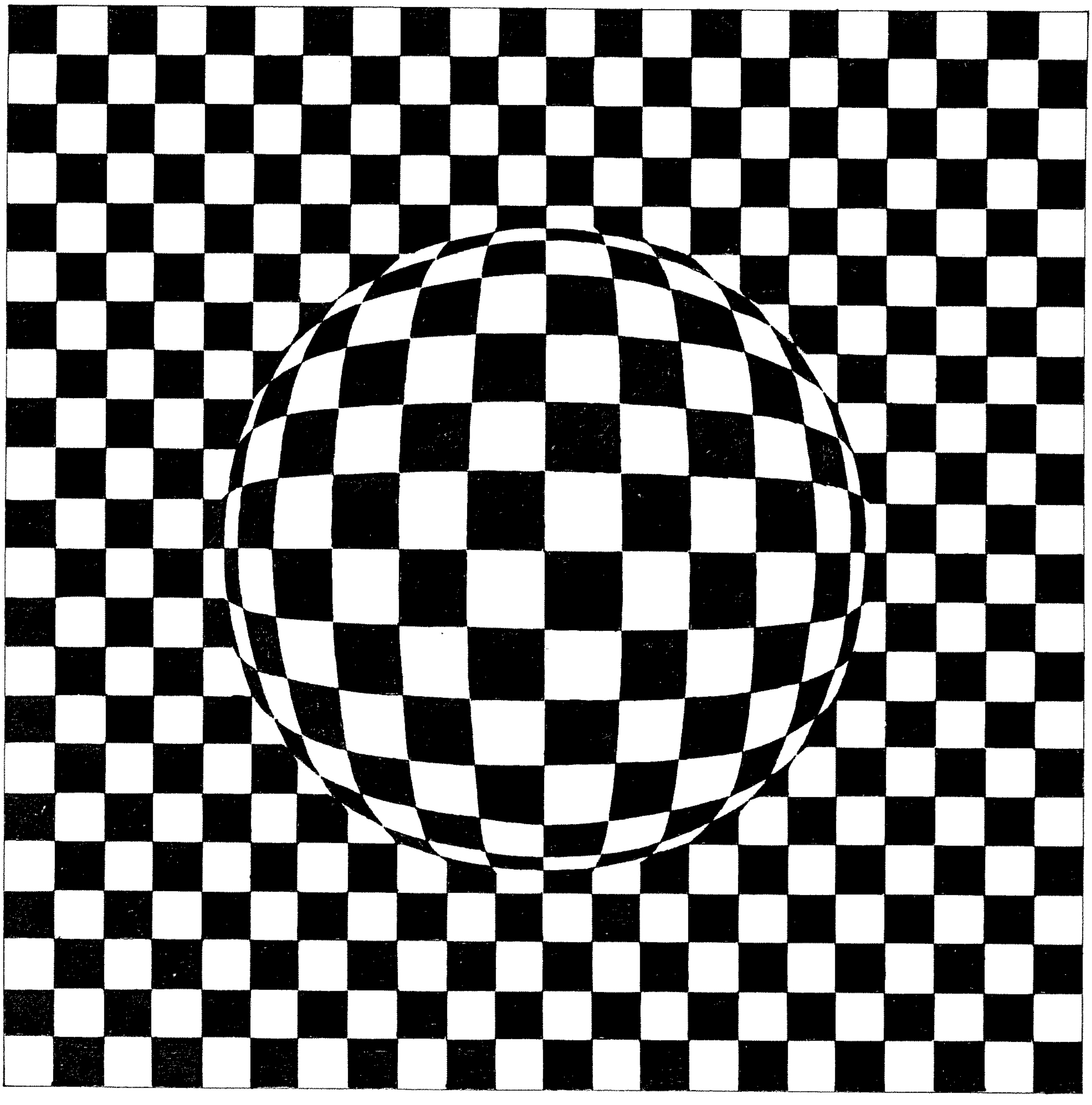
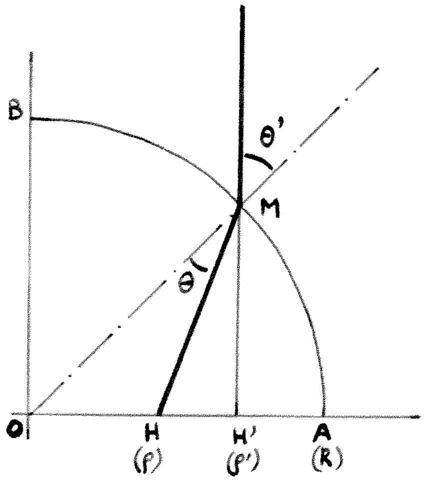
l'ouvert n°8

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG – FEV. 76



NOTRE COUVERTURE : Image à l'infini d'un damier sur lequel repose une lentille hémisphérique en verre d'indice $n = 3/2$. Ce genre de dessin n'est pas sans rappeler certains tableaux de Vasarely, (par exemple VEGA - II), mais alors qu'ici nous avons effectué une construction point par point, Vasarely se contente (non sans génie) de reproduire une impression visuelle

A PROPOS DE LA COUVERTURE



On pourrait étudier la transformation qui a un point du plan fait correspondre son image à t travers la lentille hémisphérique. Le choix de coordonnées polaires s'impose en prenant pour origine le centre de la lentille.

Sachant qu'on a :

$$n . \sin \theta = \sin \theta' \qquad \text{et} \qquad \sin \theta' = \frac{\rho'}{R}$$

et en évaluant l'aire du triangle MOH de deux façons différentes, on obtient :

$$\rho' \cdot \sqrt{R^2 - 2\rho\rho' + \rho^2} = n \cdot \rho \cdot \sqrt{R^2 - \rho'^2}$$

soit finalement :

$$\rho = \frac{\rho'^3 - \rho' \sqrt{(R^2 - \rho'^2)(n^2 R^2 - \rho'^2)}}{\rho'^2 + n^2(\rho'^2 - R^2)}$$

Ce résultat est loin d'être trivial, puisqu'on doit rechercher la racine positive d'une équation du deuxième degré en ρ .

Plutôt que d'étudier cette horrible fonction en détail, on peut remarquer que :

$$\lim_{\rho' \to 0} \frac{\rho'}{\rho} = n$$

ce qui donne le grossissement dans l'approximation de Gauss.

Les fanatiques des développements limités vérifierons que le deuxième terme non nul est en ρ'^2

Sommaire

Les journées sur l'analyse

Les journées sur l'analyse, organisées par l'Inspection Générale, se sont déroulées à Strasbourg les 26 et 27 novembre 1975; elles ont été animées par M. l'I.G. Ramis avec la participation de M. Glaeser, directeur de l'I.R.E.M., de M. Bronner I.P.R., de nos collègues Mle C. Kahn et M. Spenlé. Le programme de ce stage a été le suivant:

mercredi 26, matin - didactique de l'analyse par M. Glaeser. (le compte-rendu doit paraître dans un prochain bulletin national).

- quelques insuffisances de Q exposées par M. Spenlé, Mle C. Kahn et M. l'I.G. Ramis.

après-midi - à propos de l'unicité de R (cf l'article de P. Samuel, p 341 du bulletin n° 299), par M. l'I.G. Ramis.

- séance d'exercices par M. l'I.G. Ramis et M. Bronner.

jeudi 27, matin - fonctions continues par M. l'I.G. Ramis

retour sur la didactique de l'analyse avec M. Glaeser

après-midi - information sur les filtres par M. l'I.G. Ramis

- exercices par M. Bronner.

Bien entendu le but de ces journées n'était pas de donner un modèle de ce qui doit être enseigné dans les classes de lycée, même en Terminale, mais d'abord de provoquer une incitation à renouveler notre enseignement de l'analyse; si en effet l'algèbre a profité largement de la mise en application des nouveaux programmes, il n'en a pas été de même de l'analyse alors que c'est peut-être une partie des mathématiques susceptible de développer l'intuition de nos élèves, d'exciter et de provoquer leur curiosité, qualités qui étaient largement exploitées avec l'étude des figures géométriques, c'est la raison d'être d'un certain nombre d'exercices qu'on trouvera ci-après.

Ces journées ont encore permis d'apporter une information succinte, en général sous forme d'exercices, sur quelques questions d'analyse étudiées dans les classes post-baccalauréat; peut-être certains collègues pourront-ils y trouver matière à illustrer certains chapitres de l'étude de R.

1/ Quelques insuffisances de Q.

1- Rappels sur Q, espace topologique.

- On munit Q d'une structure topologique en prenant pour ensembles ouverts les intervalles ouverts et les réunions de tels intervalles.
- On dit qu'une partie V de Q est un voisinage du rationnel r lorsque V contient un ouvert contenant $\{r\}$.
- Soit Q' une partie non vide de Q, la topologie induite sur Q' est celle dont les ouverts sont les intersections avec Q' des ouverts de Q.
- Soit f une application de Q' ($Q' \subset Q$) dans Q et soit r un point de Q'; on dit que f est continue en r lorsque, quel que soit le voisinage V de f(r), il existe un voisinage U de r (pour la topologie induite sur Q') tel que f(U) soit inclus dans V.
- Les propriétés des applications continues d'une partie de R dans R sont bien connues, certaines d'entre elles restent valables dans Q; par exemple soit f une application de Q dans Q, continue en x_0 et telle que $f(x_0) \neq 0$, il existe alors un voisinage U de x_0 tel que f(x) ait le signe de $f(x_0)$, quel que soit x appartenant à U. Les exemples qui suivent montrent quelques insuffisances de Q vis à vis de propriétés topologiques qui semblent aller de soi dans R.

2- Valeurs intermédiaires.

On sait que toute application f de R dans R, continue, strictement monotone et telle qu'il existe $(a,b) \in R^2$ avec $f(a).f(b) < 0$, s'annule une fois et une fois seulement entre a et b. Dans Q considérons la fonction f définie par

$f(x) = x^2 - 2$ si x est strictement positif et $f(x) = -x^2 - 2$ sinon.

La fonction f est continue (°), strictement croissante sur Q, $f(0) = -2$, $f(2) = 2$ mais elle ne s'annule pas entre -2 et 2.

(°)Soit $A > 0$, pour tout x et x' positifs et inférieurs à A on a:

$f(x) - f(x') = (x - x')(x + x')$, d'où $|f(x) - f(x')| \leqslant 2A.|x - x'|$ (i) ;

la continuité de f en tout point $x' > 0$ en résulte. L'inégalité (i) exprime que f est lipschitzienne de rapport 2A sur l'intervalle $]0,A]$, on déduit de là qu'elle est uniformément continue (donc continue) sur cet intervalle.

3- Etude d'une partie non vide et majorée de Q.

Dans R toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure (c'est à dire un plus petit majorant). Reprenons l'application f de Q dans Q définie au §2 et posons $A = \{ x \in Q \; ; \; f(x) < 0 \}$. La partie A n'est pas vide ($0 \in A$) et elle est majorée (2 est un majorant); supposons qu'elle admette une borne supérieure a (hypothèse H); si on a $f(a) < 0$, alors il existe $h > 0$ tel que $\forall x \in]a-h, a+h[$ on ait $f(x) < 0$ (car f est continue en a), donc a n'est pas un majorant de A, ce qui est absurde; si on a $f(a) > 0$, alors il existe $h' > 0$ tel que $\forall x \in]a-h', a+h'[$ on ait $f(x) > 0$, donc a n'est pas le plus petit majorant de A, ce qui est absurde; finalement f(a) est nul, mais c'est impossible car f ne s'annule pas (sur Q); l'hypothèse H est à rejeter, A n'admet pas de borne supérieure. Il en résulte que A n'est pas un intervalle de Q, pourtant A est convexe (car quels que soient u et v dans A et w dans Q on a: $u < w < v \Rightarrow w \in Q$).

4- Intervalles emboîtés (Cantor).

Dans R soit une suite d'intervalles $[u_n, v_n]$ décroissante (au sens de l'inclusion) dont la longueur $v_n - u_n$ tend vers 0, on sait que ces intervalles ont un seul point commun w qui est la limite commune des suites (u_n) et (v_n). Dans Q considérons les suites (u_n) et (v_n) déterminées par: $u_n = \dfrac{a_n}{10^n}$, $v_n = \dfrac{a_n + 1}{10^n}$, $a_n \in N$, $a_n^{\,2} < 2.10^{2n} < (a_n + 1)^2$; on a

$v_n - u_n = \dfrac{1}{10^n}$ donc $\lim (v_n - u_n) = 0$ et $u_n \leqslant u_{n+1} < v_{n+1} \leqslant v_n$, mais les intervalles $[u_n, v_n]$ n'ont aucun point commun (sinon soit w un tel point, pour tout n on a $u_n \leqslant w \leqslant v_n$ donc $u_n^{\,2} \leqslant w^2 \leqslant v_n^{\,2}$ mais aussi $u_n^{\,2} \leqslant 2 \leqslant v_n^{\,2}$ donc $v_n^{\,2} - u_n^{\,2} \geqslant |w^2 - 2|$ (1), or $v_n^{\,2} - u_n^{\,2} = (v_n + u_n)(v_n - u_n) = \dfrac{1}{10^n}(v_n + u_n)$ d'où $0 < v_n^{\,2} - u_n^{\,2} < \dfrac{4}{10^n}$ et $\lim (v_n^{\,2} - u_n^{\,2}) = 0$ ce qui contredit (1)).

5- Suites de Cauchy dans Q.

On dit que la suite (u_n) est de Cauchy dans Q (resp.R) si, quel que soit le nombre strictement positif rationnel (resp. réel) $\mathcal{E}$ il existe un entier naturel N tel que les inégalités $n > N$ et $p > N$ entraînent $|u_n - u_p| < \mathcal{E}$. Toute suite convergente est de Cauchy, la réciproque est vraie dans R, elle ne l'est pas dans Q comme le montre le contre-exemple $u_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{n!}$.

Soit $n > p$, on a $u_n - u_p = \frac{1}{(p+1)!} + \dots\dots + \frac{1}{n!}$ et successivement:

$$u_n - u_p < \frac{1}{(p+1)!}\left(1 + \frac{1}{p+1} + \dots\dots + \frac{1}{(p+1)^{n-p-1}} \right)$$

$$u_n - u_p < \frac{1}{(p+1)!}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{p+1}\right)^{n-p}}{1 - \frac{1}{p+1}} < \frac{1}{(p+1)!}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{p+1}}$$ ou enfin

$u_n - u_p < \frac{1}{p(p!)}$. Quel que soit le rationnel $\varepsilon = \frac{h}{q}$ strictement positif, si $n > q$ et $p > q$ alors $|u_n - u_p| < \frac{1}{q(q!)} < \frac{h}{q}$, la suite (u_n) est donc de Cauchy dans Q, mais elle ne converge pas dans Q (Supposons en effet $\lim u_n = \frac{h}{q}$; pour $n > p$ on a $0 < u_n - u_p < \frac{1}{p(p!)}$, fixons p et faisons tendre n vers l'infini, il vient: $0 < \frac{h}{q} - u_p \leqslant \frac{1}{p(p!)}$, l'inégalité de gauche est stricte car la suite (u_n) est strictement croissante, mais $u_p = \frac{B}{p!}$, B entier, d'où $0 < \frac{h}{q} - \frac{B}{p!} \leqslant \frac{1}{p(p!)}$ et enfin $0 < h(p!) - Bq \leqslant \frac{q}{p}$; p ayant été fixé arbitrairement on peut prendre $p = 2q$ on obtient alors, A désignant un entier: $0 < A \leqslant 1/2$ ce qui est impossible).

6- Image continue d'un segment dans Q.

Dans R l'image continue d'un segment est un segment; cette propriété n'est pas vraie dans Q où l'image continue d'un segment peut ne pas être bornée (exemple 1), ou être majorée mais sans borne supérieure (exemple 2), ou admettre une borne supérieure non atteinte (exemple 3).

Exemple 1 : soit f l'application du segment $[0,2]$ ($[0,2] \subset Q$) dans Q telle que $f(x) = \frac{1}{2 - x^2}$ quel que soit $x \in [0,2]$.

1° L'application f est continue sur $[0,2]$ en effet, posons $A = \{x \in [0,2]\ ;\ x^2 < 2\}$ et $B = \{x \in [0,2]\ ;\ x^2 > 2\}$.

Soit $a \in A$, il existe $m \in A$ tel que $a < m$ car $x \xrightarrow{} 2 - x^2$ est continue en a; pour tout $x \in [0,m]$ on a : $|f(a) - f(x)| = \frac{|a^2 - x^2|}{(2-a^2)(2-x^2)} \leqslant \frac{4}{(2 - m^2)^2} . |a - x|$; sur $[0,m]$, l'application f étant lipschitzienne de rapport $\frac{4}{(2 - m^2)^2}$ est uniformément continue, donc f est continue en a.

Soit $b \in B$, il existe $m' \in B$ tel que $m' < b$; pour tout $x \in [m',2]$ on a:

$|f(b) - f(x)| \leqslant \frac{4}{(m'^2 - 2)^2} . |b - x|$; la continuité de f en b en résulte.

2° L'image par f du segment $[0,2]$ n'est pas bornée. Considérons en effet la suite (u_n) envisagée au §4; elle prouve l'existence de deux entiers positifs p et q tels que: (1) $p^2 < 2q^2 < (p + 1)^2$, $p > 1$, q aussi grand qu'on le veut. Les entiers p et q satisfaisant à (1) on a aussi $2p + 1 < 5q$ (car $2p + 1 < 3p$ donc $(2p + 1)^2 < 9p^2 < 18q^2 < (5q)^2$).

On en déduit l'inégalité (2) $2 - \frac{5}{q} < \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2$ (autrement dit $-2q^2 + 5q + p^2 > 0$ or on a $-2q^2 + 5q + p^2 > -2q^2 + (2p+1) + p^2 > (p+1)^2 - 2q^2 > 0$ d'après (1))

et d'une manière analogue: (3) $2 < \left(\frac{p+1}{q}\right)^2 < 2 + \frac{5}{q}$.

D'après (2) on a $f(\frac{p}{q}) > \frac{q}{5}$ donc $f(\ [0,2]\ )$ n'est pas majorée,

et aussi $f(\frac{p+1}{q}) < -\frac{q}{5}$ donc $f(\ [0,2]\ )$ n'est pas minorée.

Exemple 2 : soit f l'application du segment $[0,2] = I$ $(I \subset Q)$ dans Q telle que $f(x) = \frac{1}{4}(6x - x^3)$ quel que soit $x \in I$ et $A = \{x \in I;\ x^2 < 2\}$, $B = \{x \in I;\ x^2 > 2\}$.

1° L'application f est croissante (resp décroissante) sur A (resp B) car $4[f(x) - f(x')] = (x - x')(6 - x^2 - x'^2 - xx') = (x - x')(2 - x^2 + 2 - x'^2 + 2 - xx')$

2° L'application f est (uniformément) continue sur I car $4|f(x) - f(x')| \leqslant |x - x'|(6 + 2^2 + 2^2 + 2^2)$ d'où $|f(x) - f(x')| \leqslant 5\,|x - x'|$ donc f est lipschitzienne et de rapport 5 sur I.

3° L'application f est majorée sur I en effet soit g l'application de I dans Q telle que $g(x) = [f(x)]^2$, quel que soit $x \in I$. On a $16[g(x) - 2] = (6x - x^3)^2 - 32 = (x^2 - 2)^2(x^2 - 8) < 0$, donc g est majorée sur I et $f(x)^2 < 2 < \frac{9}{4}$ donc $f(x) < \frac{3}{2}$ quel que soit $x \in I$.

4° L'ensemble f(I) n'admet pas de borne supérieure, sinon soit u cette borne alors u^2 est la borne supérieure de g(I) (°) et on a $u^2 < 2$ donc $u \in A$; mais $4[f(u) - u] = 2u - u^3 = u(2 - u^2) > 0$ d'où $f(u) > u$, c'est impossible puisque u est la borne supérieure de f(I).

Exemple 3 : soit f l'application du segment $I = [0,2]$ $(I \subset Q)$ dans Q telle que $f(x) = 4x^2 - x^4$.

1° L'application f est (uniformément) continue sur I car lipschitzienne et de rapport 48 ($|f(x) - f(x')| \leqslant (x + x')(4 + x^2 + x'^2)|x - x'| \leqslant 48|x - x'|$).

2° Si on écrit $f(x) = 4 - (x^2 - 2)^2$ on voit que 4 est un majorant de f(I), que c'est la borne supérieure de f(I) enfin que cette borne supérieure n'est pas atteinte.

(°) On a $0 \leqslant f(x) \leqslant u$ donc $g(x) \leqslant u^2$ quel que soit $x \in I$; u^2 est donc un majorant de g(I); d'autre part , quel que soit $\varepsilon > 0$, $u - \frac{\varepsilon}{3}$ n'est plus un majorant de f(I), autrement dit il existe $x \in I$ tel que $f(x) > u - \frac{\varepsilon}{3}$; puisque $1 < u < \frac{3}{2}$ choisissons ε tel que $\varepsilon < 3$ ce qui assure $u - \frac{\varepsilon}{3} > 0$, on a alors $g(x) > (u - \frac{\varepsilon}{3})^2 > u^2 - 2u\frac{\varepsilon}{3} > u^2 - \varepsilon$, ce qui prouve que $u^2 - \varepsilon$ n'est plus un majorant de g(I), donc u^2 est la borne supérieure de g(I).

II/ Exercices d'analyse.

1- Soit f une application de $I = [0;1]$ dans lui-même ($I \subset R$), existe-t-il $x \in I$ tel que $f(x) = x$? On supposera successivement f continue, f décroissante, f croissante.

1° L'application f est continue; posons $g(x) = f(x) - x$ quel que soit $x \in I$, g est continue sur I, $g(0) \geqslant 0$, $g(1) \leqslant 0$ donc g s'annule sur I (théorème des valeurs intermédiaires).

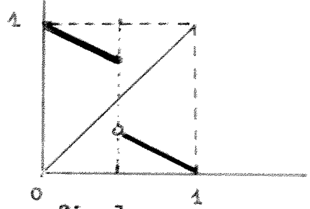


fig 1

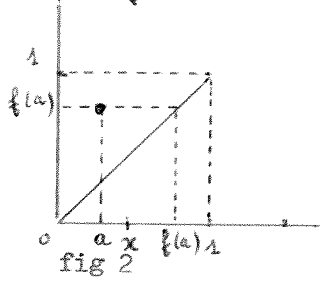


fig 2

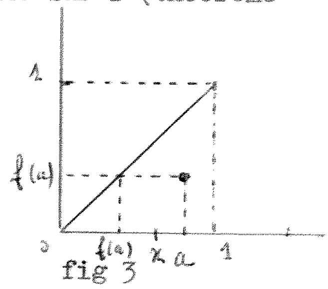


fig 3

2° L'application f est décroissante; pour la fonction f représentée fig1 on a $f(x) \neq x$, quel que soit $x \in I$.

3° L'application f est croissante; posons $A = \{x \in I;\ f(x) \geqslant x\}$, A est une partie non vide ($0 \in A$) et majorée (1 est un majorant) de R, soit a sa borne supérieure, $0 \leqslant a \leqslant 1$, démontrons par l'absurde que $f(a) = a$.

- si on a $f(a) > a$ (fig 2), il existe $x \in R$ tel que $a < x < f(a)$ d'où $f(a) \leqslant f(x)$ puisque f est croissante, donc $x < f(x)$; ainsi $x \in A$ et $a < x$, c'est impossible.
- si on a $f(a) < a$ (fig 3), il existe $x \in R$ tel que $f(a) < x < a$ d'où $f(x) \leqslant f(a)$ puisque f est croissante, donc $f(x) < x$; ainsi $x \notin A$, sur l'intervalle $]f(a), a]$ il n'y a aucun point de A, c'est impossible.

On déduit de là $f(a) = a$.

2- Etude des couples (E,f), E désignant une partie non vide de R et f une bijection de E sur E, tel que $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$, quel que soit $x \in E$.

1° Etude préliminaire.

- si (E,f) est une solution alors (E,f^{-1}) en est une aussi.
- le couple (E, Id_E) est solution quel que soit E. (Id_E désigne l'application identité dans E).
- soit f déterminée par $f(x) = x + k$ (k réel donné) et E une partie de R invariante par la translation $x \longmapsto x + k$, alors (E, f) est solution.
- soit (E,f) une solution, notons f^n ($n \in Z$) la bijection de E sur E, définie par récurrence pour $n \in N$ par $f^0 = Id_E$, $f^n = f.f^{n-1}$ (composée des deux applications) et $(f^{-1})^n = f^{-n}$.

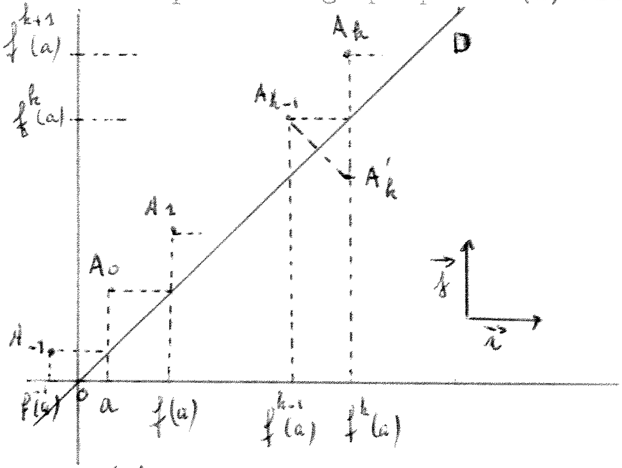
  Quel que soit $x \in E$ et $n \in Z$, $f^{n-1}(x) = y$ est dans E et on a:

  $f(y) + f^{-1}(y) = 2y$ soit $f^n(x) + f^{n-2}(x) = 2f^{n-1}(x)$ ou encore

  $f^n(x) - f^{n-1}(x) = f^{n-1}(x) - f^{n-2}(x)$, donc

  $f^k(x) - f^{k-1}(x) = f(x) - x$, quel que soit $k \in Z$ (1); les points $f^k(a)$ forment donc pour a fixé dans E une suite arithmétique, incluse dans E.

L'interprétation graphique de (1) est immédiate.



Soit D la droite d'équation $x - y = 0$, A_k se déduit de A_{k-1} par la composée des deux symétries d'axe D et de directions respectives $\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{j}$; tous les points A_k appartiennent à une parallèle à la droite D.

De (1_n) on déduit:

$$\sum_{k=1} \left[f^k(x) - f^{k-1}(x)\right] = f^n(x) - x = n\left[f(x) - x\right]$$

soit: $$f^n(x) = n\left[f(x) - x\right] + x \qquad (2)$$

en particulier s'il existe $a \in E$ tel que $f(a) \neq a$, (2) montre que E n'est pas borné.

2° Détermination de quelques solutions.

L'étude qui précède permet d'exhiber des solutions; on se donne une suite arithmétique $E = \{a + nr;\ n \in Z\}$ et f déterminée par $f(x) = x + kr$, k entier fixé, le couple (E,f) est solution.

Soit $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ une partition de E et les solutions $(E_i, f_i)_{i \in I}$, considérons f déterminée ainsi: pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ et un seul tel que $x \in E_i$, on pose $f(x) = f_i(x)$; le couple (E,f) est une solution.

En particulier si on veut des solutions avec $E = R$ il suffit de faire une partition de R en suites arithmétiques; par exemple soit $R = \bigcup_{i \in [0,1[} E_i$ avec $E_i = \{i + n;\ n \in Z\}$ et $f_i(x) = x + k_i$ où k_i est un entier qui ne dépend que de i; le couple (E_i, f_i) est solution; soit alors $f(x) = x + k_{x-E(x)}$, le couple (R,f) est solution. ($E(x)$ désigne la partie entière de x).

Autre exemple: posons $D = \bigcup_{n \in N} D_n$ avec $D_0 = Z$ et pour $n \geqslant 1$, $D_n = \left\{\frac{p}{2^n}\ ;\ p \in Z \setminus 2Z\right\}$

il s'agit d'une partition de D en suites arithmétiques de raison $r_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ ($r_0 = 1$); soit f déterminée par

$$f(x) = x + 1 \text{ si } x \in D_0\ ;\ f(x) = x + \frac{n}{2^{n-1}} \text{ si } x \in D_n\ ;\ f(x) = x \text{ si } x \in R \setminus D\ .$$

D'après ce qui précède (R,f) est une solution. Etudions la continuité de f; posons $g(x) = f(x) - x$, il suffit d'étudier g.

Si $a \notin D$, g est continue en a, en effet: $\lim \frac{n}{2^{n-1}} = 0$ donc $\forall \varepsilon \in R_+^*$, $\exists n_0 \in N$, $\forall n > n_0$, $\frac{n}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Pour chaque n tel que $1 \leqslant n \leqslant n_0$, D_n est une suite arithmétique qui ne contient pas a; posons $d_n = d(a, D_n)$ (distance de a à D_n) et soit $m = \min_{1 \leqslant n \leqslant n_0} (d_n)$ alors $|x - a| < m \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$;

Si $a \in D$, g n'est pas continue en a car tout intervalle ouvert contenant a contient au moins un nombre réel n'appartenant pas à D pour lequel $g(x) = 0$.

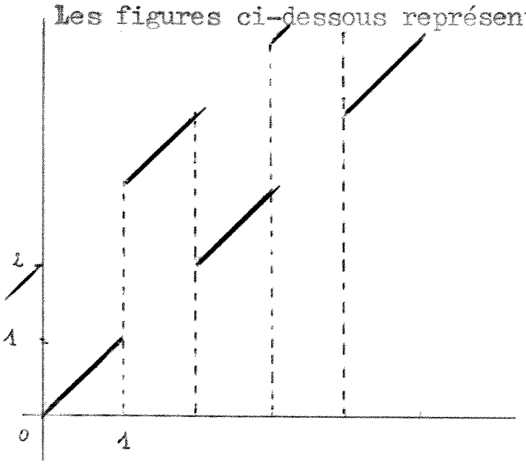
Recherche de solutions polynomiales.

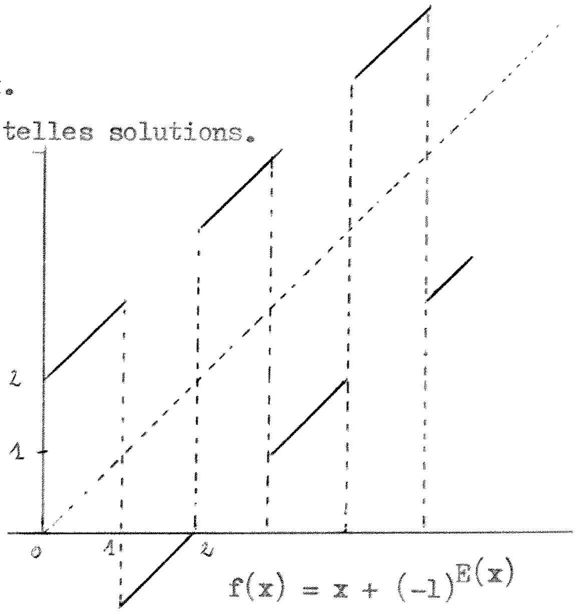
a) Solutions affines: (R,f) avec $f(x) = px + q$, $p \neq 0$, est une solution si, et seulement si $p = 1$ (q quelconque)

b) Il ne peut exister de solutions pour lesquelles le degré de $f(x)$ est supérieur ou égal à deux, sinon soit D' la droite d'équation $y - f(a) = x - a$ qui contient tous les points $A_k(f^k(a), f^{k+1}(a))$, alors l'équation $f(x) - x + a - f(a) = 0$ a une infinité de racines, c'est impossible puisque le premier membre est un polynome.

Recherche de solutions affines par morceaux.

Les figures ci-dessous représentent de telles solutions.





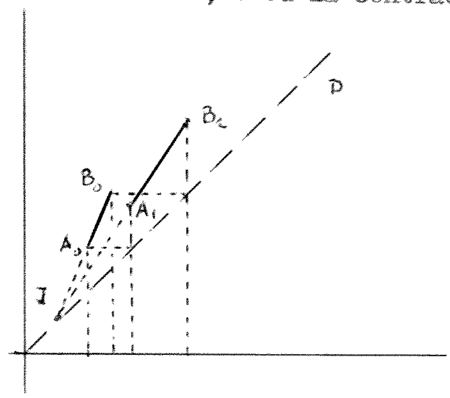
$f(x) = x + (-1)^{E(x)}$

3° Remarques.

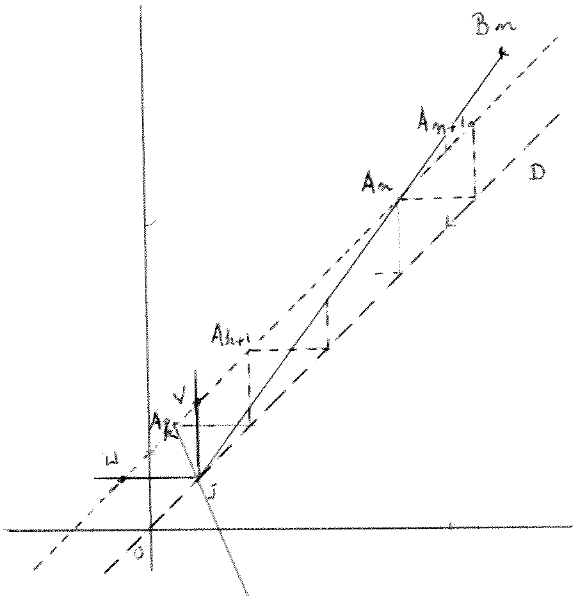
– Il ne peut exister de solutions affines par morceaux non parallèles à D $(x - y = 0)$, sinon soit A_oB_o un segment inclus dans le graphique de f; $A_o(a, f(a))$, $B_o(b, f(b))$; $\forall\, k \in Z$, $f^k(A_oB_o) = A_kB_k$ et tous ces segments coupent D en I; le graphique suggère que la longueur de l'intervalle $[f^n(a), f^n(b)]$ augmente avec n, on a en effet d'après (2):

$$f^n(b) - f^n(a) = b - a + n\left[f(b) - f(a) - (b - a)\right]$$

puisque le coefficient de n est différent de 0, le premier membre tend vers l'infini avec n, d'où la contradiction. car pour un n assez grand, $f^{n+1}(a)$ appartiendra à l'intervalle $[f^n(a), f^n(b)]$; sur la figure $n = 1$.



– Il ne peut exister de solutions monotones sur R, autres que les solutions affines sinon, considérons les deux suites de points $A_n(f^n(a), f^{n+1}(a))$, $B_n(f^n(b), f^{n+1}(b))$ du graphique de f, A_nB_n coupant D en I; d'après (1) on a $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{UV}$, il existe donc un point et un seul de la suite de points A_n entre U et V, notons le A_k. Soit t_n le taux d'accroissement de f entre $f^n(a)$ et $f^n(b)$, c'est aussi le coefficient directeur de la droite IA_n; on voit alors que t_n est positif pour tout $n \neq k$ et t_k est négatif, d'où la contradiction.



3– Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall (x',x'') \in R^2, \quad \left[x' < x'' \implies E(x') \leqslant \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \leqslant E(x') \right] .$$

(E(x) désigne la partie entière de x).

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution.

Supposons qu'il existe une solution f, prenons $x' = p$, p entier, et $x'' = p + s$, $s \in]0,1[$; on a $p \leqslant \dfrac{f(p+s) - f(p)}{s} \leqslant p$ soit

(1) $f(p+s) = f(p) + ps$,l'égalité ayant lieu aussi pour $s = 0$, (1) est vraie quel que soit p entier ($p \in Z$) et quel que soit $s \in [0,1[$; donc sur chaque intervalle $[p,p+1[$, f est une fonction affine.

Appliquons la propriété (P) avec $x' = p + s$, $p \in Z$, $s \in [0,1[$ et $x'' = p+1$, on obtient compte tenu de (1): $p \leqslant f(p+1) - f(p) \leqslant p+1-s$; faisons tendre s vers 1 il vient $p \leqslant f(p+1) - f(p) \leqslant p$ donc quel que soit $p \in Z$, $f(p+1) - f(p) = p$.

On en déduit pour $n \in N$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[f(k+1) - f(k) \right] = f(n) - f(0) = \frac{(n-1)n}{2}$ (2)

et le résultat est le même si n est un entier négatif. En bref, s'il existe une fonction f satisfaisant à (P) on a nécessairement d'après (1) et (2):

$$f(x) = k + \frac{1}{2} E(x) \left[E(x) - 1 \right] + E(x) \left[x - E(x) \right] , \ k \in R \quad (3).$$

Détermination des solutions.

Pour tout choix de $k \in R$, la formule (3) détermine une fonction f qui satisfait à la propriété (P), en effet:

Posons $E(x') = p'$, $x' = p' + s'$; $E(x'') = p''$, $x'' = p'' + s''$; $t_{x',x''} = \dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'}$

On a

$$t_{x',x''} - p' = \frac{p'' - p'}{x'' - x'} \left[\frac{1}{2}(p'' - p' - 1) + s'' \right]$$

supposons $x' < x''$

- si $p' = p''$, le second membre est nul.
- si $p' < p''$ alors $p'' - p' - 1 \geqslant 0$ et le second membre est positif ou nul.

dans tous les cas: $t_{x',x''} - p' \geqslant 0$.

On a de même

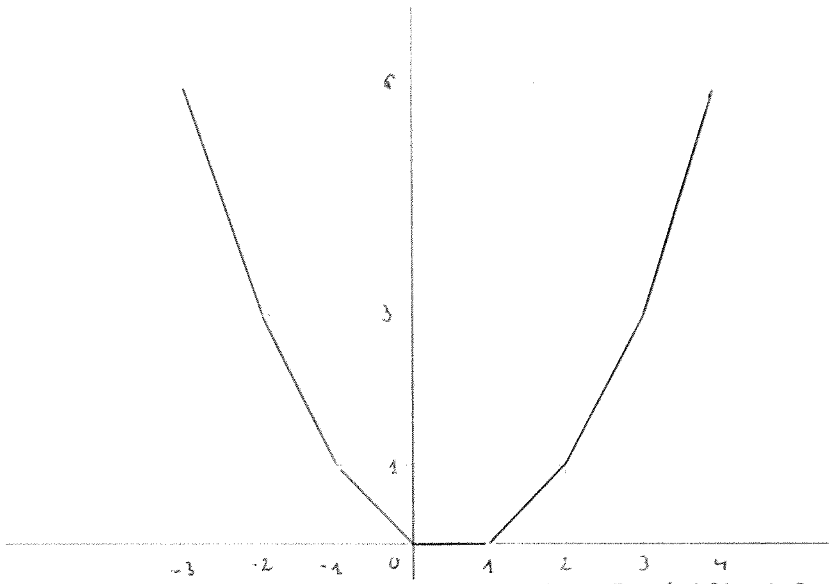
$$t_{x',x''} - p'' = \frac{p'' - p'}{x'' - x'} \left[\frac{1}{2}(p' - p'' - 1) + s' \right]$$

supposons $x' < x''$

- si $p' = p''$, le second membre est nul.
- si $p' < p''$ alors $p' - p'' \leqslant -1$ donc $\frac{1}{2}(p' - p'' - 1) \leqslant -1$ et le second membre est négatif.

dans tous les cas: $t_{x',x''} - p'' \leqslant 0$.

Représentation graphique de la solution f pour $k = 0$.



Les points anguleux sont sur la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}$.

4– Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall\ (x', x'') \in R^2 \ , \quad \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = |x'' - x'| \ .$$

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution.

Supposons qu'il existe une solution f, prenons $x' = 0$, $x'' \neq 0$ on a $f(x'') - f(0) = x''\,|x''|$ (1), l'égalité ayant lieu aussi pour $x'' = 0$, on a donc nécessairement $f(x) = k + x\,|x|$, quel que soit $x \in R$, $k \in R$.

Détermination des solutions.

k étant fixé on a $\dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = \dfrac{x''\,|x''| - x'\,|x'|}{x'' - x'}$, par exemple pour $x'' = 2$, $x' = 1$, le second membre vaut $3 \neq |2 - 1|$.

Il n'existe pas de fonctions satisfaisant à (P).

5- Soient a et b deux nombres réels donnés, déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P): $\forall\ (x',x'') \in R^2, \left[\dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = ax' + bx'' \quad \text{ou } x'' \leqslant x'\right]$.

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution.

Supposons qu'il existe une solution f et soit x un réel positif $(x > 0)$, appliquons (P) en prenant:

$x' = 0$, $x'' = x$, alors $f(x) = bx^2 + f(0)$ (1)

$x' = -x$, $x'' = 0$, alors $f(-x) = ax^2 + f(0)$ (2)

$x' = -x$, $x'' = x$, alors $f(x) - f(-x) = 2(b-a)x^2$ (3)

mais d'après (1) et (2): $f(x) - f(-x) = (b-a)x^2$,

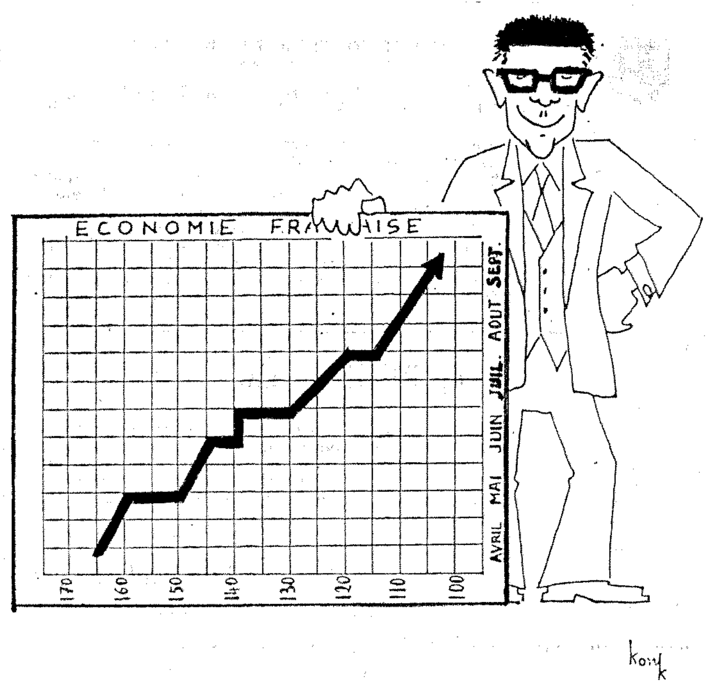
on déduit de là

- si $b \neq a$, il n'existe pas de fonction f satisfaisant à (P).
- si $b = a$, d'après (1) et (2) on a nécessairement $f(x) = ax^2 + k$ quel que soit $x \in R$, k réel donné.

Détermination des solutions.

le réel k étant fixé, on a $\dfrac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = \dfrac{(ax''^2 + k) - (ax'^2 + k)}{x'' - x'} = ax' + ax''$, quels que soient x' et x''.

Pour tout choix de $k \in R$, la formule $f(x) = ax^2 + k$ détermine une fonction f qui satisfait à la propriété (P).



dessin de Konk
"Le Monde" du
22 Octobre 75

<u>fonction décroissante ?</u>

Mathématiques & Société

Sganarelle	:	(...) entendez-vous le latin ?
Géronte	:	En aucune façon.
S.	:	Vous n'entendez point le latin ?
G.	:	Non.
S.	:	Cabricias arci thuram, catalamus, singulariter, nominativo, (...) Quia substantivo et adjectivum concordat in generi, numerum et casus.
G.	:	Ah, que n'ai-je étudié ! (...)
S.	:	(...) Ossabandus, nequeis, naquer, potarimum quipsa milus. Voilà justement ce qui fait que votre fille est muette.

Le médecin malgré lui   Acte II scène 6.

On trouvera ci-dessous quelques réflexions personnelles sur la place et le rôle de la science en général et des mathématiques en particulier, dans la société actuelle. Je suis conscient que l'aspect peut en paraître décousu et je m'en excuse auprès du lecteur, mes réflexions n'ayant pas encore suffisamment mûri. J'ai tenu cependant à les classer rapidement et à les présenter ici à cause de la préparation par les I.R.E.M. et l'A.P.M.E.P. du congrès de Karlsruhe organisé par la commission internationale pour l'enseignement mathématique . On sait en effet que le groupe de travail B3 s'intéresse aux "buts et objectifs de l'enseignement des mathématiques, (pourquoi enseignons-nous les mathématiques ?)".

A ce propos je ne peux que retranscrire ici l'appel de Michel de Cointet, président de l'A.P.M.E.P., pour lui fournir tous documents ou textes pouvant concerner :

- Les buts et objectifs de l'enseignement des mathématiques, en relation avec le développement de la société et du système scolaire, les conceptions des mathématiques, les méthodes d'enseignement ;
- Le rôle des mathématiques pour l'individu ;
- Le rôle des mathématiques dans la société ;
- Le rapport de ces buts et objectifs avec ceux de l'Education en général.

1) MATHEMATIQUES ET POLITIQUE

Essayons de mettre en évidence le statut et les fonctions politiques des mathématiques :

Les mathématiques, sous leur aspect le plus formalisé cache une fonction politique ; en effet, le formalisme permet aux mathématiques et à la science en général de se faire croire objectives alors qu'elles sous-tendent beaucoup de subjectivité. A l'instar de tout corps constitué, on peut dire que les mathématiques ont un rôle conservateur très important dans la société actuelle ; mais de ce rôle combien de mathématiciens en sont-ils conscients ?

Il est connu que dans l'enseignement, les critiques de la société viennent essentiellement des disciplines littéraires et peu des disciplines scientifiques, et dans ces dernières, d'autant moins que la science étudiée est plus abstraite. (cf : Revue française de pédagogie, nº 24, "Les attentes des jeunes enseignants au début de leur formation"). En fait c'est le mécanisme de développement des théories mathématiques qui entretient le mathématicien dans l'illusion de l'objectivité des mathématiques. En effet, un phénomène quelconque, pour être mathématisé, doit être débarassé de tout jugement de valeur pour être mis sous la forme d'un raisonnement logique à partir d'"axiomes admis par tous". Il se pose donc un problème éthique au niveau du choix des axiomes et au niveau de ce qu'on va négliger ou écarter au titre des "jugements de valeur" pour mathématiser le phénomène.

Théoriquement le choix des axiomes est largement arbitraire, mais la pratique et la mode conduisent à imposer tel choix plutôt que tel autre, sans que les raisons en aient été explicitées. A ce propos, on peut citer l'exemple de brillants chercheurs qui ont été mis au ban de la société des mathématiciens pour avoir refusé de faire des recherches dans les domaines à la mode.

Par ailleurs, la mathématisation d'un phénomène le rend inofensif, même aux yeux de l'initié, (on a moins peur de $E = mc^2$ que de la bombe atomique), justement parcequ'on l'a ainsi débarassé des "jugements de valeur".

2) LA PRISE DE DECISION POLITIQUE

Au centre de toute science, on trouve le noyau théorique le plus abstrait le plus formalisé concernant les spécialistes et non directement applicable. Il est constitué d'un ensemble d'hypothèses cohérentes proposé comme représentation d'un domaine donné ou d'un phénomène donné. Ces hypothèses sont traduites en langage mathématique et travaillées de manière à leur faire donner tout ce qu'elles peuvent, sans faire le lien avec le réel, (par exemple des extrapolations). On a alors une simple théorie mathématique inapplicable au concret.

On peut distinguer ensuite le niveau des praticiens dont le rôle est de préparer la prise de décision en adaptant ou en simplifiant la théorie mathématique puis le niveau de la rationalisation (Pourquoi cette décision et pas une autre ?) où apparaît soit quelques uns des praticiens précédents, soit des journalistes, soit des enseignants, ... qui ont pour rôle de vulgariser auprès du grand public les raisons du choix. La décision doit alors apparaître au citoyen comme acceptable, sinon même inévitable !

Voici un exemple extrait de "L'anti-économique" par Attali et Guillaume édité aux P.U.F. (p.14) : Il s'agit de la planification française.

"Au niveau le plus abstrait, ayant un statut élevé de "scientificité", la "théorie économique sert de caution. (On trouve un bel exemple de ce type de cau- "tion dans le rapport sur les options du Ve plan (p. 124) où il est fait mention de la théorie d'Arrow des biens contingents et des marchés à terme généralisés, ex- "tension la plus élaborée, à cette époque là, de la théorie de l'équilibre général). "Au niveau des praticiens qui ont construit, pour le VIe plan, le modèle physico- "financier (FIFI) les théories abstraites ne jouent plus qu'un rôle discret ; le "relais est assuré par des techniques économétriques ayant un faible fondement thé- "orique et par les contraintes de cohérence imposées par le cadre de la comptabilité "nationale ; enfin au niveau le plus populaire les mythologies les plus simples sont les plus efficaces : FIFI est un oracle, l'ordinateur (autre mythe de la société "technocratique) fait des calculs (le nombre d'équations sert de caution à leur "sérieux) et si les résultats sont décevants, eh bien, "FIFI devra refaire ses calculs !" comme écrivait la grande presse à ce moment-là."

3) <u>LE CONSERVATISME SCIENTIFIQUE</u> (cf. "L'anti-économique")

Les spécialistes d'une discipline (scientifique par exemple) constitue un sous-sytème social dont le fonctionnement explique les aspects du développement de leur discipline. A la tête de ce sous-système se trouvent des collèges de pairs, des sociétés savantes internationales de quelques spécialistes qui contrôlent les critères de qualité des travaux, organisent leur hiérarchie et apprécient en particulier la solution de "jeux" définis à l'avance. Ce fonctionnement de la recherche ne conduit guère à poser des problèmes nouveaux, mais plutôt à résoudre des problèmes anciens. Des catégories distinctes apparaissent qui provoquent le cloisonnement artificiel d'étroites spécialités. Le formalisme facilite aussi la communication à l'intérieur de la communauté des spécialistes et maintient une certaine cohésion de cette communauté en dépit du cloisonnement. Cette cohésion peut même conduire à l'illusion qu'à un certain niveau d'abstraction formelle, les divergences de jugement de valeur s'atténuent ou même disparaissent : "La science élimine la dimension politique".

De plus la rigueur et la complexité à l'intérieur d'un formalisme permettent un alibi idéal, car il est difficile à un non-initié de se faire une idée exacte de son utilité et de son réalisme.

4) LA RELIGION DU PROGRES TECHNIQUE

La religion est un puissant instrument de stabilité dans une société et le pouvoir civil ou militaire s'est toujours appuyé sur elle , quand il ne se confondait pas avec elle pour éviter toute divergence entre pouvoir spirituel et temporel. En atteignant le citoyen moyen au niveau de ses espérances et de ses mythes, la religion le fait patienter.

Sous cet aspect, la religion chrétienne (dans nos pays) répond de moins en moins à l'attente du pouvoir. Aussi est-elle remplacée par la religion ou le mythe du progrès (le progrès scientifique et technique). On y retrouve donc les mêmes aspects ou des aspects similaires à ceux de "l'Eglise".

Par exemple le vocabulaire utilisé qui fait référence aux "martyrs de la science", aux "victimes sacrifiés sur l'autel du progrès", en "l'espoir d'une amélioration futur de nos conditions de vie",... On trouve aussi l'inquisition ou l' intolérance contre tous ceux qui rejettent ou veulent rejeter le progrès (cf. la contestation du nucléaire). De même au niveau de la hiérarchie où le chercheur oeuvrant dans le secret de son laboratoire rappelle les mystères de l'Eglise. Le développement même d'une certaine littérature à sensations, essayant de démontrer l'existence de "grands anciens" qui auraient posséder tous les secrets scientifiques et technologiques se rapporte au désir de faire remonter le plus loin possible (au commencement) les racines de la foi (à une époque où l'homme était plus près des dieux), à recréer l'illusion d'un paradis perdu.

Une autre façon de cacher au peuple (et par conséquent de le dominer) les mystères et les raisons de la foi, c'est de créer une langue religieuse. Ici les mathématiques ont remplacé le latin.

5) FORT EN THEMES = BON EN MATHS

En effet, on peut comparer le rôle des mathématiques aujourd'hui, à celui du latin dans l'Eglise d'hier. Les mathématiques, comme le latin, sont considérées comme une langue universelle. Le latin n'était connu que du clergé et des plus hautes couches de la société, de même les mathématiques ne sont connus que des techniciens et de quelques autres personnes. Oh ! Le peuple connaissait suffisamment de latin pour pouvoir réciter les prières et participer aux mystères de la foi ; de même enseigne-t-on suffisamment de mathématiques pour que le peuple ait l'impression de pouvoir agir sur le progrès s'il le voulait. Mais on s'est arrangé pour le dégouter des mathématiques. L'existence d'un langage ésotérique est en effet très important, car il permet de réserver la décision à ceux qui sont capables de l'entendre et à eux seuls (cf. "Le Monde" du 7-5-75 : "Le droit de savoir").

Il ya encore quelques années, c'était les forts en thémes ; aujourd'hui ce sont les bons en maths à qui toutes les portes sont ouvertes. Dans les deux cas, il s'agit de privilégier les élèves, puis les individus qui assureront la relève du pouvoir. Car les décisions ne sont prises que par le sommet de la hiérarchie, puisque même dans la démocratie telle que nous la connaissons, on ne fait choisir les gens que sur des sujets déterminés en haut lieu et qui n'ont souvent que peu d'intérêt pour l'avenir de la société. A-t-on posé aux gens la question suivante : "Etes-vous pour ou contre la création de plasmides hybridées par les endonucléases de restriction ?" ? Pourtant c'est ce genre de choix qui conditionne d'avantage notre avenir et celui de nos enfants que l'appartenance ou non au marché commun. (cf. "Le meilleur des mondes" de Huxley).

Certes, ce ne sont pas là des mathématiques, mais elles sont sous-jacentes. Et c'est parcequ'on habitue les gens dès l'école à croire que science égale langage hermétique, surtout à travers les mathématiques, qu'ils acceptent ensuite de ne rien comprendre aux problèmes scientifiques. Pour étayer ce propos, voici une définition proposé à des élèves de cinquième dans un récent ouvrage de mathématiques. (Maths 5º ; IREM de Strasbourg chez ISTRA ; p. 89) :

"L'ensemble noté D_n , des NOMBRES DECIMAUX possédant aux plus n chiffres après la virgule est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_n$ dans $\Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$ ainsi déterminée :

$x \, \mathcal{R}_n \, y$, pour $x \in \Delta_p$ et $y \in \Delta_q$ signifie que

$$h_{(p;n)}(x) = h_{(q;n)}(y)$$

Et il serait au moins aussi facile de trouver dans tout autre ouvrage de tout autre niveau des textes analogues du point de vue de l'ésotérisme (cf. annexe).

6) LES INSTRUMENTS DU POUVOIR SPIRITUEL

Le mythe de la science infaillible étant institué et le progrès élevé au rôle de religion, un problème de transmission entre les dieux et les hommes se pose. L'homme de science, trop faillible (mythe du savant fou), ne peut être qu'un prêtre. L'ordinateur, lui, machine parfaite, est plus facilement considéré comme une émanation des divinités. On ne peut pas accuser un ordinateur de s'être trompé et si erreur il y a ce ne peut être que voulu par les dieux. L'ordinateur a donc l'immense avantage de blanchir le pouvoir de toutes ses actions ; si les calculs savants sur ordinateur ont dit que ...., tout est dit !

A l'égale de la pythie qui prononçait en un charabia incompréhensible, que seul le prêtre attaché à sa personne pouvait traduire, les volontés d'Apollon, l'ordinateur parle dans un langage qui paraît encore plus ésotérique que le langage mathématique. Chaque ordinateur a ses servants et sa spécialité. Qui ne connaît le grand prêtre de la météorologie (A. Simon) ou de l'avenir (Mme Soleil) qui ont chacun leur ordinateur qui leur permet de prédire. (Nous avons déjà vu FIFI, qui a un rôle analogue au ministère des finances). Pour être honnête, l'expérience prouve que les oracles obtenus dans ces conditions se réalisent aussi souvent que ceux donnés par les aruspices après étude des entrailles de leurs victimes.

Beaucoup d'autres machines sont aussi des instruments du pouvoir spirituel, faisant ainsi la liaison entre l'homme et les dieux ; donnant à l'homme l'impression d'égaler les dieux. Mais nul autre que l'ordinateur n'a atteint ce pouvoir de fascination des foules. On peut d'ailleurs se demander si l'introduction de cet outil dans l'enseignement aura bien le rôle démythificateur qu'on lui prête ou si au contraire cela ne sera pas l'occasion de créer un corps de serviteurs zélés de la machine ?

Un autre instrument qui tend à se développer en ce moment est le sondage d'opinion. Faut-il y voir une application de l'adage "vox populi, vox dei", comme si les dieux ne se manifestaient qu'au travers de l'ensemble de la société et non au travers d'un seul individu ! Il faut y voir un moyen d'éviter une évolution trop rapide (une révolution ?) de la société en lui imposant le rythme de sa masse et non celui de ses éléments les plus brillants.

7) EN GUISE DE CONCLUSION

Il est normal qu'une société soit conservatrice, ou plus exactement que son évolution soit très lente. Mais l'histoire montre qu'il existe des à-coups dans cette évolution. Il est vraissemblable que nous vivons en ce moment une de ces périodes de transition. La société cherche un nouvel équilibre. La religion traditionnelle ne joue plus son rôle régulateur au service du pouvoir ; une nouvelle religion n'e t pas encore née ; peut-être sera-ce la religion du progrès, peut-être sera-ce une autre ?

En tant qu'enseignant, il est bon que nous réfléchissions à cet aspect de notre profession. Chacun en fonction de ses orientations politiques pourra alors mieux comprendre son travail et mieux se définir vis à vis du monde extérieur à l'Ecole.

Je répète que le texte ci-dessus est une ébauche. J'aimerais que des critiques soient faites ici-même et qu'une discussion puisse s'engager à ce sujet dans l'Ouvert.

On trouvera ci-après un texte qui , mieux que des textes mathématiques auxquels nous sommes trop habitués, nous montre le niveau de jargon auquel est arrivé la science d'aujourd'hui.

8) <u>ANNEXE</u> (La Recherche, nº 55 , Avril 75 , Vol. 6 p. 357).

Les intermédiaires réactionnels, créés en phase liquide, se relaxent généralement dans leur conformation de moindre énergie avant d'avoir pu subir une réaction de capture. Une des rares exceptions vient d'être décrite par A. Cornélis et P. Laszlo (J. Am. Chem. Soc. 97, 244, 1975) : dans une véritable réaction en cascade, trois adduits distincts du dicyclopropylfulvène avec le tétracyanoéthylène s'interconvertissent, de manière séquentielle, via deux zwitterions identiques de par leur constitution et ne différant que par leurs conformations. Le pôle négatif de ces zwitterions est stabilisé par les substituants cyano, le pôle positif étant une carbocation fortement délocalisé. Le tétracyanoéthylène migre de sa position initiale au dessus de la face du fulvène vers sa position finale, dans l'isomère le plus stable, dans le plan nodal du système insaturé. Il est étonnant d'assister ainsi à une série de réactions consécutives plutôt que compétitives.

Jean Lefort
Décembre 1975

Equations différentielles et écologie

INTRODUCTION

Pendant longtemps la théorie des équations différentielles a été une théorie analytique ; on recherchait avant tout des solutions explicites sous diverses formes possibles : séries entières, séries de Fourier, ... ou développements asymptotiques. C'était donc une étude essentiellement quantitative.

Ce n'est qu'en 1880 que Poincarré pose les bases d'une étude géométrique qualitative des équations différentielles. Mais cette idée de Poincarré ne sera que peu développée en France. On notera à ce propos la parution récente de deux livres :
1) Equations différentielles ordinaires de V. ARNOLD aux éditions de Moscou
2) Differential equations ; dynamical systems and linear algebra de M. HIRSCH et S. SMALE , Academic Press - 1970 -.
livres qui abordent justement le problème des équations différentielles dans l'esprit de Poincarré.

C'est sous cet aspect que nous étudierons dans la suite de l'exposé deux problèmes de population :
1) Une population de proies vivant sur le milieu et une population de prédateurs se nourrissant des proies.
2) Deux populations en compétition sur un même milieu.

Dans ce dernier cas l'aspect écologique apparaîtra dans l'étude de très faibles perturbations qui entraîneront des écarts de comportement très importants à longue échéance.

Pour commencer nous allons voir un modèle à une population qui permettra de mieux comprendre les autres cas.

I - MODELE A UNE POPULATION

Considérons une population dont le nombre d'individus y est une fonction du temps t . Ce qui est intéressant pour une telle population, c'est son taux d'accroissement exprimé par la quantité $\frac{\Delta y}{y\,\Delta t}$ où Δy est l'accroissement de la taille de la population pendant l'intervalle de temps Δt . En général on prend Δt égal à un an et le taux d'accroissement s'exprime en ‰ .

Pour une population de taille importante, il est plus simple ici de passer à une notion "continue" et de parler du taux d'accroissement $\alpha = y'/y$, y' étant la dérivée par rapport au temps de y .

1) <u>α constant</u> : C'est le cas très classique de l'équation $y' = \alpha y$ qui s'intègre en : $y(t) = y_0 \exp(\alpha t)$ où y_0 est la taille de la population à l'instant initial. On trouve facilement des exemples concrets :

- $\alpha > 0$ c'est le cas de la croissance de la taille d'une population de bactéries dans un bouillon de culture.
- $\alpha < 0$ c'est la cas de la désintégration radioactive.

2) <u>α proportionnel à y</u> : On pose $\alpha = ky$ et on obtient l'équation $y' = ky^2$ qui s'intégre en : $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 kt}$ avec la même convention pour y_0 .

On remarque le caractère explosif d'un tel modèle, puisqu'au bout du temps fini $t = 1/ky_0$, la population a une taille infinie. C'est vraissemblablement la cas de certaines réactions chimiques.

3) <u>De quoi dépend α</u> ? On peut se poser plus généralement le problème de savoir de quoi peut dépendre le taux d'accroissement α ?

— Il est plausible que α dépende de la quantité de nourriture σ et que pour une espèce donnée il existe un seuil σ_0 au dessus duquel α est positif et au dessous duquel α est négatif. La fonction α la plus simple répondant à une telle condition est :

$$\alpha = a(\sigma - \sigma_0) \quad \text{où } a \text{ est une constante.}$$

Il faut toutefois noter que s'il y a plusieurs populations en présence, σ peut ne pas être constant.

— Il est peu réaliste de voir croître indéfiniement la taille d'une population ; il est donc convenable d'envisager l'existence d'une population limite η au dessus de laquelle α est négatif et au dessous de laquelle α est positif. Comme ci-dessus, une fonction α simple répondant à la question est :

$$\alpha = c(\eta - y) \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

— D'une façon plus générale, on peut supposer que α est une fonction M de y, vérifiant un certain nombre de propriétés. L'équation différentielle à résoudre s'écrit alors :

$$y' = M(y).y$$

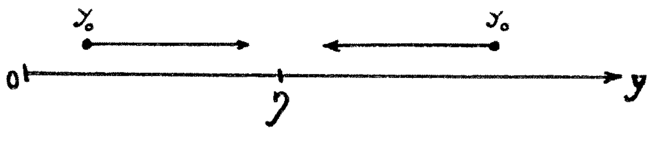
4) <u>Etude du cas $\alpha = c(\eta - y)$</u> : Dans ce cas, l'équation différentielle s'écrit :

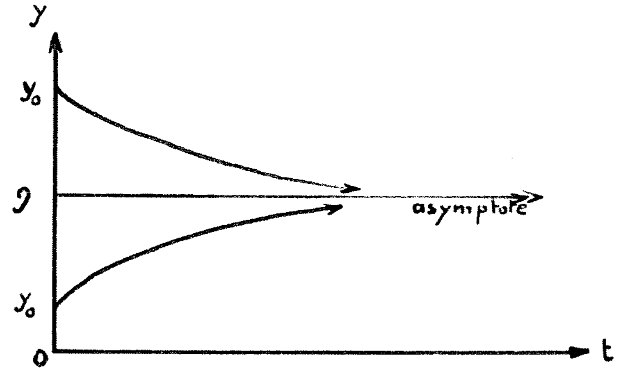
$$y' = c\,(\eta - y)y = c\,\eta\, y - cy^2$$

On reconnait une équation de Bernoulli. Le terme cy^2 est proportionnel au nombre de couple dans la populatation ; il apparaît donc comme un phénomène de friction sociale. Cette équation admet deux solutions constantes :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = \eta$$

Une étude plus poussée montre que η apparaît comme une population, limite de toutes les situations possibles (sauf état initial à population nulle). Ce qui se traduit par l'un des deux graphiques suivants :





On dira que η est une population limite stable en ce sens que la taille de toute population tend à se rapprocher de η après toute perturbation.

II - PREMIER MODELE A DEUX POPULATIONS

C'est le modèle qui a été étudié par Volterra dès 1925 sur les lynx et les lapins dans la forêt canadienne (se reporter à : "Les associations biologiques" par Volterra et D'Ancona, publié chez Hermann en 1935 aux Actualités scientifiques et Industrielles).

On suppose que x représente la taille de la population de proies qui vivent sur le milieu (les lapins) et que y représente la taille de la population de prédateurs qui vivent sur les "x" (les lynx).

A) On néglige les phénomènes sociaux :

Il semble normal de supposer que la taux d'accroissement de y dépend de la quantité de nourriture, elle même proportionnelle à x. On peut donc écrire :

$$y' = (Cx - D)y$$

De façon symétrique le taux d'accroissement de x dépend de y, plus y est grand plus faible est ce taux puisqu'il y aura d'avantage de rencontres entre les x et les y et par conséquent d'avantage de x tués pour être mangés par les y. On peut donc écrire :

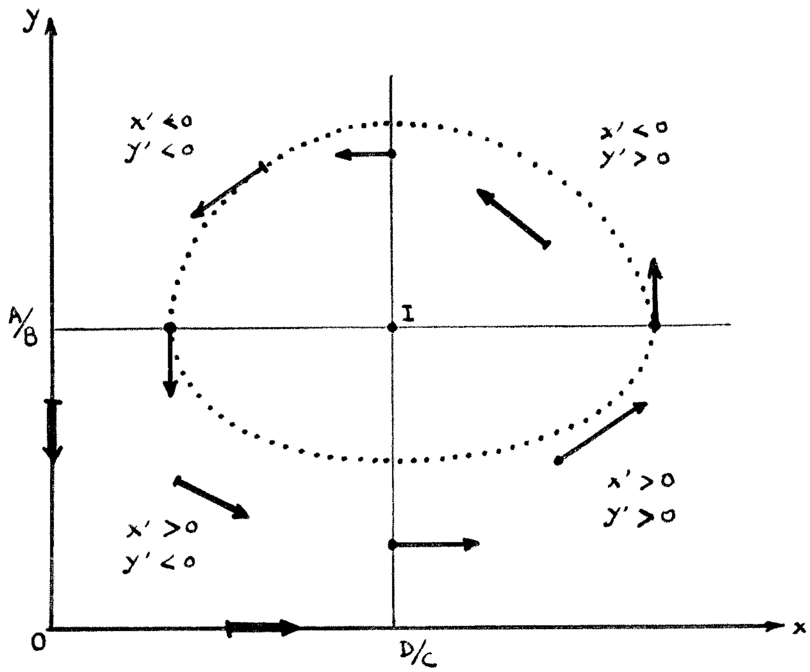
$$x' = (A - By)x$$

En résumé, on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} x' = (A - By)x \\ y' = (Cx - D)y \end{cases}$$

On représente les solutions dans le plan (x,y) en orientant les courbes vers les temps t positifs.

Le système différentiel met en évidence l'existence d'une solution stationnaire pour : $\begin{cases} A - By = 0 \\ Cx - D = 0 \end{cases}$ C'est le point I de la figure ci-dessous.



En étudiant les signes de x' et de y' dans chacun des quadrants limités par les droites $x = D/C$ et $y = A/B$ et dans la seule partie $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, on voit apparaître les tangentes matérialisées par des flèches sur la figure ci-contre. Les tangentes sont"verticales" pour $x = D/C$ et "horizontales" pour $y = A/B$. L'allure des demi-tangentes semble indiquée que les courbes tournent autour de I.

On démontre en effet ce résultat, à savoir que les courbes sont fermées et entourent I . Pour cela on cherche une intégrale première de la forme :

$$H(x,y) = \text{Cste}$$

On doit donc avoir : $$\frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' = 0$$

En cherchant H sous la forme : $H(x,y) = F(x) + G(y)$ On trouve :

$$H(x,y) = Cx - D\text{Log}x + By - A\text{Log}y$$

et on vérifie que I est un minimum pour H et que par conséquent l'allure des courbes est bien celle qui était apparue.

B) <u>Perturbations par des phénomènes sociaux</u>

Nous avons vu en (I,4) que l'influence des phénomènes sociaux se traduisait par l'introduction d'un terme proportionnel au carré de la population. Dans ce cas, le système différentiel précédent se réécrit :

$$\begin{cases} x' = (A - By - \lambda x)x \\ y' = (Cx - D - \mu y)y \end{cases}$$

On voit apparaître de la même façon deux droites :

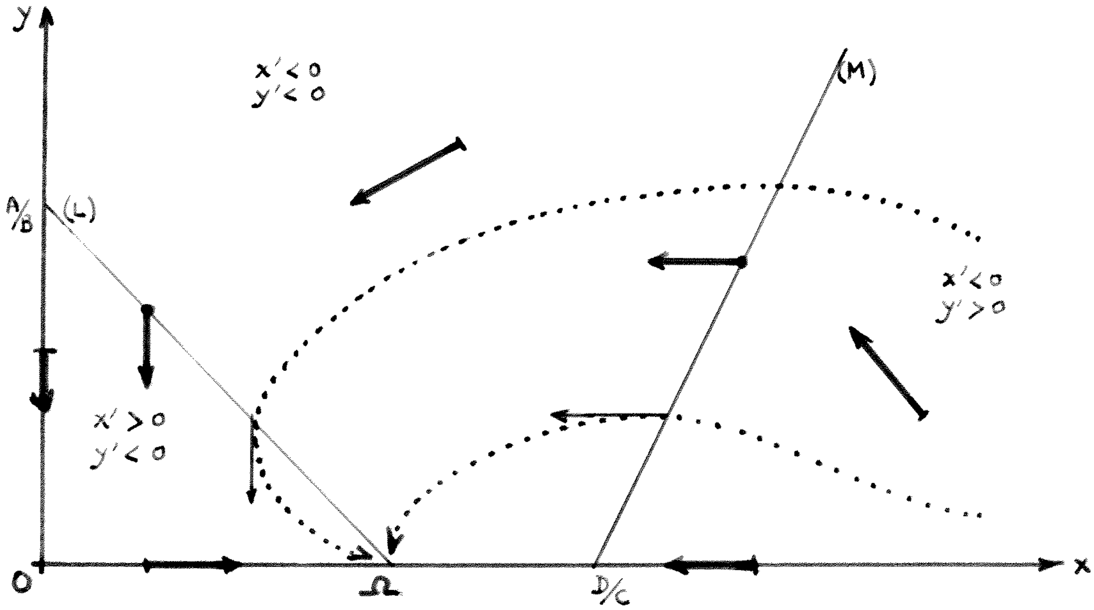
$$\begin{cases} (L): & A - By - \quad x = 0 \\ (M): & Cx - D - \quad y = 0 \end{cases}$$

qui jouent le même rôle que les droites d'équation $y = A/B$ et $x = D/C$ du problème précédent. Nous sommes toutefois conduit à deux cas de figure suivant que L et M se coupent dans le quadrant $x \geq 0$, $y \geq 0$ ou ne s'y coupent pas.

On remarque que de toute façon (L) a une pente négative et (M) une pente positive. On étudie de la même façon qu'en (II,A) la direction des demi-tangentes, indiquée par des flèches sur les graphiques ci-dessous. Sur (L) les tangentes sont "verticales et "horizontales" sur (M). On appellera O l'origine du repère et Ω le point d'intersection de (L) avec l'axe des x : $\Omega = (A/\lambda\ ,\ 0)$

1) <u>L et M ne se coupent pas</u> :

O et Ω sont les seuls points singuliers. Pour $x = 0$ les solutions tendent vers O et pour $x \neq 0$ les solutions tendent vers Ω. On démontre que les courbes ont l'allure de celles représentées sur le graphique ci-dessous qui résume la situation.

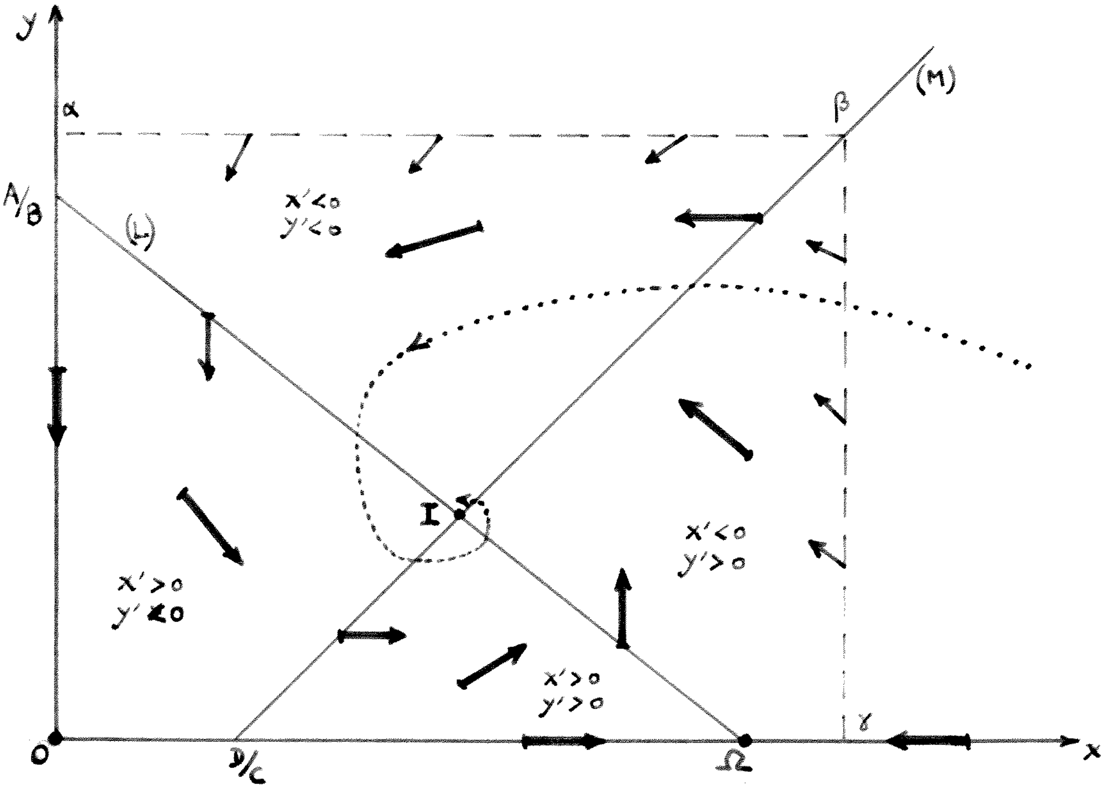


2) <u>L et M se coupent en I</u> :

O, Ω et I sont les seuls points singuliers. Pour $x = 0$ les solutions tendent vers O ; pour $y = 0$ (et $x \neq 0$) les solutions tendent vers Ω ; et enfin si x et y sont non nuls tous les deux à l'instant initial; les solutions tendent vers I , en tournant en spirale autour de ce point.

Les démonstrations résultent d'un théorème général du à Poincarré et affirmant que dans un tel cas, toute solution tend soit vers un point singulier, soit vers une solution périodique entourant le point singulier.

Les résultats sont résumés sur le graphique ci-après :



On peut cependant se poser la question de savoir ce qui se passe si les conditions initiales sont fort éloignées de I ? En imaginant une "boîte" telle que O on remarque que la direction des demi-tangentes sur les côtés de la "boite" impliquent que toutes les solutions finissent par y entrer. Au bout d'un temps fini on est donc ramener à un voisinage de I .

III - DEUXIEME MODELE A DEUX POPULATIONS

Nous envisageons ici un modèle de deux populations en compétition pour une même nourriture. Nous partons du système le plus général :

$$\begin{cases} x'/x = M(x,y) \\ y'/y = N(x,y) \end{cases}$$

et nous faisons un certain nombre d'hypothèse sur M et N .

— Quand l'une des espèces augmente, l'autre voit son taux d'accroissement diminué, puisque la quantité de nourriture disponible est constante. Par suite : $\frac{\partial M}{\partial y} < 0$ et $\frac{\partial N}{\partial x} < 0$

— Si la taille de l'une au moins des espèces est trop importante, alors les deux taux d'accroissement deviennent négatifs car il n'y a plus assez de nourriture pour l'ensemble. Par conséquent :

$$\left\{ \text{ou} \begin{array}{l} x \geqslant K \\ y \geqslant K' \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \text{et} \begin{array}{l} M < 0 \\ N < 0 \end{array} \right.$$

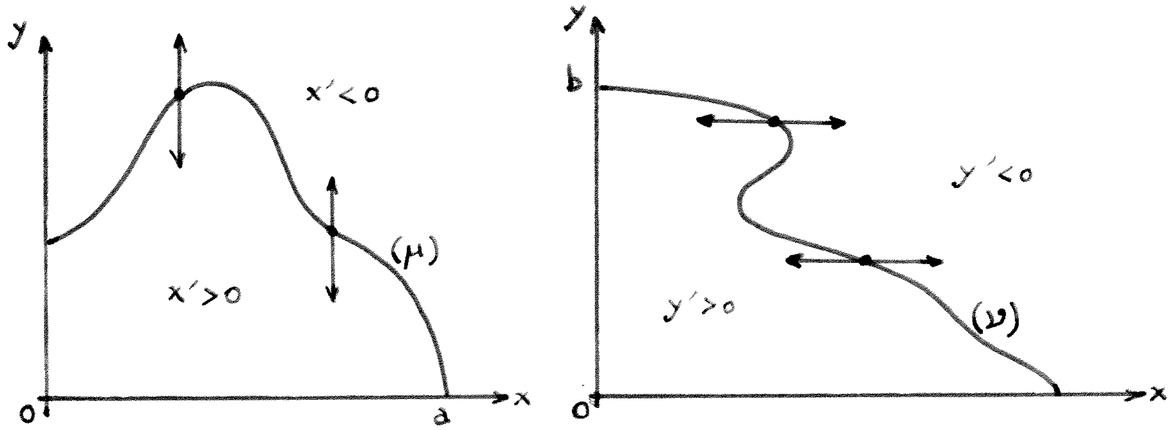
— Si l'une des populations est seule, on admet que l'on est dans le cas d'une population avec phénomènes sociaux. C'est-à-dire que :

$$M(x,0) \text{ est } \begin{cases} \text{positif si } x < a \\ \text{négatif si } x > a \end{cases}$$

$$N(0,y) \text{ est } \begin{cases} \text{positif si } y < b \\ \text{négatif si } y > b \end{cases}$$

Nous allons faire une étude analogue à celle faite pour les autres modèles. Il est clair que les courbes (μ) d'équation $M = 0$ et (ν) d'équation $N = 0$ jouent le même rôle que les droites (L) et (M) de (II,B).

Des conditions $\frac{\partial M}{\partial y} < 0$ et $\frac{\partial N}{\partial x} < 0$ on en déduit que les courbes (μ) et (ν) admettent respectivement pour équation : $y = f(x)$ et $x = g(y)$. On a par exemple les dessins suivants :



Sur ces dessins, il a été indiqué les directions des tangentes aux trajectoires solutions en (x,y) en un point de (μ) ou de (ν). ("verticales" dans le premier cas, "horizontales" dans le second). De même il a été indiqué le signe de x' et de y'.

On est donc amené à étudier les intersections des deux courbes (μ) et (ν) dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$

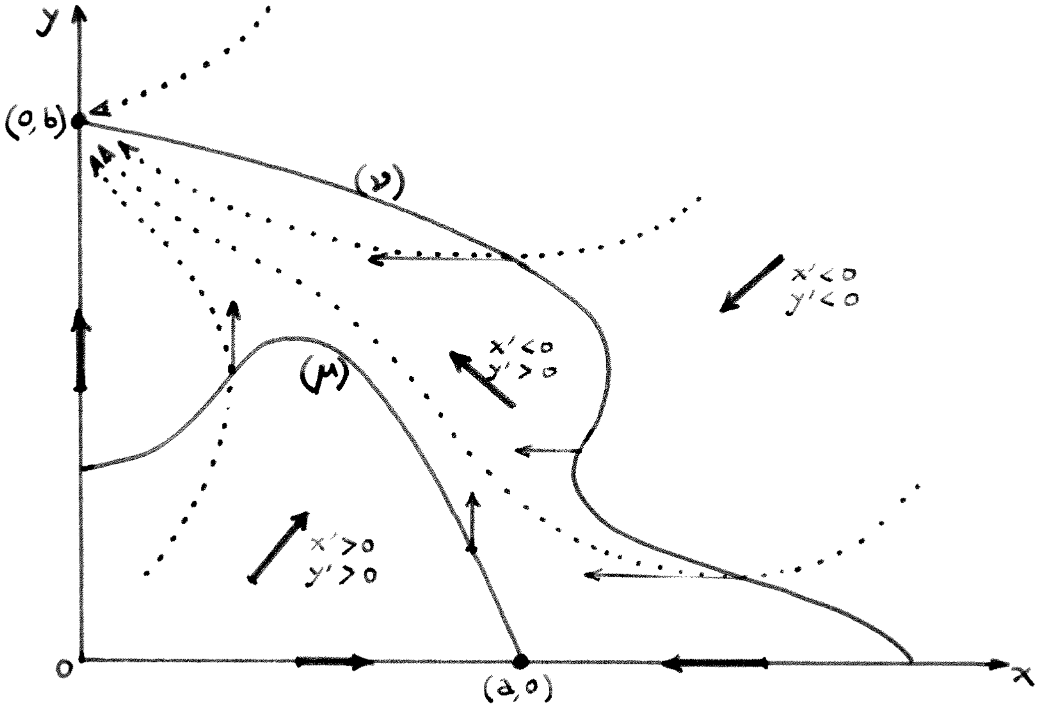
a) $(\mu) \cap (\nu) = \emptyset$

Une étude analogue à celles déjà faites montre que les directions des tangentes et l'allure des trajectoires sont telles que les donne la figure ci-après.

On démontre, compte tenu de la disposition des fléches matérialisant les demi-tangentes, qu'il n'y a pas de solution périodique et que :

- Si $y = 0$ les soltutions tendent toutes vers le point $(a,0)$
- Si $y \neq 0$ les solutions tendent toutes vers le point $(0,b)$

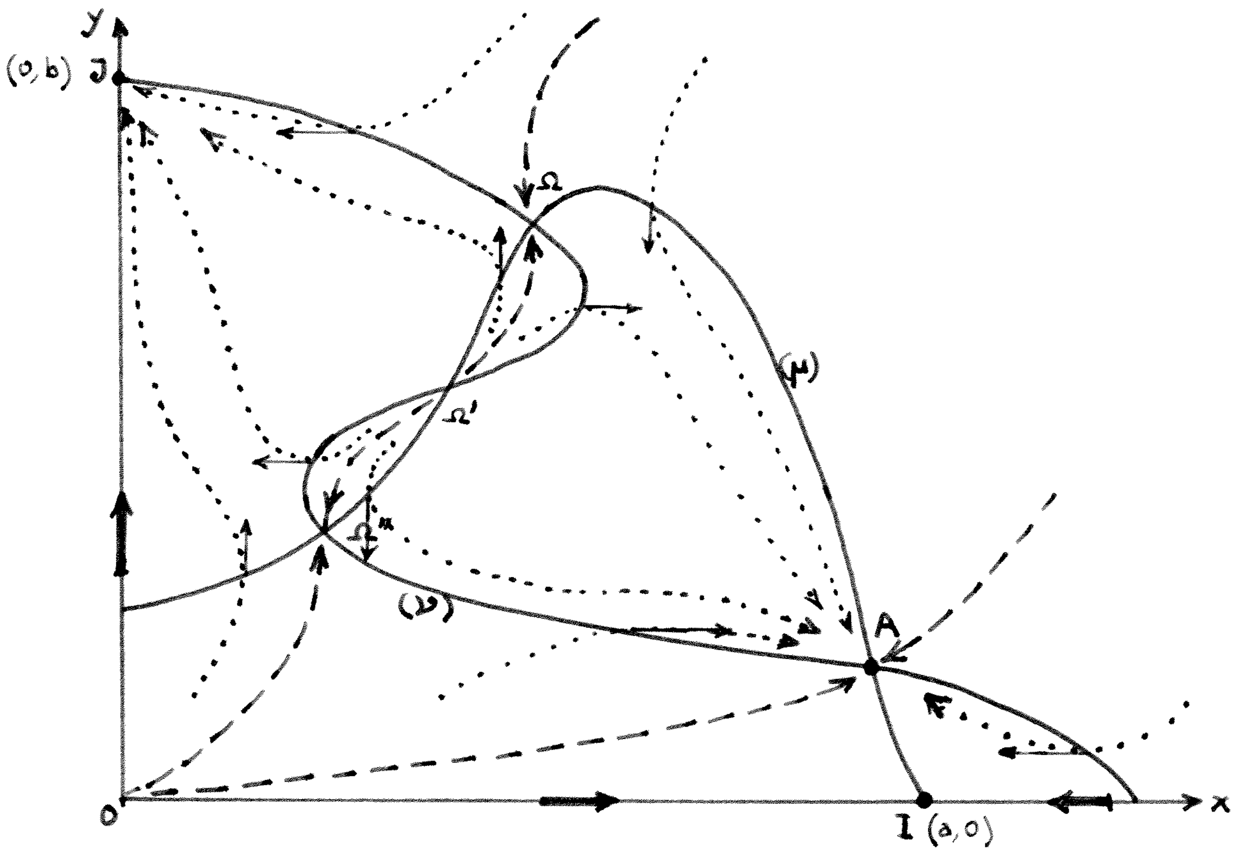
Par ailleurs, en utilisant la méthode de la boîte comme en (II,B,2) on vérifie qu'on se ramène toujours au voisinage du point $(0,b)$.



Un autre cas de figure pourrait intervertir les rôles de x et de y .

b) $\underline{(\mu) \cap (\nu) \neq \emptyset}$

Nous ferons les hypothèses raisonables suivantes, à savoir que (μ) et (ν) n'ont qu'un nombre fini de point commun et qu'en chacun de ces points les deux courbes ne sont pas tangentes. Alors une étude semblable à la précédente conduit à la figure ci-dessous :



Pour ne pas surcharger le dessin, les signes de x' et de y' n'ont pas été indiqués. On se reportera aux allures de courbes pour les connaître. Les courbes sont indiquées par des pointillés. Les courbes an tireté sont des courbes limites.

On voit apparaître les solutions stationnaires suivantes :

- O correspondant à deux populations nulles.
- I et J correspondant au cas où il n'y a qu'une seule population.
- Les points d'intersection des courbes (μ) et (ν) : A, Ω, Ω', et Ω''. Mais seul A est un point d'équilibre stable, les autres étant instables.(point de col par exemple en Ω).

Par ailleurs, chacune des régions délimitées par les courbes (μ) et (ν) a sur ses bords soit un champ de vecteur rentrant, soit un champ de vecteur sortant, donc chacune des régions est soit stable dans le passé (champ sortant) soit stable dans l'avenir (champ rentrant).

Considérons un point tel que Ω et une des trajectoire limite qui arrive sur Ω. Si les conditions initiales s'écartent un tant soit peu de cette trajectoire limite, alors la trajectoire résultante tend soit vers I, soit vers A. Seul l'écologie nous permet d'expliquer les raisons de cet écart.

Pour ce qui se passe à l'infini (ou très loin), on peut faire appel à la méthode de la boîte pour montrer qu'on se ramène toujours en un des points stationnaire.

Conférence prononcée par M. Godbillon
Strasbourg, le 4 novembre 1975.
D'après les notes de Jean Lefort.

L' OUVERT : responsable de la publication : jean Lefort
27, route de Neuf-Brisach
68000 COLMAR

impression : IREM de Strasbourg
rue du général Zimmer
67000 STRASBOURG

Divertissements mathématiques

SOLUTIONS DES DIVERTISSEMENTS DE L' OUVERT N° 7

Problèmes élémentaires :

I - On se convaincra sans difficulté que le résultat vaut 1 .

II - Ce problème est simple en ce sens qu'il n'y a que du calcul. On remarque que :

$$\frac{140}{99} < \frac{99}{70} \qquad \text{et que :} \qquad \frac{99}{70} - \frac{140}{99} = \frac{1}{6930}$$

Or une table numérique nous donne facilement : $\sqrt{2} \simeq 1,41421...$ et donc :

$$\frac{140}{99} < \sqrt{2} < \frac{99}{70}$$

Pour chercher le plus proche des deux nombres, on peut soit extraire la racine de 2, mais alors il faut calculer au moins 11 décimales à 2 , soit, comme nous le faisons ici, comparer par des moyens algébriques :

$$\sqrt{2} - \frac{140}{99} \qquad \text{et} \qquad \frac{99}{70} - \sqrt{2}$$

c'est-à-dire : $\qquad 2\sqrt{2} \qquad$ et $\qquad \frac{140}{99} + \frac{99}{70} = \frac{19601}{6930}$

Les deux membres étant positifs, on paut comparer leur carré, soit :

$$8 \qquad \text{et} \qquad \frac{384\,199\,201}{48\,024\,900} = 8 + \frac{1}{48\,024\,900}$$

ce qui permet de conclure que <u>140/99 est plus proche de 2 que 99/70</u>

En ce qui concerne $\frac{1}{2}\left(\frac{140}{99} + \frac{70}{99}\right)$, on voit que ce nombre est vraiment très proche de $\sqrt{2}$. Les calculs précédents permettant d'affirmer que leurs carrés diffèrent de $(192\,099\,600)^{-1}$ donc pour les nombres eux-mêmes d'environ $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ fois ce nombre, c'est-à-dire, grosso modo que :

<u>$\frac{1}{2}\left(\frac{140}{99} + \frac{99}{70}\right)$ diffère de $\sqrt{2}$ de moins de $2.\,10^{-9}$</u>

Problème pour physicien :

Ayant à calculer l'aire d'une surface fermée de révolution, on a intérêt à utiliser le théorème de Guldin :

$$S = 2.\pi.r.L$$

Où S est l'aire cherchée, L la longueur donnée de la méridienne (ou plus exactement leur mesure), enfin r est la distance à l'axe du centre de gravité de la méridienne. Laissons un fil parfaitement souple prendre sa position d'équilibre dans un champ uniforme de pesanteur. La forme prise par le fil sera une chaînette, et le centre de gravité sera naturellement le plus bas possible. La longueur de la méridienne étant donné, le centre de gravité ne pourra s'éloigner de l'axe de révolution que si l'on rapproche les pôles. La limite est atteinte pour un disque plat de rayon $L/2$. S vaut alors $(\pi \cdot L^2)/2$.

Problème de vache :

Un membre de phrase a été oublié dans la rédaction de l'énnoncé de ce problème, en rendant la résolution sans intérêt et difficile. A l'avant dernière ligne il fallait compléter "...où elle aurait atteint l'extrêmité du pont, laissant 25 cm de son arrière train sur le pont."

Nous donnons ci-dessous le corrigé du problème ainsi complété :

Soit x la longueur du pont en mètres ; la vache se tient alors à $x/2 - 5$ d'une extrémité et à $x/2 + 5$ de l'autre. Le train est à $2x$ de l'extrêmité du pont la plus proche.

La vache peut parcourir $x/2 - 5$ dans un sens ou $x/2 + 5 - 1/4$ dans l'autre dans le temps ou le train fera $2x - 1$ ou $3x - 1/4$. En faisant la somme des trajets parcouru dans chaque cas on voit que la vache peut faire $x - 1/4$ pendant que le train fait $(x - 1/4).5$; la vache est donc cinq fois moins rapide que le train . Sa vitesse est par conséquent de 18 Km/h.

Pour avoir la longueur du pont, étudions ce qui se passe dans le cas favorable pour la vache. Elle parcourt $x/2 - 5$ pendant que le train fait $2x - 1$. Etant donné le rapport des vitesses, on a :

$$2x - 1 = 5 . (x/2 - 5)$$

ce qui donne au pont une longueur de 48 m.

AUTRES PROBLEMES ET DIVERTISSEMENTS

Il existe à l'heure actuelle sur le marché de nombreuses calculatrices de poche dites scientifiques. Elles permettent en effet, outre les quatre opérations, de calculer les valeurs d'un certain nombre de fonctions classiques : logarithmique, exponentielle, trigonométrique (directe et inverse), racine, puissance, inverse ....

Il est intéressant de se poser un problème numérique en s'interdisant l'accès de certaines touches. Le choix des touches dépend de la machine utilisée ;

Je donne ici quelques exemples de génération d'entiers naturels (ou de très bonnes approximations de ceux-ci) sur une Hewlett-Packard 35 en m'interdisant les touches numériques et les touches correspondantes aux quatre opérations.

1 obtenu à partir de o par $/e^x/$

2 obtenu par $/e^x/e^x/e^x/e^x/e^x/\log/\log/$

4 peut être obtenu de deux façons que je laisse le soin de trouver au lecteur.

Voici quelques autres entiers faciles à trouver :

3 , 5 , 6 , 8 , 9 , 10 , 15 , 20 , 25 , 27 , 30 , 45 , 50 , 60 , 90 , 100 .

Existe-t-il une soltuion pour engendrer 7 ? (réponse inconnue de l'auteur).

On remarquera qu'il se peut, qu'en raison des approximations de calcul de la machine 4 soit par exemple obtenu sous la forme 3, 999 999 999 ou 4, 000 000 001 On admettra ces résultats comme correct.

A défaut d'une bibliographie détaillée nous croyons utile de donner un court lexique de deux mots souvent employés dans les jugements sur les ouvrages :

CLAIR, avec une nuance de satisfaction : se dit d'un mémoire court de préférence réduit à un groupe de formules ou mieux une formule unique rigoureusement inintelligible par elle-même. Par extension la clarté concerne des exposés très condensés dont les finesses sont hautement appréciées des spécialistes qui connaissent déjà la question à fond.

COMPLIQUE, associé à une nuance péjorative de confusion : se dit d'un long exposé dont les développements sont directement intelligibles au commun des mortels.

J. TEXERAU

La construction du télescope d'amateur

(société astronomique de France).

Evolution de l'enseignement des maths en France de 1872 à 1972

par Jean ITARD

Un survol de l'évolution de l'enseignement des mathématiques en France durant les cent dernières années, nécessite d'abord un rappel des origines de cet enseignement, puis quelques mots sur l'organisation générale de l'enseignement et son évolution.

Disons d'abord que l'enseignement des mathématiques n'existe pratiquement au XVIIIème siècle que dans les diverses écoles militaires.

Lors de la Révolution, dans les Ecoles Centrales, puis sous le Consulat et l'Empire, dans les Lycées, il n'est guère organisé qu'en vue de la préparation à l'entrée de l'Ecole Polytechnique (1795) et subsidiairement à l'Ecole Normale Supérieure (depuis 1810). Il est alors donné dans les classes de Mathématiques préparatoires (à partir de la 3ème), de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales. Quelques chaires de Mathématiques transcendantes (Calcul Différentiel et Intégral), émigreront bientôt des lycées vers les Facultés, créées en 1808. Disons tout de suite que, sauf à Paris, les Facultés des Sciences végèteront jusqu'en 1870, sans véritables étudiants, simples organismes chargés de la collation des grades universitaires, Baccalauréat, Licence, Doctorat.

Le pivot de la formation mathématique est, durant presque tout le XIXème siècle, l'Ecole Polytechnique, centre à peu près unique de la culture scientifique, et qui fournira l'essentiel du corps enseignant avant que l'Ecole Normale ne prenne la relève.

La préparation à l'Ecole Polytechnique se fait dans les classes de Mathématiques Spéciales, dont le programme implicite (il n'y aura de programme officiel qu'en 1905) comporte de l'ALGEBRE (théorie des équations algébriques), de la Trigonométrie et de la Géométrie Analytique.

Les classes de Mathématiques préparatoires et élémentaires enseignent l'Arithmétique, des éléments d'Algèbre, et la Géométrie euclidienne sous la forme que lui a donnée Legendre en 1795.

La Géométrie Descriptive, enseignée à l'Ecole Polytechnique, entrera peu à peu dans le programme du concours d'entrée.

Quant à la structure de l'enseignement à partir de la fin du Second Empire, disons qu'il se caractérise par une double ségrégation, sociale d'une part, sexuelle de l'autre.

Les Ecoles Maternelles reçoivent leur premier statut en 1881. L'enseignement primaire laïque, gratuit, obligatoire de 6 ans à 12 ans, est institué en 1881-1882.

Mais, parallèlement à ces écoles maternelles et primaires, réservées au peuple, il existe dans les Lycées, à l'usage de la bourgeoisie, des classes enfantines, des classes préparatoires (10ème et 9ème) et des classes élémentaires (8ème et 7ème), payantes, bien entendu. La disparition de cet enseignement "distingué" est toute récente. Le corps des professeurs des classes élémentaires, recruté par concours parmi les instituteurs et institutrices, s'est éteint lentement.

Pour les adolescents, l'Etat offre l'Enseignement secondaire, payant, dispensé aux seuls garçons, dans les lycées et les collèges municipaux. Nous aurons à l'examiner de près, mais signalons qu'il est à base d'Humanités, c'est-à-dire qu'il implique l'étude du latin, et parfois du grec.

Cependant apparaissait, en 1865, un Enseignement sans langues anciennes, l'Enseignement secondaire spécial, devenu en 1890, l' "Enseignement Moderne".

Parallèlement étaient créés les Cours Complémentaires et, en 1886, (organisation en 1889) les Ecoles Primaires Supérieures : trois ans d'études, de 13 à 16 ans environ, avec une langue vivante. Elles sont fréquentées par les enfants de petits fonctionnaires, d'employés, d'artisans. L'externat est gratuit. Elles existent pour les deux sexes et débouchent soit sur la vie active, soit sur les Ecoles Normales Primaires ou les Ecoles d'Arts et Métiers. Elles ont été précédées par la création des Ecoles Normales Supérieures de l'Enseignement primaire, de Fontenay et de Saint-Cloud (1881 et 1879).

Nous venons de parler des Ecoles d'Arts et Métiers. La première, créée à Compiègne en 1801, installée à Châlons-sur-Marne en 1806, fut suivie en 1814 par celle d'Angers, et, ultérieurement, par plusieurs autres. Nous devons saluer ici le professeur de Mathématiques de Châlons, Etienne Bobillier (1798-1840). Dans la Géométrie supérieure, synthétique ou analytique, il se place aux côtés de Poncelet, de Chasles ou de Plücker. Son cours de Géométrie, réédité jusqu'en 1865, est d'une grande originalité et contient, entre autres, une étude des coniques par la transformation par polaires réciproques, la conique de référence étant le cercle.

L'Enseignement technique va se développer d'une façon autonome, à côté du primaire et du secondaire, et aura lui aussi son Ecole Normale Supérieure. Il recrute, comme le primaire supérieur, dans les couches modestes de la population, mais fort peu dans la classe ouvrière proprement dite.

Pour la bourgeoisie féminine, laissée jusque-là à l'éducation domestique, Camille Sée fonde en 1880 l'Enseignement secondaire féminin (sans latin). L'Ecole Normale Supérieure de Sèvres est créée en 1881. Les agrégations féminines apparaissent en 1884 et 1894. L'assimilation de l'Enseignement féminin à l'Enseignement masculin sera décidée en 1924.

Nous laissons de côté, pour simplifier, l'évolution de l'Enseignement libre.

Ce rapide coup d'oeil nous permet d'aborder maintenant le fond même de notre sujet : l'évolution de l'Enseignement Mathématique.

En introduction, rappelons cependant des passages du rapport de la Commission de 1852 (Seconde République), chargée de préparer les programmes scientifiques des lycées : "Quelques géomètres veulent que l'intelligence des élèves soit obligée de déduire toutes les vérités de leurs principes les plus abstraits, et qu'elle s'assouplisse par cette gymnastique qui la rend à la fois plus subtile et plus féconde en ressources pour l'argumentation. Cette méthode réussit à quelques esprits rares ; mais elle décourage le plus grand nombre ; elle inspire un orgueil d'autant plus dangereux à ceux qu'elle n'arrête pas, qu'elle les frappe presque toujours de stérilité sous le rapport de l'invention ; elle fait naître chez la plupart des élèves une foule d'idées fausses, ou du moins, elle les dispose à en devenir les victimes ... " Il faut, au contraire, pour la Commission, ne pas "altérer dans les masses ce bon sens droit et sûr qui vit des choses communes, cette raison sage et modérée qui répugne aux chimères".

Rapprochons ces déclarations de celles de O. Gréard, annnonçant la création des écoles primaires supérieures, destinées à "donner satisfaction aux ambitions légitimes, sans surexciter les prétentions aveugles, aussi décevantes pour les individus que fatales à la société".

Ces attitudes conservatrices sont perpétuellement en conflit avec des forces vives, nées spontanément dans les milieux universitaires, et dont nous allons montrer quelques aspects. Voici d'abord une nomenclature incomplète des Journaux, Revues et organismes créés par des enseignants de Mathématique, soit pour leurs collègues, soit pour leurs élèves. Nous laissons de côté les grands journaux scientifiques, réservés à la Recherche, en signalant toutefois les Annales de Mathématiques Pures et Appliquées, de Gergonne, 1810-1831, où collaboraient Chasles, Poncelet, Bobillier, Plücker, etc ...

En 1842, O. Terquem et Gerono fondent les "Nouvelles Annales de Mathématiques, journal des candidats aux Ecoles Polytechnique et Normale". De nombreux rédacteurs se sont succédé à la tête de ce journal qui cessa de paraître en 1928.

La Nouvelle Correspondance Mathématique, de Catalan, ne dura que de 1875 à 1880. Son titre rappelle celui de la Correspondance Mathématique de Quetelet (XI volumes de 1825 à 1839). Ces deux revues belges ont été continuées, quant à l'esprit, par Mathesis, fondée en 1881 par Mansion et Neuberg.

Bourget, professeur à la Faculté de Clermont, lance en 1877 le Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales, qui dure jusqu'en 1881 (5 volumes).

En 1882, de Longchamps fait paraître le Journal de Mathématiques élémentaires et le Journal de Mathématiques spéciales.

H. Vuibert créait, en 1876, un Journal de Mathématiques élémentaires, à la fin du siècle l'Education Mathématique, en 1890, la Revue des Mathématiques Spéciales.

Surtout Laisant et Fehr lançaient à Genève, en 1899, "L'Enseignement Mathématique" revue d'une haute tenue, précieuse à consulter pour étudier le développement international de notre enseignement. Ils écrivaient, en 1903, dans un appel pour le Troisième Congrès des Mathématiciens (Heidelberg, 1904) : "Le mot "Enseignement" a pour nous la signification la plus large. Il veut dire enseignement des élèves, et aussi enseignement des professeurs - et d'ailleurs l'un ne va guère sans l'autre. De là notre volonté préméditée de donner une large place aux questions de philosophie, de méthodologie, d'histoire. Un professeur ne restera pas longtemps capable de remplir dignement sa tâche s'il ne travaille pas sans cesse à élargir son horizon, à savoir autre chose que le programme de sa classe et la pratique de l'enseignement dans son propre pays."

Ceci nous amène à rappeler la fondation, en 1909, de notre propre association, et la parution de son bulletin qui a pris l'extension que vous connaissez. Signalons encore les Conférences Internationales de l'Enseignement Mathématique, et particulièrement celle de Paris, au début d'Avril 1914.

De conception pointilliste, l'Intermédiaire des Mathématiciens, de Laisant et Lemoine, parut en 1894 et survécut quelque temps au premier conflit mondial. Ce périodique revécut de Janvier 1945 à Janvier 1949 sous le titre d'Intermédiaire des Recherches Mathématiques et sous la direction de Paul Belgodère.

La Revue de l'Enseignement des Sciences (1906-1915) cherche à établir un lien entre les professeurs de Mathématiques, de Physique et de Sciences Naturelles. Elle est remplacée par "L'Enseignement Scientifique" (1927-1939), puis, pendant très peu de temps, par "L'Enseignement des Sciences".

"L'Information Scientifique" a oeuvré dans le même esprit. Notre regretté collègue Fouché avait, quant à lui, créé une délicieuse revue pour les jeunes élèves, "Le Facteur X", morte d'impécuniosité.

Beaucoup d'autres efforts, dans les milieux de l'Enseignement Primaire en particulier, seraient certainement à signaler. Notre énumération n'a qu'un mérite, rappeler le labeur continu des professeurs pour l'amélioration de leurs méthodes.

Mais venons enfin aux tendances de notre enseignement. Dans un rapport publié en 1933 dans l'Enseignement Mathématique, nos collègues J. Desforges et G. Iliovici faisaient remarquer que "les programmes d'enseignement secondaire, de la classe de quatrième à la classe de première , comportent uniquement l'étude de la géométrie et de l'algèbre élémentaire". La classe de Mathématiques élémentaires comportait en plus une première étude de l'arithmétique théorique et, en géométrie, certaines "tranformations" et l'étude des coniques. Mais surtout, on y ajoutait de la Géométrie descriptive, de la cinématique, de la dynamique, de la statique des corps solides et de la cosmographie. La mathématique pure était donc encore presque réduite à une algèbre très élémentaire et à la géométrie.

L'Algèbre, telle qu'elle était conçue, se prêtait peu à des innovations. Tout au plus voit-on Carlo Bourlet, en 1896, introduire dans ses "Leçons d'Algèbre Elémentaire" pour la première fois, dans un ouvrage didactique, l'exposé complet, en tête de l'Algèbre, de la théorie des nombres négatifs. Le programme officiel de 1902 devait entériner - pour la classe de Mathématiques élémentaires - cette manière de voir. Devant l'étroitesse du programme, les professeurs, comme toujours en pareil cas, se lancèrent dans les subtilités. C'est, par exemple, cette maladie contagieuse appelée trinomite par l'Inspecteur général Marijon. Et cependant "Sait-on l'Algèbre, pour s'être épuisé dans les chinoiseries qu'on a fait pulluler sur le second degré ?" comme l'écrira, en 1904, un collaborateur de l'Enseignement Mathématique.

Pour la Géométrie, c'est un peu la même chose. A la fin du siècle sévit "à l'usage des classes de mathématiques spécialistes", la Géométrie du triangle, discipline certes intéressante, mais domaine assez borné.

A la décharge de nos prédécesseurs, il faut dire que l'influence de Chasles faisait accorder à la Géométrie, sous tous ses aspects, la part du lion dans la formation mathématique, et que les candidats aux Grandes Ecoles et leurs professeurs, qui ne pouvaient guère s'aventurer trop loin de l'élémentaire, étaient presque obligés de tourner en rond.

Nous assisterons, un peu avant le dernier conflit, à une fièvre analogue, provoquée cette fois par l'étude des coniques.

Cependant, la Géométrie Elémentaire était toujours régentée, en France, par les Eléments de Géométrie de Legendre qui dataient de 1795 et reprenaient dans l'ensemble les errements de la Géométrie d'Euclide.

Une réaction contre cet état de choses est le fait de Charles Méray (1835-1911), professeur à la Faculté des Sciences de Dijon, qui a joué un rôle de premier plan dans l'histoire de l'Analyse. Ses Nouveaux Eléments de Géométrie parurent en 1874. Carlo Bourlet, qui adopta ses idées après 1900, remarque que Méray "renouvela toute la géométrie en la conformant aux idées modernes de la géométrie supérieure, qu'il ignorait ... La géométrie n'est au fond que l'étude du groupe des déplacements. Les déplacements fondamentaux, la translation et la rotation, doivent donc servir de base à son étude." La première tentative de Méray échoua dans l'indifférence. "Les premiers essais pédagogiques - entre 1876 et 1878 - furent brutalement arrêtés par l'esprit de routine", écrit Laisant en 1901. Dans un climat un peu plus favorable, l'ouvrage de Méray eut une seconde édition en 1903 et une troisième en 1906. Des expériences pédagogiques sur sa méthode eurent lieu à l'Ecole Normale d'Instituteurs d'Auxerre en 1898 et 1899, puis à celles de Dijon, Lyon, Albertville et à l'école primaire supérieure de Dijon.

"Convaincu que l'enseignement des mathématiques était trop abstrait et dogmatique", Carlo Bourlet rédigea après 1905, soit seul, soit en collaboration, plusieurs manuels qui s'appuyaient sur ces nouvelles conceptions. Mais il mourait accidentellement à Annecy, en Août 1913, et d'ailleurs la Grande Guerre allait surgir. Cet homme remarquable, qui fut avec C.A. Laisant (1841-1920) et Raoul Bricard (1870-1944) codirecteur des Nouvelles Annales, avait organisé à l'Ecole Normale Supérieure, lorsqu'il y était agrégé préparateur (1888-1901) un cours sur les Principes des Mathématiques, à l'usage des Philosophes. Ce cours fut suivi par Louis Couturat (1868-1914) dont "Les Principes des Mathématiques" (Paris 1905) firent connaître au public français les conceptions de Bertrand Russell (1872-1970). Laisant écrira dans la préface de la seconde édition (1907) de "La Mathématique" : "L'auteur déclare que la définition traditionnelle de la Mathématique, comme science de la quantité, est unanimement abandonnée et définitivement condamnée" et ajoute, citant C.S.S. Peirce (1839-1914) "que c'est à tort que l'on englobe dans la Mathématique certaines sciences déductives, comme la Géométrie et la Mécanique".

Laisant juge les idées de Couturat inoffensives, à la seule condition de ne pas pénétrer dans l'enseignement. Elles y ont pénétré, un demi-siècle plus tard.

D'ailleurs, en lisant les articles de nos prédécesseurs du début du siècle, on les sent à bien des égards très proches de nous. Et tout d'abord, leur culture est remarquable. Ils sont, par exemple, au fait des derniers problèmes ou paradoxes de la Théorie des ensembles, et le nom de l'un d'entre eux, Jules Richard (1862-1956), reste attaché à une célèbre antinomie. Lorsqu'il la proposa, en 1905, il enseignait à Dijon et fréquentait Méray.

La forte culture de ces professeurs ne leur fait pas perdre de vue leur métier, et on les trouve perpétuellement partagés entre les besoins de la rigueur mathématique, les impératifs de la logique, et le souci de rester "naturels", intuitifs, presque évidents, pour se faire comprendre et surtout aimer des élèves.

"Le problème est éternellement le même, écrit encore Laisant, intéresser l'élève, le provoquer à la recherche, lui donner sans cesse le sentiment (l'illusion si l'on veut) qu'il découvre lui-même ce qui lui est enseigné", et il ajoute : "Il faut, pour la réussite, un certain nombre de conditions : la première, et la plus importante, c'est, de la part du professeur quel qu'il soit, le goût et l'amour de l'enseignement".

C'est dans ce climat, qui malgré les inégalités sociales criantes, est celui d'une "belle époque" d'intelligence et d'imagination créatrices, que parurent les programmes de 1902 de l'enseignement secondaire, revus en 1905. Nous en avons signalé les faiblesses, mais les instructions de 1905 rappellent la règle d'Or dont nous devons refuser de nous écarter : "Toute latitude est laissée au professeur pour adopter tel ordre qui lui conviendra, pour employer les méthodes qui lui paraîtront les plus profitables aux élèves qu'il dirige".

"Dans le second cycle, les études auront pour sanction le baccalauréat, le professeur doit naturellement exposer tout ce qui figure au programme. Dans le premier cycle, il ... n'a pour guide que le développement de ses élèves ; il peut donc, s'il le juge utile, négliger certains points et insister ... sur les parties plus accessibles ou plus nécessaires aux élèves particuliers qui lui sont confiés ..."

Vint la guerre, le massacre des jeunes intellectuels, l'après-guerre, le décret de 1923 rendant le latin et le grec obligatoires dans le premier cycle et, par suite, l'accès au baccalauréat impossible aux élèves issus du Primaire Supérieur. Il n'entra heureusement pas en application, mais les programmes de 1925 créaient "l'égalité scientifique" et abaissaient le niveau des études.

Cela ne faisait cependant que freiner l'évolution et, dans leur rapport de 1932, nos collègues Desforges et Iliovici signalaient que "l'enseignement de la Géométrie s'est modifié d'une façon sensible depuis une trentaine d'années par l'introduction des notions de géométrie orientée, des transformations fondamentales du plan et de l'espace, dont l'étude prend légitimement une place de plus en plus importante, et même, tout récemment par l'apparition, encore timide à vrai dire, de quelques éléments de la Géométrie des vecteurs. Il ne s'agit ici que des classes secondaires proprement dites. Les notions de géométrie vectorielle figurent depuis quelques années en Mathématiques Spéciales et des méthodes vectorielles sont aujourd'hui fréquemment utilisées dans ces classes."

Cependant si le calcul vectoriel, création des physiciens du XIXème sicèle, entrait ainsi timidement dans l'enseignement secondaire, la logique mathématique, qui date de 1850, les conceptions ensemblistes, apparues vers 1880, enfin la mathématique moderne, que les professeurs connaissaient bien, marquait le pas devant la porte. Le mouvement Bourbakiste, né à Normale Supérieure, et qui commença à publier ses fascicules en 1939, allait faire une heureuse synthèse des acquis des XIXème et XXème siècles, et s'imposer peu à peu par le haut. Il inspire d'abord l'enseignement supérieur, puis force la porte des classes de Mathématiques Spéciales, le Second Cycle, enfin le premier cycle, où il se conjugue avec un renouveau de la pédagogie qui vient de l'Enseignement maternel.

Ceci amène les remous et les brassages que vous connaissez.

"Tout changement des programmes, disait, non sans humour, Emile Borel (1871-1956) au Congrès de Paris en 1914, doit nécessairement échouer, ou du moins avoir les apparences d'échouer, par la simple raison que la masse des professeurs ne peut arriver du premier coup à une technique pédagogique aussi bonne pour les matières nouvelles que la technique traditionnelle l'était pour les anciennes. Mais la contre-partie de cette constatation pessimiste n'est pas moins exacte : s'il est vrai que l'essentiel dans l'enseignement secondaire est moins le programme que la méthode, tout changement de programmes doit en définitive donner de bons résultats, après que l'on aura su créer les méthodes appropriées aux matières nouvelles".