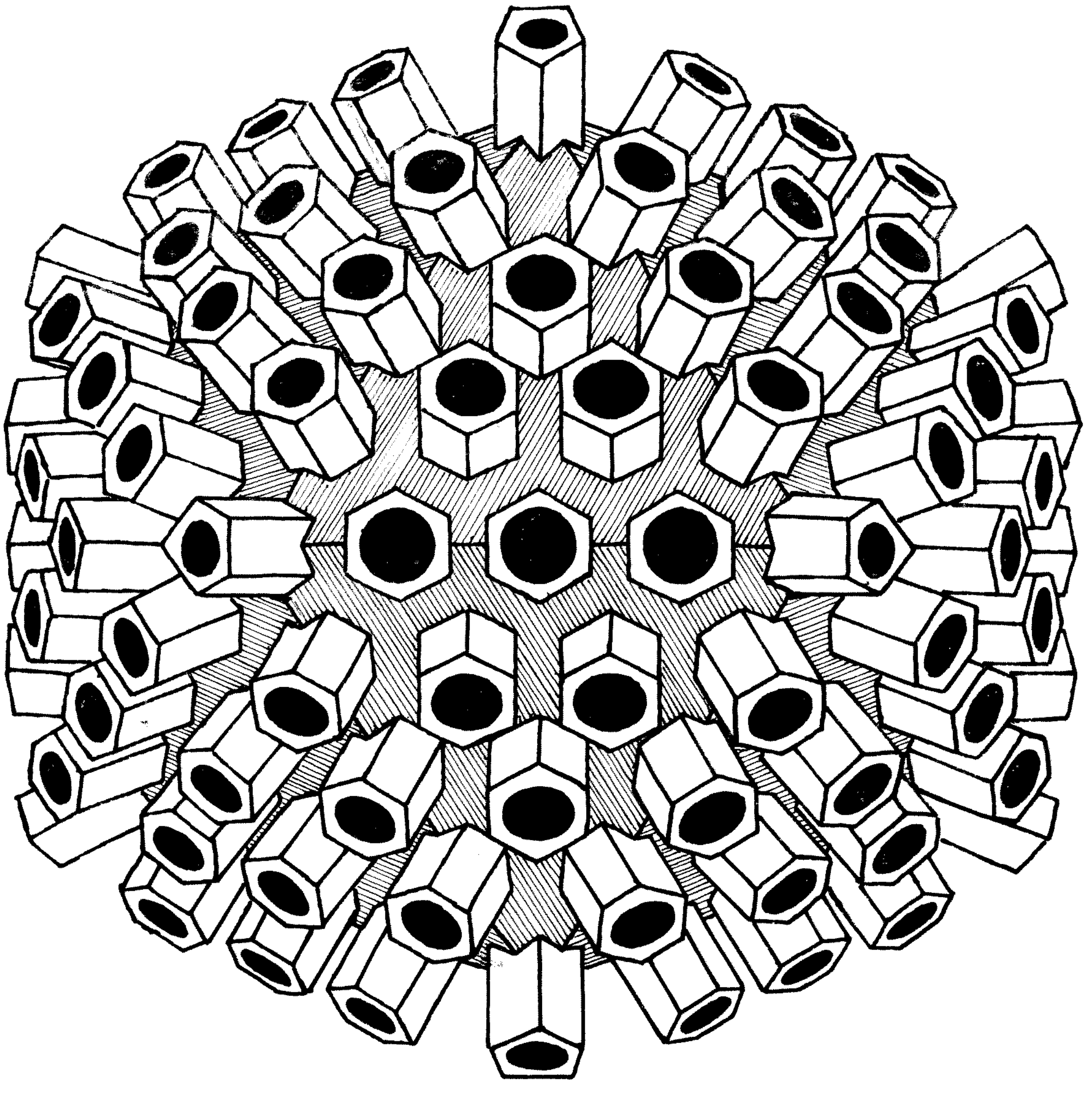
l'ouvert n°10



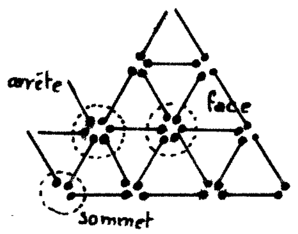
Notre couverture : Modèle de srtucture du virus de l'herpès. Sa capsule protéïque (capside) a la forme d'un icosaèdre régulier. Chaque face triangulaire porte un même nombre de capsomères (162 au total). Le diamètre du virus est de l'ordre du dixième de micron. Les capsomères ont la forme de prismes hexagonaux long de 120 à 125 Å , d'une largeur de 95 Å parcouru par un canal d'un diamètre de 40 Å .

A propos de la couverture :

Virus & Icosaèdre

LES VIRUS : La plus part des virus ont une forme approximativement sphérique et un grand nombre d entre eux présentent une structure rigide à symétrie cubique : il s'agit le plus souvent d'un icosaèdre ; les plus petits des virus ont parfois une structure simplifiée de dodécaèdre ou même de tétraèdre. Leur taille varie de 120 Å pour les plus petits à 250 mμ pour les plus gros. C'est la microscopie électronique qui révèle la structure de certains virus : on vaporise sur leur surface des atomes d'or de façon à les rendre opaques aux électrons et c'est l'ombre projetée qui est photographiée. Une connaissance précise des propriétés métriques des différents solides réguliers est alors nécessaire pour rétablir le volume à partir de ses projections.

On explique la formation des capsomères d'un virus par la convergence d'éléments bipolaires, ce qui implique une structure hexagonale sur les faces et les arrêtes, pentagonale aux sommets. En admettant ce dernier résultat, en déduire que le nombre N de capsomères d'un virus à symétrie icosaèdrique est donné par la formule (formule de Vasquez et Tournier) :

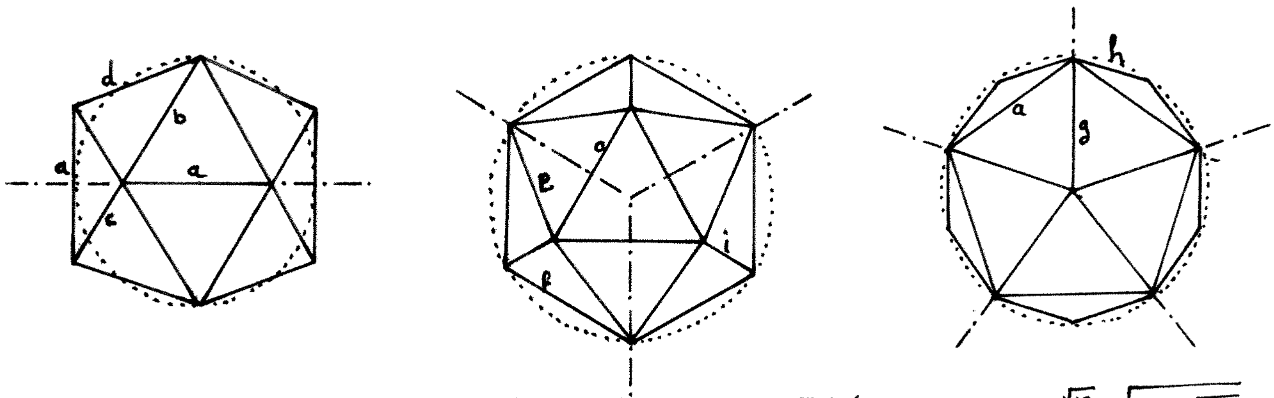


$$N = 10\,(n-1)^2 + 2$$

qui est vérifiée pour n compris entre 2 et 10 .

L' ICOSAEDRE : C'est un solide à 20 faces, 30 arrêtes et 12 sommets. Si on prend comme unité la longueur d'une arrête de l'icosaèdre régulier, le rayon de la sphère circonscrite est : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

On a représenté ci-dessous, trois vues de ce solide : selon une arrête, selon une face et selon un sommet. Les dimensions des projections des arrêtes sont données.



$a = 1$ $\qquad c = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ $\qquad e = \sqrt{6}/3$ $\qquad g = \frac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}$

$b = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ $\qquad d = \sqrt{3}/2$ $\qquad f = (\sqrt{5}+1)\,\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\qquad h = \frac{\sqrt{10}}{10}\sqrt{5-\sqrt{5}}$

$i = (\sqrt{5}-1)\,\frac{\sqrt{3}}{6}$ $\qquad$ l'angle de deux faces vaut 2φ avec $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{5}+1)$

SOMMAIRE

page

Une méthode géométrique pour une classe de problèmes combinatoires par monsieur Ehrhart 1

Le LTE Louis Couffignal de Strasbourg par l' APMEP 8

Exercices d'analyse (compléments) par Bronner 12

Réflexions sur les problèmes du BEPC par Bardelang, Klein Levy et Riehl 20

Le rallye mathématique : Une réussite ? 24

Divertissements mathématiques par Becker et Brombeck . . . 30

Le problème des 3 corps : un cas simple ! par Martinet ... 33

A PROPOS DE LA COUVERTURE : VIRUS & ICOSAEDRE III

Une méthode géométrique pour une classe de problèmes combinatoires

Conférence faite par M. EHRHART à la Régionale Parisienne.

Quelques exemples numériques simples seront, je pense, plus clairs qu'un exposé systématique. D'après leur difficulté, nous distinguerons deux sortes de problèmes, suivant que leur domaine polyédrique est entier ou seulement rationnel.

I. - Problèmes à domaines entiers

Problème d'échange de monnaie. - De combien de manières peut-on payer un montant de n francs en monnaie? (C'est à dire, par convention, en pièces de 10, 20, 50 et 100 centimes.)

Il s'agit de trouver le nombre j_n de solutions entières du système :

$$10X + 20Y + 50Z + 100T = 100n \ , \quad X, Y, Z, T \geqslant 0.$$

Géométriquement ce système définit un tétraèdre P_n dont j_n est le nombres de points entiers (c'est à dire dont les coordonnées appartiennent à Z). Le polyèdre P_n est l'image de P_1 dans l'homothétie $(0,n)$ centrée à l'origine.

On voit facilement que P_1 est entier(c'est à dire que ses sommets sont des points entiers). Or, d'après un de mes théorèmes, le j_n de tout polyèdre à 3 dimensions est un polynome du 3° degré. Notre j_n est donc donné par la formule d'interpolation de Newton :

$$j_n = \binom{n}{3}(j-1)^{(3)} + \binom{n}{2}(j-1)^{(2)} + \binom{n}{1}(j-1)^{(1)} + j_0 \ , \quad j^r \sim j_r$$

où la puissance symbolique signifie que, dans le développement tout j_r est à remplacer par j_r. Or, pour n = 0, 1, 2, 3 on compte par le système ou dans P_n j_n = 1, 11, 40, 98. La formule précédente fournit alors :

$$j_n = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)(5n+6).$$

Maintenant un fait qui est, je crois, intéressant. Si l'on veut que chaque espèce de pièces figure dans le paiement, il faut remplacer dans le système $\geqslant$ par $>$, et donc le j_n du polyèdre fermé par le dénombrant i_n du polyèdre ouvert. D'après un de mes théorèmes, il suffit alors de changer dans le polynome j_n le signe de la variable d'homogénéité, ce qui donne instantanément :

$$i_n = \frac{1}{6}(n - 1)(2n - 1)(5n + 6).$$

Ce problème illustre le théorème suivant :

<u>Théorème des polyèdres entiers</u>. - Pour tout polyèdre fermé entier homothétique P_n (n entier positif) de dimension d, quelle que soit sa nature topologique :

1° le dénombrant j_n des points entiers est un polynome de degré d ;

2° la formule de Newton donne ce polynome à l'aide de quelques valeurs initiales ;

3° les polynomes dénombrants i_n et j_n du polyèdre, respectivement ouvert ou fermé, vérifient la loi de réciprocité : $i(n) = (-1)^d j(-n)$.

Signalons déjà que cette curieuse, simple et utile loi de réciprocité s'applique aussi aux polyèdres rationnels. Pour les polyèdres entiers de moins de quatre dimensions, on peut remplacer la formule de Newton par des formules géométriques. En voici deux exemples.

<u>Problème de sous-réseau</u>. - Le quadrilatère P_1 de la figure 1 est entier dans un réseau centimétrique. Question : Quel est le nombre de ses points internes ou périphériques qui sont entiers dans le sous-réseau millimétrique?

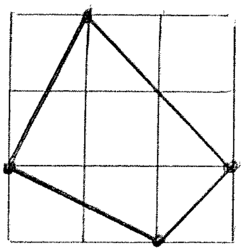
Cela revient à chercher le dénombrant j_{10} du quadrilatère fermé P_{10}, image de P_1 dans l'homothétie (0, 10). Or pour tout polygone entier :

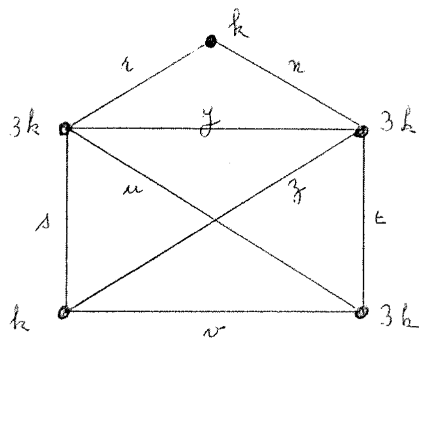
$$j_n = Sn^2 + \frac{l}{2} n + 1.$$

Ici l'aire "réticulaire" de P_1 est $S = 9/2$ (l'unité d'aire est celle du carré de base du réseau) et son périmètre réticulaire est $l = 5$ (les points entiers de chaque droite-côté forment un sous-réseau dont la maille est l'unité de longueur sur ce côté). D'où :

$$j_{10} = \frac{9}{2}\,100 + \frac{5}{2}\,10 + 1 = 476.$$

<u>Problème de valuations d'un graphe</u>. - Considérons le graphe de la figure 2, valuer ce graphe c'est doter chaque sommet ou arc d'un nombre entier non négatif, sa valeur.





Les valeurs paramétrées des sommets étant imposées comme l'indique la figure, on demande : quel est le nombre de valuations des arcs, telle que la valeur de tout sommet soit égale à la somme des valeurs des arcs incidents?

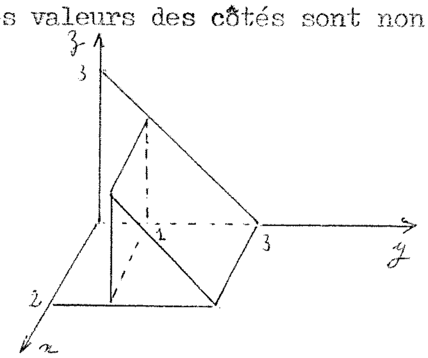
Les 8 valeurs inconnues des arcs étant liées par 5 relations linéaires d'incidence, on peut les exprimer en fonction de trois d'entre elles, soient x, y, z :

$r = k - x, \quad t = 3k - x - y - z, \quad u = \frac{k}{2} + x + z, \quad s = \frac{3k}{2} - y - z, \quad v = \frac{-k}{2} + y.$

1° k impair : le problème est impossible comme le montre la dernière équation.

2° k pair : on pose $k = 2n$. En écrivant que les valeurs des côtés sont non négatives, on obtient alors le système :

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{l} x,\ y,\ z \geqslant 0 \\ x \leqslant 2n\ ,\ y \geqslant n \\ y + z \leqslant 3n \\ x + y + z \leqslant 6n \end{array} \right.$$



Le domaine P_n de ce système est pour $n = 1$ le prisme entier fermé P_1 ci-dessus. Or, d'après un de mes théorèmes, le dénombrant j_n de tout polyèdre homothétique P_n entier, fermé et homéomorphe à une sphère est :

$$(2) \qquad j_n = Vn^3 + \frac{S}{2} n^2 + \Delta . n + 1.$$

V est le volume réticulaire de P_1 (le volume du cube de base du réseau sert d'unité), donc ici $V = 4$. Le S désigne l'aire réticulaire de P_1 (dans chaque plan-face les points entiers forment un sous-réseau, dont la maille donne l'unité d'aire pour cette face). Or, d'après un de mes théorèmes, pour tout polyèdre entier homéomorphe à une sphère : $S = b - 2$, b étant le nombre de points entiers du bord de P_1. Donc ici $S = 18 - 2 = 16$. Par définition, Δ ("excès" de P_1) est :

$\Delta = i + \frac{b}{2} - V$, où i désigne le nombre de points entiers internes de P_1. Donc ici, $\Delta = 0 + \frac{18}{2} - 4 = 5$. La formule (2) donne alors :

$$j_n = (n + 1)(2n + 1)^2.$$

Et si les valeurs des arcs du graphe doivent être strictement positives ? Dans le système (1) le signe $\geqslant$ est remplacé par $>$. Donc j_n est remplacé par le dénombrant i_n des points entiers internes de P_1. La loi de réciprocité donne immédiatement : $i_n = (n - 1)(2n - 1)^2$.

Remarque. — La méthode des polyèdres ne donne pas seulement le nombre des solutions. Pour une valeur numérique du paramètre, elle fournit aussi toutes les solutions. Dans le problème précédent par exemple, il suffit de prendre dans le prisme P_n les points entiers l'un après l'autre et de porter chaque fois dans (1) le triplet x, y, z correspondant.

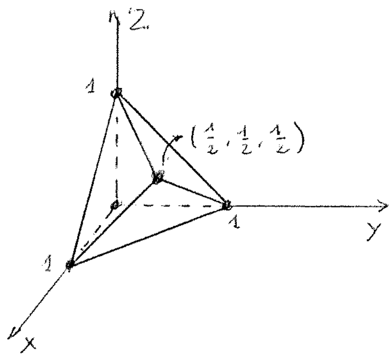
11. - Problèmes à domaines rationnels

Nous appelons ici carré magique (3, n) toute matrice 3x3 dont les éléments sont des entiers non négatifs, tels que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne soit égale à n. (Contrairement à ce qui se passe pour les carrés magiques historiques , on ne considère pas la somme des éléments d'une diagonale, et on n'exige pas que les éléments soient les entiers de 1 à 9.)

<u>Problème des carrés magiques (3, n), symétriques par rapport à la première diagonale.</u> Combien y en a-t-il ?

Toute matrice de cette famille est de la forme :

$$\begin{Vmatrix} n - X - Y & X & Y \\ X & n - X - Z & Z \\ Y & Z & n - Y - Z \end{Vmatrix}$$



En écrivant que ses éléments sont non négatifs, on obtient le système : $X, Y, Z \geqslant 0$, $X + Y$, $Y + Z$, $Z + X \leqslant n$.

Le nombre cherché j_n est donc le dénombrant du polyèdre fermé P_n défini par ce système, image de l'hexaèdre P_1 ci-dessus dans l'homothétie (0, n). Or P_1 est rationnel (ses sommets sont des points rationnels, c'est à dire à coordonnées rationnelles).

Pour la suite nous avons besoin de deux définitions :

Définitions :

1° Le dénominateur d'un point rationnel est le plus petit commun multiple des dénominateurs de ses coordonnées irréductibles.

2° Le produit sommital d'un polyèdre rationnel P_1 est :

$$\pi(t) = (1 - t^{a_1})(1 - t^{a_2})\ldots(1 - t^{a_n})$$

où les a_i sont les dénominateurs des sommets de P_1 (c'est un produit formel, t n'ayant pas de signification).

Dans notre exemple les dénominateurs des sommets de P_1 sont 1, 1, 1, 1, 2 et donc : $\Pi(t) = (1-t)^4(1-t^2)$.

Un théorème de réduction, que nous n'énoncerons pas ici, permet d'y supprimer un facteur $1-t$, ce qui donne le produit sommital réduit :

$$\Pi'(t) = (1-t)^4(1+t) = 1 - 3t + 2t^2 + 2t^3 - 3t^4 + t^5.$$

D'où immédiatement, par un de mes théorèmes, une relation de récurrence linéaire pour j_n :

$$\{\Pi'(j)\} = 0 \qquad j^r \sim j_{n-r}$$

les accolades signifiant que, dans le polynome $\Pi'(t)$ effectué, on remplace toute puissance j^r par j_{n-r} ; donc ici

$$j_n - 3j_{n-1} + 2j_{n-2} + 2j_{n-3} - 3j_{n-4} + j_{n-5} = 0,$$

On en déduit que j_n a une fraction rationnelle génératrice :

$$F(t) = \frac{f(t)}{\Pi'(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} j_n t^n$$

où le polynome $f(t)$ est de moindre degré que $\Pi'(t)$. Comme pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, on compte dans P_n respectivement $j_n = 1, 4, 11, 23, 42$, on a :

$$f(t) = (1+4t+11t^2+23t^3+42t^4+\ldots)(1-3t+2t^2+2t^3-3t^4+\ldots) = 1 + t + t^2$$

en ne formant que les termes de degré inférieur à 5. Par suite :

$$F(t) = \frac{1+t+t^2}{(1-t)^4(1+t)} = \frac{3}{2(1-t)^4} - \frac{3}{4(1-t)^3} + \frac{1}{8(1-t)^2} + \frac{1}{16(1-t)} + \frac{1}{16(1+t)}$$

En considérant le terme en t dans le développement en série de chaque élément, on obtient donc :

$$j_n = \frac{3}{2}\binom{n+3}{3} - \frac{3}{4}\binom{n+2}{2} + \frac{n+1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{[-1,\ 1]}{16}$$

où $[-1,\ 1]$ est par définition égal à (-1) ou à 1, suivant que n est impair ou pair.

Ou encore :

$$(3) \quad j_n = \frac{2n^3 + 9n^2 + 14n + [7,\ 8]}{8} = \left\| \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 7)}{8} \right\|$$

les doubles barres désignant l'entier le plus proche. (La différence entre les deux fractions est en effet inférieure à $\frac{1}{2}$).

<u>Problème des carrés magiques (3, n) positifs</u> (c'est à dire à éléments positifs), <u>symétriques par rapport à la première diagonale</u>. Combien y en a-t-il ?

La loi de réciprocité donne immédiatement leur nombre à partir de (3) :

$$i_n = \left\| \frac{(n-1)(2n^2 -7n +7)}{8} \right\|$$

Pour pouvoir énoncer des résultats généraux, il nous faut au préalable poser encore deux définitions :

Définitions :

1° Un nombre périodique $u_n = \left[a_1, a_2, \ldots, a_k\right]$ est le nième terme d'une suite périodique, dont on a écrit la première vague dans les crochets (la période est donc k).

exemple : pour les valeurs entières de n, $\cos \frac{2\pi n}{3} = \frac{\left[-1, -1, 2\right]}{2}$.

2° Un polynome mixte diffère d'un vrai polynome en ce que certains coefficients sont des nombres périodiques de la variable. (Un polynome mixte j_n est donc une suite, puisqu'il n'est défini que pour n entier. Nous l'appelons mixte, parce qu'il prend ses valeurs à l'aide de plusieurs polynomes.)

Le problème précédent est une application du théorème général suivant.

Théorème des polyèdres rationnels.- Pour tout polyèdre fermé rationnel homothétique P_n de dimension d et de produit sommital $\pi(t)$, quelle que soit sa nature topologique :

1° le dénombrant j_n des points entiers vérifie la relation de récurrence linéaire : $\left\{\pi(j)\right\} = 0, \quad j^r \sim j_{n-r}$;

2° j_n est un polynome mixte de degré d (réduit à un vrai polynome si P est entier);

3° on en déduit la fonction j(n) explicitement par une fraction rationnelle génératrice, à l'aidede quelques valeurs initiales ;

4° les dénombrants i_n et j_n du polyèdre, respectivement ouvert ou fermé, vérifient la loi de réciprocité : $i_n = (-1)^d \, j(-n)$.

Remarques :

1° Le calcul de j_n par le développement en série de sa fraction génératrice, décomposée en éléments simples, peut être pénible. Heureusement, nous avons pu mettre au point une autre décomposition, qui évite dans ce calcul tout recours aux nombres complexes et à la trigonométrie. Voir E. Ehrhart, "Polynomes arithmétiques et méthodes des polyèdres en combinatoire", brochure de 150 pages imprimées en 1975 à Strasbourg par l'I.R.M.A. (Institut de Recherche de Mathématique Avancée).

2° Par la méthode des polyèdres, on trouve le nombre des carrés magiques suivants : carrés magiques (3, n), $j_n = \frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2 +3n +4)$; carrés magiques (c, n) , j_n est un polynome de degré $(c-1)^2$; carrés magiques (3, n) symétriques par rapport aux deux diagonales : $j_n = \frac{1}{8}(n + [1, 2])(3n + [5, 4])$; carrés magiques positifs (4, n) symétriques par rapport aux deux diagonales, $i_n = \binom{n}{4}$; carrés pseudo-magiques (2, n) c'est à dire matrices 2×2 à éléments entiers non négatifs, tels que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne soit au plus n : $j_n = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n^2 + 3n + 3)$; carrés magiques (3, n) où la somme des éléments de chaque diagonale vaut aussi n :si $n \neq 3k$ il n'y a pas de solution, si $n = 3k$ $j_n = 2k^2 + 2k + 1$; carrés magiques historiques (3, 15) (la somme des éléments de chaque diagonale vaut aussi 15, et les éléments sont juste les entiers de 1 à 9) : à une symétrie et des rotations près, il n'y en a qu'un seul :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Il est connu en Chine depuis 4000 ans !

"L'Ouvert" : Responsable de la publication : Jean Lefort , 22 rue A. Schweitzer Wintzenheim, 68000 Colmar.
Impression : IREM de Strasbourg, 10 rue du Général Zimmer, 67084 Strasbourg.

A partir de cet année, un comité de rédaction s'occupe de l'Ouvert. Ce comité est composé de : Michel CAMBAS, Michel de COINTET, Jean-Luc GUIARD, jean LEFORT Charles MORITZ, Jean-Claude SIDLER .

Dès le 15 Novembre 1976, une permanence de l'Ouvert sera tenu au Département de mathématique de l' U.L.P, bureau 216, 6 rue Descartes à Strasbourg. La permanence sera ouverte les mercredis de 14 heures à 16 heures.

Le L.T.E. Louis Couffignal de Strasbourg

C'est au mardi 16 mars 1976 qu'était fixée la visite du Lycée organisée par l'A.P.M. Alsace. Monsieur Danguillaume, Proviseur, accueillit fort aimablement le groupe des visiteurs en salle du Conseil. Après avoir résumé les grandes lignes de ce qu'est l'Enseignement technique en France, Mr Danguillaume insista sur la nécessaire coordination entre l'enseignement général et l'enseignement technologique. Ce fut à monsieur Bauer, Censeur, que revint la charge d'expliquer la structure interne du lycée; il s'en acquitta avec la maîtrise que tout le monde lui reconnaît. Pendant près d'une heure, traçant et commentant l'organigramme du lycée, il sut captiver l'attention des collègues; disséquant la structure interne du lycée, le Censeur mit en évidence les trois branches constituant l'enseignement donné au lycée: E , F , T.I. .

E débouche sur le baccalauréat math et technique (bacc E).

F (F_1,F_2,F_3,F_9) mènent au baccalauréat de technicien: mécanique, électrotechnique, électronique ou génie civil.

T.I. conduit au brevet de technicien (collaborateur d'architecte -CA- ou métiers du bois -MB- (ameublement).) ;

Quels sont les débouchés de ces trois branches ?

E : facultés, classes préparatoires types math sup, math spéc.
classes préparatoires math sup technologique qui conduisent aux Arts et Métiers ou a l'E.N.S.E.T. B(mécanique).
I.U.T. ou B.T.S.

F : vie active ou, pour certains élèves de la section ameublement: école Boule à Paris ou école du bois à Mouchard.

T.I. : voir ci-dessus.

L'organigramme vous donnera un aperçu de tous les débouchés et de toutes les filières possibles. Le Collège quant à lui prépare au C.A.P. en trois ans ou au B.E.P. en deux ans.

Débouchés

E
- → Facultés
- → Préparatoires traditionnelles
- → Préparatoires technologiques → A.M. & E.N.S.E.T. B
- → I.U.T.

(cycle long)

- → B.T.S. (T.P. - B.A. - E.L. - E.T. - F.M. - B.E.)

(cycle court)

B.Tn
- → I.U.T. (voie peu conseillée car l'élève ne conserve pas le bénéfice de son acquis technologique)
- → B.T.S.
  - → F_1 : F.M. - B.E.
  - → F_2 : E.L.
  - → F_3 : E.T.
- → V.A.

B.T.
- → C.A. → B.T.S. bâtiment
- → M.B.
  - → B.T.S. bâtiment
  - → B.T.S. Boule / B.T.S. Mouchard
- → V.A.

T.P.	:	Travaux Publics
B.A.	:	Bâtiment
E.L.	:	Electronique
E.T.	:	Electrotechnique
F.M.	:	Fabrication mécanique
B.E.	:	Bureau d'études
B.T.S.	:	Brevet de Technicien Supérieur
V.A.	:	Vie active
A.M.	:	Arts et Métiers, E.N.S.A.I.S., Clichy (électricité), Sèvres (céramique)
E.N.S.E.T. B	:	mécanique

La présentation et l'explication détaillée de l'organigramme furent suivies d'une visite guidée des ateliers de l'établissement, partie combien importante du lycée car c'est là que les élèves acquièrent leur culture technologique; visite commentée par le Censeur en passant par les différents ateliers de tournage, fraisage, ajustage, métaux en feuilles, mécanique auto, menuiserie, électricité, électronique.
Que retenir de cette visite? Tout d'abord le vaste éventail des possibilités offertes à un élève entrant au lycée, tant vers les enseignements supérieurs (général ou technologique) que vers la profession; ensuite le sérieux du travail à l'atelier. Signalons que nos collègues se plaignent, à juste titre, d'un manque de coordination entre les deux enseignements; à ce propos, une refonte de l'enseignement des mathématiques dans les branches F en particulier est fort souhaitable; notre enseignement ou du moins son programme ne correspond pas à ce que les élèves entrevoient dans les classes supérieures. Une réunion des professeurs de mathématiques de l'enseignement technique (classes F et T.I.) serait utile dans

le cadre de l'A.P.M., pour se concerter sur ce problème, simple suggestion.

Notons encore que le nombre relativement restreint des participants est un signe évident des charges dûes à notre profession; il n'empêche que pour le groupe des visiteurs cette visite fut, à plus d'un point de vue, fort bénéfique.

Les différents passages possibles

Math. Spéc. technologique → <u>A. M.</u> - <u>E. N. S. E. T. B</u> - <u>E.N.S.A.I.S.</u> - <u>Clichy</u> - <u>Sèvres</u>
si échec : → 2° année de B.T.S. (structure à l'étude)

T. S. → Concours : Ecoles d'ingénieurs: Marseille - I.N.S.A. - I.N.S.I.N. etc , 4ans mais recrutement en 2° année.
E. N. S. E. T. (B_1, B_2, B_3, B_4)

T. S. → Industrie (3 ans de pratique) → ⋈ Ecole préparatoire (1 an, élève payé au S.M.I?C.) ⋈ Ecole d'ingénieurs (18 mois) ⋈

B.Tn
B.T. → <u>T. S.</u> → Industrie (3 ans de pratique) → ⋈ Ecole préparatoire
<u>T. S.</u> → V. A.

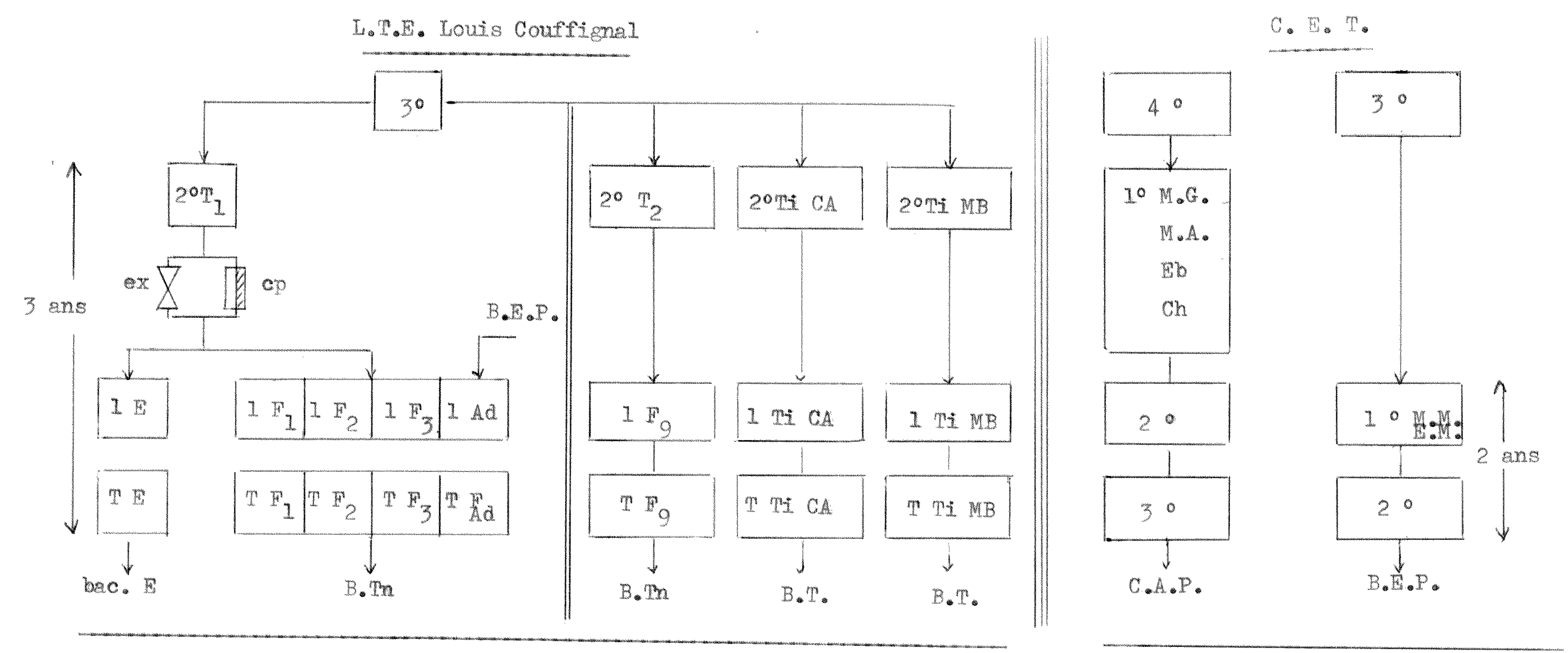
<u>C. A. P.</u> → V. A.
<u>C. A. P.</u> → 2° de reconversion

<u>B. E. P.</u> → V. A.
<u>B. E. P.</u> → 1° d'Adaptation (E.M.) (1° Ad F_3) → TF_3 Ad → B.Tn

⋈ : concours

I.N.S.A. : Institut National des Sciences Appliquées

I.N.S.I.N. : Institut National des Sciences et Industries de Nancy



Abréviations:

cp : conseil des professeurs
ex : examen
Ad : classe d'adaptation, élèves venant d'un C.E.T. titulaire d'un B.E.P.
B.Tn : bac. de technicien (F_1, F_2, F_3, F_9)
M.G. : mécanique générale
M.A. : mécanique auto
Eb : ébéniste
Ch : chaudronnerie (métaux en feuilles)
E.M. : électromécanicien
M.M. : mécanicien monteur
CA : collaborateur d'architecte
MB : métier du bois

Exercices d'analyse (compléments)

Les exercices qui suivent se rapportent au stage sur l'analyse des 26 et 27 novembre 1975, ils nous ont été obligeamment fournis par Monsieur Bronner, I.P.R.

1- Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall a \in R \ , \ \forall x \in R \ , \quad |f(x+a) - f(x)| \leqslant a^2 \ .$$

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution:

La propriété (P) est équivalente à: $\forall a > 0$, $\forall x \in R$, $\left|\dfrac{f(x+a) - f(x)}{a}\right| \leqslant a$,

on en déduit que, s'il existe une fonction f vérifiant (P), f est dérivable en tout point $x \in R$ et $f'(x) = 0$ quel que soit x; autrement dit f est constante sur R.

Détermination des solutions:

Toute fonction constante sur R vérifie (P); les solutions sont les fonctions constantes sur R.

2- Déterminer les fonctions f de R dans R vérifiant la propriété (P):

$$\forall a \in R_+ \ , \ \forall x \in R \ , \quad f(x + a^2) \geqslant f(x) + a \ .$$

Conditions nécessaires à l'existence d'une solution:

Supposons qu'il existe une solution f, on a, quel que soit $n \in N^*$,

$f(1 + 1/n^2) \geqslant f(1) + 1/n$, $f(1 + 2/n^2) \geqslant f(1 + 1/n^2) + 1/n$, et plus généralement: $f(1 + p/n^2) \geqslant f(1 + (p-1)/n^2) + 1/n$, quel que soit $p \in N^*$, donc

$$\sum_{p=1}^{p=n^2} f(1 + p/n^2) \geqslant \sum_{p=1}^{p=n^2} f(1 + (p-1)/n^2) + n \ ,$$ soit après

simplification: $f(2) - f(1) \geqslant n$, ce qui est impossible puisque n peut être choisi arbitrairement.

Il n'existe pas de fonction f vérifiant (P).

3- Etudier la fonction numérique d_1 déterminée par $d_1(x) = d(1 \ ; \ xZ)$. (voir N.B.)

La fonction d_1 est définie quel que soit $x \in R$, c'est une fonction paire, $d_1(0) = 1$.

Pour chaque $x > 0$, il existe un unique $p \in N$ tel que: $px \leqslant 1 < (p+1)x$

(p est la partie entière de $1/x$),

N.B. la notation $d(1 \ , \ xZ)$ désigne le plus petit élément de l'ensemble $|1 - xq|$ lorsque q décrit Z, le nombre réel x étant fixé.

si $(p + 1/2)x \geqslant 1$, $d_1(x) = 1 - px$

si $(p + 1/2)x \leqslant 1$, $d_1(x) = (p + 1)x - 1$

on en déduit:

a) Pour $x > 1$, $p = 0$ donc

$$\text{si } x \geqslant 2 \text{ , } d_1(x) = 1$$

$$\text{si } x \in \left]1 \text{ , } 2\right] \text{ , } d_1(x) = x - 1.$$

b) Pour $0 < x \leqslant 1$, $p \neq 0$ donc

$$\text{si } x \in \left[\frac{1}{p + 1/2} \text{ , } \frac{1}{p}\right] \text{ , } d_1(x) = 1 - px$$

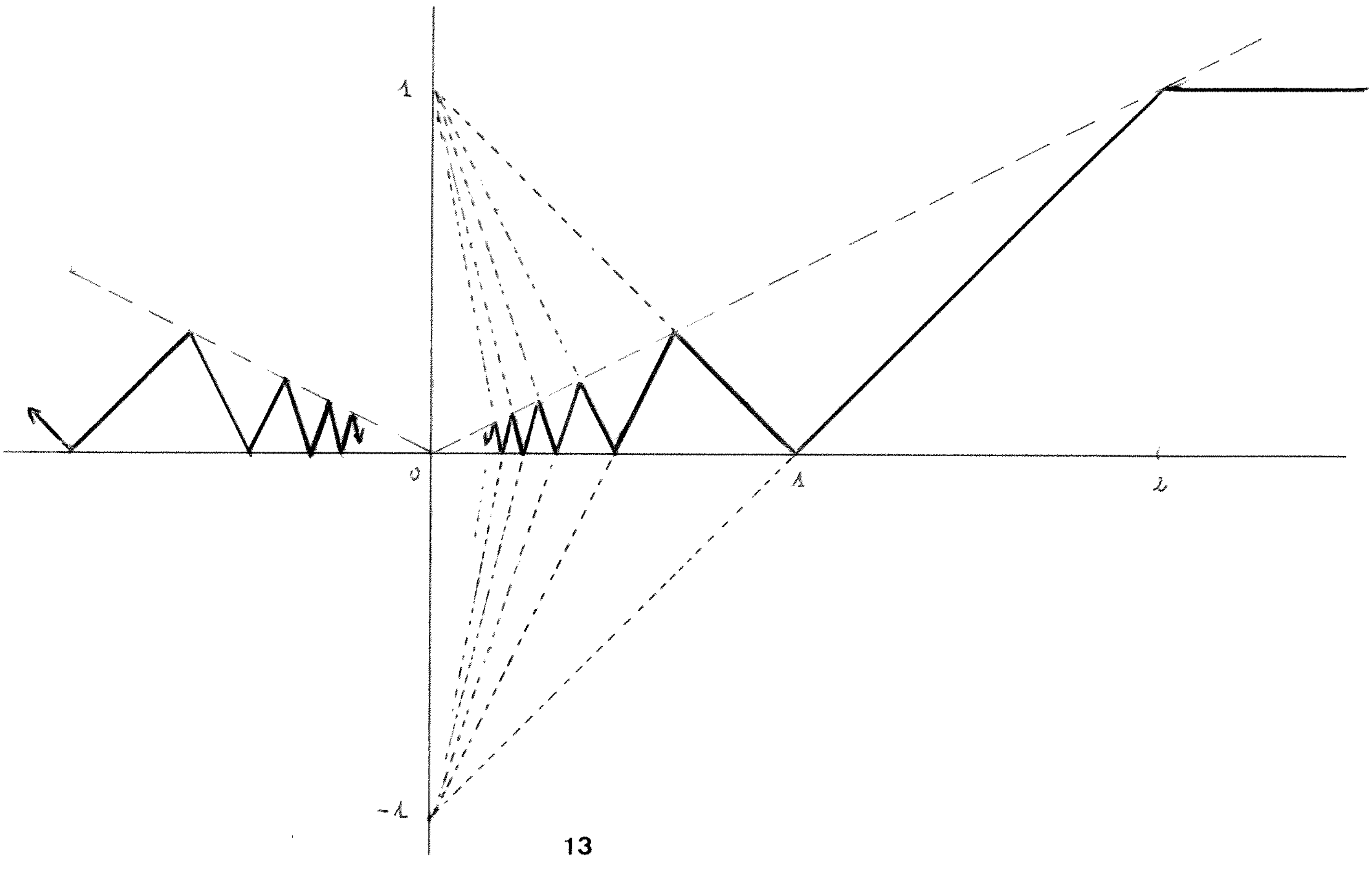
$$\text{si } x \in \left]\frac{1}{p + 1} \text{ , } \frac{1}{p + 1/2}\right] \text{ , } d_1(x) = (p + 1)x - 1$$

Tableau de variation de d_1 sur l'intervalle $\left[\frac{1}{p + 1} \text{ , } \frac{1}{p}\right]$:

x	$\frac{1}{p + 1}$		$\frac{1}{p + 1/2}$		$\frac{1}{p}$
$d_1(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1/2}{p + 1/2}$	$\searrow$	0

Lorsque p décrit N^* on obtient des segments de droite dont les supports passent alternativement par les points $(0 , 1)$ et $(0 , -1)$; les points anguleux appartiennent aux droites d'équations respectives $y = 0$ et $y = x/2$ (si $x > 0$).

La fonction d_1 est affine par morceaux, elle est continue sur R^*.



4- Etudier la fonction numérique d_2 déterminée par $d_2(x) = d(1, 2xZ)$.

La fonction d_2 est définie quel que soit $x \in R$, c'est une fonction paire, $d_2(0) = 1$.

Pour chaque $x > 0$, il existe un unique $q \in N$ tel que $2qx \leqslant 1 < 2(q+1)x$ (q est la partie entière de $1/2x$), en outre

si $1 \leqslant (2q+1)x$, alors $d_2(x) = 1 - 2qx$

si $(2q+1)x \leqslant 1$, alors $d_2(x) = 2(q+1)x - 1$,

on en déduit:

a) Pour $x > 1/2$, $q = 0$ donc

si $x \geqslant 1$, $d_2(x) = 1$

si $x \in \left]1/2, 1\right]$, $d_2(x) = 2x - 1$.

b) Pour $0 < x \leqslant 1/2$, $q \neq 0$ donc

si $x \in \left[\frac{1}{2q+1}, \frac{1}{2q}\right]$, $d_2(x) = 1 - 2qx$

si $x \in \left]\frac{1}{2q+2}, \frac{1}{2q+1}\right]$, $d_2(x) = 2(q+1)x - 1$.

Tableau de variation de d_2 sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2q+2}, \frac{1}{2q}\right]$

x	$\frac{1}{2q+2}$		$\frac{1}{2q+1}$		$\frac{1}{2q}$
$d_2(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2q+1}$	$\searrow$	0

Lorsque q décrit N on obtient des segments de droite dont les supports passent alternativement par les points $(0,1)$ et $(0,-1)$, les points anguleux appartiennent aux droites d'équations respectives $y = 0$ et $y = x$ $(x > 0)$; la fonction d_2 est affine par morceaux, elle est continue sur R^*.

Remarque: si on compare les tableaux de variation des fonctions d_1 et d_2 on constate que les fonctions coïncident sur chaque intervalle $\left[\frac{2}{4q+1}, \frac{2}{4q-1}\right]$ tandis que $d_1(x) + d_2(x) = x$ sur chaque intervalle $\left[\frac{2}{4q+3}, \frac{2}{4q+1}\right]$, ce qu'on peut voir directement en se reportant à la définition de $d_1(x)$ et de $d_2(x)$.

On déduit encore de ce qui précède l'étude de toute combinaison linéaire de d_1 et de d_2, par exemple $f = 2d_1 - d_2$.

si $x \in \left[\frac{2}{4q+3}, \frac{2}{4q+2}\right]$, $f(x) = 3d_1(x) - x$ soit $f(x) = 3 - (6q + 4)X$

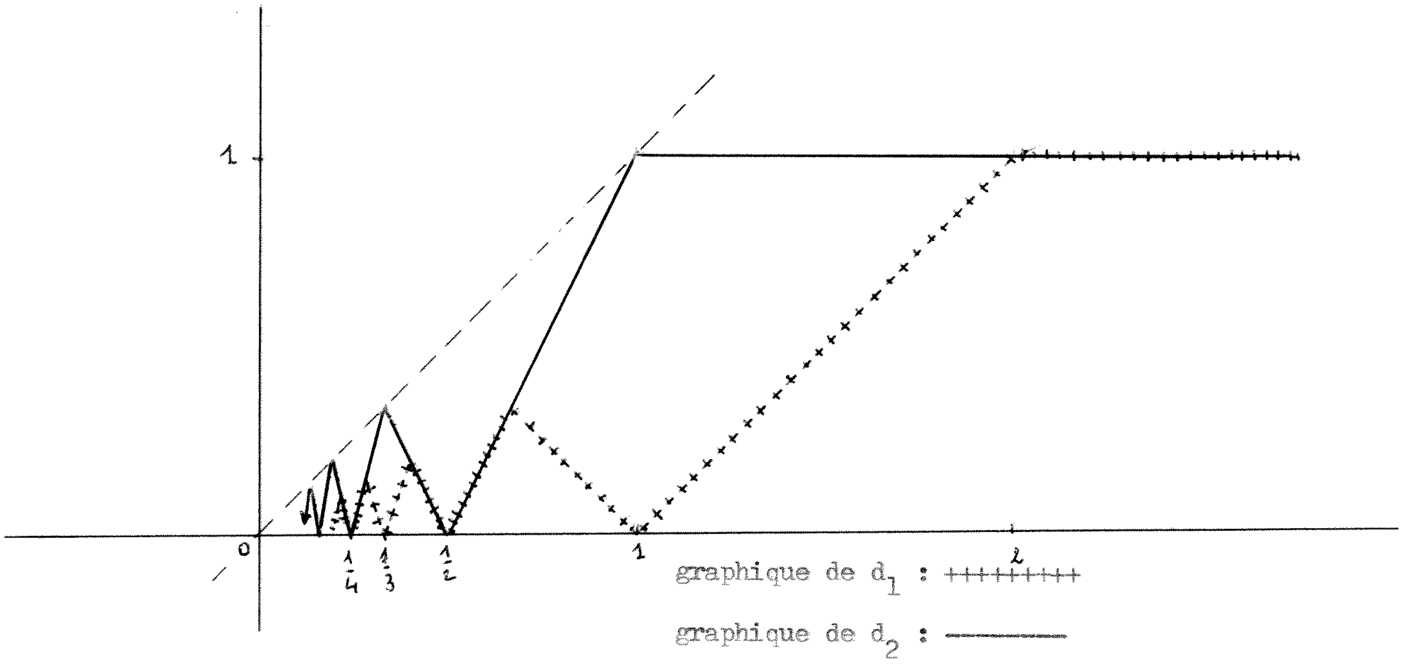
si $x \in \left[\frac{2}{4q+2}, \frac{2}{4q+1}\right]$, $f(x) = 3d_1(x) - x$ soit $f(x) = -3 + (6q + 2)x$

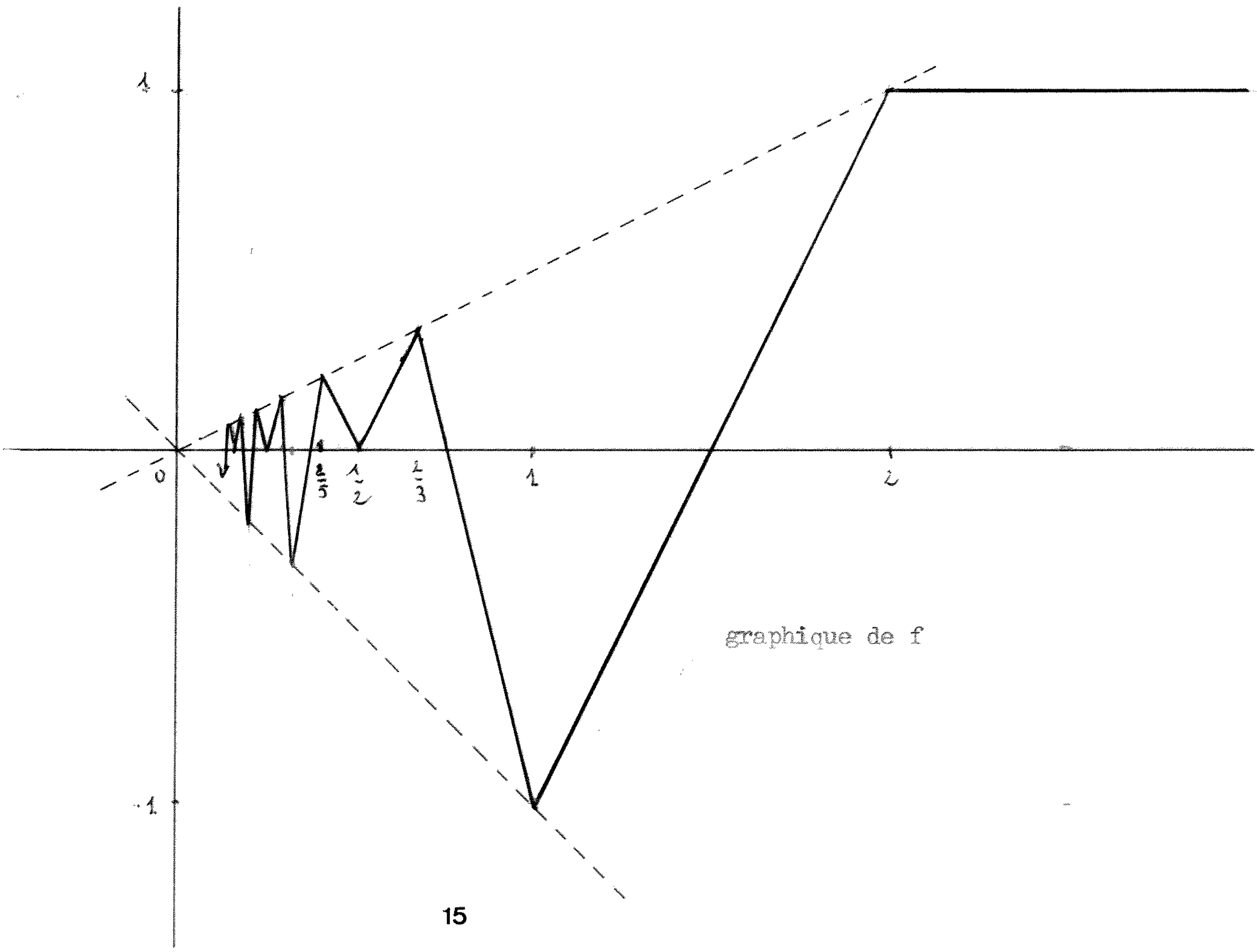
si $x \in \left[\frac{2}{4q+1}, \frac{2}{4q}\right]$, $f(x) = d_1(x)$ soit $f(x) = 1 - 2qx$

si $x \in \left[\frac{2}{4q}, \frac{2}{4q-1}\right]$, $f(x) = d_1(x)$ soit $f(x) = 2qx - 1$.

Tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[\frac{2}{4q+3}, \frac{2}{4q-1}\right]$.

x	$\frac{2}{4q+3}$		$\frac{2}{4q+2}$		$\frac{2}{4q+1}$		$\frac{2}{4q}$		$\frac{2}{4q-1}$
$f(x)$	$\frac{1}{4q+3}$	$\searrow$	$\frac{-2}{4q+2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4q+1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4q-1}$





5- Etudier la fonction numérique g déterminée par $g(x) = \frac{1}{2}(x + d(x,2Z))$.

a) La fonction g est définie sur R; puisque $d(x+2,2Z) = d(x,2Z)$ on a $g(x+2) = g(x) + 1$, le graphique G de g se déduit du graphique G' de la restriction de g à l'intervalle $[0,2]$ par les translations de vecteur $k\vec{V}$, $k \in Z$, $\vec{V}$ ayant pour composantes (2 ,1).

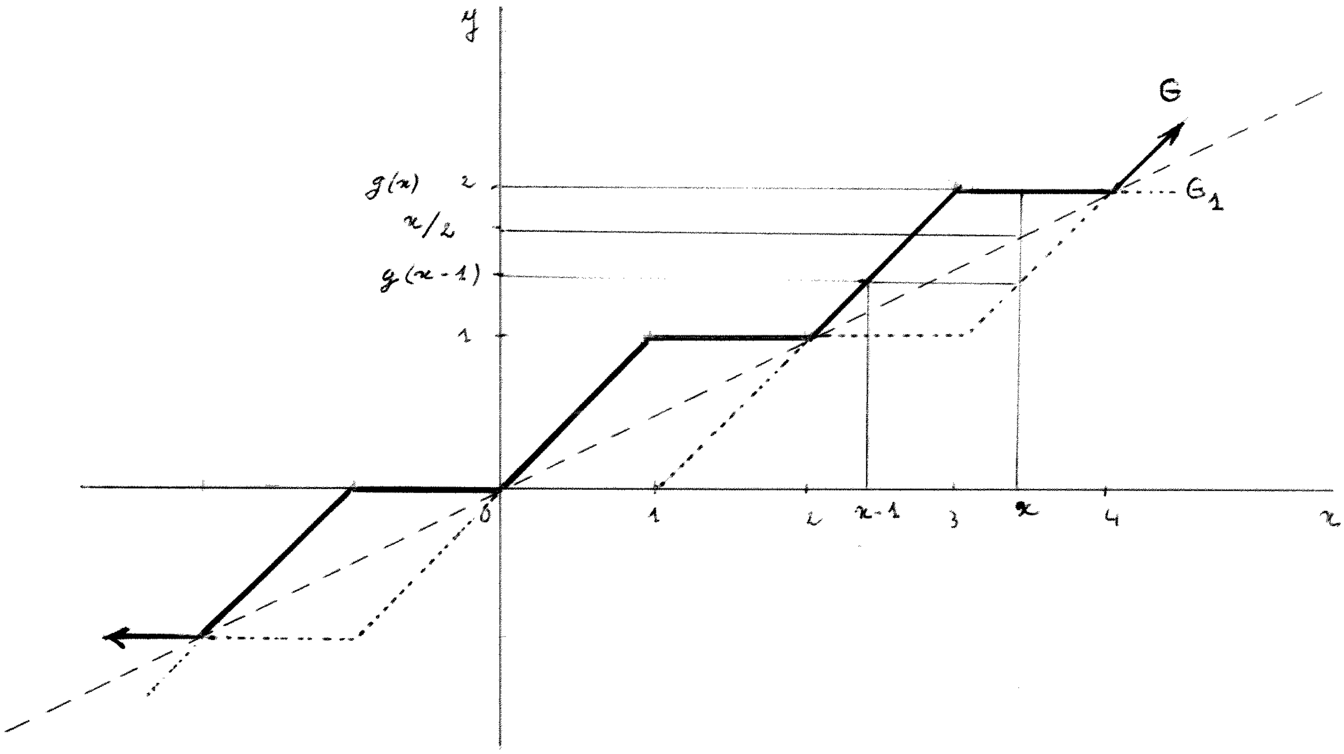
si $x \in [0,1]$, $d(x,2Z) = x$ et $g(x) = x$,

si $x \in [1,2]$, $d(x,2Z) = 2 - x$ et $g(x) = 1$;

plus généralement, soit $p \in Z$,

si $x \in [2p,2p+1]$, $d(x,2Z) = x - 2p$ et $g(x) = x - p$,

si $x \in [2p+1,2p+2]$, $d(x,2Z) = 2p + 2 - x$ et $g(x) = p + 1$.



b) Quelques propriétés de la fonction g.

Soit $x \in [2p,2p+1]$ on a $g(x) = x - p$ et $g(x-1) = p$,

soit $x \in [2p+1,2p+2]$ on a $g(x) = p + 1$ et $g(x-1) = x - 1 - p$;

on en déduit (1) $g(x-1) + g(x) = x$ quel que soit x réel.

Soit G_1 l'ensemble déduit de G par la translation de vecteur V_1 (1,0), la formule (1) traduit le fait que G_1 se déduit aussi de G par la symétrie oblique dont l'axe est la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ et dont la direction est celle de Oy.

Comparons maintenant $g(x+h)$ et $g(x) + g(h)$ (x et h réels quelconques), on a $g(x+h) - g(x) - g(h) = \frac{1}{2}(d(x+h,2Z) - d(x,2Z) - d(h,2Z))$, notons D le second membre; pour étudier le signe de D on est amené à envisager les divers cas:

1. $x \in [2p,2p+1]$ et $h \in [2q, 2q+1]$

   si $x + h \in [2(p+q)+1 , 2(p+q+1)]$ on a $D = 2p+2q+1-(x+h) \leqslant 0$

   si $x + h \in [2(p+q) , 2(p+q)+1]$ on a $D = 0$

2. $x \in [2p,2p+1]$ et $h \in [2q+1, 2q+2]$

   si $x + h \in [2(p+q)+1 , 2(p+q+1)]$ on a $D = 2p - x \leqslant 0$

   si $x + h \in [2(p+q+1) , 2(p+q)+3]$ on a $D = h - 2q - 2 \leqslant 0$

3. $x \in [2p+1,2p+2]$ et $h \in [2q,2q+1]$, D étant symétrique en x et h on a les mêmes résultats qu'en 2.

4. $x \in [2p+1,2p+2]$ et $h \in [2q+1,2q+2]$

   si $x + h \in [2p+2q+2, 2p+2q+3]$ on a $D = x + h - 2p - 2q - 3 \leqslant 0$

   si $x + h \in [2p+2q+3, 2p+2q+4]$ on a $D = 0$.

On en déduit $D \leqslant 0$, quels que soient les réels x et h et compte tenu de la formule (1) on obtient l'encadrement : $g(h-1) \leqslant g(x+h) - g(x) \leqslant g(h)$ dont l'interprétation graphique est immédiate.

6- Exemple de distance sur R^2 non associée à une norme.

Soit h l'application de R dans R^+ déterminée par

$$h(x) = |x| \quad \text{si} \quad |x| \leqslant 1$$

$$h(x) = \sqrt{2|x| - 1} \quad \text{si} \quad |x| > 1 .$$

1° Démontrer que $h(x+x') \leqslant h(x) + h(x')$, quels que soient les réels x et x'.

La fonction h est paire, on envisage les différents cas:

a) $xx' > 0$, d'après la parité on peut supposer $x > 0$ et $x' > 0$.

- pour $x \leqslant 1$ et $x' \leqslant 1$:

  si $x+x' \leqslant 1$, $h(x+x') = x+x' = h(x) + h(x')$.

  si $x+x' > 1$, $h(x+x') = \sqrt{2(x+x') - 1}$ et $h(x) + h(x') = x + x'$

  comparons les carrés, ce qui revient à étudier le signe de $D = (x+x')^2-2(x+x')+1$ soit $D = (x+x'-1)^2$, donc $D > 0$ c'est à dire $h(x) + h(x') > h(x+x')$.

- pour $x \leqslant 1$ et $x' > 1$ (donc $x+x' > 1$):

$h(x+x') = \sqrt{2(x+x') - 1}$ et $h(x) + h(x') = x+\sqrt{2x'-1}$

la comparaison des carrés conduit à étudier le signe de

$D = (x+\sqrt{2x'-1})^2 - 2(x+x') + 1$ soit $D = x^2+2x(\sqrt{2x'-1} - 1)$

l'expression entre parenthèses est positive puisque $x' > 1$ donc $D > 0$.

- pour $x > 1$ et $x' \leqslant 1$ on a le même résultat.

- pour $x > 1$ et $x' > 1$ (donc $x+x' > 1$) :

$h(x+x') = \sqrt{2(x+x') - 1}$ et $h(x) + h(x') = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x'-1}$, on étudie encore le signe de $D = (\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x'-1})^2 - 2(x+x') + 1$ soit $D = 2\sqrt{(2x-1)(2x'-1)} - 1$ d'où $D > 0$ car $2x-1$ et $2x'-1$ sont supérieurs à 1.

b) $xx' < 0$, par exemple $x > 0$ et $x' < 0$, on pose $x'' = -x'$, on a successivement

$h(x+x') = h(x-x'') = h(|x-x''|)$ puisque h est paire,

$h(|x-x''|) < h(x+x'')$ puisque h est croissante sur R^+,

$h(x+x'') \leqslant h(x) + h(x'')$ d'après a) d'où $h(x+x'') \leqslant h(x) + h(x')$.

c) $xx' = 0$, par exemple $x = 0$, on a $h(x) = 0$ et $h(x+x') = h(x) + h(x')$.

En résumé : $h(x+x') \leqslant h(x) + h(x')$, quels que soient x et x' réels.

2° On pose $l(P) = \sqrt{\dfrac{h^2(x) + h^2(y)}{2}}$ quel que soit $P = (x,y) \in R^2$ et on considère l'application d de $R^2 \times R^2$ dans R^+ déterminée par $d(M,M') = l(M'-M)$, quel que soit $(M,M') \in R^2 \times R^2$. Démontrer que d est une distance sur R^2.

Posons $M = (x,y)$, $M' = (x',y')$ d'où $M'-M = (x'-x, y'-y)$.

a) On a $d(M,M') = 0 \Longleftrightarrow h^2(x'-x)+h^2(y'-y) = 0 \Longleftrightarrow x'-x = 0$ et $y'-y = 0$, autrement dit $M = M'$.

b) On a $d(M,M') = d(M',M)$.

c) Pour démontrer l'inégalité triangulaire $d(M,M'') \leqslant d(M,M') + d(M',M'')$ posons $x'-x = u$, $y'-y = v$, $x''-x' = u'$, $y''-y' = v'$, et comparons les carrés des deux membres, ce qui revient à étudier le signe de

$$D = h^2(u)+h^2(v)+h^2(u')+h^2(v')+2\sqrt{[h^2(u)+h^2(v)][h^2(u')+h^2(v')]} - h^2(u+u')-h^2(v+v').$$

D'après la première question on a : $\dfrac{D}{2} \geqslant E - F$ en posant

$$E = \sqrt{[h^2(u)+h^2(v)][h^2(u')+h^2(v')]}$$

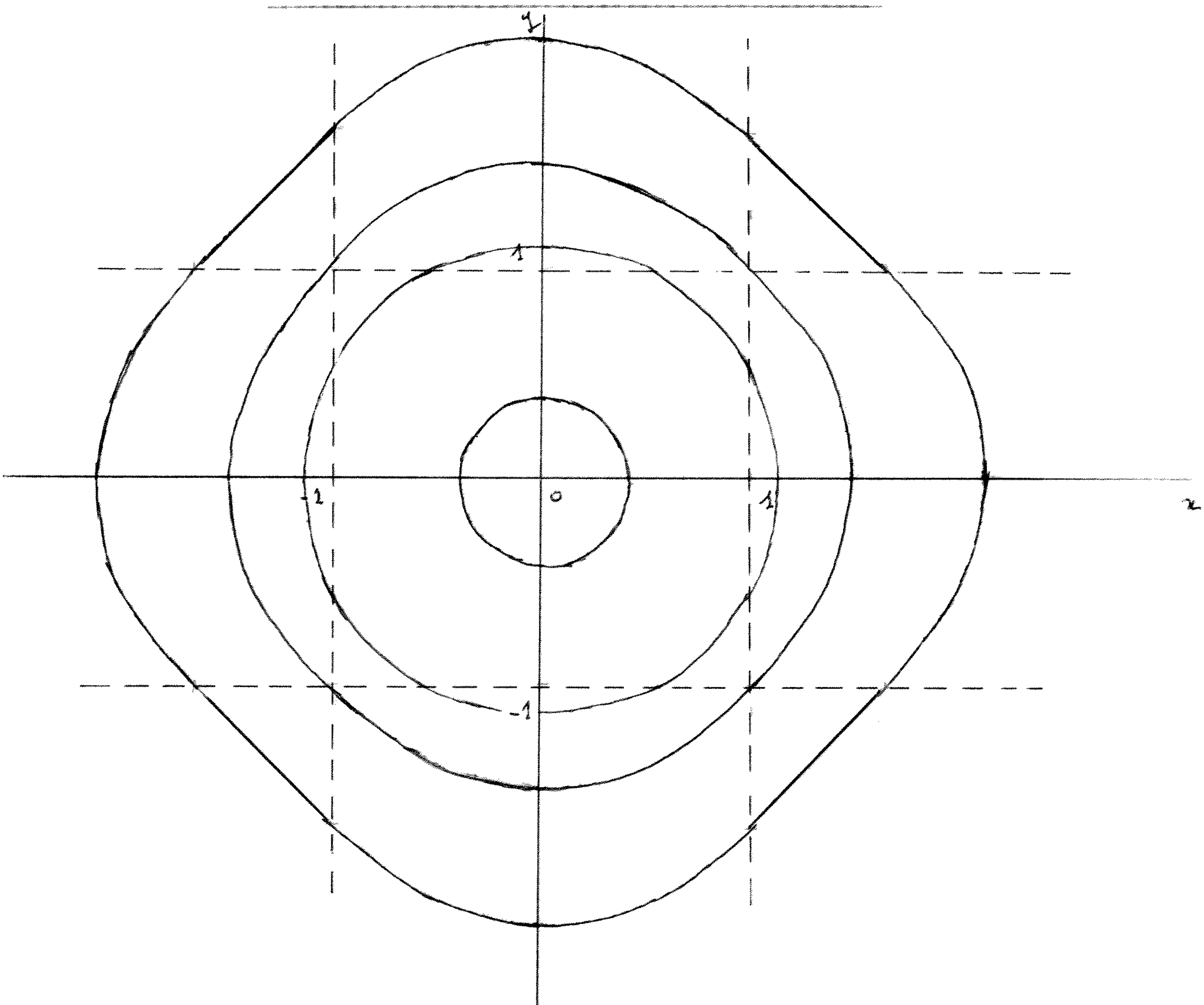
$$F = h(u)h(u') + h(v)h(v')$$

Puisque $E^2 - F^2 = h^2(u)h^2(v') + h^2(v)h^2(u') - 2h(u)h(u')h(v)h(v')$

soit $h(u)h(v') - h(v)h(u')\ ^2$, on a $E \geqslant F$ donc $D \geqslant 0$.

Il en résulte que d est une distance sur R^2.

Remarque: d'après sa définition cette distance est invariante par translation mais l'application l de R^2 dans R^+ (cf énoncé de la 2° question) n'est pas une norme comme on le constate à l'aide du contre-exemple : $P = (3,2)$ et $k = 2$, $l(2P) = 3$ alors que $2l(P) = 4$. La distance d n'est donc pas associée à une norme.



Représentation des ensembles $E_r = \{M \in R^2,\ d(O,M) = r\}$, de l'intérieur vers l'extérieur, respectivement pour $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant r < 1$, $r = 1$, $r > 1$.

(Les courbes situées à l'intérieur du carré $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ sont des arcs de cercles, à l'extérieur il s'agit de segments de droites ou d'arcs de paraboles).

Réflexions sur les problèmes du B.E.P.C.

Finalités du B.E.P.C.

A quelques rares exceptions près, cet examen non sélectif, ne sert à rien .

Le B.E.P.C. n'a aucun rapport avec l'orientation à la fin de la troisième. cette orientation se fait d'ailleurs avant les épreuves du B.E.P.C.

Actuellement, " réussir " au B.E.P.C. peut être le résultat d'un très grand nombre de possibilités différentes .

Le fait d'attribuer des mentions par matières (ou de publier les notes obtenues dans les différentes matières) pourrait donner plus de signification au B.E.P.C. et en faire un certificat de fin d'études du Premier Cycle .

Remarque : Tout ce qui précède ne saurait concerner l'entrée en classe de Seconde qui doit être sélective .

Modalités de l'épreuve

Il serait bon que l'épreuve de mathématiques permette

a) le contrôle de certaines connaissances

b) le contrôle de certains mécanismes
(calculs, usages de tables, puissances de 10, ...)

c) le contrôle de l'aptitude au raisonnement (Thalès, ...)

d) le contrôle de la capacité de sélectionner des données
(exercices avec données en surnombre)

e) le contrôle de l'aptitude à mathématiser des situations simples
(exemples"pratiques" de fonctions affines, trigonométrie. ...)

Il a semblé à la majorité d'entre nous qu'un ensemble d'exercices relativement courts et nombreux (5 à 10 environ) serait plus efficace, dans le sens des contrôles cités ci-dessus, que deux ou trois problèmes plus longs comme ceux que l'on trouve dans les sujets actuels . Des petits exercices permettraient d'atteindre des objectifs plus précis et plus diversifiés . Ils permettraient peut-être aussi d'éviter la monotonie des sujets actuels, sans tomber dans l'excès de problèmes " nouveaux " parfois un peu déroutants pour les élèves .

Voici quelques exercices se rapprochant des critères précisés ci-dessus

Exercice 1 :

Un tronc d'arbre cylindrique a une longueur de 5 m et un diamètre de 60 cm . Quelles sont les dimensions de la plus grosse poutre de section carrée que l'on pourrait obtenir à partir de ce tronc d'arbre ?

Exercice 2 :

La distance de Paris à Strasbourg est de 450 km . Un premier train part de Paris à 6 h et se dirige vers Strasbourg à la vitesse de 120 km/h . Un second train part de Strasbourg à 8 h et se dirige vers Paris à la vitesse de 80 km/h . Déterminer à quelle heure et à combien de km de Paris ces deux trains se croisent .

Exercice 3 :

L'impôt sur le revenu de 1975 pour une personne seule se calcule à l'aide de la fonction affine par intervalle donnant le montant de l'impôt à payer en francs I (r) en fonction du revenu imposable en francs r .

$$I : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad r \longmapsto I(r)$$

Le taux de variation de cette fonction est égal à

0	sur	$[0 \; ; \; 6\,125[$
0,05	sur	$[6\,125 \; ; \; 6\,425[$
0,10	sur	$[6\,425 \; ; \; 7\,700[$

Exemple : I (6275) = 0x 6125 + 0,05 x 150

1°) Calculer I (6125) , I (6425) et I (6625) .

2) Représenter graphiquement la fonction I pour $r \in [6000 \; ; \; 7700[$

Exercice 4 :

A, B, C, D, E, F, G, H, K, et L sont dix points de la droite graduée (d,f).

Connaissant f (A) = 2 , f (L) = 7 , f (H) = -9 , f (D) = -5 ,

$\overline{BA} = 4$, $\overline{CE} = 3$, $\overline{EF} = 2$, $\overline{BC} = 7$ et $\overline{AG} = -11$

trouver f(E) , f(B) , f(F), f(C) et f(G) .

Exercice 5 :

Le plan étant rapporté au repère (O, $\vec{I}$, $\vec{J}$), on considère les points A (2 ; 0) , B ($-\frac{7}{2}$; 0) , C (8 ; 0) et D (1 ; 2) .

Soit p la projection de la droite (AC) sur la droite (DC) parallèlement à la droite (AD) . B' est l'image de B par cette projection . Calculer les coordonnées du point B' .

Exercice 6 :

Le plan étant rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d est la droite ayant pour équation $3x - 2y - 1 = 0$. Déterminer, par ses coordonnées, un vecteur directeur de la droite d.

Exercice 7 :

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O. Le triangle (A,B,C) est tel que $d(A, B) \neq d(A, C)$. H est le point d'intersection des hauteurs de ce triangle (orthocentre). D est le symétrique de A par rapport à O. M est le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de la droite (AH).

1) Montrer que les droites (BC) et (DM) sont parallèles.

2) Montrer que (C, D, B, H) est un parallélogramme.

Exercice 8 :

(d, f) et (d', f') sont deux droites graduées sécantes en O. $f(O) = 0$ et $f'(O) = 0$. Le rapport de projection orthogonale de d sur d' est $\frac{4}{7}$. Le point U de d est défini par $f(U) = 1$. Le point M de d est défini par $f(M) = x$.

1) Faire une figure.

2) Calculer la mesure, en degrés de l'angle aigu des droites d et d'.

3) P est la projection orthogonale du point U sur la droite d'. En prenant d(O,U) pour unité, calculer les longueurs des côtés du triangle (O,U,P). Indiquer pour chacun des côtés, le résultat exact (nombre réel) puis son encadrement décimal à 10^{-2} près.

4) Retrouver l'angle α en utilisant son sinus, puis sa tangente qui seront calculés à l'aide des résultats de la question 3).

5) M' étant la projection orthogonale de M sur d', calculer, en fonction de x, les longueurs des côtés du triangle (O,M,M').

Exercice 9 :

Calculer cos u sachant que $\sin u = \frac{\sqrt{10}}{10}$ et $\text{tg}\, u = -\frac{1}{3}$.

Exercice 10 :

La différence entre deus nombres entiers est 8 et la différence entre leurs carrés est 912.

1) Quelle est leur somme ?

2) Quels sont ces nombres ?

Exercice 11 :

Représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 1 + \frac{|x|}{2}$$

Exercice 12 :

Montrer que $\dfrac{1}{11 + \sqrt{21}} + \dfrac{1}{11 - \sqrt{21}}$ est un nombre décimal .

Exercice 13 :

Donner l'encadrement d'amplitude 0,1 de $\sqrt{10}$ et de $3 - \sqrt{10}$.

En déduire une écriture plus simple (avec un seul radical) du réel

$A = \sqrt{4(3 - \sqrt{10})^2}$.

F. BARDELANG
H. KLEIN
P. LEVY
B. RIEHL

N.D.L.R. Cet article sur les problèmes de mathématique du BEPC est loin d'avoir recueillis l'assentiment des quelques lecteurs privilégiés qui ont pu en prendre connaissance avant la parution de ce numéro de l'ouvert. Si nous avons tenu à le publier, c'est bien parceque nous espérons que ce texte sera le point de départ d'une réflexion et d'une discussion sur le rôle des mathématiques dans l'examen du B.E.P.C.

L'Ouvert met ses pages à la disposition de ses lecteurs Ce que nous demandons expressément pour cet article, nous pourrions le demander pour bien d'autres articles pour lesquels nous serions ravis d'avoir des contradicteurs.

Le rallye mathématique : une réussite ?

Depuis 1974, les Alsaciens s'habituent au "Rallye Mathématique d'Alsace", dont ils voient des comptes rendus dans la presse locale et des lauréats à la télévision. Ce qu'ils savent peut-être moins, c'est l'extension qu'il a pris en 1976, puisqu'il a été organisé cette année des Rallyes semblables en Bretagne et en Franche-Comté.

Mais qu'est-ce le Rallye ? Pourquoi, diront les sceptiques, ce nouvel "examen" ? (rassurons les tout de suite, il s'agit de tout autre chose qu'un examen).

L'initiative a été prise par Monsieur GLAESER, Directeur de l'I.R.E.M de Strasbourg, en 1974. Elle s'est concrétisée grâce au soutien actif de l'Inspection Générale de Mathématiques, qui n'a pas hésité à appliquer les idées, parfois révolutionnaires, de Monsieur GLAESER.

Une compétition originale

Depuis son lancement, le Rallye s'adresse à des élèves du niveau des classes de Première ou de Terminale du second degré. C'est une compétition au bon sens du mot, c'est-à-dire désintéressée ; pour ceux qui pourraient encore croire à un examen, signalons que :

- Ne se présentent au Rallye que des volontaires
- Les candidats peuvent se présenter seuls ("individuels") ou par deux ("binômes") ; un binôme remet une seule copie, travaillée en commun.
- Le Rallye vise à "exorciser" la situation d'échec : seule la réussite au Rallye a des conséquences pour les candidats ; les questions posées nécessitent plus de réflexion que d'érudition, peuvent être traitées à l'aide du seul programme, mais ne lui "collent" pas après.

Les candidats reçoivent des prix, mais là encore une profonde différence avec les classiques, désuêtes "distributions des prix" : au Rallye les prix sont remis selon une hiérarchie horizontale et non verticale ; le premier prix n'est pas unique.

On peut espérer un premier prix même en n'ayant traité qu'un sujet sur les trois, même en ayant digréssé sur le sujet, si la digression révèlait l'intelligence de son auteur.

Quant aux conditions de travail, elles feraient rêver tous les candidats aux examens traditionnels : chaque "binôme" dispose à lui seul d'une salle avec tableau ! de ce fait, disparition totale des désagréments de la "surveillance" classique. Pour assurer l'équité des épreuves, il suffit de vérifier que chaque binôme reste bien dans sa salle : la personne qui vérifie reste discrètement dans le couloir et laisse les candidats tranquilles...

Un éclairage neuf sur l'enseignement des mathématiques

La profonde réforme de l'enseignement des mathématiques dans nos classes secondaires qui a été appliquée de 1966 à 1974 a eu un écho jusque dans le grand public, comme en témoigne l'emploi - trop fréquent et dénaturé - de la locution "maths modernes".

L'enseignement des mathématiques n'avait guère évolué de 1920 à 1956, avait lentement bougé de 1956 à 1966, puis le mouvement s'est accéléré à partir de 1966 : partis en retard, nous nous retrouvons en première ligne ; en fait, c'est une révolution qui a eu lieu. Comme toute révolution, celle-là a engendré des difficultés : d'où actuellement une polémique qui se fait jour, où certains demandent carrément un retour en arrière. Cependant, s'il est vrai qu'il existe des révolutions à bilan catastrophique, il est non moins vrai que ce n'est pas le cas de celle-là.

En effet, le "Rallye" montre les immenses possibilités qu'elle a ouvertes ; la réforme a permis, en dépit des "bavures", de mettre un outil en place : le Rallye a révélé que nos élèves <u>ont soif d'utiliser cet outil pour des problèmes concrets</u> ; il a prouvé que si certains de ces élèves s'ennuient encore, d'autres, bien plus nombreux, découvrent plus que jamais l'amour des mathématiques.

Ce n'est pas par hasard que dans chaque épreuve du Rallye, l'accent est mis, quelque part, sur la mathématisation : le problème qui se pose au départ est d'ordre pratique, voire terre-à-terre, tout un chacun peut le rencontrer dans la vie courante. (Exemples : en 1975, il était question d'une moquette enroulée ; en 1976, d'une règle trop courte). Aux participants d'imaginer <u>un modèle mathématique</u> (forme évoluée de la bonne vieille "mise en équation") permettant d'appliquer à cette situation la perfection de l'outil mathématique.

Le Rallye indique de <u>manière éclatante</u> la voie à suivre dans les années 80 :

exploiter au maximum l'important matériel mis par la réforme à la disposition des professeurs et de leurs élèves. C'est dire combien est absurde et suicidaire l'idée - pour le moins sommaire - d'un "retour en arrière" pur et simple ! En un mot : mise en veilleuse de l'investissement, et priorité à la production à l'aide des investissements massifs de 1966 - 1974, oui. Destruction, même partielle, de ce capital investi, mille fois non !

"De manière éclatante" était souligné plus haut, intentionnellement : ceux qui ont aidé les organisateurs du Rallye ont été frappés par le sérieux des candidats et par leur enthousiasme, contrastant avec la morne idée que l'on se fait en général de l'enseignement des mathématiques.

Le Rallye en chiffres

Dans l'académie de Strasbourg :

en 1974 : 200 candidats inscrits, 180 ont effectivement subi les épreuves

en 1975 : 430 candidats, 390 ayant subi les épreuves

en 1976 : 730 candidats, plus de 650 ayant subi les épreuves.

Dans les académies de Rennes et de Besançon, où le Rallye a été lancé en 1976, on a relevé respectivement 200 et 650 candidats. (+)
Plus que de longues exégèses, ces nombres montrent qu'il ne s'agit pas d'un engouement passager. Il est sage de prévoir une augmentation régulière pendant au moins 3 ou 4 ans encore.

Rallye mathématique et Olympiades

Les "Olympiades Internationales" sont une compétition désintéressée ouverte aux jeunes gens du niveau de nos classes Terminales, et qui se déroule chaque année. Y participent de nombreux pays, dont les U.S.A, l'U.R.S.S, la plupart des "pays de l'Est", la Grande-Bretagne, la Suède, l'Autriche, le Viet-Nam....; chaque pays envoie une délégation, composée de deux professeurs qui présentent une équipe de 8 candidats.

Dans beaucoup des pays susnommés, ont lieu en vue de la préparation aux "Olympiades Internationales", des Olympiades Nationales, et même régionales, pour désigner les membres de l'équipe Internationale. En France, jusqu'en 1974 on se contentait d'envoyer 8 lauréats du Concours Général, c'est-à-dire la plupart du temps des Parisiens.

(+) A Rennes, en 1976, le Rallye n'a été proposé qu'aux élèves des classes de Première.

Depuis 1974, les meilleurs candidats au Rallye Mathématique ont aussi la possibilité d'être choisis pour représenter la France à ces Olympiades. (Cela a été le cas en 1974, ce le sera sans doute en 1976).

A bref délai, la France pourrait organiser une véritable préparation aux Olympiades au niveau National, grâce au Rallye. La condition première est d'étendre le Rallye à une bonne dizaine d'Académies ; les 2 ou 3 meilleurs candidats de chaque Académie seraient invités à participer à un stage commun d'entraînement d'une quinzaine de jours, qui se tiendrait un peu avant les Olympiades ; à l'issue de ce stage serait formée l'équipe de France des Olympiades ; ainsi pourrait être rapidement aboli l'excessif privilège de quelques Lycéens Parisiens, en même temps que serait considérablement élargie la "base populaire" de la préparation aux Olympiades.

Cependant le Rallye ne se réduit pas à une préparation intensive à un "match", fut-il international ; il s'adresse à tous, absolument tous, ceux qui s'intéressent aux mathématiques. Il vise, comme l'a dit très joliment Monsieur GLAESER, à "l'élitisme de masse".

Expliquons ce dernier point par une comparaison avec le développement du sport ; en ce domaine, l'élitisme, au sens péjoratif, consiste à s'arranger pour trouver dans un aride désert sportif, les dix ou douze sujets exceptionnellement doués qui pourront représenter le pays et obtenir des succès de prestige.
L' "élitisme de masse", tout au contraire, c'est la politique de construction de stades, de piscines, de gymnases, de formation de nombreux entraîneurs compétents ; politique qui vise en priorité à l'élévation du niveau général ; politique grâce à laquelle les champions "sortent tout seuls", plus nombreux que dans la mauvaise politique élitiste, mais n'apparaissent plus que comme un sous-produit du système, une sorte de prime flatteuse et gratuite, et non comme le but.

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 1976

CLASSE DE TERMINALE

Les trois problèmes sont indépendants. Il est rappelé que les critères d'appréciation des travaux des participants sont au moins aussi qualitatifs que quantitatifs. Lorsque c'est la seule alternative, il est donc préférable de manifester des capacités d'invention dans un ou deux de ces problèmes, que de traiter les trois superficiellement.

PROBLEME 1

Démontrer la congruence :

$2^{147} - 1 \equiv 0 \mod (343)$ (Autrement dit : 343 divise $2^{147} - 1$)

PROBLEME 2

Démontrer la relation suivante entre réels :

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}(5\sqrt{5} + 11)} - \sqrt[5]{\frac{1}{2}(5\sqrt{5} - 11)} = 1$$

PROBLEME 3

(Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension 3)

DONNEES :

[A] Sur un carré (A, B, C, D) on fait la construction suivante : (cf. fig. 1)

Soit O le centre du carré et I', J', K', L' les milieux respectifs de [A, B], [B, C], [C, D] [D, A].

Puis on considère le carré (I, J, K, L), déduit de (I', J', K', L') par l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$.

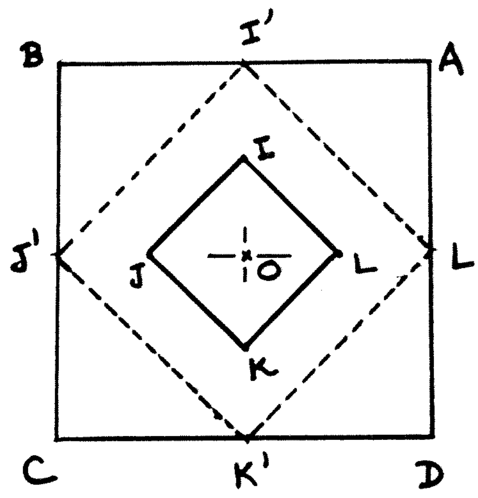


fig. 1

$\boxed{B}$ On donne maintenant un cube, dont les arêtes ont la longueur a $(a > 0)$. Sur chacune des six faces, on procède à la construction indiquée en $\boxed{A}$; les six carrés analoques à (I, J, K, L) forment donc un ensemble de 24 points. On désigne par $\mathcal{P}$ le polyèdre convexe ayant pour sommets ces 24 points. ($\mathcal{P}$ est appelé : le polyèdre de Lord Kelvin associé au cube)

$\boxed{C}$ Sur le cube donné en $\boxed{B}$ on considère une face (A, B, C, D) ; soit $\mathcal{T}$ le tétraèdre régulier inscrit dans le cube et dont A et C sont deux sommets.

QUESTION

Faire une figure claire, sur laquelle $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ soient représentés de manière à rendre aisé le calcul (en fonction de a) du volume de chacun des solides $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{T}$. Calculer ces volumes.

N.B On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h limitée par un polygone de surface S, est $V = \frac{1}{3} Sh$ (cf. fig. 2)

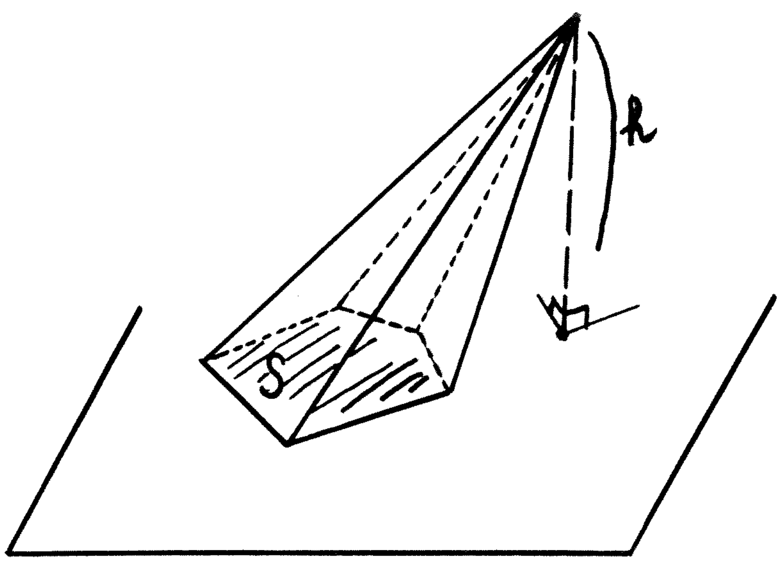


fig 2

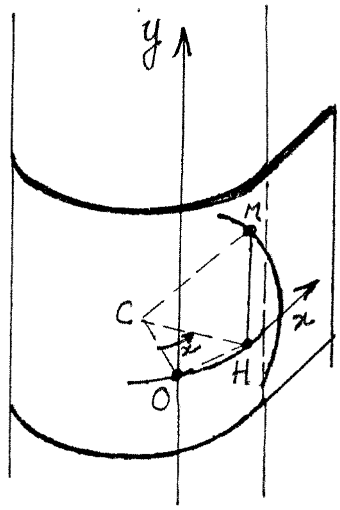
Divertissements mathématiques

COMMENT OBTENIR UN OVALE ?

Si vous avez assisté à une certaine émission de Gérard Majax, vous connaissez le truc :

Vous roulez un papier autour d'une bouteille, sur ce papier vous tracez un "cercle" avec un compas, vous déroulez et vous avez un bel ovale.

Diable, s'agirait-il d'une autre façon de tracer les ellipses ? Voyons de plus près... Il s'agit en somme de l'intersection d'une sphère avec un cylindre, cette sphère ayant son centre sur le cylindre.



Prenons le rayon du cylindre pour unité ; appellons R celui de la sphère. ($0 \leq R \leq 2$)

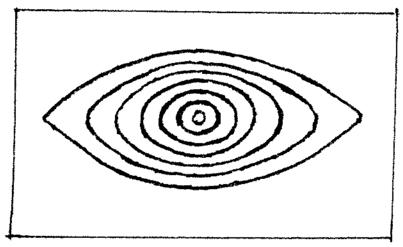
Soit M un point quelconque de la courbe repéré par ses coordonnées (x,y) . A noter que x avant déroulement est la mesure d'un angle.

Avec les notations utilisées sur la figure on a :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2$$

soit :

$$\boxed{\left(2 \sin\frac{x}{2} \right)^2 + y^2 = R^2}$$

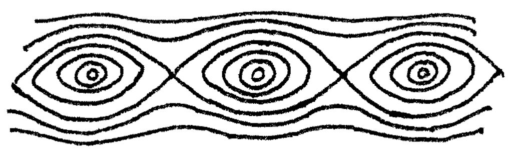


Ce n'est pas l'équation d'une ellipse. Cependant, si R est petit, x l'est également. Par suite $2 \sin \frac{x}{2} \simeq x$ et l'on trouve :

$$x^2 + y^2 \simeq R^2$$

Approximativement un cercle : C'est rassurant ! Mais une surprise nous attend lorsque $R = 2$. L'équation s'écrit alors : $y^2 = 4 - 4\sin^2 \frac{x}{2} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

L'ovale est devenu pointu ! Rigolo, non ? Ca me rappelle mêmé une vieille connaissance d'autrefois : M. Viviani et sa fenêtre.



Jean-Marie BECKER

GÉNÉRATION D'ENTIERS NATURELS

Dans le numéro 8 de l'Ouvert vous posez la question "est-il possible de générer 7 en n'utilisant que les touches fonctionnelles d'une calculatrice de poche?"

Voici une solution :

Principe : $128 = 2^7 = e^{7\ln 2}$; $(128)^{1/\ln 2} = e^7$; $\ln e^7 = 7$

Voici la réalisation sur une calculatrice : On génère 2 , puis 256, puis 128, puis 7.

Touche	lecture	explication
10^x	1	
10^x	10	
x^2	100	on génère 2
log	2	
ln	0, 6931471	
1/x	1, 442695	je mets $\frac{1}{\ln 2}$ en mémoire
Mémoire 1		
1/x	0, 6931471	je reviens à 2
exp	2	
x^2	4	
x^2	16	
x^2	256	on génére 256 qui est mis en mémoire.
Mémoire 2		
....	2	je reviens à 2 par $\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }\cdot\sqrt{\ }$
y^x	o, 6931471	
Mémoire 2	256	
=	1, 1579208 10^{77}	je calcule 2^{256} car e256 dépasse les capacités.
$\sqrt{\ }$	3, 4023236 10^{32}	
y^x	38, 722839	je calcule $(e^{128\ \ln 2})^{1/\ln 2}$
Mémoire 1	1, 442695	soit e^{128}
=	3, 8877034	
ln	128	
y^x	4, 3520302	
Mémoire 1	1, 442695	$128^{1/\ln 2} = e^7$
=	1096, 6331	
ln	7	

Théoriquement il est possible de générer tout entier à l'aide des fonctions exp et x^2 et de deurs inverses. Si on génère $2^n = e^{n\mathrm{Log}2}$ on peut trouver

$(2^n)^{1/\ln 2} = e^n$ d'où n. Le problème revient à générer 2^n pour tout n. Il est facile de générer 2^N où N est une puissance de 2. En prenant $\exp(2^N)$ puis la racine carrée, on trouve $\exp(2^{N-1})$, d'où par une récurrence descendante on peut montrer qu'on peut trouver tout entier de l'intervalle $[1, N]$.

Cette méthode est difficilement applicable en principe car on dépasse très vite les capacités des calculatrices.

Bernard BROMBECK

LE JEU DE LA VIE

Un professeur du C.E.S. Gambetta de Riedisheim (dont le nom n'a pu être déchiffrer) nous signale avoir trouvé dans le numéro d'Avril 1976 de la "Recherche" un jeu très bizarre imaginé par un américain : Conway.

Le jeu de la vie se joue sur un réseau plan de carrés. chaque carré a huit voisins. Les régles sont les suivantes :

- Des ions sont placés de façon quelconque
- Tout pion qui a 2 ou 3 pions dans son voisinage reste en vie
- Tout pion qui a 4 pions ou plus dans son voisinage est retiré du jeu
- Tout pion qui a 0 ou 1 pion dans son voisinage meurt d'isolement
- Toute case qui avoisine trois case contenant des pions produit un pion.

Ce problème est très riche en possibilités. Le poser dans nos classes serait intéressant dans la mesure où les élèves n'hésitent pas à affronter des situations touffues.

Le Problème des trois corps: un cas simple !

L'exposé qui suit reproduit une conférence donnée à l'A.P.M de Strasbourg en Mars 1976.

Il est extrait d'un très beau livre récent de J. MOSER : Stable and random motions in dynamical systems (mouvements stables et mouvements aléatoires dans les systèmes dynamiques), paru aux éditions de Princeton en 1973.

Le problème abordé possède la propriété assez spectaculaire d'avoir un énoncé très simple et un résultat inattendu, dont la preuve requiert l'utilisation d'un bon nombre de techniques essentielles, souvent récentes, de la dynamique qualitative.

L'étude détaillée est très longue (près de la moitiée de l'ouvrage de référence) et dépasse souvent le cadre de cet exposé. Je m'arrêterai seulement sur un ses aspects, particulièrement instructif.
J'ai essayé de me placer au niveau de connaissance d'un bon étudiant de première année de Maîtrise de Mathématiques.

Le § 1 doit être omis en première lecture.

1. MISE EN EQUATION DU PROBLEME DES N CORPS

1.1 On considère dans l'espace habituel (espace euclidien $\mathbb{R}^3$) n particules (ou planètes) $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de masses respectives $m_1, m_2, \ldots, m_n$. A un instant t_o ces particules occupent des positions $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ($q_i \in \mathbb{R}^3$) avec des vitesse $V_1, \ldots, V_n$ ($V_i \in \mathbb{R}^3$) ; on veut décrire le mouvement des n particules en fonction de ces conditions initiales (t_o, q_i, V_i), sous l'hypothèse de l'attraction mutuelle Newtonienne.

a) L'énergie potentielle du système $\{P_1, \ldots, P_n\}$ est :

$$U = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

Le signe - exprime le fait que l'énergie potentielle diminue quand les distances mutuelles $\|q_i - q_j\|$ diminuent.

b) L'énergie cinétique du système est :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2$$

c) Le mouvement des différentes particules est régi par le système d'équations différentielles du second ordre :

$$(1) \quad m_i \cdot \ddot{q}_i = \Delta_i U$$

où $\ddot{q}_i$ représente la dérivée seconde du vecteur q_i par rapport au temps (accélération de P_i), et $\Delta_i U$ le gradient de la fonction U par rapport à la variable vectorielle $q_i = (q_{i,1}, q_{i,2}, q_{i,3})$.

La donnée de conditions initiales (temps, positions, vitesses) détermine alors une unique solution du système (1) : $\{q_1(t), \ldots, q_n(t)\}$ qui représente l'évolution correspondante du système.

d) On rappelle que le long de toute solution de (1) l'énergie totale U + T du système garde une valeur constante.

1.2 Si, dans le problème précédent, on fait tendre une des masses, par exemple m_1, vers zéro, on obtient à la limite un problème simplifié qui se décrit ainsi :

a) le système $\{P_2, \ldots, P_n\}$ est régi par un système du type (1), où P_1 n'intervient pas.

b) Le mouvement de P_1 est défini par l'équation différentielle :

$$\ddot{q}_1 = - \Delta_1 \left(- \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\|q_1 - q_i\|} \right)$$

c) On a toujours un bilan énergétique constant au cours d'une évolution du système $\{P_2, \ldots, P_n\}$. Le mouvement de P_1 est tel que la quantité

$$\frac{1}{2} V_i^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_i}{\|q_1 - q_i\|}$$

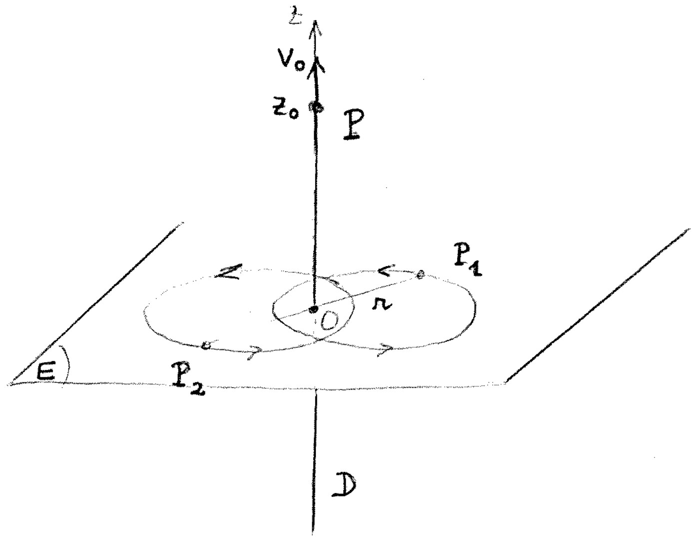
reste constante ; on l'appellera encore l'énergie.

Un tel problème, où une ou plusieurs masses sont annulées, est appelé un problème restreint des n corps.

C'est un problème de ce type que nous allons étudier.

2. UN EXEMPLE DE PROBLEME RESTREINT DES 3 CORPS.

2.1



Deux planètes P_1, P_2 de même masse $\neq 0$, ou primaires, décrivent dans un plan E des ellipses autour du centre gravité 0, pris comme origine ; leur mouvement est périodique, de période supposée égale à 2π, par un choix convenable de l'état initial.

Une troisième particule P, de masse nulle, est placée en Z_o sur l'axe D perpendiculaire à E en O, et lancée avec une vitesse initiale V_o colinéaire à D, à un instant initial t_o. Le mouvement de P s'effectuera sur D par raison de symétrie ; il s'agit de décrire ce mouvement, en fonction des conditions initiales.

2.2 Mise en équation

Soient Z l'abscisse de P sur D (origine O), et r(t) la distance au temps t de P_1 et P_2 à l'origine 0. Compte tenu de 1.2, on a :

$$(1) \quad \ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \quad \text{où } U(t,Z) = -\frac{1}{\sqrt{r^2(t) + Z^2}}$$

en supposant que les masses de P_1 et P_2 sont égales à $\frac{1}{2}$.

Ceci donne $\ddot{Z} = -\dfrac{Z}{(r^2(t) + Z^2)^{3/2}}$

La fonction r(t) est une fonction périodique, de période 2π, pas très compliquée, puisqu'elle représente le rayon vecteur d'une ellipse par rapport à l'un de ses foyers. Cependant, on ne sait pas en général intégrer l'équation différentielle (1).

2.3 Premières remarques qualitatives

i) L'origine O est une position d'équilibre ; l'unique solution correspondant aux conditions initiales (t_o, $Z_o = O$, $V_o = 0$) est $Z \equiv 0$

ii) $\ddot{Z}$ est toujours de signe contraire à celui de Z ; ceci signifie que, dans le plan (t, Z), le graphe d'une solution de (1) a sa concavité tournée vers le bas en tout point où $Z > 0$, et vers le haut en tout point où $Z < O$.

iii) La valeur absolue $|\ddot{Z}|$ de l'accélération de P est <u>majorée</u> indépendamment du temps et de la position occupée. C'est évident "physiquement" ; plus précisément :

d'une part $|Z''| = \dfrac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = \dfrac{|Z|}{|Z|^3(1 + \frac{r^2}{Z^2})^{3/2}} \leq \dfrac{1}{Z^2}$

donc $|Z''| \leq \dfrac{1}{a^2}$ si $|Z| \geq a$

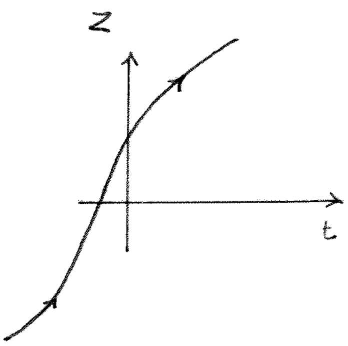
d'autre part $|Z''| \leq \dfrac{|Z|}{r^3} \leq \dfrac{1}{a^2}$ pour $|Z| \leq a$

où a est le <u>minimum</u> (non nul) de r(t).

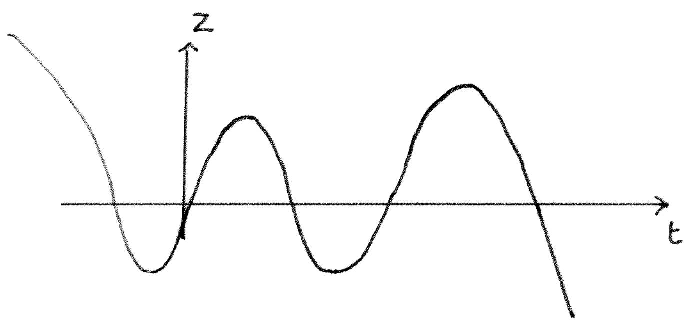
On déduit de iii) que <u>toute solution de (1) est définie pour toutes les valeurs de t</u> (exercice).

Ceci établi, ii) montre que <u>toute solution prend au moins une fois la valeur 0</u>, c'est-à-dire que, quelque soit l'état (t_o, Z_o, V_o) de P considéré, la particule P est passée ou passera au moins une fois par le point 0. C'est bien facile : si Z(t) était une solution de (1) sans zéro, et par exemple toujours > 0, son graphe aurait en tout point sa concavité vers le bas, d'où contradiction avec le fait que Z est définie sur tout $\mathbb{R}$.

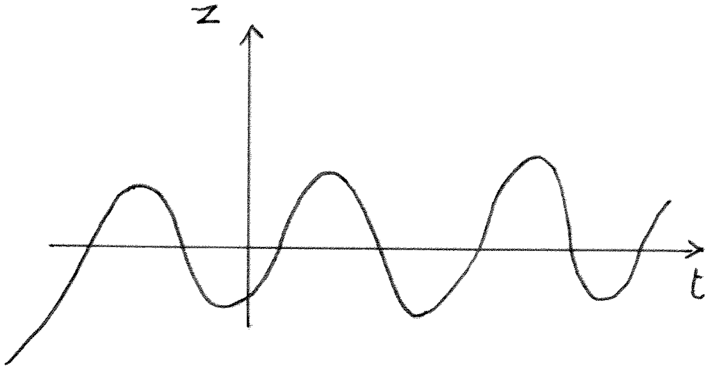
Voici quelques formes "possibles" de solutions, compte tenu des observations précédentes :



P va de $-\infty$ à $+\infty$ (sans arrêt)



P vient de $+\infty$, se livre à quelques va-et-vient autour de 0, puis s'éloigne vers $-\infty$

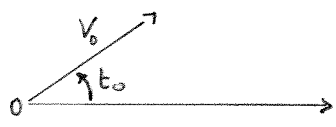


P vient de $-\infty$, et oscille indéfiniment autour de 0.

2.4 Nous allons nous donner l'objectif suivant :
étudier, pour chaque solution de (1), la répartition des temps de passage successifs en 0 de la particule P.
Nous choisirons, compte tenu des remarques précédentes, des conditions initiales de la forme $(t_o, 0, V_o)$, c'est à dire avec P à l'origine. Le problème étant symétrique par rapport au plan de l'écliptique E, nous pourrons toujours supposer que $V_o > 0$ (si $V_o = 0$, P reste en équilibre à l'origine).

Nous noterons alors (t_1, V_1) l'état (temps, vitesse) de P à son premier retour en 0, s'il existe ; V_1 représentera en fait la valeur absolue de la vitesse de P lors de ce premier retour (en tenant encore compte de la symétrie par rapport à E).
De même (t_{-1}, V_{-1}) sera l'état de P au passage en 0 précédant la situation dite initiale (s'il existe). On définit de même plus généralement les états (t_n, V_n), $n \in \mathbb{Z}$; par définition la suite t_n est croissante, et la suite V_n est positive.
Si nous envisageons deux états initiaux (t_o, V_o) et $(t_o + 2\pi, V_o)$, les solutions correspondantes sont identiques à une translation près (d'amplitude 2π) de l'axe des temps, eu égard à la périodicité du mouvement de P_1 et P_2.
Ceci suggère d'interpréter un état initial (t_o, V_o) comme représentant un point du plan par ses coordonnées polaires : t_o sera l'argument, V_o le module.

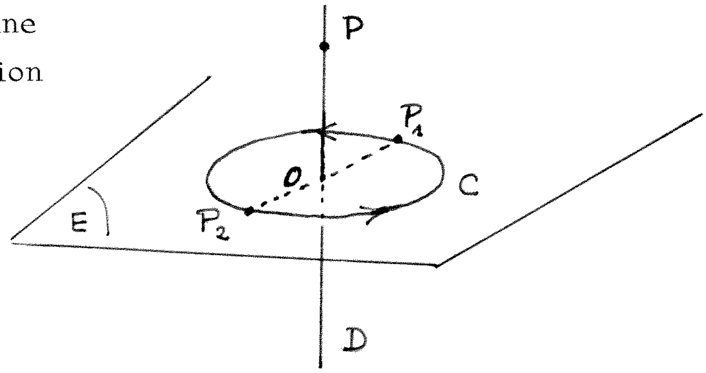
Le passage de l'état initial (t_o, V_o) au premier retour (t_1, V_1) définira une application d'une partie du plan (à déterminer), à valeurs dans le plan ; cette application sera notée ϕ dans toute la suite.



C'est une étude de ϕ qui nous conduira à une réponse (partielle) à la question posée au début de ce paragraphe.
Nous allons d'abord étudier un cas particulier.

3 CAS PARTICULIER OÙ LES PRIMAIRES ONT UNE ORBITE CIRCULAIRE

On suppose ici que P_1 et P_2 ont des orbites circulaires. Elles décrivent donc un même cercle C, de centre 0, d'un mouvement uniforme, en y occupant à chaque instant les extrémités d'un diamètre.



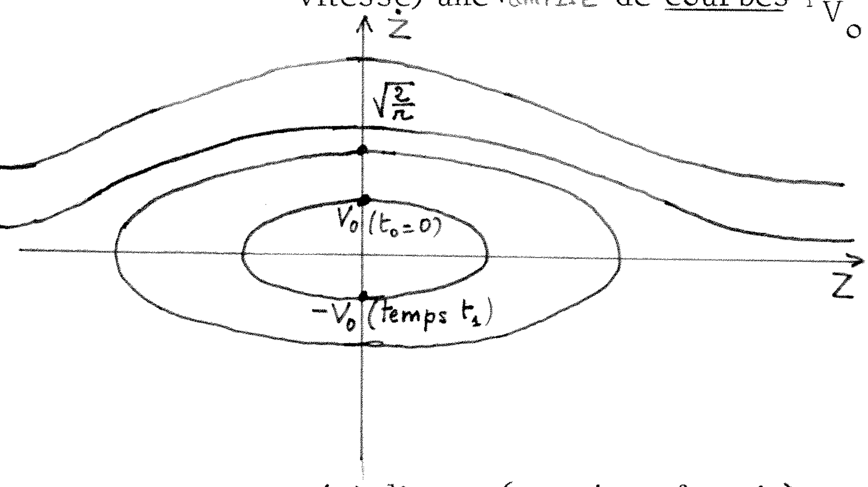
Dans ce cas, la fonction r(t) est une constante (rayon de C), et l'équation différentielle (1) devient :

$$\ddot{Z} = - \frac{Z}{(r^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Elle est autonome, c'est-à-dire indépendante du temps. En d'autres termes, le champ de force sur la droite D, qui anime P, est indépendant du temps. Le temps initial ne jouera ici aucun rôle.
Dans ce cas, le principe de conservation de l'énergie (cf. 1.2 c)) permet de (presque) résoudre l'équation différentielle. On doit en effet avoir :

$$(2) \quad \frac{1}{2}\dot{Z}^2 - \frac{1}{\sqrt{r^2 + Z^2}} = \frac{V_0^2}{2} - \frac{1}{r}$$ (énergie totale de P en l'état $(t_0, 0, V_0)$).
($\dot{Z}$ désigne ici la vitesse de P).

l'équation (2) définit dans le plan des phases (coordonnées Z, $\dot{Z}$: position, vitesse) une famille de courbes Γ_{V_0}, représentée ci dessous :

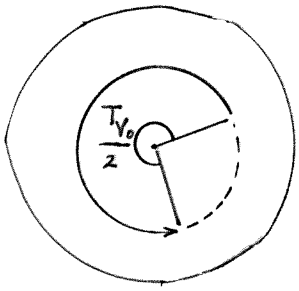


Pour $V_0 < \sqrt{\frac{2}{r}}$, la courbe Γ_{V_0} est fermée. Pour $V_0 = \sqrt{\frac{2}{r}}$, elle est asymptote à l'axe Z ; pour $V_0 > \sqrt{\frac{2}{r}}$, elle admet une asymptote horizontale de cote > 0.
La courbe Γ_{V_0} détermine la solution de l'équation différentielle correspondant à l'état initial ($t_0 = 0$, $Z_0 = 0, V_0$).
Si $V_0 < \sqrt{\frac{2}{r}}$, la solution obtenue est périodique (Γ_{V_0} étant fermée), et sa période T_{V_0} est fonction croissante de V_0.

Si $V_o = \sqrt{\frac{2}{r}}$, la particule P vient de $-\infty$, et va vers $+\infty$ sans repasser par l'origine ; sa vitesse tend vers 0 quand $t \to +\infty$. Si $V_o > \sqrt{\frac{2}{r}}$, le comportement de P est analogue mais elle s'éloigne avec une vitesse limite non nulle.

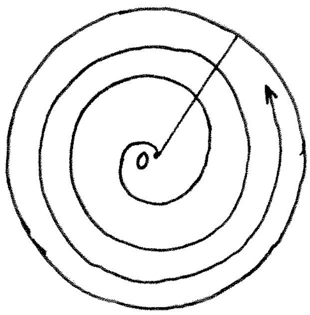
L'application ϕ de premier retour (voir 2.4) a donc les propriétés suivantes :

a) Elle est définie sur le disque ouvert Δ : $V_o < \sqrt{\frac{2}{r}}$, et a pour expression :



$$(t_o, V_o) \mapsto (t_1 = t_o + \frac{T_{V_o}}{2}, V_1 = V_o)$$

b) ϕ est donc, sur chaque cercle centré à l'origine, de rayon $V_o < \sqrt{\frac{2}{r}}$, une rotation d'angle $\frac{T_{V_o}}{2}$ (demi période de la solution correspondante) ; cet angle croit de 0 à $+\infty$ quand V_o croit de 0 à $\sqrt{\frac{2}{r}}$. Ceci signifie que ϕ transforme tout rayon du disque Δ en une spirale asymptote au bord de Δ.



Ces remarques, banales ici, vont jouer un rôle essentiel dans la suite

Conclusion :

La situation est très simple dans ce cas particulier :

- Si $V_o < \sqrt{\frac{2}{r}}$ la particule P oscille périodiquement autour de 0, et y passe périodiquement aux temps
$$t_o + n\,\frac{T_{V_o}}{2}, \ n \in \mathbb{Z}.$$
- Si $V_o \geq \sqrt{\frac{2}{r}}$ (vitesse de "libération"), P ne passe qu'une fois en 0 et va directement de $-\infty$ à $+\infty$.

4 CAS GENERAL (les primaires ont des orbites elliptiques, de faible excentricité)

4.1 Le résultat principal

Nous nous plaçons dans la situation suivante : les planètes primaires P_1 et P_2 décrivent des orbites elliptiques très voisines du cercle C du paragraphe précédent, donc d'excentricité ε assez petite.

Il existe alors un nombre entier c, ne dépendant que de ε, tel qu'on ait le spectaculaire

Théorème :

Soit une suite d'entiers S_n, $n \in \mathbb{Z}$, tels que $S_n \geq c$ pour tout n, et quelconques par ailleurs.
Il existe un état initial (t_o, V_o) de P tel que P passe par 0 en des temps t_n, $n \in \mathbb{Z}$, vérifiant la propriété :

$$0 \leqslant \frac{t_{n+1} - t_n}{2\pi} - S_n < 1$$

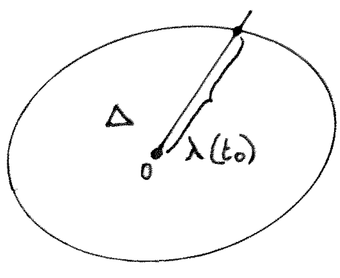
En d'autres termes, quelle que soit la suite $S_n \geq c$, il existe une solution de l'équation différentielle (1), donc un mouvement possible de P, tel que P passe une infinité de fois en 0, en des temps $< t_{-n} < \ldots < t_o < \ldots < t_n < \ldots$, de sorte que le temps entre le $n^{ème}$ passage (à partir du temps initial t_o) et le $(n+1)^{ème}$ passage, arrondi en années (une année étant évidemment la période de révolution de P_1 et P_2, soit 2π) soit exactement S_n.

Autrement dit, si les astronomes de la planète P_1 ont noté au cours des âges les années de passage de P en 0, il leur sera impossible de prévoir le comportement futur (ou de déterminer le comportement "préhistorique") de la petite planète P !

En effet, les nombres S_n peuvent être choisis indépendamment les uns des autres... Il n'en serait pas de même, bien sûr, si l'un de nos astronomes notait un instant précis de passage de P en 0, et la vitesse correspondante. Cependant, la discussion qui va suivre montrera qu'il ne serait pas nécessairement bien mieux renseigné !

4.2 Esquisse de la méthode

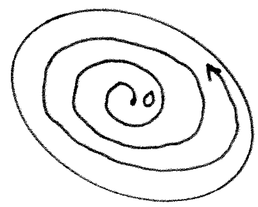
Tout repose sur les propriétés de l'application ϕ de premier retour. On soupçonne qu'elle sera voisine de celle du paragraphe 3. C'est bien le cas, mais la preuve est très délicate, et repose sur des arguments analytico-géométriques difficiles.
Nous allons donc admettre les faits suivants :



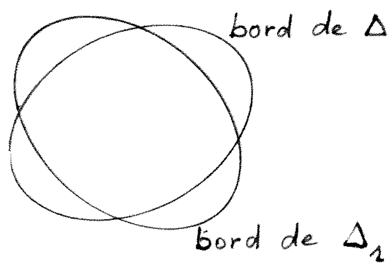
1° ϕ est défini sur un domaine ouvert Δ symétrique par rapport à l'origine, limité par une courbe fermée analytique (qui remplace donc le cercle $V_o = \sqrt{\frac{2}{r}}$ du § 3).

Ceci veut dire que pour chaque temps initial t_o, il y a une vitesse de libération $\lambda(t_o)$; si $V_o < \lambda(t_o)$, P reviendra au moins une fois en 0 ; si $V_o \geq \lambda(t_o)$, P s'éloignera indéfiniment de 0.

2) Si, à t_o fixé, la vitesse initiale de V_o tend en croissant vers $\lambda(t_o)$, le temps de 1er retour t_1 tend vers l'infini (comme dans le § 3).
Ceci signifie que l'image par ϕ d'un rayon de Δ est une courbe spirale, qui sera asymptote au bord de $\phi(\Delta) = \Delta_1$.



3) A la différence du cas particulier limite du § 3, l'image de Δ par ϕ est un domaine Δ_1 différent de Δ ; plus précisément, le bord de Δ et celui de Δ_1 sont disposés comme indiqué ci-contre, si l'excentricité ε de l'orbite des primaires est assez petite (et $\neq 0$).
Un point essentiel est que ces bords se coupent non tangentiellement.



Un état initial $x = (t_o, V_o)$ produira n retours (au moins) à l'origine si et seulement si :
$x \in \Delta,\ \phi(x) \in \Delta,\ \phi \circ \phi(x) = \phi^2(x) \in \Delta, \ldots, \phi^{n-1}(x) \in \Delta$

Ces propriétés définissent un ensemble $\Delta_{-n} \subset \Delta$; on fait apparaître une suite d'ensembles strictement décroissante

$\Delta = \Delta_o \supset \Delta_{-1} \supset \Delta_{-2} \supset \ldots \supset \Delta_{-n} \supset \ldots$

Un état initial $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_{-n}$ produira une suite infinie de retours en 0.

De même, un état x a été précédé de n passages à l'origine si $x \in \Delta_n$, où
$\Delta_1 = \phi(\Delta)$, $\Delta_2 = \phi(\Delta \cap \Delta_1)$, $\Delta_3 = \phi(\Delta \cap \Delta_2)$ etc....
On définit ainsi une suite décroissante d'ensembles :
$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$

Un état initial $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ a été précédé d'une infinité de passages en 0.

Un état initial $x \in \bigcap_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n$ correspond à une solution oscillant indéfiniment autour de 0.

Remarquons que nous ne savons pas pour l'instant si les intersections

$\bigcap\limits_{0}^{-\infty} \Delta_n$, $\bigcap\limits_{1}^{\infty} \Delta_n$, $\bigcap\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n$ sont non vides.

Nous allons voir que c'est bien le cas, et prouver en même temps notre théorème, en considérant seulement les points d'un morceau bien choisi de Δ.

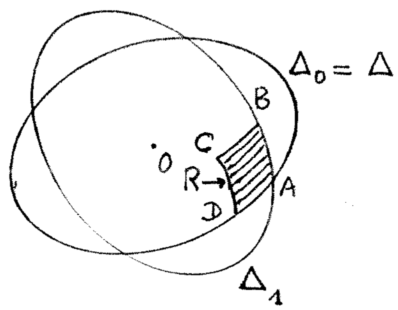
On notera qu'une bonne part de la difficulté de compréhension de la situation réside dans le fait suivant :

on étudie ici une application (bijection) d'un ensemble Δ dans un ensemble Δ_1, où Δ et Δ_1 sont différents mais $\Delta \cap \Delta_1$ est non vide.

D'habitude, on a affaire soit à des applications $f : E \to F$, où les ensembles E et F sont considérés comme disjoints, soit à des applications d'un ensemble dans lui-même

4.3 Preuve du théorème

Nous allons considérer ici seulement les états initiaux appartenant à un "petit" quadrilatère curviligne R ayant un sommet A commun aux bords de Δ_o et Δ_1, un côté AB sur le bord de Δ_1, et un côté DA sur le bord de Δ_o.



Comment ϕ transforme-t-elle R ?

Le côté BA est d'après 4.2 2), transformé en une courbe spirale asymptote au bord de Δ_1 ; il en est de même pour le transformé de CD. Notre domaine R est donc transformé en une "bande" spiralant asymptotiquement au bord de Δ_1 (figure 1).

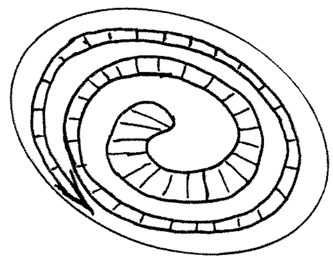


figure 1

Il est commode pour la suite de décomposer la transformation ϕ appliquée à R en deux étapes, schématisées ainsi :

- D'abord, une opération "d'étirement" infini :

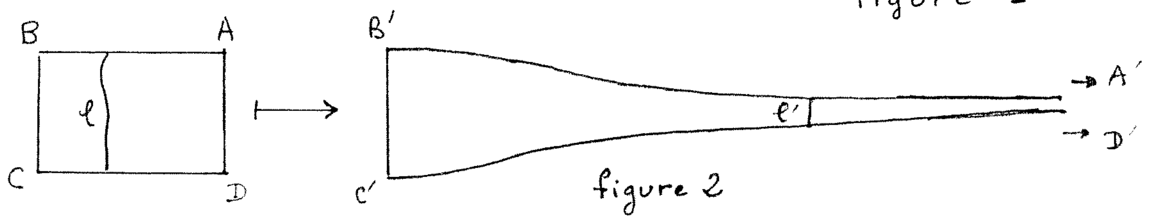
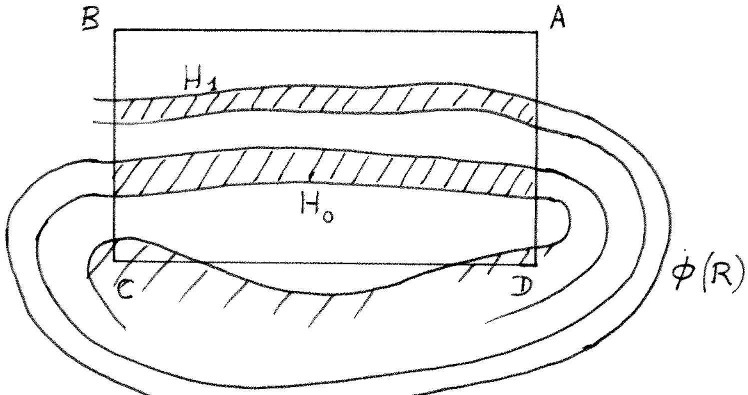


figure 2

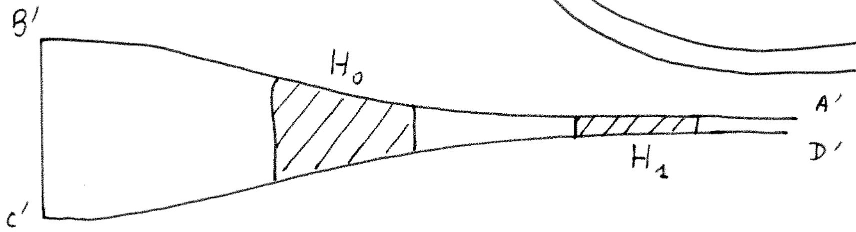
- Ensuite, on "enroule" la bande étirée à l'intérieur de Δ_1 comme indiqué dans la figure précédente.

Considérons maintenant l'intersection de R avec $\phi(R)$ (voir figure ci contre).

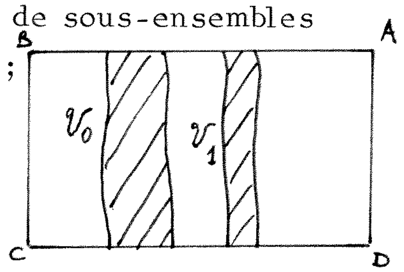


Il est clair qu'elle va contenir une suite infinie de bandes H_0, H_1, ..., H_n, ... se rapprochant du côté AB.

Ces bandes se représentent ainsi sur la figure 2.



Elles sont donc les images par ϕ d'une suite infinie de sous-ensembles $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$, ..., $\mathcal{V}_n$, ... de R, figurés ci-dessous ; les bandes $\mathcal{V}_n$ (dites <u>verticales</u>) tendent vers le côté AD, bord de Δ_o.



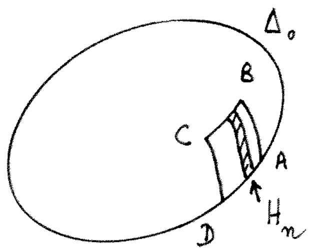
Soit un état initial $(t_o, V_o) \in \mathcal{V}_0$; $\phi(t_o, V_o) \in H_0$ et le premier retour s'effectue donc au bout d'un nombre d'années **c** qui ne dépend pas du point déjà choisi dans $\mathcal{V}_0$ (au moins à une année près) car R est petit.

Si nous prenons $(t_o, V_o) \in \mathcal{V}_1$, le premier retour se place dans H_1 ; il s'effectue donc au bout de **c** + 1 années, puisqu'on va de H_0 en H_1, dans $\phi(R)$, en faisant un <u>tour</u> de plus par rapport à l'origine.
De même, si $(t_o, V_o) \in \mathcal{V}_n$, le premier retour s'effectuera au bout de c + n années.

Etudions maintenant le 2^e retour, à partir d'un point $x_o \in \mathcal{V}_n$; on a $x_1 = \phi(x) \in H_n$; il nous faut étudier $\phi(x_1)$; mais $H_n \subset R$ est transformé par ϕ comme l'est R, c'est à dire :

- Etirement.

- Enroulement à l'intérieur de $\phi(R)$, en un ruban plus mince.

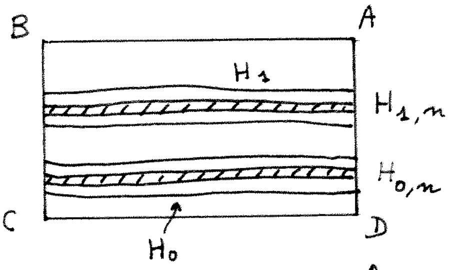


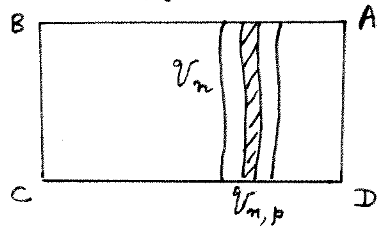
On posera $H_{p,n} = H_p \cap \phi(H_n)$ pour tout $p \geq 0$. Il est clair que $H_{p,n} \subset H_p$ est une bande "horizontale".

On pose maintenant :

$\mathcal{V}_{n,p} = \{ x \in R \mid \phi^2(x) \in H_{p,n} \}$

Il est clair que $\mathcal{V}_{n,p}$ est une bande "verticale" de $\mathcal{V}_n$.





Soit alors $x \in \mathcal{V}_{n,p}$; comme $\phi(x) \in H_n$, on aura un premier retour au bout de $c + n$ années ; $\phi^2(x) \in H_{p,n} \subset H_p$, on aura un second retour à l'origine au bout d'un temps supplémentaire de $c + p$ années.

On définit maintenant par récurrence :

$$H_{S_n, \dots S_2, S_1} = H_{S_n} \cap \phi(H_{S_{n-1}, \dots, S_1})$$

Cet ensemble est une bande "horizontale" incluse dans H_{S_n}.

Puis $\mathcal{V}_{S_1, \dots, S_n} = \{ x \in R \mid \phi^n(x) \in H_{S_n, \dots, S_1} \}$

Il s'agit d'une bande "verticale" incluse dans $\mathcal{V}_{S_1, \dots, S_{n-1}}$

Un état initial $x \in \mathcal{V}_{S_1, \dots, S_n}$ sera suivi de n retours à l'origine (au moins) à des intervalles de temps successifs de $c + S_1, \dots, c + S_n$ années.

Suit alors une suite de nombres entiers $S_n \geq 0$, où $n = 0,1,2,\dots$
Considérons la suite d'ensembles emboîtés

$$\mathcal{V}_{S_1} \supset \mathcal{V}_{S_1, S_2} \supset \dots \supset \mathcal{V}_{S_1, S_2, \dots, S_n} \supset \dots$$

Il s'agit d'une suite infinie d'ensembles compacts emboîtés.
On est donc assuré que l'intersection $\mathcal{V}_S$ de cette famille d'ensembles est non vide; en fait, on peut démontrer que cette intersection est une courbe (la "largeur" des bandes $\mathcal{V}_{S_1, \dots, S_n}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$).

Si l'on prend un état initial dans $\mathcal{V}_S$, il sera suivi d'une infinité de retours en 0, à des intervalles de temps successifs de $c + S_1$, $c + S_2, \dots, c + S_n$, ... années.
Ceci établit "la moitié" de notre théorème.

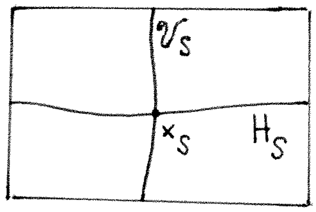
Observons maintenant que, si l'état initial est choisi dans $H_{S_0, \dots, S_n}$, ceci signifie qu'il a été précédé de (n + 1 passages (au moins) à l'origine, le dernier ayant eu lieu $c + S_0$ années auparavant, l'avant dernier $c + S_1$ années avant le dernier, etc...

Si nous nous donnons une suite d'entiers positifs $S_0, S_{-1}, S_{-2}, \dots, S_{-n}, \dots$ il suffira de prendre $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} H_{S_0, S_{-1}, \dots, S_{-n}}$ pour que cet état ait été précédé d'une infinité de passages en 0, à des intervalles de temps successifs (en remontant en arrière) de $c + S_0$ années, $c + S_{-1}$ années, etc... L'intersection considérée est non vide, car définie par une suite de compacts emboîtés ; en fait elle constitue une courbe H_S ($S = (S_0, S_{-1}, \dots)$)

Donnons-nous maintenant une suite doublement infinie (S_n), $n \in \mathbb{Z}$, de nombres entiers positifs. Les courbes

$$\mathcal{V}_S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_{S_1, S_2, \dots, S_n} \quad \text{et } H_S = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_{S_0, S_{-1}, \dots, S_{-n}}$$

se coupent en un point (et un seul) $x_S \in R$.



L'état initial x_S répond clairement à l'énoncé du théorème

C.Q.F.D.

Remarque finale

La discussion précédente mérite d'être résumée comme suit :

Soit E l'ensemble des suites $S = (S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, d'entiers ≥ 0.

L'application $S \mapsto x_S = \mathcal{V}_S \cap H_S$ définit une bijection de E sur un sous-ensemble Σ du quadrilatère R ; on identifiera chaque point de Σ à la suite qui le définit.

L'application ϕ de premier retour définit une bijection de l'ensemble Σ sur lui-même. On vérifie aisément que dans le langage des suites, ϕ a pour expression :

$$S = (S_n) \mapsto S' = (S'_n) \text{ où } S'_n = S_{n-1}$$

Ceci signifie que ϕ représente un décalage d'un rang vers la droite de chaque suite.

Donnons-nous alors une suite périodique, on a donc $\phi^p(S) = S$ pour un certain entier p.

L'état initial correspondant à la suite S définira donc une solution <u>périodique</u> de l'équation différentielle.
On voit donc que l'ensemble des états Σ offre une infinie variété de comportements : solutions périodiques de périodes à peu près arbitraires, et solutions "erratiques".

On comprend aussi qu'une faible perturbation de l'état initial peut avoir des effets très importants sur le mouvement ultérieur.

J. MARTINET

AUDIO - VISUEL

Nous vous informons que depuis cette année, une équipe de l'I.R.E.M. chargée d'explorer les possibilités de l'audio-visuel dans l'enseignement se met en place.

Que ceux qui souhaitent se joindre à elle se manifestent :

- soit pour faire connaître leurs réalisations,
- soit pour faire part de leurs projets ou de leurs besoins.

Pour tout renseignement s'adresser à la Bibliothèque de l'I.R.E.M. - Bâtiment de l'I.R.M.A., bureau 1.
(Tél. : 61 - 48 - 20, poste 285.)