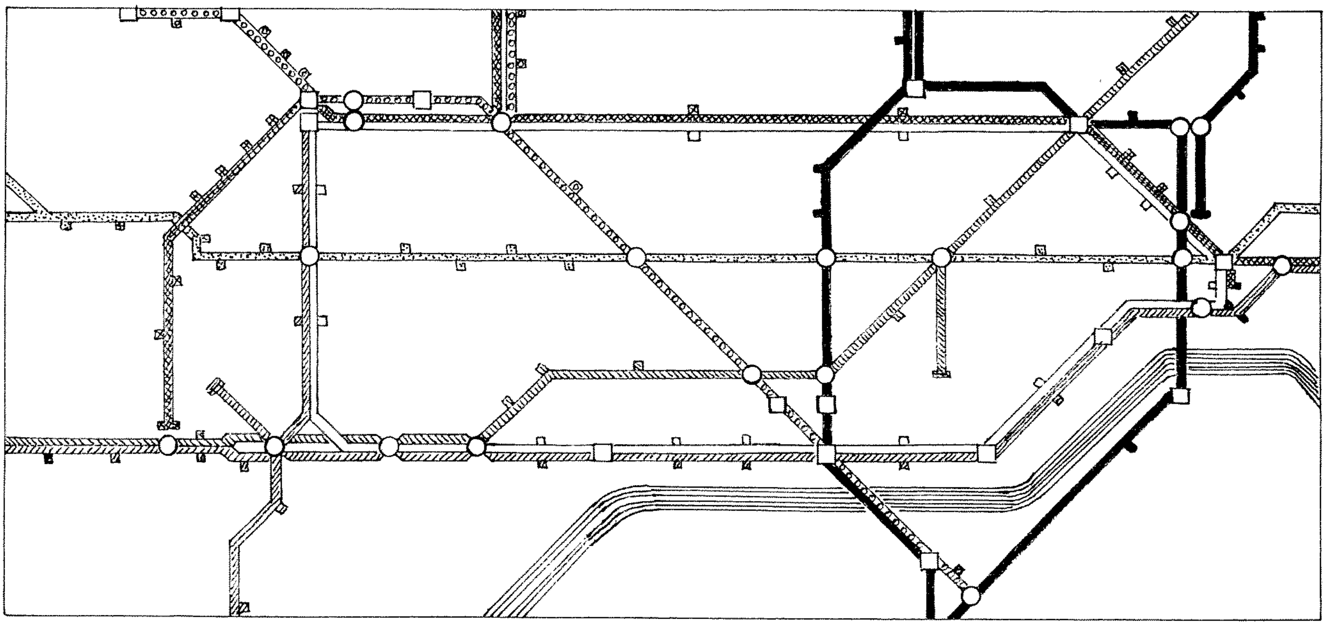
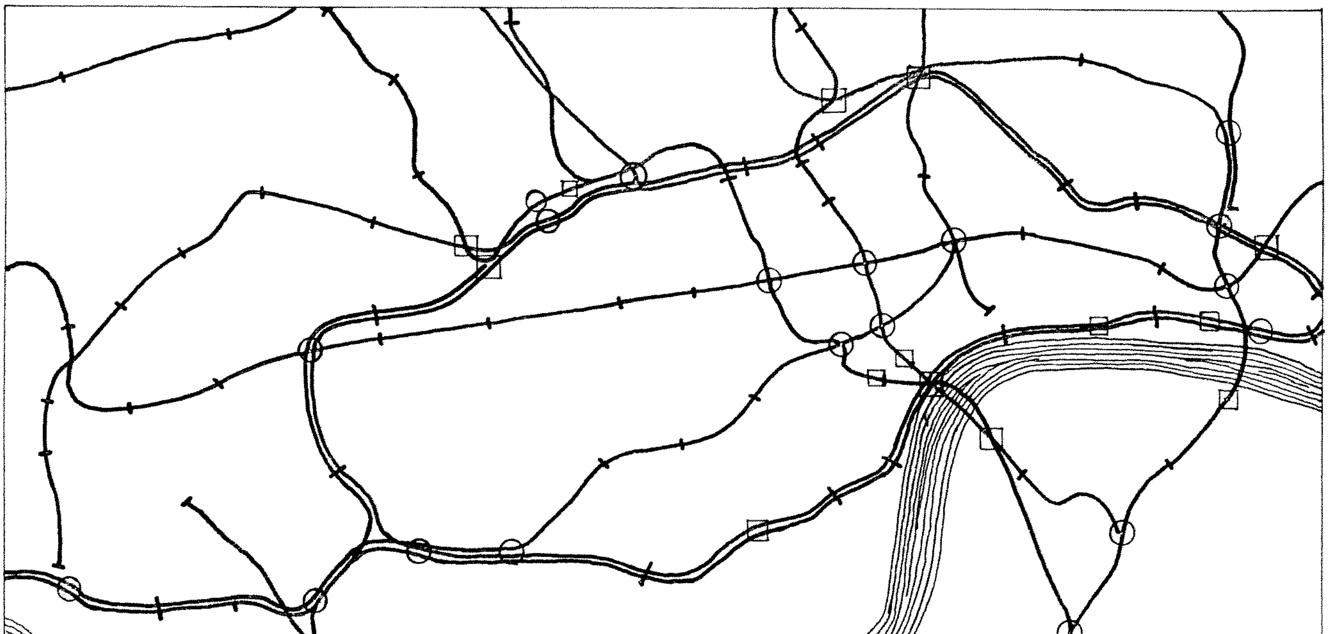
l'ouvert n°7

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG - NOV. 75





NOTRE COUVERTURE : Deux représentations d'une partie du réseau ferré métropolitain de Londres.

- En haut le plan schématique tel qu'il est donné dans tous les indicateurs.
- En bas le plan "à l'échelle" tel que le donnerait une photographie aux rayons X permettant de voir le sous-sol.

Ce schéma date de quelques années. De nouvelles lignes ont été créées depuis.

Le livre du problème : Géométrie d'incidence

(à paraître chez CEDIC)

Bien que le thème traité - géométrie finie et théorie des configurations - soit très spécialisé, ce livre devrait apporter la preuve que la géométrie d'incidence, au niveau élémentaire auquel on la rencontre ici, est particulièrement bien adapté à différents objectifs pédagogiques :

oo s'habituer à raisonner,
oo apprendre à manier l'abstraction,
oo faire preuve de créativité dans un cadre donné,
oo faire apparaître la notion de structure et d'invariance par isomorphismes,
oo . . . . .

Par ailleurs, l'apprentissage de la pensée déductive - qui est l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques - exige une analyse fine, pour dégager le discours mathématique des bruits de fond qui enrobent habituellement tout problème (forme de la figure, couleurs utilisées, ...) et les exercices que l'on trouvera dans cet ouvrage sont justement conçus pour minimiser ces "bruits de fond".

Dans des contextes très divers intervient la formulation :

"Par deux . . . . distincts, il ne passe qu'une . . . . et une seule"

ce qui fournit des exemples de géométrie d'incidencequi permettent de dégager rapidement l'idée de structure, et au chapitre premier les modèles d'incidence font comprendre la notion d'isomorphisme à des enfants de 10 ans ou même plus jeune. C'est ainsi que la notion de groupe s'impose à l'esprit des élèves, en particulier le groupe des automorphismes.

De par sa présentation, ce livre s'adresse aussi bien au cycle élémentaire qu'au cycle secondaire.

On aura trouvé dans la couverture du présent numéro de l'Ouvert un exemple type de deux réseaux isomorphes au sens de la géométrie d'incidence.

SOMMAIRE

Pour un enseignement de la mathématisation

ou : "Vive Euclide et à bas Bourbaki"

Au moment où l'A.P.M.E.P. développe les programmes par "Noyau-Thème", je voudrai apporter quelques rélexions personnelles sur un sujet voisin. Auparavant, et pour introduire mon propos, il me paraît bon de réfléchir quelque peu à l'épistémologie des mathématiques ainsi qu'à la réalité quotidienne de l'enseignement et de l'enseignant pour aprécier les raisons qui font que nos élèves "ne passent pas plus de temps à agir qu'à regarder faire" (cf éditorial de De Cointet dans le numéro 297 du bulletin). Par là même nous chercherons les remèdes à y apporter.

Que sont les mathématiques ? En simplifiant on peut distinguer au départ, la pratique, le concret, l'expérience quotidienne, l'intuition, la recherche systématique sur ordinateur, ... qui permettent d'induire des théorèmes ou conjectures. Ces conjectures conduisent ensuite à la création de systèmes d'axiomes, de théories desquelles on déduit d'autres théorèmes, à partir desquelles on démontre les conjectures initiales ; la mathématique devient alors un pur jeu logique jusqu'au moment où le chercheur imagine au sein de la nouvelle théorie une nouvelle conjecture qui le ramène au point de départ. Ce cercle est souvent schématisé par l'opposition entre mathématique faites et mathématiques à faire.

Si maintenant nous comparons la réalité quotidienne du mathématicien avec celle de l'enseignant, nous remarquons que ce dernier, à cause de la longueur des programmes qu'il faut absolument traiter avant l'examen, à cause de sa formation, à cause de la pesanteur sociologique, à cause de la présentation des manuels qu'il utilise, ... ne peut pas ou pas souvent faire autre chose que de présenter aux élèves des mathématiques toutes faites. Et ce, quelle que soit la pédagogie utilisée ; car dans le meilleur des cas, faute de temps l'élève sera guidé pour arriver au résultat avec le minimum d'erreurs et de perte de temps. (1)

---

(1) On remarquera que ce défaut n'est pas propre à l'enseignant de mathématique ; le professeur de physique, par exemple, se contentera lui aussi, le plus souvent, faute de temps et de matériel, d'un enseignement théorique où les travaux pratiques apparaissent comme un complément de cours plutôt que comme le point de départ de découvertes de lois, de théories qui permettront de prévoir d'autres expériences qui infirmeront ou confirmeront la théorie.

Or se contenter d'enseigner les mathématiques comme une science achevée comporte des pièges pédagogiques dans lesquels tombent non seulement le maître, mais encore toute la hiérarchie mathématico-administrative (ce qui excuse en partie le premier).

1º) L'école française encore fortement marquée par l'esprit bourbakiste, ne tolère aucun manquement à la sacro-sainte logique, trame de toutes les mathématiques : Les programmes adaptent au niveau considéré l'ordre des "bourbaki". Or les élèves ne pourront jamais être d'emblée des "homo mathematicus".

2º) Pas question de parler d'une chose avant qu'on soit capable d'en faire la démonstration ou d'en faire une théorie. Par conséquent on se coupe totalement des références au "concret", car en donnant aux élèves un problème tiré de la vie courante, on risquerait de tomber sur des points qui ne sont pas au programme.

3º) Privilégier les mathématiques toutes faites justifie le maintien d'une filière noble, formée des élèves que leur milieu familial a rendu aptes à saisir le pourquoi de telle ou telle théorie. Aux autres on dira qu'ils ne comprennent pas les mathématiques et on ne leur enseignera que quelques extraits des programmes des sections nobles, en se bornant à n'insister que sur les résultats. (2)

4º) On enseigne ainsi la même mathématique à tous les élèves, accroissant son rôle de sélection, sans tenir compte du caractère propre de chaque section. Dans le technique, par exemple, l'élève déjà rebuté par notre discipline, se mettra à en refuser tout emploi malgré l'outil important qu'elle devrait être.

Tout cela est grave et résulte de la tradition dogmatique de l'ensemble de l'enseignement français. Une réforme est possible, mais reste une oeuvre de longue haleine. En effet, elle demande entre autre :

- Une modification de la formation des maîtres qui recevraient, à côté d'un enseignement de haut niveau en mathématique, des bases solides en psychopédagogie et en docimologie.
- Une transformation des sujets d'examens qui, plutôt que de vérifier la connaissance d'un corpus de théoremes, feraient appel aux aptitudes à mathématiser une situation.
- Une réforme des programmes laissant plus de liberté au professeur ; par exemple la création de programmes par "Noyaux-Themes", à condition que l'on sache les uti-

---

(2) C'est alors qu'on voit apparaître des chapitres sur la continuité, dégagés de tout contexte topologique et qui ne servent à rien, sinon à justifier auprès des élèves la réputation d'ésotérisme des mathématiques.

liser correctement. (3)

- ...

Aucune de ces trois propositions n'est suffisante à elle seule, et d'autres sont nécessaires ; je me bornerai cependant, dans ce qui suit, en tant qu'enseignant du technique, à développer le problème de la mathématisation.

Si les programmes tels qu'ils sont conçus actuellement sont des guides souvent bienvenus pour les professeurs débutants, ils apparaissent rapidement comme un carcan trop étroit dès que l'enseignant a quelques années de métier. Dans le contexte actuel il est quasiment impossible de faire faire des activités de recherche aux élèves, c'est à dire que notre enseignement des mathématiques ne se fait au mieux qu'à 50%. Au mieux, car c'est la partie recherche, mathématisation, action qui fait comprendre le pourquoi des théories mathématiques et en facilite l'assimilation. Tous les élèves seront amenés un jour ou l'autre à mathématiser une situation concrète. Quelques uns seulement devront en faire une théorie achevée.

Toutes les théories mathématiques peuvent donner lieu à mathématisation. Il suffit de trouver le bon point de départ, très souvent proche des raisons historiques qui ont conduit à cette théorie. Voyons quelques exemples :

Géométrie : Historiquement, la géométrie est une mathématisation de l'espace dans lequel nous vivons, c'est-à-dire qu'une étude de cet espace a permis la mise en évidence d'un certain nombre de concepts, donc d'abstractions mathématiques, qui permettent la description et la prévision de l'espace macroscopique. En ce sens, la géométrie est une théorie physique de l'espace.

Mal'heureusement pour l'enseignant, toutes les géométries (affine, métrique,...) demandent un nombre considérable d'axiomes et si une étude descriptive et un début de mathématisation sont toujours possibles (voir par exemple les programmes de C.A.P.); la mathématisation complète est hors de portée de bien des élèves (voir les programmes de 4ème).

Cependant, malgré ces défauts, la géométrie reste pour l'enseignant moyen, grâce aux manipulations naturelles qu'elle implique, une source importante pour l'enseignement de la mathématisation. (4). A condition de ne pas vouloir déboucher trop tôt

(3) La grande majorité des réformes passées, et en tout cas les plus importantes, ont été faites sans tenir compte de l'avis des enseignants, ou même sans les informer au préalable, d'où les graves erreurs qui ont été commises (géométrie en 4ème). Il faut espérer qu'une réforme proposée par l'APMEP ne soulève pas les mêmes difficultés.

(4) Voir entre autre : Le livre du problème : "Géométrie d'incidence" (CEDIC).

sur une théorie achevée.

Statistique et probabilité : Les programmes actuels semblent vouloir faire des probabilités une application de la théorie de la mesure, alors qu'il faut en faire, dans le secondaire, une explication des statistiques. Il est plus important que des élèves comprennent la signification d'un sondage et sa fiabilité en en réalisant un, plutôt que d'entendre parler de tribus,... dont ils ne voient pas l'utilité. Il existe un certain nombre d'exemples frappant d'application des statistiques et des probabilités qui montrent toute la puissance de cette branche mathématique. Comme pour la géométrie il est nécessaire de passer beaucoup de temps sur la mathématisation de situations où intervient le hasard. Ce n'est qu'après qu'on peut esquisser une théorie et dans le secondaire on ne devrait pas dépasser le stade du dénombrement quitte à donner quelques formules généralisables.

Algèbre : La notion de groupe est fondamentale ; mais de grâce, que les groupes étudiés le soient à partir de situations concrètes : groupe de transformations, calcul de pourcentage, entiers modulo n, ...

De même en algèbre linéaire, il est primordial de montrer aux élèves que l'utilisation des espaces vectoriels est le plus souvent le seul moyen d'obtenir des solutions approchées de certains problèmes (gestion de stock par exemple). Il faut leur faire sentir que la notion de dimension est en étroite liaison avec le nombre de paramètres indépendants d'un problème concret. Ce n'est qu'à cette condition que les élèves comprendront l'utilité de cette notion.

Analyse : Les programmes actuels se limitent à faire étudier certaines fonctions, pour terminer par la représentation graphique. Ceci est un tout petit aspect du problème et qui montre bien que l'on ne s'attache pas à la mathématisation. Le physicien, l'ingénieur, le statisticien, ... partent de la courbe obtenue expérimentalement et essayent d'en déduire une fonction ; ce sont des problèmes d'interpolation et ils permettraient de faire méditer les élèves sur les extrapolations ! (5). D'un autre côté, les calculs d'intégrales ne se font pratiquement jamais au moyen de primitives ; cette notion doit donc être précédée de nombreux calculs approchés d'aires ou de longueur de courbes par toutes les méthodes que l'on voudra.

Ces quelques exemples, nécessairement parcourus trop vite dans le cadre de cet article, montreront, je l'espère, que toute théorie mathématique nécessite une phase initiale de mathématisation et que ce n'est que dans ce cadre que les élèves, pour qui notre science reste à faire, comprendront et la discipline que nous enseignons et son utilité. Cela rejoint d'ailleurs les préoccupations des pédagogues qui

(5) Voir : Fletcher , "l'algèbre linéaire par ses applications" (CEDIC).

ont montré que ce n'est que par la manipulation qu'une notion s'assimile.

Il est nécessaire, pour rénover réellement l'enseignement des mathéamtiques de prôner l'enseignement de la mathématisation. Il est bien plus important dans le monde actuel de savoir mathématiser une situation concrète que de connaître un corpus de théorèmes. On m'objectera que l'un ne va pas sans l'autre et l'on aura raison. C'est justement l'intérêt des programmes par noyaux-thèmes que de manier ces deux aspects. Le futur citoyen doit pouvoir analyser des statistiques, critiquer des quantifications, proposer des solutions ou des alternatives réalistes aux projets des administrations ... A l'époque où toutt se met en chiffres, une formation à la mathématisation est plus que jamais nécessaire. On aura compris qu'une telle formation débouche sur l'interdisciplinarité, mais ceci est une autre histoire.

Jean Lefort

J'ai compris peu à peu ce qu'était le vrai rôle de la F.P.A. Apprendre un métier, c'est le prétexte. En réalité, c'est un organisme de mise en condition. La plupart des stagiaires sont des jeunes qui ont échoué au C.A.P., ou n'ont même pas pu s'y présenter. Là où le système scolaire a échoué, la F.P.A. reprend le flambeau et conditionne le jeune à la vie d'ouvrier d'usine. Il s'agit, pour lui, de la hiérarchie, du système. La fonction objective de la F.P.A. c'est, comme l'école ou l'armée, la reproduction de notre système inégalitaire. Ce n'est pas l'acquisition de nouveaux savoirs ou savoir-faire qui donnent à l'homme plus d'autonomie et de pouvoir sur son environnement.

La plupart des stagiaires, il est vrai, ne se posent pas de questions de cet ordre. Ils viennent chercher un C.A.P. Ils l'obtiennent. Ils sont contents. Il y a toujours suffisamment d'échecs pour valoriser la réussite à l'examen. A la fin du stage, sur les dix que nous étions, six étaient satisfaits du stage. La nourriture convenait à cinq sur neuf, l'hébergement à cinq sur sept. Cinq sur neuf étaient satisfaits des connaissances acquises et six sur dix des méthodes d'enseignement. Mais seulement un sur dix était satisfait de la discipline et du règlement. La principale critique était :"ON n'est pas considérés comme des adultes."

René-Guy Chedanne
Mon stage de serrurerie
in : Le monde de l'éducation (Sept. 75)

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE

On trouvera ci-après les sujets et corrigés du Rallye mathématique d'Alsace au rapport technique duquel on se reportera pour avoir plus de détails et de renseignements sur l'analyse des copies. (le demander à l'I.R.E.M.)
Ce rallye s'adresse à des élèves de première ou de terminale qui peuvent éventuellement se grouper en binômes. Il y a eu cette année 332 candidats se répartissant ainsi :

Classe de Première :	83 binômes et 13 individuels
Classe de Terminale :	70 binômes et 13 individuels

Le jury a donc eu à examiner 179 copies.

CLASSE DE PREMIERE

Premier problème :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} = 1$$

+++
++
+

Deuxième problème :

Une usine textile stocke de la moquette par rouleaux. Les bandes de moquette sont enroulées sur des cylindres en bois de 20 cm de diamètre. L'épaisseur de la moquette est 1 cm. Donner (en cm) un encadrement de la longueur d'une bande de moquette pour que le rayon du rouleau correspondant soit 50 cm à 0,5 cm près : on indiquera l'erreur maximum que l'on peut se permettre en mesurant la longueur de la bande.

+++
++
+

Troisième problème :

(Ce problème concerne un plan affine euclidien).

On donne quatre points du plan, non cocycliques et tels que toute droite contienne au plus deux de ces quatre points.

Trouver les cercles équidistants de ces quatre points.

(La distance d'un cercle Γ à un point A est la plus courte des longueurs AM lorsque M parcourt Γ).

+++
++
+

CLASSE TERMINALE

Premier problème :

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$ l'équation :

$$1 + \cos^2 ax = \cos 2\pi x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

admet-elle une infinité de solutions ?

+++
++
+

Deuxième problème :

Démontrer que, parmi sept entiers non nuls consécutifs, il en existe toujours au moins un qui est premier avec chacun des six autres.

+++
++
+

Troisième problème :

(Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension trois).

Soit A et B deux points d'une sphère dont D_1 et D_2 sont deux diamètres distincts.

Imaginer un cas de figure où il n'est pas possible de passer de A à B par deux rotations seulement, l'une d'axe D_1, l'autre d'axe D_2.

Montrer que l'on peut passer de A à B par une suite finie de rotations effectuées alternativement autour de D_1 et D_2.

(Autrement dit : montrer qu'il existe des points $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ tels que pour tout i, on passe de A_i à A_{i+1} par une rotation convenable d'axe D_1 ou D_2).

+++
++
+

CORRIGE DES EXERCICES PROPOSES

Une solution des problèmes du Rallye Mathématique 1975 paraîtra dans le "Petit Archimède", au cours de l'année scolaire 1975-76.

Voici quelques brèves indications générales :

Classe de Première :

- Premier problème :

  Il faut mettre l'équation proposée sous la forme :

  $$|\sqrt{x} - 2| + |\sqrt{x} - 3| = 1 \ ;$$

  l'analyse des cas montre alors que l'ensemble des solutions est l'intervalle $[4,9]$.

- Deuxième problème :(moquette)

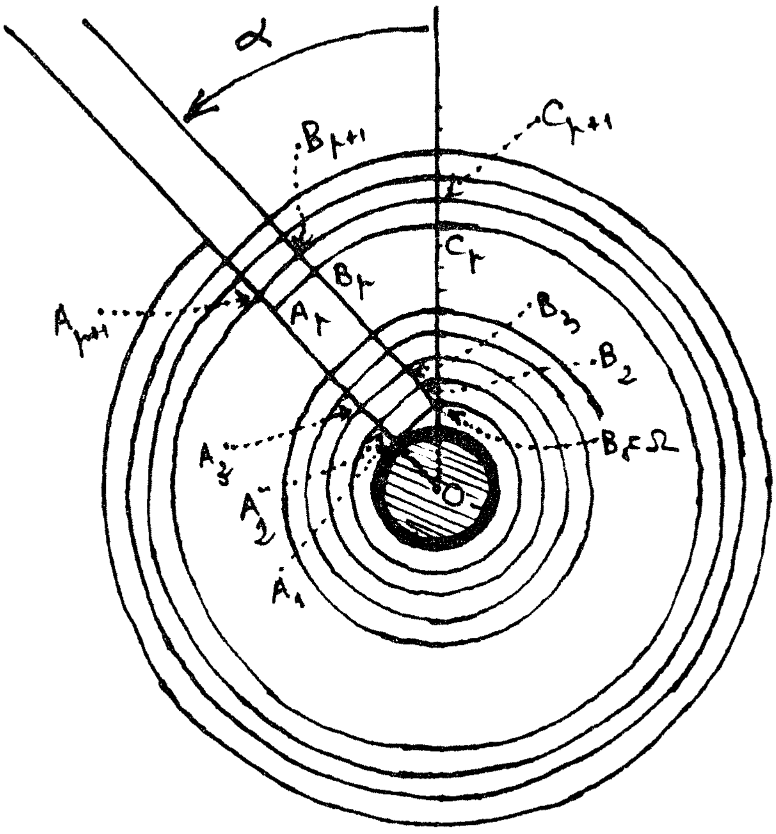
  Deux modèles mathématiques sont possibles :

  a) Empiler des cylindres d'épaisseur 1 cm ; on se ramène alors à calculer la somme d'une certaine progression arithmétique.

  b) Le modèle suivant, qui tient compte du mécanisme d'enroulement, (voir figure page suivante) :

Les hachures représentent le cylindre de bois ; les portions $A_1B_1, \dots\dots, A_pB_p$ sont rectilignes. Les arcs de cercles $\widehat{B_1C_1}, \dots, \widehat{B_pC_p}$, ont pour centre Ω. Les arcs de cercle $\widehat{\Omega A_2}, \dots, \widehat{C_pA_{p+1}}$ ont pour centre 0. L'angle α vaut environ 25 degrés.

(N.B : Ce modèle a été imaginé par deux binômes, qui ont calculé l'angle α correctement).



Cependant, la différence des longueurs de moquette trouvées dans les modèles a) et b) est négligeable devant l'erreur que l'on peut se permettre sur cette longueur, (comme l'ont indiqué les copies citées).

- Troisième problème :

Une analyse de la question montre que si les points sont "en position générale", il y a sept solutions évidentes :
Soit O le centre d'un cercle Γ passant par trois des points et R_1 le rayon de Γ ; soit R_2 la distance de O au point restant : le cercle C de centre O et de rayon $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ convient.

On obtient ainsi quatre cercles solutions. Soit ω le point commun (il existe en général) aux médiatrices de deux segments $[A_1, B_1]$, $[A_2, B_2]$ obtenus en groupant les 4 points donnés deux par deux ;
si $r_1 = \omega A_1$ et $r_2 = \omega A_2$, le cercle de centre ω et de rayon $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ convient ; on obtient ainsi trois autres cercles solutions.
On montre que tout cercle solution est nécessairement l'un de ceux-là.
D'où en général 7 cercles colutions. Les cas d'exception sont :

- Le trapèze non isocèle et non parallélogramme (six solutions)
- Le parallélogramme (cinq solutions).

Classe de Terminale :

- Premier problème :

Avant de se lancer dans des calculs échevelés, on peut remarquer que les deux membres doivent être égaux à 1. Il faut alors voir que l'équation admet une infinité de solutions si et seulement si elle en admet au moins une.

Un raisonnement d'arithmétique montre alors que les valeurs de a qui conviennent sont les

$$\frac{\pi(2k+1)}{2k'} \quad \text{où } (k,k') \text{ parcourt } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$$

(N.B : très peu de candidats ont donné et justifié le résultat complet).

- Deuxième problème :

Tout revient à voir que parmi ces sept entiers, il en existe au moins un qui n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

Soit $(n + k)$ $k \in [\![0,6]\!]$ ces sept entiers. Traitons le cas où n est pair (le cas où n est impair se traite de même).

Alors $n + 1$, $n + 3$ et $n + 5$ sont impairs ; parmi ces trois nombres, deux au moins sont non divisibles par 3, soit p et q ; on a donc (si $p < q$), $q - p = 2$ ou 4, et p et q impairs : il en résulte que l'un au moins de ces nombres est non divisible par 5. D'où le résultat.

- Troisième problème :

Ce problème était difficile, largement du niveau des Olympiades Internationales. (Aucun candidat n'a donné de démonstration, mais quelques-uns ont bien compris la situation).

Soit $\{A_1, B_1\}$ et $\{A_2, B_2\}$ les intersections respectives de D_1 et D_2 avec la sphère.

Voici quelques idées qu'il s'agit de justifier :

- Il suffit de résoudre la question lorsque $A = A_1$

- En faisant tourner A_1 autour de D_2, on obtient un cercle Γ_1.

En faisant tourner Γ_1 autour de D_1, on obtient une calotte sphérique C_1 de centre A_1. En faisant tourner C_1 autour de D_2, on obtient une calotte sphérique C'_1 de centre A_2.

Par récurrence, on définit des calottes sphériques C_n de centre A_1 et C'_n de centre $A_2 (n \geq 1)$ telles que pour $n \geq 1$, C'_n s'obtient en faisant tourner C_n autour de D_2, et pour $n \geq 2$, C_n s'obtient en faisant tourner C'_{n-1} autour de D_1.

Les méridiennes des calottes successives sont des arcs, dont la mesure augmente du double de l'angle des droites D_1 et D_2 à chaque pas. Cela permet de justifier que C_n est la sphère entière pour n assez grand.

L'OUVERT est et doit rester le journal des professeurs de mathématiques de l'académie. L'OUVERT ne peut donc exister que si ces professeurs lui donne vie, c'est-à-dire fournissent son contenu. Vous qui avez essayé telle ou telle chose dans votre classe, que l'expérience ait réussie ou échoué, faites nous en part. L'OUVERT se veut aussi un lieu d'échange ; posez des questions, des collègues y répondront.

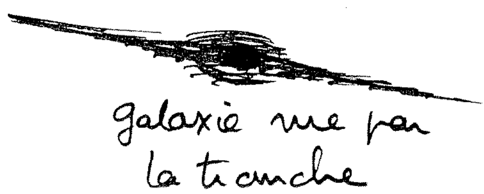
Le numéro 9 de l'OUVERT, dont la parution est prévue pour le mois de Mai 1976, contiendra des articles sur l'oeuvre de Piaget. Nous espérons que des collègues déjà bien informés, pourront nous en fournir d'autres : Bibliographie, biographie, résumés d'ouvrage, ... Ecrivez-nous sans plus attendre :

Jean Lefort, 27 route de Neuf-Brisach, 68000 Colmar.

L' OUVERT : responsable de la publication : J. Lefort, 27 route de Neuf-Brisach, 68000 Colmar. Impression : I.R.E.M. de Strasbourg, rue du général Zimmer, 67000 Strasbourg.

Mécanique des fluides et cosmologie

Nous habitons sur une petite planète, tournant autour d'une étoile très banale. Tellement banale qu'elle est pratiquement l'étoile standard de notre galaxie, la voie lactée. L'étoile la plus proche du soleil est Proxima du centaure, distante de quelques quatre années lumière. A l'échelle d'une galaxie, les étoiles sont des objets très petits. Le diamètre du soleil est de l'ordre de un million de kilomètres. C'est de l'ordre de quelques secondes lumière. Sachant qu'il y a 3×10^7 secondes dans une année, nous voyons combien ce diamètre stellaire est faible en comparaison de la distance entre étoiles. Il existe bien sûr des étoiles plus grosses, des supergéantes. Mais tout au plus seraient-elles capables d'englober le système solaire soit une centaine de fois le diamètre du soleil. Ainsi le remplissage de l'espace galactique par les étoiles est très faible.



Une galaxie compte cent milliards d'étoiles et s'étend sur cent mille années lumière. C'est une grosse lentille applatie, renflée en son centre, et qui tourne sur elle-même en deux cent millions d'années*. Le mouvement de rotation est différentiel, c'est-à-dire que le centre tourne plus vite que la périphérie. Le noyau de la galaxie tourne "en corps solide".

Le milieu stellaire est tellement serré, que l'on peut valablement l'assimiler à un fluide, à un "gaz d'étoiles", dans lequel ces dernières joueraient le rôle des molécules. Cet ensemble stellaire a une propriété remarquable : il est non-collisionnel. Non seulement les étoiles ne s'interpénétrent jamais, mais elles ne passent pratiquement jamais assez près l'une de l'autre pour que cela affecte leurs trajectoires de manière sensible. Ainsi le calcul montre que le libre parcours moyen stellaire s'effectue en 10^{13} ans, soit mille fois plus que l'âge estimé de l'Univers.

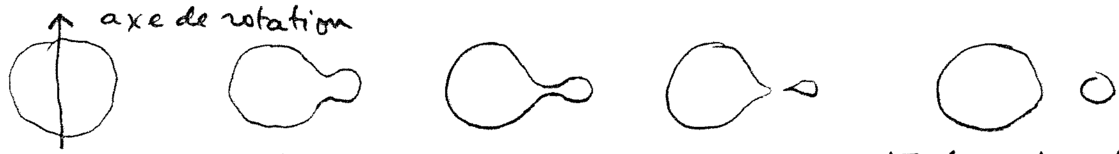
Entre les étoiles il y a du gaz. Essentiellement de l'hydrogène neutre. Une faible fraction est sous forme ionisée. On trouve aussi des poussières, mais en

(*) Il existe des galaxies qui ne tournent pas. Elles sont alors sphériques.

quantité négligeable. La quantité du gaz représente de un à dix atomes par centimètre cube. Celui-ci est distribué de façon très inhomogène, par paquets, ou plutôt par nuages. Ceux-ci ont des dimensions et des formes très variées. Leur masse peut représenter de une à mille masses solaires. Dans les galaxies dites elliptiques, le gaz est pratiquement absent, mais dans certaines galaxies spirales celui-ci peut représenter jusqu'à 40% de la masse totale. En règle générale la dynamique galactique sera dominée par la présence des étoiles. (On ne sait vraiment pas dans quel sens faire intervenir le gaz d'hydrogène dans les modèles mathématiques !)

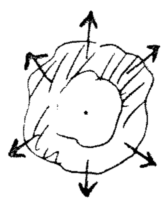
On ne peut pas, comme nous l'avons fait pour les étoiles, considérer les paquets d'hydrogène comme les molécules d'un fluide. En effet ceux-ci ne sont pas stables, ils se font et se défont plusieurs centaines de fois par tour de galaxie. Dérivant dans la soupe galactique à la vitesse moyenne de cinq kilomètres à la seconde, ils entrent fréquement en collision. Comme la vitesse relative des deux nuages excède la vitesse du son dans ceux-ci, l'interpénétration s'accompagne d'un choc ionisant, qui dissipe la presque totalité de l'énergie, sous forme de rayonnement, et entraîne la dislocation des nuages. Ils se reformeront par instabilité gravitationnelle.

Le phénomène "étoile" empêche les nuages d'hydrogène d'imploser. Quand la densité atteint la valeur critique, les étoiles se forment par grappes, et rayonnent leur énergie à travers le nuage, en communiquant aux atomes d'hydrogène de celui-ci une plus grande vitesse, ce qui a un effet stabilisant. Lorsqu'une étoile naît, elle a très souvent tendance à se casser en deux, par une instabilité de style "cacahuète". Aussi près de la moitié des étoiles de notre galaxie sont des étoiles doubles, y compris notre soleil. Sa compagne n'est autre que... Jupiter, étoile ratée, qui n'a pas reçu dans le partage assez d'hydrogène pour pouvoir s'allumer.



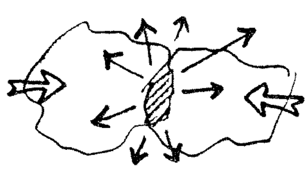
Instabilité stellaire conduisant à une étoile double

Abandonné à lui-même, le gaz interstellaire, du fait des collisions, perdrait rapidement son énergie d'agitation, laquelle serait évacuée sous forme radiative. Le "cooling time" correspondant étant de cent mille années (un millième de tour de la galaxie). L'agitation est entretenue par l'énergie li-



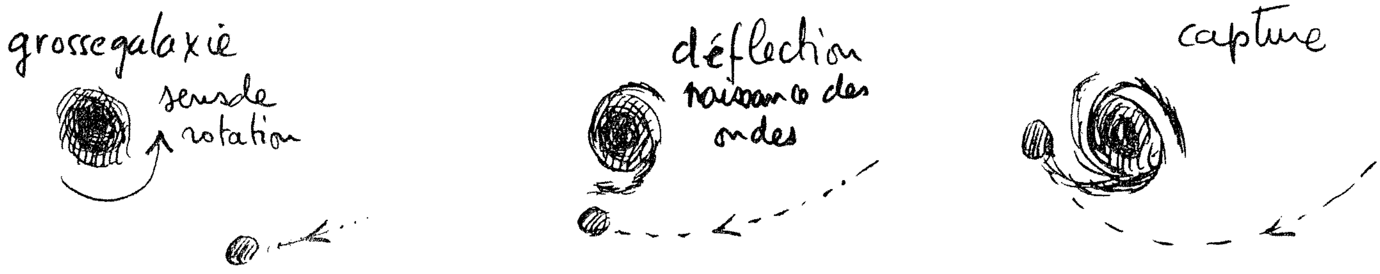
Supernova

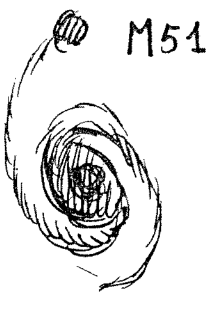
amas d'étoiles



Collision de 2 nuages avec émission de rayonnement bérée par les étoiles, et surtout les supernovae. On compte dans une galaxie une supernovae par siècle. Cela en fait deux millions par tour. Le rayon d'action de ces supernovae est suffisant pour que l'effet de toutes s'étende à l'ensemble de la galaxie. Ainsi à l'image du disque laiteux et paisible, se substitue celle d'une roue de fête foraine.

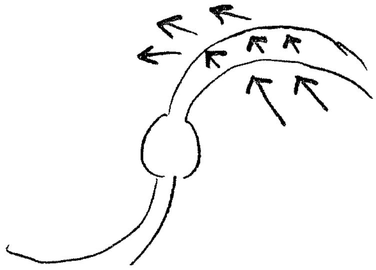
Le remplissage de l'espace par les galaxiesest assez important, puisque celles-ci ne sont distantes que de dix à cent fois leur diamètre. Celles-ci se répartissent en amas, plus ou moins riches (de dix à dixmille individus). Dans ces amas on observe des collisions entre galaxies avec interpénétration. Comme les étoiles de chacune d'elles forment un système non-collisionnel, les deux galaxies vont se traverser "sans s'en apercevoir". Dans la collision, le gaz interstellaire sera fortement chauffé et ses atomes atteindront la vitesse de libération. Il existe comme nous l'avons dit, des galaxies sans gaz. Une théorie explicative consiste à dire qu'elles l'ont perdu dans une collision, Une autre théorie situe cette évasion du gaz à la naissance même de la galaxie. Au début de la contraction de la proto-galaxie apparaissent des "grumeaux" dans lesquels les étoiles primitives vont naître par paquets de dix à dix mille individus à la fois. Dans la jeunesse de ces étoiles une grande quantité d'énergie est rayonnée, qui chauffe le gaz résiduel, lequel va "s'évaporer". Si l'énergie communiquée aux atomes à cette phase de la genèse de la galaxie est suffisante, le gaz ira se perdre définitivement dans l'espace intergalactique. Sinon, lorsque les étoiles se seront calmées, celui-ci retombera, en formant un disque très plat, où naîtrons de nouvelles étoiles.



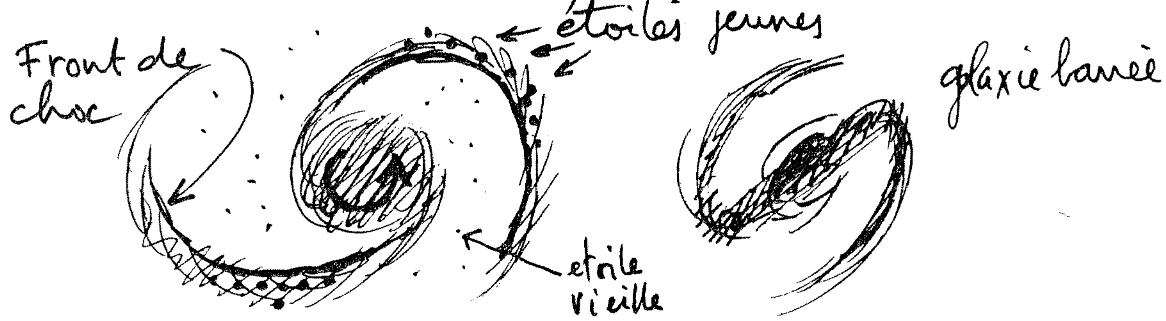


La structure spirale des galaxies reste assez mystérieuse. Une théorie l'attribue aux collisions entre galaxies. Des expériences de simulation sur ordinateur ont en effet montré que le passage d'une galaxie au voisinage d'une autre pouvait, dans certaines conditions, donner naissance à des bras spiraux : On explique ainsi une formation comme M

51, galaxie des chiens de chasse. Il semble en effet que le petit objet visible au bout du bras ne soit pas dans le plan de la galaxie. Par ailleurs la mesure des red shift (décalage vers le rouge du à l'effet doppler) fait état d'une différence des vitesses de quelques 100 km/s. Suivant une autre théorie la structure spirale apparaîtrait spontanément, par instabilité gravitationnelle. Le bras spiral aurait le caractère d'une onde de densité. Onde "training", c'est-à-dire telle que la vitesse de groupe soit inférieure à la vitesse de phase. L'onde est un phénomène très non-linéaire. Dans sa concavité un front de choc, où le gaz interstellaire est fortement recomprimé. C'est dans cette partie de la galaxie que se forment les nouvelles étoiles. On n'en trouve pas ailleurs. La raison est simple : lorsque ces étoiles migrent hors des bras, elles vieillissent très vite, et changent de type spectral.



Dans certaines galaxies, on observe dans la partie centrale, une barre. ce phénomène n'a pas reçu d'explication satisfaisante jusqu'ici.



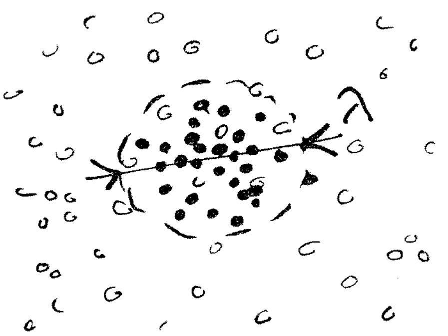
Revenons aux amas de galaxies. Le calcul montre que le temps de libre parcours entre deux collisions est de l'ordre de l'âge estimé de l'Univers.

On n'a pas détecté jusqu'ici de superamas. L'amas de galaxies peut donc être considéré comme l'élément fondamental de l'Univers. ce gaz d'amas est-il collisionnel ? Difficile à dire. On n'a pas une évaluation suffisement précise de la vitesse de dérive des amas les uns par rapport aux autres.

LE MECANISME DE LA FRAGMENTATION

Toute distribution uniforme de matière a tendance à se fragmenter, par instabilité gravitationnelle. Pourquoi et comment ?

Dans une répartition uniforme d'éléments de masse m figurons une surdensité accidentelle s'étendant sur une distance λ . Si $\langle C \rangle$ est la vitesse d'agitation des éléments, le temps d'autodispersion de cette surdensité sera : $\lambda / \langle C \rangle$.
Par ailleurs on calcule que le temps caractérisitique d'accrétion, au bout duquel la



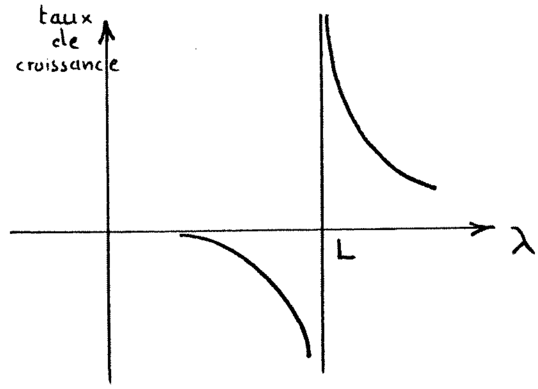
perturbation aurait doublé sa masse, en attirant les éléments immédiatement voisins est :

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi G m n}}$$

où G est la constante de gravitation, m la masse de l'élément et n le nombre d'éléments par unité de volume. On en déduit que toute perturbation telle que :

$$\lambda > L = \langle C \rangle \cdot \tau$$

s'amplifiera. Le taux de croissance de la perturbation a l'allure ci-après :



Conclusion : les perturbations s'étendront sur des dimensions très légèrement supérieures à L , longueur de Jeans.* Inversement les condensations stables auront un diamètre très proche de la longueur de Jeans. Si l'on calcule la longueur de Jeans associée au milieu stellaire, ensemble que l'on peut considérer comme stable, on trouve une valeur de l'ordre des dimensions galactiques. Les paquets de gaz interstellaire ont également un diamètre correspondant à la longueur de Jeans calculée pour les atomes d'hydrogène qui les composent.

Quelle est maintenant la plus grande entité cosmique qui puisse présenter un mécanisme d'instabilité au sens de Jeans ?

Le temps d'accrétion est, comme nous l'avons vu, comme l'inverse de la racine de la densité de matière. Celle-ci est évaluée, dans l'Univers à 10^{-29} ou 10^{-30} g/cm^3 , suivant les auteurs. Le temps de Jeans correspondant est alors compris entre 10^{10} et $3 . 10^{10}$ années. Considérant que le champ gravitationnel se propage à une vitesse finie, qui est celle de la lumière, nous dirons que des fluctuations ne peuvent se manifester sur une distance telle que le temps mis par la lumière à la traverser soit égal ou supérieur au temps de Jeans.

Cette dimension critique se trouve alors être comprise entre 10^{10} et $3. 10^{10}$ années-lumière. Sous cet éclairage l'Univers peut être alors considéré comme la plus grande entité pulsante possible, au sens de Jeans. Il est tout à fait remarquable de retrouver une valeur du temps de Jeans qui corresponde à l'âge estimé de l'Univers.

(*) Equation de Jeans : $\Delta\Psi + \frac{\Psi}{L^2} - \frac{m}{kT}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$

(on peut l'établir à partir de l'équation de Vlasov par méthode perturbationnelle).
Ψ est le potentiel gravitationnel, T la température, t le temps et k est la constante de Boltzman.

Considérons l'Univers comme un gaz formé de particules de masse m, (les amas de galaxies). Et supposons que ceci forme un ensemble non-collisionnel. Nous allons décrire ce système dans l'espace des phases : positions plus vitesses (six dimensions). Dans une cellule dxdydzdudvdw de cet espace nous écrirons qu'il y a f.dxdydzdudvdw éléments. f, densité dans cet espace à six dimensions, est la fonction de distribution de la vitesse. f dépend de x , y , z , u , v , w et t (temps), en abrégé : $f(\vec{r}, \vec{w}, t)$.

Cette fonction de distribution obéīt à l'équation de Vlasov, qui découle dut héorème de Liouville.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial r}} - \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial r} \iint \frac{G m^2 f \, d_3 r' \, d_3 w}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial w}} = 0$$

Ceci est une équation intégrodifférentielle sur f . Elle n'est absolument pas linéaire.

A partir de la fonction f nous pouvons retrouver tous les observables macroscopiques. Ainsi la densité de particules n'est autre que l'intégrale de f dans l'espace des vitesses :

$$n = \int f \, d_3 w$$

De même la vitesse macroscopique se définit par la moyenne :

$$\langle \vec{w} \rangle = \frac{1}{n} \int \vec{w} \, f \, d_3 w$$

A partir de laquelle on peut définir la vitesse d'agitation :

$$\vec{c} = \vec{w} - \langle \vec{w} \rangle \qquad \text{et évidement :} \qquad \int \vec{c} \cdot f \, d_3 w = 0$$

La température du milieu se définit par :

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m \frac{1}{n} \int (\vec{w} - \langle \vec{w} \rangle)^2 f \, d_3 w = \frac{1}{2} m \langle c^2 \rangle$$

où k est la constante de Boltzmann et $\langle c^2 \rangle$ la vitesse quadratique moyenne d'agitation.

Le tenseur des pressions est alors :

$$\vec{\vec{P}} = m \int \vec{\vec{cc}} \cdot f \cdot d_3 w = n m \langle \vec{\vec{cc}} \rangle$$

où $\vec{\vec{CC}}$ est la matrice dyadique fabriquée à l'aide du vecteur C :

$$\vec{\vec{CC}} = \begin{Vmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{Vmatrix}$$

Cette représentation d'un fluide à l'aide de la fonction f est donc très commode. La fonction est continue, et pourtant le formalisme tient compte de la répartition discrète de la matière à travers l'espace.

On sait peut de chose sur l'espace fonctionnel constitué par les solutions de l'équation de Vlasov. Cette équation a d'ailleurs une propriété singulière, qui est celle de conserver l'entropie ! Il devient donc impossible de se servir de la notion d'équilibre thermodynamique local pour construire une solution perturbationnelle, comme on le fait avec l'équation de Blotzmann, dans le calcul des paramètres de transport dans un gaz. Le fil conducteur manque. On est réduit à chercher assez empiriquement des solutions particulières.

L'équation de Vlasov admet pour solution la fonction :

$$f = n \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}\left(\vec{w} - \langle\vec{w}\rangle\right)^2\right]$$

solution de Maxwell-Boltzmann, correspondant à l'entropie maximale. La solution stationnaire a été étudié par Boltzmann lui-même il y a presque un siècle. Nous avons étudié complétement la solution instationnaire. Il se trouve que cette solution a un caractère cosmologique évident !

L'équation de Vlasov est une équation intégrodifférentielle. Nous allons lui substituer un ensemble de trois équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \dfrac{\vec{\partial} f}{\partial r} - \dfrac{\vec{\partial} \Psi}{\partial r} \cdot \dfrac{\vec{\partial} f}{\partial w} = 0 \\ \Delta \Psi = 4 \pi G m n \\ n = \int f \, d_3 w \end{cases}$$

Dans l'équation numéro deux le lecteur aura reconnu l'équation de Poisson, qui traduit le fait que le potentiel gravitationnel Ψ est newtonien.

Lorsqu'on introduit une solution maxwellienne dans l'équation de Vlasov ainsi modifiée on a alors à résoudre un système de 20 équations aux dérivées partielles, plus l'équation de Poisson. Fort heureusement il existe un certain découplage dans ces équations. Ainsi les dix première sont satisfaites pour :

$$\frac{\vec{\partial} T}{\partial r} = 0$$

le milieu sera donc homogène en température.

Les six équations suivantes fournissent le champ de la vitesse macroscopique : $$\vec{w} = -\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt}\vec{r} + \omega(t)\,\vec{k} \cdot \vec{r}$$ où $k = (0,0,1)$

la première composante de la vitesse correspond au champ de Hubble : vitesse proportionnelle à l'éloignement. La seconde composante représente un mouvement de rotation en corps solide.

L'équation suivante nous dit que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle\vec{w}\rangle \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial r}\right)\left(\frac{n}{T^{3/2}}\right) = 0$$

notre Univers est donc adiabatique.

Reste trois équations où figurent le potentiel   et la densité n ,

---

(*) l'entropie s vaut $-k \int f \,\mathrm{Log} f \, d_3 w$. L'équation de Vlasov conservant l'entropie on a $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$.

plus l'équation de poisson. En les combinant nous obtenons :

$$\Delta \Psi = 4\pi G m n_0 \exp\left(-\frac{m\Psi}{kT} + h(\vec{r}, t)\right)$$

Il apparaît que la solution $\frac{m\Psi}{kT} = h(\vec{r}, t)$, h étant une fonction connue, convient et est <u>unique</u>. Cette solution donne un champ de densité <u>homogène</u>.

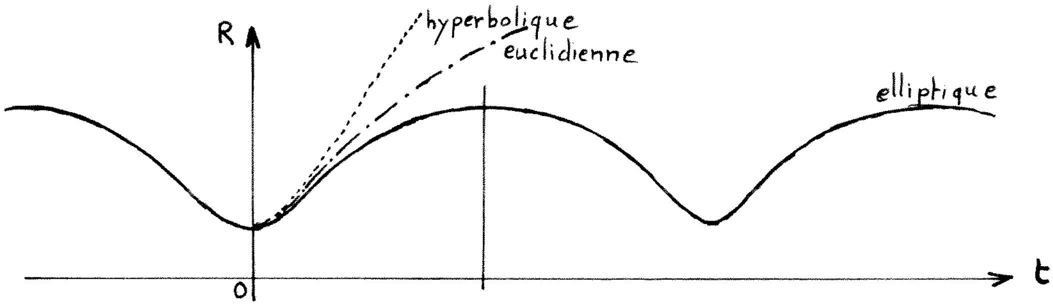
Le lien entre la vitesse angulaire ω et la température est très simple puisque : $\omega = \lambda \cdot T$, λ étant une constante.

Soit R une dimension caractéristique du système. Celle-ci va varier suivant :

$$\boxed{R^2 \ddot{R} + \frac{1}{3} = \frac{2\lambda^2}{3R}}$$

On retrouve l'équation cosmologique d'Heckmann et Sücking (1965), dite aussi pseudo-équation de Friedman. Cette solution correspondant à une valeur nulle de la constante cosmologique Λ.

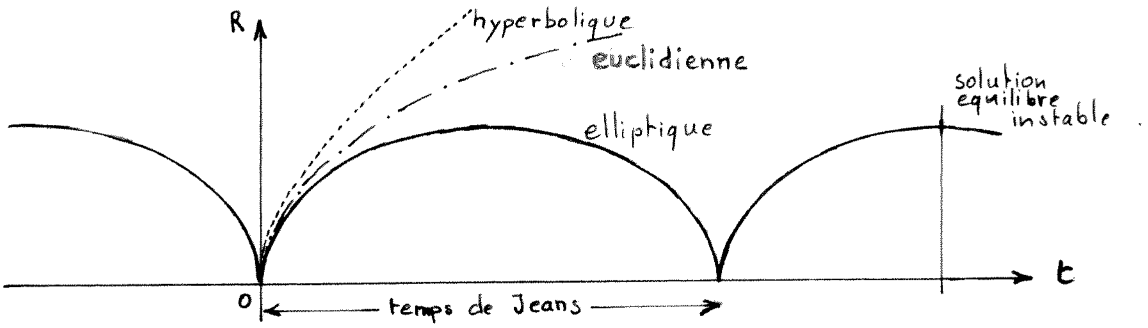
Nous obtenons, comme ces auteurs, trois types de solutions, dites hyperboliques, elliptiques et euclidiennes :



Il n'y a pas d'équilibre stable de cet Univers. L'équilibre instable correspond à :

$$R = \lambda\sqrt{2}$$

C'est le modèle d'Univers tournant de Goedel. Comme on le voit il n'y a pas, grâce à la rotation d'état hyperdense. Les solutions elliptiques sont périodiques. Les solutions euclidiennes et hyperboliques donnent une expansion indéfinie. λ est un paramètre libre qui chiffre l'importance de ce mécanisme de rotation. Si l'on prend une valeur nulle de ce paramètre, on retrouve l'équation de Friedman bien connue, avec valeur de la constante cosmologique nulle :



Il y a cette fois un état hyperdense. La solution périodique est cycloïdale. Notons que la période est égale, à très peu près, au fameux temps de Jeans !

Tout ceci constitue une cosmologie newtonienne. Il n'est donc pas nécessaire de recourir au formalisme compliqué de la relativité générale pour en extraire les aspects essentiels.

Dans le cas des Univers sans rotation, ceci avait été fait par Milne et Mc Crea en 1934, à partir d'équations de la mécanique des fluides plus classiques (les équations d'Euler), moyennant certaines hypothèses. L'homogénéïté en densité étant introduite a priori et non déduite, comme ici.

"pourquoi faire simple, quand on peut faire compliqué ..."
Les Shaddocks.

DYNAMIQUE STELLAIRE

L'équation de Vlasov se prête très bien à l'étude des systèmes stellaires, puisque comme nous l'avons vu le "gaz d'étoiles" forme un ensemble non-collisionnel.

La solution maxwellienne stationnaire ou instationnaire, ne peut convenir à décrire une galaxie puisqu'elle conduit à une densité constante dans l'espace. Cependant elle pourrait aider à représenter les noyaux des galaxies, où la vitesse angulaire est constante (rotation en corps solide) et où la densité varie peu. La solution instationnaire pourrait alors décrire le comportement des galaxies explosives (galaxies de Seyfert). On sait que dans certaines galaxies les noyaux, constitués par des centaines de millions d'étoiles, implosent brusquement, conduisant à un phénomène cataclysmique défiant l'imagination. Le temps caractéristique de l'implosion serait alors, suivant cette représentation, le temps de Jeans, correspondant en gros à une rotation galactique.

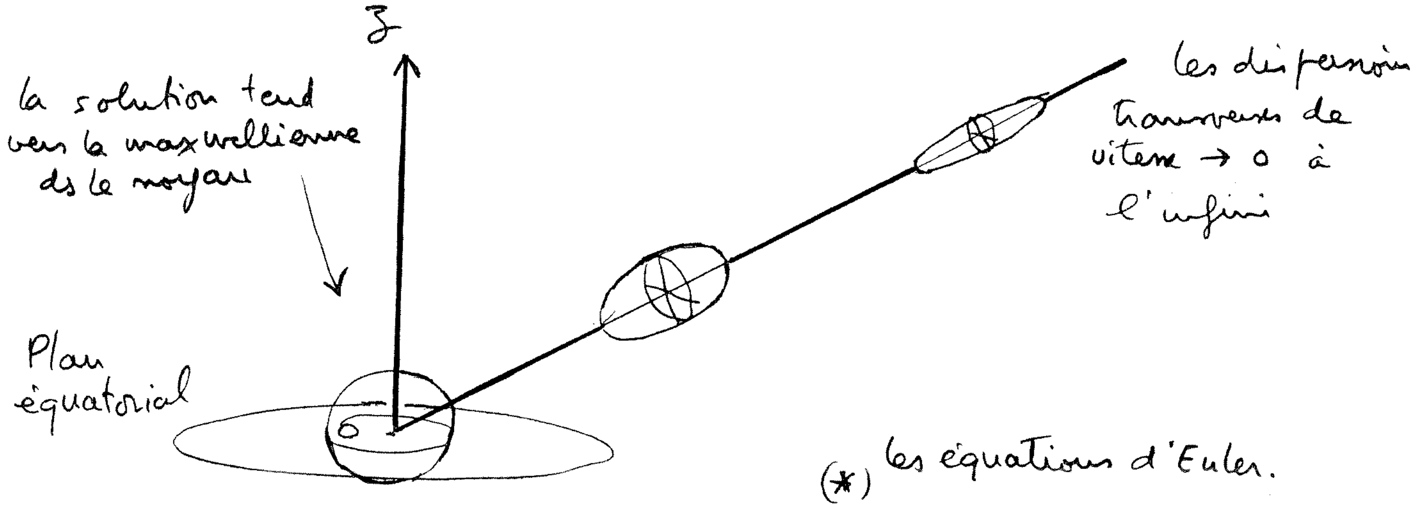
Galaxie en explosion (de Seyfert).

Pour une galaxie en rotation différentielle, on a songé (Schwartzschild, Oort, Jeans) à utiliser une représentation elliptique, c'est-à-dire telle que Log(f) soit un polynôme elliptique en u , v , w composantes de la vitesse.

Comme pour la solution maxwellienne, on est conduit à un système de 20 équations aux dérivées partielles, plus l'équation de Poisson.

Nous allons définir ce que l'on appellera l'ellipsoïde des vitesses. En un point quelconque (x,y,z) de l'espace portons le vecteur vitesse résiduelle (d'agitation) moyen, dans une direction donnée. Celui-ci va décrire une certaine surface. On montre que dans le cas présent cette surface est un ellipsoïde.

Précisons tout de suite que nous avons montré l'inexistence de la solution elliptique instationnaire. Nou ne nous occuperons donc que de la solution stationnaire. Comme dans l'étude maxwellienne, il y a un certain découplage dans les équations, qui permettent de construire les champs de température et de vitesse macroscopique. Plus précisément on obtient des résultat quand à la géomètrie de l'ellipsoïde des vitesses. Les dispersions de vitesses transverses s'annullent à l'infini. La dis-

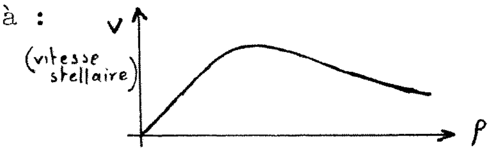


(*) les équations d'Euler.

persion de vitesse radiale est une constante. Le milieu n'est donc plus homogène en température, puisque celle-ci décroit du centre à la périphérie galactique.

La loi de rotation correspond à :

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + a\rho^2 + b z^2}$$

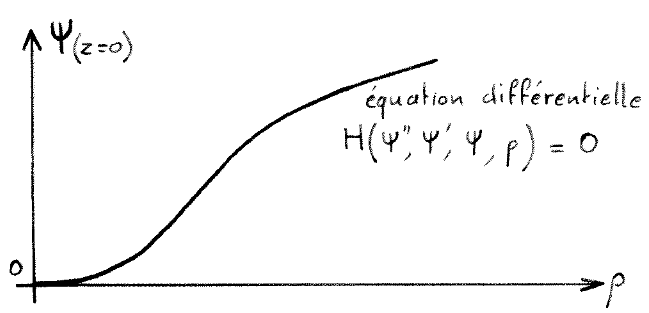


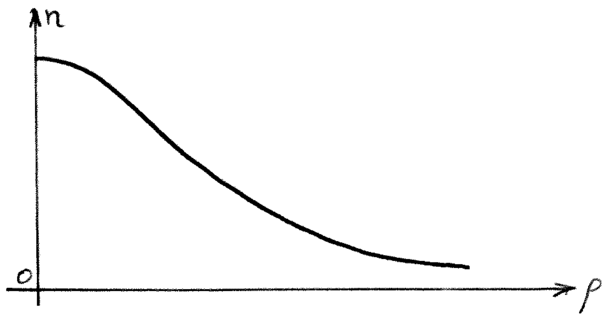
Dans le noyau, on retrouvera les propriétés de la maxwelliennne : isotropie de la distribution des vitesses, densité constante, température constante, rotation en corps solide? Tous ces résultats sont en bon accord avec les observations. Tout ceci a été calculé essentiellement par Oört en 1928.

Restaient quatre équations, plus l'équation de Poisson. Une des équations s'élimine du fait de la stationnarité. Une autre disparait dans un milieu exempt de fluctuations azimuthales (nous avons aussi démontré l'inexistance d'une solution avec de telles fluctuations). Soient donc deux équations plus Poisson.

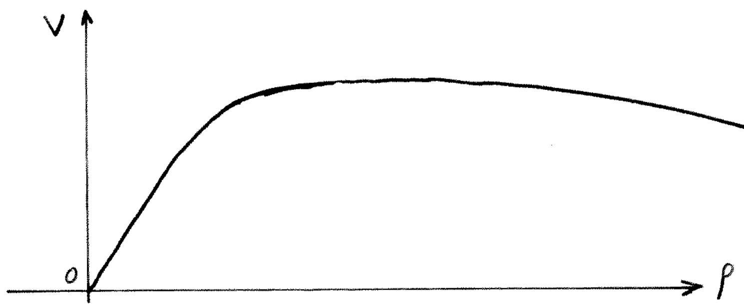
Nous trouvons ici un problème d'existance assez original. On constate en effet que cette solution elliptique n'existe <u>que</u> dans le plan équatorial de la galaxie. En dehors de ce plan $z = 0$ le système des 21 équations n'est plus satisfait.

Dans ce plan équatorial nous avons construit la solution qui n'est plus alors entièrement déterminée, mais dépend d'un paramètre libre. Les courbes de potentiel et de densité ont l'allure ci-après :





A partir de là, il est possible de calculer la vitesse d'une particule orbitant dans ce champ de potentiel :



Ceci correspond à la vitesse circulaire ou quasi-circulaire d'un paquet d'hydrogène orbitant dans le champ des étoiles (c'est précisément ce qu'on mesure !) Il y a un très bon accord qualitatif avec les résultats d'observations.

Enfin on vérifie que la solution existe bien en montrant que f est fonction d'intégrales premères de l'équation de Vlasov, que sont l'énergie et le moment cinétique par rapport à Oz :

$$f = f(E, J, J^2)$$

cette condition n'étant bien sûr satisfaite <u>que</u> dans le plan $z = 0$, puisqu'il y a inexistence hors du plan.

CONCLUSION

La philosophie de l'équation de Vlasov reste à découvrir. Pourquoi la solution correspondant au maximum d'entropie redonne-t-elle les grands traits de la théorie de la relativité générale ?

Pourquoi la solution elliptique stationnaire existe-t-elle dans le plan diamétrale et pas ailleurs ? Quelle peut être la forme de la solution hors de ce plan ?

L'existence de la solution dans le plan entraîne-t-elle l'existence hors de ce plan d'une solution et si oui, cette solution est-elle unique ?

Quelle méthode permettrait-elle de construire une telle solution ?

Autant de questions auxquelles je suis présentement incapa-ble de répondre, n'étant pas mathématicien.

Jean-Pierre PETIT
Chargé de Recherche au C.N.R.S.
Observatoire de Marseille
1, place Le Verrier
MARSEILLE 13

Pour l'envoi de l'OUVERT ainsi d'ailleurs que pour l'envoi de toute information mathématique, nous disposons d'un fichier qui se constitue petit à petit mais qui est loin d'être à jour. Tous les membres de l'APMEP à jour de leur cotisation doivent recevoir l'OUVERT. Vous qui nous lisez, il se peut que vous soyez dans l'une des deux situations suivantes :

1) Vous êtes membre de l'A.P.M.E.P. et ce numéro vous a été prêté par un collègue car vous n'avez pas reçu le vôtre. Envoyez alors à l'adresse ci-dessous votre nom, adresse et si possible votre numéro de membre APMEP.

2) Vous connaissez un collègue qui ne reçoit pas l'OUVERT bien que membre de l'A.P.M.E.P. Envoyez alors à l'adresse ci-dessous son nom, adresse et si possible son numéro APMEP.

Monsieur H. Silvestre, 17 rue Grimling, 67200 Strasbourg.

Le numéro 5 de l'OUVERT a été rapidement épuisé. De nombreuses personnes nous le réclamant encore pour pouvoir disposer du texte de la conférence de M. Zeeman sur la "théorie des catastrophes", nous avons décidé de faire un tiré-à-part de ce texte. Il est disponible au Secrétariat de l'IREM rue du général Zimmer à Strasbourg.

MATHEMATIQUES DANS LES C.E.S. EXPERIMENTAUX

On trouvera ci-dessous des extraits de la conclusion du chapitre : "Etude Comparative des résultats en mathématiques en 6º" par mesdames Levasseur et Pelnard-Considéré. L'ouvrage publié par l'I.N.R.D.P. traite des mathématiques dans les C.E.S. expérimentaux (groupes de niveaux).

Il est sans doute prématuré de porter un jugement global sur l'efficacité de la nouvelle structure pédagogique introduite dans le premier cycle. Pourtant, on peut déjà porter à son actif un certain nombre de résultats, en mathématiques tout au moins. Nous avons vu que le fait d'accueillir tous les élèves qui se présentent en sixième et de n'avoir qu'un seul curriculum pour l'ensemble ne porte pas préjudice au niveau global atteint. Certes, les enfants qui auraient été dirigés vers une classe de transition selon l'organisation traditionnelle sont en grande majorité des élèves faibles et abaissent le niveau général de l'échantillon expérimental. Mais ces élèves exceptés, le niveau général en sixième est égal dans l'un ou l'autre système. Il n'y a donc pas dans l'organisation nouvelle de risque de dévaluation de l'enseignement des mathématiques. Mais surtout la sélection imposée par l'organisation traditionnelle a un aspect négatif dommageable pour les élèves les moins doués, par le caractère quasi-définitif de la ségrégation des enfants dirigés vers les classes de transition. La structure en groupe de niveaux a l'avantage d'éviter cette sélection à tous les enfants et en particulier aux enfants "rattrapables". N'y-a-t-il pas un risque d'un autre type de ségrégation ? Par un cloisonnement progressif entre les groupes de niveaux dont on a vu qu'ils différaient très fortement entre eux ? Beaucoup de vigilance sera nécessaire pour en éviter les dangers et garder au système toute la souplesse qu'il prévoit. Il est vrai que ce danger est amoindri par la possibilité pour chaque élève de se classer différemment dans les groupes de niveau de chaque discipline. Mais on peut prévoir un certain nombre de problèmes psychologiques pour les élèves qui seront classés C ou D dans toutes les disciplines.
(...)

Essai de coordination math-physique en T.C

Le programme de mathématiques de T.C. doit, en principe, permettre aux élèves de disposer des notions d'analyse au moment où ils en ont besoin en physique (ou en sciences naturelles). Il est donc souhaitable qu'elles soient exposées assez tôt dans l'année. Pour obtenir une bonne coordination, il faut étudier l'analyse au premier trimestre et y consacrer l'horaire complet de mathématique.

Plan proposé : voir ci-après.

Remarques :

1) L'espace physique est toujours orienté. Or une définition exacte de l'orientation de l'espace de dimension 3 ne peut se faire qu'après l'étude des transformations orthogonales, donc assez loin dans le programme de géométrie. On pourrait peut-être définir provisoirement le produit vectoriel par ses coordonnées dans une base orthonormée, admettre que dans un changement de base othonormée il est conservé ou remplacé par son opposé (on le constatera sur des exemples simples). On a alors une définition simple pour l'orientation de l'espace : La base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de même sens que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; de sens contraire si $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2) Il serait intéressant de proposer aux élèves des problèmes de physique faisant une part importante au raisonnement et calcul mathématiques, dont les énoncés seraient élaborés en commun par les deux professeurs.
3) Traiter l'analyse avant la géométrie permet d'enrichir les exemples d'espaces vectoriels ou de produits scalaires.
4) Le chapitre "probabilités" est utile en sciences naturelles pour le cours de génétique. Mais comme il est indépendant du reste du programme, on peut le placer à n'importe quel moment de l'année.
5) Le chapitre sur les nombres complexes ayant nécessité des révisions sur les angles de vecteurs, il est assez intéressant de continuer par le chapitre sur les angles de droites.

PLAN DU COURS DE MATHEMATIQUES (1er trimestre)

1ère semaine : . Inventaire des propriétés de $\mathbb{R}$.

. Continuité des fonctions numériques d'une variable ; limites ; fonctions composées ; fonction réciproque ; fonction $x \mapsto x^q$ ($q \in \mathbb{Q}$)

2e & 3e semaines : Dérivation des fonctions, variation, représentation graphique. Différentielle (accorder les notations avec celles du professeur de physique). Application au calcul numérique.

. fonctions circulaires ; $x \mapsto \cos(ax+b)$; $x \mapsto \sin(ax+b)$

. Révisions et compléments de trigonométrie

. Tableau des primitives

. Equations différentielles $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' + \omega^2 y = f(x)$

4e & 5e semaines : Révisions sur les espaces vectoriels et affines euclidiens de dimension trois.

. Définition analytique du produit vectoriel et orientation de l'espace. (voir remarque nº 1).

. Fonctions vectoreilles.

. Cinématique du point.

6, 7 & 8e semaines : Calcul intégral.

. Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances.

. Equations différentielles $y'' + ay' + by = f(x)$ (uniquement en vue des applications à la physique).

. Application du calcul intégral à la mécanique et à la physique.

9e & 10e semaines : Nombres complexes et leur applications à la trigonométrie.

11e semaine : . Angles de droites et problèmes de géométrie (voir remarque nº 5).

12e semaine : . Etude des coniques.

13e semaine : . probabilités (voir remarque nº 4).

Mlle Chopard-Lallier

Prof. Math. Lycée de Neudorf-Strasb.

Le plan du cours de mathématiques tel que le propose Mme Chopard-Lallier permet aux élèves de Terminales d'acquérir à temps les notions qui leur sont nécessaires pour le cours de physique, sauf cependant les cinq premières semaines de l'année scolaire. Pour compléter l'harmonisation des deux enseignements, il suffit de retarder de quelques semaines le début de l'étude de la dynamique. A cette fin, le plan (ci-après) des six premières semaines de cours propose d'étudier en début d'année l'effet thermoélectronique. En dehors du fait que ce plan permet de retarder suffisamment l'étude de la dynamique, l'ordre proposé me paraît avoir plusieurs avantages :

- L'effet thermoélectronique est un exemple d'application du modèle atomique proposé en chimie.
- Les faisceuax d'électrons permettent de matérialiser aisément des trajectoires.
- Il est possible de traiter dès le début de l'année des problèmes de points matériels conduisant à des résultats vérifiables et utilisables.
- Très tôt dans l'année, les élèves s'initient à l'emploi et connaissent le principe de l'oscilloscope si fréquemment utilisé tant en sciences naturelles qu'en physique.

Mme Cosson

prof. physique Lycée Neudorf

	PLAN DU COURS DE PHYSIQUE	COORDINATION AVEC LES MATHEMATIQUES
<u>1e semaine</u>	TP : La précision des mesures (mesures de temps) χ : Structure de la matière. Atomes, molécules. Les électrons, les niveaux d'énergie.	
<u>2e semaine</u>	TP : Dosage. Technique et précision χ : La classification périodique. Les nuages électroniques φ : Exploitation des résultats de TP. Formules d'approximation. Calculs sur les petites variations. Chiffres significatifs. Usage de la règle à calcul.	<u>Formules imposées</u> : $\sin\varepsilon \simeq \mathrm{tg}\,\varepsilon \simeq \varepsilon$ rd $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ les valeurs des premiers termes négligés n'ont pas à être exactes puisque rien n'est démontré. <u>Formules démontrées</u> : $(1+\varepsilon)^2 \simeq 1 + 2\varepsilon$ $\cos\varepsilon \simeq 1 - \varepsilon^2/2$ Introduction intuitive de la notion de dérivées partielles (sans les nommer) et de dérivées logarithmiques (sans les nommer) qui ne pose généralement pas de problème pour leur utilisation.
<u>3e semaine</u>	TP : Caractéristique de la diode. χ : Le noyau : structure ; isotopes. φ : Quantité de mouvement. Notion de masse. Centre d'inertie.	
<u>4e semaine</u>	TP : Etude expériementale de la chute libre (colonne de chute libre. Chute de l'obus) χ : Stabilité des noyaux. Réactions radioactives. Rayonnement radioactif. φ : Effet thermoélectronique. Diode. Application Principe d'inertie. Repère galiléen. Application	L'expérience avec la colonne de chute libre conduit au graphe $h = f(t)$. Celle de la chute de l'obus conduit à trouver que : $(h_{n+1} - h_n)-(h_n - h_{n-1}) = \tau$ progression arithmétique des espaces parcourus. (ces résultats ne pourraient-ils être interprétés en mathmématiques ?) Il serait bon que les élèves aient vu la trans-

		formation des vitesses et des accélérations lors d'un changement de repère avant l'étude des forces d'inertie (8e semaine).
5e semaine	TP : Oxydoréduction. Définition des couples rédox. φ : Définition de la force. Principe de l'action et de la réaction. Théorème du centre d'inertie. Application du théorème du centre d'inertie au mouvement d'un électron accéléré par un champ électrique - colinéaire à la vitesse initiale (a) - perpendiculaire à la vitesse initiale (b)	Il serait possible de matérialiser les trajectoires d'électrons. Dans le cas (b) cette trajectoire peut même parfois être confondue avec le cercle surosculateur à la parabole en son sommet. Quelle serait la part du physicien et du mathématicien pour traiter cette application ?
6e semaine	TP : L'oscillographe. Principe et utilisation. φ : Trajectoire d'un objet lancé Trajectoire d'un électron dans un champ magnétique. X : Séparation et usage des isotopes. Spectrographe de masse.	des films permettent de tracer la trajectoire point par point ou de "voir" que la vitesse horizontale reste constante. même remarque que pour la cinquième semaine. La trajectoire obtenue peut être un cercle ou une hélice.

Mathématiciens arabes du moyen âge

Quand on parle de mathématiciens arabes il faut comprendre : mathématiciens ayant écrit en arabe, car, à l'époque, l'arabe était une langue scientifique internationale à l'égal du latin en Europe chrétienne. Mais la plupart des savants sont des étrangers, des natifs des régions passées sous domination arabe.

Rappelons à ce propos quelques dates :

- 622 : c'est le début de l'Egire.
- 632 : c'est la mort du prophète Mahomet.
- 732 : c'est la bataille de Poitiers.

Entre ces deux dernières dates, c'est-à-dire pendant un siècle, les arabes vont aller de conquête en conquête. Cependant dans les pays conquis, ils n'imposeront que leur religion, adoptant et conservant les droits et les coutumes des vaincus (si ce n'était pas incompatible avec la religion). Malgré cela, le Coran devant être apris par coeur par tout pratiquant, l'arabisation ce fait rapidement.

D'autre part, l'arabe est très ouvert à la culture étrangère, et cette ouverture d'esprit permettra l'assimilation et la mise en valeur des connaissances scientifiques des différents peuples soumis.

La première période : Dès le 7^{e} siècle, au moment de la conquête par les arabes, la Perse possède déjà une tradition scientifique propre ; Bagdad est un centre culturel important où l'on traduit sans relâche des oeuvres grecques ou indiennes. La civilisation arabe est alors mise en contact avec de nombreux savants et elle commence à connaître, retraduit du persan ou du syrien, les mathématiciens grecs du 5^{e} siècle.

Cependant, c'est surtout au milieu du 8^{e} siècle que des progrès importants seront réalisés. C'est à cette époque (770) qu'est donné en cadeau au calif de Bagdad le "Siddhânta".par des voyageurs hindous. Le "Siddhânta" est surtout un livre d'astronomie et c'est à travers ce livre que les arabes feront connaissance avec les chiffres indiens et surtout avec le zéro permettant la numération de position. Ils y apprendront aussi un début de trigonométrie. (le mot "sinus" est la latinisation du mot arabe, lui même transcrit du sanskrit et signifiant : trou, cavité). C'est également dans le "Siddhânta" qu'ils découvriront le principe de la preuve par neuf.

Bien d'autres sciences ont commencé leur essort à la même époque ; surtout celles qui avaient un lien avec la religion : L'astronomie pour la fixation du calendrier lunaire (en liaison avec le Ramadan), la géodésie (pour connaître la direction de la Mecque),... A propos d'astronomie, c'est aussi à travers le persan que les arabes auront connaissance de la science babylonienne.

Vers la fin du 8e siècle et le début du 9e, vit le très célèbre Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî. Au service du calife al-Mamûn, on lui doit le traité : "al-jabr wal muqâbâlâ" (ce qui peut se traduire par : "sur le rétablissement et la réduction" c'est-à-dire tout simplement "le calcul en général"). Ce livre a eu un tel retentissement et une telle influence que le mot "al-jabr" a finit par donner "algèbre". Dans ce traité, faute d'avoir une écriture spéciale pour les nombres négatifs (qui étaient connus mais non mathématisés), Al-Khwârizmî propose la résolution de l'équation générale du second degré en six étapes :

$$\left.\begin{array}{r} a x^2 = b x \\ a x^2 = c \\ x^2 + b x = c \\ x^2 + c = b x \\ x^2 = b x + c \\ b x = c \end{array}\right\} \text{ en notation moderne}$$

Il ne s'intéresse d'ailleurs qu'aux racines positives de ces équations, faute de pouvoir noter, comme il a été dit, les racines négatives.

Du même auteur, on connaît aussi, mais seulement dans sa traduction latine : "Liber Algoarismi de practica arismeticae". Ce qui signifie : "livre d'Al-Khwârizmi sur la pratique de l'arithmétique". Le mot "Algoarismi" latinisation du nom du savant, a fini par donné "Algorithme", sa signification exacte ayant été perdu au cours des siècles.

<u>Transition avec la deuxième période</u> : Au neuvième siècle, on commence à se rendre compte des erreurs dans les tables numériques, ce qui fait prendre conscience de l'importance de la théorie.

Tabit ben Qurra traduit et commente les oeuvres grecques d'Appolonius, d'Archimède,... Son fils Sinan ben Tabit ben Qurra et son petit fils Ibrahim ben Sinan ben Tabit ben Qurra seront de grands mathématiciens qui continueront l'oeuvre de leur père et grand pére, l'enrichissant de nouvelles découvertes.

C'est à Bani Musa, qui vivait à la même époque, que l'on doit la construction de l'ellipse à la façon des jardiniers.

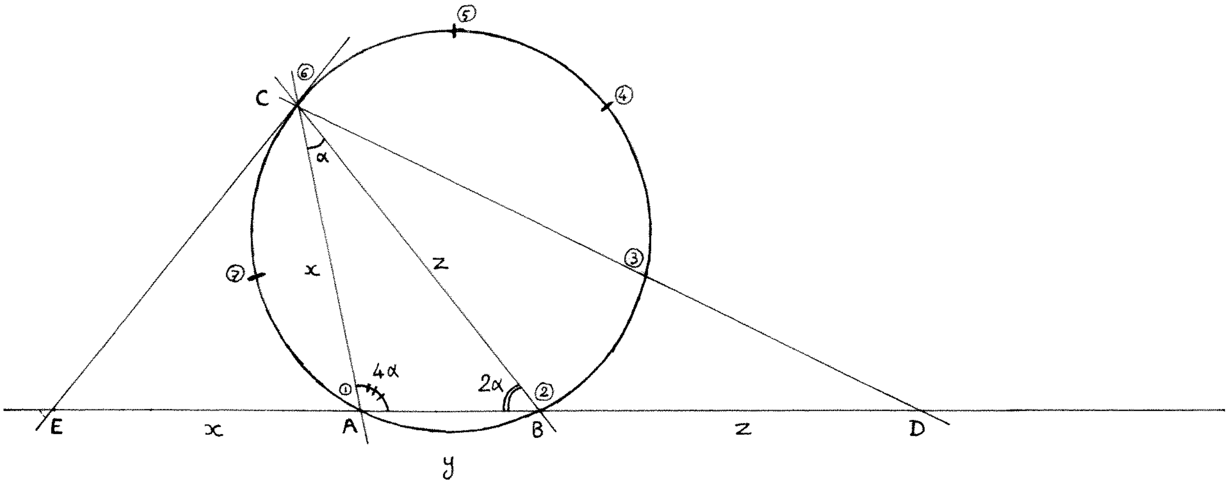
On commence à résoudre des équations à plusieurs inconnues ou de degré élevé (jusqu'au huitième degré, le septième étant exclu). On se rend alors compte de la notion d'irrationalité.

Toutes les oeuvres arabes de cette époque ne seront connues en Europe qu'au début du 13^e siècle, surtout grâce à Leonardo Fibonacci de Pisa qui en publiera une bonne partie en 1203.

<u>La deuxième période</u> : A partir du neuvième siècle, les mathématiciens arabes s'éloignent de plus en plus de la tradition grecque. En particulier on abandonne l'usage exclusif de la règle et du compas dans les constructions géométriques.

Au début du 10^e siècle, on découvre un procédé de résolution géométrique des équations du troisième degré au moyen d'intersection de coniques.

Dans la deuxième moitié du dixième siècle, Al-Qûhî donne la construction suivante de l'heptagone régulier :



Soit à calculer le côté y de l'heptagone. Considérons le triangle ABC formé par les sommets 1 , 2 et 6 de l'heptagone. Les angles de ce triangles valent respectivement 4α , 2α , et α (voir figure ci-dessus) et les côtés AB , BC et CA mesurent respectivement y , z et x . Soit D et E les points de la droite AB tels que $BD = z$ et $AE = x$; E,A,B,D dans cet ordre. Alors, on a successivement les résultats suivants :

1) Le triangle BCD est isocèle et les angles à la base ont pour mesure α . CD passe par le troisième sommet de l'heptagone.

2) Le triangle ACE est isocèle et les angles à la base ont pour mesure 2α . CE est tangente au cercle circonscrit à l'heptagone.

3) Le triangle CEB est isocèle et $CE = z$

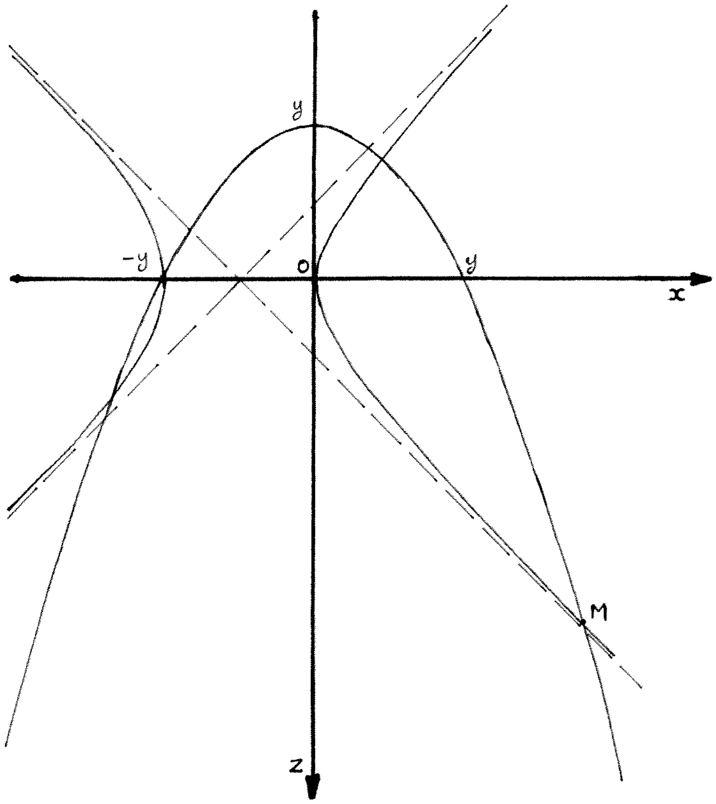
4) Les triangles CAB et DAC sont semblables et par conséquent :

$$\frac{CA}{AB} = \frac{AD}{AC} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad x^2 = (y + z).y \qquad (1)$$

5) Les triangles CEA et BEC sont semblables et par conséquent :

$$\frac{EC}{EB} = \frac{CA}{EC} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad z^2 = (x + y).x \qquad (2)$$

On reconnaît dans ces deux dernières équations, les représentations cartésiennes d'une parabole et d'une hyperbole en x et z , y étant considéré comme un paramètre.



Les deux coniques se coupent en 4 points, mais seul M convient car il donne des valeurs positives à x y et z . Le choix de y est arbitraire. Le triplet (x , y , z) obtenu pour le point M permet de construire un heptagone régulier et une homothétie convenable nous ramène aux dimensions voulues.

Réciproquement : Soit M le point d'intersection de coordonnées positives des deux coniques définies par les équations (1) et (2) .

1) Il existe un triangle dont les côtés ont pour mesures x , y et z. En effet, d'après (1) $x^2 > y^2$ et d'après (2) $z^2 > x^2$; on a donc : $z > x > y$ et la condition d'existence du triangle s'écrit : $x + y - z > 0$ ce qui est équivalent à $(x + y)^2 - z^2 > 0$. Or en utilisant (2) on a successivement :

$$(x+y)^2 - z^2 = x^2 + y^2 + 2xy - z^2 = x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 + xy) = y^2 + xy > 0$$

2) Le côté de mesure y est le côté de l'heptagone régulier inscrit dans le cercle circonscrit au triangle. En effet en remarquant que les sinus des angles d'un triangle sont proportionnels aux mesures des longueurs des côtés opposés, (1) et (2) s'écrivent :

$$\sin^2 B = \sin C \cdot (\sin C + \sin A) \qquad (1')$$
$$\sin^2 A = \sin B \cdot (\sin B + \sin C) \qquad (2')$$

(1') s'écrit aussi :

$$\sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \cdot \sin C$$

soit : $(\sin B + \sin C).(\sin B - \sin C) = \sin A \cdot \sin C$

ou : $2 \sin\frac{B+C}{2} \cos\frac{B-C}{2} \cdot 2 \sin\frac{B-C}{2} \cos\frac{B+C}{2} = \sin A \cdot \sin C$

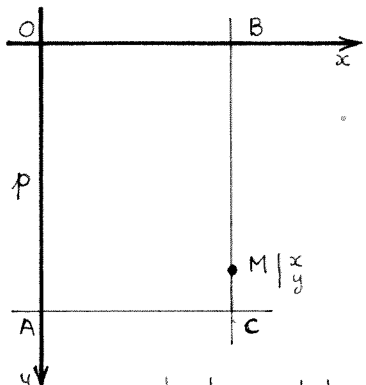
ou encore : $\sin(B+C) \cdot \sin(B-C) = \sin A \cdot \sin C$

enfin : $\sin(B-C) = \sin C$

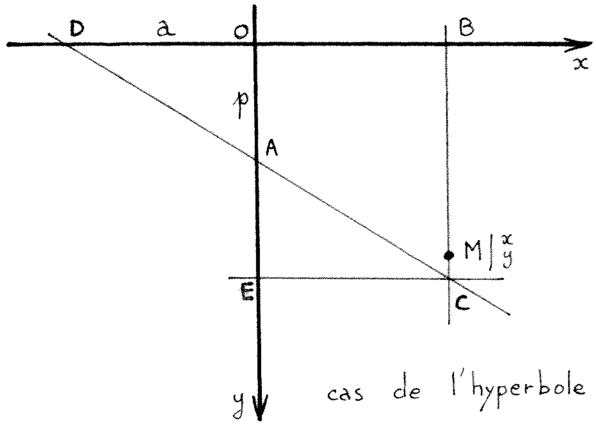
c'est-à-dire : $B-C = C$ ou bien $\underline{B = 2C}$

De manière analogue avec (2') on trouve : $\underline{A = 2B}$

d'où le résultat.



cas de la parabole



cas de l'hyperbole

Il est à noter que dans la tradition d'Appolonius, parabole et hyperbole étaient construites point par point de la façon suivante :

- Pour la parabole, soit p le paramétre, et A le point de coordonnée (o,p) . Le point M (x,y) est sur la parabole si le carré de son ordonnée $y^2 = BM^2$ est égal à l'aire du rectangle OACB ; en d'autres termes si : $y^2 = px$
- Pour l'hyperbole, soit a et p deux paramétres et les points A et D de coordonnées respectives $(0,p)$ et $(-a,0)$. Soit B le point de (Ox) d'abcisse x , C l'intersection de BM et de DA , E la projection de C sur (oy) . Le point M (x,y) est sur l'hyperbole si le carré de son ordonnée est égal à l'aire du rectangle OBCE ; en d'autres termes si : $y^2 = (p/a)\, x\, (x + a)$

On doit à Al-Qûhî la résolution de bien d'autres problèmes, comme celui de la trisection d'un angle.

A la fin du 10^e siècle, on commence à traduire Diophante. On publie également une table des sinus de demi-degré en demi-degré.

Nous devons encore mentionner pour cette période Al-Bîrûnî (973 - 1048), savant d'origine iranienne. Grand voyageur, il a beaucoup appris lors de ses voyages et il émaille ses récits et ses livres d'anecdoctes permettant de mieux comprendre la vie de ses compatriotes. Il présente un grand intérêt pour l'historien, car toutes ses citations sont référencées. Dans un de ses ouvrages, il ne donne pas moins de <u>douze</u> méthodes de trisections d'un angle. Dans un autre écrit il calcule un nombre impressionant de décimales de   par une excellente méthode ; malheureusement pour lui, il fait une faute de calcul dès le début ; néanmoins il reconnaît l'irrationnalité de   .

Citons encore, pour en terminer avec cette deuxième période, Ibn al-Haytham (965 - 1039) surnomé Alhazen ou Hazin et qui dût se faire passer pour fou pour avoir prétendu trop fortement et à tort qu'il pourrait régler le débit du Nil. On lui doit une compilation importante de manuscrits ainsi, entre autres, qu'un traité d'optique où il étudie les miroirs sphériques, cylindriques et à section conique.

La troisième période : C'est l'apogé de la culture scientifique arabe.

'Umar al-Khayyâm (1048-1132) est le premier à distinguer entre algèbre et géométrie. Il développe la théorie générale des équations du troisième degré en les classant en 25 types. (rappelons-nous que les nombres négatifs n'étaient toujours pas transcrit à cette époque). Il cherche à les résoudre et en résoud effectivement 14 types au moyen de section conique. Bien sûr, il ne s'intéresse qu'aux racines positives de ces équations. Il disserte sur les fondement des mathématiques, reprenant les postulats d'Euclide dont il étudiera longuement le cinquième (unicité de la parallèle). C'est lui qui crée les coordonnées rectangulaires, ou plus exactement qui utilise pour la première fois un même système cartésien pour étudier plusieurs équations. (Là encore, Descartes et l'Europe n'ont fait que copier la tradition arabe).

Au 13^{e}siècle Nasir-ed-dîn de Tus (1201 - 1274) créera la trigonométrie comme science indépendante. C'est de son oeuvre que s'inspirera Regiomontanus (1436 - 1475) quand il écrira son traité de trigonométrie, publié en 1533, introduisant en Europe le terme de sinus qui sera repris par Viète (1540 - 1603). On doit aussi à Nasir-ed-dîn de Tus le théorème dit de Lahire (si un cercle de rayon 1/2 roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, tout point du petit cercle décrit un diamètre du grand). Ce mathématicien arabe fit également de nombreuses recherches historiques et écrivit un ouvrage didactique : "Les livres moyens" qui venaient dans l'étude des mathématiques après Euclide et avant l'Almageste considéré comme le summum.

Après cette période faste, l'influence arabe sur l'Europe scientifique diminuera. La division de l'empire entraînant un apauvrissement relatif des gouvernements et par suite une diminution du mécénat envers les savants.

D'ailleurs à partir du 13^{e} siècle, l'Europe développe elle même ses mathématiques. On peut toutefois noter un bref renouveau de la mathématique arabe au 15^{e} siècle.

Conférence de Mme Dold
Mardi 20 Mai 1975
d'après les notes de :
H. Silvestre & J. Lefort

Divertissements mathématiques

SOLUTIONS DES DIVERTISSEMENTS DE L' OUVERT N° 6

L'âge du capitaine : Soit x , y , z , t le nombre d'enfants respectifs de chaque famille. Soit a l'âge du capitaine. On a le système suivant :

$$\begin{cases} x.y.z.t = 2\,a \\ x + y + z + t \leq 17 \end{cases}$$

Comme x , y , z , t sont tous différents, on peut toujours supposer, en réarrangeant l'ordre des familles, que :

$$x < y < z < t$$

Si on cherche toutes les solutions entières de l'inéquation, on trouve (entre parenthèses est indiquée la quantité 2.a) :

1 2 3 4	(24)	1 2 3 5	(30)	1 2 3 6	(36)	1 2 3 7	(42)
1 2 3 8	(48)	1 2 3 9	(54)	1 2 3 10	(60)	1 2 3 11	(66)
1 2 4 5	(40)	1 2 4 6	(48)	1 2 4 7	(56)	1 2 4 9	(72)
1 2 4 10	(80)	1 2 5 6	(60)	1 2 5 7	(70)	1 2 5 8	(80)
1 2 5 9	(90)	1 2 6 7	(84)	1 2 6 8	(96)	1 3 4 5	(60)
1 3 4 6	(72)	1 3 4 7	(84)	1 3 4 8	(96)	1 3 4 9	(108)
1 3 5 6	(90)	1 3 5 7	(105)	1 3 5 8	(120)	1 3 6 7	(126)
1 4 5 6	(120)	1 4 5 7	(140)	2 3 4 5	(120)	2 3 4 6	(144)
2 3 4 7	(168)	2 3 4 8	(192)	2 3 5 6	(180)	2 3 5 7	(210)
1 2 4 8	(64)	2 4 5 6	(240)				

Soit 38 solutions. Mais en effectuant les produits correspondants, seuls 60 et 120 apparaissent trois fois :

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right\} \text{pour } 60 \qquad \left.\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right\} \text{pour } 120$$

Comme on apprend que chaque famille a deux enfants au moins, la seule solution est la répartition 2 , 3 , 4 , 5 . Le nombre d'enfants du professeur est 5 puisque c'est le seul nombre qui apparaît dans les trois cas. Quant àl'âge du capitaine, c' est 60 ans.

En conclusion, il faut croire que cet ancien professeur est un calculateur prodige !

Messages interplanétaires :

I - Il y a 203 signes, c'est à dire 7 fois 29 (décomposition unique en nombres premiers). Or en plaçant les symboles en 7 rangés de 29 signes on trouve :

```
..O.........OO..........OOOO.
..O....O...O..O............O.
..O....O......O...OOO.....O..
..O..OOOOO...O...........OO..
..O....O....O.....OOO......O.
..O....O...O............O..O.
..O........OOOO..........OO..
```

C'est tout simplement le procédé de télévision. Peu importe que les extraterrestre lise de haut en bas ou de droite à gauche ou...., l'essentiel est qu'il fasse toujours de même.

II - 1) liste des 24 symboles

2) A = 1 , B = 2 , ... I = 9 , J = 10

3) K = + , L = "=" . (K est le signe "plus" et L le signe "égal")

4) M = - (M est le signe "moins")

5) N = 0 (zéro)

6) notation en base 10.

7) P = x (P est le signe "multiplié")

8) Q = : (Q est le signe "divisé" ou barre de fraction)

9) R est le symbole d'exponentiation

1o) S = 100 , T = 1000

11) U = 1/10 , V = 1/100

12) W représente la virgule ou le point décimal.

13) Y = $\simeq$, Z = π

14) $(4/3)\,\pi\,(o{,}0092)^3$

Cette dernière ligne est le volume d'une sphére réelle, en l'occurence, celui de la Terre dont le rayon serait rapporté à celui du soleil.

AUTRES PROBLEMES ET DIVERTISSEMENTS

Problèmes élémentaires :

I - Simplifier l'expression :

$$\frac{(nx)^{nx}(ny)^{ny}(x+y)^{(x+y)}((n-1)(x+y))^{(n-1)(x+y)}}{((n-1)x)^{(n-1)x}((n-1)y)^{(n-1)y}x^x.y^y(n(x+y))^{n(x+y)}}$$

II - Comparez les trois nombres 99/70 , 140/99 et $\sqrt{2}$. Des deux rationnels précédents, quel est le plus proche de $\sqrt{2}$? Quelle erreur fait-on en remplaçant 2 par (1/2)(99/70 + 140/99) ?

Problème pour physicien :

Trouver la surface fermée de révolution d'aire maximum dont la méridienne a une longueur donnée.

Problème de vache : (d'après Sam Loyd)

Certaines vaches ont plus de sens commun que l'homme moyen, disait ce brave fermier. Roussette, ma vielle vache se tenait l'autre jour sur le pont de chemin de fer, à cinq métres du milieu du pont, ruminant paisiblement en regardant l'eau. Soudain elle aperçut le rapide qui arrivait vers elle à 90 km/h et se trouvait déjà à une distance de l'extrêmité du pont égal à deux fois sa longueur.

Sans perdre un moment en décision oisive, la vache s'élança vers l'ex trêmité du pont la plus proche, du côté du train et sauva ainsi sa vie à un mètre près..Si elle avait suivi l'instinct humain de s'enfuir devant le train, à la même vitesse elle aurait été happé au moment même où elle aurait atteint l'extrêmité du pont.

Quelle est la longueur du pont et la vitesse de Roussette la vache.