. Mais, les élèves pensent, avant son enseignement, que le volume est « la mesure de ce qui est plein ». (Andreucci et Mercier, 2005)

³ Pour rendre le texte uniforme, le terme « capacité » est utilisé et il est considéré synonyme du terme « contenance » davantage utilisé en France (MENJS, 2020).

⁴ Larousse ; CNRTL <https://www.cnrtl.fr/definition/r%C3%A9cipient>.

⁵ Grandeur particulière soumise à mesurage (longueur, masse, intensité,...). Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative. Mathématiques – Physique-chimie – Mesure et incertitudes <http://eduscol.education.fr/prog>. Gouvernement du Canada <https://www.btb.termiumplus.gc.ca/tpv2alpha/alpha-fra.html?lang=fra&i=&index=frb&srchtxt=MESURANDE>

capacité d'une tasse, mesurerait la quantité de liquide déplacé en immergeant complètement la tasse dans un récipient gradué » (Tanguay, 2010, p. 8).

Dans le cas d'un objet physique, il peut aussi être question de *volume intérieur*, sous entendu « intérieur aux surfaces frontières » (Piaget et al., 1973, p.433) qui met en jeu la prise en compte de l'épaisseur de la paroi de cet objet. Par exemple, l'objet ci-dessous (figure 2) possède un volume intérieur plus petit que son volume (l'espace qu'il occupe) puisque pour trouver le volume intérieur (le volume de la partie creuse), il faut déduire le volume de ses parois à son volume. Considérant que les faces des solides géométriques n'ont pas d'épaisseur, la notion de volume intérieur n'est pas pertinente pour ces derniers.

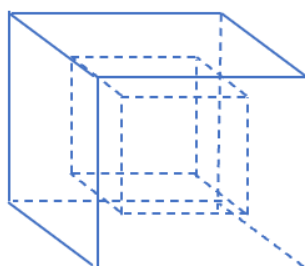


Figure 2. Image d'un objet fermé avec une paroi épaisse

Comme mentionné plus haut, le volume, dans les premiers apprentissages, fait aussi intervenir la notion d'*encombrement*, c'est-à-dire l'espace que les solides « occupent quand ils sont bien emballés, au plus près » (Andreucci & Mercier, 2005, p. 11). Il est possible d'affirmer que B, C et D (figure 1) n'ont pas le même volume, mais qu'ils ont le même encombrement (Andreucci & Mercier, 2005 ; Molvinger et al., 2017).

L'acquisition du volume, tout comme celui de l'aire⁶, s'étale sur plusieurs années : « Alors que certaines propriétés sont appréhendées dès l'âge de 5 ou 6 ans, sans [...] enseignement systématique [...], d'autres propriétés soulèvent encore de grandes difficultés chez la majorité des élèves de 15 ans » (Vergnaud, 1983, p. 9). Par exemple, des difficultés importantes persistent dans l'expression des unités de mesure jusqu'à 14-15 ans (Ricco et al., 1983 ; Molvinger, 2013). Ainsi, « le volume est un concept multiplicatif à haut risque : c'est-à-dire que les difficultés

⁶ Des similarités entre les difficultés liées au volume et celles observées pour l'aire peuvent être établies. Voir les travaux de Barrett et al. (2017), Douady et Perrin-Glorian (1989), Hart (1984), Kim et Oláh (2019), Curry et al. (2006), Moreira-Baltar (1994-1995), Perrin-Glorian (2016).

d'appropriation de ce concept par les élèves sont fréquentes, importantes et durables. » (Vergnaud, 1983, p.12). Nous résumons ci-dessous les principales difficultés liées plus spécifiquement à l'acquisition du volume du pavé droit.

Certaines difficultés sont liées à la relation entre les grandeurs et l'objet à l'étude. Par exemple *lier la forme de l'objet physique ou géométrique à son volume* et ainsi ne pas comprendre que deux objets de formes différentes peuvent avoir le même volume (Héraud, 1991). Le *conflit pouvant exister avec d'autres grandeurs* en termes de discrimination et de variations indépendantes peut aussi faire obstacle (Janvier, 1994). Par exemple, lors de la comparaison du volume de deux objets, « les élèves peuvent succomber aux interférences provenant de l'aire des objets à comparer tout comme à leur longueur » (Janvier, 1997, p. 32). Janvier (1994), Salin (2006) et Marchett et al. (2005) font référence aussi à la confusion aire latérale–volume⁷. Héraud (1991) et Janvier (1992) relèvent enfin la comparaison de volumes se référant à une seule dimension des objets (« cet objet a un volume plus grand puisqu'il est plus haut »). Les grandeurs plus familières ou déterminantes s'imposent au détriment des autres (Janvier, 1994).

D'autres difficultés sont à mettre en relation avec la mesure. La difficulté *d'articuler et de coordonner les opérations géométriques*, par exemple en termes de pavage, *et les opérations arithmétiques* de nature multiplicative (Ricco et al., 1983 ; Anwandter-Cuellar, 2013) demande « une plus grande exploration de l'espace et de ses propriétés » (Janvier, 1997, p. 40). D'ailleurs, le pavage dans le cas du volume est plus complexe que dans le cas de l'aire puisqu'une fois réalisé, il n'est pas possible de voir l'ensemble des cubes-unités qui le composent (seuls les cubes-unités l'entourant sont visibles) et ceux-ci ne sont pas visibles en un seul regard (Rogalski, 1979). La *coexistence de deux types différents d'unités de mesure* (L et m³) peut constituer une autre difficulté (Javoy et al., 2018). Enfin comme ceci est le cas pour d'autres grandeurs, certains obstacles peuvent survenir lors du « *mesurage* ». Par exemple, la gestion du cube du coin lors de la mesure des trois dimensions ou l'oubli de la première tranche pour la mesure de la hauteur (Vergnaud, 1983).

Des difficultés enfin sont liées aux formules de calcul. Selon Vergnaud (1983), un *raisonnement additif* constitue un obstacle à la construction, à la compréhension et à l'analyse de la formule. En outre la *mémorisation irréfléchie* d'un grand nombre de formules (Janvier, 1997) peut représenter un autre obstacle⁸. Dans un tel cas, les

⁷ Cet obstacle, pour le cas du cylindre, est en fait un des problèmes de Galilée (Johan et al., 1997 ; Janvier, 1994).

⁸ Il faut s'attarder au raisonnement ayant permis la construction des formules (Janvier, 1997).

élèves pourraient recourir à des procédures se rapprochant plutôt de celle de l'aire ou encore du périmètre (Ricco et al., 1983).

Le concept de volume et les difficultés qu'il peut engendrer chez les élèves ayant été clarifiés, les cinq fonctions de notre dispositif d'aide aux élèves en difficulté explicitées, nous présentons la méthodologie choisie pour ce projet de recherche.

2. Méthodologie

Nos travaux s'inscrivent dans le courant des recherches collaboratives. Nous prenons appui sur le principe de la « double vraisemblance » prenant en compte les contraintes et les enjeux des domaines respectifs de la recherche et de l'enseignement (Desgagné, 1997, 2007 ; Bednarz, 2013) ainsi que celui de la double pertinence. Dans notre cas, le besoin des enseignants se situe dans la recherche de moyens valorisant l'engagement cognitif et affectif des élèves en difficulté lors de la résolution de problèmes. L'intérêt des chercheurs réside dans l'analyse de la mise en place et des effets d'un tel dispositif d'aide. Pour ce faire, une demi-journée d'accompagnement collaboratif est prévue pour la planification du SDA et du SDP. Le rôle de l'enseignant à cette étape est de réfléchir sur le concept en jeu, sur la situation et sur les difficultés que ce dernier pourrait engendrer chez les élèves. Le rôle du chercheur est d'accompagner l'enseignant dans la conception du système didactique en ayant en tête le concept visé et les fonctions de celui-ci. Il faut mentionner que le but du chercheur n'est pas de proposer une ingénierie didactique robuste aux enseignants, mais de les accompagner dans le processus. En ce sens, la planification résultante représente une médiation entre les deux parties selon leur expertise et le temps, tout de même limité, pendant lequel ils ont pu échanger à ce propos. L'accompagnement n'aboutit habituellement pas à une planification « clé en main » pour les enseignants : ils sont amenés à prendre en charge certains éléments liés au milieu entre le moment de planification et l'expérimentation. Une fois l'expérimentation terminée, les séances sont visionnées conjointement afin de les analyser : l'enseignant verbalise les intentions qui soutiennent ses choix, son impression de l'engagement et de la compréhension des élèves ainsi que les changements perçus sur sa pratique ou chez ses élèves. La figure 3 illustre ce déroulement.

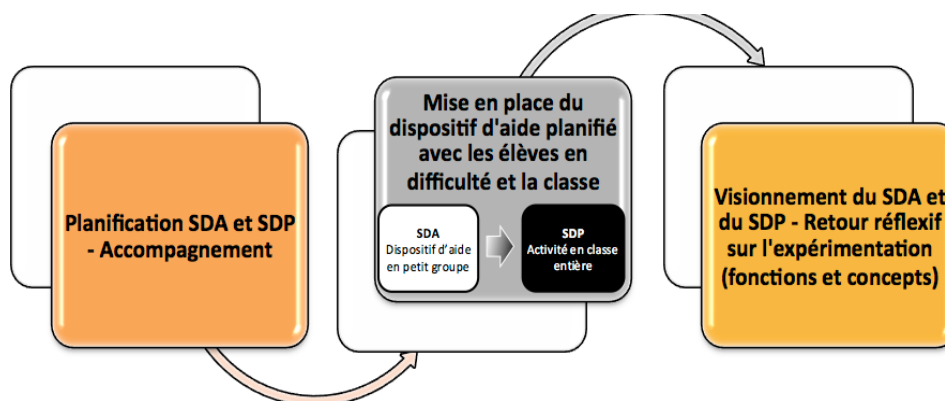


Figure 3. Schématisation du système d'accompagnement collaboratif

2.1. Traitement des données

Les données sont composées de l'ensemble des planifications des SDA et SDP, des bandes vidéo des séances du SDA et SDP, des productions des élèves, des enregistrements des entretiens auprès des enseignants avant et après chaque séance du dispositif. Les séances sont transcrites et représentent la première étape du traitement des données. Nous procédons à une analyse *a priori* des séances, puis visionnons les séances en annotant les verbatim en ce qui a trait à l'analyse *a priori*, aux cinq fonctions potentielles du dispositif et de ses effets.

2.2. Présentation du cas à l'étude

L'enseignante ciblée pour cette étude de cas, que nous nommerons Sylvie, est une enseignante d'expérience impliquée dans divers projets de recherche depuis les dix dernières années. Elle est donc ouverte aux changements, questionne ses pratiques et s'autorise à les changer. Engagée dans notre projet de recherche depuis quatre ans, elle est à l'aise avec le dispositif d'aide (elle l'a d'ailleurs exploré pour différents concepts mathématiques selon le niveau de la classe dans lequel elle enseignait). Sachant de plus qu'elle est accompagnée durant le processus de planification, elle décide de travailler sur le concept de volume avec ses élèves de 10 à 12 ans. Elle a déjà observé que ce concept cause des difficultés récurrentes chez ses élèves, mais qu'il revient fréquemment dans les évaluations ministérielles. De plus, il fait partie d'un domaine moins exploité au primaire (Salin, 2008) qu'elle-même, d'ailleurs, aborde peu en classe avec ses élèves.

2.3. Système d'accompagnement collaboratif réalisé auprès de Sylvie

Lors de la séance de planification, Sylvie mentionne qu'elle a déjà introduit la comparaison de la capacité de récipients (verres longs ou larges et boîtes de diverses formes) avec différents contenus (riz, sable, eau, cubes-unités, etc.). Son intention derrière l'étude de la capacité était d'aborder la dissociation capacité / forme, ce qui renforce, selon elle, l'aspect unidimensionnel du concept de volume. Elle propose d'aborder l'étude du volume dans le SDP avec des pavés droits. L'année précédente, les élèves ont construit des empilements de cubes et dénombré le nombre de cubes pour déterminer le volume des solides ainsi obtenus. L'intention de Sylvie est donc de revenir sur le sens du volume d'un pavé droit entamé l'an dernier en réalisant la comparaison de volume de boîtes de forme d'un pavé droit ayant des dimensions différentes, mais des volumes proches. Sylvie, l'enseignante, propose initialement de prendre différentes boîtes pouvant s'ouvrir, de demander aux élèves d'anticiper celle qui aura le plus grand volume, puis de vérifier leur hypothèse en les remplissant « à l'aide de cubes ayant un volume de 1 cm^3 ». Une discussion a alors lieu entre l'enseignante et les chercheurs à propos de la distinction entre capacité et volume, telle que nous l'avons présentée auparavant et en sachant que la capacité est aussi un volume. Ce concept de volume étant peu traité en classe et peu connu par les enseignants (Molvinger, 2013), les chercheurs s'attendaient à entretenir ce type de discussion avec Sylvie. Certains éléments conceptuels mentionnés en partie 1 sont abordés à l'aide d'un exemple (voir figure 4 (Marchand & Bisson, 2017)), notamment le fait que le volume représente l'espace qu'occupe un objet, qu'il puisse être comparé par immersion ou encore reconstitué à l'aide de cubes-unités (17 cubes-unités). La capacité correspond au volume que ce récipient peut contenir (1 cube-unité).

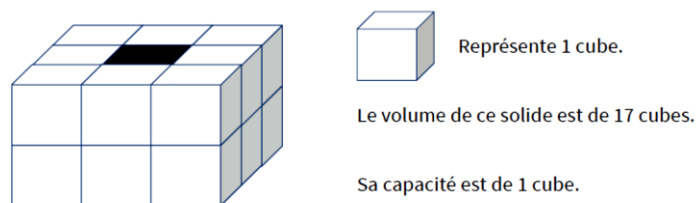


Figure 4. Exemple utilisé pour traiter de la distinction volume-capacité

L'équipe décide de modifier le matériel afin de ne pas renforcer la confusion volume-capacité chez les élèves, en proposant des objets physiques fermés comme des pavés droits en styromousse, en pâte à modeler ou en bois. Cependant, comme ce matériel n'est pas élaboré à cette étape, la discussion ne va pas plus loin.

De plus, un rappel des principales phases de l'enseignement du volume est présenté à Sylvie afin qu'elle n'aborde pas trop rapidement le calcul, le but étant de travailler

d'abord sur la représentation spatiale du concept (Rogalski, 1979) en identifiant la grandeur à l'étude sur l'objet physique puis en comparant des objets selon la grandeur isolée. Dans les phases suivantes, il s'agit de travailler la mesure avec des unités non conventionnelles, puis avec les unités conventionnelles pour enfin aborder la construction des formules (Roegiers, 2011). Les différentes étapes de la construction de la formule du volume pour le pavé droit sont aussi rappelées par les chercheurs (Janvier, 1994). Les grandes lignes du SDA et du SDP « prévus »⁹ pour ce dispositif sont présentées dans le tableau 1.

Tableau 1. SDA et SDP prévus lors de l'accompagnement

SDA prévu	Revoir avec les élèves en difficulté le concept de volume (« c'est quoi pour vous le volume ? ») et réfléchir sur des outils pour le mesurer . Sylvie fait l'hypothèse que ses élèves nommeront uniquement la règle et elle veut ouvrir aux unités de mesure non conventionnelles ou conventionnelles dont elle dispose dans la classe (ex. : reproduire le pavé à l'aide de cubes).
SDP prévu	Présenter trois pavés droits fermés de dimensions différentes ($7 \times 8 \times 9$; $16 \times 5 \times 6$; $7 \times 7 \times 10$) et demander aux élèves d'anticiper celui qui a le plus grand volume. Noter les anticipations au tableau (Objet A, B ou C) puis distribuer le matériel à chaque équipe et circuler afin de voir les techniques des élèves pour comparer les volumes . Lors du retour, comparer les résultats obtenus par chaque équipe et revenir sur les hypothèses du départ.

Rappelons que dans cette recherche collaborative, l'enseignante prend en charge la suite de la planification afin de l'expérimenter en classe et que différentes contraintes peuvent venir interférer par rapport à ce qui a été prévu pour le SDA et le SDP lors de l'accompagnement réalisé auprès d'elle.

2.4. Double analyse *a priori* du SDP

L'analyse *a priori* du SDP est réalisée selon le modèle de Assude et al. (2011). L'analyse descendante consiste en l'étude des enjeux de savoir dans la situation selon le concept mathématique visé et selon les écrits ministériels. L'analyse ascendante étudie les praxéologies possibles en termes de types de tâches et de techniques.¹⁰

⁹ Ce qui était prévu lors de l'accompagnement n'est pas ici équivalent à ce qui a été réalisé en classe.

¹⁰ Le modèle de Assude et al. (2011) constitue une triple analyse, mais dans le présent texte nous réalisons deux des trois pôles de ce modèle d'analyse. Les problèmes professionnels représentant le troisième pôle de ce modèle feront l'objet d'un article subséquent.

2.4.1. Analyse descendante

Le programme de formation à l'école québécoise (MELS, 2003) traite du concept de volume à partir du 2^e cycle (8 à 10 ans) à travers la compétence « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Il est attendu que l'élève construise « des relations géométriques complexes et [qu'il] travaille avec des instruments et des unités de mesure non conventionnels relatifs [...] aux volumes. » (p. 129) et il est question d'estimation et de mesurage avec les unités non conventionnelles. Au 3^e cycle (10 à 12 ans), les attentes sont plutôt énoncées en termes de calculs ainsi que d'appropriation des unités conventionnelles (m^3 , dm^3 , cm^3) et de leurs relations. La capacité est introduite au 3^e cycle en ciblant l'estimation et le mesurage à l'aide d'unités non conventionnelles et conventionnelles (L, mL), mais sans référence à sa définition. Ces informations sont les seules fournies par le programme de formation et elles demeurent génériques. De plus, elles semblent centrées davantage sur le cadre numérique de cette grandeur, tout comme ceci semble être aussi le cas en France (Molvinger, 2013). Anwandter-Cuellar (2013) va dans le même sens en parlant d'une « numérisation de l'étude du volume » autant au primaire qu'au collège. Alors que l'approche ministérielle pour d'autres grandeurs, comme la longueur et l'aire, semble plus équilibrée entre cadres géométrique et numérique, le volume représente le parent pauvre des grandeurs. Par conséquent, les difficultés mentionnées dans la partie 1 demeurent d'actualité (Anwandter-Cuellar, 2013).

Globalement, le programme de formation à l'école du Québec présente le volume avant la capacité, avec un accent mis sur le cadre numérique, mais peu d'information y est véhiculée et il y a également peu d'indices sur le sens à donner aux termes volume, contenance et capacité. En prenant en compte ces constats, du fait que l'objet à l'étude peut être issu de la vie courante ou d'une modélisation de cette dernière (par exemple, les objets géométriques), que les attentes en classe, surtout à l'école, peuvent générer des ruptures du contrat didactique ne sachant pas la grandeur à isoler (capacité, volume, encombrement, volume intérieur, etc.), ou de son cadre d'analyse (ici géométrique ou numérique), il est possible d'anticiper des interprétations variables ou ambiguës de la part des auteurs de manuels et des enseignants pouvant engendrer des confusions sur le sens à attribuer à cette grandeur et à l'articulation des deux cadres. Enfin, étant donné que le concept de volume est peu décrit selon ces différentes facettes dans le programme de formation, nous pouvons nous attendre à retrouver certaines difficultés conceptuelles mentionnées précédemment auprès des enseignants avec qui nous collaborons dans ce projet.

2.4.2. Analyse ascendante

Nous présentons, dans le tableau 2, les principaux types de tâches et techniques liés au SDP prévu lors de l'accompagnement de Sylvie¹¹.

Tableau 2. Type de tâches et principales techniques prévues

T₁ : Comparer le volume de trois pavés droits
Grandeur
τ_1 : Comparer perceptivement
τ_2 : Découper, recomposer et comparer par superposition
τ_3 : Immerger dans de l'eau
τ_4 : Comparer des masses dans le cas où les deux objets sont faits du même matériel
Mesure
τ_5 : Reproduire chacun des pavés à l'aide de cubes de 1 cm ³ et comparer le nombre de cubes-unités pour chacun.
τ_6 : Calculer à l'aide d'une formule (aire de la base \times hauteur; $L \times l \times h$, ...)
Mesurer (cubes, règle, pavage...), multiplier et identifier le solide qui a le plus grand volume en comparant les mesures obtenues
τ_7 : Déterminer le nombre de cubes par tranches et le nombre de tranches
Mesurer le nombre de cubes sur la première tranche et le multiplier par le nombre de tranches pour identifier celui qui a le plus grand volume en comparant le nombre de cubes obtenus.
Techniques erronées possibles¹²
Grandeur
τ_a : Sommer les aires de toutes les faces (confusion aire/volume)
τ_b : Refuser de comparer, car les formes des pavés sont différentes (confusion forme/volume)
τ_c : Se fier sur une seule dimension, celle qui est la plus grande (confusion volume/encombrement)
τ_d : Sommer les trois dimensions (longueurs)
τ_e : Sommer une aire et une longueur (stratégie mixte)
τ_f : Calculer le « périmètre du pavé » (périmètre/volume) en sommant les mesures des arêtes
Mesurage
τ_g : Sommer des nombres affectés d'unités différentes (ex. : cube-unités + cm ³)
τ_h : Faire des erreurs de mesurage
Calculs
τ_i : Faire des erreurs dans l'application de l'algorithme d'addition ou de multiplication

¹¹ Ces techniques sont issues de notre propre expérience ainsi que des travaux de Anwandter-Cuellar (2013), Janvier (1994), Perrin-Glorian (2016), Ricco et al. (1983) et Tanguay (2010).

¹² Ces techniques erronées peuvent être aussi des erreurs de techniques correctes.

Des techniques ont été ici identifiées, mais elles ne seront pas toutes accessibles aux élèves selon les choix didactiques réalisés. Par exemple, si les pavés droits sont construits en carton ou en bois, il ne sera pas possible d'exploiter τ_2 ; ou encore si les mesures des dimensions des pavés droits choisis sont rapprochées, τ_1 sera difficile d'accès. Rappelons que cette analyse est réalisée d'après ce qui a été prévu lors de l'accompagnement. Dans la section suivante, nous présentons et analysons les SDA et SDP mis en œuvre par Sylvie (séances effectives). Notre analyse porte sur les écarts entre ce qui était prévu et ce qui a été réalisé, sous l'angle des difficultés du système didactique rencontrées lors de la mise en place du dispositif d'aide aux élèves en difficulté, et de leurs effets sur les fonctions du dispositif.

3. Analyse de la mise en place du dispositif en lien avec les cinq fonctions

Les résultats concernent les principales difficultés du système didactique ayant été rencontrées lors de la mise en place de ce dispositif. Afin de mieux les situer, nous présentons en annexes 1 et 2 les synopsis du SDA et du SDP effectifs. Entre ce qui était prévu lors de l'accompagnement et ce qui a été réalisé, voici les principaux changements observés :

- I. Lors du SDA (voir annexe 1), les élèves font référence à la capacité qu'ils ont vue précédemment ; Sylvie décide alors de traiter de la différence entre volume et capacité alors que ce n'était pas prévu au départ.
- II. Sylvie modifie l'introduction du SDP (voir annexe 2) en traitant de la différence entre la capacité et le volume à la suite de ses observations dans les SDA.
- III. Le matériel choisi pour illustrer la différence capacité/volume est une boîte de forme d'un pavé droit possédant un couvercle transparent qui s'enlève et un contour épais à l'intérieur (voir l'image de l'annexe 2).
- IV. Le matériel choisi pour la réalisation de l'activité est un ensemble de pavés en carton qui ne peuvent pas s'ouvrir ni donc être remplis, mais qui sont vides.
- V. La comparaison porte sur deux boîtes (et non trois) et chaque équipe reçoit une seule de ces boîtes pour réaliser l'activité.
- VI. Durant la résolution du problème (SDP), Sylvie fait une mise au point (étape 5) afin de clarifier le concept de volume en immergeant et comparant le volume de deux objets (un cube en Plexiglas fermé et le même cube sans couvercle – voir l'image à l'annexe 2).

Ces changements semblent avoir eu des répercussions sur les fonctions du dispositif d'aide aux élèves en difficulté, mais la plus affectée est la fonction mésogénétique. Par conséquent, elle est la première traitée dans cette analyse et nous abordons les quatre autres en relation avec cette dernière.

3.1. Fonction mésogénétique

En ce qui a trait à cette première fonction, les élèves en difficulté ont rencontré certaines règles définitoires lors du SDA et le savoir en jeu est resté à l'étape d'anticipation, mais des éléments perturbateurs, comme nous le verrons dans ce qui suit, semblent avoir freiné cette fonction lors de l'expérimentation et ils représentent des difficultés du système didactique. Certaines difficultés sont liées, plus globalement, au projet d'enseignement, d'autres sont en lien avec le choix du matériel et enfin, d'autres sont issues du concept même de volume. Chacune de ces difficultés est détaillée ci-dessous.

3.1.1. Difficultés engendrées par le projet d'enseignement du volume

Une première difficulté relève des visées que Sylvie s'était fixées selon les apprentissages précédents de ses élèves et les éléments transmis lors de l'accompagnement. Voici un schéma (figure 5) qui illustre la situation :

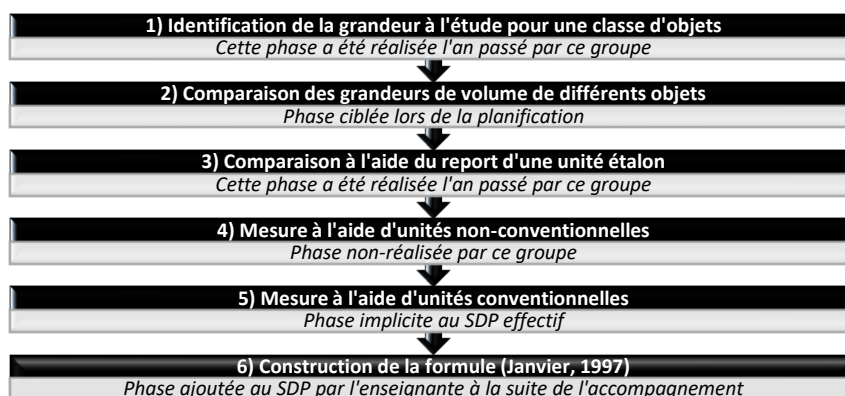


Figure 5. Chronologie de l'enseignement du volume (Roegiers, 2011)

Dans la figure 5, la progression proposée par les chercheurs (voir 2.3) est composée de six étapes numérotées ; la situation du groupe d'élèves pour chacune de ces étapes est indiquée en italique. Sylvie prend pour acquis que ses élèves peuvent identifier et isoler la grandeur volume d'un pavé droit et reconstituer un objet physique à l'aide de cubes-unités, conformément au programme de formation. Lors de l'accompagnement, ce schéma est présenté à l'enseignante, avec l'emphase mise sur la phase 2 et sur les étapes visées à la phase 6 avant d'en arriver à la formule tridimensionnelle, $L \times l \times h$ (Janvier, 1994). Après discussion, la visée prévue est la comparaison du volume de trois pavés droits (phase 2 et non pas phase 6). Pour les chercheurs, le traitement de la grandeur est central à cet objectif et le choix du matériel (trois objets fermés en styromousse) répond à cette visée, mais Sylvie s'est plutôt tournée vers la mesure. Pour réaliser le SDP, le synopsis de l'annexe 2 illustre

qu'elle a choisi de fournir : une seule boîte par équipe (changement de tâche : mesure et non plus comparaison) ; des cubes-unités de 1cm^3 (mesure) en nombre insuffisant afin de valoriser l'émergence d'une formule embryonnaire (τ_7) (phase 6). Pour les chercheurs, chacune de ces étapes nécessite plusieurs séances s'étalant sur une ou deux années scolaires. Sylvie a ainsi extrait des variables pertinentes de la phase 2 à la phase 6, mais en les intégrant à une seule séance. Peu d'éléments explicatifs de ces changements sont disponibles dans le cadre de ce projet (limite de nos données brutes), mais nous pouvons émettre l'hypothèse que cette progression n'était pas connue de l'enseignante et que son appropriation aurait nécessité une plus grande part d'investissement, par exemple en détaillant des séquences d'enseignements possibles pour chacune des phases, le matériel qui peut leur être lié, les raisonnements et les difficultés anticipées des élèves pour chacune d'elles. Cependant, le temps alloué dans ce projet n'ouvrait pas vers ce type d'appropriation didactique puisque l'enjeu était davantage l'appropriation du dispositif d'aide : il peut donc y avoir un décalage entre l'accompagnement reçu et son application en classe. Ici, nous pourrions aussi émettre l'hypothèse que la dévolution des savoirs didactiques proposés par les chercheurs semble avoir échoué à court terme pour Sylvie.

Une autre difficulté se réfère à un raccourci que Sylvie emploie pour amener les élèves à considérer les trois dimensions de la boîte pour aborder le volume :

SDA – Étapes 2-3

P : Est-ce qu'on peut trouver le volume de cette feuille? ... Tantôt toi, tu nous en as parlé de la capacité d'un verre d'eau, c'est ça ? ... donc si je veux calculer le volume de cette feuille, je vais la remplir avec de l'eau ?... Mon objet doit-être comment ?

Réponses : 3D

P : En 3 dimensions, quelque chose qu'on peut mettre de quoi dedans. [...] C'est en 3D, c'est comme ça. Donc ça prend une forme qu'on peut toucher, qu'on peut remplir avec quelque chose, ou on peut regarder l'espace que ça prend. Une feuille c'est mince, mince, donc c'est difficile de calculer le volume de ça.

SDP – Étape 4

P : Qu'est-ce que vous faites ?

E3 : Bien, je voulais mettre des petits cubes en haut [recouvrir la face du haut] sur la longueur et sur la largeur [recouvrir chacune de ces trois faces].

P : OK, qu'est-ce que ceci va vous donner ?

E3 : Ça va nous donner comme la dimension, je pense.

P : Est-ce que cela va vous donner le volume ?

E3 : Non, l'aire.

P : C'est quoi l'autre étape que vous allez devoir faire pour trouver le volume ?

[les élèves ne semblent pas savoir quoi répondre]

P : *Parce qu'hier [lors du SDA] on a parlé que c'était des objets en 3D.*

E3 : *Oui.*

P : *Donc quand on calcule le volume...*

E4 : *[inaudible] On va, on va... les trois dimensions... la hauteur [E4 pointe la face du haut de son pavé, puisqu'elle fait $L \times h$ et que E3 fait $l \times h$]... [inaudible] on va faire un « fois »...*

P : *OK, je vous laisse aller, on va regarder ça à la fin.*

Elle utilise cette explication pour mentionner qu'un objet physique qui a un volume est en 3D, mais aussi pour s'éloigner du calcul de l'aire (2D). Elle insiste sur le fait que l'objet est en 3D et que donc pour trouver le volume, il faut prendre en compte les trois dimensions. Cette explication peut devenir un moyen mnémotechnique pour le calcul de $L \times l \times h$, mais ne fait pas toujours sens dans une situation donnée : des grandeurs 2D (ex. : aire latérale) et 1D sont également attachées à l'objet 3D.

3.1.2. Difficultés engendrées par le choix du matériel pour traiter du volume

Une troisième difficulté découle du fait que les objets physiques retenus sont en carton et vides (voir annexes 1 et 2). Or l'une des conceptions des élèves avant tout enseignement du volume est attachée à la mesure de ce qui est plein (Andreucci et Mercier, 2005). Ce choix pourrait expliquer la principale technique choisie par les élèves en ne considérant que l'extérieur ; il pourrait aussi avoir renforcé l'association capacité-intérieur et volume-extérieur qui semble se dégager de l'étape 1 du SDP ou encore avoir renforcé la confusion volume-aire. L'extrait suivant présente comment cette confusion s'est manifestée chez certains élèves :

SDP - Étape 4

P : *Qu'est-ce que vous faites ?*

E7 : *Pour la surface, on fait ça fois ça, on fait ça pour chaque pour trouver le volume.*

P : *OK, donc là votre cube est vide si je comprends bien ?*

E7 et E8 : *Oui.*

P : *OK, mais comment tu peux savoir si ton cube est vide ? Moi, il occupe un espace au complet.*

E7 : *Oui.*

P : *OK, mais l'intérieur, il est plein aussi. Il occupe de l'espace l'intérieur, comme l'extérieur.*

E7 : *Oui, mais l'intérieur ne prend pas de la place parce que peu importe ce qu'il contient il ne prendra pas plus de place puisque c'est l'enveloppe qui prend de la place. C'est elle qui est constituée de la matière.*

E8 : *Ha... [...]*

P : *Continuez d'essayer. Moi je te dis que l'intérieur est occupé là (elle tape sur la boîte). Toute la boîte est occupée. Elle occupe l'espace au complet*

Comme ceci est souvent le cas, le choix du matériel vient influencer les apprentissages des élèves et ici il semble renforcer une conception spontanée des élèves à propos du volume : le volume mesure ce qui est plein.

Une quatrième difficulté est en lien avec l'utilisation d'objets physiques avec couvercle. Lors de l'introduction du SDP, Sylvie choisit un tel objet (voir l'annexe 2) pour faire la distinction entre le volume et la capacité. L'explication est cohérente en ne considérant que la boîte sans le couvercle, mais le sens change lorsque cet objet est refermé : « *Si tu reproduis l'intérieur avec les petits blocs [sa capacité], tu le mets à côté, ton résultat risque d'être plus petit que cette boîte au complet. [...] Quand je ferme la boîte, c'est sûr que la boîte prend plus d'espace que son intérieur. Parce que ses parois sont très épaisses.* ». Lorsque nous refermons cette boîte, il est question d'un autre objet – la boîte fermée. La transformation du matériel (boîte sans couvercle représentant un récipient et boîte avec le couvercle en forme de pavé droit) injecte ainsi une autre variable dans la situation qui n'est pas évidente à considérer conceptuellement. Il en est de même à l'étape 5, lorsque l'enseignante veut invalider la technique τ_a : elle choisit d'exploiter l'immersion d'un cube en Plexiglas (annexe 2). En l'immergeant, il est possible d'observer que l'espace qu'occupe cette boîte doit aussi tenir compte de son intérieur (l'eau ne peut pas prendre l'espace à l'intérieur). Mais, afin d'aller plus loin dans son explication, elle décide d'enlever le couvercle : « *Donc quand tu calcules le volume, tu dois aussi considérer l'intérieur. Mais si tu mesures juste les surfaces, il y en a qui mesurent seulement les surfaces, et ils les additionnent ensemble, ils ne trouvent pas l'espace qu'il prend. On doit considérer l'espace à l'intérieur aussi. C'est pour ça que ça monte.* » Cette explication, même si elle sous-entend des défis conceptuels importants, permet à Sylvie d'aider plus de la moitié des équipes à aller au-delà de la technique τ_a , ce qui était bien son intention ici en proposant l'immersion de ces deux objets. Mentionnons que 9 des 10 équipes de la classe avaient opté pour cette technique erronée.

3.1.3. Difficultés engendrées par la confusion volume-capacité

La distinction entre le volume et la capacité, nouvelle pour Sylvie, a été abordée lors de l'accompagnement. Lors du SDA, Sylvie remarque que les élèves ne la font pas non plus. Elle choisit par conséquent d'ajouter une explication à ce sujet dans le SDA et dans l'introduction du SDP. Les extraits ci-dessous illustrent ces deux moments et aussi un troisième où cette confusion est visible chez les élèves :

SDA - Étapes 5 – 6

P : *Là par contre, il faut faire la distinction entre capacité et volume. Parce que quand on parle de la capacité, on parle de l'espace disponible à l'intérieur de la forme. Moi, quand je te parle du volume, c'est l'espace que toute la forme prend. Donc c'est différent un petit peu. [...] Je te donne un exemple :*

P : *Tu vois, si je la remplis avec du sel au centre, je mesure la capacité de ma boîte, mais est-ce qu'elle donne l'espace que la boîte va prendre ? [...]*

P : *La capacité c'est à l'intérieur et le volume c'est combien de place ça va faire.*

SDP - Étape 1

P : *La capacité, c'est l'intérieur, c'est ce que je vais trouver si je la remplis en dedans. Tu te rappelles quand on remplissait nos contenants avec du sel, de l'eau, des liquides, des blocs, avec des choses comme ça on calculait la capacité à l'intérieur. Mais tu vois ici, ma boîte a une grosse paroi, donc si je mesure la capacité, est-ce que ça va être la même chose que l'espace qu'elle va prendre dans mon bac là-bas ? ... non. [...]* Si tu reproduis l'intérieur avec les petits blocs, tu le mets à côté, ton résultat risque d'être plus petit que cette boîte au complet.

SDP - Étape 4

P : *Qu'est-ce que vous avez fait ?*

E1 : *On a mis des cubes jusqu'en haut, puis là on a vu combien ça faisait, on a compté ça [l'aire d'une face] et ça [la face opposée]. Puis après on a mesuré ces deux-là [deux autres faces opposées] et après ces deux-là [les deux dernières faces] et puis après on a fait tout cela et puis ça nous a donné, comme heu..., tout l'espace [fait le tour de l'objet avec sa main].*

P : *OK, tu penses que ça va donner tout l'espace, tu es sûre de cela?*

E2 : *Bien, tout l'extérieur.*

P : *L'extérieur, OK. Oui, OK, mais heu..., ce qui est en dedans n'occupe pas d'espace?*

E2 : *Oui, mais c'est ? ... bien on a fait tout le tour. [...]*

P : *Si tu regardes ta figure [elle tient la boîte dans ses mains], l'espace qu'elle va occuper... l'intérieur en occupe de l'espace aussi, il en prend de l'air, il en occupe. [...]*

E2 : *Bien, il faut calculer le nombre de cubes en dedans ?*

P : *Il faut que tu la reproduises au complet, pas juste des faces avec un intérieur vide.*

E2 : *Donc il faut calculer l'intérieur aussi ?*

P : *Il faut que tu calcules combien de petits cubes il te faudrait pour tout le faire, il ne faut pas qu'il y ait d'espace vide.*

E2 : *Mais il y a du scotch [papier collant] dedans.*

P : *Oui, mais non tu ne peux pas l'ouvrir... Trouvez une façon.*

Il s'agit ici de la cinquième difficulté. Dans ces extraits, on voit que Sylvie définit le volume comme étant « l'espace que toute la forme prend ». Cependant, elle définit la capacité comme « l'espace disponible à l'intérieur de la forme », sans faire référence à l'objet de référence qui serait, ici, un récipient et non un pavé droit. Sylvie reprend le même exemple que celui présenté par les chercheurs, mais l'explique en termes d'espace intérieur. Ce faisant, les notions de volume intérieur et de récipient,

qui n'ont pas été abordés lors de l'accompagnement, viennent s'immiscer dans ses explications. Une des conséquences observées est que 9 des 10 équipes ont associé la capacité à l'intérieur et le volume à l'extérieur (son enveloppe), en choisissant la technique erronée τ_a (extrait ci-dessus, SPD, étape 4).

Une dernière difficulté découle de la précédente. Nous savions que la confusion volume-aire était fréquente chez les élèves, mais nous ne nous attendions pas à ce ratio (90% des équipes). Cette réalité a aussi surpris Sylvie qui a trouvé que les assimilations de ce type étaient particulièrement fréquentes. Voici deux extraits montrant comment cette difficulté s'est manifestée :

SDA - Étape 4 [Confrontation de la première technique]

P : *Donc si je fais ça [τ_a], est-ce que c'est juste ça que je vais calculer [les surfaces], ou je vais calculer l'espace que l'objet va prendre ?*

E6 : *Tu calcules les surfaces.*

SDP - Étape 4

P : *Qu'est-ce que vous faites ?*

E5 : *Bien, ici on va calculer en haut et en bas et on va faire un étage [face] de plus après.*

P : *OK, puis toi tu es en train de faire l'étage d'un côté et toi l'étage de l'autre côté ? Allez-vous avoir assez de petits cubes ?*

E5 : *Bien, on va faire un côté et puis on va faire fois 2 après.*

P : *Fois 2 ?*

E5 : *Oui, parce qu'il y a deux côtés [deux faces identiques].*

P : *OK, est-ce que ça va te donner l'espace que prend ta boîte, si tu fais ça ?*

E5 : *Oui...*

P : *OK... ça va être quoi la différence, heu..., avec l'aire ?*

E5 : *Je ne sais pas.*

Les élèves en difficulté ne sont pas plus en difficulté que les autres élèves de la classe puisque 9 équipes sur les 10 ont opté pour cette même technique erronée. Comment expliquer cette situation ? Par l'aide-mémoire fourni à l'étape 1 du SDP, par la confusion volume-aire, par l'emploi de cube-unités pour mesurer des aires ou par le fait que les boîtes étaient en carton (elles avaient une enveloppe, mais elles étaient vides) ?

De manière synthétique, malgré le fait que les élèves en difficulté ont pu rencontrer des éléments du milieu avant le SDP, les conditions mises en place pour la fonction mésogénétique ne semblent pas avoir permis à ces derniers de bénéficier autant que par le passé de ce dispositif d'aide. Ces conditions, exprimées ici en termes de difficultés du système didactique, viennent questionner :

- l’enseignement du volume dans la transition d’une année scolaire à une autre, du nombre de séances à y accorder et du temps dédié à chacune des phases ;
- le choix du matériel (avec ou sans couvercle, intérieur-extérieur, plein-vidé, boîte-pavé), celui-ci pouvant venir renforcer une conception spontanée des élèves ou influencer leur compréhension du volume ;
- la complexité du concept de volume en termes de confusion ou de relations pouvant être entretenues avec la capacité (qui est un volume aussi), l’aire latérale ou totale ou encore le fait que l’objet soit un récipient ou non.

3.2. Fonctions chronogénétique et topogénétique

En lien avec la fonction chronogénétique, le but du dispositif d’aide est de fournir plus de capital-temps (Assude, 2005) pour les élèves en difficulté en rencontrant avant la classe le problème qui sera à résoudre. Cette fonction a effectivement pu être ici observée : le temps didactique n’a pas avancé durant le SDA, alors que le temps praxéologique a avancé. En effet Sylvie a pu traiter le concept de volume comme étant une grandeur associée à un objet physique en 3D et les élèves ont pu rencontrer des « ingrédients » (les trois dimensions) de la formule par le biais d’un exemple de pavé droit évidé, sans toutefois qu’il n’y ait de validation. En revanche, cette fonction ne semble pas non plus jouer entièrement son rôle dans ce dispositif puisque Sylvie reprend l’essentiel du SDA lors du SDP et que, malgré le fait que les élèves en difficulté soient synchronisés avec les autres élèves du groupe, il existe un décalage entre les techniques de l’ensemble des élèves et les visées de la séance.

La fonction topogénétique s’est manifestée lors du SDP pour les élèves en difficulté par leur engagement et la prise de parole, mais de manière moins claire que par les expérimentations antérieures. Les élèves en difficulté ont levé la main lors de l’introduction de la séance afin d’émettre des réponses au questionnement de Sylvie : un des élèves propose une technique de comparaison (τ_2). Cependant, comme nous l’avons constaté précédemment, la modification de la tâche (comparer *versus* trouver le volume) et le choix du matériel (un seul objet en carton par équipe sans comparaison qualitative possible) l’ont empêchée de pouvoir la mettre en action. Ces élèves se retrouvant confrontés à des impasses, leur engagement s’est rapidement essoufflé : ne pouvant pas exploiter τ_2 , ils ont opté pour un raisonnement additif (τ_d ou τ_a) qu’ils n’ont pas su dépasser. Par ailleurs, ils ont repris les « ingrédients » mentionnés lors du SDA, mais sans être en mesure de les articuler. Cette fonction semble donc partielle puisque les élèves en difficulté ne semblent pas avoir pu bénéficier, dans les conditions mentionnées précédemment, de l’avance que pouvait leur procurer le SDA et qu’ils n’ont pu poursuivre leur engagement (affectif et cognitif) initial dans la résolution du problème lors du SDP. Comment expliquer cet

essoufflement ? Sans avoir de réponse précise, les résultats semblent pointer vers les difficultés du système didactique mentionnées ci-dessus lors de la mise en place de ce dispositif comme source d'explication.

3.3. Fonctions de distanciation et d'espace de questionnement

La fonction de distanciation a été respectée dans cette expérimentation : en effet les élèves ont rencontré le concept de volume, à un rythme moins accéléré qu'en classe, sans être mis en action et sans que leurs propositions soient validées. Ils ont par conséquent assumé une posture d'attente entre le SDA et le SDP.

Enfin, la fonction liée à la création d'un espace de questionnement n'a pas été exploitée autant que dans le cadre d'expériences précédentes. Lors du SDA, Sylvie en apprend davantage sur les conceptions qu'ont les élèves sur le volume et la capacité ainsi que sur les outils qu'ils connaissent pour mesurer cette grandeur par son questionnement. Cependant, elle prend en charge les échanges réalisés et ce choix semble influencer sur la place que les élèves occupent dans cet espace.

Conclusion

L'élaboration et l'expérimentation du dispositif d'aide ont mené l'enseignante à faire des choix dans l'action qui l'ont placée dans de nouvelles situations d'enseignement-apprentissage pour un concept peu exploré jusqu'à présent dans sa pratique professionnelle et faisant émerger des difficultés du système didactique. Ces difficultés ont eu principalement des répercussions sur la fonction mésogénétique, mais aussi, de manière systémique, sur les autres fonctions de ce dispositif. Elles semblent avoir notamment influencé la compréhension des élèves (intérieur-extérieur, récipient-pavé), leurs conceptions (plein-vidé, intérieur-extérieur, couvercle ou non), l'analyse des techniques (volume-aire-capacité) ainsi que l'objet physique à l'étude (boîte-pavé-récipient ouvert ou non) de la part de l'enseignante. En outre elles ont eu un impact sur tous les élèves (et pas seulement ceux en difficulté).

Le dispositif n'a alors pas permis d'obtenir les effets souhaités auprès des élèves en difficulté et ce constat nous amène à évoquer l'hypothèse que le système didactique auxiliaire ne crée pas de conditions favorables au déroulement du SDP lorsque sa fonction mésogénétique est ébranlée. Il nous a ainsi été possible d'observer dans ce projet des dérives significatives lors du SDP qui n'étaient pas spécifiques au SDA. Il faut d'ailleurs mentionner que le concept de volume revêt une complexité conceptuelle importante pour son enseignement au primaire, comme il a été possible de le soulever dans cet article autant par le biais de l'analyse *a priori* et *a posteriori* que par les diverses difficultés rencontrées en classe de la part des élèves et de l'enseignante. De plus, parmi ces difficultés, certaines mettent en jeu l'articulation

de l'accompagnement reçu et les pratiques de l'enseignante ou la dévolution des savoirs didactiques : jusqu'où est-il possible, pour les chercheurs, d'approfondir cette analyse didactique avec elle ? Et combien de temps peut-on y consacrer ? Pour faire écho à notre question de recherche, nous pourrions l'étendre à l'accompagnement des enseignants : *quelles sont les conditions favorables à l'accompagnement des enseignants dans la réflexion didactique entourant la mise en place d'un tel dispositif comme source de formation initiale ou continue?* Cette question sera fort probablement abordée dans nos recherches ultérieures.

Bibliographie

ANDREUCCI, C. & MERCIER, A. (2005). *Le volume : un exemple d'approche didactique d'un problème récurrent (quelques éléments pour un rapport de recherche à construire)*, Réunion du FNRS en éducation, projet de recherche « La mobilisation des connaissances antérieures. » Paris.

https://www.researchgate.net/publication/320555596_Le_volume_un_exemple_d%27approche_didactique_d%27un_probleme_recurrent_quelques_elements_pour_un_rapport_de_recherche_a_construire

ANWANDTER-CUELLAR, N. (2013). Conceptions d'élèves de collège sur la notion de volume. *Petit x*, 93, 53-75.

ASSUDE, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: integration of CABRI in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 183-203.

ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURE, K., TAMBONE, J., THEIS, L. & MORIN, M.-P. (2016a). Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté en mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(1), 1-35.

ASSUDE, T., MILLON-FAURÉ, K., KOUDOGBO, J., MORIN, M.-P., TAMBONE, J. & THEIS, L. (2016b). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques*, 36(2), 33-57.

ASSUDE, T., PEREZ, J.-M., TAMBONE, J. & VERILLON, A. (2011). Apprentissage du nombre et élèves à besoins éducatifs particuliers. *Éducation & Didactique*, 5(2), 1-20.

ASSUDE, T., THEIS, L., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURÉ, K., MORIN, M.-P. & TAMBONE, J. (2015). Étude d'un dispositif pour aider des élèves à entrer dans le milieu d'une situation mathématique, Dans L. Theis (Dir.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, Actes du colloque EMF2015 (p. 769-778). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Société Mathématique d'Algérie Alger.

BARRETT, J. E., CLEMENTS, D. H., & SARAMA, J. (2017). *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph 16 : Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume*. NCTM, Reston, VA.

BEDNARZ, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.

CHARNAY, R. & MANTE, M. (2008). *Les mathématiques au concours de Professeurs des écoles* (Tome 1). Éditions Hatier.

CHESNAIS, A. & MUNIER, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques/physique. *Actes du séminaire national de l'ARDM – 2015*. IREM de Paris – Université Paris Diderot.

CHEVALLARD, Y. & MERCIER, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–111.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

CHOPIN, M.-P. (2011). *Le temps de l'enseignement. L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe*. Presses universitaires de Rennes.

CURRY, M., MITCHELMORE, M. & OUTHRED, L. (2006). Development of children's understanding of length, area and volume measurement principles. Dans J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Dir.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 377-384). Prague : PME.

DE CHAMPLAIN, D., MATHIEU, P., PATENAUDE, P. & TESSIER, H. (1996). *Lexique mathématique, enseignement secondaire* (2e éd.). Les Éditions du Triangle d'or.

- DESGAGNE, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 31(2), 245-258.
- DESGAGNE, S. (2007). Le défi de coproduction de « savoir » en recherche collaborative, analyse d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante, Dans M. Anadòn & L. Savoie-Zajc. (Dir.), *La recherche participative, Multiples regards* (p. 89-121). Presses de l'université du Québec.
- DOUADY, R. & PERRIN-GLORIAN, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 387-424.
- GIROUX, J. (2014). Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Dans C. Mary, H. Squalli, L. Theis & L. DeBlois (Dir.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Regard didactique* (p. 11-44). Presses de l'université du Québec.
- HART, K. (1984). Which Comes First – Length, Area, or Volume? *Arithmetic Teacher*, 31(9), 16-18/26-27.
- HERAUD, B. (1991). Construction et apprentissage du concept d'aire chez l'enfant du primaire, *Bulletin de l'AMQ*, XXXI(4), 82-88.
- JANVIER, C. (1992). Le volume comme instrument de conceptualisation de l'espace, *Topologie Structurale*, 18, 63-76.
- JANVIER, C. (1994). *Le volume. Mais où sont les formules ?* Modulo Éditeur.
- JANVIER, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume, *Bulletin AMQ*, XXXVII(3), 28-41.
- JAVOY, S., DECROIX, A.-A. & DE HOSSON, C. (2018). La construction du concept physique de volume en cycle III : Quelles difficultés ? Quelles stratégies didactiques. Dans M. Abboud-Blanchard (Dir) *Actes du colloque Espace Mathématiques Francophone 2018. Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines*, (p.395-404). Université de Paris, IREM de Paris.
- JOHAN, P., CERQUETTI-ABERKANE, F. & RODRIGUEZ, A. (1997). *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3*. Hachette éducation.
- KIM, E. M., & OLAH, L. N. (2019). *Elementary students' understanding of geometrical measurement in three dimensions* (Research Report No. RR-19-14). Educational Testing Service. <https://doi.org/10.1002/ets2.12250>
- MARCHAND, P. & BISSON, C. (2017). *La pensée spatiale, géométrie et métrique à l'école : Réflexions didactiques* (2è éd.). Éditions JFD.

MARCHETT, P., MEDICI, D., VIGHI, P. & ZACCOMER, E. (2005). Comparing perimeters and areas children's preconceptions and spontaneous procedures, Dans *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME 4* (p. 766-776). Universitat Ramon Llull <http://erme.site/cerme-conferences/cerme-4/>.

MARY, C., SQUALLI, H., THEIS, L. & DEBLOIS, L. (2014 DIR.). *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Regard didactique*. PUQ.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS (MENJS) (2020). *Programmes d'enseignement – Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4)*. Arrêté du 17-7-2020 (B.O. du 28-7-2020).

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2003). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire*, Gouvernement du Québec.

MOLVINGER, K. & MUNIER, V. (2014). Étude des pratiques d'un enseignant sur les notions de contenance et de volume en CM2 en éducation prioritaire. *Educational Journal of the University of Patras*, 1(2), 34-53.

MOLVINGER, K. (2013). L'enseignement du concept de volume en CM2, *Actes du XXXXème colloque COPIRELEM* (CD-Rom, C16, p. 1-24). Nantes : COPIRELEM.

MOLVINGER, K., CHESNAIS, A. & MUNIER, V. (2017). L'enseignement de la masse à l'école élémentaire : pratique d'une enseignante débutante en éducation prioritaire. *Recherches en didactique des sciences et des technologies (RDST)*, 15, 133-167.

MOREIRA BALTAR, P. (1994-1995). Étude des situations autour du concept d'aire de surface plane. *Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, séminaire, 171, 189-218.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2016). *Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires*. hal-01385025.

PIAGET, J., INHELDER, B. & SZEMINSKA, A. (1973). *La géométrie spontanée de l'enfant* (2^{ème} éd.). P.U.F.

RICCO G., VERGNAUD, G. & ROUCHIER, A. (1983). Représentation du volume et arithmétisation - entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(1), 27-69.

ROEGIERS, X. (2011). *Les mathématiques à l'école élémentaire, tome 2. Géométrie, mesure de grandeurs, typologie des situations-problèmes*. De Boeck Université.

- ROLGASKI, J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications. Les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP*, 320, 563-586.
- SALIN, M.-H. (2006). Du CM2 à la sixième : quelques pistes pour une transition plus efficace. *APMEP-Plot*, 13, 2-7.
- SALIN, M.-H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège : le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP*, 478, 647-670.
- SENSEVY, G. & MERCIER, A. (2007). *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves*. PUR.
- SENSEVY, G., MERCIER, A. & SCHUBAUER-LEONI, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20(3), 263-304.
- TAMBONE, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'éducation-Pour l'Ère nouvelle*, 2(47), 51-71.
- TANGUAY, D. (2010). Les formules de volume et le principe de Cavalieri. *Petit x*, 84, 7-26.
- THEIS, L., ASSUDE, T., TAMBONE, J., MORIN, M.-P., KOUDOGBO, J. & MARCHAND, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire ? *Éducation et francophonie*, 42(2), 160-174.
- THEIS, L., MORIN, M.-P., TAMBONE, J., ASSUDE, T., KOUDOGBO, J. & MILLON-FAURE, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 21, 9-38.
- VERGNAUD, G. (1983). Une expérience didactique sur le concept du volume en classe de cinquième (12-13 ans). *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 4(1), 71-120.

PATRICIA MARCHAND

Université de Sherbrooke

patricia.marchand@usherbrooke.ca

CLAIRE GUILLE-BIEL WINDER

Aix-Marseille Université & UR 4671 ADEF

claire.winder@univ.amu.fr

LAURENT THEIS

Université de Sherbooke

laurent.theis@usherbrooke.ca

TERESA ASSUDE

Aix-Marseille Université & UR 4671 ADEF

teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Annexe 1. Synopsis du SDA effectif

Étape	Durée	Description du SDA	Mode de travail
1	19 s	Légitimation du dispositif d'aide et présentation du sujet de la rencontre	
2	2 min 53 s	Première question : <i>Je voulais voir avec vous, c'est quoi le volume. C'est quoi ?</i> Réponses : du bruit, ça a une quantité, le volume pour l'eau, la capacité. Sous-question : Est-ce que nous pouvons trouver le volume de cette feuille ? Sylvie voulait ici qu'ils mentionnent que les objets ayant un volume sont en 3D.	Discussion collective
3	28 s	Synthèse réalisée par Sylvie sur cette première tâche : <i>Là par contre, il faut faire la distinction entre capacité et volume. Parce que quand on parle de la capacité, on parle de l'espace disponible à l'intérieur de la forme. Moi, quand je te parle du volume, c'est l'espace que toute la forme prend. Donc c'est différent un petit peu. Donc non, je ne peux pas la remplir de sel et non je ne peux pas la remplir d'eau.</i>	
4	3 min 49 s	Deuxième question : <i>On [le] mesure avec quoi ?</i> Techniques proposées par les élèves avec la règle : mesurer l'aire des surfaces et les additionner (volume-aire latérale) ou mesurer les trois dimensions. Identification d'autres outils pouvant les aider à trouver le volume parmi ceux dans la classe. Réponses des élèves : des cubes et ensuite on regarde les dimensions extérieures (hauteur, largeur et longueur) Un élève mentionne qu'ils avaient utilisé ces cubes pour remplir des contenants, comme ils l'avaient fait avec du sel ou du sucre.	
5	3 min 6 s	Nouvelle explication : <i>Là par contre, il faut faire la distinction entre capacité et volume. Parce que quand on parle de la capacité, on parle de l'espace disponible à l'intérieur de la forme. Moi, quand je te parle du volume, c'est l'espace que toute la forme prend. Donc c'est différent un petit peu. Donc non, je ne peux pas la remplir de sel et non je ne peux pas la remplir d'eau. Parce que la capacité et le volume ce n'est pas tout à fait pareil.</i>	

Sylvie réalise cette distinction à l'aide d'un exemple (voir ci-contre)




- 6** 1 min 37 s **Synthèse** par Sylvie de ce qui est à retenir pour le SDP : les propositions faites pourront être explorées, nous aurons à mesurer l'espace occupé par un objet à l'aide, non pas de la règle, mais de petits cubes et il ne faut pas confondre capacité et volume.

Annexe 2 – Synopsis du SDP effectif

Étape	Durée	Description du SDP	Mode de travail
1	5 min 30 s	<p>Ajout d'une tâche 0 : clarification des notions de volume et de capacité sous forme de questionnement. Aide-mémoire au tableau :</p> <p><i>La capacité c'est l'intérieur de l'objet et le volume c'est l'espace occupé par l'objet</i></p>	Plénière 1
2	4 min 42 s	<p>Présentation des deux boîtes et prise des hypothèses au tableau sur laquelle aurait le plus grand volume. Votes :</p> <p>La boîte 1 ($7 \times 8 \times 9$) a le plus grand volume : 13 élèves La boîte 2 ($16 \times 5 \times 6$) a le plus grand volume : 2 élèves Les deux ont un même volume : 3 élèves</p>	En grand groupe
3	2 min 38 s	<p>Présentation de la tâche 1 et distribution du matériel : « <i>trouver le volume de ta boîte</i> ». Chaque équipe reçoit une boîte (#1 ou #2), une feuille pour les calculs et des cubes¹³. L'enseignante mentionne qu'elle va revenir sur les stratégies utilisées pour trouver le volume lors du retour.</p>	
4	23 min	<p>Réalisation de la tâche. Techniques observées :</p> <p>9 équipes : τ_a (somme des aires latérales) 1 équipe : τ_7 (nb de cubes sur la 1^{ère} tranche \times nb de tranches)</p>	En dyades

¹³ L'enseignante a fourni un nombre de cubes plus grand que le nombre nécessaire pour construire la 1^{ère} tranche, mais pas assez pour reproduire la boîte au complet (pour aller au-delà du dénombrement).

5	3 min 52 s	Mise au point à mi-parcours : comparaison de deux objets immergés (cube et cube sans couvercle) afin d'observer qu'il faut aussi tenir compte de l'intérieur de l'objet lorsque on veut trouver le volume. La τ_a est invalidée ici par l'enseignante.	En grand groupe
			
6	8 min 27 s	Ajustements des techniques par les élèves : 5 équipes : τ_7 ; 1 équipe : τ_6 ($L \times l \times h$) 1 équipe : τ_5 , mais sans soustraire les cubes sur les arêtes appartenant à deux faces et les tranches extérieures déjà calculées. 3 équipes : τ_6 , mais accompagnée d'erreur de mesurage. Par exemple, mesure de chacune des dimensions prises à l'extérieur de la boîte ($7 \times 8 \times 9$ devient $8 \times 9 \times 9$ avec le cube du coin extérieur à la base).	En dyades
7	7 min 6 s	Retour collectif sur la comparaison des volumes : La démarche de deux équipes qui ont utilisé la τ_7 pour l'objet 1 et 2 est reprise au tableau et il y a comparaison des volumes obtenus (504 cm^3 et 480 cm^3). L'activité se termine en revenant sur les hypothèses (13 élèves avaient bien anticipé) et après la cloche.	En grand groupe

**SEBASTIEN JOLIVET, ELANN LESNES-CUISINIEZ, BRIGITTE GRUGEON-
ALLYS**

**CONCEPTION D'UNE PLATEFORME D'APPRENTISSAGE EN LIGNE
EN ALGEBRE ET EN GEOMETRIE : PRISE EN COMPTE ET APPORTS
DE MODELES DIDACTIQUES**

Abstract. Design of an e-learning platform in algebra and geometry : consideration and contribution of didactic models. This article presents the design of a theoretical and methodological framework for the didactic design of a learning environment: a learning platform in mathematics for cycle 4 students (aged 12 to 15). We cross several approaches to build didactic models and their computer representation: a model of the knowledge involved in the platform, a model of the learner's reasoning, and a model of learning paths adapted to the student's learning needs. We illustrate this approach on two themes from two mathematical domains, the solving of first-degree equations in algebra and the construction of triangles in geometry.

Keywords. Combining frameworks, didactic models, learning paths, geometry, Technology Enhanced Learning

Résumé. Cet article présente la définition d'un cadre théorique et méthodologique pour la conception didactique d'un environnement informatique pour l'apprentissage humain (EIAH) : une plateforme d'apprentissage en mathématiques à destination d'élèves de cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans). Nous croisons plusieurs approches théoriques pour construire des modèles didactiques et leur représentation informatique : un modèle du savoir en jeu dans la plateforme, un modèle du raisonnement de l'apprenant et un modèle des parcours d'apprentissage adaptés aux besoins d'apprentissage de l'élève. Nous illustrons cette conception sur deux thèmes issus de deux domaines mathématiques, la résolution d'équations du premier degré en algèbre et la construction de triangles en géométrie.

Mots-clés. Croisement d'approches théoriques, modèles didactiques, parcours d'apprentissage, géométrie, EIAH

1. Introduction

MindMath¹ est un projet qui réunit des équipes de chercheurs en informatique (équipe MOCAH du LIP6²) et en didactique des mathématiques (LDAR³) ainsi que des entreprises (Tralalère, Cabrilog, Domoscio, Breakfirst⁴). L'objectif général du projet est de produire une plateforme numérique d'entraînement, permettant à des élèves de cycle 4 (élèves de 12 à 15 ans) de travailler l'algèbre et la géométrie. À cette fin, elle doit proposer aux apprenants des exercices et des rétroactions pertinents par rapport à leur activité. Au regard des objectifs de la plateforme et du travail de recherche que nous menons dans le projet, nous nous situons dans le domaine de recherche des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH)⁵. Dans la suite de l'article, nous utiliserons indifféremment les termes « la plateforme » ou « l'EIAH ». De plus, nous appelons *parcours* un enchaînement cohérent d'exercices, selon des objectifs d'apprentissage visés à un niveau scolaire donné, des connaissances des élèves et des apports de la didactique.

Il existe déjà de nombreux environnements numériques, d'apprentissage ou d'entraînement, pour les mathématiques. Certains sont directement issus de la recherche en didactique, d'autres ont pour origine des éditeurs de ressources ou des enseignants. Si on se centre sur les environnements fondés didactiquement et qui concernent les domaines mathématiques et niveaux scolaires mis en jeu dans MindMath, on peut citer l'environnement *Aplusix*⁶ (Nicaud et al., 2006) en algèbre. Il permet d'évaluer automatiquement certains aspects de l'activité des élèves sur la résolution des équations. Dans ce même environnement, Chaachoua et al. (2005) s'intéressent à la détermination automatique des conceptions des élèves relatives aux

¹ <https://www.mindmath.education>

² <https://www.lip6.fr/recherche/team.php?acronyme=MOCAH>

³ <https://www.lidar.website/>

⁴ Tralalère, Cabrilog et Breakfirst sont spécialisées dans la production de ressources et/ou plateforme éducatives. Domoscio est spécialiste de l'*adaptive learning*.

⁵ On peut se référer par exemple à la définition proposée par Tchounikine et Tricot (2011) : « Le point de jonction entre l'informatique et les questions relatives à l'apprentissage humain et à l'enseignement se situe au niveau des environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). *En tant que système informatique*, un EIAH est un programme destiné à être utilisé par les apprenants impliqués dans une situation d'enseignement et à accompagner ou susciter leur apprentissage. *En tant que champ scientifique*, l'EIAH peut être défini comme l'ensemble des travaux visant à comprendre les processus de construction des EIAH et les phénomènes d'apprentissage liés à ces environnements informatiques. » (p. 168)

⁶ <http://aplustix.imag.fr/>

équations. De son côté, le logiciel de diagnostic *Pépité* permet, de manière automatique, l'analyse des réponses et le calcul du profil des élèves aux différents niveaux scolaires de cycle 4 en algèbre élémentaire (Grugeon-Allys et al., 2012 ; Grugeon-Allys et al., 2018). Les résultats fournis par *Pépité* permettent la constitution de groupes d'élèves ayant des difficultés similaires et l'attribution de parcours d'apprentissage associés (Pilet, 2012, 2015). Dans le domaine de la géométrie, certains environnements visent des objectifs didactiques particuliers. Par exemple, QED-Tutrix est de type ITS (*Intelligent Tutoring System*) et vise à aider les apprenants dans le travail de preuve en prenant en compte leur état cognitif⁷ (Font et al., 2018). Pour les systèmes tutoriels autour de la démonstration en géométrie on peut trouver une étude comparative dans Tessier-Baillargeon et al. (2017).

Dans le projet MindMath nous proposons une approche didactique permettant à la fois la couverture des différents domaines mathématiques du cycle 4⁸ en France (avec mise en œuvre sur l'algèbre et la géométrie), la prise en compte de l'apprenant et la génération de parcours adaptatifs d'apprentissage. Pour mener à bien ce projet, nous distinguons trois grandes phases. Premièrement, définir et expliciter les différents éléments théoriques et pratiques permettant la prise en compte du didactique dans la conception des exercices, des rétroactions et des parcours, de manière articulée avec la dimension informatique du projet. Deuxièmement, les produire et les articuler dans la plateforme. Troisièmement, analyser les usages de la plateforme et ses effets, lors d'expérimentations, en classe et hors la classe, à grande échelle. Au moment de l'écriture de ce texte, la deuxième phase, celle de la mise en œuvre effective, est réalisée sur une partie des domaines algébrique et géométrique, sous-domaines sur lesquels débutent de premières expérimentations.

Nous centrons cet article sur un fondement épistémologique et didactique de l'EIAH, dans la première phase du projet. Nous présentons donc les conditions permettant d'assurer la prise en compte de divers travaux et apports de la didactique dans les différentes dimensions du projet : la conception des exercices, la génération de parcours et de rétroactions adaptés au profil didactique et à l'activité de l'élève. Les informaticiens et les partenaires industriels apportent leurs expertises en matière d'apprentissage adaptatif, d'algorithmes d'apprentissage par renforcement, de conception de ressources et de tableau de bord. Lors de la première phase du projet, nous abordons les deux grands enjeux suivants :

⁷ Dans ce système l'apprenant considéré est un apprenant moyen fondé sur le modèle MIA (Richard et al., 2011).

⁸ Classes de 5^e, 4^e et 3^e du collège français, élèves de 11 à 14 ans.

- identification et caractérisation des besoins d'apprentissage⁹ des élèves en mathématiques au cycle 4, en algèbre et en géométrie ;
- définition d'exercices et de parcours permettant de travailler ces besoins d'apprentissage.

Nous n'intégrons pas dans le modèle de l'apprenant, et son accompagnement, la prise en compte de sa motivation, de son engagement, des troubles spécifiques de l'apprentissage, etc.

Vouloir répondre aux deux enjeux identifiés ci-dessus nous amène à étudier des cadres et modèles didactiques à prendre en compte pour représenter un domaine de savoir mathématique ainsi que l'activité de l'élève sur celui-ci, et pour exploiter ces éléments informatiquement. Notre travail contient donc une triple dimension (institutionnelle, épistémologique et cognitive) et doit, de plus, s'implémenter dans un EIAH. Nous visons la définition d'un cadre de conception didactique d'un EIAH (Grugeon-Allys et al., 2021).

Avant de poursuivre, pour lever d'éventuelles ambiguïtés, précisons les aspects de l'activité mathématique que l'EIAH vise à prendre en charge¹⁰. Les ressources construites pour peupler la plateforme sont de type *exercice*, il n'y a pas d'éléments de type *cours*. Ainsi, en se référant aux six moments de l'étude tels que définis par Chevillard (2002), les moments de la *première rencontre*, de l'*exploration du bloc pratique* et de l'*institutionnalisation* sont dévolus au professeur. Les apports de cette plateforme se situent essentiellement dans le moment du *travail de l'organisation mathématique et du travail de la technique*. Les choix réalisés sur un plan didactique, pour construire les parcours et les rétroactions, permettent cependant d'envisager des apports de la plateforme pour permettre aux élèves de poursuivre *la construction du bloc technologico-théorique*.

⁹ Ce terme peut être pris dans une acception générique ici, il sera défini d'un point de vue didactique dans la section 2.3.

¹⁰ Comme pour tout artefact, nous ne pouvons préjuger des genèses instrumentales (Rabardel, 1995) qui auront lieu en classe et ce n'est pas l'objet de cet article.

2. Problématique et approches théoriques

Afin de mieux identifier les différents enjeux et la diversité des questions abordées, nous commençons par la présentation d'un exemple.

2.1. Présentation d'un exemple

Considérons l'exercice, Ex1, « Résoudre l'équation $4x + 3 = 7$ » et la production d'un élève de 4^e (cycle 4, 14 ans) : « $4x + 3 = 7$; $7x = 7$; $x = -1$ ».

Les questions soulevées par cet exercice et cette production sont multiples : l'exercice proposé est-il conforme au curriculum auquel l'élève est assujéti ? Quels sont les savoirs en jeu ? Quelles sont, *a priori*, les productions envisageables pour cet énoncé ? Quelles explications peut-on associer aux productions erronées ? Quels sont, *a priori*, les exercices que l'on peut proposer après celui-ci pour cet élève ? Comment prendre en compte à la fois l'activité de l'élève lors de la résolution de l'exercice, mais aussi son activité habituelle, c'est-à-dire sur des exercices qui portent sur la résolution des équations du 1^{er} degré, pour choisir l'exercice suivant parmi les possibles identifiés *a priori* ?

Répondre à ces questions nécessite non seulement d'envisager des approches institutionnelle, épistémologique et cognitive, mais aussi de les croiser entre elles. Pour les exercices, nous identifions les savoirs en jeu et les moyens de le résoudre, puis déterminons sa conformité à un curriculum donné. Concernant la prise en compte de l'apprenant, nous caractérisons les connaissances nécessaires pour mettre en œuvre cette résolution, les erreurs récurrentes et la complexité¹¹ de l'exercice.

L'exercice proposé ci-dessus relève de la *résolution d'une équation du premier degré* et peut être proposé à des élèves de cycle 4¹². Pour montrer les limites de cette première classification, considérons les exercices Ex2 « Résoudre l'équation $5x - 3 = 2x + 1$ » et Ex3 « Résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 5 = 3(x^2 - 6x + 7)$ ». Ils relèvent, eux aussi, de la *résolution d'une équation du premier degré*. Cependant ces trois exercices présentent des différences significatives d'un point de vue didactique. En effet, l'exercice 1 peut être résolu numériquement ou arithmétiquement, alors que les exercices 2 et 3 nécessitent une résolution algébrique en raison de la nature rationnelle non décimale de la solution. De plus, pour les exercices 2 et 3, les

¹¹ Nous considérons ici la complexité comme une caractéristique intrinsèque de la tâche au sens de (Robert, 2008).

¹² Les programmes français de cycle 4 de 2020 indiquent que les collégiens doivent savoir « résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant [...] » (MENJS, 2020, p. 132).

coefficients sont dans \mathbf{Z} et non pas dans \mathbf{N} , il est nécessaire de mobiliser la réduction d'une expression algébrique pour pouvoir résoudre l'équation. Enfin, l'exercice 3 contient, avant réduction, des termes de degré 2.

Concernant la production de l'élève pour résoudre l'exercice 1, elle peut être analysée en termes de difficultés relativement aux objets *expression algébrique* et *équation*. L'élève utilise tout d'abord une « règle de concaténation », relative à la manipulation des expressions algébriques, du type « *dans un résultat, l'expression finale est évaluée, il n'y a plus de signe opératoire* » (technique arithmétique utilisée en dehors de son domaine de validité) qui l'amène à transformer $4x + 3$ en l'expression $7x$. Dans un deuxième temps, il mobilise une autre « règle », relative à la résolution des équations cette fois, en dehors de son domaine de validité (« *quand on change de côté on change de signe* »). Dans l'exemple, il « change 7 de côté » et ajoute un signe « $-$ ».

Cet examen de l'exercice et de la production montre la nécessité d'un double mouvement par rapport au thème *résolution des équations du 1^{er} degré*. D'une part, il faut affiner la description du thème en sous-catégories pour pouvoir positionner les différents exercices de ce thème les uns par rapport aux autres. D'autre part, dans un mouvement contraire, il faut resituer la résolution des équations du 1^{er} degré plus largement au sein de l'algèbre (en particulier en lien avec la transformation des expressions algébriques et plus fondamentalement la génération de ces expressions, le rôle de la lettre, etc.) pour pouvoir analyser et caractériser les erreurs possibles. Pour compléter cette analyse, il est aussi nécessaire de situer l'activité de l'élève au regard de celle visée en algèbre à son niveau scolaire et en lien avec l'enseignement reçu. C'est la combinaison de ces éléments d'analyse qui va permettre de structurer et positionner les différents exercices les uns par rapport aux autres et ainsi de concevoir des parcours adaptés aux enjeux visés.

Il ressort de cet exemple que la conception des exercices et la création des parcours nécessitent des éléments communs : une modélisation structurée du savoir, une définition de la complexité d'une tâche et une caractérisation de l'activité *a priori* de l'apprenant. Dans les sections suivantes, nous faisons une rapide synthèse relative aux questions de la modélisation du savoir, de la régulation des apprentissages et de l'activité de l'apprenant, et enfin des modèles de l'apprenant. Cela nous permet alors de reformuler nos hypothèses et questions de recherche.

2.2. Modélisation du savoir

Diverses théories didactiques proposent une modélisation du savoir. Ainsi Ruiz-Munzón et al. (2013), qui travaillent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1999), citent la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997), la théorie APOS (Dubinsky & McDonald, 2001), l'approche ontosémiotique (Godino et al., 2007) ou encore la théorie de l'abstraction en contexte (Dreyfus et al., 2001). Comme signalé par Jolivet (2018) : hormis la TAD, ces théories sont moins adaptées pour la prise en compte de la dimension institutionnelle ou n'ont pas été exploitées dans le cadre de développements informatiques. Concernant la modélisation du savoir, nous nous centrons donc sur des travaux menés dans le cadre de la TAD dans laquelle « le savoir mathématique [est considéré], en tant que forme particulière de connaissance [qui] est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 85). Nous intégrons d'autres cadres théoriques en lien avec la dimension cognitive dans la section suivante.

Au sein de la TAD, le moyen de modéliser le savoir et l'activité associée est l'utilisation de praxéologies. En effet, comme signalé par Chevallard : « toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot *praxéologie* » (Chevallard, 1999, p. 223). Ainsi, une praxéologie¹³ est un quadruplet. D'une part, il y a le type de tâches et la ou les techniques utilisées pour résoudre les tâches d'un type donné, c'est-à-dire la *praxis*, et d'autre part, la technologie, le discours développé pour justifier les techniques (propriétés, règles, arguments logiques) et la théorie qui justifie la technologie, le *logos*. Ces praxéologies ponctuelles s'agrègent autour d'une technologie pour former une praxéologie locale (OML¹⁴), puis autour d'une théorie pour former une praxéologie régionale (OMR), et enfin autour de plusieurs théories pour former une praxéologie globale (OMG) qui définit un domaine d'étude (Chevallard, 1999). Les praxéologies se transposent dans les institutions (praxéologies à enseigner par les enseignants, praxéologies enseignées par les enseignants, praxéologies apprises par les élèves).

¹³ Ou *organisation mathématique*, notée OM dans la suite de l'article, dans le cas d'une praxéologie mathématique.

¹⁴ Nous considérons des praxéologies mathématiques, nous reprenons donc ici, et dans la suite de l'article, la notation usuelle OML (resp. OMR, OMG) pour organisation mathématique locale (resp. régionale, globale).

Pour décrire un domaine mathématique, Bosch et Gascón (2005) proposent d'introduire un modèle praxéologique de référence (MPR) afin de décrire les aspects épistémologiques caractéristiques des objets de savoir d'un domaine mathématique et les praxéologies associées permettant la construction d'un rapport idoine au savoir visé relativement aux institutions qui sont considérées pour construire ce MPR. Une fois défini, c'est un outil d'analyse pour étudier les décalages entre praxéologies à enseigner et praxéologies enseignées (Grugeon, 1997). Wozniak (2012) propose pour ces dernières une classification selon le rôle du discours technologique : *praxéologie muette* avec une composante *logos* absente, *praxéologie faible* avec une composante *logos* implicite ou limitée à l'usage d'ostensifs associés aux techniques, *praxéologie forte* mettant en jeu dialectiquement composantes *praxis* et *logos*. Le MPR est aussi un élément méthodologique essentiel pour dégager des aspects épistémologiques implicites ou ignorés des programmes et formuler des hypothèses de leur impact sur les besoins d'apprentissages à travailler (Castela, 2008 ; Grugeon-Allys et al., 2012 ; Pilet, 2015).

Afin de rendre opérationnelle, sur un plan informatique¹⁵, cette modélisation du savoir au moyen d'un MPR, Chaachoua (2018) a développé le cadre T4TEL¹⁶. Les éléments de ce cadre, exploités dans notre travail, sont présentés dans la section 3.1.

Nous avons maintenant identifié dans la littérature les éléments nous permettant de rendre compatible une modélisation du savoir avec une perspective informatique. Le deuxième besoin qui a été mis en évidence par la présentation de l'exemple de la section 2.1, est qu'il est nécessaire de pouvoir décrire l'activité de l'apprenant et organiser ses apprentissages. Nous examinons dans la section suivante divers outils théoriques permettant d'aborder ces questions.

2.3. Besoins et régulation des apprentissages de l'apprenant

Dans la section 2.1, nous avons mis en évidence des différences entre les exercices 1, 2 et 3, en particulier le fait qu'ils ne nécessitent pas la mobilisation des mêmes technologies. Pour la structuration des parcours se pose donc la question de savoir quels sont les exercices pertinents à proposer à l'apprenant. Pour l'aborder, nous définissons les *besoins d'apprentissage* d'un apprenant.

Dans une institution donnée, à un temps donné, un élève peut être confronté à un décalage, plus ou moins marqué, entre son rapport personnel au savoir, construit en

¹⁵ Ce qui est un impératif du projet MindMath du point de vue de la didactique.

¹⁶ T4 fait référence aux quatre T du quadruplet praxéologique {Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie} et TEL à Technology Enhanced Learning, terminologie anglophone pour EIAH.

formation dans les diverses institutions qu'il a rencontrées, et le rapport au savoir attendu dans cette institution (Chevallard, 2003). Nous définissons les *besoins d'apprentissage* d'un élève comme ce qui est nécessaire de travailler pour faire évoluer son rapport personnel actuel vers un rapport personnel idoine au regard des attendus de l'institution. Cette notion a été présentée par Grugeon-Allys et al. (2012) puis par Pilet (2015), en référence à un MPR du domaine algébrique et au regard des praxéologies à enseigner et de celles enseignées. Les besoins d'apprentissage correspondent donc à ce qui est à travailler par l'élève pour :

- favoriser la négociation de ruptures d'ordre épistémologique (Vergnaud, 1990) ;
- poursuivre la construction d'éléments technologico-théoriques pour résoudre des tâches du domaine nécessitant pour leur résolution la convocation de différents types de tâches (Castela, 2008).

Ces ruptures se retrouvent dans les domaines mathématiques travaillés dans la plateforme. Ainsi, Vergnaud et al. (1988) caractérisent la double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. De leur côté, Mathé et al. (2020, p. 18) indiquent une « (...) rupture au début du secondaire entre une géométrie des tracés matériels (...) et une géométrie théorique des énoncés et démonstrations ». Les moments où se manifestent ces ruptures, souvent au passage d'une institution à l'autre¹⁷, peuvent être induits par la transposition didactique en jeu dans les curricula. Ces derniers peuvent prendre en compte et accompagner ou non, les décalages entre institutions, notamment par la définition des praxéologies à enseigner. L'appui sur un MPR du domaine mathématique permet de caractériser ces décalages. Ceci a été illustré par Grugeon (1997) pour la transition voie professionnelle – voie technologique du lycée. Mais, au-delà des effets liés aux curricula, les praxéologies apprises dépendent fortement des praxéologies enseignées. Ainsi celles-ci peuvent être complètes ou non, permettre ou non de développer des raisons d'être des savoirs et leurs composantes *logos*. Au final, les praxéologies apprises dépendent aussi des discours technologiques développés par les enseignants pour justifier les techniques. Cette approche a déjà été exploitée dans l'étude de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire au cycle 4 (Grugeon-Allys, 2010 ; Pilet, 2015).

Du point de vue du sujet cognitif, les élèves engagent des processus de conceptualisation de notions au cours et à la suite de la résolution de situations et de tâches des domaines mathématiques relatifs aux savoirs travaillés en classe. De plus, l'apprentissage dépend aussi de l'activité développée par chaque élève lors de la réalisation des tâches proposées et de sa perception des buts. Nous faisons référence

¹⁷ Par exemple dans le système scolaire français les deux ruptures évoquées précédemment ont principalement lieu lors du passage du cycle 3 au cycle 4.

ici à la distinction entre tâche et activité, tâche prescrite et tâche effective ainsi qu'à la double régulation de l'activité (Robert & Rogalski, 2005 ; Vandebrouck, 2013). En particulier selon les énoncés des tâches, leur résolution nécessitera des mises en fonctionnement des connaissances anciennes et nouvelles des élèves, sous forme d'application directe ou non, et parfois des adaptations à la charge des élèves (Castela, 2008 ; Robert, 1998, 2010), ce qui définit leur complexité. Les adaptations que les élèves auront à faire relèvent de plusieurs aspects : reconnaissance de modalités d'application des propriétés et de leurs domaines de validité, introduction d'intermédiaires, changement de points de vue et mises en relation. L'activité dépend aussi des déroulements en classe, ainsi que de l'autonomie et de la responsabilité laissées à la charge de l'élève.

Nous faisons l'hypothèse que la mise en perspective de ces trois points de vue – du côté du savoir, du côté de l'institution et du côté de l'élève – permet de définir des besoins d'apprentissage d'un apprenant aidant à la régulation des apprentissages.

Ce travail peut s'inscrire dans plusieurs moments de l'étude¹⁸ :

- faire prendre conscience et négocier des ruptures d'ordre épistémologique non abordées au cours des moments de la *première rencontre* et de l'*exploration du bloc praxique* en abordant les limites de portée de certaines techniques. Développer l'exploration du bloc praxique et la construction du bloc technologico-théorique (concepts d'expression littérale, d'équation, etc.). Ceci est abordé très partiellement dans la plateforme ;
- remettre en question les techniques et technologies erronées mises en jeu par des élèves ;
- renforcer les praxéologies déjà travaillées lors des premiers temps du travail de l'organisation mathématique et de la technique, en les articulant avec d'autres praxéologies (résoudre des équations à coefficients dans \mathbf{Q} après avoir travaillé les équations à coefficients dans \mathbf{Z} par exemple).

Cette approche permet d'éclairer les technologies développées par les élèves, anciennes, idoines ou erronées, et de déterminer des praxéologies à travailler pour montrer l'inadaptation de technologies anciennes et pour expliciter des discours technologiques afin de montrer les limites de portée de techniques (Kaspary et al., 2020). Un moyen de prendre en compte l'apprenant et son rapport au savoir à travailler est développé dans la section suivante avec le *mode technologico-théorique* de l'apprenant dans un domaine donné.

¹⁸ Comme spécifié dans la section 1, tous ces moments ne sont pas ciblés par la plateforme.

2.4 Modes technologico-théoriques et modèle didactique de l'apprenant

Grugeon (1997) définit un modèle de l'apprenant, repris dans Grugeon-Allys et al. (2012), qui donne un modèle intelligible du rapport personnel de l'élève à un savoir donné dans une institution donnée, nommé profil de l'élève. Celui-ci décrit en termes de cohérences sur le domaine de savoir étudié, les principaux traits des activités effectives de l'élève, activités parfois erronées. Les éléments abordés dans la suite de cette section sont toujours relatifs à un domaine de savoir donné. Pour chaque tâche d'une praxéologie locale, une description de l'activité de l'élève au niveau microscopique d'une tâche prenant en compte la composante *praxis* c'est-à-dire les techniques, rend difficile une synthèse significative et opératoire des activités effectives de l'élève sur le domaine de savoir travaillé. Le modèle de l'apprenant repose sur un niveau macroscopique de description de l'activité de l'élève sur les tâches du domaine, en prenant en compte la composante *logos* de l'activité, c'est-à-dire, technologie et théorie. Cette démarche permet ainsi une opérationnalité du modèle de l'apprenant pour concevoir des parcours d'apprentissage adaptés aux besoins d'apprentissage.

Ce modèle a été formalisé dans le cadre de la TAD (Grugeon-Allys, 2016). L'étude du développement des apprentissages s'appuie sur l'analyse des praxéologies apprises de l'élève, praxéologies convoquées au cours de la résolution de tâches. Il s'agit de situer les praxéologies apprises relatives à un savoir mathématique au regard des praxéologies à enseigner et de celles enseignées. Dans ce dessein, nous utilisons un MPR du domaine¹⁹ à partir d'une hiérarchisation des éléments de la composante *logos* au regard des technologies et théories attendues dans une institution donnée. Cette hiérarchie vise à inférer des conditions didactiques pour caractériser des parcours en relation avec les besoins d'apprentissages d'élèves.

Pour une praxéologie locale donnée, un *mode technologico-théorique* correspond à la composante *logos* mise en jeu de façon dominante dans la variété des techniques / technologies personnelles, correctes ou erronées, employées par l'élève au cours de la résolution de différentes tâches de cette praxéologie. Ces modes sont définis *a priori* à partir d'une étude épistémologique du côté du savoir et du côté des élèves, en lien avec les institutions en jeu : mode technologico-théorique relevant d'un *logos* « ancien » (par exemple arithmétique en ce qui concerne l'algèbre), mode

¹⁹ Nous nous distinguons ici de l'approche de Croset et Chaachoua (2016) avec les praxéologies personnelles. En effet dans le cas des praxéologies personnelles, l'élève est considéré comme une institution avec des types de tâches erronés. Nous ne prenons en compte que les praxéologies institutionnelles, mais pour lesquels des techniques et technologies erronées ont été développées. Nous faisons donc référence aux praxéologies apprises.

technologico-théorique relevant d'un *logos* muet ou incomplet ne permettant pas de contrôler des techniques personnelles erronées, mode technologico-théorique attendu dans l'institution. Dans l'exemple de la section 2.1, on peut faire l'hypothèse que l'élève relève du mode ancien *arithmétique*. Les modes technologico-théoriques sont spécifiés pour chacune des praxéologies constitutives du domaine mathématique. Dans le cas de l'algèbre élémentaire, les modes technologico-théoriques sont spécifiés selon les praxéologies : calculer, modéliser, représenter, justifier (Grugeon-Allys, 2016). Pour la géométrie ces modes technologico-théoriques sont définis dans la partie 4 de cet article pour la praxéologie *construire*.

Le modèle didactique de l'apprenant est ainsi structuré par un n -uplet²⁰ de modes technologico-théoriques développés par l'apprenant pour les praxéologies constitutives d'un domaine mathématique. Dans le cas d'un mode technologico-théorique relevant d'un *logos* incomplet, une typologie d'erreurs y est associée. C'est ce modèle, complété par la prise en compte des réussites aux exercices, qui est exploité pour décrire le profil d'un élève.

2.5. Nos hypothèses et questions de recherche

Dans les sections précédentes, nous avons présenté le cadre didactique retenu pour une modélisation du savoir, des besoins d'apprentissage et du modèle de l'apprenant. Nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de différentes approches, épistémologique, institutionnelle et cognitive, par une conjugaison de théories didactiques, permet de définir les conditions didactiques pour concevoir des parcours adaptés aux besoins d'apprentissage d'élèves sur une plateforme d'entraînement aux mathématiques.

Plus précisément nous allons répondre aux questions suivantes :

- En quoi la définition praxéologique d'une tâche, affinée par des variables didactiques de portée et de complexité, permet-elle la définition d'une famille de tâches, pour une praxéologie locale donnée, et *in fine* la génération d'exercices qui se laissent implémenter dans un EIAH ?
- En quoi une telle définition permet-elle de concevoir des parcours, en lien avec les besoins d'apprentissage de l'apprenant, transposables dans un EIAH ?

3. Développements proposés dans le cadre du projet

Pour répondre aux questions présentées ci-dessus, nous présentons successivement le modèle didactique de la famille de tâches, le modèle didactique de parcours et

²⁰ La valeur de n dépend du domaine mathématique étudié.

enfin une représentation informatique qui permet leur exploitation. Nous illustrons nos approches en continuant à développer l'exemple introduit dans la section 2.1, la section 4 étant consacrée à la présentation d'un exemple détaillé en géométrie.

3.1. Modèle didactique de la famille de tâches

Dans le projet, nous devons générer des tâches, aussi bien en algèbre qu'en géométrie, pour créer des exercices²¹. Afin de pouvoir répondre aux différents objectifs de la plateforme, nous caractérisons une tâche générée par :

- les savoirs en jeu dans la tâche ;
- sa conformité à un curriculum donné ;
- la ou les techniques permettant de réaliser cette tâche et les technologies mobilisées dont celle visée ;
- sa complexité.

Ces différents éléments permettent de positionner les tâches les unes par rapport aux autres dans la perspective de la construction des parcours et d'identifier les technologies erronées plausibles par rapport à la tâche.

Pour ce faire, nous nous appuyons sur la modélisation du savoir (section 2.2) et la modélisation de l'apprenant (section 2.4). Nous utilisons un modèle praxéologique de référence relatif au savoir en jeu et les modes technologico-théoriques mis en jeu par un apprenant en cours d'apprentissage de ce savoir. Chaque domaine, algèbre et géométrie, est considéré comme une praxéologie mathématique globale (OMG) et est structuré en praxéologies régionales (OMR) et locales (OML). Nous présentons une telle structuration de la géométrie dans la section 4.1.

In fine, une tâche est produite à partir d'un générateur, qui est dans une OML, elle-même incluse dans une OMR. Ces différents niveaux d'inclusion permettent de caractériser l'articulation entre les savoirs à un niveau élevé de granularité. Par exemple dans le domaine de l'algèbre, l'OMR des expressions algébriques contient les OML *calculer*, *représenter*, *modéliser* et *justifier*. L'OML *modéliser* mobilise des éléments de l'OML *représenter* ; tandis que l'OML *justifier* mobilise les trois autres. Ainsi, il est possible d'avoir un premier positionnement des praxéologies les

²¹ Il est important de noter qu'il a été choisi dans le projet, notamment en raison de contraintes informatiques, de proposer des exercices constitués d'une seule tâche. Les problématiques liées à l'articulation de plusieurs questions dans un même exercice ne se posent donc pas dans le cadre de notre travail.

unes par rapport aux autres et de penser des parcours de l'élève en prenant en compte les interactions entre ces différents niveaux de structuration du savoir. Nous illustrons cette structuration, pour l'algèbre, sur la Figure 1.

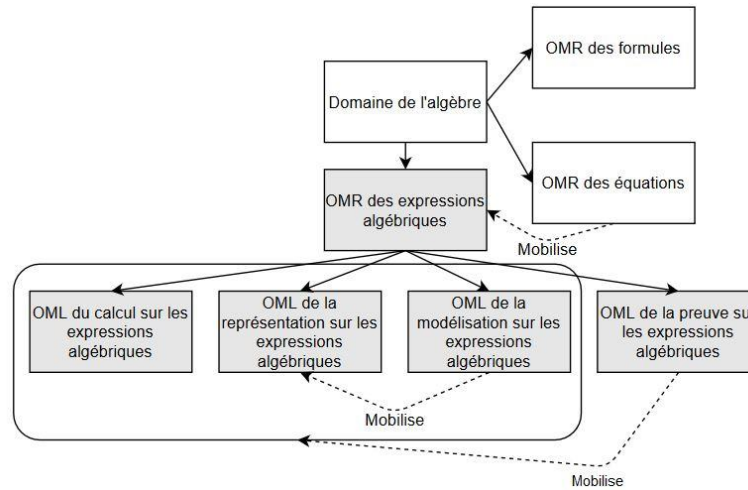


Figure 1. Illustration de la structuration de l'algèbre et des relations entre les niveaux

Comme nous l'avons montré dans la section 2.1 avec les trois exercices qui relèvent tous de l'OML de la résolution des équations ; au niveau de l'OML nous ne disposons pas encore d'une précision suffisante pour générer et surtout discriminer des tâches d'une praxéologie donnée au regard des objectifs de caractérisation que nous avons fixés ci-dessus. L'OML est donc, à son tour, constituée de praxéologies ponctuelles. Par exemple, l'OML *calculer* des expressions algébriques est constituée de trois praxéologies ponctuelles : *développer*, *factoriser* et *réduire* une expression algébrique. Pour modéliser ces praxéologies ponctuelles, dans le modèle T4TEL, Chaachoua et al. (2019) définissent des générateurs de types de tâches. Un processus de construction des trois générateurs *développer*, *factoriser* et *réduire* une expression algébrique est détaillé dans (Jolivet, 2018).

Nous précisons l'usage des générateurs de types de tâches proposés dans T4TEL en distinguant deux ensembles de variables : d'une part les variables de types de tâches (Chaachoua et al., 2019) et d'autre part les variables de tâches (Grugeon-Allys et al., 2018 ; Lesnes-Cuisiniez & Grugeon-Allys, 2019). Le choix des valeurs des variables de type de tâches permet de définir différents types de tâches, rendant compte de l'agrégation de différentes technologies dans l'OML. Les variables de tâches et le choix de leurs valeurs ont une double fonction : d'une part, caractériser la portée de certaines techniques (cette fonction est partiellement prise en charge, comme prévu par Chaachoua et al. (2019), par certaines valeurs des variables de types de tâches)

et d'autre part caractériser la complexité des tâches. Ainsi, ce que nous appelons un générateur de familles de tâches est défini par un verbe d'action, un complément fixe, un ensemble de variables de types de tâches – et leurs valeurs – et un ensemble de variables de tâches – et leurs valeurs. L'instanciation des variables de types de tâches permet de définir des types de tâches. À partir de ceux-ci, l'instanciation des variables de tâches permet de définir des *familles de tâches*. Une famille de tâches est un ensemble de tâches que le choix des valeurs des variables nous amène à considérer comme semblables à l'aléatoire de génération près. Il s'agit du niveau de granularité le plus fin que nous définissons dans la modélisation du savoir construite.

Nous illustrons maintenant ces éléments à l'aide de l'exemple abordé dans la section 2.1. La tâche « Résoudre l'équation $4x + 3 = 7$ », concerne le domaine de l'algèbre, au sein de l'OMR des équations et dans l'OML *calculer* sur les équations. Dans cette OML nous considérons le générateur qui est défini par le verbe d'action « Résoudre », le complément fixe « une équation du premier degré » et les variables suivantes :

- variable de type de tâches 1 (VT1) : structure de l'équation ;
- variable de type de tâches 2 (VT2) : nombre de solutions de l'équation ;
- variable de tâches 1 (Vt_P1) : nature des solutions ;
- variable de tâches 2 (Vt_C1) : nature des coefficients ;
- variable de tâches 3 (Vt_C2) : complexité de la réécriture.

Les différentes valeurs de VT1 sont détaillées dans la Figure 2. Elles permettent de distinguer, par exemple, les équations de la forme $ax + b = c$ de celles de la forme $ax + b = cx + d$. Ce qui est pertinent à la fois sur le plan institutionnel et sur le plan des techniques associées. La variable Vt_P1 est fondamentale pour rendre compte de la portée des techniques de nature arithmétique, qu'on veut voir évoluer au profit des techniques algébriques. Or, le choix d'une racine rationnelle non décimale (dans $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{D}$) est un moyen de rendre les techniques arithmétiques inopérantes, d'où l'intérêt de définir la variable Vt_P1 à laquelle on associe en particulier deux valeurs : $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{D}$ et \mathbf{D} . Les deux variables Vt_C1 et Vt_C2 permettent de caractériser la complexité de l'équation à résoudre. La variable Vt_C2, complexité de la réécriture, indique s'il y a nécessité de convoquer les OMP *développer* et *réduire* une expression algébrique, qui appartiennent à une autre OMR, préalablement à la résolution algébrique de l'équation $ax + b = cx + d$ avec $a - c \neq 0$.

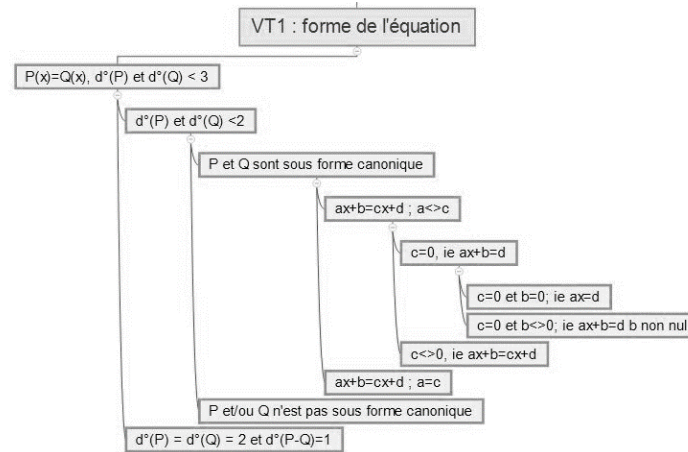


Figure 2. Structuration des valeurs de la variable de types de tâches 1 du générateur "Résoudre une équation du 1er degré"

À partir de ce générateur, nous pouvons définir la famille de tâches Ft_1 : {forme de l'équation : $ax + b = c$; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions : \mathbf{N} ; nature des coefficients : \mathbf{N} ; complexité de la réécriture : aucune réécriture nécessaire} à partir de laquelle il va être possible de générer l'exercice « Résoudre l'équation $4x + 3 = 7$ » en fixant de manière aléatoire les coefficients a , b et c de VT1 tout en respectant les contraintes définies par les valeurs des autres variables²². On peut noter que les exercices, Ex 2 « Résoudre l'équation $5x - 3 = 2x + 1$ » et Ex 3 « Résoudre l'équation $3x^2 - 2x + 5 = 3(x^2 - 6x + 7)$ » n'appartiennent pas à Ft_1 mais, respectivement à Ft_2 = {forme de l'équation : $P(x) = Q(x)$ avec $d^\circ(P)$, $d^\circ(Q) < 2$, soit $ax + b = cx + d$ avec a et $c \neq 0$; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions : $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{D}$; nature des coefficients : \mathbf{Z} ; complexité de la réécriture : aucune réécriture nécessaire} et Ft_3 = {forme de l'équation $P(x) = Q(x)$ avec $d^\circ(P) = d^\circ(Q) = 2$ et $d^\circ(P - Q) = 1$; nombre de solutions : 1 ; nature des solutions : \mathbf{D} ; nature des coefficients : \mathbf{Z} ; complexité de la réécriture : développement et réduction}.

Dans le projet, nous exploitons ce générateur de diverses manières. Tout d'abord, les types de tâches sont obtenus par instanciation des valeurs des variables de types de tâches. Ce premier niveau permet de définir une structuration de l'ensemble des équations du premier degré, pertinente au regard des programmes de cycle 4 et d'un point de vue didactique. Puis, à un deuxième niveau, des familles de tâches (Ft) sont définies au sein d'un type de tâches en fixant une valeur pour chacune des variables

²² Le travail de génération et de vérification des contraintes est réalisé par le partenaire CabriLog.

de tâches. Il s'agit du plus petit élément pouvant être produit par un générateur. C'est donc à partir d'une famille de tâches que vont être produites les tâches qui seront communiquées à l'élève. Les choix réalisés dans la définition des familles de tâches, c'est-à-dire le choix des combinaisons de valeurs de VT et Vt, visent deux fonctions :

- produire des familles de tâches qui permettent de motiver et travailler le passage d'une technique à une autre en jouant sur leurs portées et la technologie en jeu ;
- produire des familles de tâches qui mobilisent la même technique, mais sont plus ou moins complexes en terme d'activité cognitive sollicitée à travers la convocation de types de tâches relevant d'une autre OMR.

Dans un deuxième temps, la structuration des valeurs des variables de types de tâches et de tâches permet d'obtenir une structuration des familles de tâches. Elle est illustrée par la Figure 3. Les branches avec « ... » ne sont pas développées, mais se poursuivent à l'image de la branche « centrale » qui est plus détaillée. C'est la combinaison de cette structuration des familles de tâches et des fonctions précédemment définies des différentes variables, qui va permettre de concevoir un premier niveau de parcours.

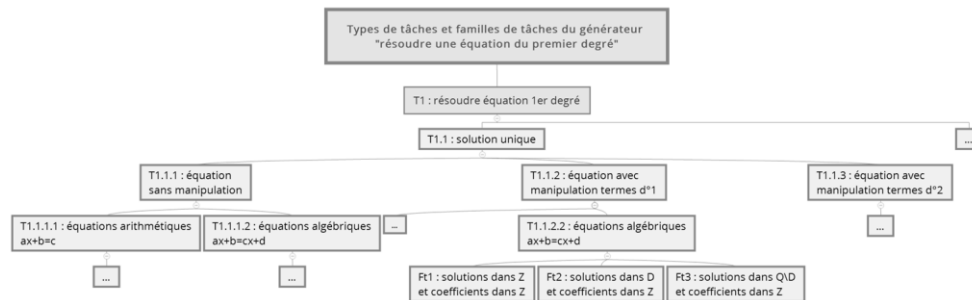


Figure 3. Illustration partielle de la structuration des types de tâches et familles de tâches pour la résolution des équations du 1er degré.

Attribuer un niveau de conformité institutionnelle aux différentes valeurs de variables de types de tâches et variables de tâches permet d'indiquer l'adéquation entre une famille de tâches et un niveau institutionnel. Cette approche est détaillée dans (Jolivet et al., 2022).

Le modèle didactique de la famille de tâches que nous avons défini permet ainsi de définir l'ensemble des possibles (c'est-à-dire l'ensemble des familles de tâches produites à l'aide d'un générateur). Nous allons maintenant présenter l'organisation de ces éléments pour produire des parcours.

3.2. Modèle didactique de parcours

Nous avons vu dans les sections 2.3 et 2.4 que les besoins d'apprentissage de l'élève dépendent de son profil et sont corrélés aux modes technologico-théoriques le caractérisant selon les praxéologies constitutives du domaine dans lequel le travail a lieu. Nous avons aussi rappelé la nécessité de proposer des tâches en conformité avec les attentes institutionnelles. Il s'agit maintenant de préciser les fondements permettant d'organiser les différents exercices en parcours, qui répondent à ces besoins d'apprentissage. Pour définir des parcours, nous nous appuyons sur les variables de type de tâches, les variables de portée et de complexité pour définir une chronologie entre tâches. Par exemple, pour la structuration présentée dans la figure 3, nous identifions tout d'abord la famille de tâches Ft2 comme étant le *cœur de cible* des apprentissages visés en classe de 4^e et de 3^e. En amont de ce *cœur de cible*, on va pouvoir faire travailler les élèves dans le type de tâches T1.1.1 avec une transition organisée du type de tâches T1.1.1.1 vers le T1.1.1.2 pour les amener d'une résolution arithmétique vers une résolution algébrique. Le passage au type de tâches T1.1.2 au sein duquel la résolution des tâches met en jeu des manipulations d'expressions algébriques du type réduction et/ou développement va permettre de poursuivre la construction du bloc technologico-théorique visé dans l'institution en mobilisant une OML externe à celle de la résolution des équations du 1^{er} degré. Enfin l'identification des familles de tâches Ft1, Ft2 et Ft3 permet de faire varier la complexité des tâches, complexité qui va encore pouvoir être augmentée en allant explorer les familles du type de tâches T1.1.3.

En complément de cette structuration du savoir, on prend aussi en compte le mode technologico-théorique de l'apprenant, relatif au domaine travaillé, pour l'amener à travailler au plus près de ses besoins d'apprentissage. C'est ce mode qui permet de déterminer à quelle distance il faut remonter en amont de la famille de tâches cibles, et s'il est nécessaire de remobiliser des familles de tâches qui ont pour enjeu de faire prendre conscience à l'apprenant de l'insuffisance de techniques fondées sur des technologies anciennes. C'est aussi la prise en compte du mode technologico-théorique qui permet de répartir les exercices autour de la cible, qui est l'objectif commun à tous les élèves, selon leur complexité.

On peut ainsi représenter de manière simplifiée le modèle de parcours issu du Tableau 1. Les pourcentages²³ indiquent le volume approximatif de travail qu'il est prévu de consacrer à la famille de tâches de la colonne. Nous ne discutons pas dans

²³ Ces pourcentages sont fixés suite à des expérimentations menées en classe notamment autour de la recherche sur *Pépîte*. Ils pourront être réinterrogés au regard des résultats de l'expérimentation de la plateforme MindMath.

cet article des mécanismes déterminant le passage d'une famille de tâches à une autre, il est cependant possible que les deux dernières colonnes ne soient pas ou peu explorées. Il est par contre nécessaire que la colonne cible le soit, si besoin à la suite des actions de l'enseignant pour retravailler les éléments nécessaires dans les colonnes précédentes. Un exemple détaillé d'un tel parcours en géométrie est présenté dans la section 4.4.

Tableau 1. Modèle simplifié de parcours en fonction du mode technologico-théorique.

Mode technologico-théorique	Familles de tâches pouvant être résolues avec une technologie ancienne	Familles de tâches pivots pour négocier la rupture	Familles de tâches cibles : mobilisation de la technologie visée	Familles de tâches cibles en restant dans l'OMR travaillée	Familles de tâches cibles avec convocation de praxéologies d'autres OMR
Ancien non idoine	10%	20%	50%	20%	
Incomplet		15%	50%	20%	15%
Idoine			40%	40%	20%

3.3. Représentation informatique du savoir et de l'activité mathématique

Un enjeu central du projet est de pouvoir exploiter informatiquement les différents aspects définis précédemment. Il s'agit donc de représenter, de manière structurée, les praxéologies et d'autres éléments liés au modèle de l'apprenant. Pour cela nous avons construit une ontologie, c'est-à-dire : « dans le contexte de l'informatique et des sciences de l'information, une ontologie définit un ensemble de représentations élémentaires avec lesquelles modéliser un domaine de la connaissance ou du discours. Les représentations élémentaires sont généralement des classes (ou ensembles), des attributs (ou propriétés) et des relations (ou liens entre les instances des classes). » (Gruber, 2009).

Nous avons donc une approche similaire à celle développée dans le projet Cartographie des savoirs, au sein duquel une représentation informatique du savoir pour les disciplines mathématiques et français du cycle 2 a été produite (Mandin & Guin, 2014) permettant de construire « différents services (production de profils des élèves, production de tests de diagnostic, etc.) » (Chaachoua, 2018, p. 21). L'utilisation de ce type de représentations a aussi été développée par Jolivet (2018)

avec l'exploitation d'une telle ontologie basée sur l'utilisation de générateurs de types de tâches. Une autre exploitation, toujours basée sur la même approche et mettant en jeu la portée des techniques est présentée dans (Vu & Tchounikine, 2020).

Dans le cadre du projet MindMath, l'ontologie construite sert de pivot pour la communication et l'échange d'informations entre les différents partenaires du projet. Elle permet de structurer et d'explicitier les différents concepts didactiques mis en jeu. Nous commençons tout d'abord par déclarer les niveaux praxéologiques globaux, régionaux et locaux qui permettent de modéliser et de structurer le domaine de savoir et mettons en exergue les relations qui les lient. Par exemple, nous explicitons le fait que l'*OMR des expressions algébriques* est mobilisée dans l'*OMR des équations*. De même, au sein de l'*OMR des expressions algébriques*, l'*OML prouver* va mobiliser les *OML modéliser, représenter et calculer*. L'explicitation de ces relations est nécessaire pour la construction des parcours. Nous déclarons aussi les différentes théories (au niveau des OMG) et les différentes technologies (au niveau des OMR) qui rentrent en jeu dans la description des praxéologies.

Une fois ce premier niveau transversal explicité, nous définissons les éléments permettant de construire les générateurs qui décrivent les OML. Pour un générateur donné, nous définissons les variables de types de tâches et variables de tâches ainsi que les valeurs associées. Ces valeurs sont déclarées de manière structurée par le moyen d'ensembles inclus ou disjoints (voir Figure 2). Cette modélisation permet de définir des types de tâches (vecteurs de valeurs fixées de variables de types de tâches) et des familles de tâches (vecteurs de valeurs fixées de variables de types de tâches et de variables de tâches), mais aussi de calculer, en raisonnant sur l'ontologie, la structuration de ces éléments, à l'image de la Figure 3 présentée précédemment. À ces types de tâches et familles de tâches sont associées les techniques qui permettent de les réaliser. Pour une technique nous déclarons deux relations importantes : une technique est justifiée par une technologie et, le cas échéant, une technique met en jeu un ingrédient qui est un type de tâches issu d'un autre générateur. Ces relations sont exploitées pour la conception de parcours, par exemple en permettant de regrouper des exercices issus de familles de tâches différentes, mais qui mobilisent une même technologie.

D'autre part, l'ontologie contient aussi les modes technologico-théoriques et les technologies erronées (identifiées *a priori* au moyen du travail d'analyse didactique) qui y sont associées. Nous exploitons ces technologies erronées à un double niveau. Tout d'abord, de manière locale, quand l'élève réalise une tâche, pour produire des rétroactions aux apprenants qui intègrent les savoirs visés, mais qui prennent aussi en compte une hypothèse sur ce qu'a été leur activité lors de la résolution de la tâche pour les amener à faire évoluer leur rapport au savoir. Puis, d'une manière plus globale, pour la construction des parcours, en identifiant les modes technologico-

théoriques qui permettent de définir des catégories d'erreurs liées, non pas seulement au savoir travaillé, mais aussi à des savoirs antérieurs non maîtrisés par l'apprenant.

Enfin, ces éléments sont liés aux institutions dans lesquelles ils sont conformes. Ceci est le moyen de déterminer non seulement l'adéquation d'une tâche à un niveau scolaire donné, mais aussi de connaître la viabilité et l'idonéité d'une technologie pour un niveau donné et ainsi d'adapter les rétroactions à l'apprenant en fonction de son mode technologico-théorique en cours. Les rapports entre techniques, technologies et institutions sont le fondement du calcul des parcours.

3.4 Synthèse

Dans cette troisième section nous avons donc présenté l'ensemble des modèles didactiques définis et exploités dans le cadre du projet MindMath permettant la représentation du savoir, la mise en relation de l'activité de l'élève avec le savoir et la représentation informatique de ces modèles. Ils permettent à la fois l'identification de familles de tâches, la génération de tâches, ainsi que la conception et la génération de parcours d'apprentissage. Nous avons choisi comme domaine d'illustration celui de l'algèbre qui a, par ailleurs, été déjà exploité dans divers travaux. La quatrième section de cet article propose la mise en fonctionnement de ces différents éléments dans le domaine de la géométrie, et plus précisément dans le cas des triangles.

4. Illustration sur l'organisation mathématique régionale des triangles

Contrairement à l'algèbre, il n'y a pas de travaux antérieurs concernant la construction d'un MPR en géométrie. Des EIAH existent déjà, mais sont basés sur d'autres types de modélisation. On peut, par exemple, citer geogebraTUTOR et son évolution QED-Tutrix, qui s'appuient sur la construction d'un Espace de Travail Géométrique de référence (Tessier-Baillargeon et al., 2014 ; Font et al., 2018). Nous commençons donc cette section par une présentation de quelques éléments relatifs à la construction d'un tel MPR dans la partie 4.1.

Notons, avant cela, que les objets géométriques et les outils de construction peuvent prendre des formes sensiblement différentes dans l'environnement informatique et dans l'environnement papier-crayon. Dans cet article, nous nous intéressons à la phase de définition des différents éléments théoriques et pratiques permettant la prise en compte du didactique dans la construction de l'EIAH MindMath. Nous n'analysons pas les phénomènes de genèses instrumentales (Rabardel, 1995) et les effets de la transposition informatique (Balacheff, 1994). Nous utilisons donc les mots *outil* ou *instrument* dans un sens générique et sans distinguer celui tangible de l'environnement papier-crayon de celui virtuel de l'environnement de géométrie dynamique exploité dans la plateforme MindMath.

4.1. Modèle praxéologique de référence relatif à la construction de triangles au cycle 4

4.1.1 Construction de figures planes et raisonnement déductif

En nous plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous considérons que la discipline des mathématiques est composée de praxéologies globales dont la géométrie. Celle-ci est elle-même composée de deux praxéologies régionales : une relative aux figures géométriques planes et une relative aux solides géométriques. La praxéologie régionale relative aux figures géométriques planes est structurée en cinq praxéologies locales (cf. Figure 4) : construction de figures géométriques, preuve mettant en jeu des figures géométriques, représentation des figures géométriques, calcul de grandeurs de figures géométriques et modélisation par des figures géométriques.

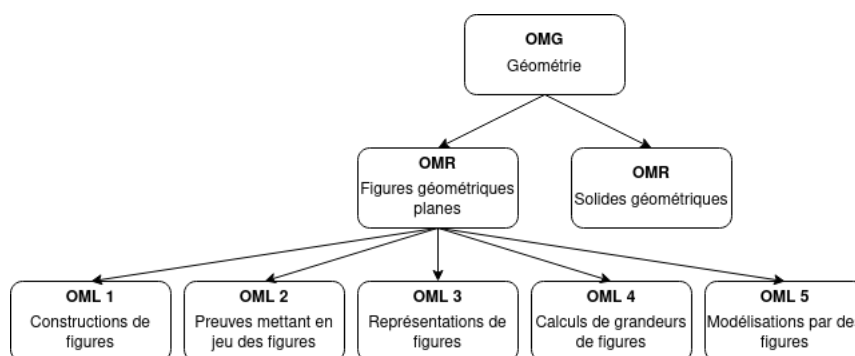


Figure 4. Description en OMR et OML de la géométrie plane

Du cycle 3 au cycle 4, les élèves passent de la géométrie des tracés matériels avec des instruments à la géométrie théorique des démonstrations (Mathé et al., 2020). Ils passent donc de l'étude des figures matérielles à celle des situations géométriques définies par un texte, où les figures géométriques représentent alors toutes les figures matérielles possibles définies par le texte. Mais cette évolution constitue une rupture qui tient en particulier au mode de validation des énoncés. Au cours du cycle 3, la simple perception, puis la perception guidée par les instruments de tracé ou de mesure portant sur les objets matériels ou graphiques suffisent. En revanche, à la fin du cycle 3, et surtout au cycle 4, l'élève doit établir un discours logique à partir des énoncés décrivant des propriétés d'objets théoriques ou de relations entre ces objets.

Dans la suite des travaux de Perrin-Glorian et Godin (2018) qui font l'hypothèse que la géométrie des tracés permet de travailler cette transition, nous nous intéressons ici à la genèse du raisonnement déductif de la géométrie théorique en considérant les problèmes de construction comme un levier pour l'entrée dans un tel raisonnement.

Il est possible de considérer les problèmes de construction soit en s'intéressant à la manipulation des instruments, soit en s'intéressant au raisonnement nécessaire à la réalisation de la construction puis à sa validation. Dans cet article, nous nous plaçons dans le second cas. Nous avons donc défini un MPR afin de modéliser l'activité géométrique relative à la construction de figures en géométrie plane dans le champ d'action des cycles 3 et 4. Nous cherchons à décrire *a priori* les praxéologies institutionnelles et les praxéologies apprises par les élèves à la transition cycle 3 – cycle 4 en caractérisant leurs composantes praxiques (types de tâches, techniques) et *logos* (technologies, théories)²⁴.

Dans un premier temps, notre MPR de la géométrie plane à l'école et au collège est fondé sur des études épistémologiques, didactiques et institutionnelles. Nous étudions des aspects historiques de la construction de la géométrie euclidienne (Vitrac, 1990) et leur transposition didactique à partir de l'analyse de manuels et des programmes scolaires. Cette étude nous permet de caractériser les praxéologies institutionnelles visées en lien avec les paradigmes géométriques et le statut de la validation pour la justification des solutions (Houdement et Kuzniak, 2006).

Dans un deuxième temps, nous étendons le modèle praxéologique de référence en prenant en compte des impacts potentiels, sur l'apprentissage des élèves, d'une négociation insuffisante de la rupture d'ordre épistémologique en géométrie auxquels sont confrontés les élèves dans la transition entre les institutions cycle 3 et cycle 4, voire de décalages potentiels entre rapports institutionnels. Nous faisons l'hypothèse que cette rupture concerne des aspects épistémologiques liés à la fois à l'appréhension des figures et au raisonnement. Les aspects en lien avec l'appréhension des figures mettent en jeu la distinction entre dessin et figure (Laborde et Capponi, 1994), la distinction entre propriétés spatiales et propriétés géométriques (Berthelot et Salin, 1992) ainsi que les appréhensions iconiques et non iconiques des figures (Duval, 1994, 2005). Les aspects liés au raisonnement mettent en jeu les types de preuves (Balacheff, 1987 ; Tanguay, 2002) dont la distinction entre argumentation et raisonnement déductif (Duval, 1992), ainsi que l'élaboration d'heuristiques (Duval, 1988). La validation nous intéresse plus particulièrement, en distinguant notamment l'usage des instruments de l'usage des propriétés pour valider (Houdement et Kuzniak, 2006).

²⁴ La construction du modèle praxéologique de référence est un objet de la thèse de Lesnes-Cuisiniez (2021).

4.1.2 Construction de triangles

Nous développons maintenant le cas de la construction des triangles, « Construire un triangle à partir des angles et des côtés » étant un générateur de la praxéologie locale relative à la construction de figures.

Les triangles font partie des objets de base de la géométrie euclidienne, enseignée à l'école primaire puis au collège. Dès le cycle 2, dans les programmes de 2020, certains triangles particuliers sont définis par des propriétés concernant leurs angles et/ou les longueurs de leurs côtés. À partir du type de tâches « construire un triangle », nous faisons donc un premier découpage selon la nature du triangle à construire. Nous obtenons ainsi une partition de l'ensemble des triangles qui correspondent aux types de tâches suivants : construire un triangle scalène non rectangle, construire un triangle isocèle non rectangle et non équilatéral, construire un triangle équilatéral, construire un triangle rectangle non isocèle et construire un triangle isocèle rectangle.

De plus, la construction d'un triangle d'une de ces familles, et sa validité, s'appuient sur la mobilisation de technologies déterminées par les éléments donnés dans l'énoncé. Ces technologies sont, soit communes à tous les triangles (inégalité triangulaire, somme des mesures des angles, etc.), soit spécifiques à certaines familles (théorème de Pythagore, égalité des angles de la base d'un triangle isocèle, etc.). Elles permettent d'obtenir des informations qui complètent celles de l'énoncé pour rendre possible la construction du triangle avec les instruments disponibles. Selon la construction à réaliser et l'énoncé (données numériques, outils à disposition, etc.), l'élève devra donc mobiliser une ou des propriétés pour résoudre la tâche qui lui est proposée. Ainsi, pour l'exemple proposé Figure 5, l'absence d'un instrument de report de longueur rend nécessaire la mobilisation de deux technologies pour la réalisation de la tâche comme le montre la technique de réalisation de cette tâche présentée dans le Tableau 2.

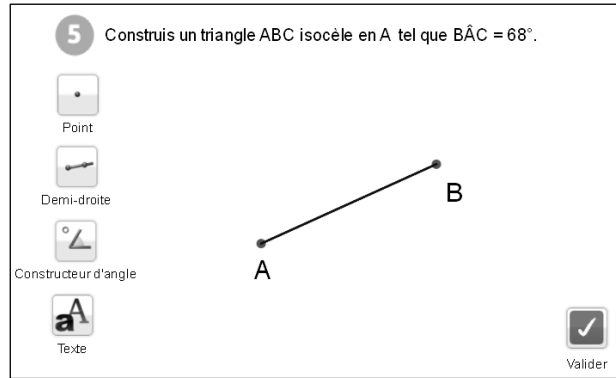


Figure 5. Tâche de construction avec limitation des instruments disponibles

Tableau 2. Technique attendue possible de résolution de l'exemple de la figure 5

Type de pas	Étape de résolution		
	Donnée(s)	Propriété	Conclusion
Raisonner	ABC est un triangle isocèle	Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$
Raisonner	ABC est un triangle.	La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .	$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180^\circ$
Calculer	$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ $\widehat{BAC} = 68^\circ$	Règles du calcul algébrique	$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - 68^\circ$ $2 \times \widehat{ABC} = 112^\circ$ $\widehat{ABC} = 56^\circ$
Construire	Construire la demi-droite issue de A qui fait un angle de 68° avec [AB].		
Construire	Construire la demi-droite issue de B qui fait un angle de 56° avec [AB].		
Construire	Placer le point C à l'intersection des deux demi-droites.		

4.2 Modes technologico-théoriques de l'élève relatifs à la construction de triangles

Les modes technologico-théoriques relatifs à la construction de figures en géométrie plane sont définis à partir du MPR de la géométrie plane que nous avons construit. Nous en caractérisons trois :

- un mode correspondant à une construction validée par la perception ou le recours à la mesure ;
- un mode correspondant à une construction appuyée sur un raisonnement déductif, mais avec mobilisation de technologies erronées : utilisation de propriétés fausses ou dont les conditions d'application ne sont pas remplies, erreurs dans la chronologie des pas de construction ou dans l'enchaînement des pas ;
- un mode correspondant à une construction appuyée sur un raisonnement déductif correct.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves relèvent généralement du premier de ces trois modes à l'issue du cycle 3, l'enjeu est de les amener au troisième durant le cycle 4.

Comme il est présenté dans la section 4.1.1, l'activité géométrique de l'élève relève de différentes OML, qui peuvent par ailleurs entrer en interaction. Par exemple pour construire un triangle (OML relative à la construction), il peut être nécessaire de calculer la mesure d'un de ses angles ou d'un de ses côtés (OML relative au calcul de grandeurs). Caractériser le mode technologico-théorique d'un élève en géométrie plane nécessite donc d'étudier son activité sur les différentes OML.

4.3 Modèle didactique des tâches de construction de triangles

L'OML relative à la construction des figures planes, et en particulier des triangles, est composée de différents générateurs selon le principe de structuration présenté dans les sections 3.1 et 3.3 : générateur « construire un triangle à partir des côtés et des angles », générateur « construire un triangle à partir des droites remarquables », etc.

Dans cette section nous décrivons le générateur « Construire un triangle à partir des côtés et des angles ». Pour cela nous décrivons les variables de types de tâches, les variables de tâches, leurs valeurs respectives et les familles de tâches que nous implémentons dans la plateforme MindMath. Dans la section 4.4, nous présentons l'exploitation de ce générateur pour la définition de parcours d'apprentissage.

La première variable de type de tâches (VT1) de ce générateur correspond à la « nature du triangle à construire » qui peut prendre les valeurs : triangle scalène non rectangle ; triangle isocèle non rectangle et non équilatéral ; triangle équilatéral ; triangle rectangle non isocèle ; triangle isocèle rectangle.

La deuxième variable de type de tâches (VT2) concerne les données de l'énoncé : trois grandeurs *côtés* ; deux grandeurs *côtés* et une grandeur *angle* ; une grandeur *côté* et deux grandeurs *angles*. Ce choix a été réalisé relativement à la technologie des cas d'égalité. Ces informations peuvent être données directement (en grandeur ou en mesure) ou implicitement par les propriétés du triangle à construire, ce qui laisse à l'élève la charge de les mobiliser. Ainsi dans l'exemple de la Figure 5, c'est à l'élève de mobiliser le fait que dans un triangle isocèle les angles de la base sont égaux.

La mobilisation des propriétés des triangles dépend également d'autres facteurs qui sont décrits par les autres variables. On distingue celles qui permettent de spécifier la portée de la technique visée et les limites de technologies anciennes (Vt_P) et celles qui permettent de jouer sur le niveau d'application des connaissances et les adaptations nécessaires (Vt_C) et donc la complexité de la tâche :

- Vt_P1 : éléments déjà tracés de la figure à construire ;
- Vt_P2 : outils disponibles pour la construction²⁵ ;
- Vt_P3 : registre de représentation et désignation du triangle dans l'énoncé ;
- Vt_C1 : présence d'objets géométriques, externes à la figure à construire, nécessaires à sa construction.

Nous ne développons ici que le rôle de la variable Vt_P2 qui concerne les outils à disposition dans l'environnement et qui a un impact important sur la mobilisation des techniques et des technologies visées. En effet, la disponibilité et l'usage des outils permettent de disqualifier certaines techniques et rendent nécessaire le fait de mobiliser d'autres technologies relatives aux triangles. C'est donc un moyen important d'organiser des parcours d'apprentissage.

Nous avons illustré cet effet sur le cas de la Figure 5 à la fin de la section 4.1.2. En effet, pour le type de tâches « construire un triangle isocèle à partir de données qui sont l'angle au sommet et un côté issu de ce sommet », si l'élève dispose du report de longueurs, il peut mobiliser la technologie *un triangle isocèle a deux côtés de même longueur* et reporter la longueur du premier côté sur la demi-droite issue de

²⁵ Cette variable prend notamment les valeurs suivantes : uniquement outils de report de mesure ; uniquement constructeur d'angles ; report de mesure et constructeur d'angles ; etc.

l'angle au sommet. En l'absence de l'outil report de longueur, avec uniquement le constructeur d'angles, il va devoir mobiliser d'autres technologies (*la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180° et les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux*) pour calculer puis construire un des angles à la base sur le côté donné. Cet exemple illustre le rôle de cette variable dans la négociation de l'entrée dans le raisonnement déductif à la transition cycle 3 – cycle 4.

À ces variables de types de tâches et de tâches, s'ajoutent des descripteurs qui permettent de caractériser la tâche. Les plus importants pour la création des parcours d'apprentissage sont :

- le niveau institutionnel associé à la famille de tâches ;
- le nombre minimum de propriétés à mobiliser pour résoudre les tâches d'une famille de tâches.

En effet, le nombre de propriétés à mobiliser dépend du triangle à construire (VT1), mais aussi de sa désignation dans l'énoncé, du registre de représentation de ce dernier (schéma codé, énoncé textuel, etc.) (Vt_P3), des données en entrée (VT2), des instruments à disposition (Vt_P2) et des éléments déjà construits (Vt_P1 et Vt_C1). La valeur de ce descripteur est donc déduite des valeurs des différentes variables en prenant aussi en compte les programmes scolaires en vigueur.

4.4 Un exemple de parcours du générateur construire un triangle

Comme il est présenté dans la partie 3.2, des parcours d'apprentissage sont définis *a priori* à partir d'une étude didactique et épistémologique, au regard des objectifs définis par les programmes scolaires. Ils sont fondés sur le MPR de la géométrie plane que nous avons défini. La structuration du MPR et les informations disponibles dans l'ontologie permettent la création de parcours d'apprentissage organisés autour de différents objectifs : étudier un type de triangle en particulier (parcours de plusieurs familles de tâches à l'intérieur d'un type de tâches « construire un triangle de type donné »), ou étudier une technologie particulière comme la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle (parcours transversal à plusieurs types de triangles). Nous définissons également des parcours différents selon les modes technologico-théoriques que nous avons décrits dans la section 4.2.

Les algorithmes utilisés par d'autres acteurs du projet MindMath pour proposer des parcours aux élèves sur la plateforme enrichissent ensuite ceux que nous avons définis *a priori*. Ils prennent alors en compte le mode technologico-théorique actuel de l'élève, sa réussite aux tâches déjà rencontrées, sa réaction aux rétroactions proposées et les parcours des autres élèves sur la plateforme.

Dans cette partie, nous présentons un exemple de parcours centré sur les propriétés des angles des triangles isocèles. Il peut être réalisé en classe de 5^e pour donner une raison d'être au raisonnement déductif et pour développer les éléments technologico-théoriques relatifs au triangle isocèle.

À partir du générateur « Construire un triangle à partir des côtés et des angles », dont les variables ont été présentées dans la section 4.3, nous avons défini 40 familles de tâches que nous jugeons pertinentes au cycle 4. Nous nous intéressons ici au type de tâches « construire un triangle isocèle » et nous présentons dans le Tableau 3 la liste des familles de tâches qui mettent en jeu une activité sur les angles (la tâche de la Figure 5 appartient à la famille de tâches Ft5). Concernant les variables, la figure à construire (VT1) est un triangle isocèle, mais sa désignation dans l'énoncé peut être diverse (Vt_P3). L'élément fourni de la figure (Vt_P1) est toujours le côté désigné dans l'énoncé et il n'y a pas d'éléments externes à la figure à construire (Vt_C1).

Tableau 3. Familles de tâches définies à partir du générateur « Construire un triangle avec les angles et les côtés » mettant en jeu une activité sur les angles dans un triangle isocèle

Ft	VT2 Données de l'énoncé	Vt_P2 Outils à disposition	Vt_P3 Registre de représentation	Nombre minimum de propriétés à mobiliser
Ft1	La base et un angle à la base	Constructeur d'angles	Schéma codé avec deux angles égaux	0
Ft2	La base et un angle à la base	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	1 (propriété des angles égaux du triangle isocèle)
Ft3	La base et un angle à la base	Constructeur d'angles + report de longueurs	Mots « triangle isocèle »	1 (propriété des angles égaux du triangle isocèle)
Ft4	Un côté qui n'est pas une base et un angle à la base	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)
Ft5	Un côté qui n'est pas une base et l'angle au sommet	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)

Ft6	La base et l'angle au sommet	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)
Ft7	La base et l'angle au sommet	Constructeur d'angles + report de longueurs	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)
Ft8	La base, l'angle au sommet et un angle à la base tels que l'inégalité triangulaire n'est pas respectée	Constructeur d'angles	Mots « triangle isocèle »	2 (propriétés des angles égaux du triangle isocèle et de la somme des angles d'un triangle)

Ft1 : les tâches ne demandent la mobilisation d'aucune propriété (dans le cadre de ce générateur, le fait d'interpréter le codage n'est pas considéré comme la mobilisation d'une propriété, même si c'est une convocation d'un type de tâches de l'OML « représenter »). En particulier, l'élève peut ignorer la définition et les propriétés associées au terme *triangle isocèle*. Les énoncés des tâches de la famille de tâches Ft1 sont donnés à partir d'un schéma codant les angles égaux du triangle, la construction est alors immédiate.

Ft2 : l'énoncé est discursif, la construction n'est plus immédiate puisqu'il faut mobiliser la propriété caractéristique du triangle isocèle concernant l'égalité des mesures des angles à la base pour réaliser la construction.

Ft3 : la seule différence avec Ft2 est la mise à disposition d'un outil supplémentaire, même s'il n'est pas utile. Notre motivation est ici de limiter la mise en place d'un effet de contrat du type « si un outil est disponible, c'est qu'il est utile ».

Ft4 : c'est une famille de rupture avec les précédentes. Les seules données de l'énoncé combinées aux instruments à disposition ne suffisent plus pour construire le triangle demandé. Il est à la charge de l'élève d'élaborer une heuristique pour déterminer un programme de construction en mobilisant des propriétés. Cela va l'amener à mobiliser la propriété de la somme des mesures des angles dans un triangle pour calculer une ou des données manquantes. Les familles de tâches Ft5 et Ft6 imposent le même type de raisonnement avec des données différentes. Pour Ft7, on ajoute un outil à disposition pour la même raison qu'indiqué dans Ft3.

Ft8 : on introduit ici une nouvelle rupture avec une construction demandée qui n'est pas possible. La justification de cette impossibilité passe par un raisonnement déductif mobilisant les propriétés du triangle isocèle et de la somme des mesures des angles dans un triangle.

Une fois ces familles de tâches définies, dans le cadre d'un parcours d'apprentissage en classe de 5^e, nous choisissons de présenter les tâches mises en jeu en augmentant le nombre minimum de propriétés à mobiliser. Nous nous appuyons sur des aspects du MPR relevés dans la partie 4.1, qui doivent amener les élèves à développer des praxéologies attendues au cycle 4 quant à la construction de triangles. L'évolution des familles de tâches est illustrée pour le début du parcours dans la Figure 6. D'une manière générale, l'augmentation du nombre de propriétés à mobiliser est liée aux outils à disposition, aux données de l'énoncé et au registre de représentation en entrée.

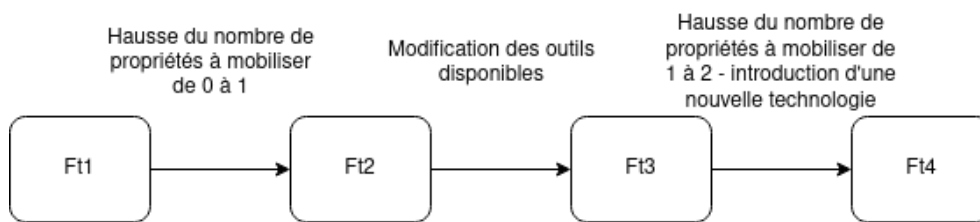


Figure 6. Premières étapes d'un parcours du générateur « construire un triangle à partir des angles et des côtés »

Comme nous l'avons précisé, ce parcours est défini *a priori*. Selon les besoins de l'élève (actualisés par les algorithmes régissant les parcours sur la plateforme), l'ordre des exercices peut varier, des exercices peuvent s'ajouter ou être supprimés. Par exemple, pour un élève de cycle 4 qui continue de s'appuyer sur la perception pour construire, l'adaptation du parcours prescrit à son activité effective se matérialise par la proposition d'un travail sur la définition et les propriétés caractéristiques que l'on peut utiliser directement pour construire (comme la famille de tâches Ft2 dans l'exemple donné, mais aussi d'autres familles de tâches d'autres parcours). Par la suite, la plateforme l'amènera vers d'autres tâches qu'il devra résoudre en développant un raisonnement plus complexe. L'objectif étant de l'accompagner dans la prise de conscience de l'insuffisance d'une démarche perceptive et de la nécessité de mobiliser des propriétés géométriques au cours d'un raisonnement préalable à la construction.

5. Conclusion et perspectives

Ladage (2021) propose d'exploiter la TAD comme cadre d'analyse d'environnements numériques d'apprentissage. Pour notre part, nous avons proposé des fondements didactiques pour la conception d'un EIAH d'entraînement aux mathématiques, prenant en compte les besoins d'apprentissage des élèves qui sont actualisés au cours du travail. Pour concevoir un tel EIAH, il est nécessaire de prendre en compte la ou les institutions d'usage, les savoirs en jeu et l'apprenant en tant que sujet cognitif et institutionnel. Afin de considérer ces différents points de vue, nous avons montré la nécessité et l'intérêt de croiser trois approches théoriques en didactique. Nous décrivons le savoir en jeu par le moyen d'un MPR, qui est structuré à partir d'une évolution des générateurs de types de tâches définis dans T4TEL à l'aide des variables de tâches, et nous a amenés à définir la notion de *famille de tâches*. Nous prenons aussi en compte, *via* des études préalables : du côté de l'institution, des variations potentielles entre les praxéologies à enseigner et celles enseignées, et le MPR retenu ; du côté de l'apprenant, les modes technologico-théoriques et les catégories d'erreurs associées. Nous avons alors défini des parcours d'apprentissage. Pour cela, d'une part nous avons exploité la structuration du savoir précédemment évoquée et, d'autre part, pour prendre en compte l'apprenant, nous avons explicité la notion de *besoins d'apprentissage* d'un apprenant en exploitant et en précisant de nouveau de nombreux travaux antérieurs, et nous avons intégré les *modes technologico-théoriques*.

Ce cadre de conception didactique d'un EIAH nous permet dans un premier temps de générer des tâches, structurées en familles de tâches, pour produire de manière effective des exercices dans l'EIAH. Dans un deuxième temps, nous construisons des parcours qui prennent en compte le savoir, les enjeux épistémologiques liés à l'activité mathématique visée (rupture d'ordre épistémologique ou construction de nouveaux éléments du bloc technologico-théorique) dans une institution donnée et le rapport au savoir de l'apprenant, construit antérieurement. C'est donc la prise en compte des modèles du savoir et de l'apprenant, au regard d'une institution donnée, définis à partir du croisement entre des approches épistémologique, institutionnelle et cognitive et la possibilité de les représenter informatiquement, qui permet d'assurer la construction d'un EIAH fondé didactiquement. Dans le cadre du projet MindMath nous avons mis en œuvre ces fondements dans le domaine de l'algèbre et dans celui de la géométrie.

Ces différents construits vont maintenant être mis à l'épreuve lors des phases deux et trois du projet, pour valider les hypothèses voire les faire évoluer ou les enrichir dans le cadre d'un processus itératif appuyé sur des expérimentations *in situ* et leur analyse. En effet, un des enjeux de la recherche à venir concerne l'étude de l'évolution de l'activité mathématique de l'élève dans un domaine donné, avec des

enseignants intégrant MindMath dans leur enseignement. Au-delà des phénomènes de genèses instrumentales (Rabardel, 1995) liés aux usages d'un environnement numérique qui devront être étudiés, nous devons aussi prendre en compte des effets liés aux praxéologies didactiques développées puis mises en œuvre par l'enseignant en intégrant la plateforme Mindmath, à partir de praxéologies enseignées spécifiées *a priori* pour un domaine mathématique. La troisième phase du projet d'analyse des usages de la plateforme et de l'évolution de l'activité des élèves devra intégrer ces effets potentiels dans le cadre de l'analyse de données recueillies.

Nous faisons l'hypothèse que les différents apports de cet article peuvent être réutilisés comme cadre de conception d'autres EIAH afin d'assurer la prise en compte de fondements didactiques lors du processus.

Ce projet permet aussi divers apports spécifiques au champ de la didactique. Ainsi, dans le cadre de sa thèse, Lesnes-Cuisiniez (2021) a poursuivi le travail théorique afin de construire un modèle praxéologique de référence relatif à la géométrie plane pour aborder une problématique concernant la définition de conditions didactiques pour amener les élèves à entrer dans, et construire, le raisonnement déductif en géométrie, enjeu central pour négocier le passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique dans la transition entre cycle 3 et cycle 4.

Plusieurs aspects du projet MindMath n'ont pas été abordés dans cet article, mais nous en évoquons deux pour conclure, car ils ouvrent des perspectives intéressantes concernant des défis majeurs pour la communauté didactique et pour celle des EIAH.

Ainsi, l'ontologie produite pour réifier les modèles didactiques du savoir, de l'apprenant, des familles de tâches et des parcours devient un objet frontière entre la didactique et l'informatique en EIAH. L'ontologie est par exemple exploitée pour produire des rétroactions épistémiques qui sont proposées à l'apprenant lors de la résolution des exercices. Leur modélisation, leur production et leur choix dans une situation donnée exploitent les fondements didactiques présentés dans cette contribution. Cette dimension du projet est présentée dans (Jolivet et al., 2021).

D'autre part, pour la décision des rétroactions à proposer à l'apprenant, et pour la définition dynamique des parcours (*adaptive learning*), des algorithmes d'intelligence artificielle sont définis en prenant en compte, d'une part des méthodes spécifiques (algorithme de renforcement, méthodes statistiques type Item Response Theory) en lien avec l'ontologie réifiant les modèles didactiques, puis mis en œuvre. Un défi à relever, de manière collaborative, par les communautés didactiques et celles de l'intelligence artificielle (IA), est d'analyser, réinterroger et exploiter les résultats des expérimentations mettant en œuvre des algorithmes d'IA, pour améliorer les algorithmes utilisés et faire évoluer les modèles didactiques.

Bibliographie

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176. Springer.

BALACHEFF, N. (1994). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, et N. Balacheff (Dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 364-370). La Pensée sauvage. <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190646/document>

BERTHELOT, R. et SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/document>

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en didactique des mathématiques*, 19(1), 77-124.

BOSCH, M. et GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier et C. Margolinas (Dir.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e école d'été de didactique des mathématiques* (p. 107-122). La pensée sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. [Conférence]. Attribution du titre de Docteur Honoris Causa, Université de Montréal. http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.

CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet et C. Vendaiera (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 8-25). IREM de Paris - Université Paris Diderot. hal-02421410. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document>

CHAACHOUA, H., BESSOT, A., ROMO, A. et CASTELA, C. (2019). Developments and functionalities in the praxeological model. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. Javier Garcia et J. Monaghan (Dir.), *Working with the anthropological theory of the didactic : A comprehensive casebook* (p. 41-60). Routledge.

CHAACHOUA, H., NICAUD, J.-F. et BITTAR, M. (2005). Détermination automatique des théorèmes-en-actes des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1. Dans P. Tchounikine, M. Joab, et L. Trouche (Dir.), *Actes de la conférence EIAH 2005* (p. 33-45). Institut National de Recherche Pédagogique - Université Montpellier II.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury et M. Caillot (Dir.), *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104). Editions Fabert.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et Fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, et R. Floris (Dir.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). La Pensée Sauvage.

CROSET, M.-C., & CHAACHOUA, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(2), 161-194.

DREYFUS, T., HERSHKOWITZ, R. et SCHWARZ, B. (2001). The construction of abstract knowledge in interaction. Dans M. Van den Heuvel-Panhuizen (Dir.), *Proceedings of the 25th Annual Conference for the PME CONFERENCE* (Vol. 2, p. 377-384). ERIC.

DUBINSKY, E., ET MCDONALD, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. Dans D. Holton (Dir.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (p. 275-282). Springer, Dordrecht.

DUVAL, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 1, 57-74.

DUVAL, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, 37-61.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM*, 17, 121-138.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 10, 5-53.

FONT, L., RICHARD, P. R. et GAGNON, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the Generation of Proofs. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 267, 38-58. <https://doi.org/10.4204/EPTCS.267.3>

GODINO, J. D., BATANERO, C. et FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>

GRUBER, T. (2009). Ontology. Dans L. Liu et M. T. Özsu (Dir.), *Encyclopedia of database systems*. Springer. <http://tomgruber.org/writing/ontology-definition-2007.htm>

GRUGEON, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 17(2), 167-209.

GRUGEON-ALLYS, B. (2010). Evolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice. Dans R. Goigoux, L. Ria, et M.-C. Toczek-Capelle (Dir.), *Les parcours de formation des enseignants débutants* (p. 205-223). Presses Universitaires Blaise Pascal.

GRUGEON-ALLYS, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : Une approche didactique multidimensionnelle. *e-JIREF*, 2(2), 63-88.

GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F. et PILET, J. (2021). Using didactic models to design adaptive pathways to meet students' learning needs in an on-line learning environment. Dans *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence—How Artificial Intelligence can serve mathematical human learning?* (p. 157-188). Springer.

GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., PILET, J. et PREVIT, D. (2018). Online automated assessment and student learning: The PEPITE project in elementary algebra. Dans L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Éds.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (p. 245-266). Springer.

GRUGEON-ALLYS, B., PILET, J., CHENEVOTOT-QUENTIN, F. et DELOZANNE, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*, 137-162.

HOUEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709/document>

JOLIVET, S. (2018). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02079412/document>

JOLIVET, S., CHAACHOUA, H. et DESMOULINS, C. (2022). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 42(1).

JOLIVET, S., YESSAD, A., MURATET, M., LUENGO, V., REITER, B., GRUGEON-ALLYS, B. et LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). Feedbacks épistémiques dans une plateforme d'entraînement aux mathématiques : Modèle et décision, apports croisés de l'informatique et de la didactique. Dans M. Lefevre, C. Michel, T. Geoffre, M. Rodi, L. Alvarez, et A. Karoui (Dir.), *Actes de la 10e Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain* (p. 82-93).

KASPARY, D., CHAACHOUA, H. et BESSOT, A. (2020). Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique ? *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 25, 243-269.

LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165-210.

LADAGE, C. (2021). La TAD et la recherche sur les environnements numériques pour l'apprentissage des mathématiques. *Caminhos da educação matemática em revista (online)/IFS*, 11(1), 313-351.

LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [Thèse de doctorat, Université de Paris].

LESNES-CUISINIEZ, E. et GRUGEON-ALLYS, B. (2019). Modèle d'Exercices et Parcours d'Apprentissage Prenant en Compte le Raisonnement de l'Élève en Mathématiques au Collège. Dans J. Broisin, É. Sanchez, A. Yessad et F. Chenevotot (Dir.), *Actes de la 9e Conférence sur les Environnements Informatiques pour les Apprentissages Humains*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02863439>

- MANDIN, S. et GUIN, N. (2014). Basing Learner Modelling on an Ontology of Knowledge and Skills. Dans Institute of Electrical and Electronics Engineers (Ed.), *2014 IEEE 14th International Conference on Advanced Learning Technologies* (p. 321-323). CPS.
- MATHE, A.-C., BARRIER, T. et PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Academia - L'Harmattan.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS (MENJS) (2020). *Programmes d'enseignement – Cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), cycle de consolidation (cycle 3) et cycle des approfondissements (cycle 4)*. Arrêté du 17-7-2020 (B.O. du 28-7-2020).
- NICAUD, J.-F., CHAACHOUA, H., & BITTAR, M. (2006). Automatic calculation of students' conceptions in elementary algebra from Aplusix log files. Dans M. Ikeda, K. D. Ashley, & T.-W. Chan (Éds.), *8th International Conference on Intelligent Tutoring Systems* (p. 433-442). Springer.
- PERRIN-GLORIAN, M.-J. et GODIN, M. (2018). [Pré-publication] Géométrie plane : Pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837v2/>
- PILET, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : Modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7)]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039>
- PILET, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(3), 271-312.
- RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- RICHARD, P. R., FORTUNY, J. M., GAGNON, M., LEDUC, N., PUERTAS, E. et TESSIER-BAILLARGEON, M. (2011). Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry. *ZDM*, 43(3), 425-439.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.

ROBERT, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (Dir.), *La classe de mathématiques : Activité des élèves et pratiques des enseignants* (p. 45-52). Octares.

ROBERT, A. (2010). Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré. *Repères-IREM*, 80, 87-103.

ROBERT, A. et ROGALSKI, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational studies in mathematics*, 59(1-3), 269-298.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model : The case of school algebra. Dans B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Éds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2870-2879). http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Bosch.pdf

TANGUAY, D. (2002). Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(3), 371-396.

TCHOUNIKINE, P. et TRICOT, A. (2011). Environnements informatiques et apprentissages humains. Dans C. Garbay et D. Kayser (Dir.), *Informatique et sciences cognitives : Influences ou confluence ?* (p. 167-200). OPHRYS / MSH. http://andre.tricot.pagesperso-orange.fr/TchounikineTricot_Chap2010.pdf

TESSIER-BAILLARGEON, M., LEDUC, N., RICHARD, P. R. et GAGNON, M. (2017). Etude comparative de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 91-117.

TESSIER-BAILLARGEON, M., RICHARD, P. R., LEDUC, N., & GAGNON, M. (2014). Conception et analyse de geogebraTUTOR, un système tutoriel intelligent : Genèse d'un espace de travail géométrique idoine. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4), 303-326.

VANDEBROUCK, F. (2013). *Mathematics classrooms : Students' activities and Teachers' practices*. Springer.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 133-170.

VERGNAUD, G., CORTES, A., & FAVRE-ARTIGUE, P. (1988). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In G. Brousseau, M. Hulin, & G. Vergnaud (Éds.), Actes du colloque de Sèvres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques (p. 259-279). La Pensée Sauvage, Grenoble.

VITRAC, B. (1990). Euclide d'Alexandrie, les Éléments. Presses Universitaires de France.

VU, T. M. H. et TCHOUNIKINE, P. (2020). Supporting teacher scripting with an ontological model of task-technique content knowledge. *Computers et Education*, 163, article 104098.

WOZNIAK, F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : Une question d'équipement praxéologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 32(1), 7-55.

SEBASTIEN JOLIVET

Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille,
UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

sebastien.jolivet@unige.ch

ELANN LESNES-CUISINIEZ

Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille,
UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

elann.lesnes@gmail.com

BRIGITTE GRUGEON-ALLYS

Université Paris Est Créteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ.
Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010 Créteil, France

brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

CELINE CONSTANTIN

**LA SUBSTITUTION, POINTS DE VUE ECOLOGIQUE ET
SEMIOLINGUISTIQUE**

Abstract. Substitution, ecological and semiolinguistic points of view. The work presented here focuses on the semiolinguistic dimension of elementary algebra knowledge and on a particular object of knowledge: substitution. Analyses of textbooks and teaching practices have led us to postulate that this knowledge is part of what Margolinas and Laparra call transparent knowledge for the teacher. From an ecological questioning, we seek to determine the conditions, constraints, but also the potentialities to consider such an object of knowledge for the teaching of elementary algebra. To do this, we rely on a double epistemological and didactic analysis before addressing the results of an experiment conducted in a middle school class.

Keywords. Substitution, ecology, elementary algebra, teaching, semiolinguistic dimension.

Résumé. Le travail présenté ici s'intéresse à la dimension sémiolinguistique des savoirs de l'algèbre élémentaire et à un objet de savoir particulier : la substitution. Des analyses de manuels et de pratiques enseignantes nous ont amenée à postuler que ce savoir faisait partie de ce que Margolinas et Laparra nomment des savoirs transparents pour le professeur. A partir d'un questionnement écologique, nous cherchons à déterminer des conditions, des contraintes, mais aussi des potentialités à envisager un tel objet de savoir pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Nous nous appuyons pour cela sur une double analyse épistémologique et didactique avant d'aborder les résultats d'une expérimentation conduite dans une classe de collège.

Mots-clés. Substitution, écologie, algèbre élémentaire, enseignement, dimension sémiolinguistique.

Notre recherche s'inscrit dans une problématique plus large s'intéressant aux difficultés d'élèves liées aux apprentissages sémiolinguistiques (Drouhard, 1992 ; Drouhard & Panizza, 2012) dans le cadre de l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Elle s'appuie sur l'étude de la construction et de l'évolution des usages de la propriété de distributivité tout au long de la scolarité obligatoire (Constantin, 2018). Par exemple, dans l'écriture usuelle associée à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition « $k(a + b) = ka + kb$ », k , a , et b peuvent être remplacés par différents types de nombres au fur et à mesure des

niveaux de classe, mais aussi par des expressions qui ne sont pas réduites à une lettre ou à un nombre lorsqu'il s'agit de développer « $4x(x + 5)$ ». Or, de telles substitutions peuvent émerger de manière implicite très précocement dans l'enseignement (Constantin, 2014) tout en reposant sur des savoirs de nature sémiolinguistique (Drouhard, 2012) peu identifiés. Ces savoirs sont relatifs aux représentations sémiotiques, à la syntaxe et la grammaire des expressions, à leurs modes de production et à leur manipulation. Ils ne sont pas indépendants des savoirs dans ce que Drouhard nomme la dimension notionnelle, c'est-à-dire des savoirs strictement mathématiques au sens où le sont les propriétés de corps commutatif ordonné de l'ensemble des nombres réels par exemple. Cependant ils ne s'y réduisent pas, comme nous le verrons dans la première partie de ce texte. Nous faisons l'hypothèse qu'il existe des savoirs de nature sémiolinguistique transparents pour les professeurs (au sens de Margolinas et Laparra, 2011) à même de provoquer des phénomènes didactiques liés à la nature demeurant implicite des connaissances à l'œuvre pour les élèves et les enseignants. Par savoirs transparents, nous entendons des savoirs qui échappent pour partie à la perception didactique des professeurs : les connaissances qui pourraient être utiles ou qui sont rencontrées par les élèves en situation sont d'autant moins reconnues par les professeurs que les savoirs autour de la substitution n'ont pas d'existence institutionnelle véritable. Ceci ne signifie pas que les professeurs n'identifient pas les difficultés de leurs élèves face aux manipulations des écritures, mais, parce que les professeurs ne peuvent enseigner certains savoirs utiles dans la dimension sémiolinguistique, nous postulons que la transparence de ces savoirs contribue à ce que certains élèves se comportent comme des calculateurs aveugles (Sackur et al., 1997).

Réinterrogeant cette transparence au regard des savoirs à enseigner et enseignés, nous nous centrons dans un premier temps sur les extensions de techniques de calcul algébrique adossées à la substitution. Nous nous situons de ce point de vue dans une problématique écologique dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1997, 2007) en prenant comme point de départ l'étude du mode d'existence d'un objet particulier au sein d'une institution scolaire donnée, celle du collège (élèves de 11-15 ans). Les questions qui s'y rapportent : « qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi qu'est-ce qui n'existe pas et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? » (Artaud, 1997) ont ceci de particulier qu'elles concernent un objet de savoir que nous supposons transparent, ce que nous illustrerons à partir de résultats d'analyses de manuels et de pratiques ordinaires d'enseignants (Constantin, 2014). Les phénomènes didactiques observés relèvent d'évitements de certaines tâches ou de choix non questionnés qui pèsent sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Dès lors, la question qui nous occupe est celle des conditions sous lesquelles la substitution pourrait vivre véritablement dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Dans quelle mesure

pourrait-elle enrichir les savoirs à enseigner et enseignés ? Une autre particularité tient à la nature sémiolinguistique des savoirs liés à la substitution, ce qui nécessite une double analyse épistémologique et épistémographique (Drouhard, 2012) afin de caractériser un certain nombre d'éléments liés à des savoirs de référence. Ceci nous permet d'identifier différents lieux où la substitution peut vivre, et un certain nombre d'objets avec lesquelles elle interagit du point de vue des savoirs de référence, ce qui correspond à son habitat. Nous complétons cette étude par les résultats d'une expérimentation locale dans une classe de 4^e ordinaire en France (élèves de 13-14 ans) destinée à aborder la question des conditions didactiques sous lesquelles la substitution pourrait exister explicitement.

1. La substitution : un objet de savoir transparent

Dans cette partie, nous modélisons l'activité mathématique dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique par le quadruplet formant une praxéologie. Celui-ci se compose tout d'abord d'un certain type de tâches qui peut être accompli au moyen d'une ou de plusieurs techniques, ce qui forme les deux premières composantes de la praxéologie. Les deux derniers éléments de la praxéologie, technologie et théorie, renvoient au discours raisonné permettant à deux niveaux différents, de décrire, d'éclairer ou de justifier la ou les techniques considérées. Nous faisons l'hypothèse que les savoirs dans la dimension sémiolinguistique autour de la substitution font ainsi partie des ingrédients technologiques soutenant de nombreuses transformations d'écriture symbolique en algèbre sans pour autant faire l'objet d'un enseignement. La mise en œuvre de praxéologie se réalise par la co-activation d'objets ostensifs, c'est-à-dire qui présentent une certaine matérialité (graphique, sonore par exemple) et de non-ostensifs, soit les concepts ou idées qui ne peuvent être manipulés qu'au moyen d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999). Ces ostensifs ont une double valence sémiotique (parce qu'ils fonctionnent comme des signes) et instrumentale (parce qu'ils permettent que se réalise l'activité mathématique). Dans quelle mesure cette double valence peut-elle être assumée par les ostensifs liés à la substitution dans l'enseignement ?

Les analyses des praxéologies en jeu dans les manuels de collège montrent que des substitutions apparaissent très tôt dans l'enseignement du calcul algébrique (Constantin, 2018). C'est par exemple le cas lorsqu'il s'agit de développer une expression comme « $4x(x + 5)$ » en référence à l'ostensif « $k(a + b) = ka + kb$ » associé à la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ce type d'expressions est fréquemment rencontré dès le début de l'enseignement dans l'institution collège en France. La technique présentée dans les manuels consiste à multiplier $4x$ par x puis par 5 avant d'écrire la somme des produits. Or, du point de vue de la structure de l'expression, plusieurs choix sont possibles. On

peut considérer, comme le fait l'expert, qu'il s'agit là d'un produit de deux facteurs, mais on pourrait tout aussi bien identifier un produit de trois facteurs. Du point de vue des mathématiques, il n'y a pas de raison de faire un choix plutôt que l'autre. Autrement dit, du point de vue technologique, les savoirs dans la dimension notionnelle ne suffisent pas à rendre compte des raisons qui amènent à cette lecture de l'expression, tandis que dans les manuels, ils n'apparaissent pas interrogés. Plus encore, une sous-expression comme « $4x$ » est tantôt considérée comme « un tout », constituant une substituante pour k pour un tel développement, tantôt comme un produit lorsqu'il s'agit de réduire « $4x + 3x$ » par exemple. Autrement dit, la lecture de l'expression n'est pas la même selon le genre de tâches, ce qui peut rendre d'autant plus difficile l'analyse des expressions à transformer et les choix à opérer pour la mise en œuvre des techniques pour les élèves. L'existence de choix qui conditionnent les substitutions qui se réalisent implicitement n'est pas réduit à ce genre d'expressions. Lorsque l'un des facteurs d'une expression à développer est une somme de trois termes comme « $3(a - 6b + 9)$ », ou lorsqu'il s'agit de développer un produit de trois facteurs comme « $(x + 2)(3x + 2)(x + 4)$ », ou encore lorsque la formule de la double distributivité est démontrée à partir du développement de « $(a + b)(c + d)$ », de nombreuses adaptations apparaissent. Prenons le cas de l'expression « $3(a - 6b + 9)$ » issue du manuel *Sesamath* de 4^e (p. 104). Plusieurs voies sont possibles. On peut par exemple remplacer a par $a - 6b$ et b par 9 , ou bien, si on associe a dans cette expression à la même lettre dans l'identité « $k(a + b) = ka + kb$ », b doit être remplacé par $-6b + 9$, ce qui suppose de faire le lien entre soustraire et ajouter l'opposé, dans une nouvelle interprétation de la structure de la somme algébrique. Si l'on dispose de l'identité « $k(a - b) = ka - kb$ » correspondant à la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction, de nouveaux choix sont encore possibles. Mais l'existence de choix ou la question de ce qui peut les piloter n'est jamais abordée dans les manuels (Constantin, 2014). Lorsque des discours accompagnent le travail de la technique, une tension apparaît entre une volonté de donner une place à l'écriture des propriétés comme référence pour le calcul algébrique et les ostensifs proposés. Par exemple, pour corriger le développement de « $(2 - x) \times 3$ » dans le manuel *Transmath* de 4^e (p. 247), il est indiqué qu'« on développe à l'aide de la propriété « $k(a + b) = ka + kb$ » avec l'étape suivante : $C = 2 \times 3 - x \times 3$. La distance sémiotique n'est pas négligeable. Les étapes nécessaires pour faire le lien entre cet ostensif et la technique sont nombreuses et s'appuient sur plusieurs propriétés (commutativité de la multiplication, lien entre somme et différence), ce qui confère sans doute finalement une faible valence instrumentale à l'écriture symbolique de la propriété. L'absence de questionnement technologique (Sierra et al., 2013) autour des substitutions qui se réalisent implicitement renforce sans doute aussi le

caractère muet ou faible des techniques (au sens de Assude et al., 2007) observé dans d'autres recherches (Assude et al., 2012).

Plusieurs phénomènes didactiques peuvent dès lors apparaître dans les classes.

En cherchant à s'appuyer sur les écritures symboliques usuelles de la distributivité, sans disposer tout à fait de la notion de substitution, les enseignants peuvent être conduits à éviter de proposer à leurs élèves des rencontres avec des expressions trop éloignées du ou des formalismes disponibles (comme des sommes à trois termes) pour favoriser une certaine proximité ostensive, en écrivant l'identité sous l'expression à transformer par exemple (Constantin, 2014). Sans substitutions plus générales (avec des sommes comme substituantes par exemple), ce lien ne peut être fait que pour certains types d'expressions.

D'autres enseignants diversifient les écritures symboliques en proposant des identités avec des sommes de plus de deux termes comme « $k(a + b + c) = ka + kb + kc$ » ou « $A \times B + A \times C - A \times D = A \times (B + C - D)$ » pour prendre en charge les adaptations de techniques de calcul à des formes d'expressions qui évoluent. Mais le rôle technologique de ces nouvelles formes d'identités achoppe. Par exemple, dans l'une des classes observées, le discours pour factoriser une somme à la suite de l'identité précédente comportant des majuscules se centre sur la reconnaissance du facteur commun. La somme proposée par l'enseignante au tableau ne comporte que deux termes, mais le remplacement de D par zéro n'est pas évoqué, de même que les substitutions de B ou de C .

Ceci nous amène à faire l'hypothèse que la substitution est un objet de savoir transparent dans l'enseignement, c'est-à-dire que si des substitutions existent dans les faits, elles apparaissent comme allant de soi. Les savoirs qui s'y rapportent ne sont pas totalement ignorés par les manuels ou les enseignants, mais la substitution n'est pas vraiment pensée comme un objet de savoir de sorte qu'il n'est pas possible de questionner ses emplois tandis qu'ils véhiculent des extensions des usages des écritures non négligeables.

Les enseignants que nous avons interrogés (Constantin, 2014) évoquent des substitutions sans pour autant employer ce terme. Ils parlent de « transposition » ou de « mettre à une position » par exemple, ce qui n'est pas étonnant. D'une part les programmes semblent réserver l'usage du terme au remplacement d'une lettre par un nombre, sans tenir de discours spécifique sur la notion, et d'autre part, du point de vue des mathématiques constituées, la définition de la substitution comme bijection entre deux ensembles finis paraît éloignée des techniques de calcul algébrique et des discours que l'on peut envisager pour renforcer le lien entre technique et technologie dans les praxéologies afférentes. Ceci contribue sans

doute à ce que les enseignants n'envisagent pas les usages des écritures symboliques à partir de substitutions.

Dès lors, la question se pose des potentialités à penser un enseignement prenant plus véritablement en compte les savoirs qui s'y rapportent. Autrement dit, dans quelle mesure la substitution pourrait-elle exister dans les praxéologies de l'algèbre élémentaire ? Les éléments que nous venons de développer amènent à penser qu'il existe une niche écologique pour la substitution, mais peut-elle permettre de compléter des organisations mathématiques (au sens de Bosch et al., 2004) ? Lesquelles, et à quelles conditions ? Quel statut peuvent prendre les savoirs afférents, voire la notion elle-même ? Un tel questionnement écologique suppose de conduire une étude à la fois épistémologique et épistémographique (Drouhard, 2012). L'analyse épistémographique permet d'envisager une typologie des savoirs autour des écritures (d'un point de vue synchronique). Le fait que des savoirs dans la dimension notionnelle ne suffisent pas à éclairer les substitutions rend nécessaire la recherche d'éléments liés à des savoirs de référence sémiolinguistiques - nous reviendrons sur ce point en conclusion. C'est une telle étude que nous présentons dans la deuxième partie de cet article en considérant les substitutions dans le modèle des écritures de l'algèbre élémentaire (Drouhard, 1992). Dans une troisième partie, nous analysons les praxéologies dans lesquelles la substitution pourrait exister, ce qui nous permet de caractériser des niches possibles. Nous complétons notre étude par une expérimentation dans une classe de collège. Celle-ci permet d'identifier un certain nombre de potentialités mais aussi de conditions et de contraintes pour penser la substitution comme objet de savoir à enseigner.

2. Fondements épistémographiques et épistémologiques

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer un certain nombre de caractéristiques des savoirs associés à la substitution dans une double perspective. Il s'agit d'une part d'appréhender leur complexité en prenant en compte la manière dont les savoirs dans la dimension sémiolinguistique s'articulent avec des savoirs dans la dimension notionnelle. Nous explorons en particulier les aspects sémantiques des expressions en jeu à l'occasion de substitutions. Il s'agit d'autre part d'identifier « ce qui pourrait exister » et à quelles conditions dans une perspective écologique. Nous prolongeons notre étude épistémographique par une étude épistémologique et didactique. Les analyses que nous menons s'appuient sur les travaux de Serfati (2005) tout en les réinterprétant dans le modèle des écritures symboliques algébriques ou ESA (Drouhard, 1992), ce qui nous permet de définir la substitution dans la perspective d'un questionnement didactique associé à la transparence de ce savoir dans l'enseignement. Dans un deuxième temps, nous

cherchons à exhiber un certain nombre de praxéologies qui pourraient être complétées avec la substitution dans l'enseignement secondaire.

2.1. La substitution dans le modèle des Ecritures Symboliques de l'Algèbre élémentaire

Les travaux de Drouhard (1992) ont montré que l'ensemble des formules de l'algèbre élémentaire forme un langage noté L_{Alg} , c'est-à-dire que ces formules répondent à un certain nombre de règles d'écriture et de réécriture constituant leur grammaire. Sans entrer dans le détail de cette construction présentée dans Drouhard et Panizza (2012), nous retenons d'une part la partition des formules de L_{Alg} en expressions E_{Alg} et propositions P_{Alg} (contenant les signes « = » ou « < » etc.) et d'autre part que L_{Alg} contient l'ensemble des formules arithmétiques (associées aux chaînes de caractères formées essentiellement par les signes des opérateurs et les chiffres). Nous distinguons également nature et fonction syntaxique d'une expression dans une formule. La nature correspond aux catégories Somme ou Produit par exemple, tandis que la fonction syntaxique désigne la relation qu'entretient une sous-expression avec une expression (ou proposition), par exemple terme de la Somme. Nous abordons ainsi la substitution en discutant les aspects syntaxiques et sémantiques des écritures.

2.1.1. Substitutions, substitutantes et occurrences

Dans le modèle des ESA, les substitutions peuvent être en première instance définies comme des applications d'un langage L dans L , qui à une formule (expression ou proposition) associent une formule, étant donné un certain nombre d'opérateurs ou de sous-expressions de la formule initiale, leurs occurrences (ou $i^{\text{ème}}$ occurrence) et les opérateurs ou expressions associés, la formule image s'obtenant par des remplacements. Reprenant les termes de substituées et substitutantes utilisés par Serfati (2005), nous désignons par substitutantes les opérateurs ou expressions venant se substituer aux opérateurs ou sous-expressions de la formule initiale¹, qui en sont les substituées. La nécessité d'évoquer les occurrences tient à ce que le remplacement ne s'effectue pas nécessairement à

¹ Afin de simplifier le propos, nous n'abordons pas ici deux distinctions qui seraient pourtant nécessaires pour caractériser les substitutions. Serfati (2005) distingue en effet signe et lieu du signe ainsi qu'assemblage et forme, une forme désignant « tout assemblage dûment complété, c'est-à-dire complété par tous les signes possibles de délimitation, y compris les signes les plus extérieurs » (p. 93). Ceci permet de préciser que la substitution se caractérise par un lieu potentiellement occupé par un signe et non un signe en lui-même, et qu'elle s'opère sur et avec des formes pour éviter toute ambiguïté.

toutes les occurrences, ce qui permet par exemple de développer « $(a + b)(a + b)$ » en remplaçant la première sous-expression $(a + b)$ par k pour se ramener à l'identité « $k(a + b) = ka + kb$ ».

Afin de nous approcher des transformations que l'expert effectue, nous devons ajouter un certain nombre de conditions à cette première définition. Examinons le cas de l'expression « $3x + 1$ ». La substitution de x par $x + 1$ pourrait conduire à écrire « $3x + 1 + 1$ » en ne remplaçant que le signe, ce qui ne correspond pas aux substitutions qu'on réalise usuellement. Nous posons donc deux conditions. Tout d'abord substituées et substituantes doivent être du même type² : toutes deux expressions ou toutes deux symboles d'opérations (ce qui permet également que la formule image soit bien formée). Dans le cas où substituante et substituée sont des expressions, nous posons comme deuxième condition que la substitution ne peut se réaliser que si elle conserve la fonction syntaxique de la substituée. Autrement dit, si la substituée a une certaine fonction syntaxique correspondant à l'opérande d'un certain opérateur dans l'expression initiale, alors l'opérande de ce même opérateur dans l'expression image doit correspondre à la substituante. Ceci permet de caractériser un premier rôle des parenthèses dans les substitutions : elles peuvent être nécessaires autour des substituantes pour conserver la fonction syntaxique de la substituée dans l'expression initiale. Cette nécessité découle aussi des règles de priorités des opérations. Ainsi, en utilisant une flèche à la suite de Serfati, $x \rightsquigarrow x + 1$ dans « $3x + 1$ » donne « $3(x + 1) + 1$ ». L'expression « $x + 1$ » a la même fonction syntaxique (facteur du produit par 3) que « x » dans l'expression initiale. Une deuxième fonction des parenthèses est liée aux règles d'écriture des expressions, en particulier, il n'est pas possible de juxtaposer certains signes comme « $+$ » et « $-$ ». La substituante doit ainsi parfois être parenthésée pour que l'expression soit bien formée. Ces premiers éléments nous amènent à identifier un certain nombre de savoirs dans la dimension sémiolinguistique nécessaires à la substitution.

Or, les savoirs dans la dimension sémiolinguistique ne sont pas indépendants des savoirs dans la dimension notionnelle. Par exemple, si l'expression initiale avait été « $3 + x + 1$ » les parenthèses autour de la substituante auraient été inutiles par associativité de l'addition. Nous allons donc analyser les aspects sémantiques des expressions et des propositions engagées dans les substitutions. Quelles sont les altérations sémantiques provoquées par la substitution ? A quelles conditions une certaine conservation sémantique est-elle possible ? Dans quelle mesure l'appréhension de ces aspects sémantiques peut-elle être source de difficulté pour les élèves ?

² Nous excluons les cas où les lettres peuvent être substituées par des propositions.

2.1.2. Sémantique

La sémantique des ESA peut être caractérisée selon trois composantes principales : sens, dénotation et interprétation. Les notions de sens et de dénotation introduites par Frege (1892/1971) sont reprises par Drouhard (1992) et spécifiées dans le modèle des ESA. En première approche, on peut dire que la dénotation correspond à un certain objet mathématique, tandis que le sens relève de la manière dont est désigné l'objet considéré, « où est contenu le mode de dénotation de l'objet » (Frege, 1971, p. 103). Par exemple, les deux ESA « $(x + 5)(x - 5)$ » et « $x^2 - 25$ » ont même dénoté (une certaine fonction réelle), tandis qu'elles n'ont pas le même sens. La seconde expression met en avant la différence de deux carrés, tandis que la première montre un produit de deux termes. Lorsqu'une substitution modifie le sens d'une expression ou d'une proposition, le sens de l'image par substitution peut se déduire en partie de celui de la formule initiale. Ainsi la substitution $x \rightsquigarrow 2x$ dans l'une des expressions précédentes peut se traduire rhétoriquement par le remplacement du nombre de signe « x » par le double du nombre de signe « x ». Bardini (2003) montre toutefois que certains choix de substituantes peuvent altérer la complexité d'une expression ou en modifier le sens sans en changer la syntaxe. Remplacer 4 par 0 ou x dans « $(x + 4)^2$ » conduit soit à une expression plus simple, soit à une traduction référant au double de x plutôt qu'à la somme de x et de x .

Mais la différence de sens entre deux expressions ne se résume pas à une différence de structure. Les transformations susceptibles d'être opérées sur l'une ou l'autre participent du sens donné à chacune des expressions.

Soient X et X' deux ESA ayant même dénotation. La sélection et la hiérarchisation, au sein des ensembles des transformations et procédures qui leur sont applicables, de celles qui sont intéressantes en fonction de la tâche à réaliser, fait partie de la différence de sens entre X et X' . (Drouhard, 1992, p. 279)

En particulier, la substituabilité des ESA est une source importante de sens. Quant à l'interprétation d'une ESA dans un certain cadre (au sens de Douady, 1986), Drouhard la définit comme « tout objet qui « correspond » à la dénotation de X dans ce cadre » (Drouhard, 1992, p. 280). Par exemple l'expression précédente peut être associée à une aire dans le cadre géométrique ou des grandeurs, une parabole d'équation $y = x^2 - 25$ dans le cadre graphique, ou un carré diminué de 25 dans le cadre arithmétique. Dans le cadre graphique, la substitution de $y + 25$ par y' correspond à une translation de la courbe : elle peut donc être interprétée, ce qui n'est peut-être pas toujours le cas dans tous les cadres. Les savoirs autour de la substitution peuvent donc incorporer des savoirs dans d'autres cadres, ce qui demande d'articuler les interprétations de la formule initiale et de son image par

substitution. La question est d'autant plus délicate dans le cas de changement de dénotation par substitution.

Dans le modèle des écritures symboliques algébriques, la dénotation est une fonction δ , dont la définition est étendue du langage arithmétique au langage algébrique. En notant \mathbf{R}' l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{\text{Non Défini}\}$, la dénotation des expressions littérales est définie de la manière suivante.

[...] l'entier n étant fixé (n représentant le nombre de variables), la dénotation δ_n des expressions littérales est une application qui va de E_{Alg} vers l'ensemble des applications de $(\mathbf{R}')^n$ vers \mathbf{R}' (par convention le nombre dénoté d'une expression sans lettres est assimilé à la fonction constante correspondante). (Drouhard & Panizza, 2012, p. 224)

Ainsi le dénoté d'une expression comme « $x + 5$ » est la fonction réelle $x \rightarrow x + 5$. Dans le cas des propositions, le dénoté prend ses valeurs dans $\{\text{Vrai, Faux, Non Défini}\}$.

Une source importante de difficultés, d'ordre strictement linguistique, réside dans le fait que, dans l'usage le plus banal de l'algèbre (par exemple pour introduire une « règle », ou en général n'importe quelle propriété des nombres) certaines formules (par exemple « $(ab)^2 = a^2b^2$ ») servent à noter des substitutions, où aux lettres seront substituées des expressions, voire (dans le cas par exemple des combinaisons linéaires de lignes d'un système de type « $L_1 - 2L_2 + L_3$ ») des propositions. (Drouhard et Panizza, 2012, p. 225)

Les dénotations de ces formules de substitutions sont alors littérales. Autrement dit, ce ne sont pas des fonctions numériques, mais des fonctions appelées *formulaires* (Drouhard et Panizza, 2012), c'est-à-dire des fonctions de E_{Alg} vers l'ensemble des applications de $(E_{Alg})^n$ vers F_{Alg} . Les auteurs poursuivent :

De même, la dénotation des propositions littérales à n variables est ici une application Δ_n qui va de P_{Alg} vers l'ensemble des applications de $(P_{Alg})^n$ vers $\{\text{Vrai, Faux}\}$; leur sens s'exprimera en termes de substitutions.

En toute rigueur, il faudrait *explicitement* distinguer les variables selon le *type* d'objets (fonctions numériques ou formulaires) que les propositions algébriques sont susceptibles de dénoter car, selon ce type, leur dénotation et leur sens ne sont plus les mêmes. (Drouhard & Panizza, 2012, p. 225)

Il ne s'agit donc pas seulement de savoir que les expressions ou les formules dénotent (Sackur et al., 1997) mais aussi de savoir que la dénotation dépend des objets associés aux variables. Ceci nous amène à interroger plus spécifiquement les savoirs autour des substitutions associées aux propositions. En particulier, à quelle(s) condition(s) une substitution conserve-t-elle le sens ou la dénotation

d'une proposition ? Afin d'approfondir cette question, nous allons nous centrer sur les égalités, qui jouent un rôle important dans les substitutions.

2.1.3. Substitutions à dénotation invariante

Examinons le cas des propositions lorsque substituées et substituantes sont des expressions. Lorsque la substituante a même dénotation que la substituée (lorsqu'on remplace 5 par $2 + 3$ par exemple ou $(x + 5)(x - 5)$ par $x^2 - 25$ dans une égalité comme « $(x + 5)(x - 5) = -9$ », la dénotation de la proposition est inchangée. Ceci donne un autre sens à l'égalité « $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$ ». Toute égalité de P_{Alg} correspondant à des expressions de même dénotation peut ainsi être considérée comme une écriture de substitution. Sous certaines conditions sur les domaines considérés pour les variables, dès lors qu'on dispose d'une égalité, l'un quelconque de ses membres peut être substitué par l'autre dans toute autre proposition sans en modifier la dénotation.

Or, il n'est pas certain que ce changement de point de vue sur l'égalité aille de soi pour les élèves. Il est pourtant crucial, non seulement pour le calcul algébrique, mais aussi parfois pour la modélisation. Ainsi, une élève de 5^e (11-12 ans), renommée Manon, propose les écritures en figure 1 pour modéliser le programme de calcul « choisir un nombre entier, ajouter 3 puis multiplier le résultat par 2 ».

Preuve:
 n.d. $n + 3 = a$
 $a \times 2 = b$

Figure 1. Multiplicité de variables et écritures symboliques associées à un programme de calcul

Considérant le processus de modélisation (Chevallard, 1989) dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous distinguons trois étapes qui le constituent. La première correspond au choix d'un certain nombre de variables pertinentes relatives à un système (intra ou extra-mathématique) au regard d'une question à l'étude. La deuxième étape, la construction du modèle, consiste à produire des relations entre ces variables. Manon réussit ces deux premières étapes. Elle doit cependant prouver que le programme de calcul ainsi modélisé est équivalent à un second programme de calcul (que nous n'examinons pas ici). Dans ce cas, son modèle ne permet pas de convoquer une technique s'appuyant sur des arguments syntaxiques (renvoyant à l'unicité de l'écriture canonique d'un polynôme par exemple) : les étapes des deux programmes de calcul décrits rhétoriquement étant différentes, elles donnent lieu à des variables en partie différentes de l'un à l'autre. La troisième étape du processus de modélisation, le

travail du modèle, nécessite de produire de nouvelles égalités par substitution, mais ce n'est pas le sens premier que donne Manon aux égalités produites car les membres de droite correspondent à une codification des résultats. Le travail des écritures l'amènera d'ailleurs à écrire « $n + 3 = a \times 2 = b$ », prolongeant sans doute une interprétation de l'égalité dans le langage arithmétique comme « annonce de résultat ». Sans pouvoir leur conférer un autre sens lié aux substitutions elle ne peut conclure. Les substitutions engagent donc de nouveaux savoirs sur l'égalité.

Examinons le cas où la substitution occasionne un changement de dénoté.

2.1.4. Substitutions et changement de dénotation

Reprenons l'écriture symbolique « $k(a + b) = ka + kb$ ». Si elle généralise des égalités numériques, les variables correspondent implicitement à des nombres et la dénotation des expressions constituant les membres de l'égalité est donc *a priori* numérique. Ceci permet d'effectuer les substitutions réciproques en remplaçant les variables par des expressions de L_{Arithm} . Mais la même égalité porte une dénotation littérale à partir du moment où elle est employée pour du calcul littéral. Cette double dénotation est implicite, et la dénotation des expressions produites comme « $2(x + y)$ » est à nouveau numérique *a priori* (une fonction à deux variables). Elle pourrait être aussi littérale, si on remplace y par $x + 1$, à l'occasion de la résolution d'un système d'équations par exemple. Les changements qui s'opèrent entre sens, dénotation et interprétation des écritures peuvent être d'autant plus complexes pour les élèves que les symboles sont les mêmes ainsi que le montrent les travaux de Drouhard et Panizza (2012).

Par ailleurs, les substitutions rapportées à des opérateurs peuvent modifier le sens avec altération de dénotation ou non. Ainsi en substituant « $+$ » par « \times » dans « $k(a + b) = ka + kb$ » on obtient « $k(a \times b) = ka \times kb$ » qui correspond à la distributivité de la multiplication sur elle-même, et ne relève plus d'une identité sur \mathbf{R} . Autrement dit la dénotation de la proposition a changé. En revanche remplacer $+$ par $-$ donne bien une identité sur le même domaine. La conservation de la dénotation dépend donc de propriétés mathématiques mais aussi de la nature des substituées, des substituantes ou de la dénotation de la formule dans laquelle elle a lieu. Effectuer une substitution dans une identité ne garantit pas l'obtention d'une égalité vraie, et les arguments permettant de trancher peuvent être variés. Ceci nous amène à supposer que les élèves puissent rencontrer des difficultés en particulier s'ils n'envisagent que des manipulations d'ostensifs indépendamment des savoirs à la fois notionnels et sémiolinguistiques qui les sous-tendent.

D'autres éléments peuvent entrer en jeu. Examinons deux exemples qui sortent quelque peu du modèle des ESA (ce qui nécessiterait une extension de la définition

de la substitution donnée plus haut), mais qui sont significatifs. Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut être conduit à effectuer la substitution $n \rightsquigarrow n + 1$ dans une expression du type $f(n)$ correspondant à u_n . Substituée et substituante n'ont pas le même dénoté (ni le même sens), mais les ensembles images des dénnotations entretiennent une relation d'inclusion, ce qui permet que l'expression obtenue par substitution soit définie. Le sens et les limites des transformations applicables peuvent également piloter les substitutions. Par exemple, lorsqu'on effectue un changement de variable pour du calcul intégral, on cherche souvent à exhiber une forme d'expression sur laquelle les manipulations sont facilitées.

De même les liens entre interprétation et substitution ne sont pas univoques. En particulier, pour réaliser une substitution dans le cas où substituantes et substituées n'ont pas la même interprétation, un contrôle sémantique est nécessaire. Par exemple, un polynôme d'endomorphismes ne s'obtient pas par substitution purement syntaxique dans l'écriture d'un polynôme : d'une part les produits (internes et externes) doivent pouvoir être définis pour que les objets soient définis, et d'autre part, la constante change de nature.

Au regard de l'étude conduite ici, il apparaît que les règles de conservation de dénnotation sont d'une grande diversité, de nombreux cas sont à distinguer, ce qui rend sans doute l'examen de la « substitivité » des expressions non trivial, en particulier en cours d'apprentissage. Duval (1988) souligne le coût cognitif que peut représenter la compréhension de la substitution s'opérant entre des expressions qu'il appelle « référentiellement équivalentes », c'est-à-dire à dénnotation invariante, sans être « sémantiquement congruentes » :

Cette substitution constitue souvent, pour les individus en situation d'apprentissage ou même de recherche, un saut, entre deux réseaux sémantiques, tels qu'ils n'y pensent pas d'eux-mêmes, et que, si on la leur indique, elle leur paraît arbitraire. [...] Un des obstacles rencontrés par beaucoup d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique. (Duval, 1988, p. 8-9)

Sans avoir épuisé l'ensemble des cas possibles, il apparaît que la substitution est un objet de savoir bien plus complexe qu'il n'y paraît sans doute de prime abord. La complexité tient fondamentalement à l'existence de savoirs se situant à la fois dans les dimensions sémiolinguistique et notionnelle qui, tout en étant fortement imbriqués, interagissent selon une multitude de règles. Les substitutions entretiennent des relations très diverses avec les objets égalité et expressions. Les besoins trophiques identifiés liés à la reconnaissance de structure d'une expression ou à l'usage des parenthèses qui constituent autant de conditions d'existence de la

substitution paraissent peu élevés. Toutefois, les justifications des techniques permettant d'obtenir des égalités par substitution s'avèrent particulièrement délicates comme nous l'avons vu. Afin d'examiner plus avant les conditions d'existence de la substitution, nous allons compléter ces éléments par la recherche d'autres objets avec lesquels elle interagit ce qui conduit à explorer son habitat.

2.2. Différents types de substitutions et dialectique instantiation-extension

Du point de vue des savoirs savants, la substitution a changé d'habitat du XVII^e siècle jusqu'à la fin du XIX^e siècle en France. Essentiellement outil pour la résolution d'équations chez Leibniz, l'évolution du rôle et de la place de l'algèbre dans le paysage théorique des mathématiques a conduit à deux phénomènes. D'une part, la substitution a pris la place d'objet dans une théorie qui s'est autonomisée à partir des travaux de Galois et de Cauchy notamment (Ehrhardt, 2010), par rapport à la théorie des équations dans laquelle elle est née. D'autre part, avec l'émergence de l'analyse comme théorie, son statut d'outil algébrique se distancie de l'objet institué dans cette théorie renvoyant les substitutions à des méthodes calculatoires pour lesquelles les discours peuvent être très réduits pour l'expert, puisque relatifs à des pratiques élémentaires du calcul algébrique. Situait notre recherche dans la perspective d'une transposition dans l'enseignement secondaire, nous avons donc fait le choix de poursuivre l'étude écologique engagée en nous intéressant à l'émergence historique des substitutions. Nous allons donc appuyer notre propos sur une lecture des travaux de Serfati (2005) orientée par la recherche de praxéologies dans lesquelles la substitution pourrait occuper une place tout en envisageant des types de tâches qui ne se limitent pas au domaine des équations.

2.2.1. Dialectique instantiation-extension

Les travaux de Serfati (2005) montrent comment les substitutions ont été motrices d'inventions au cours du XVII^e siècle en particulier à partir des œuvres de Descartes, Leibniz et Newton. Reprenons très succinctement l'exemple de l'équation de degré deux « $4 \times (x + 1)^3 - 4x^3 - 1 = 0$ » repris par Bardini (2003) à partir de Serfati (2005). Une première question que l'on peut se poser à propos de cette équation est celle de ses racines : elle possède une racine double, $-1/2$. En effectuant la substitution $3 \sim n$, on obtient un nouvel objet : une équation indéterminée. Le questionnement peut dès lors évoluer vers une problématique existentielle. L'équation précédente devient une équation possédant une racine double parmi tout un ensemble d'équations. On peut alors chercher s'il existe d'autres valeurs de n pour lesquelles l'équation « $4 \times (x + 1)^n - 4x^n - 1 = 0$ » admet une racine multiple. En opérant une nouvelle substitution, on peut obtenir encore un nouvel objet : une équation paramétrée « $4 \times (x + 1)^n - 4x^n - a = 0$ » dont on peut chercher toutes les valeurs possibles de a , n étant donné, pour que l'équation

admette une racine multiple. Au fur et à mesure de l'évolution des procédés de substitution décrits, de nouveaux objets mathématiques sont créés, de nouveaux problèmes peuvent être posés, voire résolus, tandis que d'anciennes solutions sont ré-examinées en montrant une certaine généralité.

Différents types de substitutions ont émergé historiquement en fonction des substituées, tout d'abord « lettre » ou « chiffre » puis plus généralement « forme » ou « lieu » d'un assembleur. Partant de ces catégories, Serfati met à jour le rôle fondamental de la substitution dans la constitution de l'écriture symbolique tout en identifiant une dialectique entre extension et instantiation au coeur de la fonction heuristique des substitutions. Nous structurons notre étude selon les types de substitutions identifiés par Serfati (2005) en nous centrant sur celles qui engagent « lettre », « chiffre » et « forme »³.

2.2.2. Substitutions « lettre – chiffre »

Un premier type de substitutions à la « lettre » qui apparaît dans les travaux de Leibniz correspond au remplacement par un nombre à toutes les occurrences, ce que Serfati nomme « chiffrage ». Elles permettent de déterminer la valeur d'une expression par exemple, ce qui correspond à une instantiation numérique. Les substitutions inverses, les substitutions « au chiffre », réalisent inversement des extensions. Elles relèvent de deux catégories que Serfati (2005) nomme les littéralisations et les canonisations. Les premières apparaissent chez Descartes qui substitue des « chiffres » par des « lettres » dans la formule de Cardan pour les équations du 3^e degré. Dans le cas de propositions, les littéralisations peuvent conduire à des canonisations comme « $a^2a^3 = a^{2+3}$ » chez Descartes ou « $a^n a^p = a^{n+p}$ » chez Leibniz. L'égalité précédente est alors une instantiation de cette nouvelle égalité. La création de canons peut toutefois se heurter à la reconnaissance de forme, une manipulation préalable peut être nécessaire pour rendre possible l'analogie : l'extension demande « une préparation des propositionnelles » (Serfati, 2005 p. 306). La question de la manière dont on peut lier les variables potentielles des expressions se pose alors pour identifier de possibles substituées. Une fois le canon créé, de nouveaux chiffrages peuvent être envisagés, par exemple en remplaçant a , n ou p par des nombres qui ne sont plus entiers. Ces instantiations permettent alors d'interroger l'extension du domaine de validité de l'égalité.

³ Pour des raisons de place nous laissons de côté les substitutions aux assembleurs.

2.2.3. Substitutions « lettre – lettre » ou « lettre – forme »

Lorsqu'une « lettre » est remplacée par une « lettre », la substitution peut correspondre à un autre type d'instantiation que le chiffrage : une instantiation littérale. Leibniz est ainsi l'un des premiers à désigner par paramètres les substituantes correspondant à ces littéralisations spécifiques. La substituante correspond alors à un donné fixé mais arbitraire.

Un autre type de substitutions à la « lettre » apparaît dans les travaux de Leibniz. Il s'agit de la substitution par une « forme » correspondant à un changement de variable pour la résolution des équations du troisième degré de la forme « $x^3 + px - q = 0$ ». Il ne s'agit pas pour Leibniz de déterminer des solutions dans le sens où elles sont connues, mais de proposer une technique de résolution pour retrouver des solutions déjà établies à partir de la méthode de Tartaglia-Cardan-Bombelli. Pour cela il indique qu'il pose (*ponatur*) $x = y + z$. L'équation est rendue plus complexe dans un premier temps, mais les nouvelles inconnues permettent de simplifier l'expression du membre de gauche de l'équation pour terminer la résolution. Si les substitutions au « lieu » d'une « lettre-chiffre » sont prépondérantes au cours du XVII^e siècle, elles s'étendent avec le temps à des substitutions à la place d'une « forme », et sont notamment utilisées pour rendre apparente la structure d'une expression solution d'une équation de manière condensée.

D'un point de vue écologique nous en déduisons que la substitution vit en étroite relation avec les objets paramètre, équation, modélisation et calcul algébrique avec les identités. La substitution occupe une niche écologique importante pour l'étude des équations. Une condition pour envisager sa transposition dans l'enseignement paraît toutefois être celle de l'existence de problématiques liées à l'existence, ou à l'identification de conditions ou de cas possibles et donc de certains types de tâches comme ceux identifiés par Bardini (2003). Par exemple, à partir d'une formule modélisant une suite de nombres figurés, on peut examiner l'existence d'une valeur de la variable pour laquelle la formule donne un nombre entier donné.

Pour des raisons de place et afin d'examiner plus avant les habitats de la substitution, nous allons nous centrer sur le domaine de l'algèbre élémentaire⁴ et restreindre notre étude aux objets modélisation, calcul algébrique et identités en lien avec l'expérimentation réalisée. Nous n'aborderons donc pas les objets équations ou systèmes d'équations (nous renvoyons à Drouhard et Panizza, 2012 pour des éléments de discussion).

⁴ Le domaine des suites et des fonctions serait également à considérer, ce que Bardini (2003) a entrepris.

3. Etude globale de praxéologies de l'algèbre élémentaire autour de la substitution

Dans cette partie, nous cherchons à caractériser des praxéologies qui pourraient s'organiser autour de la substitution comme élément technologique, et en particulier à faire des hypothèses quant aux conditions sous lesquelles elle pourrait assumer un rôle technologique. Nous illustrons notre propos à partir de tâches existantes dans les classes, mais aussi de tâches qui pourraient être nouvelles. Sans entrer dans le détail de l'étude réalisée, nous présentons les praxéologies en les regroupant selon les caractéristiques des substitutions auxquelles elles conduisent. Au regard de notre étude épistémologique, nous retenons les types de tâches suivants conduisant *a priori* à être accomplis au moyen de techniques reposant sur des substitutions :

T_1 : Développer une expression algébrique

T'_1 : Factoriser une expression algébrique

T_2 : Créer une identité à partir d'une égalité de L_{Arithm}

T'_2 : Créer une identité à partir d'une identité de L_{Alg}

T_3 : Evaluer une expression algébrique pour une ou des valeurs attribuées aux variables de cette expression

T_4 : Reconnaître ou rendre visible une « forme » d'expression

T_5 : Passer d'un modèle algébrique à un autre

3.1. Substitutions et créations d'identités

Accomplir T_2 au moyen d'une substitution peut nécessiter un certain nombre de sous-tâches. Considérons l'égalité « $5 \times (10 + 3) = 5 \times 10 + 5 \times 3$ ». En effectuant la substitution partout dans l'écriture $5 \sim k$, $10 \sim a$ et $3 \sim b$ on obtient le canon « $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ ». Dans le cas d'un ensemble de propositions, un travail préalable peut être nécessaire pour une certaine uniformité : à partir de « $5 \times (10 + 3) = 5 \times 10 + 5 \times 3$ » et de « $7 \times 10 + 7 \times 2 = 12 \times 7$ », il s'agit par exemple de substituer $10 + 2$ à 12 , d'échanger les membres de l'égalité (ce qui peut se faire par substitution) et les facteurs du produit (on substitue 7×12 à 12×7) dans l'écriture du membre de gauche. Dans les substitutions les « lieux » ont une importance. Il y a de plus un choix à effectuer dans les substituées : considère-t-on 10 comme substituée potentielle ou non ? Du point de vue syntaxique c'est sans importance, mais pour la création d'une identité, cela pose la question de la portée de l'extension. La quantification que l'on est amené à poser pour l'interprétation de ces nouvelles propositions, est héritée de leurs antécédents. Par exemple, pour la

proposition précédente, les « lettres » pourraient être interprétées comme nombre quelconque de l'ensemble des entiers naturels. Par suite, un changement de point de vue peut être opéré sur la formule initiale qui devient une instantiation de cette nouvelle proposition. Quelles autres instantiations numériques peut-on alors réaliser ? Du point de vue syntaxique tout peut être envisagé. Mais ensuite, il s'agira d'en observer l'interprétation possible, et de prendre en compte les savoirs liés aux propriétés des nombres et des opérations conditionnant les chiffrages.

Une autre technique permettant d'accomplir T_2 peut s'appuyer sur des substitutions dans des identités déjà constituées ainsi que nous l'avons évoqué dans la première partie de cet article. Examinons l'exemple suivant dont nous faisons l'hypothèse qu'il est implicitement utilisé dans certains manuels (Constantin, 2018) : « $k(a + b + c) = ka + kb + kc$ ». En effectuant les substitutions $b \rightsquigarrow (b + c)$ dans « $k(a + b) = ka + kb$ » on obtient « $k(a + (b + c)) = ka + k(b + c)$ ». En opérant uniquement par substitution, une étape intermédiaire est nécessaire pour produire l'égalité « $k(b + c) = kb + kc$ ». Elle consiste à poser toujours dans la même formule initiale $a \rightsquigarrow b$ et $b \rightsquigarrow c$. Cette égalité permet ensuite d'exécuter la substitution $(k(b + c)) \rightsquigarrow (kb + kc)$ dans « $k(a + (b + c)) = ka + k(b + c)$ » pour aboutir à l'identité visée. On retrouve plusieurs interprétations de l'égalité nécessaires à la mise en œuvre de cette technique : formule de substitution ou représentation d'une substitution potentielle. L'analyse des étapes nécessaires à une telle technique nous amène à conclure que la substitution n'est pas toujours économique pour les praxéologies considérées. Elle peut être selon les cas, remplacée par ce que Drouhard (1992) nomme une transformation de mouvement. Ainsi peut-on directement écrire la proposition voulue à partir de la précédente *via* $k(b + c) \xrightarrow{\text{distributivité}} kb + kc$. La différence s'exprime par le fait qu'une transformation de mouvement s'opère en articulation avec les propriétés mathématiques des opérations, alors qu'une substitution est isolée dans la dimension sémiolinguistique. Une transformation de mouvement permet de plus de produire une succession d'égalités (assurée par les propriétés des opérations), tandis que les substitutions s'exécutent dans une seule égalité transformée. D'autres étapes pourraient être envisagées en considérant comme formule initiale non pas une proposition mais une expression. À partir de « $k(a + b + c)$ » la substitution $b + c \rightsquigarrow d$ permet d'obtenir « $k(a + d)$ » puis de terminer à partir de l'égalité « $k(a + d) = ka + kd$ » dans laquelle on peut opérer la substitution inverse $d \rightsquigarrow (b + c)$.

Du point de vue technologique, la question de la conservation de la dénotation des égalités est cruciale. Or, comme nous l'avons vu plus haut, elle peut être en partie prise en charge par des propriétés de la substitution mais pas seulement : des propriétés mathématiques peuvent être nécessaires dans la dimension notionnelle.

Les substitutions paraissent toutefois pouvoir mettre en relation différentes identités, que ce soit celles qui existent usuellement dans les programmes et les manuels du secondaire en France, voire en construire de nouvelles comme le carré d'un trinôme par exemple. À partir de ces identités, on peut envisager des techniques de calcul algébrique qui s'appuient sur de nouvelles littéralisations.

3.2. Substitution, développements et factorisations

Examinons plus avant le cas des techniques de factorisation ou de développement. Considérant toujours le formalisme de la simple distributivité par exemple, $k \rightsquigarrow ((3+x)(x+1))$, $a \rightsquigarrow 5$ et $b \rightsquigarrow x$ donne « $((3+x)(x+1))(5+x) = ((3+x)(x+1))5 + ((3+x)(x+1))x$ », ou encore $k \rightsquigarrow (4n+3)$, $a \rightsquigarrow (7n)$ et $b \rightsquigarrow 1$ donne « $(4n+3)((7n)+1) = (4n+3)(7n) + (4n+3)1$ ». Ces exemples montrent que la substitution permet d'envisager des techniques sûres pour des expressions d'une certaine complexité ostensive avec des catégories d'une grande diversité pour les substituantes. On retrouve les composantes technologiques associées aux règles d'écriture. Examinons plus avant la question du parenthésage qui aurait été nécessaire si on avait remplacé k ou b par -5 par exemple. Peut-on lister des conditions qui permettent de décrire les parenthésages nécessaires ou utiles ? De manière à rendre les techniques sûres, on pourrait envisager de parenthéser toutes les substituantes. Mais dans ce cas, cela conduirait à parenthéser les écritures de nombres ce qui peut rendre difficile la lecture des écritures comme « $(-5)((3n)+2) = (-5)(3n) + (-5)(2)$ ». Une autre solution serait d'écrire tous les délimitants possibles ainsi que tous les signes de multiplication omis dans l'écriture de la formule initiale. À partir de « $k(a+b) = ka + kb$ » on obtiendrait alors « $k \times (a+b) = (k \times a) + (k \times b)$ ». Mais le choix de ne pas parenthéser les « lettres » conduit alors à parenthéser nécessairement certaines substituantes. En utilisant l'exemple précédent, on est alors conduit à écrire $k \rightsquigarrow (-5)$, $a \rightsquigarrow (3n)$ et $b \rightsquigarrow 2$. Ce travail repose nécessairement sur des reconnaissances de formes à partir de l'expression « $-5(3n+2)$ ». On pourrait envisager alors que la technique consiste à compléter toute sous-expression comme « $-5((3n)+2)$ », à partir des priorités des opérations. La reconnaissance de forme est-elle alors outillée, ou rendue plus malaisée compte tenu de l'absence de parenthèses autour de la « lettre » a dans la « forme » source que nous avons choisie ? En réalité cette forme apparaîtra nécessairement si l'on parenthèse les substituantes en opérant la substitution dans la forme choisie, ce qui laisse, selon nous la question finalement ouverte.

En amont de ce travail, la technique se compose d'une première étape qui correspond au choix d'une identité. Les identités existant dans le secondaire en France actuellement peuvent être au nombre de six (simple distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction, double distributivité et

trois identités remarquables), ce qui correspond à douze expressions possibles. La mise en correspondance entre l'expression à développer ou à factoriser peut également se faire sur des sous-expressions. Le choix des substituantes nécessite d'examiner les occurrences et les sous-expressions à lier ou non. Par exemple pour développer « $(7x + 3)(7x + 5)$ » pense-t-on les deux premiers termes de chaque somme comme résultant potentiellement d'une même substitution associant une même substituée à une même substituante (substitution à toutes les occurrences), ou bien considère-t-on qu'une même substituante peut correspondre à deux substituées différentes ? En effectuant les substitutions à toutes les occurrences $7x \simeq a$; $3 \simeq c$ et $5 \simeq d$, on obtient une expression qui n'est pas une sous-expression d'une identité connue, mais la substitution du deuxième $7x$ par b permet de se ramener à la double distributivité. Dans quelle mesure la reconnaissance d'une identité (étape préalable nécessaire à son utilisation) pourrait-elle dès lors s'appuyer sur des substitutions ? La substitution est en effet réversible (propriété très utilisée dans le cas de changement d'inconnue pour la résolution d'équations par exemple). Les choix peuvent être nombreux à envisager. Pour développer « $(6x + 2)(2x + x)$ » par exemple on peut considérer chaque occurrence de « 2 » comme issue d'une substitution potentielle, voire celle de « 6 » comme en lien avec 2. Se fonde-t-on sur les écritures des signes « + » et du produit de deux sommes par *pattern matching* ? Dans ce cas, on peut ne pas identifier une autre substitution qui serait $(2x + x) \simeq 3x$. Une fois cette première étape réalisée, un travail sur les parenthèses est nécessaire comme nous l'avons vu précédemment. La description dans le détail des techniques et des choix à opérer montre à la fois combien ce travail peut être délicat mais aussi piloté par divers éléments technologiques dans lesquels la substitution peut jouer un certain rôle. La question du travail de reconnaissance se prolonge également dans les problèmes de modélisation comme nous allons le voir.

3.3. Substitution, reconnaissance de forme et modélisation

De même que pour la création d'identités, la construction d'un modèle peut s'appuyer sur une première étape dans L_{Arithm} consistant à partir de connaissances sur le système à produire des relations entre des valeurs numériques. La production de relations peut également se faire directement dans L_{Alg} , avec un plus grand nombre de variables que nécessaire, ainsi que nous l'avons observé précédemment (figure 1). Le type de tâches T_5 peut s'avérer utile. Une technique peut consister à retravailler les désignations en appui sur une certaine dialectique entre système et modèle. Si l'on dispose d'une égalité, une autre technique consiste à choisir une relation comme source, et à interpréter l'un des membres de l'égalité comme substituante, et l'autre comme substituée, ce qui peut nécessiter un travail préalable sur l'égalité produite pour exprimer une variable en fonction d'autres. Le travail du

modèle étant piloté par la recherche d'expressions dépendant de mêmes variables, un changement de variable peut être utile. La justification s'appuie sur des propriétés liées à l'égalité : à toute égalité on peut associer deux substitutions, et le dénoté d'une proposition est conservé par substitution issue d'une égalité (sous réserve que les expressions restent définies, avec des conditions sur les domaines sur lesquels les relations sont observées).

Ces substitutions peuvent également être utiles lorsque le travail du modèle a pour enjeu de produire une certaine forme, par exemple « $3n$ », qui est une forme d'un multiple de 3. Par exemple lorsqu'on veut montrer que la somme de trois nombres entiers naturels consécutifs est un multiple de 3, si on désigne par a , b et c les entiers en question, l'expression « $a + b + c$ » ne permet guère de conclure. De même que précédemment, des essais numériques peuvent permettre de conjecturer que la somme est égale à $3b$. Avec ou sans cette conjecture, il est souvent utile de lier les variables et d'en réduire le nombre dans l'expression sur laquelle on travaille.

Ces substitutions peuvent aussi participer à l'identification d'une expression comme objet à part entière, par exemple en effectuant $n + 1 \rightsquigarrow N$, pour reconnaître le carré d'un nombre dans $(n + 1)^2$, et pas seulement un nombre auquel on ajoute 1 avant de calculer son carré. Plus généralement la reconnaissance de la catégorie d'une expression peut s'appuyer sur des éléments technologiques comme : si on peut par substitutions dans une expression obtenir $A \times B$ alors c'est un Produit.

Examinons plus avant le type de tâches T_4 .

Deux types de tâches sont à considérer : reconnaître une forme d'expression et reconnaître une structure. Pour reconnaître la structure principale, une technique peut consister à identifier la dernière opération à effectuer en cas d'exécution du calcul en simulant T_3 ou en passant à une formulation rhétorique par étapes. Les priorités opératoires et le rôle des parenthèses constituent les ingrédients technologiques essentiels. Bardini (2003) montre néanmoins que la mise en oeuvre de cette technique demande un travail d'analyse et de synthèse non trivial. En position de lecteur, il s'agit de commencer à interpréter des opérateurs de plus bas niveau, contrairement à ce que l'on fait en position d'auteur de l'expression. Dans ce cas en effet, la structure principale guide le travail tout en considérant les autres opérateurs. Ainsi que le note Bardini à la suite de Serfati, les techniques de lecture s'appuient sur un mélange d'analyse et de synthèse permettant d'effectuer des contrôles au fur et à mesure du travail. D'autres moyens de reconnaissance peuvent également entrer en jeu. Du point de vue syntaxique la hiérarchie des opérations correspond à des caractéristiques visuelles des expressions que Kirshner a identifiées (Kirshner, 1989) : aux opérateurs de niveau 1 (addition et soustraction),

correspond l'espace horizontal large, la juxtaposition horizontale ou verticale étant associée aux opérateurs de niveau 2 (multiplication ou division) et la juxtaposition en diagonale aux opérateurs de niveau 3 (racines ou puissances).

With operation level defined in these visual terms the character of the hierarchy of operations rule is altered: the propositional construct that exponentiation has precedence over multiplication which has precedence over addition becomes the implicit knowledge that diagonal juxtaposition 'ties tighter than' horizontal juxtaposition which 'ties tighter than' wide spacing. (Kirshner, 1993, p. 12)

Les travaux de Kirshner (1989) tendent à montrer que les élèves s'appuient de manière prégnante sur les spécificités visuelles pour les identifications de structures, les connaissances syntaxiques paraissant s'acquérir davantage dans la pratique et par l'expérience des formes, bien qu'il ne soit pas certain que le travail sur les priorités opératoires ne joue pas un rôle. Or, la substitution pourrait comme nous l'avons vu précédemment jouer un rôle pour outiller ce travail. Revenons à l'exemple de l'expression $4x(x + 5)$ que nous avons examinée dans la première partie de cet article. Le fait que l'algébriste compétent identifie un produit de deux facteurs est lié à une règle syntaxique de priorité de la catégorie Pseudo-Monôme sur la catégorie Produit⁵. Ce choix s'explique aussi du point de vue du calcul, par des raisons d'économie dans le développement. L'expert peut passer d'une structure à l'autre selon les besoins du travail qu'il a à accomplir mais ce n'est sans doute pas toujours le cas pour les élèves.

Ces analyses montrent comment les praxéologies envisagées peuvent se nourrir les unes des autres à partir de techniques fondées sur la substitution. La substitution pourrait donc être un objet relié à bien d'autres objets. Du point de vue technologique, les besoins identifiés relèvent essentiellement des règles syntaxiques liées aux signes et aux parenthèses, de reconnaissances de sous-expressions dans une formule, de la réversibilité de la substitution, ou des règles liant égalité, substitution et conservation de la dénotation, ce qui renvoie à des savoirs à la fois dans la dimension sémiolinguistique et notionnelle. Nous retenons deux nouvelles propriétés de la substitution. Pour toute substitution s de L_{Alg} , en notant s' la substitution s'obtenant en échangeant substituées et substituantes, on a

⁵ Du point de vue de la structure linguistique, deux opérations multiplicatives peuvent être distinguées : la première, interne, correspond à la catégorie Produit (comme pour $4 \times x$), la seconde, externe, correspond à la catégorie Pseudo-monôme, comme pour $4x$. Cette distinction permet de rendre compte de propriétés permettant l'identification de la structure telle que l'expert la considère usuellement. L'agrégation par juxtaposition joue de ce point de vue un rôle particulier : la sous-structure dont dérive « $4x$ » se trouve ainsi en position de facteur dans la structure globale, ou autrement dit en position « prioritaire ».

$s' \circ s = Id_L$. De plus, en notant deux expressions algébriques e_1 et e_2 , si $e_1 = e_2$, alors $e_1 \rightsquigarrow e_2$ et $e_2 \rightsquigarrow e_1$ conservent la dénotation d'une proposition (sous réserve, pour la très grande majorité des cas, que les expressions soient bien définies sur les domaines considérés pour les propositions). Néanmoins, pour un certain nombre de règles, les généralisations paraissent peu envisageables. Par ailleurs, des techniques concurrentes peuvent exister qui ne mobilisent pas la substitution (passer d'une expression algébrique à une expression rhétorique pour T_4 ou les transformations de mouvement pour T_1). Ceci contribue sans doute à ce que la substitution n'existe pas vraiment dans l'enseignement. D'autres besoins trophiques émergent dans nos analyses à partir des travaux de Serfati (2005) et Bardini (2003), c'est-à-dire des besoins répondant à l'articulation des praxéologies envisagées avec d'autres praxéologies en amont et en aval constituant des chaînes alimentaires (Chevallard, 2007). De ce point de vue, les types de tâches liés à des problématiques d'existence en lien avec la modélisation ou au passage d'une expression rhétorique à une expression algébrique et inversement explorés par Bardini (2003) amènent à penser que les praxéologies que nous avons envisagées pourraient s'insérer dans l'institution collège.

Ceci questionne les conditions didactiques sous lesquelles les organisations de savoir envisagées peuvent exister dans cette institution. Afin d'explorer quelque peu ces conditions, nous avons conçu et expérimenté dans une classe de 4^e ordinaire deux exercices autour de la substitution. Cette expérimentation a un caractère très local et n'est pas adossée à la conception d'une ingénierie didactique qui aurait pour objectif de prendre en charge les praxéologies telles que nous les avons ébauchées. Il s'agit d'éclairer notre étude écologique d'un autre point de vue en nous centrant sur ce que l'on nomme le moment technologico-théorique (Chevallard, 2007) en théorie anthropologique du didactique. Ce moment didactique a pour fonction l'élaboration d'éléments permettant de décrire, d'éclairer ou de justifier la technique de substitution pour la praxéologie associée à T_1 . Précisons que le terme de moment ne désigne pas un moment dans le temps et qu'il peut se réaliser en plusieurs épisodes.

4. Résultats d'une expérimentation dans une classe de 4^e

4.1. Éléments méthodologiques

L'expérimentation s'est déroulée dans une classe de 4^e (élèves de 13-14 ans) de 27 élèves en 2016 dans laquelle l'enseignante est la chercheure. Deux séances ont été consacrées à un travail autour de la substitution. Notons que les élèves ont travaillé les règles de priorité des opérations et la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition a été enseignée sous sa forme simple dans la classe précédente. Les règles d'écriture et de ré-écriture d'expressions algébriques

(juxtaposition de signes qui nécessitent le parenthésage pour les nombres négatifs, ou effacement du signe de la multiplication dans certains cas) ont également été travaillées. La substitution a été introduite à partir de questions soulevées par un problème consistant à prouver que la somme des six premiers termes d'une suite de Fibonacci est égale au produit du cinquième terme par 4. Certains élèves justifient à partir de sommes réorganisées et de produits vus comme additions itérées. D'autres ont utilisé la propriété de distributivité sur l'expression « $4 \times (2a + 3b)$ », a et b désignant les deux premiers nombres de la suite. La question de savoir si cette transformation est légitime a ensuite été posée, et la substitution a été introduite comme permettant de décrire une manipulation fondée par l'écriture « $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ ».

Deux exercices ont ensuite été proposés aux élèves. Le premier consiste à travailler la technique, un ensemble de substituantes étant données, il s'agit d'effectuer les substitutions. Le second exercice consiste à développer un certain nombre d'expressions à partir de la praxéologie associée à T_4 . Pour cela, la technique est imposée par l'énoncé qui est le suivant : « Proposer des substitutions possibles pour utiliser la distributivité pour développer les expressions suivantes puis effectuer le développement ». La propriété de distributivité est donnée sous la forme « $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ ». Les signes des multiplications sont écrits de manière à centrer le travail des élèves sur les choix des substituantes et le parenthésage, en limitant les difficultés de reconnaissance de structures pour l'identité. Cinq expressions sont proposées : « $-5(3n + 2)$ » ; « $2n(n + 3)$ » ; « $(4n + 3)(7n + 1)$ » ; « $(3n - 2)(4n + 5)$ » et « $4(3a + 2b + 1)$ ».

Nous faisons l'hypothèse que la substituabilité des expressions dépend pour les élèves des catégories des substituantes. Nous avons donc choisi des expressions pour lesquelles les substituantes pour k sont successivement un nombre négatif, un monôme, une somme et une différence. Nous cherchons à déterminer si les élèves convoquent des arguments liés aux fonctions syntaxiques ou à la nature des sous-expressions pour justifier leurs techniques et en particulier leurs choix ou la possibilité ou non d'effectuer des substitutions. Nous faisons en effet l'hypothèse que certains élèves peuvent ne pas envisager de substitutions possibles autres que pour des nombres ou des monômes, mais que la production d'une égalité par substitution pourrait être juste et servir de levier pour réinterroger la nature des substituantes possibles.

Nous cherchons également à déterminer dans quelle mesure les choix d'ostensifs envisagés peuvent outiller l'activité mathématique : au niveau symbolique et discursif. Nous avons ainsi choisi de ne pas distinguer substitution, substituées et substituantes en parlant de substitution afin d'éviter d'introduire trop d'ostensifs nouveaux. Nous avons également choisi un ostensif orienté (une flèche) pour éviter

de prendre en charge (au moins dans un premier temps) l'introduction d'un nouveau statut de l'égalité. Dans quelle mesure ces choix outillent-ils ou au contraire peuvent-ils gêner le travail mathématique ?

L'autre enjeu est de déterminer des conditions sous lesquelles il est possible d'élaborer un discours dans la classe permettant de contrôler les choix de substituantes. Nous avons prévu d'interroger les élèves pour décrire leurs techniques émergentes de manière à mettre à jour des spécificités des expressions associées à ces choix et mettre en correspondance l'expression donnée, l'identité et les sous-expressions susceptibles d'être substituées.

Nos analyses concernent les ingrédients technologiques qui émergent dans la classe. Pour cela nous mobilisons les notions d'ostensifs et de non-ostensifs. Nous cherchons à identifier et à caractériser les discours technologiques en construction : quels sont les savoirs convoqués implicitement ou explicitement par les élèves ? Quelles difficultés les élèves peuvent-ils rencontrer à l'occasion de la mise en œuvre de substitutions ?

Les élèves ont travaillé sur le deuxième exercice en fin de deuxième séance et en début de troisième séance (avec la consigne supplémentaire de réduire les expressions développées). Nous avons relevé l'ensemble des copies entre les deux séances mais nous n'avons pu récupérer que certains cahiers d'élèves à l'issue de la deuxième séance. Certaines non-réponses ou réponses incomplètes peuvent donc s'expliquer par le manque de temps imparti au moment où nous avons collecté les écrits. Huit élèves n'ont pas abordé cet exercice à l'issue de la deuxième séance. Nous allons donc nous centrer sur l'analyse des choix et les productions d'écritures associées aux substitutions des 19 autres élèves et sur les éléments technologiques émergents au moment de la correction en classe lors de la troisième séance. Nous nous appuyons pour cela sur les retranscriptions des enregistrements audio des deux séances.

4.2. Des difficultés dans les choix de substituantes

Un premier résultat qui émerge des analyses des écrits des élèves est d'une part que les choix pour les substituantes sont réussis pour les deux premières expressions (19/19 et 18/19), tandis que des erreurs apparaissent pour les catégories Somme ou Différence (6 erreurs parmi les 18 réponses pour « $(4n + 3)(7n + 1)$ » et 3 erreurs parmi les 14 réponses pour « $(3n - 2)(4n + 5)$ », ce qui correspond aux analyses *a priori*. Nous ne considérons pas le taux de non-réponses comme significatif au regard de la collecte partielle de données. Un autre résultat est celui de la réussite de la très grande majorité des substitutions. Lorsque les élèves commettent des erreurs, elles sont systématiquement liées au parenthésage absent. Par exemple

pour « $-5(3n + 2)$ » les élèves qui donnent des réponses incorrectes écrivent « $-5 \times 3n + -5 \times 2$ ».

Toutefois, les élèves peuvent ne pas parenthéser tout en pensant les écritures comme telles ainsi que le montre la production suivante (figure 2).

Handwritten student work for Figure 2:

$$(4n + 3)(7n + 1) \quad k \rightsquigarrow (4n + 3), a \rightsquigarrow 7n \quad b \rightsquigarrow 1$$

$$4n + 3 \times 7n + 4n + 3 \times 1$$

$$= 28n^2 + 21n + 4n + 3$$

Figure 2. Ecritures non parenthésées et développement juste

Nos observations rejoignent celles de Bardini (2003) dans le cadre des fonctions en 2nde qui interprète de telles erreurs à l'occasion de substitutions comme une absence de distinction entre des écritures comportant ou non des parenthèses.

Pour les copies dont nous disposons, les élèves qui ne choisissent pas les bonnes substituantes réussissent néanmoins la substitution lorsqu'ils l'exécutent (figure 3).

Handwritten student work for Figure 3:

$$(4n + 3)(7n + 1)$$

$$k \rightsquigarrow m, A \rightsquigarrow (4m + 3) \text{ et } B \rightsquigarrow (7m + 1)$$

$$m \times ((4m + 3) + 7m + 1) = m \times (4m + 3) + m \times (7m + 1)$$

Figure 3. Une erreur dans le choix des substituantes

La substitution pouvant s'opérer de manière « aveugle », l'égalité obtenue dans cette copie (figure 3) est juste même si elle ne correspond pas à un développement de l'expression donnée. Certains élèves n'envisagent que des substituantes Constante ou Pseudo-monôme, sans aboutir. Un élève choisit des substituantes dans l'ordre de l'écriture avec $k \rightsquigarrow 4n$, $a \rightsquigarrow 3$ et $b \rightsquigarrow 7n + 1$ sans tenir compte des fonctions syntaxiques des sous-expressions. D'autres estiment qu'il n'y a pas de k et qu'il est impossible de mettre en œuvre la technique. Bien que partielles, les données tendent à confirmer l'hypothèse que les adaptations de techniques dans le cas d'altération de catégories peuvent ne pas être évidentes pour les élèves. L'identification de facteurs ou de sous-expressions comme substituantes possibles se révèle être une difficulté non négligeable ainsi que nous le supposons en première partie de ce texte.

Ceci nous amène à examiner plus avant les composantes technologiques associées qui émergent dans la classe à l'occasion des corrections : sur quels éléments les

élèves fondent-ils leurs identifications et leurs choix dans la description et la justification des techniques ? Quels sont les moyens de contrôle des écritures qu'ils mobilisent ?

4.3. Décrire une substitution et justifier les choix de substituantes

Nous allons nous intéresser à trois extraits afin de comparer des composantes technologiques en construction autour de la description et de la justification des choix des substituantes.

La première description apparaît à l'occasion de la correction du développement de « $-5(3n + 2)$ ». Les élèves ont été renommés.

P : Comment vous faites pour trouver les substituantes comme ça ? Heu Lou ?

Lou : Beh on regarde par rapport au calcul qui est donné parce que k c'est le premier on prend le premier nombre a c'est le deuxième beh on prend le deuxième nombre et b on prend le troisième nombre

L'identification des positions suffit dans ce cas à condition de pouvoir identifier Constante et Monôme comme substituantes possibles ce qui ne paraît pas poser de problème. On peut s'interroger toutefois sur les choix des ostensifs pour désigner les expressions et sous-expressions. Lou parle de calcul pour désigner l'expression donnée, mais surtout de nombre indifféremment pour une Constante ou un Monôme. En parlant de nombre, Lou s'appuie-t-elle sur l'idée que des écritures symboliques comme « $3n$ » peuvent désigner des nombres ou bien parle-t-elle seulement des écritures des sous-expressions pour lesquelles elle ne disposerait pas d'autres mots pour les désigner ? Cet ostensif ne risque-t-il pas de conforter l'idée pour certains élèves que les seules substituantes possibles sont des nombres ? Examinons de ce point de vue le choix de Youna pour développer « $(4n + 3)(7n + 1)$ ». Plusieurs élèves ont choisi de substituer k par n , ce qui émerge au moment de la correction :

Youna : Non c'est $k n$ vu que c'est le facteur commun n / on voit que n il est dans chaque // il est dans / avec chaque nombre donc k c'est / n c'est le facteur commun donc on remplace par k

En justifiant son choix, Youna étend le discours usuel dans les classes de reconnaissance de k dans le cas des factorisations, ce qui est inopérant pour le développement. Le fait que n soit bien un facteur commun de sous-expressions rend sans doute d'autant plus difficile d'invalider ce choix au regard de la structure. Elle a ensuite choisi $a \simeq 4 + 3$ et $b \simeq 7 + 1$, sans doute en étendant une suppression de l'écriture du facteur commun, même si elle n'explicite pas davantage. L'épisode se poursuit en mobilisant la substitution comme moyen de vérification.

P : 7 plus 1 / beh il faut vérifier alors on y va / avec cette substitution on écrit l'égalité ici / ça fait ? Ava ?

Ava : Heu n fois 4 plus 3 plus 7 plus 1

P : Ah oui tu as raison

Ava : Est égal à n fois 4 plus 3 plus n fois 7 plus 1

P : Qu'est-ce que vous pensez de la substitution proposée par Ava ?

Maël : Ah ben elle est pas bonne

P : Pourquoi ? pourquoi effectivement ben elle heu ben elle correspond pas / c'est la substitution proposée par Youna désolée / pourquoi ça / ça marche pas / à quoi vous reconnaissez que ça marche pas cette substitution ?

Madison : C'est plus long que

P : Y'a pas que le fait que ce soit plus long / Ava ?

Ava : [inaudible] Dans la feuille

P : Ben on retrouve pas l'expression donnée dans la feuille non

Cet épisode montre que la substitution joue un rôle important pour invalider le choix de Youna pour développer. On observe par ailleurs des comparaisons qui s'appuient sur des éléments de surface des expressions, la longueur de l'écriture, ce qui suffit en réalité à conclure. Lorsque les élèves sont invités à produire un discours permettant d'identifier les substituantes, les extensions des descriptions liées à la factorisation en appui sur les occurrences sont résistantes.

P : [...] Pour cette écriture Boris était très embêté et il m'a dit mais y'a pas de / y'a pas de k dans cette écriture / et heu y'a pas que lui qui m'a dit ça / heu y'a Mickaela aussi qui au début me disait mais y'a pas de facteur / alors je vous pose la question comment on reconnaît le k / ce facteur-là comment on fait pour savoir ? Jules ?

Jul : Ben il y est plusieurs fois

Bor : [...] On l'identifie beh quand il y est deux fois

P : Ah une fois qu'on a écrit l'égalité oui / mais à partir de l'écriture de la feuille c'est ça la question / dans la feuille y'avait juste écrit ça $4n$ plus 3 facteur de $7n$ plus 1 (*P écrit en même temps au tableau*) et tu m'as dit toi-même mais là on peut pas le faire / on peut pas / y'a pas de k // Ava ?

Ava : Beh parce que le facteur il est toujours au début

P : Heu Mikaela ?

Mik : Ben parce que y'a un fois quand même

P : Alors oui là il n'y est pas mais effectivement y'a une multiplication oui y'a un facteur ça se repère par rapport à la multiplication / Coline c'est ce que tu voulais dire ?

Col : Heu je voulais dire qu'il est aussi toujours au début

Les formulations autour de reconnaissances de structures nécessaires en amont des transformations s'avèrent d'autant plus complexes que les marqueurs des

opérations n'apparaissent pas toujours dans l'écriture donnée (comme le signe de la multiplication). Notons de plus que pour les substitutions, la place (amont ou aval) des sous-expressions est importante, de sorte que les remarques d'Ava et de Coline sont aussi une condition nécessaire pour mettre en œuvre la substitution (sinon, il faut transformer l'expression en utilisant la commutativité par exemple). Le risque étant de rigidifier les techniques et de se contenter de cet indice pour identifier un facteur et reconnaître une occasion d'emploi de la propriété.

Il s'agit donc à la fois d'identifier une sous-expression associée à la fonction syntaxique de la substituée dans l'expression donnée et sa position dans l'écriture. Mais l'ensemble de l'expression est à considérer : ici il s'agit aussi d'identifier l'autre facteur comme une Somme, ce qui reste implicite dans la classe.

Notons toutefois une occasion manquée de mobiliser la réversibilité de la substitution comme moyen de contrôle des choix des substituantes. Une élève utilise en effet les substitutions inverses et retrouve l'identité à utiliser (figure 4) bien que sa production ne soit pas reprise pour la classe.

$$2n(n+3)$$

$$2n \downarrow n \downarrow a \downarrow 3 \downarrow b$$

$$R(a+b) = R \times a + R \times b$$

Figure 4. Réversibilité de la substitution et reconnaissance d'une identité

Ceci nous amène à conclure que la réversibilité peut effectivement exister dans les praxéologies comme nous l'avons envisagé théoriquement.

Un autre résultat concerne l'ostensif \sim choisi et les ostensifs langagiers oraux associés à la substitution. Le professeur utilise « est substitué par » tandis que les élèves ne reprennent jamais cette expression, ce qui n'est pas étonnant au vu de sa complexité. Au cours de l'ensemble des séances, une seule élève interrogée parle de substitution, les autres élèves utilisent une pause ou « c'est », ou encore « égale » lorsqu'ils sont interrogés dans les moments de mise en commun. Sans que nous puissions généraliser cette observation aux usages des élèves car les élèves font souvent des réponses courtes et les deux enregistrements effectués auprès de groupes d'élèves sont inaudibles, il est à noter que les signes utilisés jusqu'alors par les élèves (« + », « - », « = »...) ne sont pas oralisés par des formes passives (si on excepte « multiplié par », très souvent remplacé par « fois »), mais en général par un seul mot. De plus l'orientation de la flèche ne correspond pas bien à l'ostensif langagier oral, ce qui peut expliquer en partie le fait que cette forme langagière ne soit pas reprise par les élèves. Bien que le

phénomène réinterroge l'usage orienté du signe « = », le fait que les élèves utilisent à l'oral « égale » pour lire la flèche nous amène à penser que l'introduction de ce nouvel ostensif n'est peut-être pas utile.

4.4. Questionnement technologique et justification d'égalités

Dans la classe où a lieu l'expérimentation, un élève reprend les remarques d'Ava et de Coline quant à l'identification de k pour les contester. La question posée à la classe est alors celle de la possibilité de choisir un autre facteur. Jules propose $7n + 1$, ce qui occasionne un nouveau questionnement :

Jul : $7n$ plus 1

P : $7n$ plus 1 bien sûr

Hug : Mais pourquoi on a choisi alors

Ava : Mais ça aurait pas donné le même résultat alors

La remarque d'Ava peut être interprétée de deux manières différentes selon qu'elle réfère au sens ou à la dénotation de l'expression. Lorsqu'elle évoque un résultat, parle-t-elle de l'expression obtenue à droite de l'égalité, les développements étant différents, ou parle-t-elle du résultat du développement et de la réduction en supposant que des transformations différentes ne peuvent conduire à des expressions égales ?

Le manque de termes pour distinguer sens et dénotation, mais aussi pour identifier ce dont on parle quand on évoque l'égalité ou la même chose, amène dans la classe un certain nombre de confusions. Lors de la séance suivante, les élèves sont invités à comparer ce qu'on obtient avec les deux substitutions : « $(4n + 3)(7n + 1) = (4n + 3) \times 7n + (4n + 3) \times 1$ » et « $(7n + 1)(4n + 3) = (7n + 1) \times 4n + (7n + 1) \times 3$ ». Les expressions ont toutes le même dénoté, mais pas le même sens. L'enjeu consiste à identifier deux choix possibles pour effectuer le développement. Un élève remarque que « c'est l'inverse » ce qui amène l'enseignante à demander « est-ce que c'est pareil », mais cette question est ambiguë. Un autre élève évoque la substitution, ce qui amène à supposer qu'il a interprété la question au regard de la technique qui est la même, bien que les substituantes soient différentes. Une élève évoque la commutativité de la multiplication : « Parce que quand on multiplie on peut faire dans les deux sens » explique-t-elle interprétant ainsi la question au regard de l'égalité des Produits dans les membres de gauche. La transitivité de l'égalité permettrait de conclure mais elle n'est pas évoquée et les élèves ne sont pas convaincus. Un élève propose de « choisir un nombre », un autre d'aller sur tableur, et un dernier de réduire. Plusieurs échanges dans la classe montrent que les élèves ne sont pas sûrs de devoir trouver la même expression réduite à l'issue de leurs calculs, le questionnement technologique paraît donc essentiel autour de la transitivité de l'égalité ou la conservation du dénoté par substitution. Il pose

cependant la question de la manière dont on pourrait distinguer sens et dénotation dans les discours.

L'étude se termine dans la classe par la réduction pour conclure à l'égalité des résultats. Toutefois, aucune propriété de la substitution n'est énoncée pour fonder des manipulations d'écritures futures. La construction de discours nouveaux pour l'enseignement pose la question de la manipulation d'ostensifs langagiers couplés à des ostensifs scripturaux qui occasionnent des tensions entre les savoirs dans la dimension notionnelle et les savoirs dans la dimension sémiolinguistique. Cette expérimentation montre néanmoins que, prenant les techniques associées à la substitution comme objet d'étude, les tâches proposées permettent de faire émerger un questionnement autour de choix ou d'identification de sous-expressions dont nous faisons l'hypothèse qu'il participe à renforcer les relations entre praxis et logos pour les élèves, le formalisme jouant alors un rôle technologique véritable au contraire de ce que l'on observe dans les manuels. Le fait que ces questionnements émergent dans la classe et que certains élèves considèrent certaines substitutions impossibles tend également à valider nos hypothèses quant aux difficultés d'élèves dans le travail de la technique.

Le questionnement technologique apparaît toutefois seulement ébauché dans la classe, dans le sens où l'analyse de l'économie, l'efficacité de la fiabilité ou du domaine d'application des techniques (Bosch et al., 2004) n'est qu'amorcé, laissant en suspens la question des aspects sémantiques. L'élucidation des savoirs de nature sémiolinguistique demande de construire des discours qui permettent de soutenir le travail qui s'accomplit en désignant les objets utiles à ce travail et les propriétés véhiculées.

Conclusion et perspectives

Les analyses de manuels et les difficultés observées en classe tendent à montrer d'une part l'existence de substitutions implicites qui véhiculent des adaptations de techniques non négligeables et peu prises en charge, et d'autre part que la transparence des savoirs qui s'y rapportent peut être une source de difficulté pour les élèves. En l'absence de la notion de substitution, les enseignants peuvent être conduits à réduire la diversité des formes d'expression pour leurs élèves afin de favoriser une proximité ostensive avec les formalismes, ou à proposer des généralisations formelles des identités qu'ils ne peuvent véritablement exploiter. Ces phénomènes nous paraissent de nature à limiter la valence instrumentale des écritures symboliques, notamment le rôle technologique des identités. Nous faisons l'hypothèse que la substitution est un savoir transparent pour les enseignants au vu des analyses d'épisodes de classe et d'entretiens, tandis que les savoirs sémiolinguistiques engagés permettant d'accompagner le travail de manipulation

d'écritures reposent sur des propriétés à la fois invisibles pour les élèves et complexes à appréhender du point de vue syntaxique et sémantique.

L'expérimentation dans une classe montre que des tâches qui convoquent la substitution peuvent donner lieu à des questionnements nouveaux sur les techniques (nouveaux car ils n'apparaissent pas par exemple dans les manuels). La substitution peut également jouer un rôle technologique pour valider ou invalider des techniques de développement. De l'analyse des difficultés d'élèves à construire un discours pour décrire ce qu'ils font, émergent un certain nombre d'hypothèses pour envisager que les substitutions complètent les praxéologies envisagées. La première concerne la nécessité de mettre en mots des savoirs de nature sémiolinguistique. Or, ceux-ci ne font que peu partie des discours institués dans les mathématiques actuelles tandis que pour l'enseignement ces discours deviennent nécessaires en début d'apprentissage notamment. Il s'agit d'envisager des ostensifs permettant de désigner et manipuler les substitutions ainsi que les objets sur lesquels elles opèrent, et notamment les sous-expressions, indépendamment de leur nature ou leur fonction syntaxique. Ceci rejoint les travaux de Kirshner (1993) qui parle de Verbal Support System. Face aux aspects visuels de surface des expressions sur lesquelles s'appuient les élèves, Kirshner met en avant la nécessité pour les élèves de disposer d'un lexique spécifique (incluant par exemple « sous-expression » ou « opération dominante » ou « principales sous-expression ») afin de décrire les structures en amont du travail sur les règles de transformations. La construction de discours nouveaux pour et avec les élèves pose également la question des pratiques langagières des enseignants. L'usage de désignations comme « nombre » demande de distinguer les savoirs dans la dimension sémiolinguistique, de ceux dans la dimension notionnelle et de disposer de leviers pour faire évoluer les discours en construction. Pour que la substitution enrichisse les praxéologies de manière pérenne, il apparaît nécessaire d'institutionnaliser *a minima* un certain nombre de connaissances associées. Les analyses engagées de ce point de vue montrent combien elles peuvent être délicates, ce qui amène à envisager une étude plus approfondie de la construction et de l'évolution de discours à l'occasion de l'introduction de nouvelles notions et de nouveaux ostensifs associés (Chesnais et Constantin, 2020).

Les potentialités ouvertes par un enseignement prenant en charge certains savoirs de nature sémiolinguistique sont explorées depuis de nombreuses années dans des environnements numériques (notamment Thompson et Thompson, 1987 ; Thompson, 1989 ; Kirshner, 1989 ; Nicaud, 1989). Thompson et Thompson (1987) montrent sur un petit effectif que les élèves tendent à s'appuyer davantage sur l'identification des structures des expressions pour piloter les transformations d'expressions et les choix des propriétés utiles. Thompson (1989) décrit également

comment des substitutions permettent à certains élèves de considérer des sous-expressions comme un tout, et par suite d'identifier des structures identiques pour des expressions de complexités différentes faisant le lien avec des propriétés mathématiques sous-jacentes aux manipulations des écritures. Les représentations en arbre utilisées resteraient toutefois à questionner car elles sont produites par le logiciel, de même que dans les travaux de Kirshner (1993) et Awtry (1993), ce qui confère un coût non négligeable aux techniques. Les expérimentations réalisées avec le logiciel Aplusix ont également montré des apprentissages médiés par les messages d'erreurs qui concernent notamment des appariements (Nguyen-Xuan et al., 2002), c'est-à-dire des choix de substituantes en fonction de règles qui peuvent être choisies par les élèves dans des listes, les calculs étant effectués par le logiciel. Notre expérimentation apporte une piste supplémentaire : les substitutions étant à la charge des élèves, on pourrait penser qu'elles donnent lieu à des erreurs ne permettant pas à la substitution d'assumer un rôle technologique. Dans les séances observées, et pour les expressions données, il n'en est rien. Le fait qu'elles puissent se réaliser de manière aveugle a permis d'exercer des contrôles et d'invalider des choix. Dans les pratiques humaines toutefois, ce n'est certainement pas toujours le cas. La gestion des parenthèses pour conserver les fonctions syntaxiques peut s'avérer difficile, et constitue la source majeure des erreurs commises. Le fait que le logiciel Aplusix n'ait été finalement que peu utilisé dans les classes malgré ses potentialités amène à questionner des conditions sur les pratiques enseignantes à l'occasion de l'introduction d'objets nouveaux de savoir.

Les potentialités de la substitution restent à explorer avec des tâches qui permettent aux élèves d'approfondir le questionnement technologique (au sens de Sierra et al., 2013) amorcé et au-delà comment la résolution de problèmes y compris avec des changements de cadre peut y contribuer. Par exemple, dans la séance suivant le travail sur les substitutions dans la classe observée, certains élèves identifient dans l'expression « $x^2 + 5x + 6$ » la sous-expression « $5x + 6$ » comme étant la variation d'une aire à partir de celle d'un carré de côté x . Un élève le fait spontanément en encadrant « $5x + 6$ » dans « $x^2 + 5x + 6$ », tandis que de tels encadrements n'apparaissent jamais au tableau. Nous faisons l'hypothèse que le travail effectué sur les substitutions a contribué à ce que certains puissent analyser l'expression comme une somme de l'aire du carré et d'autre chose, tandis que d'autres effectuent une soustraction pour identifier la variation. Il n'en demeure pas moins que ceci n'est pas nécessairement évident (voir Jullien, 1990) et nous conduit à supposer que des substitutions peuvent jouer un rôle dans la reconnaissance de formes y compris à l'occasion d'interprétations.

L'étude engagée ici amène plus généralement à questionner la manière dont, à partir de l'élucidation de savoirs transparents, on peut penser l'enrichissement de

l'activité de l'élève au moyen de l'importation d'objets nouveaux de savoir, et plus encore, lorsque les savoirs dans les mathématiques constituées semblent trop éloignés des savoirs envisagés à enseigner : comment penser une transposition viable de ces objets, comment construire des savoirs de référence opérationnels incluant notamment des savoirs de nature sémiolinguistique ?

Ces questions rejoignent celles que posent l'identification de savoirs qui n'ont pas d'existence institutionnelle véritable ainsi que le note Chesnais (2018) à l'instar de l'énumération (Brousseau, 1984, puis Briand, 1993) pour le dénombrement à l'école, ou de la distinction entre ce que Chesnais et Munier (2016) nomment mesure empirique et mesure théorique. N'étant pas à proprement parler mathématiques, quel statut peuvent prendre de tels savoirs dans l'institution une fois ceux-ci identifiés dans la recherche en didactique ?

En particulier, instituer ces objets comme objet d'enseignement à part entière pourrait conduire à des dérives (Chesnais & Constantin, 2020) en les isolant des pratiques qu'ils éclairent ou des concepts qu'ils peuvent permettre d'enrichir. Ainsi, Chesnais (2018) observe-elle une enseignante finissant par utiliser la distinction entre les mesures empiriques et théoriques comme catégorisation sans pour autant enrichir les discours autour du concept de mesure. Dans le cas du calcul algébrique, le risque pourrait être de faire des élèves des calculateurs aveugles (Sackur et al., 1997), voire de supplanter des enjeux liés au développement d'une certaine intelligence de calcul (Artigue, 2004) ou d'autres éléments permettant de guider les transformations des expressions notamment liés à des enjeux spécifiques de la résolution d'un problème (avec des changements de cadre par exemple). Ceci nous amène à envisager la substitution plutôt comme un objet paramathématique (Chevallard, 1991) c'est-à-dire un objet que l'on peut nommer sans tout à fait le définir, pour lequel on dispose de certains éléments de savoir, mais un objet essentiellement outil de l'activité mathématique. La manière dont il peut être pris en charge dans l'enseignement reste à explorer dans les classes avec les enseignants.

Bibliographie

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzys et M.-H. Salin (Dir.), *Actes de la IX^e École d'été de didactique des mathématiques* (p. 101-139). ARDM & IUFM de l'académie de Caen.

ARTIGUE, M. (2004). L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, 54, 23-39.

ASSUDE, T., COPPE, S. et PRESSIAT, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (p. 35-56). La Pensée Sauvage.

ASSUDE, T., MERCIER, A. et SENSEVY, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 27(2), 221-252. <https://revue-rdm.com/2007/l-action-didactique-du-professeur/>

AWTRY, T.H. (1993). *Visual Transformations in Symbolic Elementary Algebra*. [Thèse de Doctorat, Louisiana State University].

BARDINI, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. [Thèse de Doctorat, Université Paris 7]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697/document>

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>

BOSCH, M., FONSECA, C. et GASCON, J. (2004). Incompletitud des las Organizaciones Matematicas locales en las instituciones escolares [Incomplétude des organisations mathématiques locales dans les institutions scolaires]. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 24(2-3), 205-250. <https://revue-rdm.com/2004/incompletitud-de-las/>

BRIAND, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*. [Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00494623/file/TheseJBriand.pdf>

BROUSSEAU, G. (1984). *L'enseignement de l'énumération : Etude de deux problèmes pratiques et fondamentaux dans le cadre de la théorie des situations et du contrat didactique*. [Communication orale]. Fifth International Congress on Mathematical Education. Adelaïde, Australie. <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/84-6-Enum%C3%A9ration.pdf>

CHESNAIS, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. [Note de synthèse, Université de Montpellier]. <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02046178/document>

CHESNAIS, A., & CONSTANTIN, C. (2020). Developing new discourses to deepen students' conceptual understanding in mathematics [Développer de nouveaux discours pour approfondir la compréhension conceptuelle des élèves en mathématiques]. Dans J. Ingram, K. Erath, F. Rønning, A. Schüler-Meyer et A. CHESNAIS, A. (Éds.), *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom* (p. 73-80). ERME/HAL Archive/Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology.

CHESNAIS, A., & MUNIER, V. (2016). Mesure, mesurage et incertitudes : une problématique inter-didactique mathématiques / physique. Dans A.-C. Mathé et E. Mounier (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 212-237). IREM de Paris.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné* (2^{ème} édition). La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 7–16.

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa et F. Javier García (Dir.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica* (p. 705-746). Universidad de Jaén.

CONSTANTIN, C. (2014). *Quelles alternatives pour l'enseignement du calcul algébrique au collège ?* [Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université].

CONSTANTIN, C. (2018). Une étude des articulations entre techniques de calcul et systèmes de nombres dans les manuels de collège. *Petit x*, 107, 5-27.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>

DROUHARD, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*. [Thèse de doctorat, Université Paris 7].

DROUHARD, J.-P. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. Dans M. Abboud-Blanchard et M. Flückiger (Dir.), *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques - Année 2011* (p. 129-133). IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot.

- DROUHARD, J.-P. et PANIZZA, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémiolinguistique en algèbre élémentaire. Dans L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier & A. Robert (Dir.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et Perspectives, Recherches en Didactique des Mathématiques, Hors série* (p. 203-229). La Pensée Sauvage.
- DUVAL, R. (1988). Ecart sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 17-25.
- EHRHARDT, C. (2010). La naissance posthume d'Évariste Galois (1811–1832). *Revue de synthèse*, 131, 543-568. <https://doi.org/10.1007/s11873-010-0135-y>
- FREGE, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. (Traduit par C. Imbert). Editions Points. (Œuvre originale publiée en 1892).
- JULLIEN, M. (1990). Le calcul algébrique au collège. Etude d'un exemple. *Petit x*, 24, 73-77.
- KIRSHNER, D. (1989). The visual syntax of algebra [Syntaxe visuelle de l'algèbre]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 274-287.
- KIRSHNER, D. (1993). *The Structural Algebra Option : A Discussion Paper* [L'option de l'algèbre structurelle : un document de travail][communication orale]. Annual Meeting of the American Educational Research Association. Atlanta, GA, Etats-Unis.
- MARGOLINAS, C. et LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. Dans J.-Y. Rocheix et J. Crinon (Dir.). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement* (p. 19-32). Presses Universitaires de Rennes.
- NGUYEN-XUAN, A., NICAUD, J.-F., BASTIDE, A. et SANDER, E. (2002). Les expérimentations du projet APLUSIX. Dans J.-F. Nicaud, E. Delozanne et B. Grugeon (Dir.), *Logiciels pour l'apprentissage de l'algèbre. Sciences et techniques éducatives*, 9(1-2), 63-90. <https://doi.org/10.3406/stice.2002.1500>
- NICAUD, J.-F. (1989). APLUSIX : un système expert pédagogique et un environnement d'apprentissage dans le domaine du raisonnement algébrique. *Technique et Science Informatiques*, 8(2), 145-155.
- SACKUR, C., DROUHARD, J.-P., MAUREL, M. et PECAL, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? *Repères-IREM*, 28, 37-68.

SERFATI, M. (2005). *La révolution symbolique, la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Editions PETRA.

SIERRA, T., BOSCH, M. et GASCON, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática : el caso del algoritmo de la multiplicación [Le questionnement technologique-théorique dans l'activité mathématique : le cas de l'algorithme de la multiplication]. *Bolema*, 27(47), 805-828. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400006>

THOMPSON, P. (1989). Artificial intelligence, advanced technology, and learning and teaching algebra [Intelligence artificielle, technologie avancée, et apprentissage et enseignement de l'algèbre]. Dans C. Kieran et S. Wagner (Dir.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (p. 135–161). Erlbaum.

THOMPSON, P. et THOMPSON, A. (1987). Computer presentations of structure in algebra [Représentations informatiques de la structure en algèbre]. Dans J. Bergeron, N. Herscovics et C. Kieran (Dir.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 248-254.

Manuels

MALAVAL, J., CARLOD, V., CHRETIEN, B., DESROUSSEAUX, P.-A., JAQUEMOUD, D., JORIOZ, A., KELLER, A., LECOLE, J.-M., MAHE, A., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F. et VERDIER, F. (2016). *Transmath 4^e*. Editions Nathan.

SESAMATH (2016). *Le manuel de cycle 4*. Editions Magnard.

CELINE CONSTANTIN

LIRDEF, Univ Montpellier, Univ Paul Valéry Montpellier 3, Montpellier, France

`celine.constantin@umontpellier.fr`

**JOSEP MARÍA FORTUNY, TOMÁS RECIO, PHILIPPE R. RICHARD, EUGENIO
ROANES-LOZANO**

ANÁLISIS DEL DISCURSO DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN EN UN CONTEXTO DE INNOVACIÓN PEDAGÓGICA EN GEOMETRÍA

Abstract. Reflective discourse analysis of pre-service teachers in a context of pedagogical innovation in geometry. The reflective narratives of three pre-service teachers are analysed from the perspective of discourse analysis and reflection on practice, applied to the acquisition of geometric competences and the role of dynamic geometry. In the context of the master's degree for future secondary school teachers in mathematics and a pedagogical innovation project, where two of the authors gave training sessions entitled 'automated visualization' and 'technological mediation', the pre-service teachers were given a questionnaire in which they were asked to return to what they had learned, questioning the contribution of their training to their future teaching practice. In the narratives collected, three degrees of reflection can be found, ranging from the naivety of certain assessments to professional initiatives and purely mathematical perspectives. The didactical and mathematical consequences of this analysis are presented and discussed, highlighting, in particular, the intrinsic difficulty of ensuring that relevant, but potentially disruptive, ideas of pedagogical innovation are conveyed to pre-service teachers against the weight of tradition and personal beliefs in mathematics teaching.

Keywords. Dynamic geometry, teacher education, reflective discourse analysis.

Résumé. Analyse du discours réfléchi des enseignants du secondaire dans leur formation initiale dans un contexte d'innovation pédagogique en géométrie. Les récits réflexifs de trois enseignants stagiaires sont analysés sous l'angle de l'analyse du discours et de la réflexion sur la pratique, appliquée à l'acquisition de compétences géométriques et au rôle de la géométrie dynamique. Dans le cadre de la maîtrise pour la formation des futurs enseignants du secondaire en mathématiques et d'un projet d'innovation pédagogique, intitulée «visualisation automatisée» et «médiation technologique», les enseignants stagiaires ont reçu un questionnaire où ils devaient revenir sur ce qu'ils ont appris, s'interrogeant sur l'apport de leur formation en vue de leur pratique pédagogique à venir. Dans les récits recueillis, on trouve trois degrés de réflexion qui vont de la naïveté de certaines appréciations aux intentions d'initiatives professionnelles, en passant par des perspectives guidées principalement par les mathématiques. Les conséquences didactiques et mathématiques de cette analyse sont présentées et discutées, soulignant notamment la difficulté intrinsèque de faire en sorte que des idées d'innovation pédagogique pertinentes, mais potentiellement perturbatrices soient dévolues aux enseignants stagiaires, face au

poids de la tradition et des croyances personnelles en matière d'enseignement des mathématiques.

Mots clés. Géométrie dynamique, formation des enseignants, analyse du discours réfléchi.

Resumen. Se analizan las narrativas reflexivas de tres profesores en formación, desde las perspectivas del análisis del discurso, aplicadas a la adquisición de las competencias geométricas y al papel de la geometría dinámica. En el contexto del máster universitario para futuros profesores de matemáticas de Secundaria y de un proyecto de innovación pedagógica, en el que dos de los autores impartieron sesiones de formación tituladas “visualización automática” y “mediación tecnológica”, se entregó a los profesores en formación un cuestionario en el que se les pedía que reflexionaran sobre lo que habían aprendido, cuestionando la contribución de su formación a su futura práctica docente. En las narrativas recogidas encontramos tres grados de reflexión que van desde la ingenuidad en ciertas apreciaciones hasta las iniciativas profesionales y las perspectivas puramente matemáticas. Se presentan y discuten las implicaciones didácticas y matemáticas de este análisis, destacando en particular la dificultad intrínseca de garantizar que las ideas relevantes, pero potencialmente perturbadoras, de la innovación pedagógica, lleguen a los profesores en formación, frente al peso de la tradición y las creencias personales en educación matemática.

Palabras clave. Geometría dinámica, formación docente, análisis del discurso reflexivo.

1. Introducción

Este estudio se enmarca y prolonga un proyecto de innovación educativa de una universidad pública española, en la cual uno de los autores es a la vez formador y investigador. De hecho, imparte en dicha universidad el módulo “Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas” del “Máster Universitario en Formación del Profesorado de Secundaria” (especialidad: “Matemáticas”) y utiliza técnicas de evaluación e investigación para encontrar mejoras en el sistema de formación. Se trata de un curso presencial de posgrado, de un año de duración, que se exige en el sistema educativo español para impartir docencia en Secundaria. Los estudiantes son futuros profesores de Secundaria, en formación inicial para la docencia, pero con títulos de grado en materias tales como ingenierías, arquitectura, física, informática y, sobre todo, matemáticas. En ese contexto, otros dos de los autores de este estudio impartieron sendas conferencias de formación en línea, de títulos respectivos:

- “Determinación simbólica de propiedades geométricas con GeoGebra”,
- “Mediación tecnológica. Ejemplos de génesis instrumental en el desarrollo de competencias geométricas”.

Estaban dirigidas al grupo de futuros profesores que cursaban dicho módulo y pudieron contar con el apoyo y los consejos del cuarto autor. Estos profesores tienen amplia experiencia en formación de futuros docentes, por lo que conocían suficientemente las características de los estudiantes a los que se dirigían, y suelen impartir cursos de posgrado en contextos similares.

La primera conferencia introdujo y desarrolló, a través de ejemplos, las características de determinados comandos de GeoGebra recientemente introducidos, que permiten al usuario deducir, comprobar o descubrir propiedades geométricas. Así, en una de las actividades mostradas a los estudiantes se imaginaba que estos tenían que comprobar algunas propiedades, como la que dice que las alturas de un triángulo son concurrentes (Fig. 1). En dicha actividad, el modo de verificación se asumía que podía ser abierto o impuesto, por ejemplo, sabiendo que puede hacerse numéricamente, utilizando el oráculo *Relación*; simbólicamente, utilizando el comando `SonPerpendiculares(h, c)`; instrumentalmente, colocando los puntos en los nodos de la cuadrícula y comparando las pendientes de las líneas h y (AC) ; o analíticamente, realizando cálculos tradicionales o utilizando el módulo de cálculo simbólico incluido en GeoGebra (Kovács et al., 2017; Kovács et al., 2018; Hohenwarter et al., 2019; Flores-Salazar et al., 2022). Finalmente se planteó el potencial papel educativo de estas herramientas, la dicotomía: como ayuda (para conjeturar y orientar al alumno) en el marco de un currículo tradicional, o como alternativa para modificar el currículo y centrarlo en la adquisición de aquellas competencias que las máquinas no pueden alcanzar.

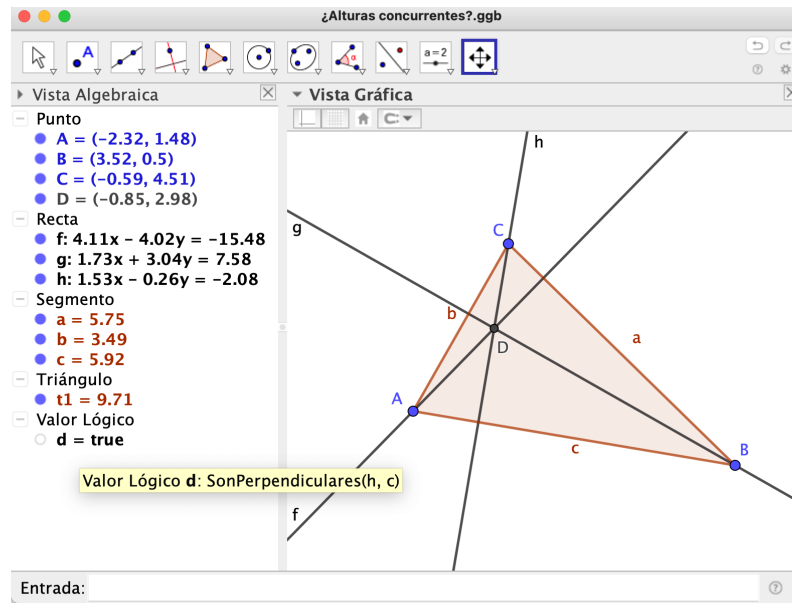


Figura 1. En la actividad denominada *¿Alturas concurrentes?*, ABC es un triángulo cualquiera, f y g son las alturas relativas a los vértices A y B que se cortan en D, y h es la recta que pasa por los puntos C y D. Cuando se tecldea `SonPerpendiculares(h, c)` en la línea de entrada, el sistema devuelve el valor lógico *true*.

En la segunda conferencia se realizó una amplia reflexión sobre el papel de la actividad matemática instrumentada y la mediación tecnológica en la enseñanza de la geometría, ejemplificando las distintas formas de interacción a través del análisis detallado de los procesos clave en la educación geométrica: visual (observar, explorar), figural (modelizar, conjeturar, definir), operacional (instrumentar, instrumentalizar) y deductivo (argumentar, demostrar). Estos ejemplos se desarrollan en diferentes situaciones escolares de Educación Primaria y Secundaria, tanto en entornos manipulativos como de simulación con un software de geometría dinámica como GeoGebra. Véase (Paneque et al., 2017). En definitiva, se focalizó la discusión en *¿cómo trabajar en clase con auténticas situaciones problemáticas, donde se puedan generar entornos de aprendizaje en que los alumnos se habitúen a experimentar y probar a partir de sus propias acciones, tanto empíricas como mentales, compartiendo su práctica y mentalización con la colaboración de sus propios compañeros y del profesorado?* Los estudiantes encontraron especialmente interesantes los problemas mostrados por el profesor que proponían optimizar el posicionamiento de una planta de pellets tratando, bien de igualar su distancia a tres ciudades (determinando con GeoGebra el circuncentro del triángulo de vértices las tres ciudades), bien minimizando la suma de distancias a esas tres ciudades (a

través de la construcción del denominado Punto de Fermat¹). El que los alumnos se sorprendan agradablemente ante la introducción de problemas de estas características ratifica, una vez más, la habitual desconexión entre los problemas propuestos en la clase de matemáticas y los problemas del mundo real, pese a que la matemática es usualmente la clave para la resolución de estos últimos (véase, por ejemplo, Roanes-Lozano y Sánchez (2017)) y siendo conocido el positivo efecto de la introducción de la tecnología en la clase de matemáticas (Martínez Zarzuelo et al., 2020). Se concluyó, en resumen, que es en el estar alerta, prestando atención al uso de diferentes medios y artefactos para mejorar las clases, donde podemos situar el papel de la tecnología en la educación geométrica.

Inspirados por el trabajo de Breen et al. (2014), en el que estos estudian – desde la perspectiva de la “Discipline of Noticing” de Mason (2002) – sus propias impresiones, como profesores universitarios, a lo largo de un curso, los autores de este artículo se plantearon la realización de una experiencia similar, aunque más modesta, con los profesores en formación del máster citado. Además, dicha experiencia se enmarcaba en otro contexto, más específico, de didáctica de la matemática, estudiando el impacto de las sesiones de formación impartidas en las creencias de los futuros profesores sobre el papel de la tecnología en la enseñanza de la geometría.

Existen trabajos de análisis de las narrativas reflexivas desde el mismo marco teórico que hemos elegido, relacionados con profesores en ejercicio, como por ejemplo el ya citado de Breen et al. (2014), sobre profesores universitarios, o (Bjuland et al., 2012), sobre un profesor de Primaria, pero no conocemos ninguno con esta misma orientación y estudiando el mismo tipo de muestra (futuros profesores de Secundaria, todavía en formación inicial).

Se diseñó para ello un experimento que comenzó con las dos sesiones de formación en línea a las que se ha hecho referencia. Tras ellas y con la finalidad de que realizaran una reflexión retrospectiva del efecto de las sesiones de formación, se remitió por correo electrónico un formulario en línea. En este formulario se les indicaba que hicieran una narración sobre dos momentos-breves-pero-vívidos de las sesiones, formularan una pregunta para ellos relativas a las sesiones, y mencionaran lo que no les había quedado claro y que creían que habían aprendido. Estas cuestiones se corresponden con estrategias de formación inicial en el marco de la pedagogía de Mason (2002) y Schön (1983). Como se ha indicado arriba, se

¹Véase, para más información sobre este Punto de Fermat, el artículo https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_de_Fermat o la descripción detallada de este punto en http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/viviani_fermat_4/actividad.html

trata en definitiva de obtener información analizando las narrativas reflexivas presentes en dichas encuestas. El análisis se centra en el interés espontáneo que pudo despertar la transmisión de ciertas novedades tecnológicas radicales, en las convicciones de los futuros profesores sobre la enseñanza de una disciplina tan tradicional como la geometría. Aunque, tal vez, su formación inicial no sea suficiente para apreciar las competencias profesionales del profesor, algo que se mencionará en las conclusiones, abogando por el desarrollo de planes que mejoren el entrenamiento de los alumnos en competencias profesionales.

Del total de profesores en formación del máster se seleccionaron tres, cuyas respuestas fueron posteriormente analizadas en detalle, como se describe en el presente trabajo. La selección se basó en la presunta heterogeneidad de los alumnos elegidos, en la diversidad de sus características formativas y personales, lo que se corroboró al explorar sus respuestas.

Tras introducir someramente, en la sección siguiente, el marco teórico del trabajo, se continuará, en la Sección 3, con la descripción detallada de la experiencia, de los datos recogidos y su análisis. El trabajo concluye con la discusión de los resultados obtenidos y las conclusiones correspondientes.

2. Marco teórico

En lo que sigue resumimos algunos antecedentes, así como el marco teórico y su uso para la interpretación de datos del discurso narrativo de profesores en formación en el contexto de esta experiencia, que se centra en el discurso reflexivo. Como información de los distintos marcos teóricos que contemplan investigaciones y experiencias similares a la nuestra, se remite al lector al reciente trabajo (Haspekian, 2020), se aborda la investigación de la práctica docente en un contexto tecnológico (TPDA = *Teacher Practice in the Digital Age*). Ese mismo contexto se recoge sintéticamente en Derouet et al. (2017), donde se hace referencia, en particular, a la capacidad de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático para coordinarse con la teoría MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) para entender mejor el conocimiento del profesor y su rol en el aula. Finalmente, un desarrollo teórico más específicamente relacionado con la aproximación ETM (Espacios de Trabajo Matemático) al uso de GeoGebra y de las herramientas de razonamiento automático ha sido desarrollado en Kovács et al. (2017) y Kovács et al. (2020), donde se pone de manifiesto el diferente enfoque e, incluso, el cambio inducido en el propio trabajo matemático del estudiante que viene determinado por usar, o no, herramientas tecnológicas para construir un ecosistema en el que desarrollar un pensamiento geométrico asistido por ordenador.

Como se ha indicado anteriormente, en este trabajo se analizan, desde el marco teórico específico del Análisis del Discurso de Sfar (2001) y la Reflexión sobre la Práctica de Mason (2002), Schön (1983) y Smith (2003), las narrativas reflexivas de tres futuros profesores de Educación Secundaria en un curso de formación profesionalizante, relacionadas con la adquisición de las competencias geométricas por el alumnado de Secundaria y con el papel de determinados avances recientes en geometría dinámica en este contexto.

Los discursos analizados manifiestan rasgos, o lo que Perrenoud (2011) llama “habitus”, de distinto nivel, calidad, estructura, función, forma y contenido profesional (relativo a la profesión docente). Los profesores en formación del máster, como participantes en las locuciones, no construyeron simplemente la representación semántica de las presentaciones verbales en su memoria episódica, sino, además, una representación (con aportaciones propias) acerca del acontecimiento de las sesiones de formación.

El estudio de las emisiones verbales como actos de habla es la tarea de la pragmática. La pragmática analiza su función o fuerza locutiva como acto de habla. Precisamente la finalidad de este estudio es evaluar el grado de dicha fuerza, estudiando el contenido de esas emisiones verbales en relación con la enseñanza de la geometría y el uso de la tecnología, así como su predisposición a una posible futura labor docente. Todo ello valorado por el nivel de profundidad y detalle que muestran los profesores en formación.

En el segundo capítulo de la parte II de libro de Mason (2002), se distinguen dos orientaciones o niveles de imparcialidad de las narrativas. Los denomina:

- “account-for”, que podríamos resumir como “explicar, interpretar”, con un contenido o descripción más personal, y
- “account-of”, que podríamos traducir como “tener en cuenta”, que describe o identifica las causas de un modo más aséptico, impersonal, independiente.

Yendo al texto original de Mason:

An account-of describes as objectively as possible by minimising emotive terms, evaluation, judgements, and explanation. (...) By contrast, an account-for introduces explanation, theorising and perhaps judgement and evaluation. (Mason, 2002, p. 40)

y también:

To account-for something is to offer interpretation, explanation, value-judgement, justification or criticism. To give an account-of is to describe or define something in terms that others who were present (or who might have been present) can recognise. (Mason, 2002, p. 41)

Por otra parte, en Cobo y Fortuny (2000) se presenta una noción de coherencia discursiva para referirse a la organización del discurso pedagógico y matemático en la clase de matemáticas, destacándose la explicitación de procesos matemáticos y conexiones entre ellos en la interacción verbal entre el profesor y los profesores en formación (Planas et al., 2016). En el actual estudio, centrado en el análisis de las narrativas reflexivas (Llinares, 2020; Mason, 2002; Smith, 2003) en el discurso matemático de profesores en formación, planteamos una noción de coherencia local que coordina dos dimensiones:

- Dimensión temática:
 - si hablan de demostración, modelización, tecnología, sentimientos, consciencia, matemáticas, el profesor, la enseñanza;
 - si se detectan iniciativas como profesor;
 - si hay intención de probar cosas.
- Dimensión interlocutiva:
 - si el discurso es imparcial (“account-of”), sólo descriptivo, anecdótico,
 - si el discurso es complejo, subjetivo (“account-for”): se fija en ideas clave, las interpreta; razonado (establece relaciones entre aspectos específicos y principios generales); crítico, efectivo (mencionando los efectos que va a tener dicha actividad en su futura práctica docente); prospectivo; si concluye lo que habría que hacer en clase.

Aunque ambas dimensiones se complementan e interaccionan, nuestra contribución se centra antes que nada en la dimensión interlocutiva. Como categorías del análisis del discurso podemos considerar: su estructura, la comprensión, la forma del discurso, los cambios en los episodios del discurso y la coherencia local. En cuanto a la estructura, entendemos que el discurso es una unidad observacional, es decir, la unidad que interpretamos al ver o escuchar una emisión.

Mientras, en lo referente a su comprensión, una de las primeras tareas de un modelo de la comprensión del discurso es organizar y reducir grandes cantidades de información muy compleja, en nuestro caso no hace falta ni reducirla ni simplificarla, puesto que ya nos centramos en la interlocución de las sesiones de formación aquí consideradas. Entendemos también el discurso como una forma de comunicación (Planas et al., 2016) en términos de las relaciones semánticas entre proposiciones individuales de la secuencia discursiva del profesor en la progresión de la enseñanza (Radford, 2013).

Sfard resalta las peculiaridades del discurso matemático:

Mathematical discourse is made special by two main factors: first, by its exceptional reliance on symbolic artifacts as its *communication-mediating* tools, and second, by the particular *meta-rules* that regulate this type of communication. (Sfard, 2001, p. 13)

Como consecuencia de esas peculiaridades del discurso matemático, en el discurso de los profesores en formación del máster se observará si se establecen transformaciones y conexiones entre representaciones (de lo expuesto en las dos sesiones de formación en línea versus lo asimilado y presentado en las narrativas) que sean coherentes con las situaciones de formación aquí consideradas. Uno de los elementos definitorios de la mejora en la observación (“notice”, representando de alguna forma una muestra de madurez o complejidad de la introspección) puede consistir en la producción de un discurso correcto y detallado, que justifique dicha notificación. El focalizarse en los detalles requiere un proceso metacognitivo de introspección, de observarse a uno mismo desde dentro. La redacción de narraciones reflexivas representa una forma constructiva de hablarnos a nosotros mismos que ayuda a desarrollar grados de conceptualización personal de la enseñanza de las matemáticas (Mason, 2002; Fernández et al., 2018).

En este estudio se identificarán tres grados de reflexión narrativa, adaptados libremente para este caso (de profesores de matemáticas en formación), a partir de las ideas de Mason (2002):

- El grado bajo, que se corresponderá con rasgos de disposición docente poco subjetiva, puramente matemática. Podemos considerarlo como una narración con un grado de reflexión bajo, en la que el profesor en formación solo describe o refiere eventos anecdóticos de las sesiones de formación y que podríamos relacionar, dado que minimiza “...emotive terms, evaluation, judgements and explanation...” (Mason, 2002, p. 40), con la dimensión “account-of”.
- El grado intermedio, en que la disposición docente es ingenua y ligeramente consciente. Así pues, consideramos en este caso que su grado de reflexión narrativa se valora en un punto medio, que podríamos identificar con una dimensión nueva, denominada “account”, entre “account-of” y “account-for”, por manifestar conatos de interpretación de ideas cruciales de las sesiones de formación.
- Finalmente, el grado alto (“account-for”), que ya indica una disposición docente reflexiva y personal, con un intento de conceptualización de las ideas clave de las sesiones y una expectativa docente para el futuro profesional.

Ya adelantamos aquí que el estudio que vamos a describir en la sección siguiente muestra cómo, en las narrativas de profesores de Educación Secundaria en formación situados en un contexto de innovación tecnológica en geometría elemental, pueden encontrarse casos de estos tres grados de reflexión. En general se reconoce ingenuidad en ciertas apreciaciones (“account”), perspectivas puramente matemáticas (“account-of”) y cierta iniciativa profesional (“account-for”). Se puede avanzar, además, que las características analizadas en los discursos de los profesores en formación muestran el escaso impacto sobre estos futuros docentes de la transmisión de las novedades tecnológicas en las sesiones de formación. Todo ello se discutirá en la sección de Conclusiones.

3. Metodología

3.1 Participantes e instrumento

En este estudio cualitativo usamos una metodología de investigación etnográfica (Eisenhart, 1988), explorando situaciones particulares de tres de los profesores en formación del máster de Enseñanza Secundaria de una universidad pública española, que se analizan en profundidad, para evidenciar y hacer emerger consideraciones teóricas sobre la coherencia del discurso.

Como se ha indicado anteriormente, se diseñó un experimento con profesores en formación, con los objetivos siguientes:

- caracterizar grados de madurez reflexiva, según Mason (2002), en las observaciones de los profesores en formación del máster, evaluando el grado de fuerza locutiva de las narraciones de los estudiantes en respuesta al cuestionario que les planteaba diversas cuestiones sobre ciertas sesiones formativas on-line que habían recibido, y
- concretar a través de este análisis de sus narraciones, las creencias y predisposición docente de estos estudiantes en un contexto tecnológico como el expuesto durante las sesiones formativas recibidas.

Como parte de la evaluación del experimento de formación, se pidió a estos profesores en formación que contestaran un cuestionario, en el que se les solicitaba que realizaran por escrito una serie de tareas centradas en el logro de cinco propósitos: realizar una retrospectiva, saber priorizar, profundizar en detalles, mostrar interés y generar pensamiento y propuestas (Tabla 1).

Las etapas de desarrollo del experimento fueron las siguientes:

- delimitación de los contenidos de las sesiones de formación en línea,
- determinación de la estructura de las citadas sesiones de formación,

- estructuración de las subsiguientes tareas a realizar por los profesores en formación (narrativas sobre varias actividades),
- realización de las sesiones de formación en línea,
- recogida y organización de las tareas realizadas por los estudiantes (Tabla 1),
- selección de los tres profesores en formación cuyas narrativas se analizarían,
- análisis de los datos recogidos hasta una semana tras las sesiones de formación.

Tabla 1. Tareas sobre narrativas reflexivas: cinco cuestiones propuestas después de las dos locuciones.

Propósitos	Tareas	Descriptorios
Retrospectiva	I. Relata dos momentos breves-pero-vívidos en la sesión.	Reflexión como toma de consciencia.
Prioridad	II. Formula una pregunta para tí, relativa a las sesiones.	Ocurrencia. Evento empírico en un contexto de formación.
Detalles	III. Responde a tu pregunta de manera específica.	Continuidad de la emisión. Coherencia semántica y pragmática
Interés	IV ¿Qué es lo que no te ha quedado claro?	Intervención de medios para solventar dificultades.
Pensamiento	V. ¿Qué crees que has aprendido?	Organiza y reduce grandes cantidades de información. Se establecen transformaciones y conexiones entre representaciones, que son coherentes con las locuciones de las dos presentaciones. Esta transformación da lugar a una nueva forma de percibir, hablar y, conceptualmente, se trata de una nueva forma de consciencia con contenido emocional de llegar a ser profesor. Es una transformación del conocimiento pedagógico u objetivación “en sí mismo”. La formación no es un estado, es un proceso personal en un momento de constitución de la consciencia.

Del total de profesores en formación del máster se seleccionaron tres, que el profesor de los mismos propuso por la diversidad de sus características personales e intelectuales, lo que se corroboró al analizar sus respuestas.

Como se verá más adelante, los discursos de los profesores en formación en respuesta a este cuestionario manifiestan rasgos de distinto nivel y calidad, estructura, función, forma y contenido profesional.

3.2 Datos y análisis

Como ya se ha mencionado, los datos de esta investigación son las respuestas de tres profesores en formación del máster (de entre los doce que respondieron al cuestionario) a las cinco tareas propuestas. Las respuestas se clasificaron de acuerdo con las dos dimensiones que propone el marco metodológico de análisis del discurso de Cobo y Fortuny (2000) (Tabla 2).

Tabla 2. Dimensiones temática e interlocutiva consideradas.

Temática	Interlocutiva
<ul style="list-style-type: none"> • hablan de demostración, • modelización, • tecnología, • sentimientos, • consciencia, • matemáticas, • el profesor, • la enseñanza, • iniciativas como profesor, intención de probar cosas. 	<ul style="list-style-type: none"> • el discurso es sencillo (“<i>account</i>”), • sólo descriptivo (“<i>account-of</i>”), • anecdótico (detalles poco relevantes) (“<i>account-of</i>”), • crucial (se fija en ideas clave, interpreta), razonado (hace relaciones entre aspectos específicos y principios generales), • crítico, • efectivo (efectos que va a tener dicha actividad en su futura práctica docente), • prospectivo (“<i>account-for</i>”), plantea acciones sobre lo que habría que hacer en clase.

Hay que tener en cuenta en las contestaciones originales el carácter y circunstancias de los alumnos del Máster en Formación de Profesorado de Secundaria: no son (todavía) profesionales de la enseñanza (aunque tratan de serlo, están en periodo de formación) y, por ejemplo, muchos de ellos están sujetos,

mientras cursan el máster, a condiciones laborales que provocan, en casi todos los casos, disponer de escaso tiempo para realizar experiencias educativas reales.

Se incluye a continuación el análisis narrativo de los discursos de los tres profesores en formación. La numeración romana utilizada se corresponde a la notación de la actividad de la Tabla 1. Los nombres de los estudiantes son ficticios.

3.2.1 Análisis narrativo de Asun

Las narrativas de Asun, que se analizarán a continuación, están incluidas de modo literal en la Tabla 3. En aras de la brevedad, no repetiremos en cada tabla los enunciados de las actividades propuestas (I-V) recogidas en la Tabla 1.

Tabla 3. Narrativas de Asun correspondientes a las tareas I, II, III, IV y V.

Tareas	Narrativas
I	<p>1. El primer presentador está diciendo que cierta figura no es un cuadrilátero mientras mueve uno de los vértices, cuando claramente sí es un cuadrilátero. Supongo que está usando la palabra cuadrilátero en lugar de cuadrado. Lo que quiere decir es que, dependiendo de cómo definas la construcción en GeoGebra, al mover el vértice, respetarás o no los ángulos. Me parece interesante.</p> <p>2. El ejercicio propuesto de dónde colocar la planta entre tres pueblos, bajo ciertas condiciones, me suscita interés.</p>
II	¿Qué es el punto de Fermat? ¿Cómo se calcula?
III	El punto de Fermat es, por definición, el que minimiza la suma de las distancias a los vértices. Se calcula como la intersección de los segmentos que unen cada vértice con el vértice más lejanos de un triángulo equilátero construido (externamente) sobre el lado opuesto.
IV	Es claro que con GeoGebra los chavales podrán aventurarse a conjeturar, corriendo el riesgo de confundir la claridad con la que “ven” un concepto con una demostración formal. Así, respondiendo a la pregunta, debo decir que no tengo del todo claro hasta dónde las herramientas de geometría dinámica son una ayuda y a partir de dónde empiezan a entorpecer el esfuerzo de visualización geométrica y de formalización que todo aprendiz de matemáticas debe hacer.

V	He aprendido muchas cosas. Para empezar qué es el punto de Fermat, quién es María Antonia Canals (y algunas ideas para mi peque de 5 años) y algunas de las posibilidades de GeoGebra (y páginas web donde averiguar más). Y para seguir, me he dado cuenta de las implicaciones casi filosóficas que para algunas personas (por ejemplo, el profesor que ha impartido la primera charla) tiene la aparición de herramientas tan potentes como GeoGebra, llegando a compararlas con el quinto postulado de Euclides y el cambio de paradigma que se genera cuando lo niegas. El tiempo dirá.
---	--

Analizando las expresiones narrativas con los indicadores discursivos de la Tabla 1, podemos afirmar que la profesora en formación Asun, en lo que concierne a la Dimensión Temática, se muestra interesada por saber cómo resolverá el estudiante la tentación de considerar como una demostración formal la mera constatación visual de una propiedad: (...) *corriendo el riesgo de confundir la claridad con la que “ven” un concepto con una demostración formal (IV).*

Si la visualización es una actividad cognitiva que permite interpretar signos matemáticos con el conocimiento que un individuo tiene, aquí se ve también un interés instrumental. Más precisamente, se nota una preocupación enfocada hacia la *instrumentación*, es decir, hacia la adaptación y asimilación del *artefacto* GeoGebra a los procesos de enseñanza tradicionales, que no se concreta luego en una clara apuesta por alguna aplicación didáctica: *El punto de Fermat es, por definición, el que minimiza la suma de las distancias a los vértices. Se calcula como la intersección de los segmentos que unen cada vértice con el vértice más lejano de un triángulo equilátero construido (externamente) sobre el lado opuesto. (III).*

Muestra sentimientos positivos: *El ejercicio propuesto de dónde colocar la planta entre tres pueblos, bajo ciertas condiciones, me suscita interés (I).* Su perspectiva es puramente matemática: *¿Qué es el punto de Fermat? ¿Cómo se calcula? (II).* Destaca un conato de conceptualización: (...) *GeoGebra, llegando a compararlas con el quinto postulado de Euclides y el cambio de paradigma que se genera cuando lo niegas. El tiempo dirá. (V).*

Manifiesta sólo una incipiente identificación de oportunidades de aprendizaje (la conjetura como primer paso hacia la demostración): *Es claro que con GeoGebra los chavales podrán aventurarse a conjeturar (IV).*

En cuanto a la Dimensión Interlocutiva, la profesora en formación Asun muestra cierta ingenuidad temporal: (...) *(y algunas ideas para mi peque de 5 años) (V).* No identifica las ideas clave puestas de manifiesto en las conclusiones de las

locuciones de los formadores en las dos sesiones, sólo describe los aspectos técnicos: (...) *cuando claramente sí es un cuadrilátero (I).*

A veces sus respuestas no recogen una reflexión personal sobre el papel de la mediación tecnológica: por ejemplo, cuando sólo menciona en el ítem I que le suscita interés el ejercicio propuesto: *El ejercicio propuesto de dónde colocar la planta entre tres pueblos, bajo ciertas condiciones, me suscita interés (I.)*

Sí interioriza el aprendizaje: *He aprendido muchas cosas. (V)* y también se aprecian rasgos de efectividad y de prospección, al referenciar en los discursos de sus respuestas el efecto de las situaciones presentadas para su futura práctica docente...*no tengo del todo claro hasta dónde las herramientas de geometría dinámica son una ayuda y a partir de dónde empiezan a entorpecer el esfuerzo de visualización geométrica y de formalización que todo aprendiz de matemáticas debe hacer. (IV).* En definitiva, como rasgos, es decir propiedades o peculiaridades distintivas e intrínsecas de la personalidad de la profesora en formación Asun, se resalta la influencia de su perspectiva puramente matemática y su menor iniciativa actual para ejercer como profesora, tanto como, al hablar de visualización y de formalización, del obstáculo que puede resaltar de la utilización de GeoGebra.

3.3.2 Análisis narrativo de Bea

Las narrativas de Bea, que se analizarán a continuación, están incluidas de modo literal en la Tabla 4.

Tabla 4. Narrativas de Bea correspondientes a las tareas I, II, III, IV y V.

Tareas	Narrativas
I	<p>Me encantó el ver cómo en obras de arte, como en la Venus de Boticelli, se encuentran numerosas construcciones matemáticas.</p> <p>Me gustó mucho también la discusión sobre el uso de regla y compás o directamente herramientas como Geogebra.</p> <p>La competencia visual en la imagen de la iglesia me gustó. Me hizo ver que hay muchas posibilidades de trabajo en cualquier imagen, y puede ser enriquecedor a los alumnos.</p> <p>También me resultó muy curioso la Y de conexión que se tuvo que diseñar y los criterios para hacerlo desde las tres capitales de Asturias.</p>
II	<p>¿Se podría implementar Geogebra para todos los niveles de ESO y Bachiller como herramienta complementaria de cálculo?</p>

III	Por supuesto, adaptando el nivel requerido, Geogebra se puede adaptar desde 1ºESO hasta 2ºBachiller suponiendo una herramienta útil para el alumnado
IV	La puesta en práctica de Geogebra con geometría esférica, pero lo buscaré ;)
V	Las posibilidades que ofrece una herramienta como Geogebra para complementar y aumentar el aprendizaje y la puesta en práctica de las matemáticas

Dimensión Temática: la profesora en formación Bea muestra interés por aspectos mas instrumentales que didácticos, en el sentido de proyectar actividades docentes precisas: *¿Se podría implementar Geogebra para todos los niveles de ESO y Bachiller como herramienta complementaria de cálculo? (II)* .

Muestra también un incipiente interés contextual: *me resultó muy curiosa la Y de conexión que se tuvo que diseñar y los criterios para hacerlo desde las tres capitales de Asturias (I)*. Expresa sus sentimientos: *Me encantó el ver cómo en obras de arte, (...) (I)*; *Me gustó mucho también la discusión (...) (I)*. Tiene un interés matemático: *La puesta en práctica de Geogebra con geometría esférica, pero lo buscaré ;) (IV)*.

Realiza una incipiente identificación de oportunidades de aprendizaje: *(...) GeoGebra para complementar y aumentar el aprendizaje y la puesta en práctica de las matemáticas (V)*.

En cuanto a la Dimensión Interlocutiva sólo describe, no entra en detalles: *suponiendo una herramienta útil para el alumnado (III)*. De la narración de la profesora en formación Bea, se desprenden, como rasgos docentes, una ligera iniciativa critica como futuro profesor: *“La competencia visual en la imagen de la iglesia me gustó. Me hizo ver que hay muchas posibilidades de trabajo en cualquier imagen, y puede ser enriquecedor a los alumnos” (I)*.

Además, intenta hacer conexiones como futuro docente: *“Geogebra se puede adaptar desde 1º ESO hasta 2º Bachiller suponiendo una herramienta útil para el alumnado” (III)*.

3.2.3 Análisis narrativo de Carlos

Las narrativas de Carlos, que se analizarán a continuación, están incluidas de modo literal en la Tabla 5. Nótese que el alumno ha contestado al ítem I de la encuesta transmitiendo dos cuestiones que se le han planteado en esos dos momentos, “breves

pero vívidos” de la sesión, a los que se refería el cuestionario. El alumno ha insistido, y consta por escrito, que esa es su respuesta al ítem I.

Tabla 5. Narrativas de Carlos correspondientes a las tareas I, II, III, IV y V.

Tareas	Narrativas
I	1- ¿Qué podemos hacer si algún alumno no es capaz de dar el paso y manejar los conceptos vistos sin la ayuda de las herramientas informáticas? 2- ¿Qué curso sería apropiado para introducir la programación? Me refiero a pequeños programas que vayan realizando los pasos que son necesarios para resolver problemas geométricos.
II	¿Crees que es necesario dar el paso y cambiar las técnicas de enseñanza para introducir por completo este tipo de herramientas informáticas?
III	1-Bajo mi punto de vista podemos trabajar en dos direcciones. Por un lado, podemos intentar utilizar herramientas más rudimentarias para mostrar el mismo concepto de forma diferente. Por otro lado, podríamos tratar de rebajar el uso de la herramienta informática en dichos casos de manera general (la seguiría usando, pero con limitaciones). 2- Creo que cuanto antes mejor. En 1º de ESO es posible introducir las nociones básicas de conceptos de triángulos (o polígonos en general) creándolas mediante rectas (perpendiculares o no), semirrectas, puntos...
IV	¿Es posible crear procesos en Geogebra que luego utilicemos como herramientas? Ejemplo: triángulo equilátero con el que juntando 6 podemos generar un hexágono regular
V	Me ha abierto la mente. Estoy acostumbrado a una enseñanza tradicional. La conferencia me ha servido para ver ejemplos de casos reales en los que introducir esta herramienta. No es difícil, solo hay que tener ganas.

Dimensión Temática: El profesor en formación Carlos intenta modelizar: *ver ejemplos de casos reales en los que introducir esta herramienta (V)*. Antes que nada, parece tener un interés instrumental al igual que Asun. De nuevo, se le ve bien preocupado por la *instrumentación*, por la adaptación y asimilación del *artefacto* GeoGebra a los procesos de enseñanza tradicionales; no se concreta luego

en una clara apuesta por una aplicación didáctica: *¿Es posible crear procesos en Geogebra que luego utilicemos como herramientas? (IV). ¿Crees que es necesario dar el paso y cambiar las técnicas de enseñanza para introducir por completo este tipo de herramientas informáticas? (II).*

Muestra un conato de conceptualización: *Por un lado, podemos intentar utilizar herramientas más rudimentarias para mostrar el mismo concepto de forma diferente (III).*

En relación con la Dimensión Interlocutiva, el profesor en formación Carlos manifiesta una iniciativa ingenua como futuro profesor: *No es difícil, solo hay que tener ganas (V)*, pero no entra en detalles: *Podríamos tratar de rebajar el uso de la herramienta informática (III).*

Como rasgos docentes de profesor en formación Carlos, destacamos que manifiesta una iniciativa ingenua como futuro profesor e intenta un cambio didáctico, pero aún no conceptual.

3.2.4 Síntesis de los análisis de los discursos de los tres profesores en formación

Sintetizamos el análisis de los discursos de estos tres profesores en formación en la Tabla 6.

Tabla 6. Síntesis del análisis de los discursos.

Profesor en formación	Rasgo docente	Grado de reflexión narrativa
Asun	Perspectiva matemática dominante, pero no exclusiva. Poca iniciativa actual de ejercer como profesor.	Grado de reflexión narrativa bajo, o “ <i>account of</i> ”. Se corresponde con rasgos de disposición docente poco reflexiva, puramente matemática, en la que el profesor en formación solo describe o refiere eventos anecdóticos de las sesiones de formación.
Bea	Ligera iniciativa crítica como futuro profesor. Intenta hacer conexiones como futuro docente.	Grado de reflexión narrativa medio o “ <i>account</i> ”. La disposición docente es ingenua y ligeramente consciente. Consideramos que su grado de reflexión narrativa es <i>medio</i> , por manifestar conatos de interpretación de ideas cruciales de las sesiones de formación.

Carlos	Iniciativa ingenua como futuro profesor. Intento de cambio didáctico, pero aún no conceptual.	Grado de reflexión narrativa alto o “ <i>account for</i> ”. Se detecta una disposición docente reflexiva, con un intento de conceptualización de las ideas clave de las sesiones y una expectativa docente para el futuro profesional.
--------	---	--

Efectivamente, tras la evaluación del grado de fuerza locutiva de sus narraciones, se puede afirmar que se dan los tres grados de madurez reflexiva en estos profesores en formación del máster (véase la tercera columna de la Tabla 6).

Por otra parte, también se hallan distintos grados de predisposición de estos estudiantes ante una posible futura labor docente (véase la segunda columna de la Tabla 6).

Es más, el análisis de estos tres discursos en las dos dimensiones, interlocutiva y temática, parece corroborar la afirmación de Mason (2002) sobre la existencia de una correlación entre la percepción de una mayor sensibilidad para los detalles y una mayor disposición para actuar con capacidad de respuesta en un contexto docente. En este caso en particular, se encuentra un incremento tanto del grado de reflexión narrativa como de la bondad de los rasgos docentes (Tabla 6) en la secuencia:

Asun → Bea → Carlos

Aunque es claramente constatable la presencia de reacciones positivas frente a las innovaciones tecnológicas en los comentarios de los tres participantes, también se observa en los tres discursos, y de manera transversal a los distintos grados de madurez reflexiva observados, una notoria incompreensión en su potencial de uso. No sabemos hasta qué punto esto es debido a las modalidades de formación, al menos parcialmente, ni si el hecho de estar «en clase» representa un obstáculo de tipo cultural o tecnológico. La relevancia de este hecho hace que nos centremos, en lo que sigue, en su análisis.

Así, Asun señala que: *Es claro que con GeoGebra los chavales (...) (corren) el riesgo de confundir la claridad con la que “ven” un concepto con una demostración formal (...) no tengo del todo claro hasta dónde las herramientas de geometría dinámica son una ayuda y a partir de dónde empiezan a entorpecer (...) (IV).*

Y Carlos plantea, como principal reacción ante las novedades, algo negativo: *¿Qué podemos hacer si algún alumno no es capaz de dar el paso y manejar los conceptos vistos sin la ayuda de las herramientas informáticas? (I) (...) podemos*

intentar utilizar herramientas más rudimentarias para mostrar el mismo concepto de forma diferente. Por otro lado, podríamos tratar de rebajar el uso de la herramienta informática en dichos casos de manera general (la seguiría usando, pero con limitaciones) (III).

Por último, Bea, tal vez transmitiendo una aproximación más optimista a las herramientas descritas, sólo hace referencia a los aspectos más tradicionales de GeoGebra como programa de Geometría Dinámica: *Me gustó mucho también la discusión sobre el uso de regla y compás o directamente herramientas como Geogebra (I)* (sin hacerse eco de las auténticas novedades transmitidas en las sesiones: demostración automática, realidad aumentada, geometría 3D...), lo que pone de manifiesto, una vez más, las dificultades que conlleva la trasmisión y el impulso de acciones de innovación pedagógica, incluso con el concurso de herramientas con una tecnología bien próxima a los alumnos.

4. Reflexiones y conclusiones

Al principio del estudio los autores eran muy conscientes de que la tradición y las creencias personales sobre la educación matemática son muy fuertes. Pero también sabían que los estudiantes de posgrado suelen ser más críticos que los que salen de la enseñanza obligatoria, de ahí el interés por examinar más de cerca su pensamiento en un contexto de innovación educativa. Sin embargo, lo que sorprende son los indicios de ingenuidad confusa o la creencia de que sólo los contenidos matemáticos son dignos de atención para la adquisición de competencias científicas.

En una nota más positiva, en este estudio se puede destacar que se ha comprobado que se dan los tres grados de madurez reflexiva propuestos en estos profesores en formación del Máster en Formación de Profesorado de Secundaria. Además, se han hallado distintos grados de predisposición ante una posible futura labor docente y, como denominador común, una manifiesta preocupación por la dificultad –más que por las posibles ventajas– de acomodar las novedades tecnológicas en la enseñanza de la geometría. Preocupación que parece, sobre todo, una especie de miedo ante lo desconocido, ante lo que no se entiende del todo o ante lo que nos hace sentir muy poco preparados frente a la vaguedad o la incertidumbre. En definitiva, podría decirse que el peso de la tradición es también un reflejo natural y una garantía de no cometer errores y de poder lidiar con las limitaciones y paradojas de la institución escolar.

Sin embargo, con el presente estudio se puede apreciar también una cierta resistencia a que las herramientas que han visto actuar en las sesiones formativas “entorpezcan” el proceso de aprendizaje; temor a que supongan un obstáculo (más que una ayuda) para alumnos menos habituados al contexto tecnológico; temor a

que su utilización requiera una dedicación excesiva. Parecen subestimar o no llegaron a la comprensión que el objetivo del uso de estas herramientas en el aula es ayudar a los alumnos a hacer matemáticas mejor y más fácilmente, de manera más creativa, mediante las amplias posibilidades de exploración y de descubrimiento que estas herramientas facilitan, promoviendo así la capacidad creativa de los alumnos y desarrollando, en suma, una forma de hacer geometría adecuada a la era digital en la que van a pasar su vida.

Todas estas dudas son, naturalmente, razonables. Pero no parece tan lógico que, para los futuros profesores, la reacción dominante sea una especie de conformismo hecho de reglas prefabricadas y no de planteamientos cuestionables y mejorables, un ver amenazada la continuidad de una enseñanza que siga ciegamente las mismas pautas que las que ellos recibieron. ¿Qué falla en la formación inicial y continuada para alimentar tanto tradicionalismo? No es éste, obviamente, un hallazgo muy original, pero lo que cambia es que estamos en 2021 y que la cuestión tecnológica es una obviedad en la vida del ciudadano «nativo tecnológico». Si el ideal en el aula de matemáticas no se puede separar de la vida cotidiana, sin duda es necesario preguntarse si la matemática tecnológica existe y cómo puede servir de referencia para la realización del trabajo matemático en la escuela. De lo contrario, podría creerse (erróneamente) que las iniciativas de innovación pedagógica están condenadas a aparecer sólo como una especie de moda sofisticada, desligada de referencias epistemológicas sólidas, y no como una realidad ineludible que se apoya en una mirada didáctica crítica.

Los datos de este estudio son cualitativos, se corresponden con el análisis de los textos narrativos de las respuestas del cuestionario. Como hemos indicado en el marco teórico, han sido interpretados de manera específica con las perspectivas del Análisis del Discurso de Sfard (2001) y la Reflexión sobre la Práctica de Mason (2002), Schön (1983) y Smith (2003). Además, el análisis se podría prolongar de manera general a partir de noción de “habitus” (Perrenoud, 2011) y de la coordinación entre el conocimiento especializado del profesor y la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Derouet et al., 2017).

En el discurso de estos estudiantes se reconocen, en general: características propias de la inexperiencia, pues sólo han impartido, si acaso, clases particulares; ingenuidad en ciertas apreciaciones (“*account*”); otras apreciaciones, posiblemente derivadas de las orientaciones propias de las titulaciones previas de los profesores en formación (en su mayoría ciencias matemáticas, física o ingeniería), que les llevan a centrarse exclusivamente en la perspectiva matemática (“*account of*”); y otras que, tal vez, pueden ser consecuencia de que ejercer como profesores no había sido su primera opción laboral al comenzar sus estudios universitarios,

independientemente de cuales hayan sido éstos (poca iniciativa como profesor, poca reflexión subjetiva y argumentada, escaso “*account for*”).

El análisis de las narrativas de los estudiantes en este experimento de formación está relacionado más en el contexto del profesor en formación, en su bagaje sentimental y sus creencias, que con el contenido de la innovación planteada. Esta afirmación es, por un lado, enriquecedora, pues hace más amplia la lección adquirida tras este análisis; y, por otro, preocupante, al constatar la intrínseca dificultad de transmitir ideas de innovación pedagógica a los futuros profesores en formación. Esto podría ser la pregunta central que se desprende del estudio y que merece ser ampliada en nuevas investigaciones. Asimismo, se entiende que una formación de dos sesiones en línea no es suficiente para despertar el interés del uso tecnológico, aun menos para fomentar la importancia de ser creativo en la profesión docente.

Esta situación que debería cambiar con la realización de unas prácticas donde se llevaran a cabo actividades que incluyeran estas innovaciones pedagógicas y que facilitaran, finalmente, una mejora en la percepción de los futuros profesores sobre las mismas y, en definitiva, influyeran positivamente sobre su futura práctica profesional docente.

Se podría pensar que, debido a su inexperiencia, difieren en el significado y grado de detalle de los conceptos considerados en las locuciones de las sesiones de formación. Esta creencia es natural, ya que el significado y la conceptualización están estrechamente relacionados, y los profesores en formación necesariamente tienen menos capacidad reflexiva sobre la dimensión temática del contenido de formación tratado.

Sin embargo, al centrar nuestra atención en el discurso sobre el pensamiento o intención docente, hemos observado hasta qué punto es relativamente pobre la articulación de las reflexiones cuando el pensamiento crítico va más allá del contenido matemático

Si bien esta disposición puede parecer decepcionante para el formador bien intencionado, plantea las siguientes preguntas cruciales en torno al cambio didáctico y, sobre todo, conceptual, necesario para adquirir la competencia de llegar a ser profesor:

- ¿Qué habría sido necesario para que los beneficios del programa de innovación pedagógica fueran más convincentes para los estudiantes?
- ¿Cómo debería haberse negociado el contrato de formación para fomentar, tanto el desarrollo de sus habilidades geométricas con el uso de herramientas

informáticas, como la adquisición de los criterios necesarios para evaluar, criticar, elegir, aplicar y usar dichas herramientas?

- ¿Las respuestas a estas preguntas se encuentran en el dispositivo de formación o vienen de fuera?

La investigación llevada a cabo nos ha permitido responder parcialmente a estas preguntas, o sea en claves de diseño de formación (a diferencia de la aplicación docente en el aula) y del instrumento escrito y a distancia para recoger datos: ¿Reflejan los datos lo que piensan los estudiantes? ¿Habrían sido más adecuadas para la investigación unas entrevistas? A pesar de eso, la investigación queda abierta a futuros análisis en los que, tal vez (véase (Kovács et al., 2020) como ejemplo), la capacidad de la teoría de los ETM coordinada, por ejemplo, con la teoría MTSK y con la práctica del análisis del discurso reflexivo, haga posible entender mejor el conocimiento, el discurso del profesor y su rol en el aula en un contexto de innovación educativa en geometría.

5. Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado al amparo del proyecto *Innova Docencia* de la Universidad Complutense de Madrid (Nº. de Referencia 177) “Utilización de metodologías activas de enseñanza para el aprendizaje de las matemáticas, centradas en el estudiante y desarrolladas en el espacio innovador de una hiperaula”.

Los autores agradecen a los revisores anónimos de este trabajo sus detallados informes, que han contribuido mucho a la mejora del mismo.

Bibliografía

BJULAND, R., CESTARI, M., & BORGERSEN, H. (2012). Professional mathematics teacher identity: analysis of reflective narratives from discourses and activities. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, 405-424.

BREEN, S., MCCLUSKEY, A., MEEHAN, M., O'DONOVAN, J. & O'SHEA, A. (2014). A year of engaging with the Discipline of Noticing: five mathematics lecturers' reflections. *Teaching in Higher Education*, 19(3), 289-300.

COBO, P. & FORTUNY, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 115-140.

DEROUET, C., KUZNIAK, A., NECHACHE, A., PARZYSZ, B. & VIVIER, L. (2017). The Mathematical Working Space model: An open and adaptable theoretical framework? *CERME 10*, Feb 2017, Dublin, Irlanda. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01948866>

EISENHART, A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 99-114.

FERNANDEZ, C., SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., VALLS, J. & CALLEJO, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61.

FLORES-SALAZAR, J.V., GAONA, J. & RICHARD, P.R. (2022). Mathematical work in the digital age. Variety of tools and the role of genesis. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P.R. Richard (Eds), *Mathematical work in educational context*. Springer Nature.

HASPEKIAN, M. (2020). Teaching practices in digital era: some theoretical and methodological perspectives. En A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark-Wilson & H.-G. Weigand (Eds.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA), 16-18 September 2020* (pp. 3-11). Johannes Kepler University. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218/document>

HOWENWARTER, M., KOVÁCS, Z., RECIO, T. (2019). Using GeoGebra Automated Reasoning Tools to explore geometric statements and conjectures. En G. Hanna, M. de Villiers & D. Reid (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (vol. 14, pp. 215-236). Springer.
https://ictmt13.sciencesconf.org/data/pages/proceedings_compressed_1.pdf

KOVÁCS, Z., RECIO, T., & VÉLEZ, M. P. (2018). Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 25(2), 33-50.

KOVÁCS, Z., RECIO, T., RICHARD, P. R. & VÉLEZ, M. P. (2017). GeoGebra automated reasoning tools: a tutorial with examples. En G. Aldon & J. Trgalová (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Teaching ICTMT 13* (pp. 400-404).

KOVÁCS, Z., RECIO, T., RICHARD, P. R., VAN VAERENBERGH, S. & VÉLEZ, M. P. (2020). Towards an ecosystem for computer-supported geometric reasoning, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 10.1080/0020739X.2020.1837400

- LLINARES, S. (2020). Indicators for the development of noticing: how do we recognize them? *For the Learning of Mathematics*. 40(0), 38-43.
- MARTÍNEZ ZARZUELO, A., RODRÍGUEZ MANTILLA, J. M., ROANES LOZANO, E. & FERNÁNDEZ DÍAZ, M. J. (2020). Efecto de Scratch en el aprendizaje de conceptos geométricos de futuros docentes de Primaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 23(3), 357-386. 10.12802/relime.20.2334
- MASON, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- PANEQUE, J., COBO, P. & FORTUNY, J. (2017). Intelligent Tutoring and the Development of Argumentative Competence. *Technology, Knowledge and Learning*, 22(1), 83-104
- PERRENOUD, P. (2011). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Graó.
- PLANAS, N., FORTUNY, J. M., ARNAL-BAILERA, A. & GARCÍA-HONRADO (2016). El discurso matemático del profesor: Explicaciones, ejemplos y coherencia local. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). SEIEM.
- RADFORD, L. (2013). Three key concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.
- ROANES-LOZANO, E. & SANCHEZ, F. (2017). An Educational Application of Dynamic Geometry: Revisiting the “Recovery Position” in Tennis. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24(4), 173-178.
- SCHÖN, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How professionals think in action*. Temple Smith.
- SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- SMITH, T. (2003). Connecting theory and reflective practice through the use of personal theories. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *PME 27 International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, PME27/PME-NA25* (p. 215-222). College of Education, University of Hawai.

JOSEP MARÍA FORTUNY

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals,
Universitat Autònoma de Barcelona, Espanya

josepmaria.fortuny@uab.cat

TOMÁS RECIO

Departamento de Ingeniería Industrial, Escuela Politécnica Superior
Universidad Antonio de Nebrija, Madrid, Espanya

trecio@nebrija.es

PHILIPPE R. RICHARD

Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation,
Université de Montréal, Canada

philippe.r.richard@umontreal.ca

EUGENIO ROANES-LOZANO

Instituto de Matemática Interdisciplinar & Departamento de Didáctica de las
Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Facultad de Educación,
Universidad Complutense de Madrid, Espanya

eroanes@ucm.es

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

Présentation de la revue

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou GoogleScholar. Ces différents référencement ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site après une durée d'un an.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : <http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc>.

Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques..

Il est demandé aux auteurs de proposer des articles de taille raisonnable, entre vingt et trente pages, même s'ils peuvent être plus longs pour permettre à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à mai-adsc@unistra.fr.

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles¹ pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue, un an après sa publication.

¹ Disponible à l'adresse : <https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/#c6853>

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Procédures de sélection des textes

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre

cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année n et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année $n + 1$.