l'ouvert n°11

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L IREM DE STRASBOURG – FEV. 77

3,14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288
41971	69399	37510	58209	74944	59230	78164
06286	20899	86280	34825	34211	70679	82148
08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172
53594	08128	48111	74502	84102	70193	85211
05559	64462	29489	54930	38196	44288	10975
66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120
19091	45648	56692	34603	48610	45432	66482
13393	60726	02491	41273	72458	70066	06315
58817	48815	30920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841
46951	94151	16094	33057	27036	57595	91953
09218	61173	81932	61179	31051	18548	07446
23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381
83011	94912	98336	73362	44065	66430	86021
39501	60924	48077	23094	36285	53096	62027
55693	97986	95022	24749	96206	07496	03041

NOTRE COUVERTURE : C' est dans le bulletin : " Proceedings of the Royal Society of London" numéro du 23 octobre 1873 page 45 que Shanks donne une valeur approchée de π avec 707 décimales. La couverture du présent "Ouvert" en donne les 595 premières. Les décimales trouvées par Shanks figurent sur une spirale au Palais de la découverte à Paris.

Sommaire

Introduction aux fractions continues

Dans un premier temps rappelons l'algorithme d'Euclide pour la recherche du P.G.C.D. de deux entiers naturels non nuls.

Notons le P.G.C.D. de a et b : $a \wedge b$

Soit $a > b$, alors par division euclidienne, on obtient :

$$a = b\,q_o + r_o \qquad 0 < r_o < b$$

Si $r_o = 0$ $\quad a \wedge b = b$

Si $r_o \neq 0$ $\quad a \wedge b = b \wedge r_o$ on effectue une nouvelle division qui donne :

$$b = r_o \cdot q_1 + r_1 \qquad 0 < r_1 < r_o < b$$

Si $r_1 = 0$ $\quad b \wedge r_o = r_o$ d'où $a \wedge b = b \wedge r_o = r_o$

Si $r_1 \neq 0$ $\quad a \wedge b = b \wedge r_o = r_o \wedge r_1$

On peut réitérer le raisonnement jusqu'à obtenir un reste nul. Les restes successifs sont positifs et forment une suite strictement décroissante :

$$(1) \quad 0 \leqslant r_{n+1} < r_n < r_{n-1} < \ldots\ldots\ldots < r_1 < r_o < b$$

Cette suite fait partie de $\mathbb{N}$, $\{ r_o , r_1 , \ldots\ldots r_{n+1} \} \subset \mathbb{N}$ car aucun des restes ne peut être égal à un autre. Cette partie est finie car elle est majorée par b. Il existe donc un entier n tel que la division de r_{n-1} par r_n donne un reste nul : r_{n+1} .

En effet, si aucun des restes sudcessifs n'était nul, les divisions pourraient se poursuivre indéfiniment et la suite (1) ne serait pas finie ; or elle est constituée d'éléments de $\mathbb{N}$ tels que $\forall i \quad r_i \in [0 , b]$. On a donc :

$$a \wedge b = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} a = b \cdot q_o + r_o \\ b = r_o \cdot q_1 + r_1 \\ r_o = r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_i = r_{i+1} \cdot q_{i+2} + r_{i+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + (r_{n+1}) \end{array} \right.$$

Exemples de disposition pratique :

a) $2070 \wedge 368$

q_i		5	1	1	1	2
	2070	368	230	138	92	46
r_i	230	138	92	46	0	

$2070 \wedge 368 = 46$

b) $97 \wedge 42$

	2	3	4	3
97	42	13	3	1
13	3	1	0	

$97 \wedge 42 = 1$

On voit apparaître la suite des quotients successifs $\{2, 3, 4, 3\}$. Si maintenant on calcule :

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}}$$ on trouve $42/97$.

Donc :

$$\frac{97}{42} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}$$

On peut noter $42/97 = \{2, 3, 4, 3\}$ et $97/42 = (2)\{3, 4, 3\}$

Définissons maintenant ce qu'on appelle une fraction continue :

Considérons la suite de naturels $\{x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots x_n\}$. On appelle fraction continue le rationnel x écrit sous la forme :

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}}$$

Relativement à la fraction continue x on appelle réduites, ou convergents successifs les rationnels de la suite :

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{x_1} \quad ; \quad \frac{u_2}{v_2} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2}} \quad ; \; \ldots\ldots \qquad \frac{u_n}{v_n} = x$$

Ces réduites ont des propriétés fort intéressantes. On prend :

$$u_1 = 1 \qquad\qquad v_1 = x_1$$

$$u_2 = x_2 \qquad\qquad v_2 = x_1\, x_2 + 1$$

$$u_3 = x_2\, x_3 + 1 \qquad\qquad v_3 = (x_1\, x_2 + 1)\, x_3 + x_1$$

On voit apparaître une loi de formation indiquée par u_3 et v_3 :

$$u_3 = u_2\, x_3 + u_1 \qquad\qquad v_3 = v_2\, x_3 + v_1$$

Montrons par récurrence que :

$$(3) \qquad \begin{cases} u_i = u_{i-1}\, x_i + u_{i-2} \\ v_i = v_{i-1}\, x_i + v_{i-2} \end{cases}$$

Soit en effet :

$$\frac{u_i}{v_i} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}}} \qquad (4)$$

Pour obtenir u_{i+1}/v_{i+1} il suffit d'ajouter à l'expression (4) $\cfrac{1}{x_i + \cfrac{1}{x_{i+1}}}$ soit $\dfrac{x_{i+1}}{x_i\, x_{i+1} + 1}$. Il s'en suit que $\dfrac{u_{i+1}}{v_{i+1}}$ s'obtient en remplaçant $1/x_i$ par la quantité : $\dfrac{x_{i+1}}{x_i\, x_{i+1} + 1}$, ainsi :

$$\frac{u_{i+1}}{v_{i+1}} = \frac{u_{i-1}\dfrac{x_i\, x_{i+1} + 1}{x_{i+1}} + u_{i-2}}{v_{i-1}\dfrac{x_i\, x_{i+1} + 1}{x_{i+1}} + v_{i-2}} = \frac{(u_{i-1}\, x_i + u_{i-2})\, x_{i+1} + u_{i-1}}{(v_{i-1}\, x_i + v_{i-2})\, x_{i+1} + v_{i-1}} = \frac{u_i x_{i+1} + u_{i-1}}{v_i x_{i+1} + v_{i-1}}$$

La relation (3) donnant u_i et v_i est donc vraie.

Comme premier exemple, calculons les réduites successives avec la suite notée $X = \{x_1 , x_2 , \ldots\ x_n\} = \{1 , 1 , 1\ \ldots , 1\}$ et $n = 10$; on obtient avec $u_1 = 1$, pour u_i : $\{1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55\}$

pour v_i : $\{1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89\}$

D'où pour $\dfrac{u_i}{v_i}$: $\left\{1 , \dfrac{1}{2} , \dfrac{2}{3} , \dfrac{3}{5} , \dfrac{5}{8} , \dfrac{8}{13} , \dfrac{13}{21} , \dfrac{21}{34} , \dfrac{34}{55} , \dfrac{55}{89}\right\}$

Les valeurs sont les inverses des rationnels formanat la suite de Fibonacci, suite qui a pour limite $(1 + \sqrt{5})/2 \simeq 1,618\,033\,96\ldots$ liée au nombre d'or cher aux artistes.

Prenons maintenant comme suite celle constituée par 8 termes tous égaux à 2 . $u_1 = 1$; $v_1 = 2$; on obtient :

$$\frac{u_i}{v_i} = \left\{ \frac{1}{2} , \frac{2}{5} , \frac{5}{12} , \frac{12}{29} , \frac{29}{70} , \frac{70}{169} , \frac{169}{408} , \frac{408}{985} \right\}$$

soit à 10^{-7} près par défaut :

$\{ 0,5$; $0,4$; $0,4166666$; $0,4137931$; $0,4142857$; $0,4142011$; $0,4142156$; $0,4142131 \}$

On constate que la suite des réduites d'ordre impair est décroissante, celle des réduites d'ordre pair est croissante. De plus les deux suites tendent vers $-1 + \sqrt{2}$ $0,414135...$ Ces propriétés se démontrent.

Une "analogie" existe entre les fractions continues et la fonction homographique.

Soit $f : x \dashrightarrow \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c} \right)$ et $c \neq 0$

La variation de f dépend du signe de la dérivée $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$. Cette dérivée peut être notée : $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

On appellera déterminant de f le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

On peut de même associer à la fonction homographique sa <u>matrice</u> dont le déterminant est Δ .

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Ainsi on peut symboliquement écrire :

$$y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ou plus simplement $y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .x$

Si maintenant on compose deux fonctions homographiques d'après le schéma :

$$t \xrightarrow{\ g\ } x \xrightarrow{\ f\ } y$$

alors $f_o g\,(t) = f\,(\,g(t)\,) = f\,(x) = y$ et si $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ et $g(x) = \dfrac{a'x + b'}{c'x + d'}$ il vient :

$$y = \frac{(aa' + bc')t + (ab' + bd')}{(ca' + dc')t + (cb' + dd')} \qquad (5)$$

Mais si les matrices respectives de f et g sont F et G , alors comme pour les matrices d'applications linéaires $\mathrm{mat}(f_o g) = F . G$ ce qui donne en appliquant la règle du produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} = F \cdot G$$

et $\quad f_o g(t) = F \cdot G \cdot T$ $\quad$ en comparant à (5)

de même $\quad \Delta(f_o g) = \Delta(f) \cdot \Delta(g)$

Comment se servir des matrices ainsi définies pour aborder les fractions continues.

Reprenons la recherche du P.G.C.D. de 97 et 42 . Soit :

$$\begin{aligned} 97 &= 42 \times 2 + 13 \\ 42 &= 13 \times 3 + 3 \\ 13 &= 3 \times 4 + 1 \\ 3 &= 1 \times 3 \end{aligned}$$

La suite $\{2 , 3 , 4 , 3\}$ se retrouve. Si on pose $a = 97$; $b = 42$ il vient :

$$\begin{aligned} a &= b.2 + r_o & \qquad r_o &= 13 < b \quad (=42) \\ b &= r_o.3 + r_1 & r_1 &= 3 < r_o \quad (=13) \\ r_o &= r_1.4 + r_2 & r_2 &= 1 < r_1 \quad (=3) \\ r_1 &= r_2.3 \end{aligned}$$

D'où si $x = \dfrac{a}{b}$; $y = \dfrac{b}{r_o}$; $z = \dfrac{r_o}{r_1}$; $t = \dfrac{r_1}{r_2}$ on voit que :

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{1}{y} = \frac{2y+1}{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . y \\ y &= 3 + \frac{1}{z} = \frac{3z+1}{z} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . z \\ z &= 4 + \frac{1}{t} = \frac{4t+1}{t} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . t \\ t &= 3 \end{aligned}$$

x , y et z sont des fonctions homographiques de matrices particulières $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tous les déterminants valent (-1) .

Calculons x par la composée des applications. L'on obtient :

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . 3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . 3 = \begin{pmatrix} 30 & 7 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} . 3 = \frac{97}{42}$$

Ceci va permettre une nouvelle définition des réduites.

Mais auparavant rappelons que nous sommes partis de la suite

$$(2)\{3 , 4 , 3\} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3}}}$$

Chaque élément de cette suite ayant donné naissance à une matrice du type $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\Delta = -1$. Le déterminant du produit de deux telles matrices est 1 .

En effet :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + 1 & \alpha \\ \alpha' & 1 \end{pmatrix}$$

a pour déterminant $\alpha\alpha' + 1 - \alpha\alpha' = 1$ quelque soit α et α'.

Ceci va nous permettre de généraliser :

Partant d'une suite $\left\{ \alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots\ldots \alpha_i , \ldots\ldots \alpha_n \right\}$

les matrices déduites $\begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_i$ permettent de calculer x par la relation :

$$x = (A_1 . A_2 \ldots\ldots A_n). \quad {}_n$$

Il s'en suit que pour les produits d'ordre impair les déterminants seront égaux à -1 et à $+1$ pour l'ordre pair.

Exprimons $M_n = A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ à l'aide de M_{n-1} .

Soit donc $\quad M_{n-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \Delta(M_{n-1}) = \pm 1$

or $\quad M_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_n + b & a \\ c\alpha_n + d & c \end{pmatrix}$

$$\Delta(M_n) = bc - ad = (-1)\,\Delta(M_{n-1})$$

Retenons que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha_n + b \\ c\alpha_n + d \end{pmatrix}$ qui donne la première colonne de M_n ,

alors que la deuxième est la première de M_{n-1} .

On appelle réduite le rapport des termes des deux colonnes :

$$R_n = \frac{a\alpha_n + b}{c\alpha_n + d} \quad \text{est la réduite d'ordre } n \text{ .}$$

Soit par exemple la suite (2)$\left\{ I , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 \right\}$. On arrive à :

$$\frac{2}{1} , \frac{3}{1} , \frac{8}{3} , \frac{11}{4} , \frac{30}{11} , \frac{41}{15} , \frac{112}{41} , \frac{153}{56} , \frac{418}{156} , \frac{571}{209}$$

qui sont les réduites successives de $571/209$.

On a par exemple $\quad M_8 = \begin{pmatrix} 153 & 112 \\ 56 & 41 \end{pmatrix}$

$$\downarrow$$

$$R_8$$

Les réduites de $209/571$ étant alors données par la suite :

$$\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{3}{8} , \frac{4}{11} , \frac{11}{30} , \ldots\ldots \text{etc.}$$

On remarque que toutes ces réduites sont des fractions irréductibles.

Supposons une fonction homographique telle que sa matrice soit composée de termes tous positifs. Supposons de même que la variable soit positive.

Prenons par exemple : $y = \dfrac{41x + 30}{15x + 11}$ (7) Comme $x \geqslant 0$, y est toujours définie. De plus :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 41 & 30 \\ 15 & 11 \end{vmatrix} = 1$$

On a donc dans ce cas $41 \,.\, 11 - 15 \,.\, 30 = 1$

Dans le cas général on a $ad - bc = \pm 1$ si le déterminant s'écrit $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

et si a , b , c , d sont des naturels, alors d'après le théorème de Bachet-Bezout, les deux termes d'une même ligne ou d'une même colonne sont premiers entre eux. Les réduites sont donc des fractions irréductibles.

De plus, comme a , b , c , d sont dans $\mathbb{N}$ et que x est également dans $\mathbb{N}$:

si $x \longrightarrow \infty$ $\qquad y \longrightarrow a/c$

si $x = 0$ $\qquad y = b/d$

Donc y est compris entre a/c et b/d . Ainsi (7) est compris entre $\dfrac{30}{11}$ et $\dfrac{41}{15}$.

Avant de terminer, quelques mots sur les réduites de π.

on a : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$

d'où :

$$A = \frac{15707963}{5000000} < \pi < \frac{31415927}{10000000} = B$$

ce qui donne deux suites :

pour A : $(3) \{7 , 15 , 1 , 243 , 1 , 1 , 9 , 4 , 1 , 4\}$

pour B : $(3) \{7 , 15 , 1 , 354 , 2 , 6 , 1 , 4 , 1 , 2\}$

Ces deux suites ont les quatre premiers termes égaux. Pour ces termes on trouve les réduites suivantes :

$$\frac{3}{1} , \frac{22}{7} , \frac{333}{106} , \frac{355}{113}$$

et : $$3 < \frac{333}{106} < \pi < \frac{355}{113} < \frac{22}{7}$$

C'est Archimède (250 Av. J.C.) qui indiqua 22/7 et Adrien Metius (1571 - 1635) qui donna 355/113 .

22/7 donne π à 10^{-2} près par excès.

355/113 donne π à 10^{-6} près par excès.

J. Goerg

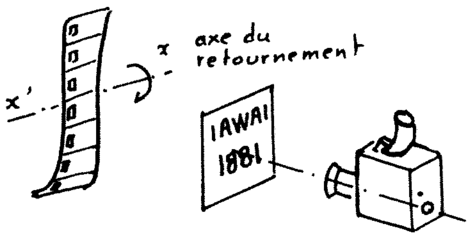
Titres

Mon premier : D'une excursion au volcan IAWAI , nº 1331 du catalogue général des volcans en activité, j'avais rapporté un film en super 8.

Pour le titre, je comptais filmer :

I A W A I
I 8 8 I

, les caractères étant écrits avec des petites scories juxtaposées, puis, en soufflant dessus, éparpiller les dites scories. Projetée à l'envers une telle séquence montre les scories qui se rassemblent miraculeusement pour former le titre désiré. Malheureusement ma caméra ne filme pas en marche arrière. Au montage, il faut donc retourner le film et le coller à l'envers pour qu'il défile comme prévu. Mais les caractères sont alors retournés aussi. J'ai donc filmé avec la caméra à l'envers elle aussi : Et à la projection c'était très réussi.

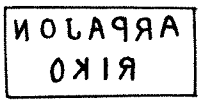


Mon second : D'une visite à une foire aux haricots, j'avais rapporté un film et je pensais le titrer :

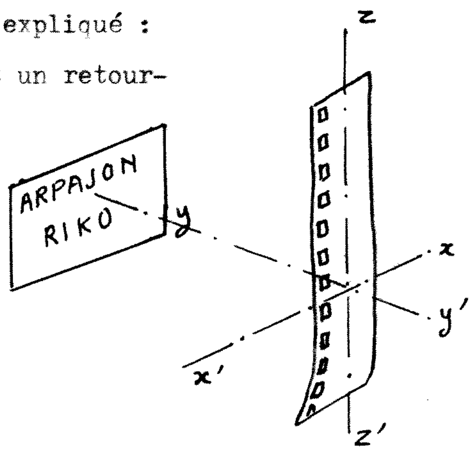
A R P A J O N
R I K O

, lettres écrites avec des haricots à disperser suivant la même technique.

Projection devant mon fils, élève de TC ; résultat sur l'écran :



ce n'est pas du russe ; mon fils m'a expliqué : en filmant avec la caméra "à l'envers", le film subit un retournementautour d'un axe "debout" y'y (perpendiculaire au plan du titre). En le collant à l'envers le film subit un 2éme retournement autour de l'axe x'x, parallèle au bord inférieur du cadre. Théorème : Le composé de ces deux demi-tours est un demi-tour d'axe z'z. D'où le résultat ! Mais le premier titre était symétrique par rapport à z'z !



J'aurais dû faire subir au film, avant collage, ce dernier demi-tour d'axe z'z . C'est impossible en super 8, la perforation étant unilatérale.

On doit donc filmer à l'envers un titre écrit "à l'envers" (droite --- gauche) et coller "à l'envers". Car $S_{y'x} \circ S_{y'y} \circ S_{z'z} = Id$.

Mon fils n'a pas perdu son temps en TC.

André Rocland
Baden-Baden

Un livre : Histoire comparée des numérations écrites ; (par Geneviève Guitel)

Dès que les hommes ont su écrire, ils ont cherché à écrire les nombres, et de là à créer un système de numération. Pour que ce système de numération réussisse il fallait qu'il permette d'effectuer simplement et rapidement les opérations nécessaires à la vie économique de l'époque. D'autre part, les nombres ont permis de mesurer entre autre le temps et c'est souvent par ce biais que les différentes civilisations ont été amenées à représenter les grands nombres. Cette recherche a souvent débouché sur des impasses qui ont condamné le système utilisé ; le hasard, ailleurs, a permis d'excellentes trouvailles.

Dans une thése monumentale, oeuvre de toute une vie, Geneviève Guitel a réussi non seulement à décrire plus de vingt-cinq système de numération mais aussi à montrer que tous ces systèmes peuvent se classer en trois grands types qui chacun se subdivisent en deux ou trois sous-systèmes. Le mérite de l'auteur, c'est d'avoir construit ce classement à partir de quelques numérations connues et d'une réflexion théorique.

Considérons le polynôme ordonné :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_i x^i + \dots\dots\dots + a_o$$

Un tel polynôme peut-être considéré comme l'écriture d'un entier N dans la base x, à condition que les a_i vérifient :

$$0 \leq a_i < x$$

Pour écrire N plusieurs solutions s'offrent à nous :

I) Chaque x^i est représenté par un symbole qui est répété autant de fois que nécessaire, c'est-à-dire a_i fois. L'ordre des caractères est alors, en théorie, arbitraire. L'exemple classique est le système romain dans sa première acceptation :

M C C C X X X X I I

(Comme d'autres systèmes, il y a ici introduction de chiffres supplémentaires - diviseurs de la base - pour abréger l'écriture).

II) Chaque x^i est représenté par un symbole, ainsi que chaque a_i . L'exemple classique est la numération parlée qui est malheureusement entachée de nombreuses irrégularités dans la plus part des langues :

On devrait dire : un mille neuf cent sept dix sept

on dira : mille neuf cent septante sept

ou encore : mille neuf cent soixante dix sept.

Les chinois avec leur écriture idéographique ont généralisé ce système. Dans le tableau ci-dessous, la lecture se faisant de haut en bas, on lit dans la première colonne à gauche les dix premiers nombres. La deuxième colonne donne les nombres 100 , 1 000 , 10^4 et 10^8 successivement. Dans les trois autres colonnes, on lit respectivement : 3 468 ; 15 702 ; 860 531 ; ce dernier nombre est écrit $((8 x 10)+6) x 10^4 + (5 x 100) + (3 x 10) + 1$.

一二三四五六七八九十	百千萬億	三千四百六十八	一萬五千七百二	八十六萬五百三十一

Dans ce sytème les chiffres sont partiellement libres ; il faut toujours regrouper les a_i avec les x^i correspondants.

III) Dans ce dernier type de représentation, seuls les a_i admettent un symbole. Il y a donc x-1 symboles et les x^i sont représentés par la position des a_i . Il est alors nécessaire d'introduire un $x^{\text{ième}}$ chiffre (0) pour symboliser une case vide. C'est l'exemple donné par notre système de numération. Mais les mayas, les babyloniens, ... l'ont aussi utilisé avec des variantes.

Cette simplicité théorique cache un foisonnement de cas particuliers qui s'interpénètrent les uns les autres, masquant parfois la réalité du système. Car dans les premières civilisations, tous les systèmes de numération ont pour but de noter des nombres concrets, c'est-à-dire des nombres dont l'ordre de grandeur est connu. Il n'est donc pas toujours gênant d'utiliser le même symbolisme pour écrire 5 et 50 000 par exemple. D'autre part l'usage du système de numération n'est pas le même suivant la nature de ce que l'on mesure ; voir chez les romains l'écriture des sommes d'argent : HS III XII DC

qui veut dire 312 600 sesterces

N'est-on pas là à la limite d'une numération de position ?

Le calendrier a eu également une très forte influence sur la façon de compter et si la numération de base 60 a imposé une année de 360 jours chez les babyloniens, c'est l'année de 360 (+5) jours qui a imposé chez les mayas et les aztèques une irrégularité de taille dans l'écriture des nombres. En effet, ces deux peuples qui possédaient une numération orale très régulière de base 20 , ont introduit dans la numération écrite de position lea quantité 360 à la place de 400 (soit 20^2).

Dans la reproduction ci-contre, on lira les nombres de haut en bas. Les ovales correspondent à zéro, un point représente un et une barre cinq. (un chiffre est donc un assemblage de barres et de points à concurrence de 19, (20 - 1). Dans la 3º colonne à partir de la gauche (en bas) on lit le nombre : 2x360 + 14x20 + 1 = 1 001

Dans le tableau ci-dessous on a l'addition des nombres suivants : 131 040 + 15 600 + 3 900 + 780 = 151 320; En se souvenant que la troisième tranche représente seulement 360 , on pourrait transcrire ces nombres sous la forme :

13 . 04 . 00 . 00 +

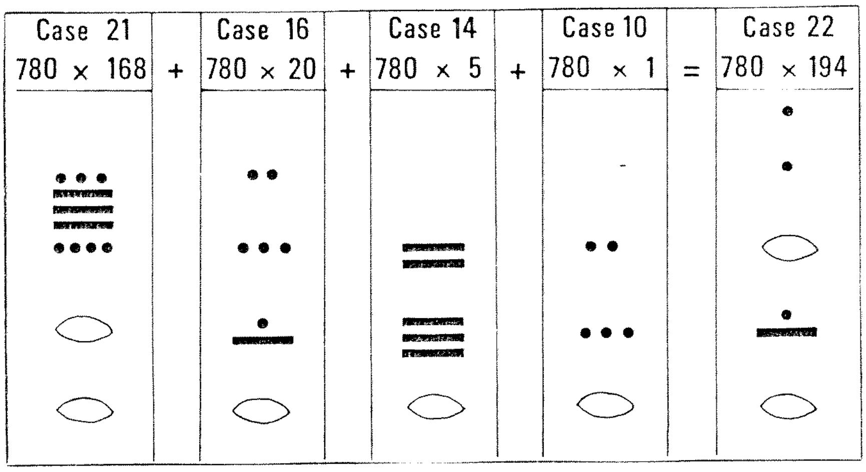
02 . 03 . 06 . 00 +

[redacted] 10 . 15 . 00 +

02 . 03 . 00 =

01 . 01 . 00 . 06 . 00

Ces deux exemples sont extraits du codex de Dresde.



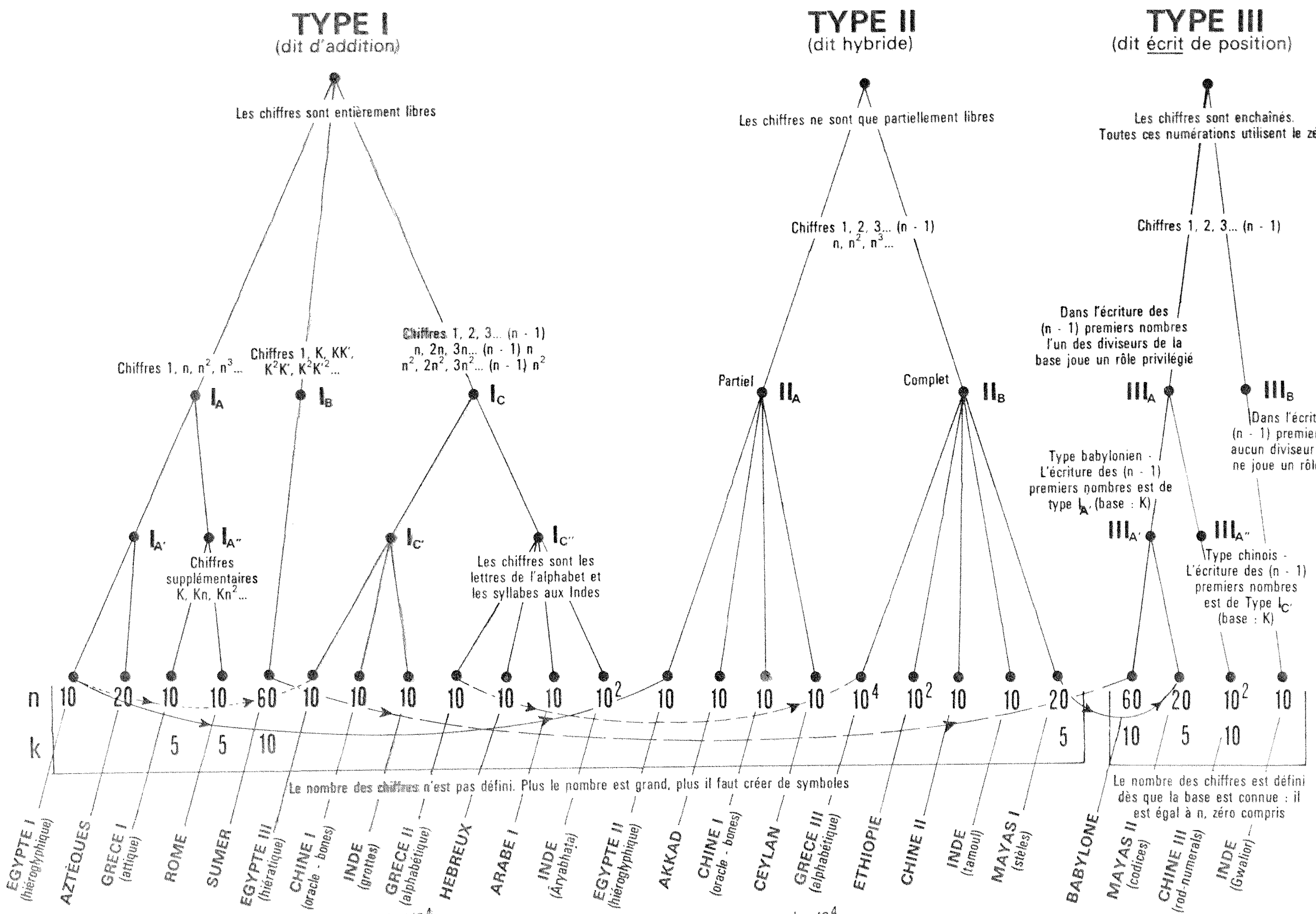
A partir de l'histoire des numérations, ce livre débouche sur bien d'autres sujets en rapport avec le calcul. L'auteur sait nous faire partager ses découvertes, sa progression, ses éspérances, ses erreurs. On y aborde :

- Les fractions egyptiennes : qui n'ont que des numérateurs égaux à 1 ; tout nombre fractionnaire inférieur à l'unité devant être décomposé en somme de fractions distinctes, ce qui amenait les égyptiens à faire des décompositions très compliqués. On lira avec intérêt l'étude théorique consacrée à ce sujet.
- Les lignes trigonométriques : que l'on peut faire remonter au cinquième ou sixième siècle de notre ère. Elles apparaissent sous forme d'une table de différence de nombres proportionnels aux sinus. Le coefficient de proportionnalité est 3438, c'est-à-dire, à l'unité près, le nombre de minutes contenues dans un demi-cercle et divisé par pi. Les sinus sont donnés de 3º 45' en 3º 45' (ce qui prouve que la table a été obtenue à partir de l'hexagone inscrit en doublant quatre fois le nombre des côtés).
- Les équations diophantiennes : avec les calendriers religieux et civils mayas qui ont conduit les prêtres à de prodigieux calculs.
- Le système binaire : utilisé par les peseurs d'or africains. C'est le système qui permet de minimiser une boîte de poids, de même que le sytème ternaire en utilisant les deux côtés d'une balance. Cela fait comprendre le rôle important de 2 , 3 et 2x3 = 6 dans les numérations.
- Le calendrier :
- Les abaques et les bouliers : les méthodes de calcul sur ces instruments dans les différents pays et leurs rôles dans l'évolution de la numération.

....

On regrette que G. Guitel ne nous ait pas décrit d'avantage les diverses numérations parlée, ce qui nous aurait fait découvrir bien d'autres bases (2, 5, ...) ; qu'elle n'ait pas pu nous décrire le système des quipu incas, ... Mais le livre est déjà épais (850 pages, 73 tableaux, 50 planches .... et 190 F. ! édité chez Flammarion)? et nous ne pouvons qu'espérer qu'elle ou un successeur nous fournisse un jour quelques compléments à cet ouvrage appelé à faire date dans l'histoire des mathématiques. Elle même suggère de nombreux développements comme sur le calendrier ou sur les systèmes de poids et mesure, ...

La critique est aisée,... Puis-je cependant m'en permettre deux : La première à trait au tableau de classification de la page suivante. Quoi que l'auteur en dise, la distinction entre les cas I_B et $I_{A''}$ ne me semble pas nécessaire puisque ces deux cas sont mathématiquement isomorphes et qu'il ne différent que par le



LÉGENDE

n : est la base de la numération

K : est un diviseur privilégié de la base ; il peut jouer le rôle de base auxiliaire. On pose n = KK'

▶ : les flèches indiquent qu'une numération est passée d'un type à un autre type. On constate qu'il s'agit toujours d'une évolution à sens unique : les formes les plus primitives réussissent ainsi à atteindre les formes de grande qualité intellectuelle

TABLEAU 2

Classification hiérarchisée des numérations écrites

processus historique de formation, or tout un chapitre de l'ouvrage est consacré aux passages possibles d'un type à un autre, c'est donc à ce niveau qu'il eut fallu situer la distinction. La deuxième critique a trait au problème des ligatures qui apparaissent dans l'écriture des nombres chez les égyptiens et dans la première numération arabe. A mon avis les ligatures ne doivent pas gêner un arabisant qui analyse naturellement une ligature en ses composantes de même qu'un français reconnaît toutes les lettres aussi bien dans l'écriture de "longtemps" que dans celle de " longtemps". ". Bien que ce problème soit délicat, il ne mérite pas qu'on s'y attarde autant qu'elle le fait.

En conclusion, nous avons là un livre très lisible, dès la classe de seconde ou même avant, un livre passionnant que l'on lit quelquefois comme un roman policier, impatient de savoir comment telle civilisation saura résoudre les problèmes qu'elle se pose ! Un livre dont je ne saurait trop recommander la lecture à tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques et qui devrait, malgré son prix, apparaître rapidement dans les centres de documentation des lycées.

Une réforme de l'enseignement n'a de chances de modifier l'école que si les hommes - au-delà des textes rigoureux et ambitieux qui constituent leur feuille de route - sont aptes à maîtriser la réalité qu'ils ont en charge. Malheureusement, la formation des maîtres est toujours... la prochaine réforme. On aurait pu imaginer de commencer par là, mais cela aurait été une révolution trop profonde dans les moeurs de l'enseignement français, où la tradition veut que l'on se soucie d'abord de mettre au point de beaux textes et, sur le papier, de belles institutions.

Bruno Frappat
Le Monde du 8 janvier 77
L'école et l'égalité.

L'ouvert : Responsable de la publication :
Jean Lefort, 22 rue A. Schweitzer , Wintzenheim, 68000 COLMAR
Impression et secrétariat :
I.R.E.M. de Strasbourg , rue du Gl. Zimmer , Strasbourg.

La communication dans la classe

Un groupe I.R.E.M. s'est penché sur le problème de la "communication dans la classe". L'équipe de l'Ouvert a pensé que cette démarche intéresserait nombre de professeurs et serait propice à lancer un débat sur certains aspects de la dynamique d'une classe.

Monsieur Jeanjean a accepté de reprendre le document rédigé par le groupe pour en faciliter la lecture.

Avec un groupe d'enseignants appartenant à différents types d'établissements (C.E.T., C.E.S., Lycées), nous nous sommes proposés de réfléchir au problème de la communication dans la classe. Les questions qui se posaient étaient multiples. Que se passe-t-il dans la classe lorsque le maître parle ? Est-il facile pour un élève de prendre la parole, de poser des questions, de demander des informations, de suggérer une idée ? Pourquoi tant d'élèves ne prennent-ils jamais l'initiative d'une question ou n'interviennent-ils pas lorsque le maître veut donner la parole à la classe ? Qu'est ce qui empêche ou facilite la communication ? Qu'est-ce que le maître perçoit des échanges qui se font et dans lesquels il est impliqué ? Quelles transformations cela apporte-t-il dans les échanges entre le maître et les élèves ? Quels sont les différents modes de communication qui interviennent, mots, gestes, regards, intonations ? Quelles sont les relations interpersonnelles qui s'établissent dans la classe ? Que recouvre cette "intuition affective" que le maître et les élèves peuvent avoir les uns des autres ? ...

Pour réfléchir à ces questions, il semblait important de partir de ce qui était effectivement vécu par chacun dans la "réalité quotidienne des classes". Avant de s'engager dans l'examen et la discussion des résultats de recherches et d'expériences déjà faites en ce domaine, la plupart des membres du groupe voulaient d'abord mieux prendre conscience de ce qui se passait effectivement dans leurs classes.

Pour cela des visites mutuelles durant les heures d'enseignement s'imposaient, l'échange et l'analyse des observations devant constituer le premier travail du groupe.

Dans ces conditions, même si l'objectif n'était pas directement l'examen de l'attitude du maître, chacun acceptait de s'exposer aux remarques de ses collègues. Toutefois cela ne garantissait nullement au point de départ une liberté de parole pour le visiteur et une parfaite sérénité pour celui qui recevait : pour certains il fallait surmonter une certaine peur inavouée, génératrice de fuite et de conflits, et qui pouvait paralyser l'intégration et le travail du groupe. Telle était la tâche qui était fixée.

I. LES GRILLES D'OBSERVATION

Comme chacun se sentait un peu désarmé pour aller observer les classes, deux grilles ont été proposées. D'une part le schéma d'analyse établi par Landsheere et Bayer (Revue Française de Pédagogie n° 24 - 1973) ; d'autre part une grille d'observation avait été élaborée en vue de ce travail de groupe et présentait l'avantage de pouvoir être utilisée immédiatement et non sur un enregistrement au magnétophone. Or, ces grilles ont été vite abandonnées. Elles étaient destinées à des spécialistes capables d'identifier rapidement des comportements.

Nous prîmes donc le parti de confectionner notre propre outil. Outil adapté à notre observation, simple, susceptible d'être utilisé par un grand nombre d'observateurs après un temps d'adaptation très court. Après une longue période de gestation, notre instrument appelé "CHAPELET" vit le jour.

LE CHAPELET : FICHE TECHNIQUE

Domaine d'application : le discours dans la classe.

Unité : la phrase.

Critère retenu : Il nous a paru judicieux de nous intéresser et de noter exclusi- la forme (qui nous renseigne sur la signification de la phrase en négligeant complètement le fond).

Dans la langue française il existe trois signes de ponctuation principaux (. ! ?). Chacun d'eux termine une phrase de nature et de signification différente. Nous allions identifier les phrases, noter leur provenance (maître ou élève) et leur enchaînement.

Le critère retenu était donc la signification syntaxique de la phrase.

Code :

signification syntaxique de la phrase	signe de ponctuation	notre terminologie	symbole	
			professeur	élève
affirmation négation	.	affirmation		
exclamation	!	ordres jugements de valeurs		
interrogation	?	question	○	●

Remarque : Nous avons regroupé affirmation et négation sous le vocable affirmation. (Elles sont utilisées toutes deux pour affirmer quelque chose.) Nous avons diversifié les exclamations en ordre et jugement de valeur. Ces deux sortes d'exclamation (en particulier leur présence ou leur absence, leur fréquence, ...) nous paraissent intuitivement de bons indicateurs de l'état de la relation dans une classe.

Principe d'enchaînement : l'observateur après avoir identifié la phrase inscrit le symbole correspondant de haut en bas si la phrase contient un élément nouveau qui permet une progression ; de droite à gauche si la phrase clarifie, résume, reprend le discours ou si elle est étrangère au discours.

<u>Exemple</u> : (la scène se passe dans le bureau du Gardien-Chef d'un pénitencier de l'Ouest, entre le gardien-chef, 1 avocat, Joe Dalton, Rantamplan).

<u>L'avocat</u> – qu'est-ce Monsieur ? ....

<u>Le gardien</u> – c'est Joe Dalton, un de nos fidèles clients ....

– c'est d'ailleurs pour nous assurer sa fidélité que nous l'avons enchaîné à Rantamplan ....

<u>L'avocat</u> – Joe Dalton ? ....

– ça tombe bien ....

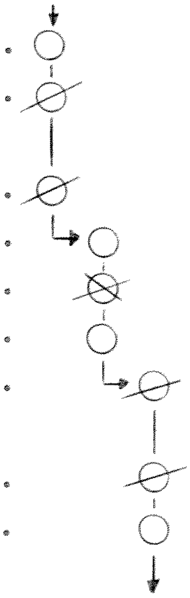
– il y a quelque chose dans le testament qui le concerne ......

<u>Rantamplan</u> – quelle chaleur ....

<u>L'avocat</u> – moi, Stevenson laisse toute ma fortune gagnée au jeu au seul être intéressant que j'ai connu : Rantamplan ....

<u>Le gardien</u> – un testament en faveur d'un chien, est-ce légal ? ....

......



Il resterait à attribuer une couleur à chaque intervenant pour savoir en lisant le chapelet à quel moment du dialogue il est intervenu et comment il est intervenu.

II. CONDITIONS DE NOTRE OBSERVATION

Ayant adopté le chapelet comme instrument d'observation, les six membres du groupe ont décidé de l'utiliser dans différentes conditions pour mieux le tester.

Pendant l'année scolaire en cours, nous nous sommes rendus dans plusieurs classes pour y recueillir un certain nombre de chapelets à partir desquels ont été élaborées les grilles de dépouillement dont il ne sera pas fait état ici, étant donné que leur lecture peut paraître très aride.

a) Nous avons essayé, dans la mesure de nos moyens, de "faire varier"
- les classes visitées : 6ème, 5ème, 4ème, 3ème de C.E.S. ; classe préparatoire à l'apprentissage de C.E.T.,
- les matières enseignées : maths, technologie, biologie, français,
- les collègues qui ont bien voulu nous recevoir et que nous tenons à remercier,
- le nombre d'observateurs : un ou deux.

b) Toujours dans le but de tester notre mode d'observation, nous avons effectué une confrontation chapelet-observateur. Dans le premier cas le chapelet a été construit par l'observateur assistant au cours ; dans le deuxième cas le chapelet a été construit par l'observateur écoutant le même cours enregistré au magnétophone.

c) Citons deux autres façons de tester ce mode d'observation :
- le même observateur s'est rendu chez le même collègue à trois semaines d'intervalle dans la même classe,
- le même observateur s'est rendu chez le même collègue dans deux classes différentes.

d) Notons une observation d'un type particulier puisqu'elle a porté sur une année scolaire. Elle a été effectuée par le même observateur dans une classe de 4ème pendant les cours de maths assurés par un des membres du groupe qui assistait donc à nos réunions et qui a tenu compte de nos réflexions. La grille élaborée à partir de ces chapelets (année scolaire 1974-1975) permet de relever une certaine évolution dans la classe observée (un essai d'analyse de ces trois chapelets vous est proposé en III et IV). Ces conditions d'observation restent évidemment perfectibles mais nous ne prétendons pas coiffer nos réflexions "d'un chapeau d'exactitude scientifique".

Elaboration d'un chapelet : afin d'aider le lecteur, nous lui proposons de suivre l'élaboration d'un chapelet. Il s'agit d'un chapelet établi à partir d'un dialogue enseignant-élèves dans une classe de 4ème pendant un cours de maths. L'enseignant vient de clore la discussion sur la réflexivité et afin de relancer le dialogue, il pose la question suivante :

Transcription réelle

<u>E</u> : "Autre propriété ?" 1

<u>E</u> (désignant un élève) : "Patrick" 2

<u>PATRICK</u> : "Symétrie... Euh... Si a... " 3

<u>E</u> : "Si tu veux choisir des nombres,
choisis" 4

<u>PATRICK</u> : "Par exemple a... euh... a est
en relation avec b et b est en relation
avec a" 5

<u>UN AUTRE ELEVE</u> : "Donc a... " 6

<u>E</u> : "Ca fait la symétrie, hein. Et ça se 7
traduit comment aujourd'hui avec cette
relation là ?" 8

<u>BERTRAND</u> : "a est inférieur ou égal à b ;
b est inférieur ou égal à a" 9

<u>BERTRAND</u> (se corrige et est corrigé par
d'autres élèves) :
"b est supérieur ou égal à a" 10

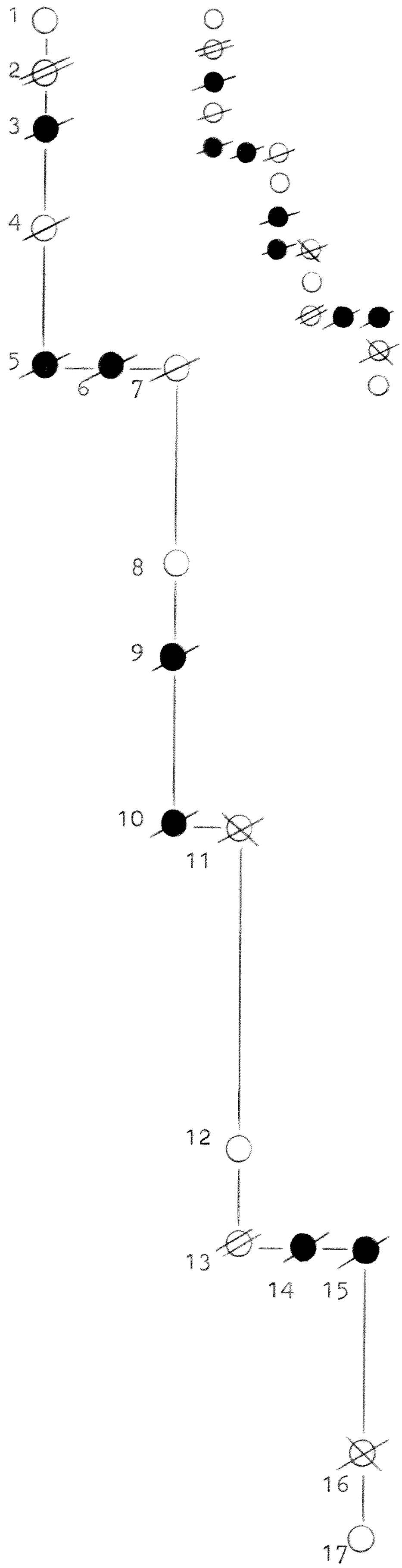
<u>E</u> : "Mais là vous avez changé de relative
entre temps" 11
(On entend en sourdine : Monsieur,
Monsieur.)
<u>E</u> : "Avant Patrick nous disait a est en
relation avec b et b est en relation avec
a et là à travers ce qu'a dit Bertrand
il s'est passé des choses" 12

<u>E</u> (désigne un élève qui lève le doigt) :
"Jean-Louis" 13

<u>JEAN-LOUIS</u> : "a = b, b = a" 14

<u>REACTION DE PLUSIEURS ELEVES</u> : "a est
l'opposé de b et b est l'opposé de a" 15

<u>E</u> : "Mais on ne parle pas d'opposé.. 16
Effectivement symétrique voudrait dire en
prenant un exemple 5 "7 alors 7 ... ?" 17



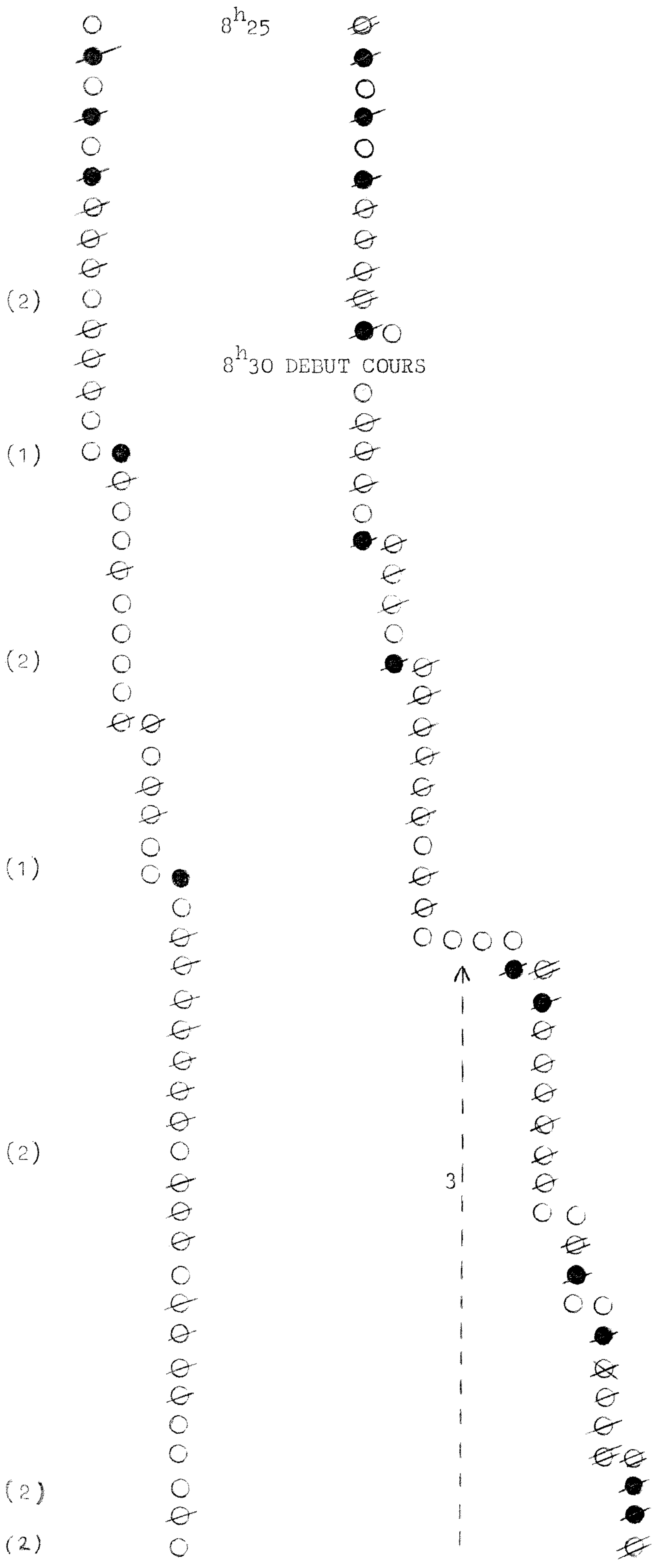
Remarques :
- Dans la pratique les décrochages verticaux comme les décrochages horizontaux ont la même distance. Dans un but de présentation, les décrochages verticaux de ce chapelet exemple sont de différentes longueurs.
- L'unité est évidemment toujours la phrase : ceci explique qu'une intervention de l'enseignant peut se traduire par un ou plusieurs symboles dans le chapelet (7-8 ; 16-17).
- Le dialogue lui-même n'est jamais retranscrit.

III. EXEMPLES DE CHAPELETS, ESSAI D'ANALYSE

Classe observée : 4ème C.E.S. - Cours de Math - 8^h - 9^h.
Conditions d'observation : 1 observateur
3 observations, les 12.11.74
03.12.74
25.01.75.

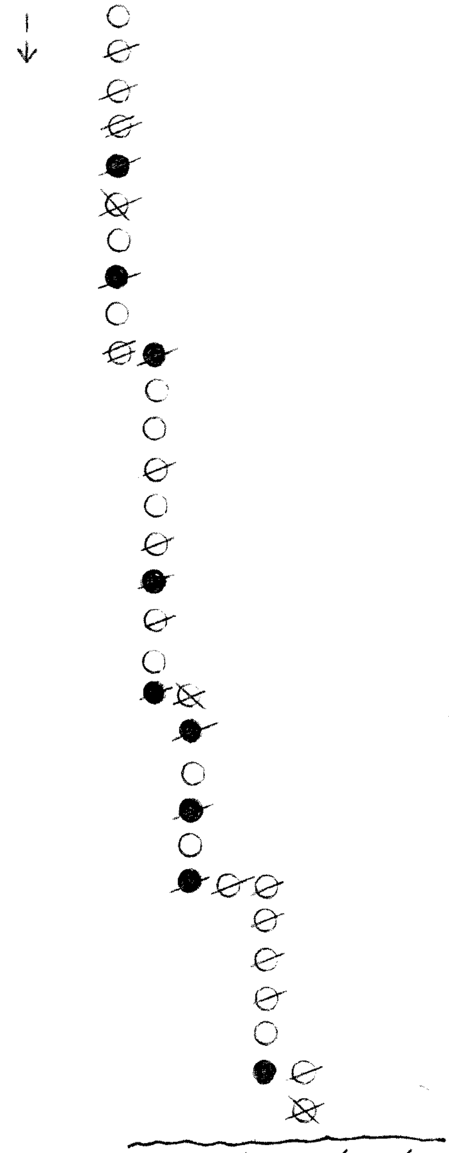
Il s'agissait chaque fois d'un échange classe-professeur ; le 12.11. pendant l'heure entière, le 03.12. pendant 20 minutes (le reste du temps, il s'agissait d'un travail par groupes ; à cette époque le moyen de transcrire un échange de groupe n'avait pas encore été élaboré) ; le 25.01. pendant 20 minutes aussi (pour la même raison).

8^h CORRECTION EXERCICE



suite colonne suivante

suite colonne suivante



prennent un résumé.

Quelques remarques :

. séquence ○ ● (1). L'élève ne comprend pas la question du maître, il questionne à son tour.

. séquence ○ ⊘ (2). Le maître répond à la question posée à la classe. Ne laisse pas le temps de réfléchir ?

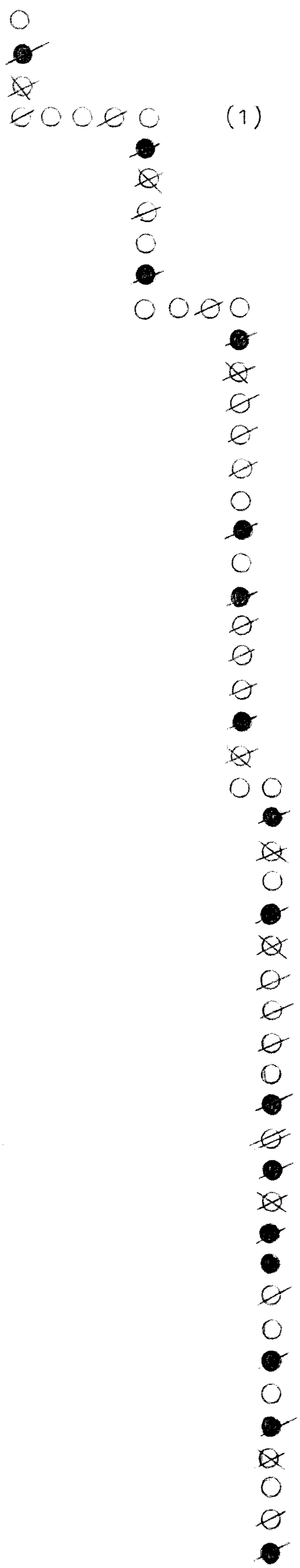
. (3) : très grande fréquence des ordres (Le temps passe, on ne va probablement pas assez vite, la cloche va sonner).

.....

03.12.74 C.E.S. 4ème (la même) Cours de Mathématique (le même professeur)

Echange classe-professeur 20'

8^h



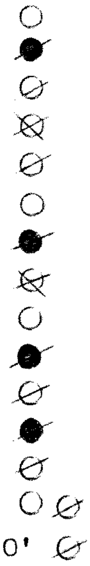
(1)

(1)

(2)

(3)

suite autre colonne



$8^h20'$

Travail par groupes.

Remarques :

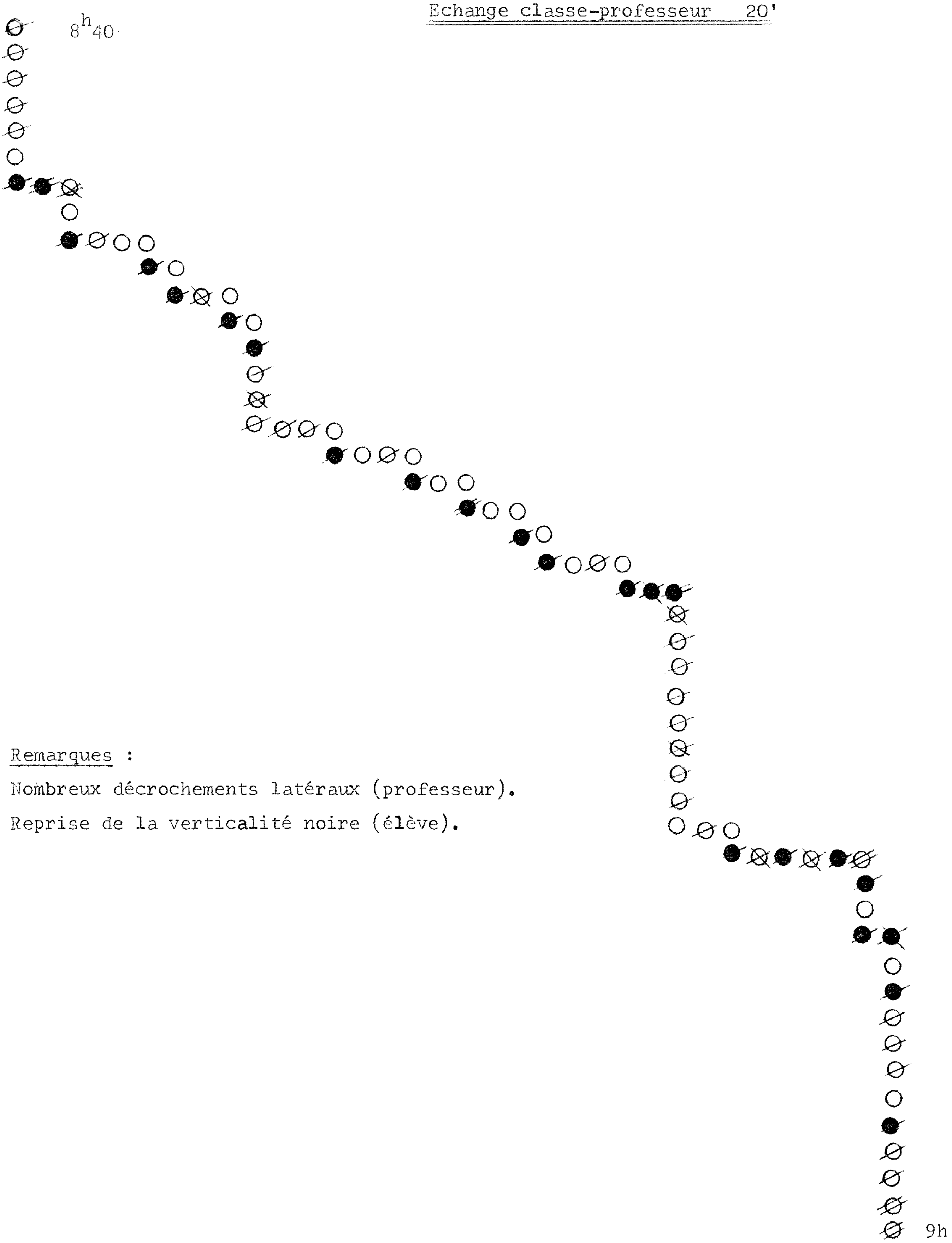
(1) Quelques décrochements latéraux. Le maître présente les éléments, clarifie, l'élève progresse ensuite seul.

(2) L'élève n'attend plus une question pour se manifester (une invite), il le fait spontanément à la suite du professeur (initiative).

(3) Une affirmation d'un élève provoque une interrogation d'un autre élève. Il est clair que la situation change par rapport à la première observation.

25.01.75 4ème (la même) C.E.S. Cours de mathématique (même professeur)

Echange classe-professeur 20'



Remarques :

Nombreux décrochements latéraux (professeur).

Reprise de la verticalité noire (élève).

IV. ESSAI D'ANALYSE DES CHAPELETS PROPOSES

- Orientation des chapelets

Le premier chapelet est vertical, chaque phrase du maître apporte l'élément qui permet de progresser.

Lors de la deuxième séance, des décrochements horizontaux apparaissent, indiquant que le professeur s'abstient d'apporter l'élément nouveau : il énonce des propositions qui tendent à clarifier la situation, à ordonner, donnant la possibilité aux élèves de franchir le pas. Ils ne le font pas encore.

Lors de la troisième séance, brusque rupture : le chapelet se développe en diagonale avec des décrochements horizontaux importants. Ces séquences de recherche, de réflexion à haute voix sont conclues par les élèves qui apportent l'élément nouveau permettant la progression.

Il est clair que le professeur a fait un choix, qu'il s'est déterminé à donner le temps aux élèves de manipuler les données, d'affronter les longs silences.

- Couleur des chapelets

Première séance : Chapelet presque blanc, le professeur monopolise la parole, les interventions noires (élève) sont rares. Elles font toujours suite à une question du professeur ( ) ou à un ordre du professeur ( ).

Deuxième séance : quelques noirs supplémentaires mêlés aux blancs. Pas encore de séquence autre que ou . Chapelet à nette dominante blanche. La situation n'a pas sensiblement changée.

Troisième séance : chapelet devenant "gris" ; des noirs se mêlent aux blancs d'une manière à peu près uniforme. De plus, apparaissent des noirs qui ne sont plus motivés par une intervention blanche : les élèves se sont appropriés une partie du temps réservé jusque là au professeur. C'est là une observation intéressante à faire car cette situation démarre souvent des séquences de travail intense à la suite desquelles les élèves prennent l'initiative de la parole. En tout cas, il est clair que le professeur permet aux élèves de s'exprimer, que leurs affirmations sont analysées, prises en considération.

- Nature des propositions énoncées

Il est curieux de constater que normalement, un élève n'énonce que des affirmations et, le plus souvent à la suite d'une sollicitation du professeur (nous sollicitons toujours ou presque des questions de leur part).

Dans le cas qui nous occupe, lorsque le professeur a cédé 30 % de son temps de parole, ce temps est récupéré par les élèves ; mais sous quelle forme ? Les affirmations augmentent mais aussi, et c'est là, à notre sens capital, des ordres et des jugements de valeur apparaissent : propositions qu'on ne trouve généralement pas dans leur discours.

Peut-être les élèves se sont sentis suffisamment sécurisés pour pouvoir réagir à une situation donnée, pour pouvoir prendre parti.

- Environnement de chaque proposition

L'étude de l'environnement immédiat d'une proposition est intéressante et permet de mettre en évidence des enchaînements qui se répètent (des séquences identiques). Si leur fréquence est importante dans une heure de cours, on peut s'intéresser à eux, chercher leur signification.

Il va sans dire que dans la pratique, il n'est pas souhaitable de dissocier ces caractères (cela a été fait ici pour plus de clarté). C'est l'image globale qu'il faut saisir et comprendre pour s'intéresser ensuite à telle ou telle particularité.

Cette analyse, intentionnellement très incomplète, n'est là que pour montrer le parti que l'on peut tirer de ce type d'observation. Cette observation peut permettre à un professeur de revivre son cours dans sa forme, proposition par proposition, un peu comme un cinéaste peut visionner son film image par image. Une appréciation globale du chapelet peut être riche d'enseignement sur l'état des échanges verbaux (de la relation orale) dans sa classe.

Tel quel, cet instrument ne permet pas la transcription des échanges dans un groupe. Il y a là une difficulté supplémentaire : ce n'est plus une relation duelle (classe-professeur) mais une relation multiple et il est aussi intéressant que précédemment (et certainement plus) de savoir qui s'adresse à qui et qui répond. On ne peut plus alors indiquer l'origine par la couleur comme précédemment, il y en a trop, il faut de plus indiquer la direction de l'échange. Cette difficulté a été contournée en transcrivant les symboles sur des papiers à trame dont le dessin dépend du nombre d'individus dans le groupe.

Enfin, il n'a jamais été question dans notre esprit de juger de la valeur de tel ou tel cours en fonction du chapelet obtenu. Il serait dangereux et vain d'en faire un instrument d'appréciation.

Nous ne sommes pas des sélectionneurs

L'article "Réflexions sur les sujets de BEPC", publié dans le dernier numéro de l'Ouvert aurait pu n'être que banal mais il est avant tout SCANDALEUX.

En tant qu'enseignant, je ne peux accepter la remarque sur "l'entrée en seconde qui doit être sélective". Je voudrais citer ici Josette ADDA[(1)] "Cette expérience constitue essentiellement une recherche pour un enseignement ANTI-SELECTIF dans un temps où l'on parle de plus en plus du rôle que jouent les mathématiques dans la sélection sociale, il importe de répandre au maximum les moyens de réagir, non seulement en faisant en sorte que l'enseignement des mathématiques soit accessible à tous, mais aussi en rattrapant ceux que cette sélection allait éliminer". Voilà un véritable thème de réflexion. On retrouve dans l'article au niveau du vocabulaire tous les pré-supposés idéologiques de la pédagogie traditionnelle [(2)] avec en particulier les deux pôles CONTROLE-SELECTION. Or, que je sache, nous ne sommes rattachés ni au ministère de l'intérieur, ni à celui de l'agriculture mais à celui de l'éducation. Alors, demandons-nous avant tout quels sont les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans une perspective éducative [(3)]. Les exercices proposés sont pour la plupart standard et on peut douter que leur intérêt soit supérieur à celui d'un texte de BEPC ; décidément l'imagination a du mal à prendre le pouvoir.

Je voudrais pour conclure, citer à nouveau J. ADDA [(4)] :
"J'espère avoir montré ici comment, en présentant un problème mathématique sous un habillage, un masque, on peut le rendre méconnaissable et aussi, au lieu de le simplifier, le compliquer. Volontairement ou non, cette présentation des problèmes participe au processus de sélection par les mathématiques.

(1) Initiation au langage mathématique (page 19) (En vente à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.).
(2) Lire B. CHARLOT, La mystification pédagogique (Payot, 1976).
(3) Voir par exemple le tome 1 du Livre du Problème (Cédic, 1976) et Taxonomie des objectifs pédagogiques de BLOOM.
(4) Difficultés liées à la présentation des questions mathématiques, in Educational Studies in Mathematics, July 1976.

Quand une question originellement simple est posée de manière compliquée avec des pièges superflus il s'agit bien des embûches d'un RITE INITIATIQUE comme les fils de fer barbelés disposés sur le "parcours du combattant"". On ne saurait mieux dire !

JACQUES GLASER,
Professeur au L.T.E.M. de Strasbourg.

Une remarque de madame Levy (co-auteur de l'article)

Quelques remarques sur les exercices:

nº 7 était facile avec l'ancien programme ; peu de nos élèves sauraient le faire sans préparation.

nº 9 éviter de donner des tangentes négatives.

nº 13 le signe de $3 - \sqrt{10}$ étant évident, l'encadrement est inutile. Je propose de remplacer la parenthèse par exemple par : $7\sqrt{3} - 2\sqrt{37}$ (et encore, le signe se trouve plus facilement en élevant les termes au carré.

AUDIO _ VISUEL

UNE PROJECTION DE FILMS REALISES PAR LES I.R.E.M. DE CAEN, NANCY, RENNES ET PAR L'EX-OFRATEME EST PREVUE

le mercredi 20 avril 1977 à 16 h 30

A L'AMPHI JEAN FRENKEL DU DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE, 7 RUE RENE DESCARTES A STRASBOURG.

CETTE PRESENTATION SERA SUIVIE D'UNE DISCUSSION SUR LA QUALITE DES FILMS VISIONNES ET EVENTUELLEMENT SUR LA POLITIQUE DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG A CE SUJET.

CEUX QUI SOUHAITERAIENT PRESENTER DES DOCUMENTS, PEUVENT S'ADRESSER A LA BIBLIOTHEQUE DE L'I.R.E.M.

LE SPHINX

Valeurs absolues

Monsieur Viricel nous a rendu visite à la permanence que tient l'Ouvert tous les mercredi de 14^h30 à 16^h30. Il nous a laissé quelques problèmes fort intéressants ; nous l'en remercions bien vivement

---

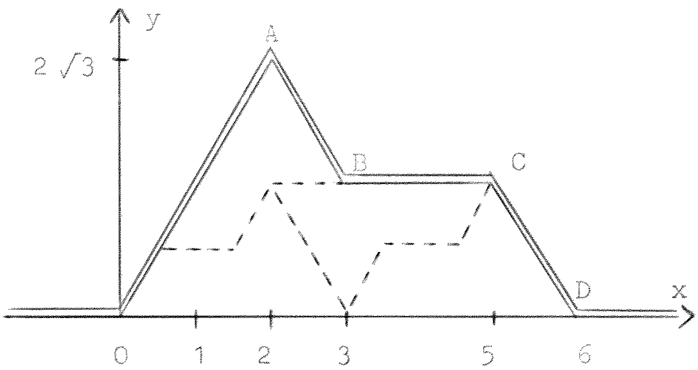
Tracer les courbes qui ont pour équation :

$$|x-3| + |y-1| = 4$$

$$|x+y| + |x-y| = 4$$

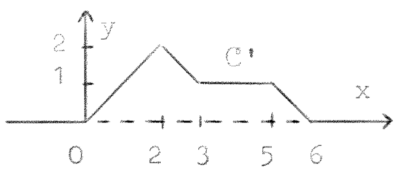
$$2|y-4| = \sqrt{3}\,[\,|x-1| - |x-2| - |x-4| + |x-5|\,].$$

Trouver l'équation de la courbe (C)



Le trait a été doublé pour rendre plus visible la courbe (C) mais c'est le trait "intérieur" qui compte seul.

Pour simplifier l'écriture, appliquons à (C) l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$



L'équation est de la forme :

$$y = a|x| + b|x-2| + c|x-3| + d|x-5| + e|x-6| + fx + g.$$

1° <u>Coefficients de x</u> :

$x \leq 0$	$\alpha = 0 =$	$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$+f$
$0 < x < 2$	$\alpha = 1 =$	a	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$+f$
$2 \leq x < 3$	$\alpha = -1 =$	a	$+b$	$-c$	$-d$	$-e$	$+f$
$3 \leq x \leq 5$	$\alpha = 0 =$	a	$+b$	$+c$	$-d$	$-e$	$+f$
$5 \leq x < 6$	$\alpha = -1 =$	a	$+b$	$+c$	$+d$	$-e$	$+f$
$6 < x$	$\alpha = 0 =$	a	$+b$	$+c$	$+d$	$+e$	$+f$

Ce système se résout très simplement

$a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{2}$, $e = \frac{1}{2}$, $f = 0$.

2° <u>Termes indépendants de x</u>

Pour $x = 0$, $2b + 3c + 5d + 6e + g = 0$; on obtient ainsi $g = 0$.

On peut, en utilisant les sommets de la courbe, s'assurer que les valeurs trouvées de "a" à "g" conviennent.

On aurait pu écrire deux sortes d'équations :

- soit en utilisant les sommets A B C D,
- soit en utilisant les ordonnées à l'origine.

On trouve :

$$y = \frac{1}{2}|x| - |x - 2| + \frac{1}{2}|x - 3| - \frac{1}{2}|x - 5| + \frac{1}{2}|x - 6|.$$

Il suffit d'appliquer à la courbe $\mathbb{C}'$ l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $\sqrt{3}$.

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\,|x| - 2|x - 2| + |x - 3| - |x - 5| + |x - 6|\,\right].$$

La courbe $\mathbb{C}$ et l'axe Ox délimitent un domaine décomposable en quatre autres qui lui sont semblables, comme il est indiqué dans la première figure, donc en 4^k autres qui lui sont semblables.

Le nombre π

1) La recherche de la valeur exacte de π a été une constante de l'histoire des mathématiques. L'avènement de l'ordinateur a mis un terme à cette recherche en permettant le calcul de milliers de décimales en un temps record, ce qui ne présente aucun intérêt, sinon de fournir de façon très compliquée une table de nombres au hasard (on vérifie en effet, que l'ordre des chiffres dans le développement décimal de π est aléatoire).

Après Archimède qui avait fourni la valeur approchée 22/7 , Metius à la fin du seizième siècle donna la fraction 355/113 qui est exacte à moins de $3.\,10^{-7}$ près. Ces deux fractions ne sont autres que des réduites particulières du développement de π en fractions continues :

$$\pi = 3,\{7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1 \ldots\}$$

(Voir l'article sur les fractions continues de Goerg dans ce numéro).

Les premières méthodes de calcul de π utilisaient les propriétés des polygônes réguliers inscrits et exinscrits dans un cercle. En doublant à chaque fois le nombre de côtés et en partant du carré, on vérifie que :

$$\pi = \lim_{n \to \infty} 2^n \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{\text{il y a } n \text{ fois } 2}$$

à titre d'exemple, on obtient pour $n = 6$: 3, 141 3 ...

Au début du XVII ème siècle, le hollandais Ludolf Van Ceulen donna π avec 34 décimales et à la fin du siècle le français Lagny en donna 128 .

2) On peut s'amuser à retenir les 30 premières décimales de π au moyen du célèbre quatrain suivant, où chaque décimale est donnée par le nombre de lettre du mot correspondant :

Que j ' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

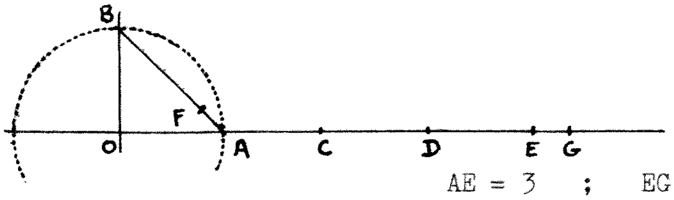
Immortel Archimède , artiste ingénieur !
8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

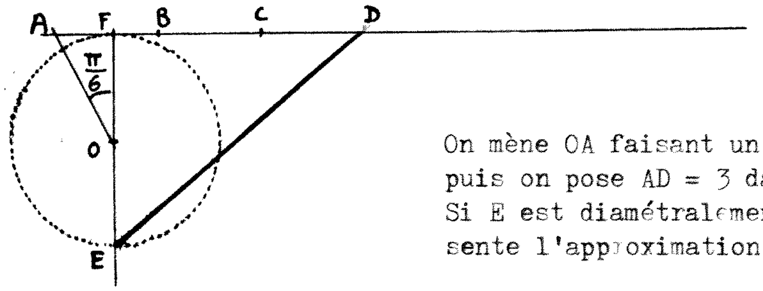
3) D'autres approximations de π sont souvent utilisées, car constructibles à la règle et au compas ; par exemple :

* $3 + \sqrt{2}/10 \simeq 3,1414$ qui donne une erreur relative de $1/15000$



AE = 3 ; EG = AF = AB/5
AG est l'approximation recherchée

* $\sqrt{\left(5 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2} \simeq 3,14153$ qui donne une erreur de 6/100 000



On mène OA faisant un angle de 30º avec OF, puis on pose AD = 3 dans la direction de AF. Si E est diamétralement opposé à F, ED représente l'approximation cherchée.

4) On sait que π est transcendant, donc non seulement π n'est pas constructible à la règle et au compas(d'où en particulier l'impossibilité de la quadrature du cercle) mais encore π n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. Cependant le développement de certaines fonctions en séries entières permet d'affirmer que π est la plus petite solution positive de l'équation :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \qquad (\Leftrightarrow \sin x = 0)$$

5) Schwab de Nancy a démontré en 1813 que $1/\pi$ est la limite vers laquelle tend la suite des nombres obtenus en partant de 0 et de 1/2 et en prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géomètrique entre les deux nombres précédents. On trouve successivement :

$u_0 = 0$	$u_6 = 0,314\,21\ldots$
$u_1 = 0,5$	$u_7 = 0,320\,36\ldots$
$u_2 = 0,25$	$u_8 = 0,317\,29\ldots$
$u_3 = 0,353\,55\ldots$	$u_9 = 0,318\,82\ldots$
$u_4 = 0,301\,78\ldots$	. . . .
$u_5 = 0,326\,64\ldots$	$1/\pi = 0,318\,098\ldots$

Cela revient à étudier la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 0,5 \\ u_{2n} = \frac{1}{2}\left(u_{2n-1} + u_{2n-2} \right) \\ u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n} \cdot u_{2n-1}} \end{cases}$$

6) La fonction Γ généralise la notion de factoriel, plus exactement, on a : $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour n entier strictement positif. On démontre entre autre que :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!\ n^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

et que :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

en conclusion, $\sqrt{\pi}$ apparaît comme étant la limite de la suite :

$$u_n = \frac{2.4.6.\cdots\cdots 2n}{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Pour u_{10} on trouve la valeur 1, 794 ... alors que $\sqrt{\pi} = 1,772$ ...

On peut rapprocher ce résultat de la formule de Stirling :

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

7) On définit la fonction Arctg par :

$$\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{tg} y \\ -\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \iff y = \operatorname{Arctg} x$$

On démontre que la dérivée de cette fonction est donnée par $\frac{1}{1 + x^2}$. Par conséquent, comme $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, on a :

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

ce qui permet de calculer une valeur approchée de π par les méthodes numériques de calcul des intégrales définies.

On peut aussi développer Arctg x en série entière :

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

et donc : $\pi/4 = \operatorname{Arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots\ldots\ldots$

Mais ce résultat est peu utile car la série ainsi obtenue ne converge pas vite. Aussi utilise-t-on habituellement l'artifice suivant :

En partant de l'expression donnant la tangente d'une somme, on démontre que, sous certaines hypothèses :

$$\text{Arctg } x + \text{Arctg } y = \text{Arctg } \frac{x+y}{1-xy}$$

On remarque alors que :

$$4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} - \text{Arctg } \frac{1}{239} = \text{Arctg } 1$$

et en utilisant le développement en série entière, on obtient finalement le résultat :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right)$$

cette série converge très rapidement puisque :

$$4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5}\right) + \frac{1}{239} = 0,785\,405\ldots \quad \text{alors que } \pi/4 = 0,785\,398\ldots$$

8) π est un nombre fondammental en mathématiques car il intervient dans de nombreux problèmes où on ne l'attend pas. En probabilité on le retrouve dans :

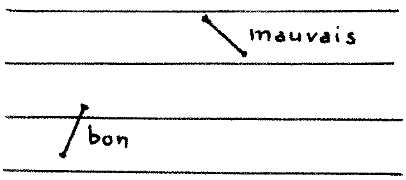
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ce qui permet de normaliser la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

(e^{-t^2} redonne la fameuse courbe en cloche de Gauss).

Il faut aussi citer la célèbre expérience de Buffon (1707-1788) : On laisse tomber sur un réseau de parallèles équidistantes une aiguille dont la longueur est égale à la distance de deux droites voisines. Si la chute se fait au hasard, alors la probabilité que l'aiguille coupe une des droites du réseau est égal à $2/\pi$. Cette expérience est renouvellée quotidiennement au Palais de la Découverte à Paris.



Citons également ce résultat probabiliste : Si on se donne deux nombres au hasard (ou une fraction), la probabilité pour que ces deux nombres soient premiers entre eux (ou que la fraction soit irréductible) est égale à $6/\pi^2$

9) Pour conclure, rappelons la célèbre formule :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

due à Euler et dans laquelle ce dernier voyait la preuve de l'existence de Dieu !

UN PEU D'HEURISTIQUE

Un groupe de professeurs du second cycle s'est intéressé durant l'année 1974/75 au comportement de leurs élèves devant des énoncés d'exercices ou de problèmes posés en termes "inhabituels". Il ne s'agissait pas d'en déduire quelque résultat que ce soit sur le mode de compréhension et de raisonnement des élèves, d'un niveau donné ; il n'était pas question de tester nos élèves ou notre enseignement.

Plus modestement, le but était en se forçant à l'observation de nos élèves -malgré le programme, malgré l'examen, malgré les classes trop nombreuses- de se rendre compte de la diversité de leurs réactions, de leurs difficultés d'appréhender une situation inconnue -sans référence immédiate au "cours"-, de leurs intérêts,... bref, le but était plus d'apprendre de nos élèves que de chercher à mieux leur apprendre "nos" mathématiques.

On lira ci-dessous un premier énoncé et un peu de ce que les élèves auxquels ils furent donnés, nous ont appris.

De l'importance d'un énoncé

Enoncé :

L'équation : $x^8 - 5x^7 = 3x^6 + 15x^5 - 22x^4 + 20x^3 - 12x^2 - 60x + 72 = 0$ admet huit racines dont $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $i\sqrt{2}$. Quelles sont les huit racines de : $216x^8 - 180x^7 - 36x^6 + 60x^5 - 66x^4 + 45x^3 + 9x^2 - 15x + 3 = 0$?

1° Il y a, en fait dans ce problème, deux questions :
  a) Quelles sont les solutions de (1), la première équation
  b) Quels liens y-a-t'il entre les solutions de (1), la première équation et celles de (2), la seconde équation ?

Tel quel, cet exercice a été proposé dans une T.D. et une T.C. en travail de groupes (de deux ou trois élèves) et a soulevé un vif intérêt en ce sens que la plupart des élèves se sont acharnés à le résoudre. Ils ont trouvé des éléments de réponse en répondant à a) ou à b) (partiellement ou totalement). Quelques groupes ont résolu entièrement l'exercice dans l'heure qui leur était impartie.

1° Chez certains une période d'"essais" durant laquelle l'élève espère avoir la chance de trouver des solutions "évidentes" de (1) ou de (2) ; par exemple $\sqrt{2}$ dans (2) "parce que" $\sqrt{2}$ est solution de (1), $\sqrt{4}$ dans (1) parce que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sont solutions de (1) ; développer $(z + a)^8$ parce que l'équation est du 8e degré.

2° Chez d'autres un démarage rapide dans le but de factoriser le premier membre de (1) : $(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x - i\sqrt{2})(ax^5 + \ldots)$; en général, ces élèves espèrent longtemps que le calcul entrepris finira par "donner quelque chose" et n'abandonnent que tardivement. Il y a des tentatives d'amélioration en remarquant que $-i\sqrt{2}$ est aussi racine de (1) (racines complexes d'une équation à coefficients réels) et parfois que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont racines doubles de (1) (puisqu'étant propres complexes conjugués) (!).

3° La plupart devinent la relation entre les solutions de (1) et celles de (2) ; mais pas tous ; en particulier un groupe ayant trouvé les solutions de (1) ne trouvera pas celles de (2). Et peu démontrent cette relation, beaucoup vérifiant, chaque fois, que l'inverse d'une solution de (1) est bien solution de (2).

4° Plusieurs groupes, après des essais infructueux, en viennent à vérifier que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ sont bien solutions de (1), mais plusieurs ne déduisent rien de cette vérification, c'est-à-dire font un calcul de "routine", sans observation ni réflexion. Certains le font et c'est ce qui les conduit rapidement à trouver deux autres solutions de (1), puis toutes par factorisation.

Commentaire :

Cet exercice accroche l'attention des élèves ; ils sentent que sa résolution est tout à fait à leur portée, même s'ils ne trouvent pas rapidement et les essais plus ou moins fructueux ne les découragent pas, en général. De plus, sa résolution ne demande pas "d'astuce" mais de la réfléxion.
Cet exercice permet d'observer un certain nombre de comportements des élèves : ceux qui espèrent trouver "par chance" ceux qui se lancent "tête baissée" dans les calculs, ceux qui oscillent entre les deux questions et ceux qui les cherchent méthodiquement l'une après l'autre dès le départ, ceux qui s'accrochent à un calcul, ceux qui en font le minimum, etc...

Autre énoncé :

Soit l'équation dans C :
$x^8 - 5x^7 + 3x^6 + 15x^5 - 22x^4 + 20x^3 - 12x^2 - 60x + 72 = 0$ (1)

1° Vérifier que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $i\sqrt{2}$ sont des racines de (1).
2° En déduire les autres solutions de (1).
3° En déduire les solutions de :
$216x^8 - 180x^7 - 36x^6 + 60x^5 - 66x^4 + 45x^3 + 9x^2 - 15x + 3 = 0$ (2)

Tel quel, cet exercice a été proposé dans une T.C. où il a rencontré un intérêt mitigé ; plus de la moitié des élèves manifestant assez rapidement des signes de lassitude : "l'exercice ne présente pas d'intérêt en tant que recherche, ce sont des calculs, particulièrement le 1) et les résultats trouvés en 2) sont le fruit de longs essais laborieux", "ce calcul est très peu intéressant car un ordinateur serait bien plus approprié pour le faire" ont dit certains (!).

Commentaire :

L'énoncé est probablement en cause car il impose à l'élève :

1° une vérification qui, au départ, lui semble fastidieuse et inutile malgré le "en déduire" qui suit.

2° une démarche linéaire ; s'il ne trouve pas en 2), le voilà en panne sans possibilité de diversion à cause du "en déduire" qui suit.

3° il ne semble pas que ces "en déduire" qui recouvrent des déductions très différentes aident les élèves à trouver ni même à chercher.

Remarques :

- on énonce en T.D. et T.C. un résultat sur les racines complexes d'une équation polynômiale à coefficients réels, mais non sur les racines réelles (du moins, certaines) d'une équation polynômiale à coefficients rationnels. Il n'y a eu aucune "activité de transfert" (ou raisonnement par analogie) dans la T.C. qui avait étudié $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avant d'étudier $\mathbb{C}$, en classe.

- on peut aménager l'énoncé pour que (1) et (2) n'aient pas de racines imaginaires, de façon à le poser en classe de seconde ou première.

Recension du livre de Mme F. JAULIN-MANNONI

La remise en question des mathématiques "Pourquoi une mathématique moderne ?", "Pourquoi la mathématique ?" ... est loin de cesser et de s'affadir. Mais cette fois la question se déplace du côté du "pourquoi" lui-même. Avec "Le Pourquoi en mathématiques", Mme Jaulin-Mannoni, quitte l'interrogation du fondement des mathématiques, ou du moins la soumet à celle de leur transmission - pour tenter de décrypter enfin assez radicalement "la genèse de cet accès aux mathématiques et de cerner ce qui caractérise en propre les obstacles mathématiques et ce qui les distingue spécifiquement des embûches que rencontre tout apprenti de toute forme de savoir, lorsqu'il n'en est pas immédiatement "amoureux" selon l'expression de Platon. (L'enfant est-il d'ailleurs jamais amoureux d'un "savoir" quel qu'il soit ? Nous serions tentés de répondre par la négative, mais ce n'est pas là le propos direct de ce livre, même s'il l'évoque en filigrane.)

Grave question, que Mme Jaulin-Mannoni a eu le courage d'aborder non seulement en analyste du savoir mathématique et de sa démarche, mais aussi - ce qui nous paraît important - avec le frémissement du coeur de quelqu'un qui rencontre l'autre-en-proie-aux-difficultés avec le souci de l'aide et non de la simple curiosité intellectuelle.

En effet, s'il y a illusion à mettre en équation la possession d'un savoir et sa communication, c'est parce que l'évidence mathématique conquise de haute lutte contre "l'évidence de l'évidence" (dont parle Bachelard) des sens en général, du sens commun en particulier et de la réalité concrète dans sa totalité, cette évidence n'est évidente qu'en dernière instance et non pas, et surtout pas dans l'acte mathématique lui-même, essentiellement démarche personnelle et donc toujours différente car tributaire de la genèse de l'intelligence et de l'affectivité en chacun.

C'est pourquoi, nous remercions Mme Jaulin-Mannoni de nous crier si fort qu'aucune pédagogie n'est sérieuse si elle ne s'accompagne de l'élucidation ferme de l'épistémologie impliquée dans tout secteur de savoir, qui elle-même n'est opérante que lorsque le raisonnement qui la contacte n'a accédé au stade formel requis par son degré de formalisation. D'où cercle vicieux : ne sont capables d'apprendre à comprendre les mathématiques que ceux qui savent déjà les mathématiques, non pas exactement parce que les mathématiques s'enfanteraient elles-mêmes, mais parce que l'intelligence qui aborde, alors, les "objets mathématiques" en est à ce point de maturité justement susceptible de conquérir et de créer tout objet de savoir . Le paradoxe, voire l'épopée tragi-comique, de l'itinéraire scolaire de l'enfant, c'est qu'il peut savoir bien, bien des choses, avant d'avoir les structures lui permettant de les comprendre !

Le problème de la pédagogie des mathématiques est là : "que peut faire le pédagogue pour aider l'enfant à se comporter de façon mathématique dans certaines situations ?" Ou bien, comment mettre l'enfant en situation mathématique lui permettant d'accomplir des démarches analogues à celles qui ont présidé à la création de certains concepts mathématiques ?

Or, l'observation fine et judicieuse de Caroline, observation qui sous-tend l'ensemble des questions, des analyses et des réponses ou essais de réponse de cet ouvrage, montre combien Caroline, alias tout enfant, "bouleverse la situation mathématique". La raison déjà bien connue, mais suivie ici minutieusement par Mme Jaulin-Mannoni, en est le rapport fantasmatique à la réalité, ainsi que les rapports étranges et toujours complexes que chacun noue avec autrui, derrière toute quête supposée objective, anonyme, innocente, parce qu'elle concerne le savoir. Le "s'il vous plaît" Madame, Monsieur ? maître... je voudrais savoir le pourquoi de ... infléchit tant de connotations non mathématiques !

Mme Jaulin-Mannoni nous fournit plusieurs styles de réponses pour ne pas laisser les enfants s'enfoncer dans leurs problèmes personnels de toute façon indicibles car les déterminants en sont irrationnels et c'est bien là le problème. (Nous vous renvoyons pour le détail à la p. 27.) Et s'inquiète à la fois de motivations rendant l'évolution à l'esprit mathématique possible et des dangers (ce qui complique encore la tâche) de cet esprit, comme processus de sécurisation par "scotomisation de variables non pertinentes à la situation" (p. 37).

De ce qui est là son inquiétude louable et qui n'exicite pas seulement ses mots, mais son comportement d'engagement personnel et actif de rééducation – qu'elle préférerait être de prophylaxie –, Mme Jaulin-Mannoni tente également de nous fournir des analyses psycho-philosophiques.

A ce propos, elle s'attaque à l'objectif difficile de repérer le fonctionnement de l'inconscient logico-cognitif (c'est la partie de l'ouvrage la plus dense et la plus confuse, où les théories voisinent plus qu'elles ne s'appellent) qui s'assortit à toute acquisition de savoirs et qui procède selon un dynamique "de paliers d'intégrations successives s'articulant entre elles et portant une préfiguration inconsciente de l'étape prochaine". C'est là le lieu même de la conscience malheureuse du Maître qui a de la conscience professionnelle, qu'il ne peut communiquer que ce dont il est conscient et non ce qui a rendu sa démarche possible et de "ce qui en faisait le sens" lorsqu'il était lui-même enfant. Mme Jaulin-Mannoni déplore alors ce savoir collectif"dépourvu de sens" nous mettant en présence d'enfants qui ne sont "même plus conscients de ne pas comprendre" (certains énoncés justifient cette intelligence de non-compréhension !), se rangent du côté de ceux qui croient avoir compris, afin d'obtenir ce cri du coeur du Maître : "c'est juste", qui est trop souvent l'ultime satisfecit de la relation Maître-Elève.

Un beau livre qui fait du bien à la pédagogie et tente de montrer que certaines vérités sont bonnes à dire...

TRES IMPORTANT

VOS COLLEGUES QUI NE RECOIVENT PAS L'OUVERT OU LES AUTRES DOCUMENTS QUI SONT ENVOYES A TOUS LES ADHERENTS SONT PRIES DE LE SIGNALER A LA BIBLIOTHEQUE DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG (10, rue du Général Zimmer 67084 STRASBOURG CEDEX).

IL EST A NOTER QUE NOMBREUX SONT CEUX QUI OMETTENT D'INDIQUER LEUR NOUVELLE ADHESION OU LEUR CHANGEMENT D'ADRESSE A CETTE MEME BIBLIOTHEQUE D'OU PARTENT TOUS LES ENVOIS CONCERNANT LA REGIONALE A.P.M. D'ALSACE.

PARIS NE NOUS ENVOIE QU'UNE FOIS PAR AN LA LISTE DES ADHERENTS, C'EST POURQUOI IL EST INDISPENSABLE DE NOUS TRANSMETTRE CES RENSEIGNEMENTS LE PLUS VITE POSSIBLE.

D'AVANCE MERCI !