



UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
IREM
10, RUE DU GÉNÉRAL ZIMMER
67084 STRASBOURG CEDEX

R. DUVAL
et
F. PLUVINAGE

Démarches de réponse en Mathématique

Résultats d'une enquête à trois modalités auprès
d'élèves de classes de 5^e (âge moyen : treize ans)

1. PRESENTATION GENERALE

Une première enquête faite en 1972 "sur l'assimilation des programmes de 6^{eme} - 5^{eme}" (1) avait permis d'apporter certaines informations sur les comportements des élèves de 12 à 13 ans dans l'utilisation des symboles \subset et \in et dans celles des notions d'application et de bijection. Ces résultats ont été confirmés par une autre enquête (2) faite l'année suivante, avec un questionnaire modifié. La stabilité des observations ainsi faites rendait intéressante une étude prenant en compte les objections et les suggestions qu'elles ont suscitées. Plus particulièrement, les questions suivantes avaient été soulevées.

Une importante proportion d'élèves ne distingue pas, à l'emploi, les signes d'appartenance et d'inclusion ; il nous a été suggéré de modifier les questions sur les symboles ensemblistes, pour attirer l'attention des élèves sur une différence qu'ils négligeraient. De la sorte, le comportement "gauche-droite" ne diminuerait-il pas au profit d'une réussite systématique (3) ?

A propos de la représentation sagittale, on peut se demander si ce n'est pas elle qui est surtout en jeu dans la plus grande facilité de la notion de bijection. L'analyse avait montré que, dans la difficulté, intervenait le fait qu'il fallait considérer à la fois l'origine et l'extrémité des flèches ou seulement l'ensemble de départ (4). Ne serait-il pas alors possible de renverser l'ordre des difficultés, en présentant des situations où la notion de bijection serait associée à des considérations sur les flèches plus complexes que celles correspondant à la notion d'application ?

(1) Educational Studies in Mathematics 1973 p. 207-242.

(2) P. Buisson Les nouveaux programmes de mathématique et les élèves du premier cycle (I) I.R.E.M. de Rouen Multigraphié 1974 p. 2 et 24.

(3) Anne Scherpereel et F. Pluvinage. Nico n° 16.

(4) P. Buisson Ibid. p. 14.

En ce qui concerne les relations, et plus particulièrement la notion de transitivité, la critique a été faite que "les acquisitions testées ont presque toutes trait aux propriétés des représentations des relations, en particulier des diagrammes sagittaux" (5). Cette critique est trop bienveillante : en fait l'influence, sur les performances, des propriétés topologiques (fermeture, croisement) et des caractéristiques figurales des schémas présentés (triangles immédiatement perceptibles ou effacés dans des carrés) n'avait pas été systématiquement étudiée. Outre l'introduction de situations autres que celles de diagrammes, une telle exploration s'imposait.

Le principe général d'organisation des séquences de questions dans la présente enquête a été le suivant : permettre, sur le vu des réponses données par les élèves, de distinguer des conduites ou des stratégies différentes. D'autre part la construction du questionnaire diffère de celle des deux premières enquêtes citées : il s'agit non plus d'un questionnaire unique pour tout le monde, mais d'un questionnaire à trois modalités, ayant des items communs et d'autres spécifiques. Cette technique autorise une application systématique du principe des variations concomitantes sur l'organisation ou l'énoncé des items (voir annexe II). Nous nous sommes tenu à trois modalités de questionnaire : c'est ainsi que la méthode d'analyse des correspondances (6) est la plus commode pour interpréter les résultats. Elle met en effet immédiatement en évidence les éléments fluctuants ou au contraire invariants dans les réponses des élèves, et permet ainsi d'obtenir des renseignements précis sur les processus de réponse et la façon dont ils sont mobilisés.

Les questionnaires ont été distribués, en mai 1975, dans quinze classes de cinquième (tirées au hasard parmi toutes les classes du département du Bas-Rhin) :

139 élèves ont reçu la modalité I
120 élèves ont reçu la modalité II
133 élèves ont reçu la modalité III

soit en tout 392 élèves.

* *
*

(5) J. Adda. Educational Studies in Mathematics 1975 p. 322.

(6) J.P. Benzécri L'analyse des données Tome 2 Les correspondances
Dunod 1974.

Ce compte-rendu s'articule en quatre parties : les trois premières correspondent aux notions étudiées à l'aide de ce questionnaire (appartenance-inclusion, application, transitivité), la quatrième est une étude d'ensemble confrontant les réponses à des questions relevant des trois parties du questionnaire. Elles sont rédigées pour être, éventuellement, consultées indépendamment.

Dans la première partie, nous précisons plusieurs stades dans l'utilisation des signes \in et \subset . Le comportement "gauche-droite" y apparaît comme le plus élémentaire en regard d'un second comportement, bien net, consistant en outre à tenir compte de la présence ou non d'accolades à gauche du signe \in ou \subset . Mais la maîtrise dans la manipulation de ces symboles est caractérisée par l'acquisition de la notion d'objet. En moyenne moins d'un élève par classe a acquis cette maîtrise. Nous montrons aussi dans cette première partie que la caractéristique des différents symboles ensemblistes (\cap , \cup , \in , \subset ..) pour leur emploi est leur fonction syntaxique : la difficulté et la signification de l'erreur ne sont pas du même type selon que ces symboles ont valeur de verbe ou valeur de conjonction.

Dans la seconde partie, nous analysons les effets de la variation des difficultés propres à la représentation sagittale sur l'utilisation des notions de bijection et d'application. La hiérarchie des réussites précédemment établies n'a pas été renversée. Le rapprochement de ces résultats avec des performances autres que sur des schémas montre qu'il ne faut pas exagérer la difficulté des représentations sagittales en ce domaine : elles ne semblent pas avoir un effet de parasitage pour l'utilisation des notions.

Dans la troisième partie, nous avons procédé à une classification des comportements observés, pour l'utilisation de la notion de transitivité sur des situations sagittales et sur des situations non sagittales. Les propriétés topologiques et figurales des schémas exercent une attraction propre à laquelle la plupart des élèves, en fin de cinquième, ne réussissent pas à s'arracher : dès qu'une représentation de relation comporte trois flèches, il devient difficile de l'interpréter ou de la compléter, du point de vue de la propriété de transitivité. C'est là une

limite que nous n'avons pas rencontrée pour la représentation sagittale des applications. Mais la notion elle-même de transitivité est peut-être trop difficile pour la majorité des élèves : ils n'en retiennent qu'une idée de liaison, ou une idée de raccourci dans le parcours d'un triangle, idée qu'ils appliquent de façon locale. Très peu ont mis en oeuvre la définition de la transitivité, mais ceux-là ont pu réussir dans une situation où l'ensemble sur lequel ils avaient à travailler n'était pas entièrement écrit en extension parce que trop grand (90 éléments !).

Dans la quatrième partie, on expose les phénomènes mis en évidence par une analyse des correspondances pratiquée sur des questions sélectionnées dans chacune des parties du questionnaire. On a retenu les questions en fonction des caractéristiques générales qu'elles permettent de dégager dans le comportement de réponse : cohérence des réponses fournies à une question qui est explicitement la contraire de la précédente, reconnaissance des similitudes ou des différences de deux situations présentées consécutivement,... Nous indiquons enfin quelques informations recueillies sur deux pages que nous avons jointes à ce questionnaire. L'un proposait un petit exercice d'associations de mots et l'autre un choix d'opinions sur les mathématiques inspiré d'une enquête faite à Rennes.

Les conclusions obtenues au terme de cette enquête sont généralisables à des situations mathématiques différentes de celles explorées dans ce questionnaire ; c'est par exemple le cas pour le statut de l'erreur et les différents niveaux d'utilisation d'une notion, ou pour la nécessité d'analyser les difficultés spécifiques des représentations. Les questionnaires se révèlent ainsi un bon instrument pour l'approche des conduites intellectuelles en mathématiques, à un niveau où elles ne sont pas toutes observables sur des manipulations.

2. PREMIERE PARTIE DU QUESTIONNAIRE

DETECTION DE NIVEAUX DANS L'UTILISATION DES SYMBOLES

2.1. Complexité de la distinction \in et \subset

Dans les précédentes enquêtes, une proportion notable d'élèves (26 % dans l'enquête de l'I.R.E.M. de Strasbourg, 38 % dans celle de l'I.R.E.M. de Rouen) adoptaient pour les symboles \in et \subset un comportement de réponse consistant à vérifier uniquement si ce qui est à gauche du symbole se retrouve à droite. Autrement dit, l'élève ne distingue pas \in de \subset dans l'utilisation. Lors de la 3^{eme} rencontre du G.I.R.P. en avril 1973 il nous fut demandé si les réponses ne seraient pas modifiées au cas où ces items seraient précédés d'énoncés "attirant l'attention sur la distinction entre \in et \subset ". Mr. Papy suggéra des énoncés du type $\{1\} \in \{1,5\{1,5\}\}$ dans lesquels les accolades seraient multipliées, de façon à présenter une situation provocante et poser des questions à l'élève. L'introduction de tels énoncés ne devrait-elle pas avoir des répercussions et favoriser de meilleurs résultats ? C'est ce que nous avons cherché à vérifier.

Les élèves ont eu en mains l'une des deux pages 11 ou 12 (voir en annexe le questionnaire). La plupart des items en Vrai-Faux des questionnaires précédents ont été retenus et constituent la partie commune. Les élèves ont donc tous eu les ^{mêmes} sept items en Vrai-Faux. En modalité 2, ces items étaient précédés de trois autres du même type ; en modalité 1 et 3 ils étaient précédés de cinq énoncés comportant une multiplication d'accolades selon la suggestion de Mr. Papy. Ajoutons à ces indications une remarque : en modalité 1 cette page symbole était placée au début du questionnaire et en modalité 3, au milieu. Cette disposition avait pour but de repérer un effet d'échauffement intellectuel, analogue au phénomène d'échauffement physique, susceptible de jouer en début de questionnaire : les confusions de termes, par exemple, apparaissent avec prédilection en début de questionnaire.

Voici les résultats :

a) les séquences remarquables pour la partie commune	Modalité 2 120 élèves	Modalité 1 et 3 139 et 133 élèves
- réussite complète aux sept derniers items	40 (33 %)	38 et 33 (26 %)
- comportement gauche-droite	34 (29 %)	37 et 29 (25 %)
- un échec dans l'un des deux premiers items de la partie commune (ceux qui suivent en modalités 1 et 3, les items à accolades multipliées) et réussite aux cinq derniers	10 (8 %)	36 et 35 (26 %)
- autres réponses	36 (30 %)	28 et 36 (23 %)
	sur la partie commune (2/1 et 3) $\chi^2_3 = 16,6$ significatif au seuil 0,01 (11,3)	
b) résultats aux cinq items modifiés	non posés	
- réussite complète		11 et 15 (10 %)
- une erreur seulement		96 et 64 (59 %)
- comportement gauche-droite		23 et 19 (15 %)
- autres réponses		9 et 35 (16 %)
c) réussite à tous les items en Vrai-Faux	39 (33 %)	5 et 4 (3 %)

Si on regarde les lignes 1 et 3 de ce tableau on remarque que d'une part la réussite complète à la partie commune est légèrement plus forte en modalité 2 qu'en modalité 1 ou 3 et que d'autre part l'échec dans l'un des deux premiers items de la partie commune est plus élevé en modalités 1 et 3. Tout se passe comme si certains élèves avaient été

troublés par les items dans lesquels les accolades sont multipliées et retrouvaient ensuite leur comportement acquis. Par rapport aux élèves de la modalité 2 pris comme population témoin, les items du type suggéré par Mr. Papy ont pour effet de transporter un certain nombre d'élèves de la catégorie définie en ligne 1 à la catégorie définie en ligne 3 du tableau.

Cette interprétation est confirmée par la seconde partie du tableau. Sur les 11 et 15 élèves qui ont réussi les cinq items modifiés : 5 (modalité 1) et 4 (modalité 3) seulement ont réussi tous les items. L'effet de ces items à accolades multipliées sur les items qui suivent et qui sont normalement plus simples, n'est donc pas un effet d'aide, mais au contraire un effet de perturbation même pour les élèves qui se sont tirés d'affaire dans ce cas difficile.

Mais le résultat peut-être le plus intéressant a été dégagé par l'analyse des correspondances, un item occupant sur l'axe réussite-échec (le deuxième axe après celui des modalités) une place tout à fait exceptionnelle : $\{1,5\} \in \{1,5,\{1,5\}\}$. On remarque une inversion de la relation entre le résultat à cet item et le résultat d'ensemble : le fait de se tromper à cet item correspond pour la plupart à un bon résultat d'ensemble tandis que le fait de répondre juste correspond au contraire à un mauvais résultat d'ensemble. En d'autres termes le fait de se tromper serait, pour cet item, la réponse significative d'une meilleure acquisition et le fait de réussir serait une réponse signifiant une moins bonne acquisition. Ce phénomène conduit à reconnaître un comportement, plus élaboré que le comportement gauche-droite, l'élève opposant élément et ensemble, et étant attentif à la présence ou à l'absence d'accolades pour l'écriture d'un élément. Il faut donc préciser les conclusions que nous avons avancées en 1972 et distinguer trois stades dans l'utilisation des symboles \in et \subset :

- le comportement gauche-droite,
- le comportement opposant élément et ensemble,
- le comportement relatif à la notion d'objet (réussite complète pour les items). Il faut rappeler ici que c'est cette notion d'objet qui doit intervenir quand on parle de classes d'équivalence,

sous-ensembles qui sont ensuite considérés comme éléments d'un nouvel ensemble. Une classe d'équivalence apparaît, tour à tour comme une partie de l'ensemble de base et comme un élément de l'ensemble quotient. Il y a dans l'utilisation de la notion de classe d'équivalence un balancement entre élément et ensemble, un même objet pouvant avoir les deux statuts suivant la manière dont il est considéré. Ce stade d'utilisation est inexistant en fin de cinquième puisque 9 élèves sur 272 l'ont atteint. On peut donc exclure ce stade pour la population de notre enquête.

Le stade 2 est meilleur que le stade 1 car il fait intervenir davantage de données. Si je ne tiens pas compte des accolades à gauche dans l'item $\{1,5\} \in \{1,5,\{1,5\}\}$, le comportement gauche-droite, donne lieu à la bonne réponse, tandis qu'au stade 2 d'utilisation, où l'on tient compte de la distinction entre élément et ensemble, il donne lieu à la mauvaise réponse. Il devient alors tout à fait normal que réussite et échec d'ensemble soient respectivement presque synonymes pour cet item d'erreur et de réponse juste.

Cette analyse est importante pour ce qu'on peut appeler le statut de l'erreur. Voilà en effet un cas où le comportement habituel du correcteur, consistant à favoriser la bonne réponse, est une erreur d'appréciation. La notation devrait ici favoriser la mauvaise réponse. Le comportement habituel de notation ne serait valable que dans le cas où seuls les stades 2 et 3 d'utilisation seraient représentés.

L'analyse globale faite sur l'ensemble du questionnaire (voir la quatrième partie) nous a conduit à distinguer un stade intermédiaire entre le comportement gauche-droite et le comportement opposant entre élément et ensemble. Ce stade est celui d'erreurs diverses probablement dues à un déséquilibre du comportement gauche-droite soit en vertu de l'effet des items à accolades, soit parce que ces élèves en sont dans leur apprentissage à un moment où ils commencent à abandonner le comportement gauche-droite pour tenir compte d'autres données.

2.2. La fonction syntaxique des symboles $\cup, \cap, \subset, =, \in$

Dans les précédentes enquêtes, aucune observation précise n'avait pu être faite sur l'utilisation de ces symboles. Seuls les items des énoncés à compléter (items à trou) présentaient des résultats pouvant

être bien ordonnés (voir enquête de Rouen p. 9). Nous avons repris ce type de questions avec une toute autre hypothèse suggérée par des observations faites en classe : il faut distinguer les symboles selon leur valeur de verbe (\in , $=$, \subset) ou leur valeur de conjonction (\cap , \cup) dans l'organisation d'une phrase. Dans ce cas les différences de fonction syntaxiques de ces signes ont-elles une influence sur leur utilisation par les élèves ?

Les quatre premiers items à trou des modalités 1 et 3 (page 11)^(*) sont à compléter par des signes ayant valeur de conjonction : ce sont des phrases qui ont déjà leur verbe. En modalité 2 (page 12)^(*) les quatre premiers items sont exactement les mêmes mais les signes ayant valeur de conjonction sont donnés et il s'agit de trouver le signe ayant valeur de verbe qui convient à l'énoncé. Il y a ensuite une petite accumulation de difficultés dans l'avant dernier item comportant deux trous. Le tout dernier item est commun pour permettre une comparaison des deux populations (modalité 2 et modalité 1, 3).

(*) pagination correspondant aux questionnaires distribués aux élèves.

Voici les résultats, avec rappel des résultats des enquêtes précédentes sur les items comparables :

	[Items Rouen comparables]		{Items Strasbourg 1972}	
	Mod.1,3 /272 (conjonctions) %		Mod. 2 /120 (verbes) %	
1. $a \in \{a,b,c\} \cup \{c,d\}$	126	(46)		80 (67)
2. $\{a,c\} = \{a,b,c\} \cap \{c,a,d\}$	153	(56)	[66] {71}	82 (68)
3. $\{a,b,c\} \cap \{d,b,f\} = \{b,c,d\} \cap \{q,f,b\}$	133	(48)		63 (52)
4. $\{1,7,5,8,4\} \subset \{1,8,7\} \cup \{4,5,6\}$	127	(47)		72 (60)
5. $\{1,3,5\} \cap \{4,3,2,1\} = \{1\} \cup \{3\}$	103	(37)	[52] {41}	41 (34)
6. $\{1,3\} \cup \{5,3\} = \{1,3,5\}$ (commun aux trois mod.)			%	
			233 (59)	[63] {43}

Rappel des items des questionnaires précédents :

- 2. $\{b,c\} = \{a,c,b\} \dots \{b,c,d,g\}$ (Rouen)
- 2. $\{b,c\} = \{f,a,c,b\} \dots \{b,c,d,g\}$ (Strasbourg)
- 5. $\{1\} \dots \{3\} = \{1,3,5\} \dots \{1,4,3,2\}$ (Rouen)
- 5. $\{1\} \dots \{3\} = \{1,3,5\} \dots \{1,4,3,2\}$ (Strasbourg)
- 6. } le même que ci-dessus.
- 6. }

Si l'on regarde les quatre premiers items, il apparaît plus facile de remplacer dans un énoncé le verbe manquant que la conjonction manquante. En revanche s'il faut effectuer deux remplacements (item 5), le fait qu'il s'agisse d'un verbe et d'une conjonction, ou de deux conjonctions, apparaît peut important. Mais l'observation la plus intéressante est apparue avec l'analyse des correspondances. Au dépouillement nous avons distingué les erreurs grammaticales (mettre un verbe à la place d'une conjonction ou l'inverse) et les erreurs conduisant à une phrase grammaticalement correcte (mettre une conjonction à la place d'une conjonction, ou un verbe à la place d'un verbe). Les deux phénomènes suivants sont apparus :

- dans les cas où les énoncés sont à compléter par des conjonctions, les erreurs non grammaticales sont associées aux comportements de réussite,

- dans les cas où les énoncés sont à compléter par des verbes, les erreurs, même non grammaticales, sont associées à un échec d'ensemble.

Compléter un énoncé symbolique par un verbe apparaît donc un peu plus facile que de le compléter par une conjonction ; mais surtout les échecs n'ont pas du tout la même signification dans le premier cas que dans le second. La valeur syntaxique des symboles joue un rôle dans les difficultés d'utilisation par l'élève. En ce qui concerne la difficulté, on peut avancer l'hypothèse que le phénomène d'arrêt de lecture puisse jouer pour les phrases possédant déjà leurs verbes : avant même d'être complétées, elles comportent un membre qui a un sens (juste ou faux) ; il n'en est évidemment pas de même pour les phrases où le trou est le verbe. Cette hypothèse pourrait être complétée comme suit, ce qui préciserait la différence de valeur des échecs : les énoncés dont les trous sont des verbes font surtout appel à l'interprétation, pour fixer une signification indéterminée au départ ; les énoncés dont les trous sont des conjonctions ont un sens plus apparent et font surtout appel à un traitement combinatoire dont les possibilités sont délimitées par la compréhension de ce sens. Dans la quatrième partie, nous retrouverons la nécessité d'introduire une distinction de ce genre pour analyser les performances des élèves.

3. DEUXIEME PARTIE DU QUESTIONNAIRE

UTILISATION DES SCHEMAS ET COMPREHENSION

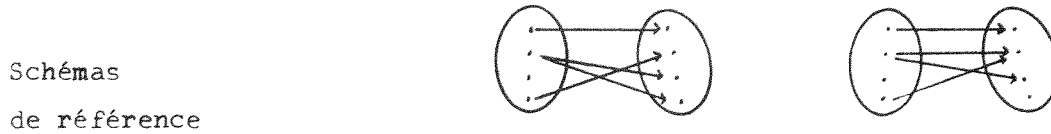
DES NOTIONS D'APPLICATION-BIJECTION

Les enquêtes précédentes ont montré l'existence d'un seuil dans l'utilisation des notions de bijection et d'application non bijective. Les élèves avaient réussi, en grande majorité, à utiliser la notion de bijection, mais une partie d'entre eux ne pouvaient encore utiliser celle d'application non bijective dans des situations très simples. A l'inverse les élèves pouvant utiliser cette dernière notion savaient utiliser aussi celle de bijection. Certains résultats obtenus dans l'enquête de l'I.R.E.M. de Rouen (p. 14) mettaient en doute cette hiérarchie. Une difficulté d'une autre nature, ayant trait à l'utilisation du schéma sagittal, paraissait alors jouer un rôle déterminant : le fait qu'il faille pour déplacer une flèche modifier soit son origine ou son extrémité, soit ces deux données. Dans ces conditions la hiérarchie qui avait été observée ne reflétait-elle pas d'abord la complexité des situations sagittales proposées ? Si tel est le cas, il doit être possible de renverser la hiérarchie des résultats obtenus et de rendre l'utilisation de la notion de bijection plus difficile, par l'organisation du schéma présenté, que celle d'application.

C'est dans cette perspective que deux schémas de référence, comportant le même nombre de flèches, mais disposées différemment, ont été proposés, avec la même consigne, l'un dans les modalités 1 et 3 et l'autre dans la modalité 2. Dans les modalités 1 et 3, il faut modifier à la fois l'origine et l'extrémité d'une des flèches pour obtenir une application non bijective et seulement l'origine d'une flèche pour obtenir une bijection. En modalité 2, c'est l'inverse et la modification du schéma de référence en schéma de bijection devrait être plus difficile que sa modification en schéma d'application non bijective. Nous avons croisé les difficultés de sorte que dans un cas l'utilisation de la notion de bijection ait une chance d'être plus difficile. A cette question centrale nous avons joint trois autres questions d'un autre type.

La première est une tâche de reconnaissance sur une représentation sagittale comme dans les enquêtes précédentes, de façon à garder un point de comparaison avec celles-ci. La seconde est une tâche de production d'exemples : son but était d'explorer le type de représentation, sagittale, cartésien, ou graphe, qui demeure le plus disponible pour l'élève. La troisième question concerne des dénombrements d'applications ou de bijections, et les conditions d'utilisation de la notion de bijection.

3.1. Résultats



	Modalité 1 139 sujets	Modalité 3 133 sujets	Modalité 2 120 sujets
Bijection	121	115	76
<u>Application qui n'est pas bijection</u>	73	64	74
Bijection + Application	(91 %) ↗ 67	(98,5%) ↗ 63	(72 %) ↗ 53

TABLEAU 1

Modalité 1 : 139 sujets

	Sagittal	Graphe	Sagittal + Graphe
reconnaisances sur situation toute faite	Bijection 112	90	80
réponse oui-non	Application 90	84	70
	Bijection + Application (81 %) ↗ 73	(75 %) ↗ 63	(49 %) ↗ 49

TABLEAU 2

Production de deux exemples d'une application non bijective

	Modalité 2 / 120	Modalité 3 / 133
1 ^{er} exemple réussi	85 (71 %)	90 (68 %)
2 ^{em} exemple réussi	66 (55 %)	67 (48 %)
les 2 exemples justes	63	64

TABLEAU 3

Cases nombre de Bijections ...

	Modalité 2	Modalité 3
Réussite ligne 1 ($E_2 \rightarrow E_2$)	60	73
Réussite ligne 4 ($E_3 \rightarrow E_3$)	29	34
Réussite ligne 1 + 4	18	27
Réussite ligne 2 + 3 $\left(\begin{array}{l} \text{pas de biject} \\ \text{de } E_2 \rightarrow E_3 \\ E_3 \rightarrow E_2 \end{array} \right)$	48	58
1 réussite seul 2 ou 3	8	9
Réussite 1 + 2 + 3 + 4	11	18
Ligne 1, réponse : 4 bijections	32	25
Ligne 4, réponse : 4 bijections	13	23
Ligne 4, réponse : 8 bijections	16	14
Ligne 4, réponse : 27 bijections	21	10
abandon complet	10	17

TABLEAU 4

Nombre d'applications...

	Modalité 1		Modalité 3	
	It. 1	It. 2	It. 1	It. 2
non réponse	16	22	26	30
0 applic.	3	3	1	6
1 applic.	1	11	7	13
3 applic.	16	42	24	25
6 applic.	18	22	14	33
9 applic.	53	21	37	20
27 applic.	21	6	22	4

	Mod. 1	Mod. 3
	It. 4	It. 4
non réponse	37	46
nombre choisi à l'item 1	25	30
nombre choisi à l'item 2	13	6
autres réponses	32	30
réussite (1 - 2)	24	20

Item 3
bijections
qui ne sont pas
des applications

	Non réponse	Réponse : pas de bijection	Réponse : il y a bijection
Mod. 1	27	57	55
Mod. 3	36	52	45

TABLEAU 5

La lecture du premier tableau fournit les éléments de réponse au problème de l'effet propre à la complexité éventuelle des représentations sagittales dans l'utilisation des notions.

En modalité 1 et 3 presque tous les élèves qui ont su modifier le schéma de référence pour obtenir une application non bijective ont su aussi représenter une bijection. Mais l'inverse n'est pas vrai puisque 48 élèves en modalité 1 et 49 en modalité 3 ayant réussi la bijection ont échoué pour représenter une application. Le seuil entre les notions apparaît ici vérifié, ce qui est normal puisque la question a été organisée de telle sorte que la complexité de la représentation joue en faveur de la notion d'application bijective. Soulignons ici que

ces résultats sont comparables à ceux obtenus en modalité 1 pour des tâches de reconnaissance (voir le tableau n° 3). C'est là une confirmation qui ne peut être négligée.

En modalité 2, en revanche nous obtenons un taux de réussite dans l'utilisation de la notion d'application non bijective presque égal à celui de la bijection. Mais non pas supérieur, comme nous avons cherché à l'obtenir. La difficulté du schéma a joué mais n'a pas été suffisamment forte pour renverser la tendance. Cette conclusion est corroborée par l'examen des résultats suivants :

- 53 élèves ont réussi application non bijective et bijection en modalité 2,
- 23 élèves ont réussi seulement la bijection,
- 21 élèves ont réussi seulement l'application non bijective.

On pourrait estimer à première vue que cela indique une difficulté équivalente et cela d'autant plus que nous avons des résultats analogues pour la reconnaissance des notions dans la situation du graphe (tableau 2) :

- 63 ont réussi application et bijection,
- 27 ont réussi seulement la bijection,
- 21 ont réussi seulement pour l'application.

Or, il apparaît, à l'analyse de correspondance que les échecs à l'un ou à l'autre, dans ces deux cas, ne sont pas équivalents. Les échecs pour la bijection ne sont pas significatifs d'une mauvaise utilisation de cette notion parce qu'associés à des réussites sur les autres items de cette partie du questionnaire, tandis que les échecs pour la notion d'application sont associés à une mauvaise réussite d'ensemble (sur ce point, voir plus loin p. 20,23). En comparant ces résultats de la modalité 2 à ceux des modalités 1 et 3, nous pouvons conclure qu'il y a effectivement un seuil dans l'utilisation entre l'utilisation de la notion de bijection et l'utilisation de celle d'application non bijective. Les difficultés qui tiennent à l'exploration d'un schéma sagittal sont moins importantes que ce que l'on pourrait appeler la difficulté notionnelle. Cela ne veut pas dire qu'il faille entièrement les négliger : elles ont seulement un effet local, qui peut aisément être repéré , même dans un questionnaire aussi restreint que le nôtre.

La production de deux exemples, demandée dans les modalités 2 et 3 a révélé un recours massif à la seule représentation sagittale : 75 % des élèves. Les réponses du dernier quart se répartissent de la façon suivante :

- 10 % ont écrit uniquement le graphe pour les exemples,
- 6 % ont fait un schéma sagittal pour un exemple et écrit le graphe pour l'autre,
- 6 % n'ont pas répondu à cette question,
- 3 % ont soit employé le schéma cartésien, soit le schéma sagittal et le schéma cartésien.

Ces résultats paraîtront triviaux à certains enseignants, et indigneront peut-être d'autres : dans la situation actuelle de l'enseignement, c'est la représentation sagittale qui est le mieux associée à la notion d'application. Mais l'indication la plus intéressante de cette question n'est peut-être pas là : elle est dans la différence entre la production d'un seul exemple et la production de deux exemples (voir tableau 3). Seul ce dernier cas est significatif d'une réussite (sur ce point, voir plus loin page 21). En outre, le pourcentage de réussite pour la production de deux exemples ^{est} sensiblement le même que celui de réussite aux schémas de référence (44 % et 52 % en modalité 2 et 63 % en modalité 3). Il semble ici que la possibilité pour un élève de proposer un exemple et de le faire varier soit équivalente au fait de savoir utiliser une notion sur une situation donnée.

L'interprétation des résultats donnés dans les deux derniers tableaux sera exposée plus loin (page 22). Retenons plus particulièrement, en ce qui concerne le problème de la représentation sagittale et de l'utilisation des notions, les items exigeant une performance plus notionnelle (la bijection est par définition une application : ligne 3 du tableau 4, il ne peut y avoir de bijection qu'entre des ensembles équipotents : lignes 2 et 3 du tableau 5). Leur pourcentage de réussite oscille autour de 40 %. Retenons cette sous-population et regardons ses comportements dans les situations présentées par un schéma sagittal. Nous remarquons :

- une réussite presque complète pour l'utilisation de la notion de bijection

modalité 1 : 54 sur les 57 qui ont répondu qu'il n'y avait pas de bijection qui ne soit pas une application ont produit une bijection à partir du schéma de référence,

modalité 3 : 54 sur les 58 qui ont répondu qu'il n'y avait pas de bijection entre deux ensembles non équipotents ont aussi produit une bijection à partir du schéma de référence,

modalité 2 : 38 sur 48 ont réussi la production d'au moins un exemple,

- une plus grande chance de réussite pour l'utilisation de la notion d'application bijective

modalité 1 : 38 sur 57 ont réussi les deux items de reconnaissance sur schéma sagittal,
33 sur 57 ont réussi les items de reconnaissance sur situation de graphe,

modalité 2 : 33 sur 48 ont produit deux exemples justes,

modalité 3 : 30 sur les 52 ayant réussi l'item piège ont produit une bijection et une application à partir du schéma de référence.

Tous les élèves qui se sont montrés capables de se rappeler certaines caractéristiques des bijections ne sont pas arrêtés par les représentations, au moins quand il s'agit d'utiliser la notion de bijection.

3.2. Interprétation des résultats à l'aide de l'analyse des correspondances

Voici d'abord la répartition des différents items par modalités : chaque croix indique que l'item a été posé.

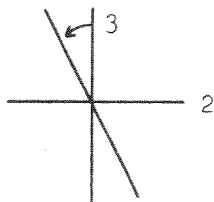
	questions en Vrai-Faux				production d'exemples	schémas de référence			cases bijection				cases $\left\{ \begin{array}{l} \text{application} \\ \text{bijection} \end{array} \right.$				
	q1	q2	q3	q4		s1	s2	sp	it1	it2	it3	it4	it1	it2	it3	it4	
Mod. 1	x	x	x	x		x	x	x						x	x	x	x
Mod. 2					x	x	x	x	x	x	x	x					
Mod. 3					x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x

On voit que les modalités 2 et 3 ne diffèrent que par 5 questions (contre 8 communes) alors que mod. 1 et mod. 2 diffèrent par 14 questions (3 communes) et mod. 1 et mod. 3 par 9 questions (7 communes).

L'analyse conduit aux axes suivants :

- L'axe 1 oppose la modalité 1 (négative) aux modalités 3 (la plus faiblement positive) et 2 (la plus fortement positive), ce qui correspond à la remarque ci-dessus sur la répartition des items.
- L'axe 2 est l'axe réussite-échec ($R < 0, E > 0$).
- L'axe 3 oppose la modalité 3 (négative) aux modalités 1 et 2.

En fait, la projection orthogonale des modalités sur l'axe 3 n'est pas tout à fait constante : il faut projeter sur un axe qui se déduit de l'axe 3 par une rotation d'environ ($\frac{\pi}{6}$) pour obtenir exactement les



modalités. Ceci signifie simplement que la répartition réussite-échec n'est pas tout à fait uniforme entre les modalités, autrement dit que les diverses modalités ne présentent pas exactement le même niveau de difficulté (la différence étant néanmoins légère, ce qui ne conduit pas à mettre en cause l'homogénéité des populations suivant les modalités).

Pour l'analyse, nous repérerons :

- a) les attractions vers l'une ou l'autre modalité de comportements susceptibles a priori d'être obtenus dans plusieurs modalités,
- b) les significations, du point de vue réussite ou échec général, des comportements de réponse aux divers items.

3.2.

1. Questions en Oui-Non de la modalité 1

Pour les schémas sagittaux, les trois réponses pour chaque question sont groupées ; on ne distingue que réussite ou échec global.

Pour les graphes, nous avons distingué :

- . réussite,
- . erreur consistant à dire Non à la question où la réponse devrait être Oui (erreur dite spécifique),
- . autres échecs.

Pour les quatre questions, les comportements de réussite sont associés à la réussite d'ensemble. Leur ordre est le suivant, du moins significatif de la réussite d'ensemble au plus significatif :

Réussite Bijection Sagittal, Réussite Bijection Graphe,

Réussite Application Sagittal et Réussite Application Graphe.

(Nous retrouvons l'organisation repérée en 1972 : Bijection puis Application, Sagittal puis Graphe).

L'un des échecs n'est pas significatif : l'erreur spécifique à la question Bijection - Graphe. Les autres comportements d'échec sont tous associés à une mauvaise réussite d'ensemble. Le fait qu'il s'agisse de la question Bijection - Graphe est à mettre en rapport avec le premier schéma de référence : comme dans ce cas, la bonne réponse provient d'une conjonction de deux réussites ; en effet, l'élément 5 est ici deux fois présent, de même que l'élément a. Le premier réflexe de réponse peut être de conclure alors négativement (on ne veut ôter qu'un couple) : en fait le couple (5,a) convient car sa suppression fera cesser le surnombre aussi bien pour l'ensemble de départ que pour l'ensemble d'arrivée. Nous verrons que la question est très analogue dans son fond, mais plus difficile dans sa forme, pour le premier schéma de référence en modalité 2.

3.2. 2. Production d'exemples (modalités 2 et 3)

a) Aucun comportement de réponse n'est particulièrement attiré par l'une des deux modalités, sauf le dernier (ECEX) de la liste ci-dessous. On peut donc conclure à la fois que la place de cet item dans le questionnaire n'a pas joué et que les populations 2 et 3 sont homogènes dans leurs comportements de réponse, la seule attraction signalée étant peu importante.

b) Après tri, nous avons distingué dans l'analyse (les sigles de désignation sont ceux de l'annexe 4).

(RDEX) : Réussite, c'est-à-dire production de deux exemples corrects,

(RUEX) : Production d'un seul exemple correct (isolé ou accompagné d'un deuxième faux),

(FOEX) : Production d'un exemple comportant trop d'éléments (par exemple 4 flèches, ou 2 flèches issues d'un même objet), isolé ou accompagné d'un deuxième exemple incorrect,

(ECEX) : Autres échecs.

Pour cet item, seule la réussite (RDEX) est significative de réussite d'ensemble. Les deux comportements (RUEX) et (FOEX) sont à peu près au même niveau en ce qui concerne l'échec d'ensemble, le dernier étant, lui, le plus significatif d'échec général aux questions sur application et bijection.

Conclusion : En définitive, les divers comportements de réponse à cette question sont significatifs, aussi bien du côté réussite (pour la réussite complète seulement) que du côté échec (toutes les autres réponses). L'attraction vers la modalité 2 du comportement (ECEX) peut s'expliquer comme celles concernant les nombres de bijections (voir page 26).

3.2. 3. Schémas de référence (communs aux trois modalités,
sauf la question piège, uniquement posée en modalité 2).

Après tri, nous avons, pour les deux premiers schémas ensemble, distingué dans l'analyse :

1° Conformité aux légendes

- (RDRF) : Production de 2 schémas conformes aux légendes
- (BBRF) : Production de 2 bijections
- (BRRF) : Production d'une bijection et d'une relation réciproque d'application
- (BQRF) : Production d'une bijection et d'une relation quelconque
- (BIRF) : Production d'une bijection seule
- (APRF) : Echec à bijection et réussite à application
- (ECRF) : Autres échecs.

2° Respect de la consigne (ne déplacer qu'une flèche)

- (EXCO) : Consigne respectée
- (RVCO) : Consigne renversée (déplacement de 3 flèches, conservation d'une)
- (SYCO) : Deux flèches changées, deux flèches conservées
- (ERCO) : Autres erreurs vis à vis de la consigne
- (ABCO) : Abandon

3° Type de la bijection proposée (1^{er} schéma)

- (PRBI) : Flèches parallèles
- (CRBI) : Existence de croisements
- (DCBI) : Autres cas de réponse (nécessairement incorrecte)
- (ABBI) : Abandon.

1° a) Le comportement de réussite à l'application seule est spécifique de la modalité 2.

Au contraire le comportement de production seulement d'une bijection est spécifique des modalités 1 et 3.

La production de deux bijections est fortement attirée par 2 et 3, de même que les autres comportements de production d'une bijection et d'un schéma non conforme aux légendes sont attirés par 1 et 3.

La réussite, elle, est équilibrée entre les modalités, l'échec (autre que ceux déjà signalés) est attiré par la modalité 2.

b) La réussite et la production d'une application seule sont deux comportements de réussite. Toutes les autres réponses sont à compter comme des échecs.

Interprétation : Deux éléments sont ici à prendre en compte : le déroulement du questionnaire et les variations dans le schéma de référence.

Le déroulement du questionnaire a proposé beaucoup de tâches sur application et bijection en modalité 1 (toutes les questions OUI-NON, sur deux pages). De ce fait, dans cette modalité, les confusions sont ici exclues, ce qui explique que la production de deux bijections n'apparaisse guère qu'en modalités 2 et 3 (seuls 3 élèves de la modalité 1 ont eu ce comportement).

L'analyse des correspondances rend très bien compte de la part liée à l'utilisation des notions de celle liée à cette difficulté d'opérer sur le schéma :

Dans les modalités 1 et 3 où "bijection" est simple, aucun comportement de réussite à l'application seulement n'apparaît. Et le fait de ne répondre que pour la bijection est un échec.

Au contraire dans la modalité 2, la réussite à "application" seule s'obtient 23 fois. Et c'est une réussite, ce qui signifie que les 23 élèves qui ont eu ce comportement possédaient la notion de bijection et n'avaient buté que sur la difficulté opératoire.

2° L'étude du respect de la consigne n'apporte que peu d'éléments : certes le respect de la consigne est une réussite, mais le fait de modifier correctement 2 ou 3 flèches au lieu d'une n'est pas à compter comme un échec. Les autres erreurs de consigne sont, elles, des échecs, de même que l'abandon. Pas d'attraction notable vers une modalité, hormis le fait de déplacer deux flèches attiré par mod. 2. (Voir pourquoi ci-dessous.)

3° L'étude du type de bijection proposé va dans le sens du renforcement des conclusions de 1°. En effet, le croisement, qui est une réussite, est attiré par la modalité 1, la mieux entraînée par les questions précédentes. Et la production du schéma "canonique", à

flèches parallèles, est fortement attirée par la modalité 2. Autrement dit, en modalité 2, ce qui a été compté en 1° au nombre des réussites a été obtenu grâce à un détournement de la consigne : devant la difficulté, des élèves qui possédaient la notion ont été amenés à produire le schéma standard faute de pouvoir satisfaire au déplacement d'une seule flèche.

Nous voyons donc que la difficulté créée par une situation de schéma particulière se dissocie nettement de l'acquisition de la notion : en particulier, un schéma difficile n'a pas pour effet de remettre en cause la notion. On pourrait, à la limite, envisager un véritable problème de déplacement de flèche, qu'un élève, ayant parfaitement assimilé les notions, ne parviendrait pas à résoudre.

Le schéma piège (modalité 2)

Cette question est remarquable en ceci qu'aucune attitude de réponse n'est significative d'un échec : ceci signifie qu'il n'y a pas, pour cette question placée à la suite des deux précédentes, de comportement de réponse qui reflète une lacune ou une mauvaise compréhension. L'abandon n'est pas significatif.

Toutes les réponses sont du côté des réussites. La meilleure réponse (vis à vis de la réussite d'ensemble) est bien la réussite, mais le fait de produire une application non bijective est presque aussi bon.

Un tel résultat est certainement à souligner auprès des enseignants : certaines questions permettent de reconnaître des réussites, même au travers de réponses fausses, mais n'autorisent aucun diagnostic pessimiste. On peut dire aussi qu'il existe des situations dans lesquelles proférer certaines "bourdes" est plutôt bon signe (cf. Les "bonnes fautes" de W. Koehler).

3.2. 4. Nombres de bijections (petites cases) Modalités 2 et 3.

Pour l'analyse, nous avons distingué, après tri :

<u>Réponses à l'item 1</u>	<u>Réponses aux items 2 et 3</u>	<u>Réponses à l'item 4</u>
(RUBC) Réussite (2 bijections)	(RPBC) Réussite : 00	(RQBC) Réussite : 6 bijections
(TUBC) Réponse : 4	(CPBC) Même réponse (fausse) aux deux	(MQBC) Réponse : 4
(BUBC) Réponses : 6 ou 8	(EPBC) Autres échecs	(TQBC) Réponses : 8 ou 9 (ajoutée par certains)
(PUBC) Réponse : 1	(APBC) Abandon	(BQBC) Réponse : 27
(AUBC) Abandon ou réponse 0		(PQBC) Réponses : 1 ou 2
		(AQBC) Abandon ou réponse 0

(Les réponses 0 sont très rares, d'où leur placement avec l'abandon.)

a) Pour l'item 1, les surnombres sont attirés par la modalité 2, la réussite est légèrement attirée par la modalité 3. Les autres comportements se répartissent bien entre les deux modalités.

Pour les items 2 et 3, la réussite est légèrement attirée par la modalité 3, le fait de donner deux fois la même réponse légèrement par la modalité 2. Sinon il y a équilibre.

Pour l'item 4, les surnombres sont attirés par la modalité 2, les insuffisances légèrement par la modalité 3. Abandon et réussite sont bien répartis.

b) Pour l'item 1, la réussite est significative. Les réponses 6 ou 8 sont également du côté réussite (moins toutefois que la bonne réponse). Les autres erreurs sont neutres. Seul l'abandon est un échec.

Pour les items 2 et 3, la réussite est nettement significative. Les erreurs sont neutres. L'abandon seul est un échec.

Pour l'item 4, la réponse 27 est encore plus du côté réussite que la bonne réponse. La réponse 4 est également une réussite. Les réponses 8 ou 9 sont neutres. Les réponses 1 ou 2 sont du côté échec. L'abandon est un échec très net, moins toutefois que pour les items précédents.

Conclusion : Ces questions figuraient en page 3 pour la modalité 3 et en première page pour la modalité 2. On remarque le phénomène d'échauffement, c'est-à-dire qu'en début de questionnaire un certain nombre de confusions sans signification vis à vis des acquisitions peuvent être commises. Nous avons déjà observé ce phénomène à propos de la page "symboles ensemblistes". A l'appui de cette affirmation, on peut remarquer la place de la réponse 27 vis à vis des réussites. En admettant une confusion entre bijection et application ce phénomène devient tout à fait normal (puisque la notion d'application se situe un degré au dessus de celle de bijection).

Par rapport au schéma-piège précédent une analogie : pratiquement pas d'erreur (hormis pour le cas de l'item 4) à mettre du côté échec. Mais une différence : l'abandon est ici un échec très net.

3.2. 5. Nombre d'applications (petites cases) Modalités 1 et 3

Après tri, nous avons retenu pour l'analyse les comportements suivants :

<u>Item 1</u>	<u>Item 2</u>	<u>Item 3</u>	<u>Item 4 (à trous)</u>
(RUAC) Réussite (27 applic.)	(RDAC) Réussite (6 applic.)	(RPAC) Réussite (0)	(RNAT) Différence de résultat (it. 2) - (it 1)
(MUAC) Réponse 9	(MDAC) Réponse 3	(APAC) Abandon	(TNAT) Résultat autre que cette différence ou l'un des résultats (it. 1) ou (it.2)
(FUAC) Réponse 6	(TDAC) Réponse 9	(EPAC) Echec	
(PUAC) Réponses 1 et 3	(BDAC) réponse 27		(DNAT) Résultat (it. 2)
(AUAC) Abandon ou 0	(PDAC) Réponse 1		(UNAT) Résultat (it. 1)
	(ADAC) Abandon ou 0		(ANAT) Abandon

a) La plupart des comportements de réponse se répartissent pour ces questions de manière équilibrée entre les deux modalités. On pourrait dire qu'après les schémas de référence la modalité 3 a "rattrapé" la modalité 1, dont nous avons vu qu'au départ elle bénéficiait d'un entraînement un peu supérieur (du fait des premières questions en Oui-Non). La réussite à l'item 2 est même attirée par la modalité 3 : c'est normal puisque la question du nombre de bijections a été posée dans cette modalité, et pas dans la modalité 1. L'autre exception à l'équilibre des répartitions entre les deux modalités est le surnombre (27) pour ce même item 2, attiré par la modalité 1. L'effet d'entraînement

a donc joué ici essentiellement sur la compréhension de la formulation (volontairement un peu compliquée, pour s'incorporer dans cette séquence) : en modalité 1 certains élèves n'ont pas lu la phrase jusqu'au bout, alors que la question préalable, dans la séquence "bijection", en modalité 3 a facilité le décryptage, par identification avec la même question différemment formulée.

b) En ce qui concerne réussite-échec, la situation est absolument la même que pour les questions analogues sur les bijections. Seules les réponses 1 et 3 pour l'item 1 apparaissent légèrement du côté échec, en dehors des abandons qui sont tous très nettement de ce côté échec (l'abandon au dernier item un peu moins que les autres).

En conclusion, on peut donc dire que le dénombrement (même simple) présente ici des difficultés qui ne sont pas liées à l'acquisition des notions. La formulation joue également un peu. De sorte que, pour ces items, des réponses fausses peuvent aller néanmoins de pair avec l'acquisition des notions sur lesquelles les questions portent. Nous retrouvons d'ailleurs par là un résultat de 1972 (fonctionnement sur une combinatoire simple).

4. TROISIEME PARTIE DU QUESTIONNAIRE

LA TRANSITIVITE

La première enquête avait permis de déceler l'influence de l'organisation perceptive des schémas sur le contenu des réponses. Il semblait en même temps que, pour l'utilisation de la notion de transitivité, "tous les élèves en étaient à un stade de bricolage" (*). Nous avons voulu explorer ce problème en variant systématiquement une situation de représentation sagittale. Ceci dans le but de pouvoir comparer d'une part les comportements sur des situations mathématiquement identiques mais d'organisations figurales différentes, et d'autre part sur des situations figuralemment semblables mais différentes par l'orientation des flèches.

A cette exploration sont ajoutées, dans chaque modalité, deux questions sur la transitivité d'une relation définie à l'aide d'une expression verbale. La première de ces deux questions porte sur un ensemble ayant très peu d'éléments, et la seconde sur un ensemble ayant trop d'éléments (90) pour qu'il soit possible de se les représenter tous. Ainsi est introduite une progression, de la première à la seconde question.

La seconde question était commune aux trois modalités, tandis que la première ^{question} comportait une séquence d'items à réponses Oui ou Non (sans demande de justification) en modalités 1 et 3, contre un seul item en modalité 2, mais avec demande de justification.

Ce sont les résultats à ces deux questions que nous allons d'abord examiner.

(*) "Sur l'assimilation des programmes de 6^e - 5^e" Educational Studies in Mathematics - 5(1973) p. 227.

4.1. Détermination de la transitivité d'une relation définie par un lien verbal.

Dans un ensemble à trois éléments, l'un d'eux est caché. Cinq propositions sont faites pour ce nombre caché afin d'obtenir que la relation indiquée (par ... "a un même chiffre que"...) soit transitive. Les cinq réponses données par un élève ne peuvent être analysées que dans la séquence qu'elles forment. C'est grâce à leur cohérence interne que l'on peut espérer préciser soit les idées sur la transitivité, soit les façons dont la question a été comprise.

L'hypothèse nécessaire à l'interprétation des séquences est que les élèves adoptent une stratégie de réponses qui ne soit pas celle du hasard. Plus précisément, nous supposons que les élèves répondent à une question, qui n'est pas forcément la question posée.

Les questions ont été posées en modalité 1 et modalité 3, c'est-à-dire à 272 élèves. Le nombre de réponses est 249. Pour cinq questions en Oui-Non, comme celles-ci, la probabilité, en répondant au hasard, de former une séquence déterminée est $1/32$. Ceci correspondrait à peu près à 8 élèves. L'histogramme indiqué dans le tableau ci-dessous fait apparaître des effectifs bien supérieurs à ce nombre : ainsi trois séquences correspondent chacune à des effectifs supérieurs à 40. Ainsi se trouve largement confirmée notre hypothèse.

Pour préciser la façon dont la question pouvait avoir été comprise dans le cas des différentes séquences, nous examinons les nombres de la forme $\overline{a_1 a_2}$ ayant donné lieu à la réponse oui (voir la colonne 5 du tableau ci-dessous ; nous considérons le nombre caché comme un nombre à deux chiffres de la forme $\overline{a_1 a_2}$). Nous pouvons alors formuler l'idée qui correspond à ces réponses et les rend cohérentes. Cette interprétation fonctionne dans le cas particulier des cinq nombres proposés. Si elle est correcte, c'est-à-dire si son extrapolation est justifiée, elle devrait fonctionner (à des phénomènes de distraction ou de fatigue près) pour tout autre nombre de la forme $\overline{a_1 a_2}$. Une telle vérification, d'ailleurs simple, permettrait d'acquiescer une certitude.

Voici le tableau des séquences obtenues.

séquence des réponses (O = Oui, N = Non)	Effectifs			Nombres de la forme $\overline{a_1 a_2}$ provoquant la réponse OUI ($i=1,2; j=1,2; i \neq j$)	Interprétation
	Mod. 1	Mod. 2	Total		
O-O-O-N-O	29	20	49	$(a_i=1)$ ou $(a_i=2)$ ou $(a_i=3)$	Le seul cas écarté est celui où le nombre caché n'est relié à aucun des deux autres. De la notion de transitivité n'est retenue que l'idée d'enchaînement ; celle de raccourci est oubliée.
N-O-N-N-N	17	25	42	$a_i = 2$	La réponse Oui correspond au cas où les trois nombres ont un chiffre commun. La "question comprise" pourrait donc être : Y a-t-il un chiffre qui soit commun aux trois nombres ?
O-O-N-N-N	19	23	42	$(a_i = 2)$ ou [[$a_i=1$) et $(a_j=3)$]]	Réussite quasi-complète : la réponse Oui correspond aux cas où il y a liaison du nombre caché avec <u>chacun des deux</u> autres. Elle est exclue dans le cas difficile où le nombre caché n'est relié à aucun des deux autres.
N-N-O-N-N	9	8	17	$a_i = a_j$	La réponse Oui correspond au cas où il n'intervient qu'un chiffre répété dans l'écriture du nombre caché. La "question comprise" pourrait être : Voit-on apparaître plusieurs fois le même chiffre dans l'écriture du nombre caché ?
O-N-N-N-N	8	8	16	[[$(a_i=2)$ et $(a_j \neq 2)$]] ou [[$(a_i=1)$ et $(a_j=3)$]]	La seule réponse Oui est donnée quand le nombre caché a un chiffre et un seul en commun avec chacun des deux nombres donnés. Il s'agit là d'une autre compréhension de l'expression "avoir un même chiffre que".
O-O-N-O-N	1	2	3		Séquence entièrement exacte.

Ce tableau indique 169 réponses sur les 249 données. Les 80 réponses restantes se répartissent sur des séquences diverses, chacune peu représentée (la séquence Non-Non-Non-Non-Oui correspond à 9 élèves, trois séquences sont chacune le fait de 8 élèves, et, pour les autres, les effectifs sont inférieurs à 6) ; l'obtention de ces séquences peu représentées ne pouvant pas être suffisamment distinguée de choix au hasard, nous n'avons pas tenté de les interpréter.

Dans la modalité 2 la question précédente est présentée sous une autre forme : elle est réduite à un seul item et la réponse (oui ou non) doit être justifiée. Nous appellerons cette question le premier "pourquoi". Dans les trois modalités, à la suite soit les items nombre caché ou du premier "pourquoi", la même question est reprise, mais cette fois l'ensemble sur lequel la relation est définie a 90 éléments au lieu de 3. Avec cette dernière question il s'agit de déterminer si la taille de l'ensemble constitue une difficulté spécifique et si les élèves reconnaissent (situation de la modalité 2) que la réponse du premier "pourquoi" constitue la réponse au second. Le premier tableau donne les résultats globaux pour les trois modalités. Le second tableau donne des résultats plus détaillés pour la modalité 2 : il permet de lier la répartition des performances au deuxième pourquoi à la réponse et à la justification données au premier pourquoi. Enfin le troisième tableau donne la répartition des réponses au deuxième pourquoi.

	Modalité 2				Modalité 1 et 3	
	Premier Pourquoi		Deuxième Pourquoi		Deuxième Pourquoi	
abandon	19	16 %	33	27,5 %	93	34 %
erreur (réponse oui)	27	22,5 %	36	30 %	87	34 %
réussite (réponse non)	74	61,5 %	51	42,5 %	92	33 %

TABLEAU 1

Modalité 2

types de réponses au premier pourquoi	Réussite avec justification complète et exacte	Réussite seulement justifiée par la non liaison entre 21 et 53	Réussite avec ou sans autre justification	Echec justifié par une idée d'enchaînement	Echec avec autre justification ou abandon
réussite (réponse non)	12	18	9	0	12
abandon	1	4	3	1	24
erreur (réponse oui)	3	16	8	3	6

TABLEAU 2

Modalités 1, 2 et 3

types de réponses au deuxième pourquoi	Réussite avec justification exacte	Réussite avec justification incorrecte	Réussite sans justification	Echec justifié par une idée de chaîne ou de succession	Echec sans justification
Modalité 2	11 9 %	29 24 %	11 9 %	21 17,5 %	15 12,5 %
Modalités 1 et 3	18 6,5 %	46 17 %	28 10 %	65 24 %	22 8 %

TABLEAU 3

La comparaison des résultats de la première question "pourquoi" et de ceux de la seconde montre que cette dernière est plus difficile : il y a à la fois une chute du pourcentage des réussites (le χ^2 calculé sur les différences de réponse "non" aux deux questions donne la valeur 10,30 significative au seuil 0.01) et une augmentation du nombre des abandons ($\chi^2 = 9,4$ significatif au seuil 0.01). Cette difficulté tient-elle seulement à la taille de l'ensemble comme nous l'avions supposé ? On peut remarquer en effet que toutes les erreurs justifiées montrent que l'attention des élèves a été retenue par l'enchaînement dans la succession de proche en proche des nombres (11, 12, 13, ...). N'est-ce pas cet aspect qui constituerait la véritable difficulté par rapport à la question précédente ? Il ne le semble pas, d'une part à cause de l'augmentation significative du nombre des abandons, alors que l'augmentation du nombre des réponses oui n'est pas significative ($\chi^2 = 1,42$, calculé sur les différences de réponses "oui" aux deux questions), et d'autre part parce que le groupe d'élèves ayant donné à la première question une justification complète se référant à la définition de la transitivité a réussi en grande majorité la seconde question. L'effet tenant à la succession de proche en proche de la suite des nombres ne semble donc pas avoir été un obstacle déterminant. Enfin il est intéressant de remarquer que la plupart des élèves n'ont pas reconnu dans les données de la seconde question "pourquoi" le même problème que dans la première question "pourquoi" : même les élèves ayant utilisé explicitement la définition de la transitivité dans le premier pourquoi n'ont pas pensé à donner comme contre exemple les trois nombres sur lesquels ils venaient de réfléchir dans le premier pourquoi.

La comparaison des résultats de la modalité 2 et de ceux des modalités 1 et 3 montre que la présentation du premier pourquoi ne facilite pas la réponse au second pourquoi. Car d'une part les différences de pourcentage dans les abandons, les erreurs, et les réussites ne sont pas significatives ($\chi^2 = 2,73$ pour les différences de réussite) et d'autre part le troisième tableau montre une répartition semblable des différents types de réponse.

Dans les modalités 1 et 3 nous avons répété la question "nombre caché" en demandant le contraire, c'est-à-dire une relation non transitive. Au dépouillement nous n'avons tenu compte que de la cohérence de la réponse avec celle donnée pour "relation transitive".

$$\text{Modalité 1 } \frac{64}{139} = 46 \% \quad \text{Modalité 3 } \frac{77}{133} = 58 \%$$


Dans la modalité 3 la question "relation transitive" venait en premier. Dans la modalité 1 c'était le contraire. Cependant la différence n'est pas significative au seuil 0.05 ($\chi^2 = 3,78$).

4.2. Détermination de la transitivité d'une relation présentée par un schéma sagittal

Le principe selon lequel les items varient, pour cette partie du questionnaire, à l'intérieur de chaque modalité et entre les trois modalités, a été expliqué plus haut. Nous avons dépouillé les réponses de façon à pouvoir les analyser en fonction des problèmes suivants :

- l'orientation des flèches : les réponses ont-elles été faites en référence à un sens déterminé (raccourci de a à c, retour de c vers a ou les deux) ou bien l'orientation varie-t-elle selon la situation présentée ?

- le nombre des jonctions effectuées : dans le cas où la représentation d'une orientation semble stabilisée, les jonctions effectuées sont-elles celles seulement suggérées par une qualité figurale du schéma (triangle incomplet à fermer, carré à fermer...) ou correspondent-elles à toutes celles qui sont possibles ?





- la perception des différences de situation : certains schémas représentent la même situation sous une qualité figurale différente (). D'autres représentent une situation mathématiquement différente sous une même forme figurale : seule change l'orientation d'une flèche. Dans quelle mesure, les élèves remarquent-ils ces ressemblances et ces différences ?




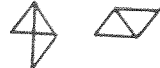

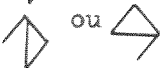





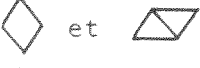
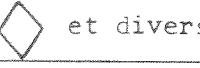

- l'effet de contexte : dans les modalités 2 et 3 un schéma sagittal a été présenté sous la forme plus simple. Cela a-t-il facilité ou perturbé le comportement de réponse aux autres questions ?





Les principaux résultats de ce dépouillement ont été rassemblés dans les deux tableaux ci-dessous, de façon à fournir des éléments de réponses à ces problèmes.

	Modalité 1		Modalité 2		Modalité 3			
	population de ceux qui ont réussi au VF	population de ceux qui ont répondu vrai	population ayant répondu → pour	population ayant répondu ←	population ayant répondu ←	population ayant répondu →	abandon ou boucle	
Uniquement des flèches dans le bon sens pour les deux schémas	66 47 %	18 31 %	75	2	9,5 %			
Uniquement des flèches dans le mauvais sens pour les deux schémas	16 11,5 %	11 19 %		11				
Des flèches dans les deux sens sur les deux schémas	12	7	2	3		5		
Bon sens pour le premier schéma et mauvais sens pour le second	5			2				
Deux sens pour le premier schéma et bon sens pour le second	19 13,5 %	7	13		13 %			
Bon sens pour le premier schéma et deux sens pour le second		1		1				
Abandon ou boucles seulement	11	2					6	
Autres réponses	10	12	5	3				
Total	139	58	100	22		5	6	

Classification des réponses en fonction de l'orientation des flèches

Les différents comportements concernant les jonctions pour les élèves ayant gardé la même orientation pour les flèches, ce relevé concerne les schémas  et  pour les modalités 1 et 3, et les schémas  et  pour la modalité 2.

	Modalité 1		Modalité 3	
	Flèches bien orientées	Flèches mal orientées	Bonne orientation à 	Mauvaise orientation à 
Toutes les jonctions	17	2	7	
Presque toutes les jonctions				
a) la diagonale est oubliée dans le schéma 	11		17	
b) autre cas	1		2	
Fermeture du triangle				
a) 	7	4	10	
b) 	1	2		1
c)  ou  ,  ou 	6		4	2
Fermeture du carré et d'un triangle pour la première figure				
a) 	15		13	2
b) autre réponse pour 	1		3	
Fermeture de la figure				
a) 	2	2	2	1
b)  et divers pour 	5	5	17	5
TOTAL	66		75	

	Modalité 2	
	Réussite au Vrai-Faux 	Echec au Vrai-Faux 
Toutes les jonctions	8	4
Presque toutes les jonctions	5	6
Fermeture 2 triangles Fermeture un seul triangle	3	5
Similitude figurale des réponses	7	8
Fermeture  et 	3	2

Examinons maintenant les différents problèmes que nous avons soulevés plus haut (en introduction à la présentation des tableaux précédents).


1) L'orientation des flèches

Si nous considérons les réponses à deux schémas différents, les deux tiers des élèves, dans chacune des trois modalités ont un comportement stable : ils placent des flèches uniquement dans le sens du raçourci ou uniquement dans le sens du retour ou uniquement dans les deux sens.

$$\text{Modalité 1 : } \frac{94}{139} = 67 \% \quad \text{Modalité 2 : } \frac{76}{120} = 63 \%$$

$$\text{Modalité 3 : } \frac{98}{133} = 73 \%$$

Le type de réponse qui domine est celui du raçourci. Celui du retour n'est pas négligeable (10% de la population totale) et semble correspondre à une représentation bien fixée si l'on regarde les résultats de la modalité 1 et de la modalité 3 : cette réponse est produite systématiquement en dehors de toute suggestion perceptive troublante comme dans le cas du schéma VF de la modalité 2.

Dans le tiers de cette population qui ne semble pas avoir une représentation définie pour l'orientation des flèches, un groupe de 43 élèves doit être distingué : celui qui a mis des flèches dans les deux sens pour la première figure et uniquement dans le sens raccourci pour la seconde. Or, pour la plupart de ces élèves la réponse est du type . C'est-à-dire raccourci pour la fermeture des deux triangles perceptibles et retour pour la fermeture du carré. Cela permet de supposer que pour certains la représentation de raccourci n'est pas attachée à une notion précise de la transitivité mais à une certaine situation figurale (par exemple le raccourci dans le parcours du triangle). L'examen du type des jonctions effectuées renforce cette supposition.

2) Les jonctions effectuées




En nous limitant à la population des élèves qui a une représentation stable de l'orientation des flèches soit dans le sens raccourci, soit dans le sens retour, on remarque plusieurs types de réponses :

a) Toutes ou presque toutes les jonctions sont réalisées

$$\text{Mod. 1 : } \frac{29}{66} = 44 \% \quad \text{Mod. 3 : } \frac{26}{75} = 35 \% \quad \text{Mod. 2 : } \frac{10}{31} = 32 \%$$

Soulignons au passage la différence entre la modalité 1 et la modalité 3

	1	3
toutes les jonctions	17	7
presque toutes	12	19



Dans la modalité 3 la réponse à l'item  semble avoir influencé le comportement de réponse à l'item  privilégiant de façon considérable la réponse .

b) Seulement les jonctions qui permettent de fermer un triangle

$$\text{Mod. 1 : } \frac{14}{66} = 21 \% \quad \text{Mod. 3 : } \frac{14}{75} = 17 \% \quad \text{Mod. 2 : } \frac{19}{58} = 33 \%$$



Le fonctionnement de la représentation de raccourci est ici lié à une caractéristique figurale : celle du triangle. Lorsque cette caractéristique figurale n'est pas apparente sur un schéma, les jonctions rendant la relation transitive ne sont plus perçues.



Dans ce comportement deux degrés au moins doivent être distingués :

- les triangles figuralemment perceptibles distincts
comme dans le cas 
- les triangles figuralemment perceptibles se recoupent de sorte que si l'on en ferme un, il faudra croiser un trait tracé pour fermer le second ainsi 
Est-ce alors une résistance au croisement d'un trait existant ou le marquage du second triangle qui intervient ? Pour certains élèves en tout cas il y a là un obstacle perceptif particulier.

c) fermeture du carré et d'un triangle pour la première figure et des deux triangles pour la seconde figure.

$$\text{Mod. 1 : } \frac{15}{66} = 23 \% \quad \text{Mod. 3 : } \frac{13}{75} = 17 \% \quad \text{Mod. 2 : } \frac{15}{58} = 26 \%$$

Ce type de réponse ne diffère peut-être pas du précédent. Après avoir fermé un triangle,  un second triangle apparaît que l'on ferme . On peut supposer que ceux qui fournissent ce type de réponse sont ceux qui ferment systématiquement tous les triangles qu'ils perçoivent mais qui butent sur l'obstacle perceptif d'un trait qui cache un autre triangle ou qui interdit de le fermer. Seul l'ordre du tracé des flèches pourrait permettre de vérifier cette hypothèse. Mais nous ne l'avons pas.

d) fermeture de la figure globale  
(carré ou parallélogramme)



Cette catégorie de réponse est la plus faible :

$$\text{Mod. 1 : } \frac{7}{66} \quad \text{Mod. 3 : } \frac{19}{75} \quad \text{Mod. 2 : } \frac{3}{31}$$

En ce qui concerne les jonctions établies par ceux qui ont une représentation stable de l'orientation des flèches, deux catégories de comportements semblent se dégager :

- la recherche des jonctions possibles. Un tel comportement est encore facilement pris en défaut par les propriétés figurales du schéma (comparer Mod. 3 à Mod. 1)
- la jonction des triangles figuralement apparents.


3) Perception des différences de situation



Dans les modalités 2 et 3, deux schémas figuralement semblables (un carré dans la modalité 2, un  dans la modalité 3) représentent deux situations mathématiques différentes à cause de l'inversion d'une seule flèche. Les deux tiers des élèves ont remarqué cette différence puisque, en excluant les abandons, 32 % des élèves ($\frac{46}{128}$) en modalité 3 et 28 % ($\frac{32}{113}$) en modalité 2 ont donné exactement la même réponse pour les deux schémas. Des attractions particulières semblent devoir expliquer en partie l'assimilation des deux situations par les élèves. En modalité 3 près de la moitié des élèves ayant donné la même réponse pour les deux schémas, ont fermé la figure pour obtenir un parallélogramme. En modalité 2 la même proportion a reproduit la même figure que celle obtenue par la réponse donnée au schéma . Ces réponses semblent davantage commandées par la recherche d'un équilibre de forme que par l'analyse de la succession des flèches. Mais que les deux tiers des élèves aient tenu compte dans leurs réponses du changement de l'orientation d'une flèche confirme l'observation faite plus haut sur la stabilité des comportements de réponse sur ce point.

Dans les modalités 1 et 3, la différence portait au contraire sur le changement figural du schéma par rotation d'une flèche. Ici un tiers seulement des élèves ont donné la même réponse pour les deux schémas : 31 % en modalité 1 ($\frac{39}{125}$, en excluant les abandons) et 26 % en modalité 3 ($\frac{33}{128}$ en excluant les abandons).


Ce résultat indique l'importance de l'organisation figurale du schéma sagittal pour l'appréhension de la situation de transitivité ou non. Elle constitue un obstacle que peu d'élèves se trouvent en mesure de surmonter si l'on tient compte du fait qu'en modalité 1, 15 élèves et en modalité 3, 7 ont effectué toutes les jonctions sur ces deux figures.

4) Effet de contexte



On peut se demander si le comportement de fermeture d'un triangle pour effectuer les jonctions n'est pas en partie induit par un item du type  placé en tête des schémas de la modalité 3.


La modalité 1 a en commun deux schémas avec la modalité 3. Or, nous remarquons qu'en ce qui concerne le schéma  nous avons le même pourcentage de réponses du type 


$$\text{Mod. 1 : } \frac{36}{64} = 56 \% \quad \text{Mod. 3 : } \frac{42}{75} = 56 \%$$

La similitude dans les différents types de réponse et leurs proportions est conservée si l'on prend l'ensemble de la population. L'introduction de l'item  n'induit donc pas un type de réponse pour les autres schémas puisque nous retrouvons la même distribution dans la modalité 1. Cet item semble avoir plutôt introduit un obstacle chez ceux dont le comportement de recherche de toutes les jonctions possibles est mal assuré. Et cela est perceptible si l'on compare les performances au premier schéma en modalité 1 et en modalité 3.

$$\text{Mod. 1 : } \frac{17}{66} = 25 \% \quad \text{Mod. 3 : } \frac{7}{75} = 9,5 \%$$

Tout se passe comme s'il était plus difficile de trouver toutes les jonctions sur le schéma  après avoir répondu à l'item . Et de façon significative c'est la flèche fermant le carré qui est oubliée !!

Ce même item  était présenté de façon différente dans la modalité 2. Il s'agissait de reconnaître qu'une liaison retour ne rendait pas la relation transitive.

Cette présentation a déconcerté les élèves puisque nous obtenons la répartition 62 réussites contre 56 échecs alors que pour l'item  nous avons 100 réussites contre 28 échecs et 5 abandons.


A première vue on peut estimer que nous nous avons là une répartition peu différente de celle du hasard. En regardant les réponses aux schémas de ces deux sous populations d'élèves, les deux remarques suivantes s'imposent :

a) il y a beaucoup plus d'élèves qui ont mis systématiquement des flèches dans le bon sens aux autres schémas, parmi les 62 qui ont réussi que parmi les 58 qui ont échoué :

$$\frac{31}{62} = 50 \% \quad \text{contre} \quad \frac{18}{58} = 31 \%$$



De même le nombre des abandons est beaucoup moins élevé



$$\frac{5}{62} = 8 \% \quad \text{contre} \quad \frac{12}{58} = 21 \%$$

b) La présentation de l'item  n'a pas induit la représentation du retour systématique car le pourcentage de réponses de ce type est le même dans les trois modalités :

$$\text{Mod. 1 : } \frac{16}{139} = 11,5 \% \quad \text{Mod. 2 : } \frac{11}{120} = 9,5 \%$$

$$\text{Mod. 3 : } \frac{11}{133} = 8,5 \%$$

Une réponse de ce type ne se trouve d'ailleurs que chez les élèves qui la produisent spontanément sur l'item  ou qui ne décèlent pas l'erreur de l'item .

La présentation de l'item  en modalité 3 et de l'item  en modalité 3 permettent donc d'affirmer qu'ici l'effet de contexte n'a pas induit un type déterminé de réponses.

Conclusion

Nous avons donc enregistré, en ce qui concerne la transitivité, des réussites et des échecs à travers lesquels les élèves semblent avoir utilisé l'idée de liaison (ou de non liaison) entre deux éléments. De même la représentation d'un triangle à fermer par une flèche raccourcissant le parcours, a permis à nombre d'élèves de se débrouiller sur les schémas sagittaux, mais alors la perception de l'organisation de la figure suggérée par le schéma devient un obstacle difficilement surmontable. La population se débrouillant un peu avec l'idée de liaison et celle utilisant la représentation d'un triangle à fermer se recouvrent mal. Seuls les élèves (observation limitée à la modalité 2) ayant utilisé la notion explicite au "premier pourquoi" ont réussi dans des situations différentes : deuxième pourquoi et schémas sagittaux. Mais ils représentent à peine 10 % de la population.

Il n'est donc pas exagéré de conclure que la transitivité est une notion inabordable pour une partie des élèves de notre cycle d'observation (classes de 6^e et de 5^e, 11-13 ans) ce qui rejoint les conclusions de notre première enquête. Une telle réserve est pour nous une raison d'analyser les difficultés de l'utilisation de cette notion par les élèves de ce niveau à qui elle a été présentée. C'est à une telle analyse qu'a voulu contribuer cette partie du questionnaire.

5. LES TROIS DERNIERES PAGES DU QUESTIONNAIRE

Outre les trois rubriques mathématiques qui ont été analysées, le questionnaire comportait deux types de questions d'une nature différente (questions non présentées en annexe 1) :

- des questions d'association de termes mathématiques,
- des questions sur l'intérêt des élèves à l'égard des mathématiques.

En ce qui concerne les associations de mots, il s'agit ici d'un "ballon d'essai", susceptible de conduire ultérieurement à des études plus précises. La même page, privée toutefois des parenthèses à remplir, avait été présentée à une population d'élèves analogues en 1972. Nous avons été très frappés par la remarquable stabilité des choix, à trois ans d'intervalle : pour certains items, un trio s'impose (par exemple perpendiculaire-parallèle-oblique pour le premier item). Pour d'autres items, la population interrogée se partage essentiellement d'après deux options (par exemple paire-ensemble-couple et singleton-paire-couple pour l'item 10). Dans d'autres cas encore le partage se fait surtout sur trois options. Et la stabilité, en pourcentage, des effectifs correspondant à ces options principalement retenues est un phénomène qui se vérifie sur tous les items. Le plus remarquable est que, pour certains items, aucune des options principalement choisies ne corresponde à ce qui était attendu ; parfois l'explication peut être simple : par exemple l'item 6 donne rarement lieu au choix attendu addition-intersection-réunion, mais l'option retenue massivement est intersection-application-réunion. La proximité dans l'apprentissage est dans ce cas une explication très satisfaisante.

Nous nous contenterons de noter ici cette stabilité des choix, réservant pour l'avenir des études sur les raisons de ces choix et leur corrélation éventuelle avec des épreuves mathématiques de type différent (par exemple des exercices mettant en jeu des processus heuristiques).

La dernière partie du questionnaire demandait aux élèves leur opinion sur l'enseignement mathématique. La rédaction des questions nous avait été inspirée par une étude faite à l'I.R.E.M. de Rennes, au sein de l'équipe animée par Régis GRAS. Nous en avons tiré un questionnaire antithétique : les mêmes éléments apparaissent soit comme des reproches, soit comme des éléments positifs (seul l'ordre diffère entre ces deux rubriques opposées). Sur ces "tiercés" des reproches et des éléments d'appréciation, notre idée essentielle est de confronter les réponses des élèves de 5^e (13 ans) avec celles d'une population d'élèves de 3^e (15 ans) qui nous restent à dépouiller. Toutefois, nous avons soumis à une analyse de correspondances les réponses des seuls élèves de 5^e, et un résultat vaut d'être signalé : sur l'axe 2 s'opposent les opinions très tranchées, et trois des reproches y apparaissent comme bizarrement "neutres" de ce point de vue. Il s'agit de :

"On est toujours obligé de démontrer ce que l'on trouve"
"Il y a trop de mots dont on ne comprend pas le sens"
"Il faut souvent chercher sans trouver".

Une clé intéressante pour l'explication consiste en la remarque suivante : ces phrases diffèrent des autres phrases proposées en ce que leur proposition principale est sous forme affirmative, et non sous forme négative. Ceci expliquerait le choix de ces phrases par les élèves dont l'opinion n'est pas catégorique : les reproches forts sont exprimés par les phrases négatives, tandis que les reproches modérés correspondent à ces phrases, plus anodines. Bien évidemment, une telle interprétation amène à des questions sur le statut de la négation chez les élèves. Mais dans ce cas encore, l'étude est à faire.

6. ANALYSE GLOBALE DES CORRESPONDANCES

Jusqu'à présent nous n'avons examiné que les résultats relatifs à chaque notion. Cette perspective est locale et ne permet pas de répondre à une question importante : y a-t-il des rapports entre les différents comportements de réponse de chaque élève, sur toutes les parties du questionnaire ? Au delà de cette question c'est tout le problème des transferts d'apprentissage qui est soulevé. Ce questionnaire n'a évidemment pas été conçu en fonction de ce problème, mais une étude de l'ensemble des réponses fournit quelques indications. C'est dans ce but que nous nous sommes livrés à une analyse globale des correspondances. Au vu des résultats des opérations de tri et des analyses partielles antérieures à ce travail, nous avons toutefois éliminé les comportements de réponses "spécialisés" dans chaque partie. Les questions qui nous ont paru intéressantes et auxquelles cette analyse peut apporter des éléments de réponse sont :

- 1° de savoir s'il y a une liaison entre les acquis de base relatifs aux différentes parties du questionnaire
- 2° de savoir si les comportements de réponses sont susceptibles de provenir de l'exploitation des éléments autres que les connaissances mathématiques présentées dans la suite des questions : ainsi le fait de remarquer qu'une question a déjà été posée (modalité 3 : nombre de bijections, intervenant deux fois) ou que deux questions amènent à des réponses contraires (modalités 1 et 3, "le nombre caché peut-il être ...", suivant que l'on veut une relation transitive ou non transitive) ou que deux schémas présentent des différences.

Voici donc la liste des réponses envisagées dans cette analyse, suivie de la répartition entre les modalités.

Page symboles

Questions

Réponses retenues

- ① Item $\{1,5\} \in \{1,5\{1,5\}\}$: Réussite (REPY), Echec (PAPY), Non posé (NOPY).

- ② Items groupés $5 \subset \{1,5,3\}$
 $8 \subset \{1,5,3\}$ Réussite complète (RESY),
 $\{5,1\} \in \{1,5,3\}$ Comportement gauche-droite (GDSY),
 $5 \in \{1,5,3\}$ Autres échecs (AUSY).
 $8 \in \{1,5,3\}$

- ③ Quatre premières questions "à trou" groupées :
(RTRC) Réussite complète,
(GTRC) Erreurs non grammaticales seulement,
(ATRC) Autres réponses,
(NTRC) Non posé.

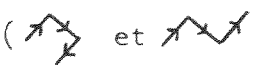
- ④ Comme 3 , pour la modalité 2 :
(RTRV) Réussite complète,
(GTRV) Erreurs non grammaticales seulement,
(ATRV) Autres réponses,
(NTRV) Non posé.





Applications - bijections

- ⑤ Deuxième schéma de référence (application) :
(RREF) Conformité à la légende,
(AREF) Autres réponses.
- ⑥ Bijections entre $\{1,2\}$ et $\{6,8,9\}$
 $\{1,2,3\}$ et $\{6,8\}$ (groupées) :
(RBIJ) Réussite (aucune bijection),
(ABIJ) Autres réponses,
(NBIJ) Non posé.
- ⑦ Applications qui sont des bijections (modalité 3) :
(RABI) Même réponse que pour "bijection",
(AABI) Autres réponses,
(NABI) Non posé précédé de "bijection".

- ⑧ Applications qui ne sont pas des bijections :
- (RAPP) Différence entre nombres d'applications et de bijections,
 - (CAPP) Nombre d'applications,
 - (AAPP) Autres réponses,
 - (NAPP) Non posé.

Transitivité

- ⑨ Premier "pourquoi ?" :
- (RPOU) Réussite et bonne explication,
 - (BPOU) Réussite avec explication : "non liaison de deux éléments",
 - (APOU) Autres réponses,
 - (NPOU) Non posé.
- ⑩ Cohérence "nombres cachés" :
- (RCOH) Cohérence des réponses "transitive" et des réponses "non transitive",
 - (ACOH) Autres réponses,
 - (NCOH) Non posé.
- ⑪ Triangle, question en Vrai-Faux :
- (RTVF) Réussite,
 - (ATVF) Echec,
 - (NTVF) Non posé.
- ⑫ Triangle à compléter :
- (RTRI) Réussite,
 - (ATRI) Echec,
 - (NTRI) Non posé.
- ⑬ Schémas différents représentant la même situation () :
- (RSIM) Même comportement de réponse dans les deux cas,
 - (ASIM) Autres réponses,
 - (NSIM) Non posé.

- ⑭ Différence entre les schémas  et  :
- (RDIZ) Production de réponses différentes,
 - (ADIZ) Production de deux réponses identiques,
 - (NDIZ) Non posés simultanément.
- ⑮ Différence entre les schémas  et  :
- (RDIC) Production de réponses différentes,
 - (ADIC) Production de deux réponses identiques,
 - (NDIC) Non posés simultanément.

Répartition des questions par modalité

	page symboles				applications-bijections				transitivité						
	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮
Mod. 1	x	x	x		x			x		x			x		
Mod. 2		x		x	x	x			x		x			x	
Mod. 3	x	x	x		x	x	x	x		x		x	x		x

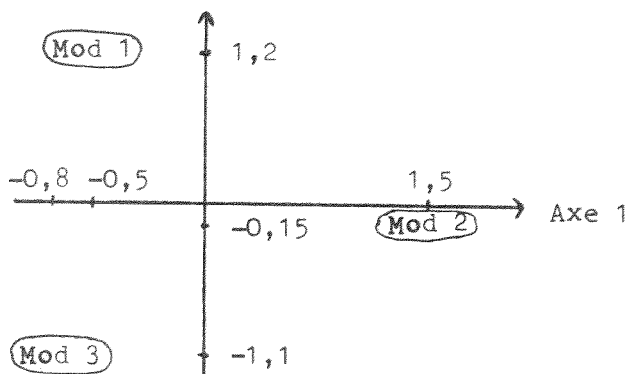
L'analyse des correspondances conduit aux axes suivants :

- Axe 1 : oppose la modalité 2 aux modalités 1 et 3.
- Axe 2 : oppose les modalités 1 et 3.
- Axe 3 : Axe réussite-échec (réussites : coordonnées négatives, échecs : coordonnées positives).
- Axe 4 : Distingue les activités combinatoire et sémantique.

Les pourcentages d'inertie (*) de ces axes sont respectivement : 30,42 ; 9,24 ; 6,75 ; 4,54.

Analyse du plan 1 - 2

Axe 2



Le triangle des modalités est représenté ci-contre. En principe les comportements de réponse aux questions communes aux trois modalités doivent apparaître au voisinage de l'origine ; les comportements de réponse à des questions communes à deux des modalités doivent apparaître aux milieux des côtés du triangle.

(*) Pourcentage de l'inertie par rapport à un axe relativement à l'inertie par rapport au centre de gravité.

Ici, il y a peu de déviations notables par rapport à la situation théorique. L'exception la plus nette se situe dans la réponse consistant à donner le nombre d'applications, au lieu du nombre d'applications qui ne sont pas des bijections (item noté (8) dans la liste ci-dessus). Cette réponse à pour coordonnées (-0,59 ; 0,76) dans le plan 1-2, c'est-à-dire qu'elle est presque spécifique de la modalité 1. L'analyse globale confirme donc l'influence d'une question préliminaire sur la compréhension du libellé de la question (voir l'analyse partielle de la rubrique applications-bijections). Ici, l'attraction pour le mot "bijection", créée en modalité 3 par la question de la page précédente, évite l'arrêt de lecture qui amène à : "Quel est le nombre d'applications".

Les autres déviations sont moins fortes. L'effet de début et de fin de questionnaire (échauffement-relâchement) apparaît dans l'attraction vers la modalité 3 des réussites aux items notés (2) (3) et (10) dans la liste, lesquels apparaissent respectivement en première et dernière page du questionnaire modalité 1. Par ailleurs, la reconnaissance de la même situation dans deux schémas perceptivement différents est légèrement attirée par la modalité 1 (ses coordonnées sont -0,64 et 0,25) : il s'agit ici de la première page de la modalité 3, mais aussi la présentation facilite plus le rapprochement des deux schémas en modalité 3 qu'en modalité 1. Les cinq cas de non-réponse étant éliminés, on obtient le tableau d'effectifs suivant :

Modalité 1	Modalité 3	
53	83	Identité des réponses pour les deux schémas
40	91	Production de deux réponses différentes

Le tableau théorique est

47	89
46	85

et le χ^2 (à un degré de liberté) prend la valeur 2,3, alors que la valeur limite au seuil .05 est 3,8. Ainsi le seuil n'est pas franchi (ce que nous laissait soupçonner l'amplitude peu importante de l'attraction), ce qui ne nous permet pas à coup sûr d'infirmer l'hypothèse que les effectifs obtenus pourraient provenir des aléas de la répartition des élèves entre les modalités. Aussi une étude plus poussée, visant à permettre de trancher entre

l'échauffement et la perception de la page, ne nous paraît pas justifiée dans ce cas.

Analyse de l'axe 3 (réussite-échec)

La cohérence d'ensemble est plus nette que nous ne l'attendions : il n'y a pas dissociation des réussites à différentes parties du questionnaire, mais toutes les réussites vont du côté négatif sur l'axe, et tous les échecs du côté positif. Il convient de rappeler que cette analyse globale ne porte que sur un "programme minimum" pour chaque partie. La situation eût pu différer si nous avions pris en compte les questions plus "spécialisées".

Pour mémoire, rappelons l'inversion de résultat sur l'item $\{1,5\} \in \{1,5\{1,5\}\}$: ici la réponse juste est l'échec, et l'erreur est la réussite (voir l'analyse de la page "symboles ensemblistes"). D'autres résultats déjà signalés réapparaissent, comme la distinction entre les questions portant sur la découverte de "conjonctions" (\cup et \cap) et celles portant sur la découverte de "verbes" (\in , $=$, \subset) : les erreurs même non grammaticales sont un échec dans le cas des verbes, mais pas dans celui des conjonctions (coordonnée pratiquement nulle).

Ce qui est particulièrement remarquable dans cette analyse globale, outre la cohérence d'ensemble, est la hiérarchie de réussites organisée selon l'axe réussite-échec. Cette hiérarchie suit ici l'ordre de l'apprentissage : symboles ensemblistes, puis applications-bijections, et enfin transitivité.

Les questions portant sur les symboles ensemblistes sont celles qui donnent lieu aux comportements ayant à la fois les plus grandes coordonnées (en valeur absolue) sur l'axe 3 et les plus fortes contributions. Pour ce qui est de l'ensemble du questionnaire, les réussites à ces questions sont donc celles qui ont le plus de signification vis à vis de la réussite générale. Leur coordonnée sur l'axe 3 est d'environ -1 et leur contribution de 10 %. Exception : la réussite aux questions à compléter par des "verbes" (\in , $=$, \subset) ; coordonnée sur l'axe 3 : -0,6 et contribution : 1,95 %, nettement plus faible que les précédentes (l'analyse selon l'axe 4 pourra aborder une explication).

Avec des coordonnées allant de $-0,4$ à $0,9$ et des contributions situées aux environs de 5% , on trouve ensuite les réussites concernant la partie "applications-bijections".

Enfin les réussites concernant la partie "transitivité" ont des coordonnées de l'ordre de $-0,4$, ou moins en valeur absolue, et des contributions qui ne dépassent pas 2% . Une exception : la réussite au "Premier pourquoi" ($\textcircled{9}$), dont la coordonnée est $-0,66$.

Les échecs, eux, ne suivent pas la hiérarchie des réussites. C'est ainsi que l'échec qui a la plus forte coordonnée concerne le fait de réagir de la même façon devant les deux schémas en carré différant par le sens d'une flèche (coordonnée : $0,91$, contribution : $4,88\%$). Notre codage, qui prend en compte ici le repérage d'une telle différence, et non la correction mathématique, permet de comprendre que l'échec soit, pour cette question, plus significatif que la réussite.

Des autres échecs, nous ne mettrons en avant que celui qui a la plus forte contribution ($7,39\%$) : le comportement systématique gauche-droite devant les items ensemblistes (\in et \subset). Ce comportement apparaît ici comme plus "mauvais" que le fait de commettre d'autres erreurs. La hiérarchie dans les stades d'utilisation serait alors pour ce type d'items :

1. Comportement gauche-droite.
2. Erreurs diverses (qui pourraient s'expliquer par un déséquilibre s'introduisant dans le comportement précédent, ce dont la séquence des items est susceptible d'être la cause).
3. Séparation éléments - ensembles.
4. Notion d'objet.

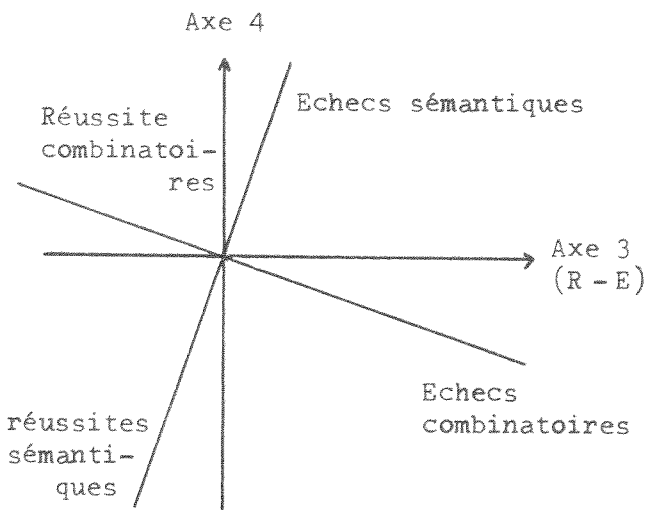
Malgré son pourcentage qui le situe à la limite des cas de légitime interprétation (pourcentages de l'ordre de 5%), l'axe 4 nous paraît d'un grand intérêt pour apporter quelques éléments d'explication supplémentaires.

Analyse selon l'axe 4

Si nous regardons seulement les réussites, l'axe 4 permet d'opposer d'une part les réussites au "Premier pourquoi" (9), aux items à trou verbal (4) et au "Triangle, Vrai-Faux" (11) (pour ne retenir que les cas les plus nets), et d'autre part les réussites aux items à trou conjonctionnel (3) et aux questions de dénombrement d'applications et bijections (7) et (8).







Si nous examinons le premier type de question, nous voyons que leur résolution dépend surtout d'une activité de transposition ou d'interprétation des données ; la résolution des questions au second type exige principalement la mise en œuvre de procédures précises et d'algorithmes. Compte tenu de cette remarque sur ce que nous pourrions appeler l'opposition entre les questions à prédominance sémantique et les questions à prédominance combinatoire, l'interprétation de l'axe s'impose naturellement : les comportements ont une coordonnée positive de réussite aux questions à dominante sémantique et d'échec aux questions à dominante combinatoire. C'est l'inverse pour les coordonnées négatives.

Cette interprétation exigera une vérification ultérieure. Cette étude ne comporte pas un ensemble de données suffisant (nombre de cas répertoriés, pourcentages significatifs) pour l'imposer comme une certitude. Mais il nous apparaît qu'elle devra être prise en compte dans toute analyse des comportements de réponse des élèves.



Le plan factoriel 3 - 4 fait apparaître deux directions privilégiées, sensiblement orthogonales, dans le nuage de points projeté.

Ainsi apparaît en particulier très bien où se situe la différence dans les items à trou, suivant qu'il s'agit d'y placer un verbe ou une conjonction.

Un seul phénomène pourrait a priori apparaître comme curieux : les comportements devant les schémas en Z ( et ) apparaissent sur l'axe sémantique, tandis que les comportements devant les schémas en carré ( et ) apparaissent sur l'axe combinatoire. Le fait que la figure de base (le triangle) soit apparente dans un cas () et cachée dans l'autre () est à cet égard éclairant : le lecteur peut aisément s'en rendre compte en se livrant mentalement au passage en revue des différents triangles à considérer dans le carré.

Le plan 3 - 4 permet aussi de distinguer les deux questions portant sur la figure de base : le triangle. La question en Vrai-Faux est manifestement située sur l'axe sémantique. La figure à compléter est plutôt située sur l'axe combinatoire. Nous disons "plutôt" car le comportement de réussite apparaît proche de l'origine et que c'est le comportement d'échec seul qui est alors déterminant (ses coordonnées : 0,41 et -0,38). L'interprétation demande de savoir qu'un certain nombre d'élèves a considéré toutes les possibilités de flèches, y compris les boucles. Un échec dans le tri de ces possibilités (même dans le cas de trois points) peut en effet être qualifié de l'adjectif "combinatoire".

ANNEXE 1

LES QUESTIONNAIRES PRESENTES AUX ELEVES

Pour éviter de multiples répétitions, les pages suivantes donnent une présentation synoptique des trois modalités du questionnaire.

Le lecteur peut facilement reconstituer les questionnaires présentés aux élèves grâce aux numéros de page encadrés, indiqués pour chaque question : la pagination des modalités du questionnaire était organisée comme suit, dans l'ordre.

Modalité 1 : pages ①① , ②① , ③① , ④① , ⑤① , ⑥①

Modalité 2 : pages ②② , ③② , ①② , ④② , ⑤②

Modalité 3 : pages ④③ , ⑤③ , ②② , ④① , ①① .

PAGES SYMBOLES (11) ET (12)

(11)

<u>Modalité 1 et 3</u>	Encadrer la bonne réponse	
$\{1\} \in \{1,5,\{1,5\}\}$	VRAI	FAUX
$5 \in \{1,5,\{1,5\}\}$	VRAI	FAUX
$\{1\} \subset \{1,5,\{1,5\}\}$	VRAI	FAUX
$\{1,5\} \in \{1,5,\{1,5\}\}$	VRAI	FAUX
$\{1,5\} \subset \{1,5,\{1,5\}\}$	VRAI	FAUX

(12)

<u>Modalité 2</u>	Encadrer la bonne réponse	
$\{5\} \subset \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$\{5\} \in \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$\{8,1\} \in \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX

(11)

(12)

Modalité 1, 2, 3

Encadrer la bonne réponse

$\{5,1\} \subset \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$5 \subset \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$8 \subset \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$\{5,1\} \in \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$\{8,1\} \subset \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$5 \in \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX
$8 \in \{1,5,3\}$	VRAI	FAUX

Modalité 1 et 3

(11)

Remplir chaque espace blanc ... par l'un des symboles :
 $\in, =, \cap, \cup, \subset$, de manière à obtenir une phrase vraie.

$a \in \{a,b,c\} \dots \{c,d\}$
 $\{a,c\} = \{a,b,c\} \dots \{c,a,d\}$
 $\{a,b,c\} \cap \{d,b,f\} = \{b,c,d\} \dots \{c,f,b\}$
 $\{1,7,5,8,4\} \subset \{1,8,7\} \dots \{4,5,6\}$
 $\{1,3,5\} \dots \{4,3,2,1\} = \{1\} \dots \{3\}$
 $\{1,3\} \dots \{5,3\} \dots \{1,3,5\}$

Modalité 2

(12)

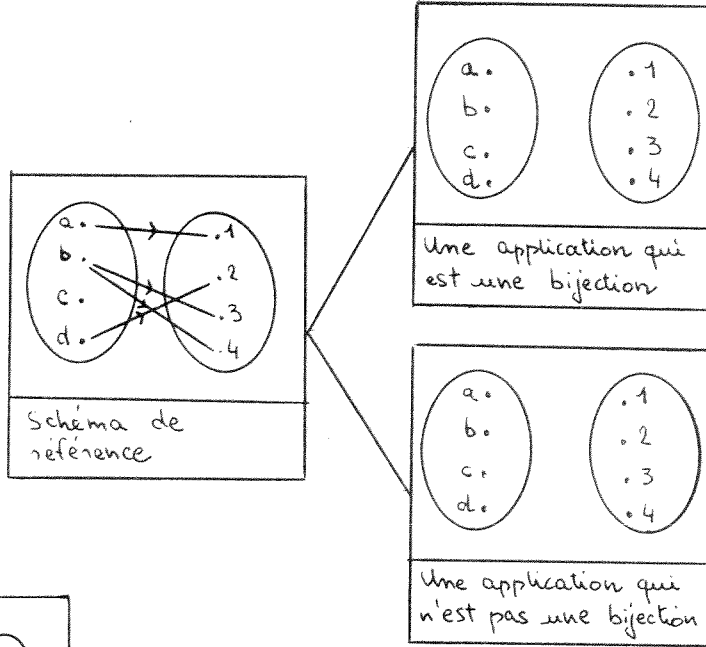
$a \dots \{a,b,c\} \cup \{c,d\}$
 $\{a,c\} \dots \{a,b,c\} \cap \{c,a,d\}$
 $\{a,b,c\} \cap \{d,b,f\} \dots \{b,c,d\} \cap \{c,f,b\}$
 $\{1,7,5,8,4\} \dots \{1,8,7\} \cup \{4,5,6\}$
 $\{1,3,5\} \cap \{4,3,2,1\} \dots \{1\} \dots \{3\}$
 $\{1,3\} \dots \{5,3\} \dots \{1,3,5\}$

SCHÉMAS DE RÉFÉRENCE + CASES

Modalité 1 et 3

(41)

Un schéma de référence est donné. Il s'agit de le transformer, chaque fois en ne changeant qu'une flèche, pour obtenir des schémas conformes aux légendes.



Modalité 1 et 3

(41)

Parmi les relations de $\{1;2;3\}$ vers $\{1;3;5\}$ combien existe-t-il en tout

Mettre chaque fois une croix dans la case choisie ↓

d'applications

:	0	1	3	6	9	27
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d'application qui sont des bijections

:	0	1	3	6	9	27
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

de bijections qui ne sont pas des applications :

:	0	1	3	6	9	27
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

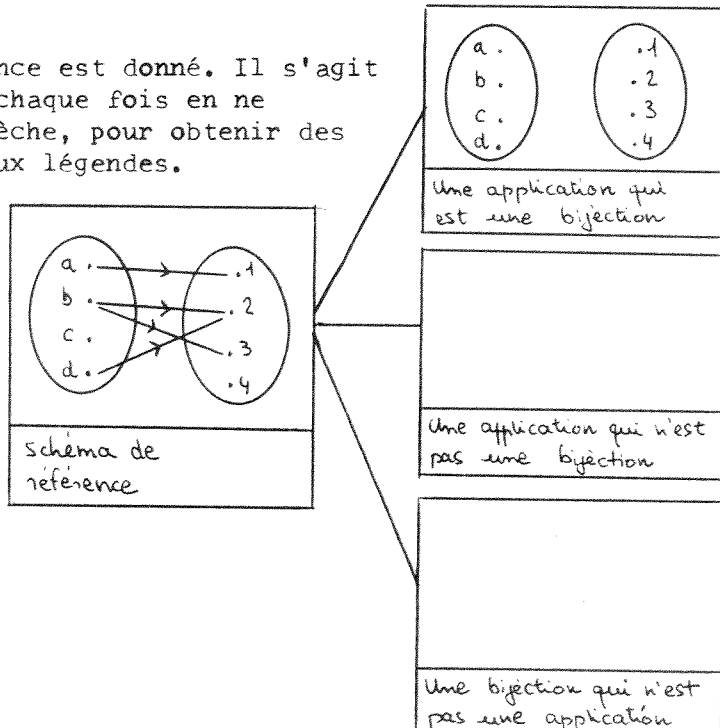
Combien existe-t-il d'applications qui ne sont pas des bijections :

← résultat

Modalité 2

(32)

Un schéma de référence est donné. Il s'agit de le transformer, chaque fois en ne changeant qu'une flèche, pour obtenir des schémas conformes aux légendes.

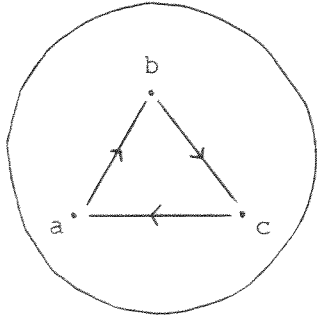


TRANSITIVITE

SCHEMAS A COMPLETER

Modalité 2

42



Ce schéma représente une relation transitive :

VRAI FAUX

Modalité 1

51

Modalité 3

43

Compléter par des flèches chaque schéma pour qu'il représente une relation transitive. Essayer de ne pas tracer de flèches inutiles.

Modalité 2

42

Les schémas ci-dessous comportent déjà un certain nombre de flèches. Indiquer comment les compléter pour que chacun représente une relation transitive. Essayer de ne pas indiquer de flèches inutiles.

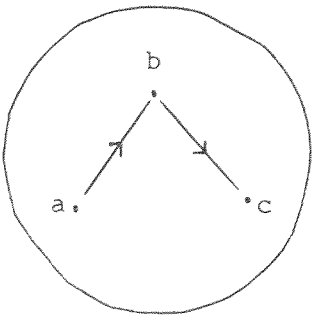


Schéma 1, modalité 3

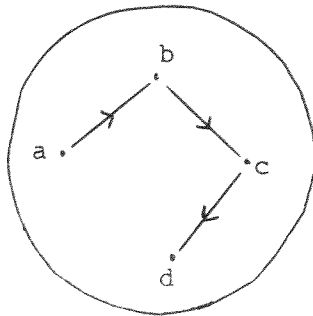


Schéma 1, modalité 1

Schéma 1, modalité 2

Schéma 2, modalité 3

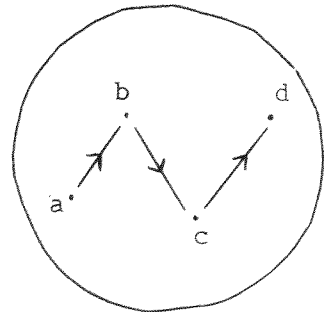


Schéma 2, modalité 1

Schéma 3, modalité 3

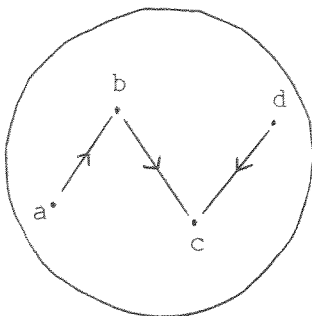


Schéma 4, modalité 3

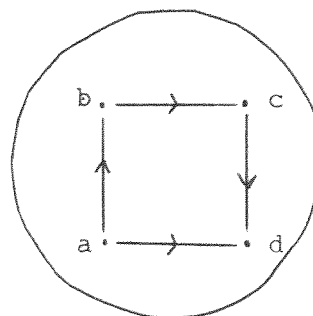


Schéma 3, modalité 1

Schéma 2, modalité 2

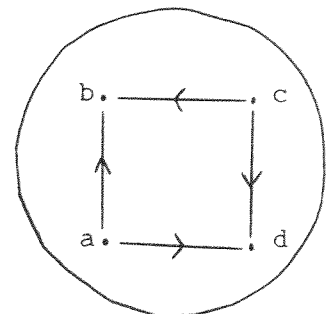


Schéma 3, modalité 2.

LIEN VERBAL

Modalité 1 (61)

Modalité 3 (53)

On veut que l'expression "a un même chiffre que" détermine une relation transitive dans $E = \{32; 21; \blacksquare\}$ (le dernier nombre est caché par un carré noir).

Le nombre caché peut-il être 13 :

Le nombre caché peut-il être 45 :

Le nombre caché peut-il être 23 :

Le nombre caché peut-il être 43 :

Le nombre caché peut-il être 11 :

On veut que l'expression "a un même chiffre que" détermine une relation non transitive dans $E = \{32, 21, \blacksquare\}$.

Le nombre caché peut-il être 13 :

Le nombre caché peut-il être 45 :

Le nombre caché peut-il être 23 :

Le nombre caché peut-il être 43 :

Le nombre caché peut-il être 11 :

Modalité 2 (52)

L'expression "avoir un même chiffre que" détermine^{t-elle} dans $E = \{32, 21, 53\}$ une relation qui est transitive ?

Pourquoi ?

Modalité 1 (61)

Modalité 2 (52)

Modalité 3 (53)

L'expression "avoir un même chiffre que" détermine-t-elle dans l'ensemble E de tous les nombres à deux chiffres $E = \{10, 11, \dots, 98, 99\}$ une relation transitive ?

Pourquoi ?

ANNEXE 2

METHODOLOGIE DES ENQUETES

1. BUT DES ENQUETES

- d'une part repérer, au terme de l'apprentissage d'un curriculum donné, les différents comportements acquis par les élèves relativement à une ou deux notions mathématiques,
- d'autre part, en dégager les aspects les plus généraux qui caractérisent des comportements analogues en d'autres situations et d'autres niveaux.

Ce repérage des comportements acquis peut se faire soit immédiatement après l'introduction d'une notion, soit après une période plus longue au cours de laquelle d'autres apprentissages auront été faits. Dans le premier cas on s'intéresse surtout à la comparaison entre différentes manières d'introduire une notion. Dans le second cas on s'intéresse surtout à la stabilisation des comportements acquis : cette stabilisation ne peut être réellement prise en compte qu'au terme d'une certaine période et après les interactions possibles avec l'apprentissage d'autres notions (oubli, transfert, assimilation conduisant à des confusions).

C'est cette seconde perspective que nous avons adoptée.

En France l'enseignement dans le premier cycle étant organisé par période de deux ans, c'est à la fin de la 5e et de la 3e que des enquêtes pourront porter sur des comportements suffisamment stabilisés.

Notre objectif conduit à écarter d'emblée une démarche courante dans une perspective d'évaluation : les réponses des élèves sont réparties seulement en deux classes, réussites et échecs, et interprétées isolément. Il est bien évident qu'une enquête qui se donnerait seulement cette possibilité d'exploitation ne pourrait permettre de repérer des comportements. D'une part, les réponses à un item fournissent tout au

plus un indicateur de comportement. Sans autre information, nous ne pouvons que nous interroger sur leur stabilité et sur leur réelle signification : c'est une séquence de réponses à un nombre suffisant d'items voisins qui peut être interprétée. D'autre part, le contenu de la réponse est une information aussi précieuse que son exactitude ou son inexactitude. Il peut y avoir aussi bien différents types d'erreurs que plusieurs démarches conduisant à la réussite. Il est important de les répertorier. En procédant de cette manière, il n'est pas rare de détecter, relativement à une notion et dans un groupe d'items voisins, des erreurs spécifiques à certains d'entre eux, accompagnées de réussites à d'autres items, erreurs et réussites présentant une cohérence manifeste. C'est cette cohérence qui permet de déterminer un comportement associé à une notion.

Un exemple peut illustrer ces premières remarques sur la possibilité de mettre en évidence le comportement des élèves relativement à une notion. Ils avaient à choisir parmi cinq réponses possibles à chacun des trois items, les inverses de 10^4 , 10^{-3} , 10^n . (*)

La séquence $1/10^{-4}$, $1/10^{-3}$ et $1/10^n$ est apparue chez plus d'un élève sur trois.

Or, à chacun des trois items les réponses 10^{-4} , 10^3 et $10^{(-n)}$ étaient proposées. L'information "un échec, deux réussites" n'est pas significative ; en revanche, dans cette séquence qui groupe à la fois une erreur et deux réussites, le contenu de l'erreur et celui des réussites se révèlent semblables. Cela nous permet d'approcher un comportement associé à la notion d'inverse d'un nombre pour une population non négligeable d'élèves (près d'un tiers des élèves) au terme d'un curriculum déterminé.

Le phénomène intéressant dans cet exemple est la mise en évidence, à différents niveaux d'enseignement, de comportements pouvant, selon les situations dans lesquelles ils sont sollicités, conduire soit à une réussite soit à un échec. Tous les comportements acquis, traduisant l'utilisation qu'un élève fait d'une notion, ne sont naturellement pas de ce type. Mais c'est une exploration de ce genre que nous effectuons dans nos enquêtes.

(*) Acquisition des structures numériques en fin de 3^e (enquête déjà citée).

L'objectif d'une enquête ne se limite pas à une description précise des comportements de réponse aux questions posées. Leur analyse et la confrontation des comportements repérés sur diverses séquences de questions peut permettre de dégager des comportements plus généraux, non liés à l'utilisation de telle notion précise. Ensuite pourra se poser le problème de l'explication. Ainsi, l'exemple ci-dessus conduit, avec d'autres, à l'idée de conduites de sous-compréhension, fréquemment adoptées par les élèves.

Citons un autre exemple, qui, à l'heure actuelle, n'est encore qu'une hypothèse : celui de la permanence de certaines difficultés. Des expériences, faites dans l'enseignement primaire (relatées notamment par F. Colmez), ont montré la difficulté du passage de la résolution d'une question comme :

"Compléter $16 + \dots = 21$ "

à

"Compléter $21 - 16 = \dots$ "

et ensuite de l'équivalence avec :

"Compléter $21 - \dots = 16$ ".

Dans une enquête sur la géométrie en fin de 3e, que nous reprenons actuellement pour en préciser les résultats quantitatifs, nous avons posé des questions de ce type, mais en substituant des vecteurs aux nombres. Dans les cas où les vecteurs sont données par des composantes, les réponses ne diffèrent pas sensiblement d'un type de questions à l'autre (on peut donc dire que, dans un contexte numérique, le fonctionnement de l'équivalence n'est pas remis en cause du fait de la présence d'une deuxième dimension). En revanche l'équivalence entre

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \text{ et } \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

ne fonctionne plus si les vecteurs sont représentés et s'il s'agit d'effectuer une construction géométrique : les réponses sont différentes suivant que le vecteur à construire est ou non isolé, et suivant qu'il y a ou non présence d'un signe -. On peut dire ici qu'une difficulté, que l'on croyait surmontée depuis longtemps, réapparaît à l'occasion d'une utilisation nouvelle. Devant un tel exemple, on est conduit à une recherche plus détaillée qui, dans ce cas précis, reste encore à mener.

Conséquences méthodologiques : élaboration et exploitation d'enquêtes

Principe général

Les comportements de réponse subissent-ils des variations lorsque les questions posées sont soumises à des modifications ? C'est, nous semble-t-il, l'étude des problèmes de ce type qui est la piste la plus féconde. En nous demandant quelles sont les variations sur les questions posées qui détermineront des variations de réponses, nous pouvons en même temps étudier la stabilité de certains comportements de réponse, explorer la diversité des situations dans lesquelles un comportement précis est mobilisable, et analyser aussi la complexité ou la pertinence de questions a priori claires.

2. LES QUESTIONNAIRES A PLUSIEURS MODALITES

Le principe général de variations sur les énoncés se heurte à des difficultés évidentes dans son application à un individu (effet d'induction mutuelle de questions trop proches). C'est pourquoi nous avons adopté la procédure suivante : une enquête déterminée donne lieu non pas à un, mais à plusieurs questionnaires. Chaque élève n'aura à répondre qu'à un seul des questionnaires, nous dirons une seule de ces modalités de l'enquête. Dans une même classe, les modalités seront réparties "au hasard", de manière à peu près équilibrée : ainsi, pour une enquête à quatre modalités A, B, C, D, à une classe de 25 élèves par exemple, seront distribués 6 questionnaires de modalités A, B, C et 7 questionnaires de la modalité D. De cette façon, il est possible de présenter des progressions différentes des questions, et des formes différentes d'énoncé d'un même type de questions.

Pour être interprétables, des variations de réponses à une question d'une modalité à l'autre devront être comparées à des similitudes de comportements pour d'autres questions : c'est-à-dire que des différences acquièrent une signification quand elles sont accompagnées par ailleurs de tests d'homogénéité.

C'est de cette manière que nous avons pu observer les différences de comportements de réponses, signalées plus haut, entre des questions vectorielles utilisant des composantes (peu sensibles aux fluctuations d'énoncés) et celles demandant des constructions géométriques (sensibles aux fluctuations d'énoncés).

3. CODAGE DES REPONSES

Pour coder les réponses à une question à choix multiples, le repérage des comportements demande simplement de conserver, au moins en partie, la variété des réponses.

En géométrie, l'exploration par des questions ouvertes (c'est-à-dire à possibilité de réponses non prévues d'avance) impose une réflexion sur le codage. Il ne nous est pas possible aujourd'hui de dire que nous disposons d'une méthode rigoureuse et éprouvée. Nous pouvons simplement énoncer un protocole dont la mise en pratique diminue les incertitudes du codage de réponses non prévues d'avance.

Opération 1 :

Prélever un échantillon des réponses obtenues, résumer leur contenu pour former des classes de réponses, de contenus sensiblement identiques.

Opération 2 :

Caractériser chacune des classes de contenus obtenues par des mots, des figures ou des expressions clés, communs à toutes les réponses d'une même classe et la distinguant des autres.

Opération 3 :

Ordonner partiellement les classes d'après les contenus, et attribuer à chacune un numéro. Le codage ainsi formé est totale-ment disjonctif.

Opération 4 :

Deux correcteurs commencent à coder les réponses indépendamment l'un de l'autre. Ils repèrent s'il n'apparaît pas de classe de contenu non encore répertoriée, et ils examinent la coïncidence de leurs attributions respectives de numéros de code.

Après l'opération 4, on reprend éventuellement à l'opération 2, jusqu'à obtention de l'exhaustivité et d'une coïncidence parfaite entre les attributions de numéros de code.

L'analyse des résultats pourra faire revenir sur le codage, notamment pour aboutir à des regroupements.

4. ANALYSE

L'analyse des réponses à un questionnaire correspondant aux objectifs indiqués ici pose :

- 1° des problèmes mathématiques,
- 2° des problèmes d'interprétation.

Ces deux types de problèmes sont confrontés constamment par l'intermédiaire des deux questions :

- a) à quelle(s) interprétation(s) conduit "raisonnablement" telle observation ?
- b) quels résultats observés sont susceptibles de confirmer ou au contraire d'infirmer telle interprétation ?

La question a) est celle de la généralisation à partir des observations effectives. Elle amène presque automatiquement la question b), qui doit être posée non seulement pour l'enquête étudiée, mais pour d'autres résultats obtenus antérieurement. A défaut d'une réponse suffisante parmi les résultats existants, il y a lieu de prévoir de nouvelles questions.

A l'aide d'un programme de dépouillement d'enquêtes, mis au point par le Centre de Calcul du Département de Mathématique de Strasbourg, il nous est possible d'obtenir, dès que les réponses sont codées, des histogrammes partiels permettant la résolution immédiate de certains problèmes soulevés a priori et pendant l'élaboration du questionnaire. L'application de programmes d'analyse de correspondances est ensuite un instrument essentiel pour l'interprétation.

CONCLUSION

Dans le travail sur une enquête, il est facile de distinguer trois phases : l'élaboration qui précède la passation par les élèves, la "correction" (c'est-à-dire le codage des réponses) et l'analyse des résultats. Nous avons peu insisté sur la dernière, qui est en général la mieux étudiée du point de vue méthodologique. En revanche, la réflexion sur les deux premières phases est souvent très insuffisante. Et pourtant les méthodes statistiques les plus élaborées et les plus fines ne pourront jamais pallier aux insuffisances d'un questionnaire mal élaboré ou d'un codage des réponses trop pauvre.

Nous avons insisté sur l'élaboration du questionnaire en indiquant l'exigence qui la commande : solliciter en des situations différentes les comportements acquis par les élèves à propos de quelques notions mathématiques. Si beaucoup d'enseignants sous-estiment la difficulté qu'il y a à poser de "bonnes" questions aux élèves (c'est-à-dire des questions non équivoques et leur permettant de réfléchir et d'utiliser ce qu'ils savent), certains chercheurs en didactique trouvent cette difficulté insurmontable et préfèrent regarder les élèves réagir librement devant des situations. Pour s'assurer de la pertinence des questions posées, l'emploi de questions à plusieurs modalités, s'ajoutant aux précautions dans leur mise au point (essai des questionnaires au cours de passations individuelles), s'avère une méthode sûre parce qu'elle permet la critique du questionnaire. Et nous sommes convaincus que cette méthode se révélera féconde quand elle aura été parfaitement mise au point dans ses détails (exemples : nombre optimal de modalités par question, prévision des vérifications d'homogénéité nécessaires).

En ce qui concerne le codage pour des questions à réponses non prévues d'avance, nous avons décrit un protocole dont nous nous contentons, faute de mieux : sa mise en oeuvre exige du temps, et revenir éventuellement trois ou quatre fois sur la correction des réponses à une seule question est fastidieux. Mais la contrepartie est la certitude que le contenu des réponses est pris substantiellement en compte par le codage.

Par ce type d'enquêtes, nous espérons parvenir à mettre en évidence certains phénomènes caractéristiques du développement du raisonnement formel dans le cadre de l'enseignement mathématique. Cette première description des comportements effectivement acquis par les élèves, au terme d'une période d'apprentissage et dans des situations pédagogiques diverses, doit fournir les informations précises et les premiers éléments d'analyse qui rendront plus efficace le recours à d'autres méthodes, comme les plans d'expérience, les entretiens ou l'observation régulière dans les classes.

ANNEXE 3

Voici à titre d'exemples, les codages des réponses adoptés pour le dépouillement de deux questions. L'annexe 4 et le texte montrent que les traitements ont souvent porté sur des codages réduits de ces codages de dépouillement.

I. Schémas de référence (application-bijection)

Quatre notes étaient attribuées à chaque réponse :

<u>Contenu mathématique de la réponse produite</u>	<u>Comparaison avec le schéma de référence</u>		<u>Caractéristiques figurales du schéma produit</u>
0 Non réponse	Nombre de flèches <u>conservées</u> du schéma de référen- ce	Nombre de flèches <u>différentes</u> du schéma de référen- ce	1 Parallélisme des flèches
1 Je n'y arrive pas			2 Divergence des flèches
2 C'est impossible			3 Convergence des flèches
3 Bijection			4 Croisement des flèches
4 Application non bijective			5 Divergence et convergence
5 Relation réciproque d'une application			6 Divergence et croisement
6 Relation quelconque			7 Convergence et croisement
			8 Divergence, convergence et croisement

II. Schémas à compléter pour représenter une relation transitive

Trois notes étaient attribuées à chaque réponse :

<u>Retours et boucles</u>	<u>Sens des flèches correspondant à l'ordre alphabétique</u>	<u>Sens des flèches opposés aux précédents</u>
0 \emptyset	0 \emptyset	0 \emptyset
1 Boucles seules uniquement	1 a c seule	1 c a seule
2 Retours sur les jonctions existantes	2 b d seule	2 d b seule
3 Boucles + retours sur les traits existants	3 a d seule	3 d a seule
4 Allers - retours et éventuellement d'autres éléments	4 a c et a d	4 c a et d a
	5 b d et a d	5 d b et d a
	6 a c et b d	6 d b et c a
	7 Les trois	7 Les trois

Une quatrième note était ajoutée pour la modalité 2

0 \emptyset

1 Dessin sans texte

3 Dessin et texte conformes

2 Dessin et texte non conformes

4 Texte sans dessin.

ANNEXE 4

LES RESULTATS D'ANALYSES DE CORRESPONDANCE

Deux tableaux de chiffres sont présentés, résultant de l'application du programme ANACØ 1 : le premier est relatif à la partie "Applications - Bijections" du questionnaire, le second se rapporte à l'analyse globale. Dans ces tableaux, les comportements de réponse sont désignés par des sigles de quatre lettres. La signification des sigles est à chercher dans le texte, en pages 22 pour "Applications - Bijections" et en page 47 à 50 pour l'analyse globale.

Pour la première colonne de chiffres, le mot "masse" signifie simplement : "effectif" (nombre d'élèves ayant adopté le comportement de réponse concerné). Rappelons qu'est catalogué, pour chaque question où il y a lieu de le faire, le comportement : "N'a pas répondu parce que la question ne lui a pas été posée". Ces comportements s'identifient facilement dans le tableau, par le fait que leur sigle commence par la lettre N (exemples : NOPY, NBIS,...).

La signification, dans les tableaux, des numéros entre parenthèses et des mots "pourcentage" et "coordonnée" est la suivante :

POURCENTAGE : Contribution de l'axe à l'inertie totale par rapport au centre de gravité,

(1) : Contribution d'un point massif à l'inertie totale par rapport au centre de gravité,

(2) : Contribution d'un point massif à l'inertie totale par rapport à l'axe,

COORD : Coordonnée d'un point sur l'axe.

F (ERRP)	5.0	1.47*	1.1462	1.6*	-.5761	.11*	.9221	.31*
F (NORP)	272.0	.40*	-.5072	1.74*	.1376	.34*	-.3645	2.68*
F (PUBC)	133.0	.74*	.5274	1.43*	-.3384	.99*	-.5136	2.60*
F (TUBC)	55.0	1.26*	.8104	.91*	.0836	.03*	.3791	.60*
F (BUBC)	11.0	1.45*	.7714	.16*	-.2382	.04*	.3805	.12*
F (PUBC)	21.0	1.41*	.7317	.28*	.0570	.00*	-.3965	.24*
F (AUBC)	31.0	1.37*	.6052	.28*	1.8209	6.69*	-.2835	.18*
F (NUBC)	140.0	.95*	-1.2537	5.47*	-.1050	.10*	.4287	1.90*
F (FPBC)	106.0	1.09*	.6486	1.11*	-.5212	1.87*	-.6812	3.64*
F (CPBC)	73.0	1.21*	.7934	1.14*	.1203	.07*	.3408	.63*
F (EPBC)	41.0	1.34*	.7304	.54*	.0869	.02*	-.0322	.00*
F (APBC)	52.0	1.37*	.5891	.28*	1.8002	6.75*	-.3551	.30*
F (NPBC)	140.0	.96*	-1.2537	5.47*	-.1050	.10*	.4287	1.90*
F (RQBC)	63.0	1.25*	.6717	.71*	-.4447	.81*	-.4036	.76*
F (MQBC)	35.0	1.36*	.5682	.29*	-.4065	.39*	-.9070	2.19*
F (TQBC)	41.0	1.34*	.7544	.58*	.1119	.03*	.2055	.13*
F (BQBC)	31.0	1.37*	.8928	.61*	-.5536	.62*	.4004	.37*
F (PQBC)	25.0	1.40*	.5841	.21*	.1970	.06*	-.6492	.78*
F (AQBC)	56.0	1.28*	.7060	.69*	1.1606	4.91*	-.1168	.06*
F (NQBC)	140.0	.96*	-1.2537	5.47*	-.1050	.10*	.4287	1.90*
F (RUAC)	44.0	1.33*	-.5020	.28*	-.7871	1.77*	-.6720	1.47*
F (MUAC)	72.0	1.14*	-.6810	1.06*	-.1796	.19*	-.2074	.29*
F (FUAC)	33.0	1.37*	-.6448	.34*	-.2756	.16*	-.2939	.21*
F (PUAC)	50.0	1.30*	-.2908	.11*	.2173	.15*	-.5188	1.00*
F (AVAC)	53.0	1.29*	-.3282	.14*	1.6380	9.25*	-.2808	.31*
F (NUAC)	120.0	1.04*	1.1496	3.94*	-.3119	.76*	.8264	5.07*
F (RDAC)	57.0	1.28*	-.3811	.21*	-.4853	.87*	-.8140	2.80*
F (MDAC)	54.0	1.23*	-.7283	.91*	-.1939	.17*	-.0816	.03*
F (TDAC)	43.0	1.33*	-.5609	.34*	-.4308	.52*	-.3336	.35*
F (BDAC)	12.0	1.45*	-.7704	.18*	-.2682	.06*	.1020	.01*
F (PDAC)	25.0	1.40*	-.4624	.13*	-.0715	.01*	-.4744	.42*
F (ADAC)	50.0	1.24*	-.3191	.17*	1.5455	10.26*	-.3358	.55*
F (NDAC)	120.0	1.04*	1.1496	3.94*	-.3119	.76*	.8264	5.07*
F (RPAC)	104.0	1.05*	-.5520	.83*	-.5434	2.09*	-.5893	2.80*
F (APAC)	53.0	1.25*	-.3257	.17*	1.6139	10.68*	-.3241	.49*
F (EPAC)	100.0	1.11*	-.5727	.81*	-.0502	.02*	-.1451	.16*
F (NPAC)	120.0	1.04*	1.1496	3.94*	-.3119	.76*	.8264	5.07*
F (RNAT)	44.0	1.33*	-.5815	.37*	-.7479	1.60*	-.5719	1.07*
F (TNAT)	65.0	1.25*	-.5412	.47*	-.2499	.26*	-.3344	.54*
F (DNAT)	21.0	1.41*	-.4661	.39*	-.4516	.28*	-.0569	.01*
F (UNAT)	58.0	1.27*	-.4767	.33*	-.2033	.16*	-.4678	.94*
F (ZNAT)	84.0	1.17*	-.3732	.29*	1.2840	9.01*	-.2850	.51*
F (NNAT)	120.0	1.04*	1.1496	3.94*	-.3119	.76*	.8264	5.07*

TABLEAU 2

AXF		1		2		
*****		*****		*****		
VALEUR PROPRE*		.66923814+00 *		.20334776+00		
TFST *		.129+05*		.90008754+04 *		
POURCENTAGE *		30.42 *		9.24		
*****		*****		*****		
*****MASSE		*****COORD** (2) *****		*****COORD** (2) ***		
(1)	(1)	(2)	(2)	(2)	(2)	
F(REPY) *	180.0	1.64% *	-.6540	1.96% *	.1936	.56%
F(PAPY) *	92.0	2.32% *	-.6699	1.05% *	-.1458	.16%
F(NOPY) *	120.0	2.10% *	1.4946	6.81% *	-.1786	.32%
F(RESY) *	135.0	1.99% *	-.0017	.00% *	-.0605	.04%
(2) F(GDSY) *	115.0	2.14% *	-.0048	.00% *	.0840	.07%
F(AUSY) *	142.0	1.93% *	.0055	.00% *	-.0105	.00%
F(PTRC) *	58.0	2.58% *	-.6823	.69% *	-.2575	.32%
(3) F(GTRC) *	47.0	2.67% *	-.6789	.55% *	-.1424	.08%
F(ATRC) *	167.0	1.74% *	-.6459	1.77% *	.2578	.93%
F(NTRC) *	120.0	2.10% *	1.4946	6.81% *	-.1786	.32%
F(PTRV) *	46.0	2.67% *	1.4955	2.61% *	-.1992	.15%
(4) F(GTRV) *	29.0	2.81% *	1.4944	1.65% *	-.1585	.06%
F(ATRV) *	45.0	2.68% *	1.4938	2.55% *	-.1703	.11%
F(NTRV) *	272.0	.93% *	-.6594	3.01% *	.0788	.14%
(5) F(RRFF) *	211.0	1.40% *	.1096	.06% *	.0038	.00%
F(ARFF) *	181.0	1.63% *	-.1278	.08% *	-.0044	.00%
(6) F(RRIJ) *	106.0	2.21% *	.2350	.15% *	-.7421	4.89%
F(ARIJ) *	146.0	1.90% *	.3294	.40% *	-.6331	4.89%
F(NRIJ) *	140.0	1.95% *	-.5214	.97% *	1.2221	17.40%
(7) F(RARI) *	20.0	2.88% *	-.8043	.33% *	-1.1507	2.21%
F(AART) *	113.0	2.16% *	-.8065	1.87% *	-1.1246	11.95%
F(NARI) *	259.0	1.03% *	.4140	1.13% *	.5795	7.27%
(8) F(RAPP) *	44.0	2.69% *	-.6484	.47% *	.1171	.05%
F(CAPP) *	21.0	2.87% *	-.6927	.19% *	.7592	1.01%
F(AAPP) *	207.0	1.43% *	-.6685	2.35% *	.0016	.00%
F(NAPP) *	120.0	2.10% *	1.4946	6.81% *	-.1786	.32%
(9) F(RPOU) *	16.0	2.91% *	1.4938	.91% *	-.2042	.06%
F(APOU) *	38.0	2.74% *	1.4941	2.16% *	-.1865	.11%
F(NPOU) *	66.0	2.52% *	1.4951	3.75% *	-.1678	.16%
(10) F(RCOH) *	272.0	.93% *	-.6594	3.01% *	.0788	.14%
F(ACOH) *	141.0	1.94% *	-.6765	1.64% *	-.1275	.19%
F(NCOH) *	131.0	2.02% *	-.6409	1.37% *	.3008	.99%
(11) F(RTVF) *	120.0	2.10% *	1.4946	6.81% *	-.1786	.32%
F(ATVF) *	62.0	2.55% *	1.4954	3.52% *	-.1811	.17%
(12) F(NTVF) *	58.0	2.58% *	1.4938	3.29% *	-.1758	.15%
F(RTRI) *	272.0	.93% *	-.6594	3.01% *	.0788	.14%
F(ATRI) *	96.0	2.29% *	-.8063	1.59% *	-1.1284	10.22%
(13) F(NTRI) *	37.0	2.74% *	-.8059	.61% *	-1.1286	3.94%
F(RSIM) *	259.0	1.03% *	.4140	1.13% *	.5795	7.27%
F(ASIM) *	98.0	2.27% *	-.6421	1.03% *	.2515	.52%
(14) F(NSIM) *	174.0	1.69% *	-.6692	1.98% *	-.0185	.00%
F(RDI7) *	120.0	2.10% *	1.4946	6.81% *	-.1786	.32%
F(ADI7) *	75.0	2.45% *	1.4971	4.27% *	-.1901	.23%
(15) F(NDI7) *	45.0	2.68% *	1.4905	2.54% *	-.1593	.10%
F(RDIC) *	272.0	.93% *	-.6594	3.01% *	.0788	.14%
F(ADIC) *	82.0	2.40% *	-.8065	1.36% *	-1.1688	9.37%
F(NDIC) *	51.0	2.64% *	-.8058	.84% *	-1.0637	4.83%
F(NDIC) *	259.0	1.03% *	.4140	1.13% *	.5795	7.27%
*****		*****		*****		
*****MASSE		*****COORD** (2) *****		*****COORD** (2) ***		
(1)	(1)	(2)	(2)	(2)	(2)	

3		4	
*****		*****	
.14858902+00	*	.09839826-01	*
.69314871+04	*	.63444290+04	*
6.75	*	4.54	*
*****C00RD** (2)*****		*****C00RD** (2)*****	
.5013	5.18%	-.1635	.82%
-1.0054	10.64%	.3218	1.62%
.0188	.00%	-.0014	.00%
-.9080	12.74%	-.1296	.39%
.7495	7.39%	.1554	.47%
.2563	1.07%	-.0027	.00%
-1.2368	10.15%	.7971	5.28%
.0475	.01%	-.1309	.14%
.4026	3.10%	-.2390	1.63%
.0188	.00%	-.0014	.00%
-.6086	1.95%	-1.3574	14.44%
.5749	1.10%	.9233	4.21%
.3018	.47%	.7888	4.77%
-.0083	.00%	.0006	.00%
-.4647	5.22%	-.0403	.06%
.5417	6.08%	.0469	.07%
-.6674	5.40%	-.1204	.26%
.5765	5.55%	.0748	.14%
-.0959	.15%	.0131	.00%
-.9675	2.14%	.7368	1.85%
.2705	.95%	-.1460	.41%
-.0433	.06%	.0068	.00%
-.8218	3.40%	.6332	3.01%
-.5122	.63%	.5027	.90%
.2157	1.10%	-.1848	1.20%
.0188	.00%	-.0014	.00%
-.6653	.81%	-2.7345	20.38%
-.2466	.26%	-.3859	.96%
.3375	.86%	.8826	8.76%
-.0083	.00%	.0006	.00%
-.1976	.63%	.0521	.07%
.1954	.57%	-.0548	.07%
.0188	.00%	-.0014	.00%
-.0982	.07%	-.7003	5.18%
.1439	.14%	.7458	5.49%
-.0083	.00%	.0006	.00%
-.0416	.02%	.1302	.28%
.4109	.72%	-.3853	.94%
-.0433	.06%	.0068	.00%
-.2799	.88%	.1542	.40%
.1446	.42%	-.0859	.22%
.0188	.00%	-.0014	.00%
-.3647	1.14%	-.5736	4.20%
.6581	2.23%	.9524	5.95%
-.0083	.00%	.0006	.00%
-.4319	1.75%	.2937	1.21%
.9144	4.88%	-.5068	2.23%
-.0433	.06%	.0068	.00%
*****C00RD** (2)*****		*****C00RD** (2)*****	