ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

REGIONALE DE STRASBOURG

7, rue René Descartes

STRASBOURG

N° 2

MARS 1971

L'OUVERT

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE

DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES

DE L'ACADEMIE

Responsable de la publication : R. ISS 12, rue des Gardes-Chasses

STRASBOURG-ROBERTSAU

Année 1970/71

Mars 1971

O U V E R T

N° II

Avant Propos

Ce numéro deux de "L'OUVERT" paraît assez tard.

Il y a à cela plusieurs raisons :

- le travail quotidien absorbe bien souvent complètement les rédacteurs qui ont beaucoup de difficultés à écrire un article entre la correction de paquets de copies et la préparation de leçons nouvelles pour eux.
- Le sujet choisi a demandé un sérieux effort de recherche, en effet : ce numéro est entièrement consacré à l'étude de la trigonométrie en classe de première.

Je prie nos collègues du premier cycle de nous excuser d'avoir traité un tel sujet, assez limité, qui ne les concerne pas directement, mais il nous semblait indispensable, de proposer un document, que nous espérons exploitable, à tous les collègues qui seront très bientôt amenés à enseigner ces difficiles notions.

Que nos collègues du premier cycle nous pardonnent et qu'ils se rassurent : le troisième numéro de l'OUVERT que nous préparons actuellement leur sera entièrement destiné.

Vous savez qu'il existe de nombreux projets de programmes destinés à la classe de quatrième, vous savez également que ces projets sont de nombreuses discussions plus ou moins passionnées, certains termes utilisés dans les divers projets de programmes ont pu, pour des raisons diverses provoquer certaines inquiétudes.

Il n'est pas de notre ressort de proposer des programmes, et de plus le "devin de service" de notre équipe de rédaction refuse à s'engager quant aux décisions qui seront prises par la commission des programmes.

Il ne nous reste qu'à envisager les projets de programmes que nous connaissons et à tenter de les illustrer tant sur le plan mathématique que sur le plan pédagogique.

Le numéro 3 de l'OUVERT sera donc consacré à l'étude des divers projets de programmes en classe de quatrième.

Le numéro 2 de l'ouvert sera envoyé gratuitement aux membres de l'A.P.M. de la régionale de Strasbourg, aux divers établissements d'enseignement et aux collègues en ayant fait la demande à la rédaction de l'OUVERT.

J'ai reçu un certain nombre de lettres sympathiques de collègues intéressés par notre travail qu'il me soit permis ici de les remercier.

Les conditions d'abonnement seront fixées lors de la parution du troisième numéro. Que les collègues nous ayant écrit pour souscrire à un abonnement ne renouvellent pas leur démarche, leurs numéros 3 et 2 de l'OUVERT leur seront envoyés.

Toute suggestion, toute correspondance concernant l'OUVERT peut être adressée à :

J. SAMSON 9, rue du Cheval 67 - STRASBOURG-NEUDORF

J. SAMSON

Ce numéro de l'OUVERT est consacré à l'étude de la trigonométrie en classe de première.

Les programmes actuels mettent à notre disposition deux formes différentes de l'exposé de la trigonométrie.

L'un d'entre eux est explicitement proposé en classe de première C.

En classe de première D le professeur a le choix entre les deux modes d'exposition. Nous avons préféré étudier complètement la progression préconisée en 1ère C plutôt que d'étudier sommairement les deux procédés d'exposition possibles pour la classe de 1ère D, pour les raisons suivantes :

- Le mode d'exposition préconisé en 1ère C nous semble plus rigoureux et plus facile à transmettre que sa variante (cependant seule l'expérience d'une année d'enseignement pourra confirmer ou infirmer cette affirmation).
- L'étude complète du mode d'exposition préconisée en 1ère C facilite la recherche d'une progression conforme à la variante indiquée.
- Nous avons évité de façon systématique les notions "hors programme" qui figurent dans certains manuels (déterminant d'une application, changement de base)
- Nous avons, de façon à permettre à chaque collègue de construire l'exposé qui lui convient le mieux, séparé les notions de trigonométrie des notions d'angle : d'où les titres de chapitres, à priori farfelus, "trigononmétrie sans angle", "angles sans trigonométrie".

La synthèse "trigonométrie et angles" est esquissée et permet de suggérer un procédé d'exposition conforme aux programmes.

Nous avons joint à cet exposé une note sur le rôle des figures et une note permettant de définir l'application θ possédant les propriétés énoncées dans le libellé du programme de la classe de première.

- Nous venons d'apprendre que les instructions officielles commentant les nouveaux programmes viennent de paraître, l'utilité de notre travail est donc moins grande que prévue.

Cet exposé permettra peut-être quand même à chacun d'entre nous de préparer un cours de première conforme aux recommandations officielles.

J. SAMSON

LE ROLE DES FIGURES

De tout temps, une étude géométrique s'est accompagnée et illustrée de figures.

Dans la "géométrie plane" (au sens traditionnel du mot) on identifie le plan à un "plan physique" (feuille de papier, tableau noir).
On sait représenter des points, des droites (règle), des droites perpendiculaires (équerre), des cercles (compas).

Les figures permettent d'illustrer un problème en rassemblant toutes les hypothèses, de suggérer certaines recherches, certaines démonstrations, de retrouver des résultats rigoureusement établis par ailleurs.

Les figures, tenant compte de toutes les "données" du problème, permettent d'appréhender "en bloc" une situation complexe, alors que le raisonnement, qui se déroule de façon linéaire, ne permet d'envisager une situation que lorsque précédente a été débrouillée.

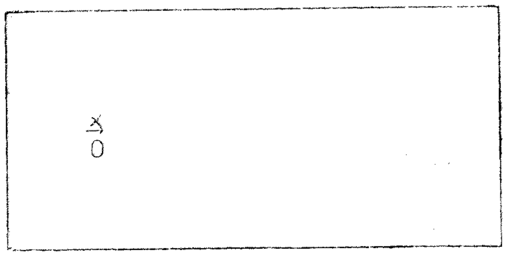
Les figures jouent un rôle appréciable d'aide mémoire : le candidat au baccalauréat qui fait un "petit dessin" pour comparer $\cos(\pi - x)$ et $\cos x$ en est bien convaincu.

Sauf dans quelques cas très particuliers, la figure seule ne justifie pas le résultat et ne le démontre pas.

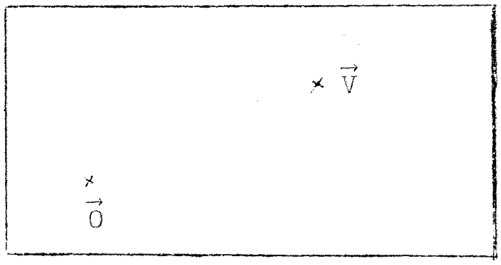
En "géométrie vectorielle" les figures jouent le même rôle qu'en "géométrie traditionnelle".

Le plan vectoriel Euclidien peut-être représenté à l'aide du "plan physique" de la manière suivante :

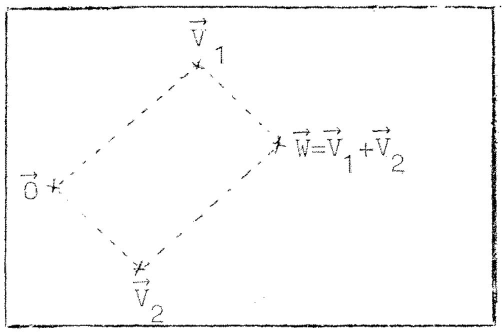
- On pointe le plan physique en marquant un point noté $\vec{0}$.



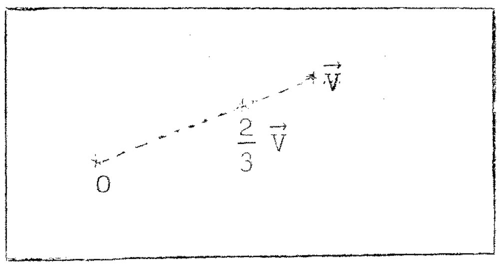
- Un point représente un vecteur :



La somme de deux vecteurs est représentée par un point, à l'aide de la règle du parallélogramme.

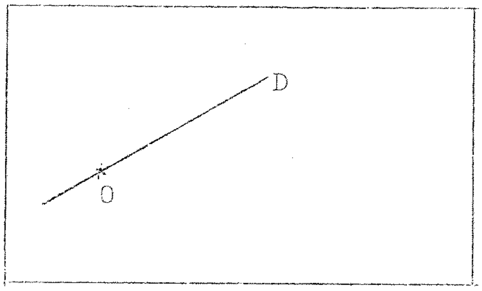


Le produit d'un vecteur par un nombre est représenté par un point construit par le procédé habituel (Thalès lorsque ce nombre est rationnel).



Une droite vectorielle D est représentée par une droite passant par $\vec{0}$.

L'orthogonalité de deux droites est obtenue par l'equerre.



Le cercle de rayon 1 ($\Gamma = \{\vec{V}) \ \|\vec{V}\| = 1)$ est construit à l'aide du compas en prenant comme centre le point représentant $\vec{0}$ et en prenant une certaine "ouverture" comme unité.

Notons que le compas est un instrument très commode pour représenter un produit scalaire, un plan vectoriel muni d'un produit scalaire sera facilement représenté à l'aide d'un tableau noir et d'un compas.

CE QUE L'ON SUPPOSE CONNU

Le but de cet article étant l'étude de la trigonométrie en classe de première, nous supposons connues les notions du programme de première indispensables à l'introduction de la trigonométrie, c'est à dire :

- Le produit scalaire et ses applications (titre V n°1 des programmes officiels) en particulier les deux résultats suivants qui seront très utiles dans l'étude des rotations :

(A) Si un vecteur $\vec{V}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ alors $a = \vec{v}.\vec{e}_1$, $b = \vec{v}.\vec{e}_2$ ($\vec{x}.\vec{y}$ désignant le produit scalaire du vecteur $\vec{x}$ par le vecteur $\vec{y}$).

(B) Il existe deux vecteurs unitaires $\vec{v}$ et $-\vec{v}$ et deux seulement, orthogonaux à un vecteur unitaire $\vec{u}$ donné.

- Le fait que les matrices, dans une base orthonormée, des applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même qui conservent le produit scalaire (isométries) sont du type (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

De nombreux manuels utilisent desnotions manifestement hors du programme (déterminant d'une application, changement de base). Il n'est absolument pas nécessaire de déborder du programme pour traiter la trigonométrie, comme nous allons tenter de le montrer.

Classification des isométries :

Le plan vectoriel étant rapporté à une base orthonormée B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ il est possible de classer les isométries en deux familles (I) et (II) suivant que leurs matrices sont du type (1) ou du type (2). Cette classification étant définie en fonction d'une base B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ n'est pas à priori intrinsèque.

Notons que :

- le déterminant d'une matrice du type (1) est égal à (+1), celui d'une matrice du type (2) est égal à (-1).
- l'ensemble des applications (I) muni de la composition des applications a une structure de groupe commutatif.
- l' ensemble des applications du type II n'est pas un groupe.

Il est possible de classer, de façon intrinsèque de la base choisie, les isométries en remarquant que :

1) l'application identique appartient à la famille (I)
2) toute application f de la famille (I) autre que l'application identique est telle que l'équation $f(\vec{v}) = \vec{v}$ n'admette comme solution que $\vec{v} = \vec{o}$.
3) l'équation $f(\vec{v}) = \vec{v}$ admet d'autres solutions que $\vec{v} = \vec{o}$ pour toute application du type (II).

Les applications du type (I) sont caractérisées indépendamment de la base choisie : on les appelle rotations vectorielles planes : on désignera par

$\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations vectorielles planes. Notons que $\mathcal{R}$ muni de la loi de composition des applications o est un groupe commutatif et que la matrice d'une application f de $\mathcal{R}$ dans une base orthonormée est de type (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

ROTATIONS VECTORIELLES

La matrice de la rotation vectorielle f rapportée à la base orthonormée B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant égale à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, les coefficients a et b dépendent à priori de l'application f et de la base B c'est pourquoi nous noterons la matrice M de f dans la base B :

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} a(f,B) & -b(f,B) \\ b(f,B) & a(f,B) \end{pmatrix} \qquad (C)$$

Cette notation paut, à priori, paraître lourde mais elle a, entre autres avantages, celui de bien mettre en relief les paramètres dont sont susceptibles de dépendre a et b.

Théorème préliminaire :

Etant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$ il existe une rotation φ et une seule telle que $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$. Les démonstrations de ce théorème peuvent être laissées au soin du maître ou de ses élèves. Notons que comme dans bien d'autres questions de mathématiques la démonstration la plus simple n'est pas toujours la plus naturelle donc celle qui sera à priori proposée par les élèves.

Une méthode consiste à rapporter le plan à une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à désigner par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans cette base et à rechercher l'existence d'un couple (a,b) vérifiant
$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ sachant que $\|\vec{x}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ et que $\|y\|^2 = u^2 + v^2 = 1$.

On est amené à résoudre le système $\begin{cases} \alpha a - \beta b = u \\ \beta a + \alpha b = v \end{cases}$ qui admet une solution et une seule.

$a = \alpha u + \beta v$, $b = \alpha v - \beta u$. Cette solution vérifie $a^2 + b^2 = 1$ en effet :

$a^2 + b^2 = (\alpha u + \beta v)^2 + (\alpha v - \beta u)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(u^2 + v^2) = 1.1 = 1$

(on retrouve ici l'identité de Lagrange ce qui n'est pas étonnant. Cette identité exprimant analytiquement que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, il est parfaitement naturel de la retrouver dans une étude de la trigonométrie) d'où l'existence d'une rotation unique φ telle que $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$.

Une autre méthode, plus simple, consiste à utiliser la conséquence (B) de l'étude du produit scalaire. De (B) on déduit qu'il existe une base orthonormée $(\vec{x}, \vec{x}')$ dont le premier vecteur est $\vec{x}$. Les nombres (a,b) sont alors les coordonnées de $\vec{y}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{x}')$. a et b sont bien déterminés et comme $\vec{y}$ est unitaire $\|y\|^2 = a^2 + b^2 = 1$.

Expressions des nombres $a(f,B)$ et $b(f,B)$ à l'aide du produit scalaire.

Dans l'écriture (c) de $M(f,B)$, les nombres $\binom{a(f,B)}{b(f,B)}$ sont les coordonnées dans la base $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des vecteurs $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2)$. On a donc en appliquant la conséquence (A) de l'étude du produit scalaire : $a(f,B) = \vec{e}_1 . f(\vec{e}_1)$

$b(f,B) = \vec{e}_2 . f(\vec{e}_1)$.

<u>Théorème 1</u> : $a(f,B)$ ne dépend pas de la base B choisie.

<u>Démonstration</u> : Soit $B'(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2)$ une autre base orthonormée. La matrice de l'application f dans la base orthonormée B' est

$$M(f,B') = \begin{pmatrix} a(f,B') & -b(f,B') \\ b(f,B') & a(f,B') \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a(f,B') = \vec{e}\,'_1 . f(\vec{e}\,'_1) \ ;$$

$b(f,B') = \vec{e}\,'_2 . f(\vec{e}\,'_1)$

$\vec{e}_1$ et $\vec{e}\,'_1$ étant des vecteurs de module 1 il existe une rotation vectorielle φ et une seule telle que $\vec{e}\,'_1 = \varphi(\vec{e}_1)$ et :

$a(f,B') = \vec{e}\,'_1 . f(e'_1) = \varphi(\vec{e}_1) . f\left[\varphi(\vec{e}_1)\right] = \varphi(\vec{e}_1) . (f \circ \varphi)(\vec{e}_1)$

or o étant commutative dans Ω

$a(f,B') = \varphi(\vec{e}_1).(f.\varphi)(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_1).(\varphi.f)(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_1).\varphi\left[f(e_1)\right]$.

Or φ étant une rotation vectorielle, concerne le produit scalaire et : $\varphi(\vec{e}_1).\varphi\left[f(\vec{e}_1)\right] = \vec{e}_1.f(\vec{e}_1)$ d'où $a(f,B') = a(f,B)$. Ce qui montre bien que $a(f,B)$ ne dépend pas de la base orthonormée B choisie.

La relation $a^2 + b^2 = 1$ permet d'établir immédiatement que $|b(f,B)|$ ne dépend pas de B donc que si $B(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ et $B'(e'_1,e'_2)$ sont deux bases orthonormées alors $b(f,B) = \pm b(f,B')$. Il est possible de préciser ce résultat en considérant la rotation unique φ telle que $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}'_1$, $\vec{e}_2$ étant unitaire et orthogonal à $\vec{e}_1$, $\varphi(\vec{e}_2)$ est unitaire et orthogonal à $\varphi(\vec{e}_1)$ c'est à dire à $\vec{e}'_1$. (ce qui est une conséquence immédiate du fait que φ conserve le produit scalaire).

Or (conséquence (B) de l'étude du produit scalaire) il existe deux vecteurs unitaires et deux seulement orthogonaux à un vecteur unitaire donné et ces deux vecteurs sont opposés, par conséquent ou bien $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}'_2$ ou bien $\varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}'_2$

Si $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}'_2$

$b(f,B') = \vec{e}'_2 .f(e'_1) = \varphi(\vec{e}_2).f\left[\varphi(\vec{e}_1)\right] = \varphi(\vec{e}_2).\varphi\left[f(\vec{e}_1)\right] = \vec{e}_2 f(\vec{e}_1) = b(f,B)$

Si $\varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}'_2$ alors $b(f,B') = (-\vec{e}'_2).f(\vec{e}'_1) = -b(f,B)$.

<u>d'où : Théorème 2</u> !

$b(f,B') = \mathcal{E}(B,B')\, b(f,B)$ $\mathcal{E}(B,B')$, qui dépend du choix des bases orthonormées B et B', étant égal à ± 1 avec $\mathcal{E}(B,B') = +1$ si et seulement s'il existe une rotation φ telle que $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $\varphi(\vec{e}_2') = \vec{e}_2'$.

ORIENTATION DU PLAN, PLAN VECTORIEL ORIENTE

On considère dans l'ensemble des bases orthonormées du plan vectoriel euclidien la relation r définie par :

$B \; r \; B' \Leftrightarrow \mathcal{E}(B,B') = (+1) \Leftrightarrow \exists \; \varphi \in \mathcal{R}_o \,/\, \varphi(\vec{e}_1) = e'_1, \; \varphi(\vec{e}_2) = e'_2$

Il est immédiat de vérifier que r est une relation d'équivalence (ce qui résulte du fait que $\mathcal{R}o$ est un groupe), cette relation d'équivalence définit une partition de l'ensemble des bases orthonormées du plan vectoriel Eucldien formée de deux classes d'équivalence. Orienter le plan signifie choisir une de ces classes d'équivalences. Un plan vectoriel euclidien orienté est un triplet $(\mathcal{P}, \cdot, \mathcal{B})$ ou $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel, . un produit scalaire et $\mathcal{B}$ une base orthonormée.

COSINUS ET SINUS D'UNE ROTATION VECTORIELLE

$\mathcal{R}$ désignant l'ensemble des rotations vectorielles planes nous avons vu que la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un élément f de $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$M\,(f,B) = \begin{pmatrix} a(f,B) & -\,b(f,B) \\ b(f,B) & a(f,B) \end{pmatrix}$$

nous avons vu que $a(f,B)$ ne dépend pas de la base orthonormée B choisie. $a(f,B)$ ne dépend donc que de la rotation vectorielle f choisie; à chaque élément f de $\mathcal{R}$ on associe le réel $a(f)$. On définit ainsi une application de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée Cos

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\text{Cos}} \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto a(f) = \text{Cos } f.$$

Remarques : 1) Il n'est pas nécessaire de supposer le plan orienté pour définir l'application Cos.

2) f est une rotation, Cos f est un réel, Cos f est un réel,

Cos f est appelé le cosinus de la rotation vectorielle f.

Sinus d'une rotation vectorielle

Le nombre b(f,B) dépend de la base B choisie de la façon indiquée par le théorème 2. Si on s'astreint à ne choisir les bases orthonormées B que dans l'une des deux classes d'équivalence de la relation r, c'est à dire si l'on suppose le plan vectoriel le plan vectoriel euclidien orienté, alors b(f,B) ne dépend pas de la base orthonormée B choisie. Ce qui nous permet de définir une application de Ω dans R notée Sin

$$\Omega \xrightarrow{\text{Sin}} R$$

$$f \longmapsto b(f) = \text{Sin} f.$$ Sin f est le sinus de la rotation vectorielle f.

* $\text{Cos}^2 f + \text{Sin}^2 f = 1$

et, dans le plan vectoriel orienté la matrice d'une rotation f s'écrira

$$M(f) = \begin{pmatrix} \text{Cos } f & -\text{Sin } f \\ \text{Sin } f & \text{Cos } f \end{pmatrix}$$

De l'égalité $M(f\circ f') = M(f).M(f')$ on déduit immédiatement

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}(fof') & -\text{Sin}(fof') \\ \text{Sin}(fof') & \text{Cos}(fof') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos } f & -\text{Sin } f \\ \text{Sin } f & \text{cos } f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{Cos } f' & -\text{Sin } f' \\ \text{Sin } f' & \text{Cos } f' \end{pmatrix}$$

puis $\text{Cos}(f \circ f') = \text{Cos } f \text{ Cos } f' - \text{Sin } f \text{ Sin } f'$

$\text{Sin}(f \circ f') = \text{Sin } f \text{ Cos } f' + \text{Cos } f \text{ Sin } f'$

TRIGONOMETRIE SANS ANGLE

1) Application de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels dans l'ensemble Ω des rotations vectorielles planes.

On admet l'existence d'une application θ de source $\mathbb{R}$, de but Ω

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \Omega$$
$$x \longmapsto \theta(x)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1) θ est surjective

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \theta(x + y) = \theta(x) \circ \theta(y)$. (autrement dit θ est un homomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans Ωo)

L'existence de l'application θ permet de définir une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée cos définie par le schéma suivant :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \Omega \xrightarrow{\text{Cos}} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \theta(x) \longmapsto \text{Cos } \theta(x) = \cos x.$$

et, si le plan vectoriel euclidien est orienté, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée sin définie par :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \Omega \xrightarrow{\text{Sin}} \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \theta(x) \longmapsto \text{Sin } \theta(x) = \sin x.$$

On admettra, conformément au programme, que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée sin est dérivable et de dérivée égale à 1 pour $x = 0$.

Il nous est possible maintenant de trouver tous les résultats usuels de la trigonométrie.

a) Application vérifiant les propriétés 1, et 2, (θ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{R}$ + dans Ω o) ou en déduit immédiatement que $\theta(0) = \text{Id}$, Id désignant la rotation vectorielle identique, élément neutre de Ω, et que pour tout réel x

$$\theta(-x) = \left[\theta(x)\right]^{-1}$$

La matrice de Id étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ il en résulte que : $\cos 0 = \text{Cos Id} = 1.$

$\sin 0 = \text{Sin Id} = 0.$

Si la matrice de $\theta(x)$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors la matrice de $\left[\theta\ (a)\right]^{-1}$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ par conséquent $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x.$

donc la fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

b) <u>"formules d'addition"</u>.

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \ \cos(x + y) = \mathrm{Cos}\ \theta(x + y) = \mathrm{Cos}[\theta(x) \circ \theta(y)]$ par définition des applications Cos et θ

Or $\mathrm{Cos}\left[\theta(x) \circ \theta(y)\right] = \mathrm{Cos}\ \theta(x)\ \mathrm{Cos}\ \theta(y) - \mathrm{Sin}\ \theta(x)\ \mathrm{Sin}\ \theta(y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

et par conséquent : $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

On établit de façon analogue que $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \sin(x+y) =$ $\sin x \cos y + \sin y \cos x.$

La fonction cos étant paire, la fonction sin étant impaire

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \cos(x - y) = \cos\left[x+(-y)\right] = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) =$ $\cos x \cos y + \sin x \sin y.$

$\sin(x - y) = \sin\left[x+(-y)\right] = \sin x \cos(-y) + \sin(-y) \cos x =$ $\sin x \cos y - \sin y \cos x$

On en déduit les formules classiques de trigonométrie par les procédés habituels nous ne les établirons pas ici mais nous ne nous interdirons pas de les utiliser par la suite.

<u>Dérivées des fonctions sin et cos</u>.

(par hypothèse) la fonction sin est dérivable pour $x = 0$ et sa dérivée est 1.

donc $\sin h = h + h\ \mathcal{E}(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}(h) = 0$

dérivée de la fonction cos pour $x = 0$.

$\cos h - \cos 0 = \cos h - 1 = -2 \sin^2 \frac{h}{2} = -2\left[\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\ \mathcal{E}\left(\frac{h}{2}\right)\right]^2 = -h\ .\ \frac{h}{2}(1 + \mathcal{E}(\frac{h}{2})^2$

$-\frac{h}{2}\ (1 + \mathcal{E}(\frac{h}{2}))^2$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 on peut poser $-\frac{h}{2}(1+\mathcal{E}(\frac{h}{2})^2 = \mathcal{E}_1(h)$

avec $\lim\limits_{k \to 0} \mathcal{E}_1(h) = 0$

donc $\cos h = \cos 0 + h\,\mathcal{E}_1(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}_1(h) = 0$. Donc la fonction cosinus est dérivable pour $x = 0$ et sa dérivée est 0 au point 0.

Dérivée de la fonction sin au point xo.

$\forall x_o \in \mathbb{R}\ \forall h \in \mathbb{R}$ $\quad \sin(x_o + h) = \sin x_o \cos h + \cos x_o \sin h$

$= \cos x_o \left[h + h\mathcal{E}(h)\right] + \sin x_o \left(1 + h\,\mathcal{E}_1(h)\right]$

$\sin(x_o + h) = \sin x_o + h \cos x_o + h(\cos x_o\, \mathcal{E}(h) + \sin x_o \mathcal{E}_1(h)) =$

$\sin x_o + h \cos x_o + h\,\mathcal{E}_2(h) \qquad \lim\limits_{k \to o} \mathcal{E}_2(h) = o$

donc la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$

la fonction dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Dérivée de la fonction cos au point x_o

$\forall x_o \in \mathbb{R}\ \ \cos(x_o + h) = \cos x_o \cos h - \sin x_o \sin h =$

$\cos x_o\ (1 + h\ \mathcal{E}_1(h)) - \sin x_o \left[h + h\,\mathcal{E}(h)\right] =$

$\cos(x_o + h) = \cos x_o - h \sin x_o + h\left[\cos x_o\, \mathcal{E}_1(h) - \sin x_o\, \mathcal{E}(h)\right] =$

$\cos(x_o + h) = \cos x_o - h \sin x_o - h \sin x_o + h\,\mathcal{E}_2(h)$

la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa fonction dérivée est la fonction - sin

les fonctions sin et cos étant dérivables sur $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Le nombre Π

L'application θ étant surjective il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(\xi) = \delta$, δ étant la rotation définie par sa matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Cos} \theta(\xi) = \cos \xi = 0$.

L'équation $\cos \xi = 0$ admet donc au moins une solution.

Désignons par E l'ensemble des solutions de l'équation $\cos \xi = 0$

1) $E \neq \emptyset$, 2) $0 \notin E$ (en effet $\cos 0 = 1$) 3) $\forall \xi \in E\ \ -\xi \in E$ (en effet la fonction cos est paire) donc l'ensemble E_1

$E_1 = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi > 0 \text{ et } \cos \xi = 0\}$ n'est pas vide.

On pourra admetre qu'il existe un élément ξ_o de E_1 inférieur à tous les autres. La démonstration, qui ne peut guère être faite en première, de l'existence de ξ, tient du fait que E_1, image réciproque d'un fermé par une fonction continue, est un fermé. E_1 étant borné intérieurement admet une borne inférieure, E_1 étant fermé cette borne inférieure appartient à E_1.

ξ_o désignant le plus petit réel positif tel que $\cos \xi_o = 1$ on désigne par π le nombre $2\xi_o$ par conséquent $\xi_o = \frac{\pi}{2}$.

La fonction cos étant continue sur R, cos étant égal à 1 et $\frac{\pi}{2}$ étant le plus petit réel positif dont le cosinus est nul, la fonction cos est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ en effet s'il existait $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos \alpha \leq 0$ alors il existerait $\beta \in [0,\alpha]$ tel que $\cos \beta = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ ne serait pas le plus petit réel x positif tel que $\cos x = 0$. (théorème des valeurs intermédiaires).

La fonction sinus, continue sur $\mathbb{R}$ donc dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ est telle que sa fonction dérivée soit positive dans $]0,\frac{\pi}{2}[$. La fonction sin est donc croissante dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ il en résulte : $\sin \frac{\pi}{2} > \sin 0$

soit $\sin \frac{\pi}{2} > 0$

de l'égalité $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ on déduit $|\sin \frac{\pi}{2}| = 1$.

or $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ donc $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

De $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ on déduit $\cos \pi = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1 = -1$,

$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = \cos (\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = \sin(R + \frac{\pi}{2}) = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ 1) $\cos (\pi-x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = -\cos x$

2) $\sin (\pi-x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = \sin x$

de même 3) $\cos (\pi+x) = -\cos x$

4) $\sin (\pi+x) = -\sin x$

5) $\cos (2\pi+x) = \cos x$

6) $\sin (2\pi+x) = \sin x$

7) $\cos (\frac{\pi}{2} -x-) = \sin x$

8) $\sin (\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

9) $\cos (\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

10) $\sin (\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

Les égalités 5) et 6) montrent que les fonctions sin et cos sont périodiques et que 2π est une période.

On étudie alors les fonctions sin et cos dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

Nous avons déjà étudié la croissance de la fonction sinus dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, cette étude montre que la fonction sinus est positive d $[0,\frac{\pi}{2}]$, cette étude montre que la fonction sinus est positive dans $]0,\frac{\pi}{2}]$ et que la fonction cos, continue dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, dérivable dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ qui admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une dérivée strictement négative est donc décroissante dans $[0,\frac{\pi}{2}]$. Les égalités 1.....10 permettent de prolonger cette étude à un intervalle d'amplitude 2π et de montrer que 2π est la plus petite période des fonctions sin et cos. Le calcul de cos $\frac{\pi}{4}$, sin $\frac{\pi}{4}$; cos $\frac{\pi}{3}$, sin $\frac{\pi}{3}$ permettent de préciser quelques points des représentations graphiques des fonctions cos et sin et de représenter graphiquement ces fonctions.

Les fonctions tangente et cotangente peuvent être alors introduites et étudiées à partir des fonctions sin et cos.

NOTES SUR LA FONCTION θ

Ces notes, qu'il n'est pas question d'utiliser en classe de 1ère, ne sont là que pour justifier, de façon sommaire, l'existence et les propriétés de l'application θ de $\mathbb{R}$ dans Ω vérifient les propriétés admises page 13

1) L'ensemble Ω des rotations vectorielles, muni de la loi de composition des applications notée $\circ$, est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Une rotation vectorielle f étant définie, dans le plan orienté, indépendamment de la base orthonormée choisie par $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, on peut identifier une rotation vectorielle à sa matrice, la composée de deux rotations vectorielles, au produit des matrices de ces rotations.

L'application h

$$\Omega \xrightarrow{h} \mathcal{U}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto z = h\ (f) = a+bi \text{ avec } \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

est bijective et vérifié :

$\forall f_1 \in \Omega$, $\forall f_2 \in \Omega$ $h(f_1 \circ f_2) = h(f_1) . h(f_2)$ et définit donc un isomorphisme de Ω dans $\mathcal{U}$.

2) L'étude des fonctions de variables complexes permet d'établir que, pour z complexe, la série entière $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ldots$ est absolument convergente sa somme :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ définit une fonction $z \longrightarrow e^z$ en notant $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

La fonction $z \longrightarrow e^z$ est continue, dérivable, sa dérivée est la fonction $z \longrightarrow e^z$

Cette fonction vérifie : $e^0 = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ $\forall z' \in \mathbb{C}$ $e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$, $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

Cette fonction permet de définir une application ψ

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto e^{ix}$$

ψ est la composée des applications $x \longmapsto ix = z$, $z \longmapsto e^z$

_ ψ est continue, dérivable, $\psi'(x) = i\ \psi\ (x)$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\|\psi(x)\|^2 = \psi(x)\ \overline{\psi(x)} = e^{ix}\ e^{-ix} = e^0 = 1$

et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$ $\psi(x) \in \mathcal{U}$ donc ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\psi(x+y) = \psi(x) . \psi(y)$; $\psi(0)=1$

Désignons par $\mathcal{R}_e(x)$ et $\mathcal{J}(x)$ les parties réelles et imaginaires de $\psi\ (x)$

Les fonctions $x \longmapsto \mathcal{R}_e(x)$ et $x \longmapsto \mathcal{J}(x)$ sont dévelopables en séries entières de rayon de convergence infini ; $\mathcal{R}_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $\mathcal{J}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Ces deux fonctions sont dérivables

$(\mathcal{R}_e(x))' = - \mathcal{J}(x)$; $(\mathcal{J}(x))' = \mathcal{R}_e(x)$ et vérifient

$\forall x \in \mathbb{R}$ $[\mathcal{R}_e(x)]^2 + [\mathcal{J}(x)]^2 = 1$

On se propose de démontrer que l'application $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathcal{U}$ est surjective

pour cela on constate que $\mathcal{R}_e(o) = 1$ et que

$$\mathcal{R}_e(2) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, 2^{2n} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + \frac{1}{4!}\cdot 2^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{2^{4n+4}}{(4n+4)!}\right)$$

soit $\mathcal{R}_e(2) = -\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+4}}{(4n+4)!}(4n^2 + 7n + 2)$ ce qui montre que $\mathcal{R}_e(2) < 0$

- La fonction continue $x \longrightarrow \mathcal{R}_e(x)$ prend une valeur positive pour $x = 1$, négative pour $x = 2$, donc il existe au moins un réel x de $]0, [$ tel que $\mathcal{R}_e(x) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

- L'ensemble des réels x positifs tels que $\mathcal{R}_e(x) = 0$ admet un plus petit élément que l'on notera $\frac{\pi}{2}$.

La fonction $x \longrightarrow \mathcal{R}_e(x)$ est positive dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ on en déduit que $\mathcal{J}(x)$ est croissante dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ et que $\mathcal{J}(\frac{\pi}{2}) = 1$

Les variations dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ de $\mathcal{J}$ permettent de déduire les variations dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ de $\mathcal{R}_e$ dont on connait la dérivée dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

- $\psi(\frac{\pi}{2}) = \mathcal{R}_e(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathcal{J}(\frac{\pi}{2}) = i$

  $\psi(\pi) = \psi(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \psi(\frac{\pi}{2})\cdot\psi(\frac{\pi}{2}) = (-1)$ d'où $\mathcal{R}_e(\pi) = -1$, $\mathcal{J}(\pi) = 0$

  $\psi(2\pi) = \psi(\pi + \pi) = \psi(\pi + \pi) = \psi(\pi)\cdot\psi(\pi) = (+1)$ d'où $\mathcal{R}_e(2\pi) = 1$ $\mathcal{J}(2\pi) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\psi(\pi - x) = \psi(\pi)\psi(-x) = -\overline{\psi(x)}$ d'où : $\mathcal{R}_e(\pi - x) = -\mathcal{R}_e(x)$; $\mathcal{J}(\pi - x) = +\mathcal{J}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\psi(\pi + x) = \psi(\pi)\psi(x) = -\psi(x)$ d'où : $\mathcal{R}_e(\pi + x) = -\mathcal{R}_e(x)$ $\mathcal{J}(\pi + x) = -\mathcal{J}(x)$

Ces relations permettent d'étudier les fonctions $\mathcal{R}_e(x)$ et $\mathcal{J}(x)$ dans $[0, 2\pi]$

	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\mathcal{R}e$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	
$\mathcal{J}$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

L'étude de ces tableaux de variations montre que tout nombre complexe module 1 est image d'au moins un réel par ψ autrement dit que ψ autrement dit que ψ est surjective. L'application h de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{U}$ étant bijective admet une application réciproque h^{-1} de source $\mathcal{U}$, de but $\mathcal{R}$ vérifiant $\forall\, z \in \mathcal{U}\ \ \forall\, z' \in \mathcal{U}\ \ h^{-1}(z.z') = h^{-1}(z) \circ h^{-1}(z')$

- l'application θ de source $\mathbb{R}$ de but $\mathcal{R}$ définie par $\theta = h^{-1} \circ \psi$, composée de deux applications surjectives, est surjective

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ \ \theta(x + y) = h^{-1}[\psi(x + y)] = h^{-1}[\psi(x).\psi(y)] =$
 $h^{-1}[\psi(x)] \circ h^{-1}[\psi(y)] = \theta(x) \circ \theta(y)$

- Il est facile de vérifier de la fonction sin définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\sin x = \sin \theta(x)$ est la fonction $\mathcal{J}$ qui est dérivable et de dérivée 1 pour $x = 0$. ce qui achève d'établir l'existence d'une application θ vérifiant les propriétés citées page 13.

ANGLES SANS TRIGONOMETRIE

1) Etant donné un couple(D,D') de demi-droites vectorielles il existe une rotation vectorielle φ et une seule telle que $\varphi(D) = D'$ (cette rotation est l'unique rotation vectorielle "en voyant" le vecteur unitaire de D sur celui de D'). A chaque couple (D,D') on associe un élément φ et un seul de l'ensemble $\mathcal{R}$ des rotations vectorielles.

$\mathcal{D}$ désignant l'ensemble des demi-droites vectorielles, on définit ainsi une application de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (D,D') &\longrightarrow \varphi \end{aligned}$$

soit f cette application : f est surjective.

On considère ensuite la relation r dans $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ définie par $(D,D')\,r\,(D_1,D_1') \Leftrightarrow f(D,D') = (D_1,D_1')$ r est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalences (éléments de $\frac{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}{r}$) sont appelées angles.

On notera $\widehat{(D,D')}$ la classe d'équivalence de l'élément (D,D'). Si l'on désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles $(\mathcal{A} = \frac{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}{r})$, on peut définir une application g de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}$.

$$\mathcal{A}_o \xrightarrow{g} \Omega$$

$$\widehat{(D,D')} \longmapsto g(\widehat{D,D'}) = f(D,D') = \varphi$$

$g(\widehat{D,D'})$ est définie à l'aide d'un représentant de $(\widehat{D,D'})$ il faut s'assurer que $g(\widehat{D,D'})$ ne dépend pas du représentant de $(\widehat{D,D'})$ choisi, ce qui est immédiat par définition de la relation r. L'application g est une bijection de $\mathcal{A}$ dans Ω comme il est facile de le vérifier.

Ω est muni d'une structure de groupe commutatif pour la loi de composition o des rotations, il reste à munir $\mathcal{A}$ d'une structure.

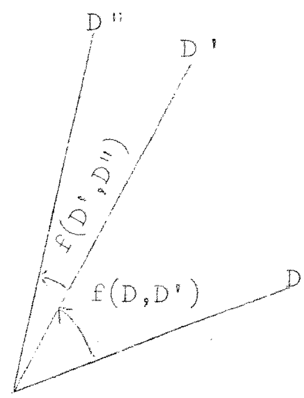
Pour cela munissons $\mathcal{A}$ d'une opération notée + définie par :

$$\widehat{(D,D')} + \widehat{(D_1,D_1')} = g^{-1}[g(D,D')] \circ g(D_1',D_1')] = g^{-1}[f(D,D') \circ f(D_1,D_1')]$$

Cette loi de composition est interne dans $\mathcal{A}$ et $\widehat{(D,D')} + \widehat{(D_1,D_1')}$ ne dépend pas des représentants des angles $\widehat{(D,D')}$ et $\widehat{(D_1,D_1')}$ choisis (parce que $g\widehat{(D,D')}$ est définie indépendamment du représentant de (D,D')).

Il est facile d'établir que $\mathcal{A}$+ a une structure de groupe commutatif : l'élément neutre de ce groupe est l'angle dont (D,D) est un représentant ; le symétrique pour la loi notée + de l'angle dont (D,D') est un représentant est l'angle dont (D',D) est un représentant.

Relation de Chasles :



$$\widehat{(D,D')} + \widehat{(D',D'')} = g^{-1}[f(D,D') \circ f(D'D'')]$$

or Ωo est un groupe commutatif

$$\widehat{(D,D')} + \widehat{(D',D'')} = g^{-1}[f(D',D'') \circ f(D,D')] = g^{-1}[\varphi' \circ \varphi]$$

$f(D,D')$ est la rotation φ définie par $\varphi(D) = D'$

$f(D',D'')$ est la rotation $\varphi' \circ \varphi$ définie par $\varphi'(D') = D''$

$$D \xmapsto{\ \varphi\ } D' \xmapsto{\ \varphi'\ } D''$$

$\varphi' \circ \varphi$ est donc la rotation définie par $\varphi' \circ \varphi(D) = D''$ et par conséquent :

$\varphi' \circ \varphi = f(D,D'')$ et par conséquent

$$(\widehat{D,D'}) + (\widehat{D',D''}) = g^{-1}[f(D,D'')] = g^{-1}[g(\widehat{D,D''})] = (\widehat{D,D''})$$

Notons que nous avons eu à utiliser la commutativité de la loi des compositions des rotations pour établir la relation de Chasles.

TRIGONOMETRIE ET ANGLES

L'application g de $\mathcal{A}+$ dans Ω_o est un isomorphisme en effet

1) g est bijective

2) $g[(\widehat{D,D_1}) + (\widehat{D',D'_1})] = g[g^{-1}[g(\widehat{D,D'}) \circ g(\widehat{D_1,D'_1})]] = g(\widehat{D,D'}) \circ g(\widehat{D_1,D'_1})$

Si l'on désigne par θ' l'application $g^{-1} \circ \theta$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \Omega \xrightarrow{g^{-1}} \mathcal{A}$$

θ' est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{A}$

θ' , composée de deux applications surjectives est surjective

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \theta'(x + y) = g^{-1}[\theta(x+y)] = g^{-1}[\theta(x) \circ \theta(y)] = g^{-1}[\theta(x)] + g^{-1}[\theta(y)]$

$= \theta'(x) + \theta'(y)$

Cette application θ' est celle nommée θ dans les programmes officiels.

On peut alors en utilisant θ' et $\mathcal{A}$ refaire les calculs que nous avons faits en utilisant θ et Ω et lier la trigonométrie aux angles.

Nous n'avons pas voulu donner un exposé type de l'enseignement de la trigonométrie, il est bien clair que le programme suggère de mêler plus intimement la trigonométrie et les angles que nous ne l'avons fait, nous avons choisi ce mode d'exposition de façon à ce qu'il soit facile au lecteur de rédiger lui-même une progression conforme aux programmes.

Nous avons utilisé le mot isomorphisme à la fin de cet exposé, il aurait suffit de citer les propriétés de g pour éviter ce mot.

Nous aurions pu, si nous avions voulu utiliser les propriétés des isomorphismes établir directement (à l'aide de l'isomorphisme g) que $\mathcal{A}+$ est un groupe commutatif.

Il resterait à traiter maintenant du cercle trigonométrique et des figures usuelles rencontrées en trigonométrie, les commentaires officiels le font fort bien et il ne paraît guère utile d'apporter des compléments à ce sujet.

Ce travail a été rédigé avant la parution des commentaires officiels, il ne prétend pas être un guide du professeur de première mais il permet de faciliter la rédaction d'un exposé conforme à ces commentaires.

P. BUISSON et J. SAMSON