N° 3

AVRIL 1971

L'OUVERT

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE

DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

DE L'ACADEMIE

O U V E R T

N ° 3

AVANT PROPOS

Ce troisième numéro de l'ouvert est consacré aux futurs programmes de quatrième. Vous y trouverez le dernier projet de la Commission Ministérielle présidée par M. Lichnérowicz puis deux articles présentant ces programmes. Le premier donne une construction de l'ensemble R des nombres réels à partir des décimaux, son but n'est pas d'indiquer comment elle peut être enseignée en classe de quatrième mais de donner à l'enseignant les connaissances nécessaires à son enseignement. Le second donne une présentation possible de la géométrie conforme aux futurs programmes. Nous espérons que ces articles donneront une idée de l'enseignement possible en quatrième l'année prochaine ; au mois de Mai les programmes officiels et les Commentaires de l'Inspection Générale devraient paraître au B.O. et le Bulletin de l'A.P.M.E.P. du mois de Juin sera également consacré à ces programmes ; nous pouvons donc souhaiter de bonnes vacances aux enseignants de quatrième.

COMMISSION MINISTERIELLE
POUR
L'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

PROJET DE PROGRAMME POUR LA CLASSE DE QUATRIEME

Il est rappelé que les professeurs ont toute liberté pour choisir l'ordre dans lequel les différentes parties du programme sont étudiées.

L'importance de chacune d'elles et le temps à y consacrer ne sont pas proportionnels à la longueur de leur libellé : les questions qui ne figuraient pas dans les programmes antérieurs, ou qui n'y figuraient pas sous la même forme, ont fait, en général, l'objet d'une rédaction plus détaillée.

I - RELATIONS

Révision des notions présentées dans les classes antérieures et compléments : produit cartesien, relation, application, composition des applications; bijection d'un ensemble sur un ensemble et bijection réciproque.

Notion de groupe : définition (on la dégagera des exemples du programme).

II - NOMBRES DECIMAUX RELATIFS ET APPROCHE DES REELS

1. Groupe des puissances de dix.

Nombres décimaux relatifs écrits $a.10^p$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ et sous forme de nombres à virgule : addition, multiplication, ordre, valeur absolue.

Résumé des propriétés fondamentales de l'ensemble ainsi structuré des décimaux relatifs.

2. Calculs approchés.

a) Encadrement d'un nombre décimal par des intervalles des types $[a.10^p, (a+1)10^p[$, $]a.10^p, (a+1)\ 10^p]$, $[a.10^n, (a+1)10^p]$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Sur des exemples : encadrement d'une somme, d'un produit.

b) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $x.10^n$, avec $x \in \mathbb{N}$ tel que soient vérifiées les inégalités $0 \leqslant d.x.10^n \leqslant 1 < d(x+1).10^n$

c) Exercices de détermination, pour un décimal strictement positif d donné et pour un entier relatif n donné, du nombre décimal $y.10^n$ avec $y \in \mathbb{N}$. tel que soient vérifiées les inégalités : $[y.10^n]^2 \leqslant d < [(y+1).10^n]$

d) Suites décimales illimitées, nombres réels, encadrements d'un nombre réel.

.../...

3. Enumération des principales propriétés qui structurent l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels : addition, $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif ; multiplication, associativité, distributivité par rapport à l'addition ; ordre et valeur absolue.

On admettra que pour tout nombre réel a différent de 0 il existe un nombre réel a^{-1} et un seul tel que $aa^{-1} = 1$. Pour tout couple de nombres réels (a, b) avec $a \neq 0$, il existe un nombre réel unique x, appelé quotient de b par a, et noté ba^{-1} ou $\frac{b}{a}$ tel que $ax = b$. Exercices simples de calcul sur de tels quotients

Sur des exemples numériques, équations et inéquations du premier degré à une inconnue.

Usage des exposants entiers : groupe des puissances d'un nombre réel non nul.

Calculs approchés sur les nombres réels.

4. Exemples de fonctions polynomes, (applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Degré. Exercices de calcul sur les polynomes.
Produits $(x + a)^2$, $(x - a)^2$, $(x + a)(x - a)$. Exercices de factorisation.

GEOMETRIE CLASSE DE QUATRIEME

III. GEOMETRIE DE LA DROITE

A la fin de l'année scolaire, la géométrie, née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique : c'est-à-dire que des faits ayant été admis (axiomes), d'autres en sont déduits (théorèmes). Mais il est absolument indispensable que de nombreuses manipulations, des exercices pratiques utilisant les instruments de dessin aient précédé à la fois l'énoncé des axiomes et tout raisonnement. Le but de l'enseignement des mathématiques dans cette classe est de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger ; les prémisses devront donc être précisées avec soin. On pourra adopter comme axiomes ceux qui sont indiqués dans les commentaires ; mais d'autres choix demeurent légitimes.

1) Droite. Distance de deux points sur une droite, repères normés d'une droite. Abscisse d'un point M dans un repère normé ; notation [illegible]
Changement de repères normés sur une droite.
Expression de la distance de deux points en fonction de leurs abscisses dans un repère normé.
Changement d'unité.

2) Ordre sur une droite. Droite orientée (ou axe). Demi-droite. Segment. Milieu de deux points. Premier [illegible] barycentre de deux points.

.../...

IV. GEOMETRIE PLANE

1) Droites du plan. Détermination d'une droite par deux points. Droites parallèles. Le parallélisme est une relation d'équivalence ; définition d'une direction de droites comme classe d'équivalence.

Projection, de direction donnée, du plan sur une droite, d'une droite sur une droite.

Enoncé de Thalès. Rapport de projection, pour une direction donnée, d'un axe sur un axe.

2) Triangle - Applications de l'énoncé de Thalès au triangle.

Projection sur une droite de milieux, de barycentres. Construction graphique du barycentre de deux points donnés, affectés de coëfficients donnés.

Symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) : image d'une droite.

Parallélogramme propre ou aplati (défini par l'existence d'un centre de symétrie). Parallélisme des droites portant les côtés d'un parallélogramme propre ; réciproque. Projection d'un parallélogramme ; réciproque.

3) Equipollence de bipoints. C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.

Direction d'un vecteur non nul.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.

Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repères du plan ; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère.

Exercices de calcul vectoriel ; médianes d'un triangle.

CONSTRUCTION DES REELS A PARTIR DES DECIMAUX

Les programmes tradionnels du second cycle comportaient l'étude de $\mathbb{Q}$ sous la forme des fractions, puis à partir de $\mathbb{Q}$, la "construction" de $\mathbb{R}$.

Les nouveaux programmes mettent l'accent sur l'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$; l'utilisation aisée de $\mathbb{D}$ pour les calculs approchés permet d'introduire les suites décimales et à partir de là l'ensemble $\mathbb{R}$ avec sa structure de corps ordonné.

On se propose d'indiquer les étapes successives d'une construction possible du corps ordonné $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{D}$.

I . - Rappels sur l'ensemble des décimaux $\mathbb{D}$.

Pour tout entier $n \geq 1$ on désigne par $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux ayant "n chiffres après la virgule". C'est l'ensemble des nombres de la forme $a.10^{-n}$ où $a \in \mathbb{Z}$; si $a \geq 0$ on dit que $a.10^{-n} \in \mathbb{D}_n^+$, si $a \leq 0$, $a.10^{-n} \in \mathbb{D}_n^-$.

On pose $\mathbb{D}_o = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{D} = \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathbb{D}_n$.

Clairement $\mathbb{D}_{n+1} \supset \mathbb{D}_n$

Enfin $\mathbb{D}$ est muni d'une structure d'anneau ordonné qui prolonge celle de $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{D}^+$ et $\mathbb{D}^-$ les décimaux positifs et négatifs.

Cet ensemble $\mathbb{D}$ ne contient pas tous les "nombres" : il est facile de voir qu'il ne contient pas le quotient de 22 par 7, ni "le nombre" d tel que $d^2 = 2$. Ceci motive la construction qui va suivre.

II. - Les développements décimaux

1. Notions générales sur les suites de décimaux

On appelle suite de décimaux toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{D}$. On note $u = (u_n)\ n \in \mathbb{N}$ ou plus simplement $u = (u_n)$ une telle suite.

On pose les définitions suivantes :

La suite $u = (u_n)$ est croissante lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geq u_n$$

La suite $u = (u_n)$ est décroissante lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \leq u_n$$

La suite $u = (u_n)$ converge vers le décimal l lorsque

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists\ p(m) \in \mathbb{N},\ \forall n > p(m) \qquad |u_n - l| < 10^{-m}$$

Les suites $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont équivalentes lorsque la suite $d = (u_n - v_n)$ converge vers 0. On écrit $u\ \rho\ v$ pour exprimer que u et v sont équivalentes.

2. Développement décimal

On appelle développement décimal positif une suite de décimaux $d = (d_n)$ telle que

i) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n \in \mathbb{D}_n^+$

ii) le quotient entier de $10^n\, d_n$ par 10 est $10^{n-1}\, d_{n-1}$.

On appelle développement décimal négatif une suite de décimaux $d = (d_n)$ telle que la suite $-d = (-d_n)$ soit un développement décimal positif.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemblesdes développements décimaux.

Un développement décimal $d = (d_n)$ pour lequel il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m \quad d_n = d_m$ s'appelle le développement décimal du décimal d_m.

Ainsi le développement décimal de 1,25 est

$d_o = 1$ $\quad d_1 = 1,2 \quad n \geq 2 \quad d_n = 1,25$

Proposition 2-1.

Si d est un développement décimal positif alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{N}$, $d_{n+k} - d_n < 10^{-n}$.

En effet $d_{n+k} - d_n \leq 9(10^{-(n+1)} + 10^{-(n+2)} + \ldots + 10^{-(n+k)}) < 10^{-n}$

Proposition 2-2.

Si d et d' sont deux développements décimaux positifs d et d' ne sont pas équivalents s'il existe un rang N tel que $d_N - d'_N > 10^{-N}$.

En effet il suffit de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_{N+k} - d'_{N+k} > 10^{-N}$, la suite $(d_n - d'_n)\ n \in \mathbb{N}$ ne pouvant alors converger vers 0.

Or $d_{N+k} - d'_{N+k} = (d_{N+k} - d_N) + (d_N - d'_N) + (d'_N - d_{N+k})$

Comme d est une suite croissante, $d_{N+k} - d_N \geq 0$ et

$$d_{n+k} - d'_{N+k} \geq (d_N - d'_N) - (d'_{N+k} - d'_N)$$

Par hypothèse $d_N - d'_N > 10^{-N}$ donc $d_N - d'_N \geq 2.\ 10^{-N}$

D'après la proposition 2-1 $d'_{N+k} - d'_N < 10^{-N}$

Donc $d_{N+k} - d'_{N+k} > 2.\ 10^{-N} - 10^{-N} = 10^{-N}$

III. - L'ensemble ordonné R

1. Définition de R

Par définition $R = \mathcal{D}/\rho$

Proposition 3-1 :

La classe d'équivalence d'un élément $d \in \mathcal{D}$ contient un ou deux éléments ; elle en contient deux si et seulement si elle contient le développement décimal d'un décimal.

Preuve.

a) On montre d'abord que si $d\ \rho\ d'$ alors d et d' sont tous deux positifs ou tous deux négatifs.

Supposons d ρ d' avec d positif et d' négatif ; on écarte le cas où d = d' (i.e. le cas où d et d' désignent le même développement de 0) ; il existe alors un rang r tel que $d'r < dr$; puisque d(resp. d') est une suite croissante (resp. décroissante) on a, pour $n \geq r$: $d'n \leq d'r < dr \leq dn$ donc $n \geq 1 \Rightarrow dn - d'n \geq dr - d'r > 0$.

Il en résulte que la suite $(d_n - d'_n)\ n \in N$ ne peut converger vers 0.

b) Soit alors d et d' deux développements décimaux positifs équivalents et distincts. D'après la proposition 2-2 il existe un rang r tel que pour $n < r$ $d_n = d'_n$ et $|d_r - d'_r| = 10^{-r}$. Alors pour tout entier $k \geq 1$ on a

$d_{r+k} = d_r + a_k\, 10^{-(r+k)}$ où $0 \leq a_k \leq 10^k - 1$ et

$d'_{r+k} = d'_r + a'_k\, 10^{-(r+k)}$ où $0 \leq a'_k \leq 10^k - 1$

Donc $d_{r+k} - d'_{r+k} = d_r - d'_r + (a_k - a'_k)\, 10^{-(1+k)}$

Supposons $d_r - d'_r = 10^{-r}$. Alors la proposition 2-2 donne $d_{r+k} - d'_{r+k} \leq 10^{-(r-k)}$ et finalement :

$$10^{-r} + (a_k - a'_k)\, 10^{-(r+k)} \leq 10^{-(r+k)}$$

$$a'_k - a_k \geq 10^{k} - 1$$

Vu les conditions sur les entiers a'_k et a_k, ceci exige $a'_k = 10^{k-1}$ et $a_k = 0$.

Autrement dit, les "décimales de d, de rang supérieur à r" sont égals à 0 et celles de d' sont égales à 9. Ainsi la classe d'un développement décimal ne contient deux éléments que si l'un est le développement décimal d'un décimal.

<u>Exemple</u> : La classe de d défini pas $d_o = 1$, $d_1 = 1{,}2$ et pour $n \geq 2$ $d_n = 1{,}25$ contient d et d' défini par $d'_o = 1$ $d'_1 = 1{,}2$ $d'_2 = 1{,}24$ et pour $n \geq 3$ $d'_n = d'_{n-1} + 9.10^{-n}$

On appelle <u>représentant canonique d'un réel r</u> l'unique représentant de r lorsque r est un singleton, et le développement décimal du décimal lorsque r est une classe contenant deux éléments.

2. Ordre sur R

Si et x et y sont des réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n) on dit que x est inférieur à y $(x \leq y)$ lorsque pour tout n de $\mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$.

On définit alors les divers intervalles de R

Proposition 3-2

L'ordre ainsi défini sur R prolonge celui de $\mathbb{D}$

Preuve

Soit x et y deux réels décimaux de représentants canoniques (x_n) et (y_n). Il existe alors un plus petit rang r tel que pour $n \geq r$ $x_n = x_r$ et $y_n = y_r$ et $x = x_r$, $y = y_r$.

Si dans $\mathbb{D}$, $x < y$, on a $x_r < y_r$, on a aussi pour tout $n > r$ $x_n < y_n$ et pour $n < r$ $x_n \leq y_n$.

Inversement, si $x < y$ dans R, il est clair que $x_r < y_r$ donc que $x < y$ dans $\mathbb{D}$

Proposition 3-3

$\mathbb{D}$ est dense pour l'ordre dans R

Cela signifie que pour tout couple (x,y) de réels tels que $x < y$ il existe un décimal d tel que $x < d < y$.

Supposons d'abord x et y positifs.

Si (x_n) et (y_n) sont les représentants canoniques respectifs de x et y, alors il existe un rang p tel que $x_p < y_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < p \Rightarrow x_n = y_n$.

D'autre part $\forall m$, $m > p \Rightarrow x_m < y_m$ et comme (x_n) n'a pas la période 9 il existe q supérieur à p tel que $x_q + 10^{-q} < x_p$, de sorte que le développement (z_n) défini par

$$z_n = \begin{cases} x_n \text{ si } n < q \\ x_q + 10^{-q} \text{ si } n \geq q \end{cases}$$

définit un décimal compris strictement entre x et y.

Même résultat si x et y sont négatifs.

Si x et y sont de signe différent, 0 est manifestement entre les deux.

IV . - La structure de corps sur R

Si x et y sont deux réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n), les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n\, y_n)$ ne sont malheureusement plus nécessairement des développements décimaux : par exemple si $x = y = 2/3$

$(x_o + y_o) = 0$ et $(x_1 + y_1) = 1{,}2$; d'autre part $(x_1\, y_1) = 0{,}36$ qui n'est même pas dans D_1.

On est alors amené à introduire les notions de suite de décimaux convergentes dans R et de suite de Cauchy de décimaux

1. Suite de décimaux convergents dans R

On dit qu'une suite $u = (u_n)$ de décimaux converge vers le réel r, de représentant canonique $d = (d_n)$ lorsque les suites u et d sont équivalentes.

Il est clair que le développement décimal représentant canonique d'un réel converge vers ce réel. De même la proposition suivante est évidente

Proposition 4-1

Deux suites de décimaux qui convergent vers la même limite sont équivalentes.

On pose alors les définitions suivantes :

Si x et y sont deux réels de représentants canoniques (x_n) et (y_n)

Le réel x + y, appelé somme de x et de y est la limite de la suite $(x_n + y_n)$.

Le réel xy, appelé produit de x et de y est la limite de la suite $(x_n y_n)$.

Pour justifier ces définitions il faut évidemment montrer que les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ ont des limites.

On est ainsi amené à introduire les :

2. Suites de Cauchy de décimaux.

Une suite de décimaux $u = (u_n)$ est dire de Cauchy lorsque pour tout entier positif m il existe un rang p(m) tel que $|u_{n'} - u_n| < 10^{-m}$ dès que $n' > n > p(m)$.

Proposition 4-2

Tout développement décimal est une suite de Cauchy.

Il suffit de démontrer ceci pour un développement décimal positif d. Si m est donné on cherche $p(m)$ tel que pour $n' > n > p(m)$ $|d_{n'}-d_n| < 10^{-m}$. Comme (dn) est croissante, on a $|d_n' - d_n| = d_{n'} - d_n \leq d_{n'} - d_{p(m)}$. D'après la proposition 2-1, $d_{n'} - d_{p(m)} < 10^{-p(m)}$ On voit qu'il suffit de prendre $p(m) = m$

Proposition 4-3

Si (x_n) et (y_n) sont deux suites de Cauchy de décimaux, alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ en sont aussi.

Preuve :

On se donne un entier m positif et on cherche $p(m)$ tel que $n'>n>p(m)$ $\Rightarrow |x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| < 10^{-m}$

Or $|x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| \leq |x_{n'} - x_n| + |y_{n'} - y_n|$
Comme $|x_{n'} - x_n| < 10^{-(m+1)}$ dès que $n'> n > p_1(m+1)$
et que $|y_{n'} - y_n| < 10^{-(m+1)}$ dès que $n'>n > p_2(m+1)$
(puisque (x_n) et (y_n) sont de Cauchy), on voit qu'il suffit de prendre $p(m) =$ $\sup (p_1(m+1), p_2(m+1))$ pour réaliser la condition $|x_{n'} + y_{n'} - x_n - y_n| < 2.10^{-(m+1)}$ $< 10^{-m}$.

On fait un raisonnement analogue pour le produit en partant de l'inégalité :

$$|x_{n'} y_{n'} - x_n y_n| \leq |(x_{n'} - x_n) y_{n'}| + |(y_{n'} - y_n) x_n|$$

et en utilisant le fait qu'une suite de Cauchy est bornée.

Théorème fondamental

Toute suite de Cauchy de décimaux converge dans R.

Preuve

Soit (α_n) une suite de Cauchy de décimaux.

On a : $\exists\, p_o \in \mathbb{N},\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geq p_o$ et $n \geq p_o \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < 10^{-1}$,

donc : $\forall m,\ m \geq p_o \Rightarrow \alpha_{p_o} - 10^{-1} < \alpha_m < \alpha_{p_o} + 10^{-1}$ et par conséquent à partir du rang p_o la partie entière de α_m diffère de celle de α_{p_o} d'au plus 1.

Il existe donc une infinité de termes de la suite (α_m) ayant la même partie entière e_o.

On considère alors la suite extraite de (α_n) formée de l'infinité de ses termes ayant e_o comme partie entière : soit (α_n^o) cette suite.

(α_m^o) est une suite de décimaux ; de Cauchy car extraite d'une suite de Cauchy. Posons $v_o = e_o$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |v_o - \alpha_n^o| < 1$

On a : $\exists\, p_1 \in \mathbb{N},\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \geq p_1$ et $n \geq p_1 \Rightarrow |\alpha_m^o - \alpha_m^o| < 10^{-2}$ donc $\forall\, m,\ m \geq p_1 \Rightarrow \alpha_{p_1}^o - 10^{-2} < \alpha_m^o < \alpha_{p_1}^o + 10^{-2}$, et à partir du rang p_1, tous les termes α_m^o différent de $\alpha_{p_1}^o$ d'au plus 10^{-2} : il existe donc une infininité de termes de la suite (α_m^o) qui ont même partie entière e_o et même premier chiffre après la virgule, soit e_1.

On considère alors la suite extraite de (α_m^o) formée de l'infinité de ses termes commençant par e_o , e_1 : soit (α_m^1) cette suite extraite.

(α_m^1) est une suite de Cauchy de décimaux car extraite de (α_m^o).

Posons $v_1 = e_o, e_1$ alors $\forall\, n,\ |v_1 - \alpha_n^1| < 10^{-1}$

On montre ainsi par récurrence qu'il existe dans (α_m^{p-1}) une infinité de termes ayant même partie entière et mêmes p premiers chiffres.

Soit (α_m^p) cette suite extraite. Si l'on pose $v_p = e_o, e_1 e_2 \ldots\ldots e_p$ alors

$$\forall\, n,\ |v_p - \alpha_n^p| < 10^{-p}$$

On a ainsi construit une suite $(v_n) \in \mathcal{D}$ qui définit un réel.

Soit s la suite $s = (\alpha_o^o, \alpha_1^1, \ldots\ldots, \alpha_p^p, \ldots\ldots)$

Quel que soit l'entier m, il existe un entier q tel que $10^{-q} < 10^{-m}$ alors $\forall\, p \in \mathbb{N},\ p > q \Rightarrow |v_p - \alpha_p^p| < 10^{-p} < 10^{-q} < 10^{-m}$ donc (v_n) est équivalente à (s_n). Or (s_n) est équivalente à (α_n) car (s_n) est extraite de la suite de

Cauchy (α_n) et donc à partir d'un rang, $|\alpha_n - \alpha_n^n| < 10^{-m}$.

En définitive, on a trouvé un développement décimal équivalent à la suite donnée donc cette suite a une limite dans R.

3. Opérations dans R

La justification des définitions données en IV 1 est alors claire : les représentants canoniques (x_n) et (y_n) des réels x et y sont des suites de Cauchy (proposition 4-2) ; les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n\, y_n)$ sont de Cauchy (proposition 4-3) et donc convergent dans R (théorème fondamental).

Proposition 4-4

L'ensemble R muni de l'addition et de la multiplication définis ci-dessus est un corps.

Preuve

a) On montre d'abord que la limite de la somme de deux suites de décimaux de Cauchy est la somme des limites de ces suites. En effet on sait déjà que la somme de deux suites de Cauchy est de Cauchy. Si $(u_n)\ \rho\ (d_n) \in r$ et $(v_n)\ \rho\ (d'_n) \in r'$ alors $\lim u_n = r$ et $\lim v_n = r'$.

Par définition de l'addition $r + r' = \lim(d_n + d'_n)$. Mais $(u_n + v_n)$ est équivalente à $d_n + d'_n$: en effet,

$|u_n + v_n - (d_n + d'_n)| \leq |u_n - d_n| + |v_n - d'_n|$ le premier membre sera inférieur à 10^{-m} dès que chaque terme du second sera inférieur à 10^{-m-1} ce qui est possible.

Ainsi $\lim(u_n + v_n) = \lim(d_n + d'_n)$ soit enfin :

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n.$$

Montrons alors l'associativité de l'addition :

$$\begin{aligned}(r + s) + t &= \lim(r_n + s_n) + \lim t_n \\ &= \lim[(r_n + s_n) + t_n] \\ &= \lim[r_n + (s_n + t_n)] \\ &= \lim r_n + \lim(s_n + t_n) = r + (s + t)\end{aligned}$$

La commutativité est évidente.

Le décimal 0 est élément neutre, car $r + o = \lim(r_n + o) = \lim r_n = r$

Opposé pour tout réel :

$$(r_n) \in \mathcal{D} \Rightarrow (- r_n) \in \mathcal{D} \text{ et } \lim r_n + \lim(-r_n) = \lim 0 = 0$$

On not $- r$ l'opposé de r.

b) On montre que la limite du produit de deux suites de Cauchy de décimaux est le produit des limites de ces suites.

En effet soit (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy de décimaux telles que $(u_n)\ \rho\ (d_n) \in r$ et $(v_n)\ \rho\ (d'_n) \in r'$

En majorant le second membre de

$$|u_n v_n - d_n d'_n| \leq |u_n - d_n| . |v_n| + |d_n| . |v_n - d'_n|$$

On montre que $(u_n v_n)\ \rho\ (d_n d'_n)$

Alors $\lim u_n v_n = \lim d_n d'_n = \lim d_n . \lim d'_n = \lim u_n . \lim v_n$

Montrons l'associativité de la multiplication

$$(r\ s)t = \lim r_n s_n . \lim t_n = \lim(r_n s_n).t_n = \lim r_n (s_n t_n)$$
$$= \lim r_n . \lim s_n t_n = r.(st)$$

La commutativité est évidente.

Le décimal 1 est élément neutre car $\lim r_n . 1 = \lim r_n = r$

donc $1 . r = r$

Enfin la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est évidente :

$$r(s + t) = \lim r_n . \lim (s_n + t_n)$$
$$= \lim r_n(s_n + t_n) = \lim(r_n s_n + r_n t_n) = \lim r_n s_n + \lim r_n t_n$$
$$= rs + rt$$

c) il reste à voir que tout réel non nul a un inverse pour la multiplication.

Il suffit de le voir pour un réel positif r. Si (r_n) est le représentant canonique de r, il existe un rang m tel que $r_m > 0$ et donc pour $n > m$,

$r_n \geq r_m > 0$. La suite (s_n) définie par $s_n = 1$ pour $n < m$ et $s_n = \frac{1}{r_n}$ pour $n \geq m$ est une suite de Cauchy : ceci se déduit facilement des égalités et inégalité suivantes

$$|s_n - s_{n'}| = \left|\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n'}}\right| = \left|\frac{r_{n'} - r_n}{r_n \cdot r_{n'}}\right| < \frac{|r_{n'} - r_n|}{r_m^2} .$$

valables pour $n' > n > m$.

La suite (s_n) définit alors un réel s (théorème fondamental) et $sr = \lim (s_n) \lim (r_n) = \lim (s_n r_n) = \lim 1 = 1$.

Donc r différent de 0 admet s pour inverse.

4. Compatibilité des opérations avec la relation d'ordre.

Elle résulte des résultats suivants sur les suites de décimaux qui se démontrent de façon analogue aux résultats de IV 3.

a) Si une suite (u_n) de décimaux a une limite u strictement inférieure au réel a, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à a.

b) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy de décimaux telles qu'à partir d'un certain rang on ait $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

5. Les opérations définies sur $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{D}$.

Montrons le pour la multiplication : soit x et y deux réels décimaux de représentants canoniques (x_n) et (y_n). Si r est un rang tel que pour $n \geq r$ $x_n = x_r$ et $y_n = y_r$, le produit de x et y défini dans $\mathbb{D}$ est égal à $x_r\, y_r$. Le produit xy défini dans $\mathbb{R}$ est la limite de la suite $(x_n\, y_n)$. Or cette suite est constante et égale à $x_r\, y_r$ pour $n \geq r$. Elle a donc pour limite $x_r\, y_r$.

Conclusion

On a ainsi fabriqué un ensemble de "nombres" $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{D}$ ainsi que les nouveaux nombres rencontrés qui ont motivé sa construction. Cet ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une structure de corps totalement ordonné qui prolonge celle de $\mathbb{D}$.

Enfin on peut montrer que toute suite de Cauchy de réels est équivalente à une suite de Cauchy de décimaux de sorte que le procédé d'extension ainsi utilisé est clos.

B. KITTEL

LA GEOMETRIE EN QUATRIEME

Les débuts de l'enseignement traditionnel de la Géométrie étaient empoisonnés par des considérations méthaphysiques sur ce qu'est un point, une droite, un plan, et la suite par la difficulté de distinguer ce qui est observation de l'espace physique de ce qui fait partie d'une théorie mathématique, en particulier de ce qu'il faut démontrer à partir de prémisses clairement posées. Le langage ensembliste acquis dans les classes précédentes va permettre de dépasser ce problème en distinguant nettement ce qui est expérimental de ce qui est théorie mathématique.

Le but de cet article est de montrer comment la géométrie peut-être enseignée dans l'esprit des nouveaux programmes dans une classe de quatrième, l'influence des discussions avec les expérimentateurs de l'Académie a été déterminante pour la rédaction de cet article et le plan suivi. Il est naturellement impossible de répondre objectivement à la question : "un tel enseignement est-il adapté à l'enfant de 13-14 ans ?" Dans deux ou trois ans les maîtres pourront donner un début de réponse, mais actuellement les réponses ne peuvent être qu'affectives.

De nombreuses personnes estiment que l'enseignement de la Mathématique doit être posée en fonction des futurs utilisateurs (souvent traditionnels : physiciens, mécaniciens, ingénieurs, mathématiciens....) ; cela est peut-être vrai dans l'enseignement supérieur (département de Mathématiques, Classes préparatoires, Grandes Ecoles....) mais pas dans le premier cycle de l'enseignement secondaire où il doit surtout contribuer à la formation générale de l'enfant par l'apprentissage d'un langage précis, d'une méthode d'analyse des problèmes et d'un mode de raisonnement.

Nous allons donc montrer comment la méthode axiomatique permet de mathématiser une situation concrète. Au départ il y a des objets physiques (feuilles de papier, tableau noir, traits tracés à la règle....) et des manipulations d'objets physiques (règles, compas, équerre...) ; nous observons des propriétés et nous en privilégions certains. Nous considérons alors un ensemble dont les éléments vérifient les propriétés privilégiées énoncées en langage ensembliste (ce sont les axiomes ou théorèmes admis) puis nous déduisons alors de ces axiomes le maximum de propriétés vérifiées par les éléments de cet ensemble (ce sont les théorèmes démontrés).

Nous ne nous préoccupons pas de la "nature" des éléments et de l'ensemble, mais nous illustrerons ces propriétés par des dessins comme cela a été fait en sixième et en cinquième. Le dessin illustre des propriétés, permet de les retenir mais ne les justifie pas.

Il y a évidemment un arbitraire dans le choix des axiomes (la notion de vérité mathématique est relative) et le programme de quatrième n'impose pas l'axiomatique, nous en proposons une ici.

Dans l'enseignement traditionnel de la géométrie, fondé sur l'axiomatique d'Euclide Hilbert, toutes les notions étaient indispensables au départ: longueur, angle, perpendicularité, parallélisme... et les axiomes fort nombreux ; de plus la plupart d'entre eux n'étaient pas explicités ; il était donc difficile de savoir si une propriété était admise ou à démontrer. Par contre nous suggérons ici d'introduire les axiomes les uns après les autres et de les exploiter au maximum à chaque étape. Il est aussi plus facile d'expliquer ce qu'est un raisonnement déductif lorsque peu d'axiomes entrent en jeu.

Dans l'exposé qui va suivre les axiomes sont choisis suffisamment forts pour rendre les démonstrations plus faciles. La première partie, consacrée aux axiomes d'incidence, permet d'utiliser les notions et le langage introduits dans les classes précédentes et peut donc être traitée dès le début de la quatrième. Par contre les autres parties, droite et plan, doivent être précédées de l'introduction de l'ensemble des nombres réels R ; c'est pourquoi il est utile de ne pas intégrer l'étude des axiomes d'incidence dans celle du plan.

Remarquons pour terminer que les nouveaux programmes sont axés essentiellement sur la construction des nombres et le calcul algébrique, utilisés par la suite en géométrie, alors que les anciens programmes étaient axés sur la géométrie qui permettait d'introduire les nombres irrationnels (segments incommensurables ....) ; la géométrie est donc la partie la moins importante du programme de quatrième.

1 . Les axiomes d'incidence

1.1 Introduction des axiomes

L'élève de quatrième a utilisé dès l'enseignement élémentaire les mots, points, ligne droite, lignes droites parallèles, plan ; il a toujours admis les faits suivants justifiés par le tracé au crayon à la règle et à l'équerre, le plan étant la feuille de papier ou le tableau noir.

a) Par deux points passe une ligne droite et une seule

b) Par un point extérieur à une ligne droite passe une et une seule ligne droite parallèle à la précédente.

L'élève remarquera aussi les faits suivants encore plus évidents.

c) Il existe des lignes droites

d) Une ligne droite a beaucoup de points (plus de deux nous suffiront)

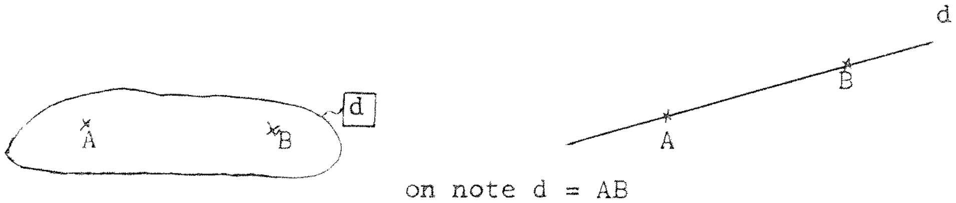
e) En dehors de chaque ligne droite on peut trouver un point.

1.2 Mathématisation de la situation

Un ensemble P est appelé un plan mathématique s'il existe un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de P vérifiant les propriétés suivantes :

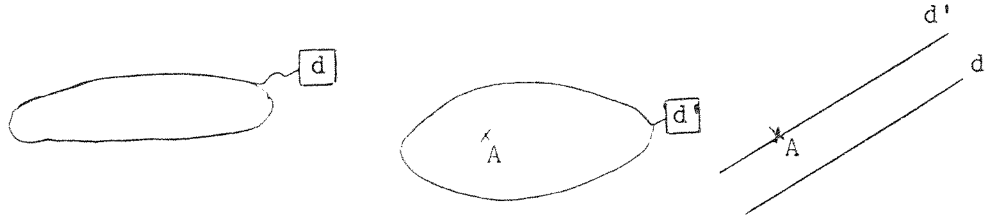
I_1 Il existe un élément dans $\mathcal{D}$ et aucun élément de $\mathcal{D}$ n'est égal à P

I_2 Si $d \in \mathcal{D}$ alors d contient au moins deux points distincts et si $A \in P$ et $B \in P$ sont distincts alors il existe un élément de $\mathcal{D}$ et un seul le contenant $\{A, B\}$



on note $d = AB$

I_3 Si $d \in \mathcal{D}$ et $A \in P$ avec $A \notin d$ alors il existe un et un seul élément $d' \in \mathcal{D}$ tel que $A \in d'$ et $d \cap d' = \emptyset$



Habituellement les éléments de P sont appelés points et notés par des lettres majuscules A,B.... ; ceux de $\mathcal{D}$ sont appelés droites et notés par des lettres minuscules d, d'...

Les axiomes peuvent être illustrés aussi bien par des diagrammes de Venn que par des lignes droites tracées à la règle (de telles lignes deviennent d'ailleurs au microscope des diagrammes de Venn !)

Avant d'introduire cette terminologie on peut montrer que $P = \{A, B, C, E\}$ avec $\mathcal{D} = \{ \{A,B\},\{A,C\},\{A,E\},\{B,C\},\{B,E\},\{C,E\} \}$ est un plan mathématique. Il est également possible de découvrir un plan mathématique à neuf points.

1.3 Exploitation du modèle

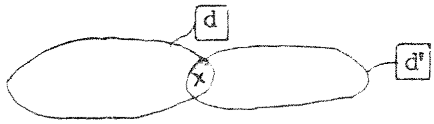
Nous nous plaçons dans un plan mathématique P, l'ensemble des droites étant désigné par $\mathcal{D}$.

1.31 Etude du parallélisme

Pour des droites notées d et d' les trois situations suivantes sont possibles :

- $d = d'$ 

- $d \cap d' = \emptyset$ 

- $d \cap d'$ est un singleton 

Dans ce dernier cas les deux droites sont dites concourantes.

Définition : On dit qu'une droite d est parallèle à une droite d' si l'intersection $d \cap d'$ n'est pas un singleton.

En particulier une droite est parallèle à elle-même.

Nous notons $d \parallel d'$ pour "d parallèle à d' ".

Théorème : Le parallélisme est une relation d'équivalence.

On peut vérifier ce théorème dans le cas du plan mathématique à quatre points ou à neuf points. Démontrer un théorème pour des ensembles finis revient à faire un certain nombre de vérification ; mais dans le cas général les démonstrations devront être formelles et il est nécessaire d'utiliser des lettres -appelées variables- qui peuvent désigner un élément quelconque de l'ensemble domaine de variation des lettres.

La réflexivité et la symétrie sont évidentes ; démontrons la transitivité. Pour cela remarquons d'abord que (I_3) s'énonce de manière équivalente :

Si $d \in \mathcal{D}$ et $A \in P$ alors il existe une et seule droite d' contenant A et parallèle à d.

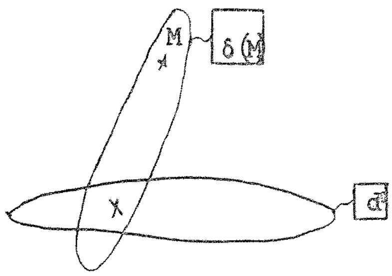
Nous voulons démontrer que si d est parallèle à d' et d' à d" alors d est également parallèle à d".

Si $d \cap d'' = \emptyset$ nous avons le résultat voulu ; si $d \cap d'' \neq \emptyset$ désignons par M un point de $d \cap d''$. La droite d vérifie :
$d \parallel d'$ et $M \in d$; la droite d" vérifie : $d'' \parallel d'$ et $M \in d''$; d'après l'unicité de la droite contenant un point donné et parallèle à une droite donnée nous avons $d = d'$.

Nous appellerons direction d'une droite la classe d'équivalence de cette droite ; nous noterons les direction par les lettres δ, δ', δ''.... Si $M \in P$ et si δ est une direction nous noterons $\delta(M)$ la droite appartenant à δ contenant le point M.

1.32 Etude de la projection parallèle

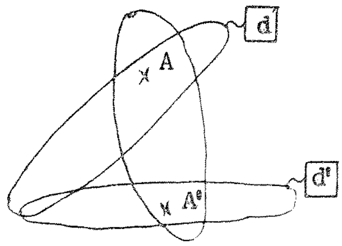
Cette étude est une simple application des propriétés de l'intersection. Soit δ une direction et d' une droite n'appartenant pas à δ, alors



$\delta(M) \cap d'$ est un point de d' ; nous définissons ainsi une application de P sur d' appelée projection parallèle à δ sur d'.

Cette application est surjective, non injective et sa restriction à d' est l'identité.

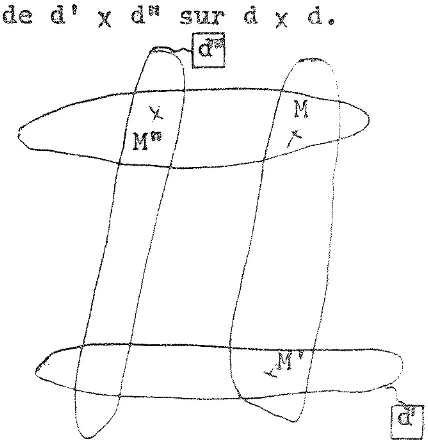
Théorème : Deux droites du plan sont équipotentes



Prenons deux droites distinctes d et d' et deux points distincts A et A' avec $A \in d$ et $A' \in d'$; la restriction à d de la projection parallèle à la direction de la droite $A A'$ sur d' est une bijection.

Théorème : Si d est une droite du plan P alors $\text{Card } P = (\text{Card } d)^2$

Rappelons que Card P désigne la cardinal d l'ensemble P ; pour démontrer le théorème nous devons trouver une bijection de P sur $d \times d$ ou encore une bijective de P sur $d' \times d''$ où d' et d'' sont deux droites concourantes car d'après le théorème précédent il existe une bijection de d' sur d et de d'' sur d donc de $d' \times d''$ sur $d \times d$.

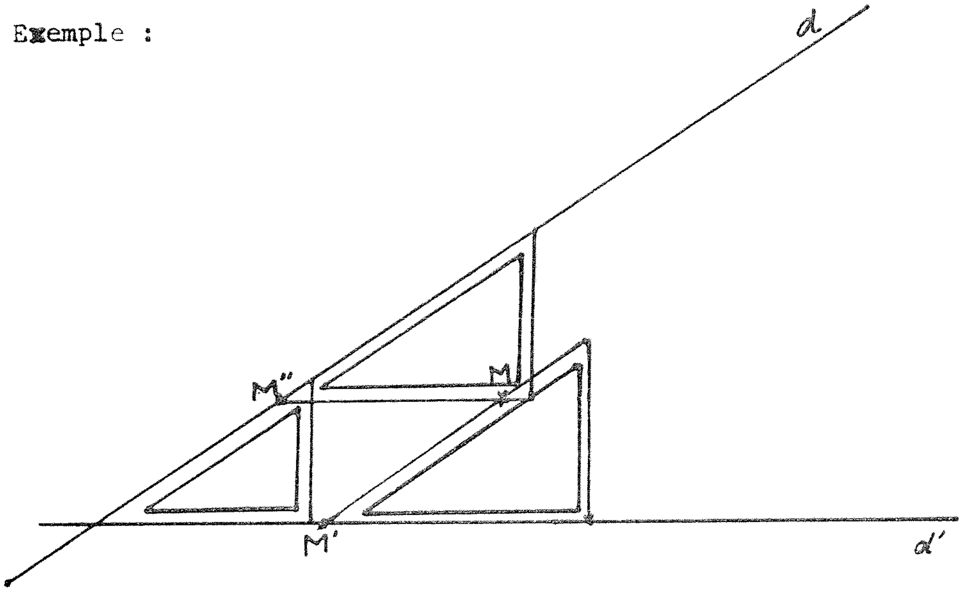


Notons δ' et δ'' les directions des droites d' et d''. L'application qui à $M \in P$ associe le couple (M',M'') $(M',M'') \in d' \times d''$, où M' est la projection de M sur d' parallèlement à la direction de d'' et M'' la projection de M sur d'' parallèlement à la direction de d', est une bijection.

Ce résultat est une introduction à la géométrie analytique, en effet nous associons à tout point de plan un couple de points appartenant à des droites (les coordonnées du point). Lorsque les points d'une droite pourront être caractérisés par des nombres nous aurons la géométrie analytique.

Ceux qui sont choqués par le diagramme de Venn peuvent faire des figures à l'aide de la règle et de l'équerre pour illustrer ces théorèmes :

Exemple :



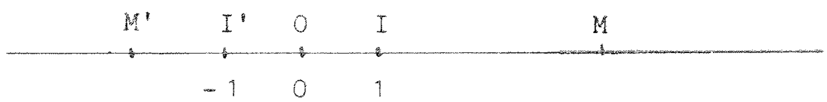
2 . La droite

Nous avons vu que toutes les droites d'un plan mathématique sont équipotentes. Nous allons préciser les propriétés qui doivent vérifier les droites d'un plan mathématique décrivant la situation physique.

2.1 Introduction expérimentale

Nous avons fait des tracés à la règle non graduée pour avoir une ligne droite, nous allons utiliser maintenant une règle graduée (par exemple un double décimètre).

Traçons une ligne droite avec une règle graduée et choisissons un point origine O sur cette droite. Nous faisons coïncider ce point avec la gradua-



tion 0 de la règle ; nous avons deux dispositions pour la règle en mettant la graduation d'un côté ou de l'autre du point 0. Nous choisissons une des deux possibilités et notons I le point coïncidant avec le 1 de la graduation en retournant la règle nous notons I' le point coïncidant avec le 1 de la graduation, pour traduire ce retournement nous noterons - 1.

Soit M un point de la ligne droite du même côté de 0 que I, la graduation nous permet d'associer au point M un encadrement par des décimaux de D_1^+ sous ensemble des décimaux positifs ayant un chiffre après la virgule (ici 3,9 et 4,0). A un point M' de l'autre côté de 0 nous associerons un encadrement par deux décimaux de D_1^{-1} (ici -2,2 et -2,3).

Nous pouvons faire trois remarques.

a) en choisissant l'autre possibilité pour 1, nous transformerions l'encadrement (x,x') d'un point M en l'encadrement (-x', -x).

b) en choisissant un autre point comme origine, il n'y a pas de formule de passage toujours valable.

Exemple 1

Si nous choisissons comme nouvelle origine le point O' correspondant exactement au nombre 2 l'encadrement (x,x') d'un point M devient (x - 2, x' - 2), en conservant le sens.

Si nous prenons O' correspondant à l'encadrement (2,3 ; 2,4) comme nouvelle origine, nous obtenons en conservant le sens le tableau suivant :

Point	M_1	M_2	M_3
Ancien encadrement	(1,5 ; 1,6)	(3,2 ; 3,3)	(4,4 ; 4,5)
Nouvel encadrement	(-0,9 ; -0,8)	(0,9 ; 1)	(2 ; 2,1)

L'écart entre les encadrements est de 2,3 ou de 2,4 suivant la position des points par rapport aux milieux des segments définissant la graduation.

c) Si les possibilités physiques nous permettaient d'obtenir des graduations en dixième de millimètre, en centième de millimètre..... nous aurions ainsi pour chaque point des encadrements de plus en plus fins, or nous avons défini un nombre réel comme une telle suite d'encadrements.

d) Nous aurions pu faire cette étude avec une graduation fabriquée par l'élève et non centimétrique puis remarquer la correspondance entre les encadrements suivant les unités de mesure ; cela est en général fort délicat sauf dans le cas où la nouvelle origine est choisie sur une graduation et si l'ancienne unité est multiple de la nouvelle alors si un point M correspondait à la graduation x, il correspondra à une graduation ax + b indépendante de x.

2.2 Mathématisation de la situation

Si nous nous fixons un point O et un sens nous mathématisons la graduation la ligne droite par une bijection d'une droite mathématique D d'un plan mathématique sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$; soit $f : D \to \mathbb{R}$

Nous appellerons droite repérée la donnée d'un ensemble O et d'une bijection $f : D \to \mathbb{R}$

D'autres bijections décrivent la situation physique ; le changement de sens donne une nouvelle bijection $g : D \to \mathbb{R}$ définie par $g(M) = - f(M)$; si nous changeons d'origine nous sommes dans la situation de l'exemple 1 et nous avons une nouvelle bijection $h : D \to \mathbb{R}$ avec $h(M) = f(M) - b$ avec $b = f(O')$, le point O' étant la nouvelle origine.

Nous définirons donc :

Une droite euclidienne est la donné d'un ensemble D et d'un ensemble $\mathcal{F}$ de bijections de D sur $\mathbb{R}$ tel que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des bijections de D sur $\mathbb{R}$ de la forme $\varepsilon f + b$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $b \in \mathbb{R}$

Changement d'unité : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une bijection ; le couple (O,I) avec $f(O) = 0$ et $f(I) = 1$ s'appelle repère correspondant à f. Si (A,B) est un autre couple de points distincts de D, nous traduisons l'expérience physique de 2.1 d) par la donnée de la bijection $g : D \to \mathbb{R}$ telle que $g(A) = 0$, $g(B) = 1$ et $g(M) = \alpha f(M) + \beta$ pour tout point M de D avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Cette bijection est bien unique car si $f(A) = a$ et $f(B) = b$ nous avons $g(M) = \frac{1}{b-a}(f(M) - a)$, c'est la formule classique de changement de repère. Nous définissons alors :

Une droite affine est la donnée d'un ensemble D et d'un ensemble $\mathcal{F}$ de bijections de D sur $\mathbb{R}$ telle que si $f \in \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est exactement l'ensemble des bijections de D sur $\mathbb{R}$ de la forme $a\, f + b$ avec $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

2.3 Exploitation du modèle

C'est la notion de droite affine qui traduit toute la richesse de la situation physique, mais elle n'est pas simple. Il devrait être possible en classe de quatrième de travailler dans un premier temps avec la droite repérée et montrer dans un deuxième temps si le niveau de la classe le permet que les résultats ne dépendent pas de la bijection choisie dans la famille $\mathcal{F}$, c'est à dire si l'on remplace la bijection f par af + b. Le passage de la droite repérée à la droite affine par la droite euclidienne peut être utile pour la mathématisation mais inutile dans l'exploitation du modèle.

2.31 Bipoint, "mesure algébrique".

Soit (D, f) une droite repérée. Si $x = f(M)$, x s'appelle l'abcisse de M et M l'image de x. Nous appellerons bipoint de D un élément (A,B) de D x D. Nous définissons la mesure algébrique du bipoint (A,B) de la droite repérée comme le nombre réel $f(B) - f(A)$ et on note $\overline{AB} = f(B) - f(A)$, la notation $\overline{AB}$ est abusive car elle n'indique pas que ce nombre dépend de f, mais elle est justifiée par le théorème suivant dont la démonstration est immédiate.

Théorème :

Si $f(B) - f(A) = f(D) - f(C)$ alors si a est un nombre réel distinct de zéro et b un nombre réel quelconque nous avons aussi $(af(B) + b) - (af(A) + b) = (af(D) + b) - (af(C) + b)$ et réciproquement.

L'égalité $\overline{AB} = \overline{CD}$ est donc bien une propriété intrinsèque c'est à dire indépendante de la bijection choisie dans la famille $\mathcal{F}$ de bijections définissant une droite affine. Il en est de même de la relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

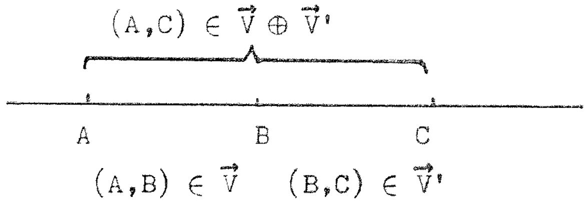
2.32 Vecteurs

Nous définissons maintenant une relation d'équivalence dans l'ensemble des bipoints par :

$(A,B)\,\mathcal{R}\,(C,D)$ si et seulement si $\overline{AB} = \overline{CD}$

La classe d'équivalence du bipoint (A,B) s'appelle vecteur et se note $\vec{AB}$; nous noterons $\vec{D}$ l'ensemble des vecteurs. Si $\vec{V}$ est un vecteur et A un point de D alors il existe un point B et un seul tel que $(A,B) \in \vec{V}$;

Nous définissons une application de $\vec{D} \times \vec{D}$ dans $\vec{D}$ par $\vec{V} \oplus \vec{V}' = \vec{V}''$ avec $\vec{V}'' = \vec{AC}$ si $(A,D) \in \vec{V}$ et $(B,C) \in \vec{V}'$;



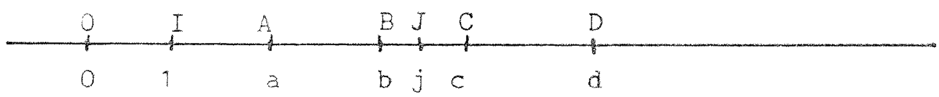
nous pouvous donc écrire par définition $\vec{AB} \oplus \vec{BC} = \vec{AC}$; il faut naturellement vérifier que le vecteur $\vec{V}''$ ne dépend pas du point A choisi.

Nous pouvons définir de même une application de $R \times \vec{D}$ dans $\vec{D}$ par $x.\,\vec{V} = \vec{V}'$avec $\vec{V}' = \vec{AC}$ si $(A,B) \in \vec{V}$ et $\overline{AC} = x\,\overline{AB}$ (ce dernier produit est naturellement un produit de nombres réels).

Il est possible de montrer que $\vec{D}$ est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel (cf. 3.33) ; nous ne le ferons ici que dans le cas du plan.

2.33 Milieu, barycentre, segment.

Soit (A,B) un bipoint, il existe alors un point J et un seul tel que $\overline{JA} + \overline{JB} = 0$; ce point s'appelle le milieu du bipoint (A,B). On vérifie immédiatement que $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si (A,D) et (B,C) ont même milieu.



L'abscisse du milieu de (A,D) est $\frac{a+d}{2}$, celle de (B,C) est $\frac{b+c}{2}$; les deux milieux sont donc confondus si et seulement si $b - a = d - c$.

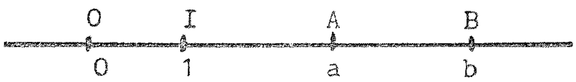
Plus généralement soit (A,B) un bipoint de D et λ un nombre réel. Dans un repère donné considérons le point d'abscisse $x = \lambda\, a + (1-\lambda)b$; si nous changeons de repère c'est à dire si $a' = \alpha\, a + \beta$ alors $x' = \lambda a' + (1-\lambda)\, b' = \alpha(\lambda a + (1-\lambda)b) + \beta = \alpha\, x + \beta$.

Le point G défini sur la droite repérée par $\overline{OG} = \lambda\, \overline{OA} + (1-\lambda)\, \overline{OB}$ ou encore $\lambda\, \overline{GA} + (1-\lambda)\, \overline{GB} = 0$ est défini sur la droite affine, car indépendant du repère choisi, on l'appelle <u>barycentre</u> du triplet (A,B,λ)

Poser (A,B) fixée l'application de $\mathbb{R}$ dans D qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe le barycentre de (A,B,λ) est une bijection et on appelle <u>segment d'extrémités A et B</u>, noté $[AB]$ l'image de l'intervalle $[0,1]$.

2.34 <u>Droite orientée, ordre sur la droite</u>

Si l'on se contente de faire la droite repérée, ce paragraphe est inutile car on obtient une relation d'ordre sur la droite en transportant la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ par la bijection définissant la droite repérée.



$A \leq B$ si et seulement si $a \leq b$

Pour définir un ordre sur la droite affine, il faut d'abord montrer que la droite est orientable c'est à dire faire une partition en deux classes d'équivalence des repères de la droite affine. On obtient cette partition $(O,I)\ \mathcal{R}\ (O',I')$ si et seulement si la formule de changement de repère est donnée par $f'(M) = a\, f(M) + b$ avec $a > 0$. Orienter la droite c'est choisir une classe d'équivalence.

<u>Définition</u> : Une droite affine orientée est un couple $(D,\mathcal{F}')$ où $\mathcal{F}'$ est une classe de l'ensemble des bijections $\mathcal{F}$ définissant la droite affine $(D,\mathcal{F})$.

La relation dans D "$A \leq B$" si et seulement si $f(A) \leq f(B)$ ne dépend pas de la bijection f choisie dans la classe $\mathcal{F}'$ et c'est une relation d'ordre. On peut donc munir la droite affine de deux relations d'ordre.

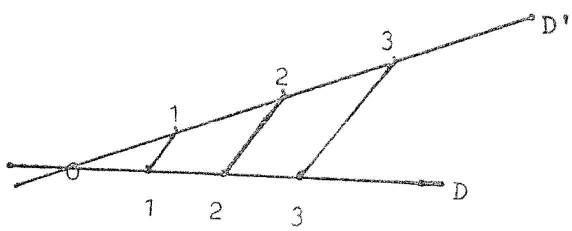
Remarque : Sur la droite affine non orientée on peut définir la relation "entre" par "M entre A et B" si et seulement si $M \in [AB]$; mais pour définir un ordre il faut préalablement orienter la droite

3. Le plan

3.1 Introduction

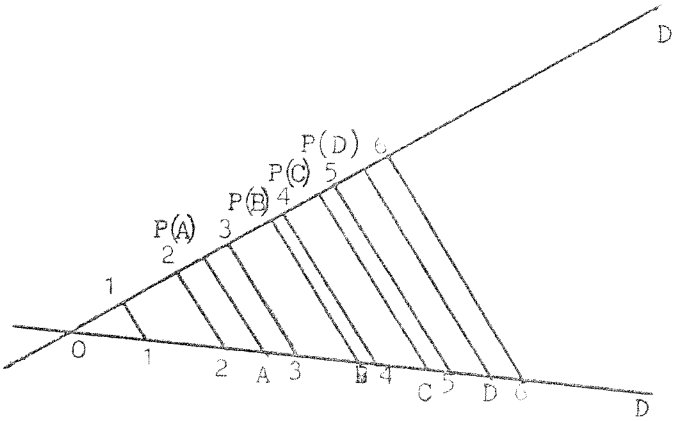
Dans le paragraphe précédent nous avons étudié les droites d'un plan pour elles-mêmes ; nous allons maintenant "comparer" les graduations des droites.

Prenons deux lignes droites concourantes en un point O pris comme origine sur les deux droites et une graduation sur chaque droite.



Nous remarquerons que les lignes droites joignent les points de même graduation sont parallèles.

Réciproquement si nous avons une graduation sur D nous pouvons construire une graduation sur D' par le tracé de parallèles de direction δ. Soit p la projection parallèle à δ, nous pouvons constater qu'il y a "presque" égalité pour les encadrements correspondants aux nombres $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ et $\frac{\overline{p(A)\,p(B)}}{\overline{p(C)\,p(D)}}$



3.2 Mathématisation de la situation

A partir de maintenant nous ne considérons que des plans mathématiques P, appelés alors affines, vérifiant :

(P_1) Toutes les droites sont munies d'une structure de droite affine.

(P_2) Si D et D' sont deux droites, p une projection parallèle de D sur D' et A, B, C, D des points de D vérifiant $\overline{AB} = b\,\overline{CD}$ alors $\overline{p(A)p(B)} = b\,\overline{p(C)p(D)}$ (Thalès).

On vérifie alors que la propriété physique, les droites joignant les points de même abscisse sont parallèles, est une conséquence de ces axiomes.

3.3 Exploitation du modèle

On récupère ici le début de la géométrie traditionnelle de troisième : Application de théorème de Thalès en triangle (triplet de points non alignés), au trapèze (quadruplet (A,B,C,D) tel que les droites AB et CD soient parallèles) et "réciproque" ; projection du milieu d'un bipoint ; symétrie centrale : l'image d'une droite et une droite parallèle...

3.31 Etude du parallélogramme

On appelle parallélogramme un quadruplet (A,B,C,D) tel que les bipoints (A,C) et (B,D) aient même milieu.

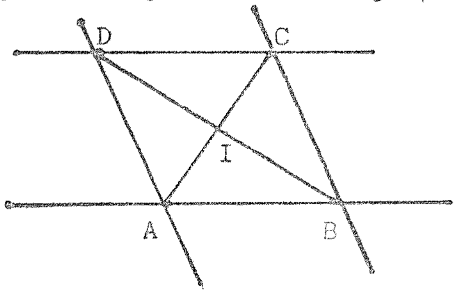
La symétrie centrale par rapport au milieu commun conserve le parallélogramme ce qui a pour conséquence que les droites, lorsqu'elles existent, AB et CD d'une part, AD et BC d'autre part sont parallèles.

Il y a différents types de parallélogrammes:

parallélogrammes dégénérés :

A = B = C = D   A = B   C = D   A   D   B   C

parallélogrammes non dégénérés : les droites AB et DC d'une part, AD et BC d'autre part sont distinctes donc parallèles. On peut d'ailleurs démontrer la réciproque.

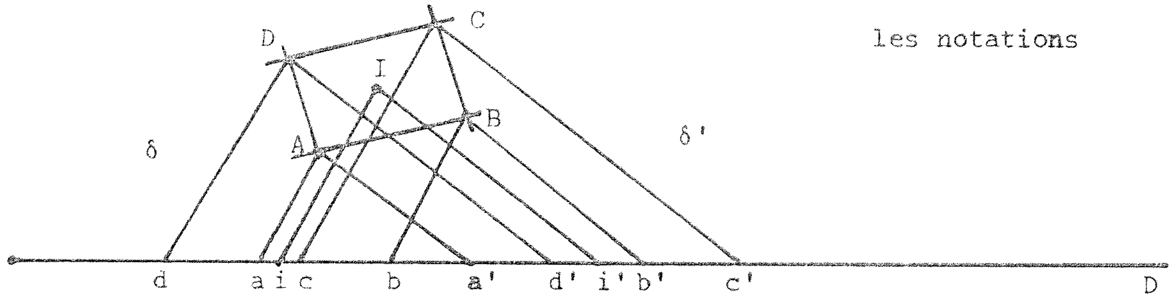


Enonçons maintenant le théorème fondamental sur le parallélogramme.

Théorème : Un parallélogramme se projette suivant un parallélogramme ; de plus si un quadruplet se projette par les projections distinctes à chaque fois sur un parallélogramme, alors ce quadruplet est un parallélogramme.

La partie directe résulte de la conservation du milieu par projection. Démontrons la deuxième partie en remarquant (Thalès) qu'on peut faire les deux projections sur une même droite.

Cette figure rassemble toutes les notations



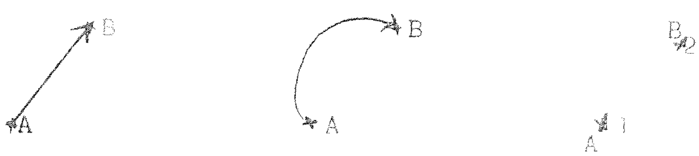
Le milieu de (A,C) appartient à $\delta'(i')$ où i' est le milieu de (a',c') et à $\delta(i)$ où i est le milieu de (a,c) c'est donc $\delta(i) \cap \delta'(i')$ et il en est de même du milieu de (B,D).

3.32 Vecteurs du Plan

Théorème : La relation entre bipoints du plan, appelée équipollence : "(A,B) équipollent à (C,D) si et seulement si (A,B,D,C) est un parallélogramme" est une relation d'équivalence.

La réflexivité et la symétrie sont immédiatement vérifiées. A l'aide du théorème 3.31, ne se ramène à des parallélogrammes dégénérés pour lesquels la démonstration est faite en 2.32 et 2.33. On appelle vecteur, noté $\vec{AB}$, la classe d'équivalence du bipoint (A,B) et on note $\vec{P}$ l'ensemble des vecteurs.

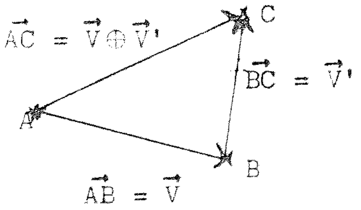
Il est impossible de dessiner sur une feuille de papier (illustration de l'espace à deux dimensions) un bipoint (élément de $P \times P$, espace de dimension quatre) ; il faut donc marquer les deux points en indiquant que A est le premier et B le second, exemples ;



Somme de deux vecteurs

Par définition du parallélogramme si $\vec{V} \in \vec{P}$ et $A \in P$, il existe un et un seul point B de P tel que $(A,B) \in \vec{V}$.

Comme dans le cas de la droite (2.32) nous pouvons définir par une construction indépendante du point A une application de $\vec{P} \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$ par $\vec{V} \oplus \vec{V'} = \vec{V'}$ avec $\vec{V''} = \vec{AC}$ si $(A,B) \in \vec{V}$ et $(B,C) \in \vec{V'}$.



Nous avons par définition la formule de Chasles : $\vec{AB} \oplus \vec{BC} = \vec{AC}$

L'associativité et la commutativité de la loi $\oplus$ résultent de la construction ; le vecteur, noté $\vec{0}$, dont un représentant est (A,A) vérifie $\vec{V} \oplus \vec{0} = \vec{V}$ c'est donc un élément neutre et tout vecteur $\vec{V}$ a un symétrique $\vec{V'} = \vec{BA}$ si $\vec{V} = \vec{AB}$. L'ensemble $\vec{P}$ est donc muni d'une structure de groupe.

<u>Multiplication d'un vecteur par un réel</u>

Comme dans le cas de la droite (2.32) nous pouvons définir une application de $R \times \vec{P}$ dans $\vec{P}$, avec $\vec{V'} = x.\vec{V}$, où $\vec{V'} = \vec{AC}$ avec $\overline{AC} = x\ \overline{AB}$ si $\vec{V} = \vec{AB}$.

Les propriétés suivantes résultent d'un calcul algébrique sur la droite :

$$(x + y).\vec{V} = (x \cdot \vec{V}) \oplus (y \cdot \vec{V})$$
$$x.(y \cdot \vec{V}) = (xy).\vec{V}$$
$$1 \cdot \vec{V} = \vec{V}$$

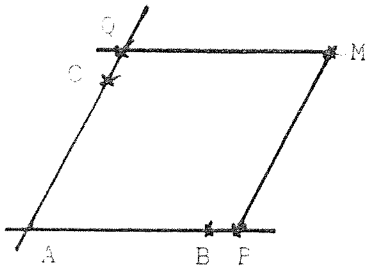
La dernière propriété résulte du théorème de Thalès.

$$x.(\vec{V} \oplus \vec{V'}) = (x \cdot \vec{V}) \oplus (x \cdot \vec{V'})$$

3.34 <u>Repère affine</u>

<u>Théorème</u> : <u>Si (A,B,C) est un triangle et M un point du plan, alors il existe un couple unique (x,y) de nombres réels tels que $\vec{AM} = (x \cdot \vec{AB}) \oplus (y \cdot \vec{AC})$.</u>

Le triangle (A,B,C) s'appelle repère affine, les nombres x et y sont les coordonnées de point M dans ce repère.



Projettons M en P sur AB parallèlement à AC et en Q sur AC parallèlement à AB. Alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} \oplus \overrightarrow{AQ}$ et si x désigne l'abscisse de P sur la droite AB.

dans le repère (A,B) et y l'abscisse de Q sur la droite AC dans le repère (A,C) on a $\overrightarrow{AP} = x.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = y.\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC})$.

Démontrons l'unicité ; supposons $\overrightarrow{AM} = (x.\overrightarrow{AB}) \oplus (y.\overrightarrow{AC}) = (x'.\overrightarrow{AB}) \oplus (y'.\overrightarrow{AC})$ avec $x \neq x'$; nous aurions alors $\overrightarrow{AB} = \frac{y' - y}{x - x'}\overrightarrow{AC}$ donc A,B,C alignés ce qui est absurde donc x = x', de même on démontre l'égalité y = y'.

P. BUISSON

En guise de postface.

En tant que lecteur privilégié de l'ouvert, j'ai eu la possibilité d'apprendre à construire le corps des réels à partir des décimaux grâce à l'exposé de Monsieur KITTEL; l'article de Monsieur BUISSO m'a initié à la géométrie affine. J'ai lu avec intérêt les deux articles proposés puis j'ai pensé à mes élèves de cinquième, trente petits poussins délurés mais parfois encore bien naïfs, qui vont être amenés à déduire d'axiomes judicieusement choisis, suffisamment forts, des propriétés non triviales.

J'ai pensé à mes collègues aussi, ceux qui ont depuis de nombreuses années la charge de classes de quatrième, ceux qui avaient appris de longue date à pratiquer un enseignement vivant dans lequel maîtres et élèves, pris par le jeu s'enthousiasmaient en reconnaissant, dans une figure, deux triangles égaux.

J'ai pensé aux réactions de ces collègues à la lecture de ces articles, les réactions "ad hominem" (On voit bien que les gens de l'I.R.E.M. n'ont pas l'habitude des enfants de 12-13 ans), les réactions de fatigue, de"laisser faire" (j'ai jusqu'à présent bien enseigné en quatrième, je ne vois pas pourquoi changer mon enseignement) ou, ce qui est peut-être plus grave, une interprétation tendancieuse du programme visant à habiller d'un verbiage moderne le programme traditionnel de la géométrie de quatrième (Il me suffit de mettre partout le qualificatif affine pour transformer mon cours de géométrie).

Les problèmes posés par ce nouvel enseignement ne sont pas simples, <u>il faut arriver à obtenir un enseignement vivant respectant les nouveaux programmes dans la lettre et dans l'esprit.</u>

Cet objectif ambitieux, qu'il est vital d'atteindre, nécessite la contribution de tous. L'ouvert, organe d'information et d'échange, peut mettre en commun les efforts de chacun.

Il faut, dans cette optique, que tout lecteur de l'ouvert fasse part aux autres lecteurs de l'ouvert, de ses idées, de son expérience, que tout lecteur de l'ouvert soit, un jour ou l'autre, un rédacteur.

Je sais qu'il est difficile de prendre la plume mais je crois qu'il est indispensable de le faire. Tout collègue touché de près ou de loin par l'enseignement en quatrième doit nous aider tous à obtenir cet enseignement vivant.

Un professeur qui enseignait les parallélogrammes en classe de quatrième avait, au cours de sa formation initiale, acquis une solide formation géométrique, seule la bonne connaissance du niveau $N + w$ permet d'enseigner au niveau N de façon correcte.

Ce qui était vrai jadis est encore vrai de nos jours, je ne crois pas qu'il soit possible d'enseigner correctement les nouveaux programmes de quatrième sans une solide formation initiale et permanente.

Ce numéro 3 de l'ouvert ne vise qu'à apporter quelques bribes de cette formation initiale indispensable. Il n'a jamais été question de construire le corps des réels dans l'enseignement du premier cycle, il est par contre bon d'avoir réfléchi à cette difficile question avant d'aborder, avec les élèves de quatrième, la pratique des décimaux.

Ce numéro, qui ne contient que peu de "trucs de métier" n'est en quelque sorte qu'une invitation à approfondir des connaissances utiles à la bonne pratique des nouveaux programmes.

Dans le numéro quatre de l'ouvert paraîtront les premières tentatives pédagogiques d'application des nouveaux programmes.

J. SAMSON