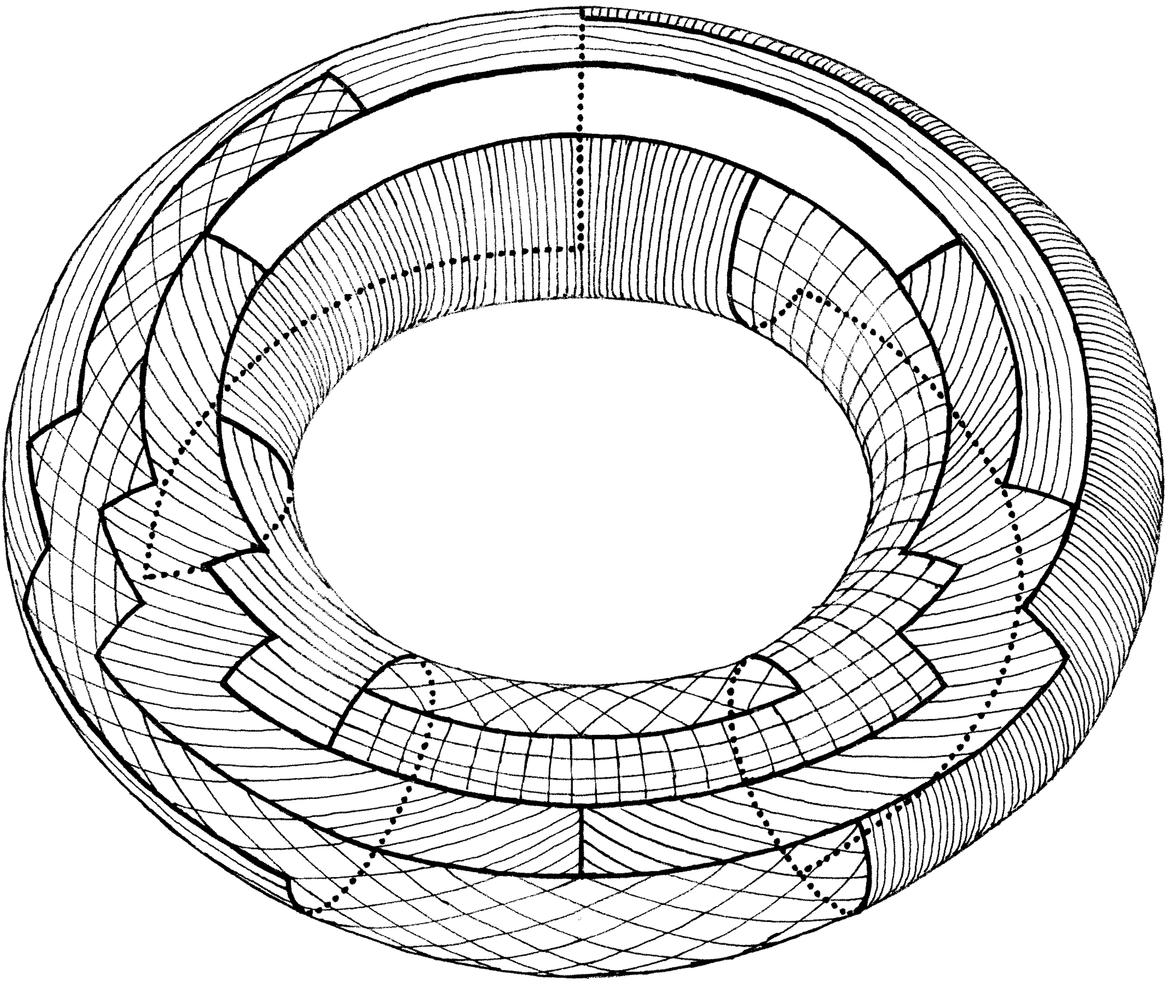
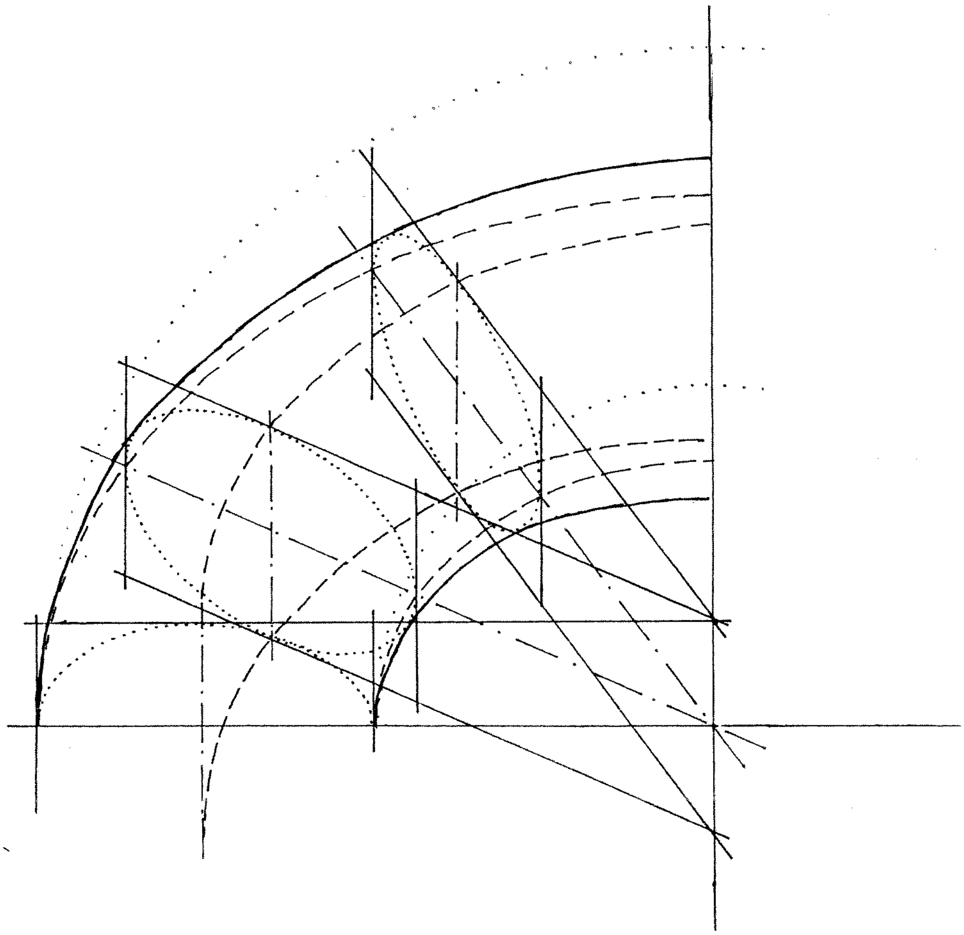
# l'ouvert n°12

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG - JUIN 77



**NOTRE COUVERTURE :** Le problème du coloriage d'une carte formée de pays connexes et dessinée sur une surface mathématique quelconque a été abordé par de nombreux mathématiciens depuis plus d'un siècle. Le cas où la surface est un tore a été résolu depuis longtemps : il faut alors pour une carte quelconque au plus sept couleurs. C'est cette configuration qui est représentée en couverture. On vérifiera, en effet, que chacun des sept pays admet une frontière commune avec les six autres.



Extrait de la construction géométrique du tore de couverture

Les trois ellipses en pointillés sont dans des plans méridiens formant entre eux un angle de 30º. Les lignes elliptiques en tiretés représentent l'équateur in térieur, l'extérieur et l'ensemble des points les plus hauts.

# Sommaire

# Editorial

Le mercredi 23 février, la régionale A.P.M.E.P. d'alsace et l' I.R.E.M. de Strasbourg organisaient une journée mathématique dont on trouvera le compte-rendu dans ce numéro de l'Ouvert.

Malgré la loi du 16 juillet 1971 , le droit à la formation continuée ne s'applique pas aux enseignants. Dans ces conditions, refuser les autorisations d'absence aux professeurs, c'est montrer une fois de plus que l'on veut rabaisser les maîtres qui cherchent à actualiser leur connaissance ou à réfléchir sur leurs méthodes pédagogiques.

L' I.R.E.M. n'est-il qu'un "machin" que l'on ne vante qu'hors nos frontières par des films de propagande ? L'A.P.M.E.P. n'est-il qu'un groupuscule d'irresponsables qui ne représentent personne ? Ce n'est pas là l'opinion de la majorité puisque plus de 250 personnes n'ont pas hésité à consacrer leur mercredi entier, bravant parfois le rectorat, et prenant à leur charge frais de déplacement et de séjour, pour travailler, se documenter, s'instruire, échanger, ...

Avancer l'argument de l'intérêt des élèves pour interdire de fait la participation à cette journée, n'a pu que ridiculiser, aux yeux des participants, une administration qui n'hésite pas à convoquer pour une demi-heure au rectorat des professeurs enseignant à l'autre bout de l'académie, ou à fermer les lycées strasbourgeois pour le carnaval !

Le succès de cette journée n'est donc pas à mettre à l'actif du rectorat. On peut espérer que l'an prochain, tirant la leçon de cette expérience, la régionale A.P.M.E.P. et l' I.R.E.M. iront plus loin encore, avec, cette fois, la participation de l'administration.

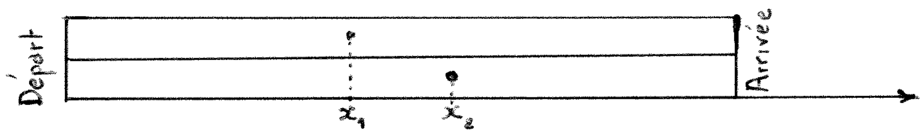
Jean Lefort

# L'espace et ses transformations

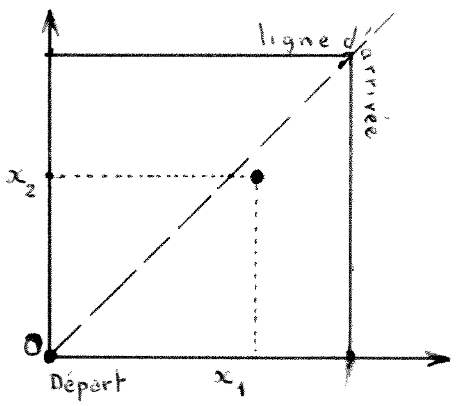
L'essentiel de cet exposé consiste à donner quelques exemples d'espaces vectoriels non géométriques.

## A PROPOS DE LA REPRESENTATION

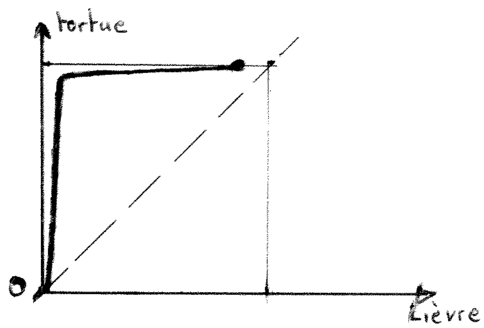
Considérons à titre d'exemple deux coureurs (1) et (2). On peut imaginer que ces deux coureurs sont sur deux couloirs d'une piste. On aurait alors la réprésentation suivante :

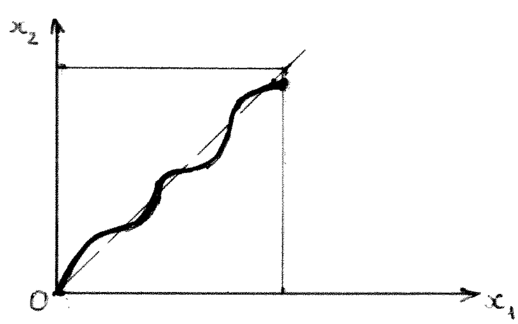



l'état de la course à un moment donné peut être caractérisé par un couple, élément de $\mathbb{R}^2$ : $(x_1, x_2)$. On peut aussi imaginer la représentation ci-après, plus traditionnelle, où le couple $(x_1, x_2)$ est symbolisé par un point dans un repère orthonormé :




L'avantage de cette deuxième représentation est d'être dynamique en ce sens qu'elle permet d'apréhender l'évolution de la course dans sa totalité depuis le départ en O jusqu'à l'arrivée qui a la forme indiquée ci-contre. Les points de la diagonale caractérisent les instants où les deux coureurs sont exaequo. On peut ainsi faire imaginer et commenter beaucoup de courses. Par exemple, la célèbre course du lièvre et de la tortue qui aura l'allure ci-dessous. Le 'point anguleux" correspondant en gros au moment où le lièvre se rend compte que les choses vont mal pour lui ! Quelle aubaine pour un com-



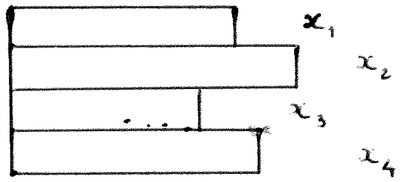



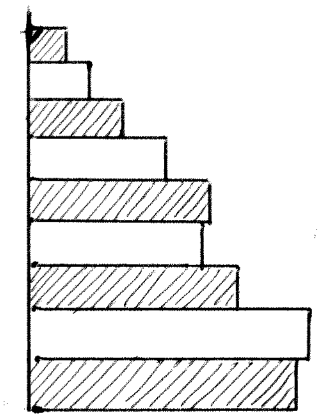

mentateur sportif que la deuxième course représentée ci-dessus.

Si maintenant nous revenons à la représentation plus statique donnée au début, elle est en général schématisée par :


ce qui présente l'avantage de pouvoir se généraliser à une dimension quelconque.

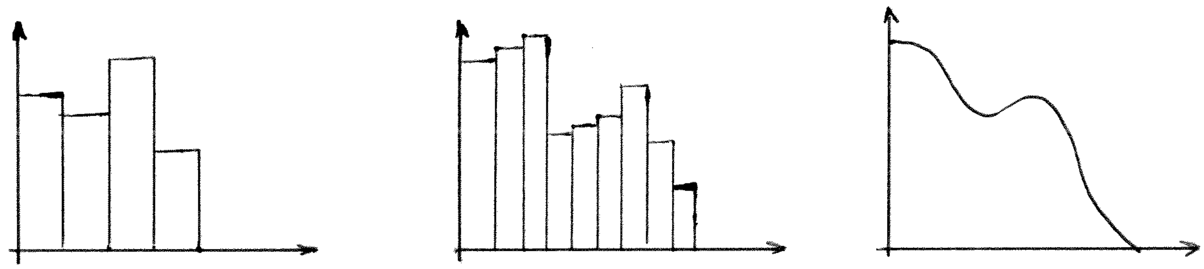
Pour quatre coureurs on aurait le dessin ci-contre schématisant ainsi un point de $\mathbb{R}^4$ . Cette représentation est classique comme en témoigne l'utilisation des pyramides des âges. Un autre avantage, c'est de permettre de déboucher sur des espaces vectoriels de dimensions infinies. Plus qu'un long discours, l'écriture suivante montre le passage de proche en proche par ce qu'on pourrait appeler un "glissement didactique" :



$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \ldots \\
x(1) & x(2) & x(3) & x(4) & x(5) & \ldots \\
f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & \ldots \\
f(x) & f(y) & f(z) & \ldots\ldots & &
\end{array}
$$

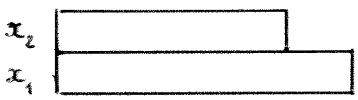
et au niveau des dessins, on est passé :

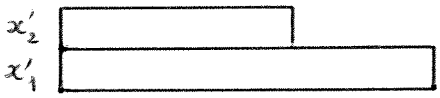


de $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^n$ puis à $\mathcal{F}$

## A PROPOS DES TRANSFORMATIONS

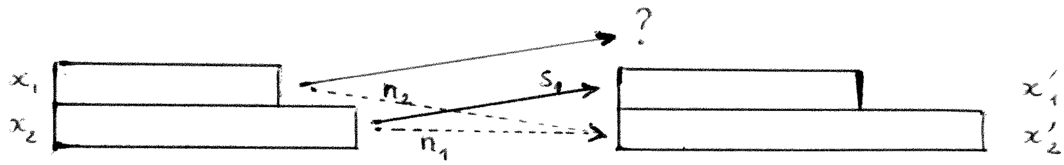
(1) Reprenons l'exemple de la pyramide des âges mais dans un cas très simplifié, supposons qu'il n'y ait que deux classes : les jeunes et les vieux (ou les moins jeunes !) et pour être optimiste répartissons les deux classes en deux demi-siècles : 0 - 50 et 50 - 100 ans. Cherchons à représenter l'évolution de 50 en 50 ans ; initialement nous avons et 50 ans plus tard




La période d'étude est donc, environ, une demi-vie. Etudions comment on obtient $x'_1$ et $x'_2$ à partir de $x_1$ et de $x_2$ .

$x_1$ donne $x'_2$ avec un certain pourcentage $s_1$ (taux de survie) ; $x_2$ lui ne donne rien (mortalité égale à 100 % ). Quant à $x'_1$ il est engendré par $x_1$ et $x_2$




avec les taux de natalité respectifs $n_1$ et $n_2$. Ces résultats peuvent s'interpréter matriciellement par :

$$\boxed{\begin{matrix} x'_1 \\ x'_2 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & 0 \end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

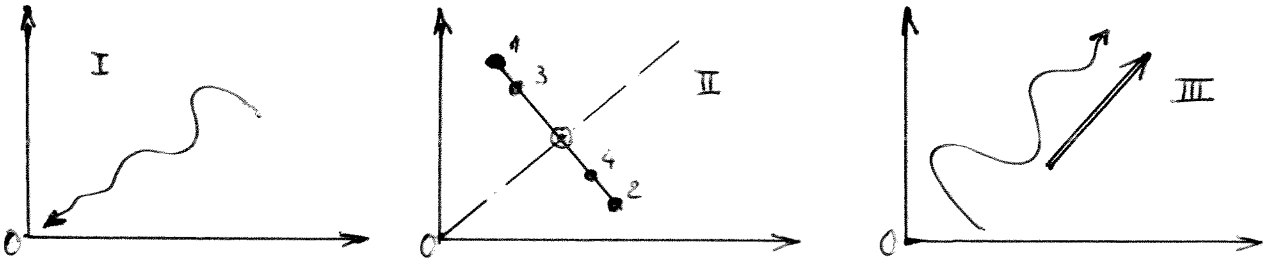
Soit :

$$\begin{cases} x'_1 = n_1 x_1 + n_2 x_2 \\ x'_2 = s_1 x_1 \end{cases}$$

Il est toujours int ressant, dès qu'on a ce genre d'étude, de disposer de données numériques pour voir ce qui se passe quand on itère le processus. Considérons à ce propos les trois exemples suivants :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{III} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

et reprenons ici l'idée de la représentation dynamique. En étudiant l'évolution sur ~~dexxxx~~ quatre ou cinq périondes, on trouve l'allure des courbes suivantes :




toutes les trajectoires se terminent en 0.

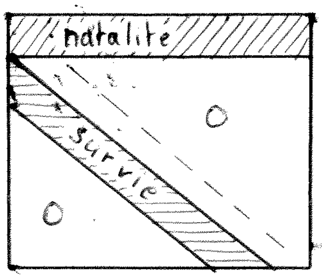
on tend vers un point situé sur la diagonale en oscillant de part et d'autre.

On s'éloigne indéfiniment dans une direction commune à toutes les trajectoires.

Aussi bien la représentation matricielle que la représentation statique initiale ne posent de difficultés quand on augmente le nombre de classe. Par exemple pour trois classe d'âge on aurait :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Et d'une façon générale, la matrice à l'allure :



(2) Prenons un deuxième exemple où on étudie le taux de répartition de la richesse dans la population en fonction du temps. On s'intéresse une fois encore à deux classes : les pauvres et les riches. Comme on le verra dans les quelques cas étudiés, il se pose un problème de définition du pauvre (et par conséquent du riche). Ce problème de mathématisation ne fera pas l'objet de notre propos.

En utilisant des notations naturelles : P , R , P' , R' il vient :

$$\begin{pmatrix} P' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & 0,1 \\ 0,2 & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ R \end{pmatrix}$$

les nombres 1,3 et 1,2 représentent une sorte de natalité : taux de reproduction de la classe sociale ; au contraire, les nombres 0,1 et 0,2 sont des taux de transfert de classe.

La société idéale devrait avoir un tableau de la forme :

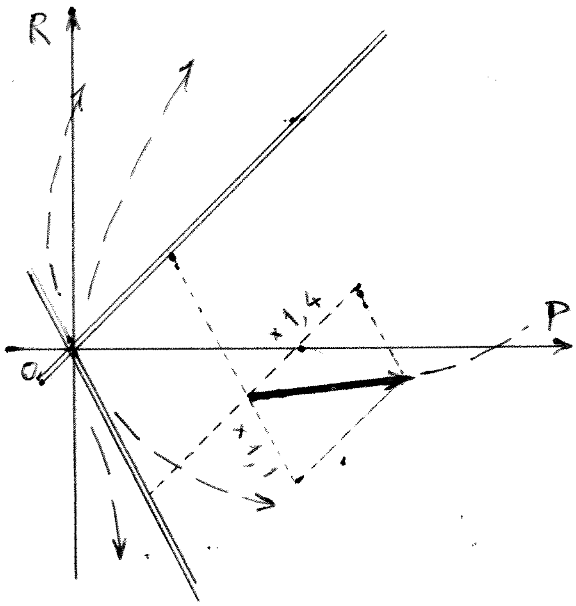
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ N & b \end{pmatrix}$ avec N très grand.

Dans une société libérale il faudrait toujours avoir :

$\begin{pmatrix} a & y \\ x & b \end{pmatrix}$ avec x beaucoup plus grand que y .

dans ce cas là, au bout d'un certain temps il y aurait disparition complète de la classe des pauvres (!?).

En reprenant l'exemple numérique ci-dessus, on voit que P/R tend vers 1 au fur et à mesure des "générations". Plus exactement, si on fait P = R alors P' = R' = 1,4 P = 1,4 R . On a donc dans la direction (1;1) une progression géométrique de raison 1,4 .

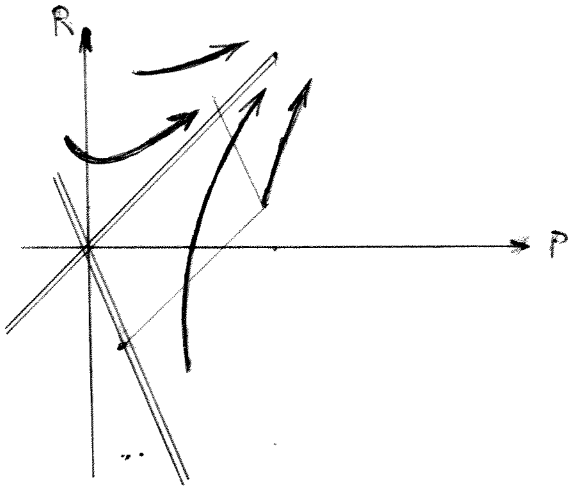



Imaginons maintenant que l'on sorte du premier quadrant en se mettant au point (1;-1). On aboutit alors au point (1,2;-1). De même en partant de (1;-2) on aboutit à (1,1;-2,2). Dans ce cas là encore, la direction est conservée et sur cette direction, on est multiplié par 1,1 . En décomposant maintenant un vecteur sur ces deux directions privilégiées (1;1) et (1;-2) on peut étudier l'allure des trajectoires comme ci-contre. On trouve des branches paraboliques.

Prenons un deuxième exemple numérique donné par le tableau :

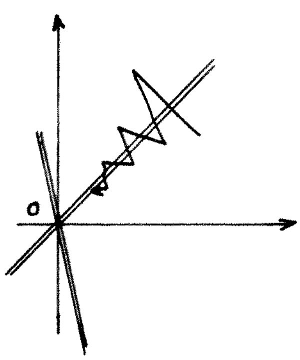
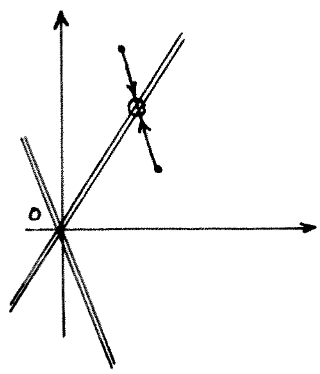
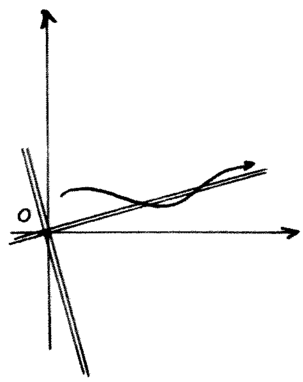
$$\begin{pmatrix} 1,6 & 0,4 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$$

On vérifiera que les deux directions propres (directions privilégiées qui sont conservées par la transformation) sont (1 ; 1) où l'on est multiplié par 2 et (1 ; -2) où l'on est multiplié par 0,8 . Les trajectoires présentent cette fois ci des asymptotes. La société est un peu plus libérale !




(3) On démontre que dans le cas général on trouve souvent deux directions privilégiées appelées directions propres surlesquelles on est multiplié par des nombres $\lambda_1$ ou $\lambda_2$ (appelés valeurs propres). Ce qui importera pour l'étude des trajectoires, c'est la position respective de $\lambda_1$ et $\lambda_2$ par rapport à 1 . Celle qui comptera le plus étant bien entendu la plus forte.

Revenons aux exemples sur les taux de natalité :

| exemples | I | | II | | III | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| directions propres | (4, -9) | (1, 1) | (1, -2) | (5, 2) | (1, -5) | (5, 1) |
| valeurs propres | - 0,4 | 0,9 | - 0,2 | 1 | - 0,05 | 1,25 |
| trajectoires |  | |  | |  | |

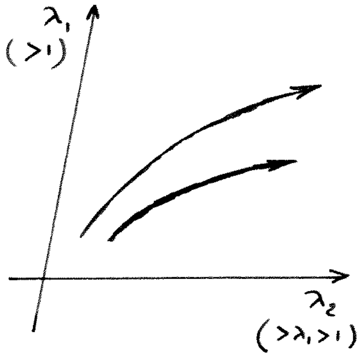
Sans tenir compte d'une éventuelle interprétation en terme de population généralisons à ce qui se passe dans le plan tout entier. On peut établire le tableau suivant où quelques cas on été étudiés ci-dessus.

| $\lambda_2$ \ $\lambda_1$ | $\bullet < -1$ | $-1$ | $-1 < \bullet < 0$ | $0$ | $0 < \bullet < 1$ | $1$ | $1 < \bullet$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bullet < -1$ | × | | | | | | |
| $-1$ | | symetrie/origine | | | | | |
| $-1 < \bullet < 0$ | | | × | | | | |
| $0$ | | | | soit $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ soit $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | | | |
| $0 < \bullet < 1$ | | | | | × | | |
| $1$ | | | | | | soit $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ soit $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ | |
| $1 < \bullet$ | | | | | asymptote | affinité | branche parabolique |

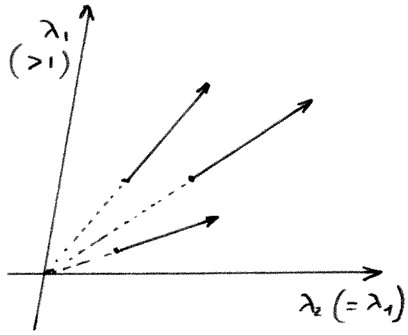
par raison de symétrie on peut toujours supposer $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$

Il semble a priori qu'il y ait 28 cas à étudier ; mais il faut remarquer que sur la diagonale on peut avoir = dans quatre autres cas (marqués d'une croix) que ceux indiqués ( -1 , 0 et 1). Ces quatre cas conduisent à des homothéties. On a donc 32 transformations normales à deux directions privilégiées dites transformations hyperboliques.

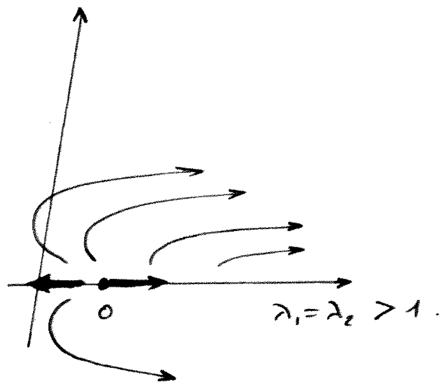
Il faut ajouter pour toutes les cases du tableau situées sur la diagonale les cas où il n'y a qu'une seule direction propre. Cela ne peut se produire que si = . On a alors 7 transformations spéciales dites paraboliques. Par exemple dans la case en bas à droite du tableau il y a trois cas possibles :



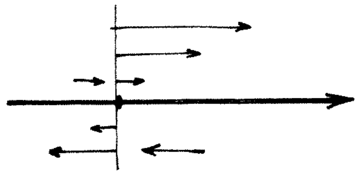
branche parabolique



homothétie

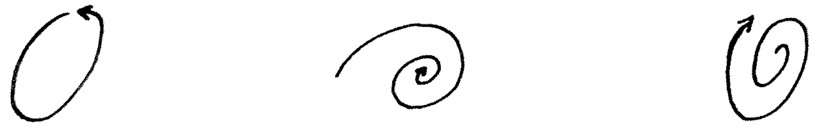



ces trois figures ont été faites, rapportées aux directions propres.



De la même façon, la case correspondant à $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ peut donner soit l'identité, soit la transformation symbolisée par le dessin ci-contre.

A ces 39 transformations, il faut ajouter celles qui ne possèdent pas de directions privilégiées. On les appelle elliptiques et elles sont au nombre de trois : Les rotations et les similitudes de rapport plus petit ou plus grand que 1 . Les trajectoires ont les allures suivantes :



Il y a donc en tout 42 transformations. Cependant on peut inverser le sens des flèches ce qui revient à échanger le rôle du passé avec celui de l'avenir. Cela n'est possible que si les valeurs propres (les $\lambda$) sont tous les deux différents de 0 . Alors il suffit de les remplacer par leurs inverses. On pourra chercher dans le tableau donner plus haut les cases que l'on peut ainsi apparier.

Deledicq
université de Paris VII

# L' I.R.E.M.

L' I.R.E.M. de Strasbourg c'est , en 76-77, la présence de 20 animateurs se répartissant par moitié entre le secondaire et le supérieur. Ces animateurs ne travaillent à l'institut que pour un quart ou un demi-service.

Mais l'animation ne peut se faire que grâce au secrétariat, à la bibliothèque, aux crédits de mission, au contingent d'heures de décharge pour l'accueil de stagiaires, au matériel audio-visuel, aux calculatrices. Tout cela pour une population d'environ 1300 maîtres dans l'académie.

Les activités se répartissent en trois types :

1) La recherche en didactique
2) La publication de matériel didactique
3) L'animation et la formation continue.

Sous le point (1) il y a une thèse en préparation pour cette année, ce qui prouve le sérieux de cette recherche. Sous le point (2) il faut essentiellement citer le "livre du problème" puis les manuels du premier cycle qu'il va falloir remettre en question en s'orientant vers la publication de textes par thèmes. Enfin sous le point (3) 270 stagiaires se répartissent dans les activités suivantes :

- Problèmes du premier cycle : 80 (dont 50 pour la 4ème et la 3ème)
- Activités mathématiques dans le second cycle : 15
- Mathématiques et technique : 35
- Introduction de l'informatique dans nos classes : 40
- Problèmes généraux d'éducation mathématique : 60
- Interdisciplinarité : math-physique : 20
  math-astronomie : 20

A noter que ces 270 satgiaires viennent pour 100 d'entre eux du Haut-Rhin et les 170 autres du Bas-Rhin ce qui est à peu près proportionnel à la répartition de la population.

A titre d'information, l'an prochain sera sans doute organisé un cours d'introduction à la géomètrie algébrique dans le cadre de l'I.R.E.M.. Par ailleurs cette année un groupe de recherche sur la lecture en mathématique n'a pas marché. il sera relancé l'an prochain pour déboucher sur une bibliothèque minimale qui serait diffuser auprès des C.D.I. et des professeurs. On notera la faiblesse d'activités mathématiques concernant le deuxième cycle.

Reste le délicat problème de la formation continue : essentiellement celle des P.E.G. et des anciens maîtres de la voie III. C'est d'abord, au niveau de l'I.R.E.M. un problème financier. Dans l'état actuel des choses il est impossible qu'il prenne à sa charge une telle formation.

# Les ex-classes de transition

DOCUMENT DISTRIBUE : Fiches de travail rappelant les instructions officielles du 18.9.64 concernant les classes de transition ; des extraits de la circulaire du 22.7.74 concernant les allègements du programme. La fiche de travail intitulée "s'orienter vers un style d'enseignement nouveau" propose l'utilisation d'un Atlas de poche pour l'enseignement des maths dans les classes de 6° et de 5° à programme allégé. Le langage des ensembles et des relations est constamment utilisé en géographie. D'autre part le programme de géographie de 6° "La Terre" peut fournir de nombreux exemples de situations à exploiter en maths en 6° (exemples concrets de relations) et en 5° en ce qui concerne le repérage.

D'autres utilisations et exercices ont été proposés pour l'étude de la numération, du système métrique, de la proportionnalité (%), du langage des ensembles, de la logique, de l'introduction de IR , du domaine de la pédagogie du problème surtout.

-- "Les discipline d'éveil" deviennent ainsi de puissants instruments de motivation et tiennent une place importante dans l'organisation du travail scolaire. Un thème unique, tel que l'utilisation d'un Atlas, évitera " la dissipation dans un foisonnement d'activités gratuites" qui n'aboutiraient pas à l'enrichissement des connaissances, à l'assimilation des mécanisme et à l'ouverture d'esprit.

— Les C.P.P.N. (classes préprofessionnelles de niveau) : Il s'agit surtout dans cesclasses de créer un climat de confiance, de donner aux élèves une large ouverture sur le monde présent, dans ce qu'il a de stable et de permanent, d'original et de mouvant, d'accorder une importance essentielle aux activités manuelles et aux sciences appliquées.

Dans un tel système, la "leçon" n'a plus qu'une place réduite. Elle est réservée aux synthèses et aux révisions. Il faut insister surtout sur l'aspect pré-professionnel, donc dispenser un enseignement qui soit :

a) utile aux élèves

b) favorisant l'insertion dans la vie active.

De nombreux exercices concrets doivent être présentés aux élèves pour les préparer à la vie : exploitation de visites, de chantiers, d'entreprises, d'ateliers, de magasins. On doit également utiliser les formulaires administratifs (Sécurité Sociale, P.T.T., S.N.C.F.,...).

Les séances de travaux manuels éducatifs développent les activités pratiques (tracer, couper, plier, assembler) et les activités géométriques. Il y a donc non seulement acquisition d'un savoir, mais surtout d'un savoir-faire. Par exemple, la construction d'un planeur en modèle réduit peut être le point de départ de très nombreuses activités mathématiques.

Il faut aussi constituer une bonne bibliothèque de classe : Atlas, "Quid 77", livres de cuisine, de puériculture, d'économie domestique et d'autres ouvrages spécialisés : agriculture, viticulture, apiculture, pisciculture, etc... Ce seront des ouvrages de références, mais aussi des ouvrages de lecture car nos élèves ne "savent plus lire" couramment ce qui est souvent un premier facteur de leur échec scolaire. Lire, ce n'est pas seulement déchiffrer, mais aussi comprendre et interpréter (énoncé d'un problème par exemple).

Les méthodes préconisées et les contenus proposés sont pour une grande part le fruit d'une réflexion de professeurs des classes de transition et des classes préprofessionnelles de niveau qui s'étaient réunis avec l'animateur de la réunion à l'I.R.E.M. de Strasbourg et à l'Ecole Normale de Colmar, respectivement les 7 Mai et 30 Avril 1975 .

A. Bulber
Directeur du 1er cycle
du lycée de Barr.

# Les mathématiques & l'entrée dans les classes de second cycle

L'enquête présentée ici a été réalisée dans les établissements de Guebwiller en recueillant d'une part l'avis des enseignants, d'autre part l'avis des élèves, puis en analysant les problèmes psycho-social et psychologique qui se posent à l'élève entrant en seconde.

## Point de vue des enseignants

Le problème des programmes : On constate une mauvaise connaissance réciproque (dans les établissements d'origine comme dans les établissements d'accueil). Si les professeurs du second cycle long (classique et moderne) pensent que dans l'ensemble les programmes du premier cycle sont adaptés, par contre les collègues de sections techniques (en particulier dans le cycle court) ont des voeux souvent différents (voir à ce sujet le tableau en annexe).

En effet les maths du premier cycle ne servent pas uniquement aux m maths du seconde mais à bien d'autres matières (physique, mécanique industrielle, électricité, technologie, comptabilité, ...). Dans l'idéal il faudrait inclure toutes ces exigences aux précédentes, ce qui n'est guère possible, les programmes étant déjà suffisamment chargés. En règle générale les enseignants reconnaissent que les programmes du premier cycle sont trop théoriques, trop abstraits.

Le problème de la population scolaire : A la suite des réforme successives la "clientèle" scolaire dans le premier cycle s'est modifiée. Tous les élèves sont admis en 6ème et avec la nouvelle réforme, ils iront tous jusqu'en 3ème. Ces élèves ne sont pas tous intéressés par la même orientation (qui va de l'entrée directe dans la vie active aux secondes scientifiques C ou T1 ...). En moyenne 10% des élèves accèdent à la seconde C ; on ne peut pas travailler que pour eux.

## Point de vue des élèves

Comme à chaque changement de cycle (maternelle-primaire ; Primaire-CES ; CES-lycée ; Lycée-université) le changement de rythme impose une période d'adaptation plus ou moins longue et au niveau de la seconde les élèves ont également le sentiment de ne pas avoir été préparés à ce changement et qu'on ne leur explique pas suffisamment au début ce que l'on attend d'eux.

Le programme de troisième est supposé avoir été traité entièrement et acquis, ce qui est loin d'être le cas pour la majorité des élèves.

Le programme de seconde demande en plus du travail habituel de connaissance du cours d'avantage de réflexion et souvent un travail de recherche ailleurs que dans le cours.

Dans certains manuels, le programme de seconde commence trop abruptement (expace vectoriel par exemple); les élèves préfèreraient partir sur des notions plus concrètes et qui feraient mieux la transition avec ce qu'ils ont appris en troisième.

Problème psycho-social et psychologique

Par suite de l'organisation de la carte scolaire bon nombre d'élèves subissent une modification de leur rythme de vie, ce qui provoque un surcroît de fatigue.

L'adaptation aux structures du nouvel établissement, aux nouveaux professeurs, aux nouveaux camarades (les anciens ne sont pas forcément dans la même section) voilà autant de problèmes d'intégration qui peuvent se poser.

D'autre part cette période de transition importante dans la vie scolaire de l'élève correspond souvent à la crise d'adolescence, surtout difficile chez les garçons.

---

Au cours de la discussion qui accompagna le compte rendu de cette enquête, il apparaît que la liaison entre premier et second cycle est indispensable, que la critique systématique du cycle précédent (et ceci à tous les niveaux) est inutile et souvent sans fondement et que la connaissance réciproque des méthodes de travail et des programmes serait bénéfique.

D'autre part dans la plus part des établissements représentés les professeurs de troisième regrettent de ne pas savoir ce qu'il advient des élèves qu'ils ont orientés, il serait bon que les établissements d'accueil envoient systèmatiquement un bulletin d'appréciation de l'élève aux établissements d'origine, du moins la première année.

Les collègues de Lycée Technique présents déplorent la disparition des "professeurs correspondants" et la méconnaissance des programmes étudiés dans leurs sections : il serait bon, par exemple, de prendre connaissance des sujets de mathématiques proposés à certaines sections de B.E.P. pour s'apercevoir du niveau exigé.

| CONNAISSANCES SOUHAITEES A L' ENTREE DANS LE TECHNIQUE COURT | | | |
|---|---|---|---|
| ELECTRICITE | MECANIQUE | IND. DE L' HABILLEMENT | ECONOMIQUE |
| 1°) calcul numérique dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ distributivité | 1°) calcul numérique dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$ | 1°) calcul numérique dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{D}$ | 1) calcul numérique dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$. |
| 2°) puissances positives et négatives de 10 | 2°) tracés constructions géométriques solides géométriques | 2°) tracés constructions géométriques solides géométriques | 2°) Puissances |
| 3°) grandeurs | 3°) échelles | 3°) échelles | 3°) calcul littéral transformation de formules. |
| 4°) mesures notions de proportions. | 4)) calcul mental calcul rapide | 4°) calcul mental calcul rapide | 4°) calcul mental calcul rapide. |
| 5°) représentations graphiques | | | |

| POSSIBILITES D' ETUDE EN CLASSE DE TROISIEME ( C.E.S. ) | | | |
|---|---|---|---|
| Possible, mais programme mieux adapté à la classe de quatrième. | Il est possible de traiter la géométrie dans l'espace, mais cela est rarement fait. | | Les points (1) et (2) sont vu en 3° et 4°. Il est difficile de traiter le point (4). |
| | En maths, les tracés ne sont vus qu'en 6°. Voir peut-être en dessin, travail manuel ou techno | | |

Quant à l'adaptation de l'élève, il est souhaitable de mettre en place des structures d'accueil, formées par d'anciens élèves de préférence, un élève étant plus sensible à ce que lui présente un camarade. Ce sont également des élèves de sedond cycle qui pourraient venir exposer aux élèves de troisième une information précise de leurs activités dans les différentes sections, ce qui faciliterait également le choix de l'orientation.

---

En conclusion de cet intéressant débat il serait bon que la liaison entre les cycles devienne enfin une réalité, et à tous les niveaux, de nombreux échecs provenant de l'actuel manque de coordination.

| CONNAISSANCES SOUHAITEES A L' ENTREE DANS LE TECHNIQUE LONG | |
|---|---|
| INDUSTRIEL | ECONOMIQUE |
| 1) calcul numérique ; opérations écrites et calcul mental.<br>2) possibilité de changer d'inconnue. (tant que c'est x ça va).<br>3) grandeurs mesurables<br>notion de proportionnalité<br>unités de mesure<br>(utilisation des instruments de mesure).<br>4) puissances positives et négatives de 10.<br>5) représentation vectorielle | 1) calcul de proportionnalité |
| REPONSES DES PROFESSEURS DE C.E.S. | |
| | Problème psychologique important : tout dépend des conditions dans lesquelles les élèves sont venus dans ces classes ; par choix ou par dépit. |
| la notion de proportionnalité est difficile à traiter car il est nécessaire de passer très vite à d'autres points du programme. | |

Albericci
Conseiller d'orientation
Guebwiller

# Evaluation & Docimologie

Tout d'abord il nous faut préciser le vocabulaire :

La DOCIMOLOGIE c'est la science des examens. Elle s'intéresse au comportement de l'examinateur et de l'examiné. Elle s'intéresse également aux systèmes de notation.

L' EVALUATION est un terme un peu plus général puisque l'on peut parler d'auto-évaluation. Disons que l'on parlera d'évaluation dès que l'on aura un repérage de "performance" déterminé par un objet initial ; l'objet en question pouvant par axemple être un sujet d'examen entraînant de la part de l'examiné une réaction puis une réponse.

---

1) On peut distinguer quatre types d'évaluations qui peuvent se recouper :

évaluation < formative (I) / sommative (II)

évaluation < comparative (III) / sur critères (IV)

Pour préciser plus avant cette distinction, nous dirons que les types (I) et (II) s'appliquent aux conditions de l'évaluation :

* Pour le type (I) l'évaluation est faite au courant d'un apprentissage avec pour objectif d'influer sur le déroulement de l'apprentissage.
* Pour le type (II) l'évaluation est faite à la fin de l'apprentissage (l'exemple classique en est le permis de conduire) ou bien hors apprentissage.
* Le type (III) permet de situer des individus les uns par rapport aux autres . (l'exemple le plus connu en est le Q.I.)
* Le type (IV) est celui qui est utilisé pour l'établissement des barêmes, par exemple à l'écrit du baccalauréat.

  Puisque l'on cite le bac, on peut dire que cet examen est de type comparatif à l'oral mais "sur critères" à l'écrit.

2) Prenons maintenant l'exemple de la notation. Pour l'élève, la note a trois fonctions : aider
juger
trier

entre ces trois fonctions, il va immanquablement s'établir un ordre de priorité qui sera l'ordre inverse de celui donné ci-dessus. Par conséquent l'élève aura envie de tricher puisque la note sera ressentie comme un triage. Bien qu'on puisse contester cette envie de tricher face à un professeur au cours de l'année elle est incontestable au bac car le candidat a alors en face de lui un examinateur inconnu et non pas un professeur.

3) * Prenons une épreuve queconque "classique".

il y a d'abord une phase d'élaboration,

puis une phase de passation,

enfin une phase de correction qui tient éventuellement compte d'une phase indépendante de "critères". Eventuellement, mais de toute façon seulement après coup, il y a influence des "critères" sur l'élaboration.

* Pour une épreuve "sur critères", on a au contraire

tout d'abord une phase d'élaboration et une de critères,

puis une phase de passation,

enfin une phase de correction.

L'exemple le plus simple en est le Q.C.M. (questionnaire à choix multiple).

4) Etude des Q.C.M.

Les Q.C.M. ont l'avantage de s'adapter à différentes formes d'évaluation, en particulier à l'auto-contrôle. On rappelle qu'un Q.C.M. se présente sous l'aspect d'une succession de questions pour lesquelles sont proposées différentes réponses parmi lesquelles il faut choisir la (ou les ) bonne. Chaque question se voit attribuer la note 1 (pour une réponse juste) ou 0 (pour une réponse fausse).

question 1 réponses a: □ b: □ c: □ d: □

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

question n réponse a: □ b: □ c: □ d: □ e: □

Deux questions se posent immédiatement :

- Quel est le rôle du hasard dans les réponses ?
- Pourquoi adopte-t-on la même pondération pour chaque question ?

Il est facile d'éviter au hasard de jouer un rôle trop grand dans les réponses, ce qui permet de ne pas tenir compte de l'objection soulevée à la première question ci-dessus. Pour cela on utilise un procédé d'accumulation :

- Soit en attribuant un point seulement si il y a exactitude simultanée à plusieurs questions disséminées dans l'épreuve. Pour cela on effectue le produit des points (1 ou 0) attribués à chaque réponse.
- Soit en ne prenant en compte certaines questions que pour autant qu'il ait été répondu juste à une question déterminée. (on peut éventuellement prévoir un partage des points).

5) La phase délaboration d'un Q.C.M.

Un certains nombre de principes doivent guider l'élaboration d'un Q.C.M?

a) La certitude que les réponses données correspondent à l'exigence voulue (être sûr que ceux qui savent réussissent).

a') ou bien être sûr que ceux qui ne savent pas échouent (ce principe est rarement adopté).

b) Eviter que le questionnaire n'aide à trouver les réponses, mais éviter également l'excès inverse qui consiste à trop "piéger" les questions.

c) Ne pas négliger la possibilité d'interprêter les questions.

d) Ne pas négliger le risque d'enfermer l'élève dans un choix de réponses qui ne le satisfont pas. C'est-à-dire toujours prévoir toutes les réponses possibles, éventuellement grâce au cas "autre réponse".

exemple : La question : Dans chaque cas indiquer si le polynôme est de degré deux :

$3\ x^2 + 5\ x + 1$

$x^2 + \sqrt{x} + 1$ . . .

doit être modifié en : Dans chaque cas, indiquer s'il s'agit ou non d'un polynôme de degré deux : . . .

6) La phase d'exploitation.

* L'avantage principal d'un Q.C.M. est la possibilité de former des grilles du type ci-dessous préparées à l'avance :

| question / élève | 1 | observation | note | 2 | . . . . . |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

on obtient ainsi une information verticale permettant un jugement sur l'élève et la classe et ceci pour chaque question.

Parmi les autres avantages il faut citer la souplesse d'utilisation ; la notation facile et immédiate à long terme ; la possibilité notée ci-dessus d'exploitation verticale ; l'opinion de certains élèves.

* Parmi les inconvénients, on peut citer l'élaboration qui est longue et coûteuse ; l'impossibilité de proposer des recherches ; l'opinion de certains élèves.

Il faut cependant remarquer que l'on peut toujours proposer des raisonnements (simples) comme le montre l'exemple ci-dessous :

* Soit f la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ et à valeur dans $[0, 1]$ telle que

$$f(x) = \sin x$$

Démontrer que $\cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

Pour cela on énoncera dans l'ordre les numéro des arguments ci-dessous qui sont nécessaires :

1) $1 - x^2 \geqslant 0$ pour $x \in [0, 1]$
2) $0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \Longrightarrow \sin x \geqslant 0$
3) $0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \Longrightarrow \cos x \geqslant 0$
4) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
5) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
6) $\cos^2 a = \dfrac{1}{1 + tg^2 a}$
7) $f(f^{-1}(x)) = x$
8) $f^{-1}(f(x)) = x$
9) autre argument

. . . . . . . . .

7) Enfin il faut conclure par le fait que les expériences ont prouvé que les Q.C.M. réflètent bien le niveau habituel des élèves sauf pour quelques uns d'entre eux.

On avait demandé aux professeurs de classer leurs élèves en six groupes du plus fort : 5 au plus faible : 0 , le groupe 2 correspondant aux moyens réguliers et le groupe 3 aux moyens variables. Le groupe 0 n'est pas entré en ligne de compte car il ne comportait qu'un seul élève.

Les résultats moyens par groupes aux Q.C.M. ont été les suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| groupe 5 | : | 11,7 | |
| 4 | : | 9,9 | |
| 2 | : | 8,6 | on notera l'avantage des moyens |
| 3 | : | 6,9 | réguliers sur les irréguliers. |
| 1 | : | 6,3 | |

ce qui fait très nettement apparaître la hiérarchie et le niveau habituel des élèves (à l'exception de quelques uns).

d'après ce que la rédaction a retenu
de l'exposé de François Pluvinage.

# Nombres Eulériens ; Permutations

(I) INTRODUCTION

On connaît la relation qui existe entre les nombres $C(n,k)$, les coefficients du binôme, notés aussi $\binom{n}{k}$ :

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} C(n,0) = C(0,k) = 0 \\ C(0,0) = 1 \end{cases}$$

On obtient ces nombres en les construisant à partir du triangle de Pascal :

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 2 | 1 | | |
| 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | |
| 5 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

On définit de façon analogue les nombres de Stirling de deuxième espèce

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} S(n,o) = S(0,k) = 0 \\ S(0,0) = 1 \end{cases}$$

On obtient le tableau suivant pour les premiers nombres :

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

Pour les nombres de stirling de première espèce on a la définition suivante :

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1).s(n-1,k)$$

$$\text{avec} \begin{cases} s(n,0) = s(0,k) = 0 \\ s(0,0) = 0 \end{cases}$$

On obtient pour les premiers nombres, le tableau suivant. On remarquera que la somme des termes de la n-ième ligne vaut $n!$

| $n \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 2 | 3 | 1 | | |
| 4 | 6 | 11 | 6 | 1 | |
| 5 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 |

Enfin on définit les nombres eulériens par la relation suivante :

$$A(n,k) = (n-k+1).A(n-1,k-1) + k.A(n-1,k)$$

avec $\begin{cases} A(n,0) = A(0,k) = 0 \\ A(0,0) = 1 \end{cases}$

Les premiers nombres eulériens sont donnés par le tableau ci-dessous :

| $n \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 1 | 4 | 1 | | |
| 4 | 1 | 11 | 11 | 1 | |
| 5 | 1 | 26 | 66 | 26 | 1 |

Ici encore la somme des termes de la n-ième ligne est égal à $n!$ .

Remarques :

1º) Posons $[n] = \{1, 2, \dots n\}$ alors $S(n,k)$ est le nombre de partitions de $[n]$ en $k$ sous-ensembles (ou $k$ blocs).

exemples : $n = 3$ alors on a les partitions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $k = 1$ | $(1,2,3)$ | une façon |
| $k = 2$ | $(1)(2,3)$ $(2)(1,3)$ $(3)(1,2)$ | trois façons |
| $k = 3$ | $(1)(2)(3)$ | une façon |

On obtient donc ainsi une interprétation combinatoire des nombres de Stirling.

2º) Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $[n]$ alors $s(n,k)$ est le nombre de permutations qui ont $k$ cycles.

## (II) NOMBRES EULERIENS ET NOMBRES D' EULER

Quelques résultats :

1º) pour $x$ dans $\mathbb{N}$ on a : $x^n = \sum_{1\leq k\leq n} A(n,k) . C(n,x+k-1)$

2º) on a la relation inverse, dite relation de Worpitzky :

$$A(n,k) = \sum_{0\leq i\leq k} (-1)^i (k-i)^n \, C(n+1,i)$$

3º) on définit les polynômes eulériens $A_n(t)$ par :

$$A_n(t) = \sum_{k=1}^{n} A(n,k) \cdot t^{k-1}$$

Pour les premières valeurs de $n$ on a les polynômes suivants :

$$A_1(t) = 1$$
$$A_2(t) = 1 + t$$
$$A_3(t) = 1 + 4t + t^2$$

On démontre alors le résultat ci-dessous :

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} A_n(t)\,\frac{u^n}{n!} = \frac{1 - t}{-t + \exp(u(t-1))} = \left[1 - \sum_{n\geqslant 1} \frac{u^n}{n!}\,(t-1)^{n-1}\right]^{-1}$$

ce résultat est à rapprocher des deux résultats ci-dessous :

a) $\displaystyle \text{séc}(u) = \frac{1}{\cos(u)} = 1 + \sum_{p\geqslant 1} \frac{u^{2p}}{(2p)!}\,E_{2p}$ où $E_{2p}$ sont les nombres d'Euler ou nombres sécants

b) $\displaystyle \text{tg}(u) = \frac{u}{1!}\,1 + \frac{u^3}{3!}\,2 + \frac{u^5}{5!}\,16 + \frac{u^7}{7!}\,272 + \ldots$ Les coefficients de $u^{2p+1}/(2p+1)!$ sont les nombres tangents $T_{2p+1}$

<u>Théorème</u> :
$$\begin{cases} A_{2p}(-1) = 0 \\ (-1)^{p-1}\,A_{2p-1}(-1) = T_{2p-1} \end{cases}$$

## (III) <u>INTERPRETATION COMBINATOIRE</u>

Soit $X$ une application de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{N}$. On dit que $X$ est une <u>statistique eulérienne</u> si et seulement si :

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \text{card}\left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \;/\; X(\sigma) = k\right\} = A(n,k)$$

* <u>notion de descente</u> On appelle descente et on écrit DES la quantité :

$$\text{DES}\,\sigma = \text{nombre d'entiers } i \text{ tels que } \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \text{et} \quad \sigma(i) > \sigma(i+1) \end{cases}$$

<u>exemple</u> : si $\sigma = 5\;9\;3\;1\;8\;2\;6\;4\;7$

alors $\text{DES}\,\sigma = 4$

on démontre que $1 + \text{DES}$ est une statistique eulérienne.

* on définirait de façon tout à fait analogue la <u>notion de montée</u>.

* <u>notion d'excédence</u> On pose :

$$\text{EXC}\,\sigma = \text{nombres d'entiers } i \text{ tels que } \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \text{et} \quad \sigma(i) > i \end{cases}$$

<u>exemple</u> : si $\sigma = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \boxed{5} & \boxed{9} & 3 & 1 & \boxed{8} & 2 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$\text{alors } EXC\ \sigma = 3$$

on démontre que $1 + EXC$ est une statistique eulérienne.

* on définirait de même l'<u>excédence au sens large</u> : $EXC_o$ en remplaçant dans la définition précédente $\sigma(i) > i$ par $\sigma(i) \geqslant i$ . Alors on démontre que $EXC_o$ est une statistique eulérienne.

## (IV) CONSTRUCTION D' UNE BIJECTION DE $\mathfrak{S}_n$ SUR $\mathfrak{S}_n$

Le but de cette bijection est de transformér $\sigma$ en $\hat{\sigma}$ de façon que :

$$EXC\ \sigma = DES\ \hat{\sigma}$$

ce qui entraîne que si l'une est une statistique eulérienne, il en est de même de l'autre. Nous allons expliciter la construction de $\hat{\sigma}$ à partir de $\sigma$ au moyen d'un exemple :

1) $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \underline{5} & \underline{9} & \underline{8} & 2 & 3 & 6 & 7 & I & 4 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que $EXC\ \sigma = 3$ . On écrit ensuite $\sigma$ sous forme d'un produit de cycles :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ce qui peut également s'écrire :

2) $$\sigma = (\ 1\ 5\ 3\ 8\ )(\ 2\ 9\ 4\ )(\ 6\ )(\ 7\ )$$

3) on calcule ensuite l'inverse de $\sigma$ :

$$\sigma^{-1} = (\ 8\ 3\ 5\ I\ )(\ 4\ 9\ 2\ )(\ 6\ )(\ 7\ )$$

4) dans chaque cycle on écrit en tête le plus grand élément

$$\sigma^{-1} = (\ 8\ 3\ 5\ I\ )(\ 9\ 2\ 4\ )(\ 6\ )(\ 7\ )$$

5) le produit des cycles étant commutatif, on ordonne les cycles dans l'ordre croissant des premiers termes :

$$\sigma^{-1} = (\ 6\ )(7\ )(\ 8\ 3\ 5\ I\ )(\ 9\ 2\ 4\ )$$

6) on obtient $\hat{\sigma}$ en supprimant les parenthèses :

$$\hat{\sigma} = (\ 6\ 7\ 8\ 3\ 5\ I\ 9\ 2\ 4\ )$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 3 & 5 & I & 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

on vérifie bien que $DES\ \hat{\sigma} = 3$

Inversement, $\hat{\sigma}$ étant donné, on peut placer les parenthèses devant les <u>élèments saillants</u> , c'est-à-dire les élèments qui sont plus grand que tous ceux précèdent. On reconstitue alors les cycles de $\sigma^{-1}$ puis ceux de $\sigma$.

On a vu que $s(n,k)$ est le nombre de permutations ayant $k$ cycles, donc si $\sigma$ a $k$ cycles, $\hat{\sigma}$ a $k$ élèments saillants et $s(n,k)$ peut aussi s'interprêter comme étant le nombre de permutation ayant $k$ élèments saillants.

quelques résultats sur $\mathfrak{S}_3$

| $\sigma$ | DES | MON | EXC | $EXC_0$ | 1+DES | 1+EXC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 123 | 0 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 |
| 132 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 213 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| 231 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 312 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 321 | 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 |

et on a bien : $A(3,1) = 1$ ; $A(3,2) = 4$ ; $A(3,3) = 1$

## (V) AUTRE INTERPRETATION

Considérons un cube de côté 1 dans un espace de dimension $n$. Coupons-le par les hyperplans d'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = k$$

pour $k$ entier compris entre 1 et $n$ inclus. Soit $U(n,k)$ le volume du cube compris entre les hyperplans d'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n = k - 1$$

et $$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_N = k$$

Alors on ale résultat :

$$U(n,k) = \frac{A(n,k)}{n!}$$

extrait de la conférence de
FOATA (U.LP.)
d'après les notes de Lefort

# L' heuristique chez Képler

source : l' Astronomie ; décembre 73 et janvier 74.

En 1595, dans le "Mysterium Cosmographicum" Képler écrit :

> Cher lecteur, je me suis proposé de démontrer, dans ce petit livre, que Dieu, tout puissant et infiment bon, lors de la création de notre petit monde mobile et de la détermination de l'ordre des orbes célestes, a pris comme base de sa construction les cinq corps réguliers, qui ont joui d'une grande célébrité, depuis Pythagore et Platon jusqu' à nos jours ; et qu'il a coordonné à leur nature le nombre et la proportion des orbes, ainsi que les rapports des mouvements célestes.
>
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Tout d'abord, il part de grands principes, règles de pensée simples et superbes :

> Je n'hésite pas à affirmer que ce que Copernic a démontré a posteriori et sur la base d'observations interprétées au moyen de la géomètrie, tout cela peut être démontré a priori et ce sans aucune subtilité logique.
>
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Remarque 1) Admirable correspondance entre les trois espèces de "choses immobiles" : le Soleil, la sphére des fixés, et l'espace intermédiaire, d'une part, et, d'autre part, la Sainte-Trinité : Dieu le Père, le Fils et le Saint-Esprit.

Conséquence 1) Les étoiles fixes sont sur une sphère en cristal ultra lèger qui lui donne son unité profonde au sein de la Trinité (! sic).

Essai 1) "Puisque les choses immobiles se comportaient de la sorte, je ne doutais pas que les choses mobiles étaient régies par une harmonie correspondante". Il cherche alors en vain un rapport simple entre les rayons des orbites successives.

Remarque 2) Le temps de révolution des planètes semble être lié à la distance qui les sépare du Soleil.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Après de nombreux tatonnements, introduction de planètes fictives, inscription de polygones réguliers entre les orbites des différentes planètes, etc... Kepler remarque que "le mombre des planètes est justement tel, et non un autre..." et finalement :

> Je vis en effet que sur cette voie, si je suivais l'ordre des figures, je n'arriverais jamais au Soleil, et que je ne trouverais jamais la raison pourquoi il devrait y avoir six planètes plutôt que vingt ou cent. Toutefois les figures me plaisent, car c'était bien des quantités, (il s'agit de l'inscription des polygones) et donc quelquechose qui était là avant que le ciel ne fut, car la quantité est créée au commencement, ensemble avec les corps et le Soleil, au deuxième jour seulement. Or, me dis-je, si pour la grandeur et les six orbes admis par Copernic, pouvaient se trouver cinq figures particulières parmi l'infinité des autres, on obtiendrait ce qu'on cherche. Puis j'avançais encore : qu'est-ce que les figures planes ont à voir avec des orbes corporels ? Il faudrait plutôt des corps solides. Voilà, cher lecteur, tu as là ma découverte, et la matière de tout mon petit livre ! Car, si on

> le dit à quelqu'un qui connaît tant soit peu de géomètrie, il pense immédiatement aux cinq corps réguliers, avec les rapports de leurs sphères circonscrites et inscrites.
>
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Après de nombreux tâtonnements il trouve qu'il faut circonscrire à l'orbite de la Terre un dodécaèdre ; la sphère qui le circonscrit est l'orbe de Mars. Puis un tétraèdre : on trouve Jupiter. Et un cube : on trouve Saturne. Interne à l'orbe terrestre, on inscrit un icosaèdre, et on trouve l'orbe de Vénus ; puis un octaèdre : on a celle de Mercure. Ces corps, d'ailleurs, comme les sphères successivement emboîtées, ont des épaisseurs, les orbes n'étant pas, on le sait, tracés sur des concentriques.

Dans une réédition du "Mysterium" en 1621, Kepler introduit l'harmonie musicale des sphéres : La vitesse angulaire de chaque planète, mesurée en secondes de degré par jour fournit le nombre de vibration de chaque ton. La phrase musicale de chaque planète est ramener à la même octave en remplaçant un son par ses harmoniques.......

A partir de 1600, Kepler s'installe chez Tycho Brahe, à Prague, et travaille à l'étude du mouvement de Mars. Comme d'habitude Kepler utilise la méthode des essais et des erreurs ; premier essai : Mouvement circulaire uniforme ; première erreur,..... Puis les essais suivants : Mouvement circulaire autour d'un centre différent du Soleil, mais tel que la vitesse angulaire vu de l'équant (symétrique du Soleil par rapport au centre de l'orbite) soit constante. etc.... Entre temps, Képler a montré que le Soleil se trouvait dans le plan de l'orbite de Mars, elle même inclinée de 1º50' sur l'écliptique. Enfin Kepler se propose de combiner vitesse variable et trajectoire non circulaire, en utilisant des épicycles.

> Ma première erreur a consisté dans le fait d'avoir admis que l'orbite des planètes est un cercle parfait. Cette erreur se révèla être d'autant plus pernicieuse qu'elle a été soutenue par l'autorité de tous les philosophes, et, en particulier, était métaphysiquement tout à fait acceptable.
>
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Kepler arrive enfin à ce qui sera sa dernière tentative : Il suppose que la trajectoire est une ellipse (trajectoire auxiliaire à laquelle il n'attache pas d'importance physique) et il montre que la trajectoire réelle se trouve entre le cercle et l'ellipse :

> Le cercle et l'ellipse sont des figures géomètriques du même genre ; elles pèchent également, mais en sens contraire contre la vérité ; par conséquent celle-ci se trouve au milieu ; or, entre deux figures elliptiques ne peut se trouver rien d'autre qu'une ellipse... C'est pourquoi la trajectoire de Mars est une ellipse.
>
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Etudiant alors très en détail cette hypothèse de trajectoire elliptique, Il montre empiriquement que le Soleil occupe l'un des foyers, résultat qui le remplit d'aise et le confirme dans la justesse de son hypothèse.

Dans les chapitres de l'oeuvre de Kepler qui traitent de dynamique, on retrouve les nombreuses errances de l'astronome, avec des déductions fausses débouchant sur des conclusions justes et des observations exactes amenant à des conclusions erronées. Par ~~ex~~ exemple : "La vitesse d'une planète sur son orbite est inversement proportionnelle à la distance qui la sépare du corps (le Soleil) qu'elle contourne." Ce qui est faux et que les résultats déjà obtenus lui aurait permis de constater ; c'est à la racine carrée de la distance qu'il aurait fallu dire. Mais cela le conduit néanmoins, par des détours archi-faux à nos yeux, à la conclusion que "la force qui meut la planète a son origine dans le Soleil." Par ailleurs, il ajoute :

> Dire qu'une force animale qui réside dans le corps de la planète, et qui confère à l'astre son mouvement, passe tour à tour par une intensification et une atténuation, sans cependant se fatiguer ou s'affaiblir avec l'âge, serait une assertion par trop ridicule. De plus, on ne saurait comprendre de quelle manière cette force animale pourrait conduire la planète à travers l'espace du monde, où il n'y a pas d'orbes solides, ainsi que l'a démontré Tycho Brahé. Enfin, à un corps rond manqueraient les membres tels que pieds ou ailes, par le mouvement desquels, par une certaines pression et contre-pression, l'âme pourrait porter son corps à travers l'éther, c'est-à-dire à l'instar des oiseaux à travers les airs.
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Bien que Kepler reconnaisse que la vertu motrice du Soleil vis-à-vis des planètes et celle de la Terre vis-à-vis de la Lune sont de même nature, il associe d'abord la vertu motrice du Soleil à la lumière qu'il émet. Mais ce raisonnement ne tient pas à l'examen puisque l'occultation d'une planète par une autre aurait, selon lui, pour suite son immobilité. Finalement :

> Puisque la Terre meut la Lune par sa vertu motrice et est un corps magnétique, et que le Soleil meut les planètes semblablement, par la force motrice qu'il émet, le Soleil est fatalement un corps magnétique.
> . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Kepler remarque alors que le mouvement des planètes suit la proportion simple des distances dans son affaiblissement... Mais la force motrice se propage non pas en s'atténuant en fonction de la distance simple mais de son carré... Si l'on suit ce raisonnement, la diminution de vitesse du mouvement des planètes avec la distance ne peut être due uniquement à l'atténuation de la force motrice du Soleil. Observation très judicieuse qui gène Kepler, mais à laquelle il préfère ne pas s'arrêter.

Kepler, toujours conscient que la distance est inversement proportionnelle à la vitesse essaie, sur des temps finis (le calcul infinitésimal n'existant pas) d'évaluer la somme des distances. Ses calculs sont pénibles, souvent erronés, mais il trouve la loi des aires : "Le temps mis pour aller de A à B est inversement proportionnel à la distance moyenne sommée entre le Soleil et la planète entre A et B."

Quant à la troisième loi, Kepler l'énnonce, sans donner le cheminement qui l'y conduit.

# Equation de Fermat-Pell.

I) Cette équation joue un rôle important en arithmétique. Elle s'écrit :

(1) $x^2 - Ky^2 = 1 \qquad (x,y) \in \mathbb{N}^2$ K naturel non carré parfait.

On peut aussi bien la résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ mais $(x,y)$ étant une solution dans $\mathbb{N}^2$ on obtient les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ en prenant les couples $(\pm x , \pm y)$.

On remarque immédiatement qu'elle admet une solution simple $(1,0)$ mais le but de la résolution sera justement de trouver les autres solutions si elles existent. Jusqu'à nouvel ordre, chaque fois qu'il sera question de solution, il s'agira donc d'une solution autre que la solution triviale $(1,0)$. Nous adopterons le plan suivant basé sur l'établissement des trois propriétés.

a) Toute solution en engendre une infinité d'autres.

b) S'il existe une solution dite minimale elle engendre <u>toutes</u> les autres.

c) Il existe une solution minimale ; les développements en fraction continue nous permettent de la trouver.

Procédons donc à la démonstration de ces différents points.

---

a) <u>SUPPOSONS QU'IL EXISTE UNE SOLUTION $(x_1, y_1)$</u>.

Nous pouvons donc écrire l'égalité :

$$x_1^2 - K y_1^2 = 1 \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$(x_1 - \sqrt{K}\, y_1)(x_1 + \sqrt{K}\, y_1) = 1$$ et en élevant à la puissance $n$ .

$$(x_1 - \sqrt{K}\, y_1)^n(x_1 + \sqrt{K}\, y_1)^n = 1$$

Les deux facteurs du premier membre ont respectivement pour formule :

$$(x_1 - \sqrt{K}\, y_1)^n = x_n - \sqrt{K}\, y_n$$

$$(x_1 + \sqrt{K}\, y_1)^n = x_n + \sqrt{K}\, y_n$$

où $x_n$ et $y_n$ sont des polynômes en $x_1$ et $y_1$ constituant respectivement la partie entière et le coefficient de $\sqrt{K}$ du développement de $(x_1 + \sqrt{K}\, y_1)^n$ .

Nous avons donc l'implication :

$$x_1^2 - K y_1^2 = 1 \implies x_n^2 - K y_n^2 = 1$$

Donc si $(x_1,y_1)$ est une solution il en existe une infinité $(x_n,y_n)$ où $(x_n,y_n)$ est donné par les relations :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{(x_1 + \sqrt{K}\, y_1)^n + (x_1 - \sqrt{K}\, y_1)^n}{2} \\ \\ y_n = \dfrac{(x_1 + \sqrt{K}\, y_1)^n - (x_1 - \sqrt{K}\, y_1)^n}{2\sqrt{K}} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2)$$

Nous dirons que $(x_1,y_1)$ engendre les solutions $(x_n,y_n)$.

---

b) SOLUTION MINIMALE.

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{N}^2$ :

$$f(x,y) = x + \sqrt{K}\, y .$$

C'est une fonction croissante en $x$ et en $y$. D'autre part on s'aperçoit que, si $(x',y')$ et $(x'',y'')$ sont deux solutions de (1), l'on a l'équivalence :

$$x' < x'' \Longleftrightarrow y' < y''$$

Si donc $(x_1,y_1)$ est une solution de (1) il n'y a qu'un nombre fini de solutions de (1) pour lesquelles :

$$f(x,y) \leqslant f(x_1,y_1)$$

Soit $(x_o,y_o)$ celle pour laquelle $f(x_o,y_o)$ prend la plus petite valeur possible. Nous l'appellerons solution minimale de (1).

Proposition 1 : La solution minimale est unique.

$$\left.\begin{array}{l} (x_o,y_o) \text{ solution minimale} \\ (x'_o,y'_o) \text{ solution minimale} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_o,y_o) = f(x'_o,y'_o)$$

$$\Longrightarrow x_o + \sqrt{K}\, y_o = x'_o + \sqrt{K}\, y'_o \Longrightarrow x_o - x'_o = \sqrt{K}\,(y_o - y'_o)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_o = x'_o \\ y_o = y'_o \end{cases} \quad \text{puisque } \sqrt{K} \text{ est irrationnel.}$$

Nous constatons d'ailleurs d'après les remarques faites plus haut que $(x_o,y_o)$ ne donne pas seulement parmi tous les couples solutions la plus petite valeur à $f(x,y)$ mais qu'elle vérifie aussi par rapport à tout autre solution $(x_1,y_1)$ :

$$\begin{cases} x_o < x_1 \\ y_o < y_1 \end{cases}$$

Proposition 2 : La solution $(x_o,y_o)$ si elle existe, engendre toutes les solutions de (1).

Supposons qu'il existe une solution $(x',y')$ non engendrée par $(x_o,y_o)$. Comme la suite des $(x_o + \sqrt{K}\, y_o)^n$ est croissante et non bornée et que $(x_o,y_o)$ est solution minimale, il existe $n \geqslant 1$ tel que :

$$(x_o + \sqrt{K}\, y_o)^n < x' + \sqrt{K}\, y' < (x_o + \sqrt{K}\, y_o)^{n+1} \qquad (3)$$

Or $x_o - \sqrt{K}\, y_o > 0$ puisque $x_o + \sqrt{K}\, y_o > 0$ et $x_o^2 - Ky_o^2 = 1$

Multiplions les trois membres de (3) par $(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n$ :

$$(x_o + \sqrt{K}\, y_o)^n(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n < (x' + \sqrt{K}\, y')(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n < (x_o + \sqrt{K}\, y_o)^{n+1}(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n$$

donc $$1 < (x' + \sqrt{K}\, y')(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n < x_o + \sqrt{K}\, y_o$$

Ecrivons $(x' + \sqrt{K}y')(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n$ sous la forme $u + \sqrt{K}\, v \qquad (u,v) \quad \mathbb{N}^2$

donc $$1 < u + \sqrt{K}\, v < x_o + \sqrt{K}\, y_o \qquad (4)$$

- <u>Montrons que $(u,v)$ est une solution de (1)</u>

$$(x' + \sqrt{K}\, y')(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n = u + \sqrt{K}\, v$$

$$(x' - \sqrt{K}\, y')(x_o + \sqrt{K}\, y_o)^n = u - \sqrt{K}\, v$$

$$u^2 - K v^2 = (x' + \sqrt{K}\, y')(x_o - \sqrt{K}\, y_o)^n(x' - \sqrt{K}\, y')(x_o + \sqrt{K}\, y_o)^n$$

$$= (x'^2 - K\, y'^2)(x_o^2 - K\, y_o^2)^n = 1$$ puisque $(x',y')$, $(x_o,y_o)$ sont solutions de (1).

$\Longrightarrow \quad u^2 - K\, v^2 = 1$

Il suffit encore de montrer que $u$ et $v$ sont tous les deux positifs.

$\boxed{u \neq 0}$ $\quad u = 0 \Longrightarrow -Kv^2 = 1$ impossible car $K > 0$

$\boxed{v \neq 0}$ $\quad v = 0 \Longrightarrow u > 1$ et $u^2 = 1$ impossible

$\boxed{sg(u) = sg(v)}$ $\quad sg(u) = -\, sg(v) \Longrightarrow |u - \sqrt{K}\, v| \geqslant |u + \sqrt{K}\, v|$

$\Longrightarrow |u + \sqrt{K}\, v| \cdot |u - \sqrt{K}\, v| = |u^2 - K\, v^2| > 1$

puisque $u + \sqrt{K}\, v > 1$ et c'est impossible car $|u^2 - K\, v^2| = 1$

Comme $u$ et $v$ sont de même signe ils sont positifs d'après (4).

Conclusion : $(u,v) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $u^2 - K\, v^2 = 1 \quad (u,v) \neq (1,0)$

$(u,v)$ est donc une solution qui d'après (4) vérifie de plus

$$u + \sqrt{K}\, v < x_o + \sqrt{K}\, y_o$$

Ceci est impossible puisque $(x_o,y_o)$ est minimale et il n'existe donc pas de solution $(x',y')$ non engendrée par $(x_o,y_o)$.

---

## c) RECHERCHE DE LA SOLUTION MINIMALE ET RESULTATS DEFINITIFS.

D'après l'étude précédente, toute la résolution de l'équation (1) dépend donc de l'existence et de la recherche de la soltion minimale.

Pour démontrer l'existence de la solution minimale, nous allons utiliser un résultat de la théorie générale des fractions continues que voici : si $p$ est la période du développement de $\sqrt{K}$ et si $\delta_p = N_p / D_p$ est la réduite d'ordre $p$ (*), alors :

$$\left(\delta_p - \sqrt{K}\right)\left(\delta_p + \sqrt{K}\right) = \frac{(-1)^p}{D_p^2} \qquad (5)$$

D'autre part il n'existe pas de fraction $a/b$ plus simple que $\delta_p$ c'est-à-dire

$$( a < N_p \quad \text{et} \quad b < D_p ) \quad \text{et} \quad \left(\frac{a}{b} - \sqrt{K}\right)\left(\frac{a}{b} + \sqrt{K}\right) = \frac{\pm 1}{b^2}$$

**Si p pair :**

Comme (5) s'écrit alors $\left(\frac{N_p}{D_p} - \sqrt{K}\right)\left(\frac{N_p}{D_p} + \sqrt{K}\right) = \frac{1}{D_p^2}$

c'est-à-dire $(N_p - \sqrt{K}\,D_p)(N_p + \sqrt{K}\,D_p) = 1$

on en déduit que $(N_p, D_p)$ est non seulement solution de (1) mais aussi que c'est la solution minimale.

**Si p impair :**

En élevant les deux membres de (5) au carré on obtient :

$$(N_p - \sqrt{K}\,D_p)^2(N_p + \sqrt{K}\,D_p)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(N_p^2 + K\,D_p^2)^2 - K\,(2N_pD_p)^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$(N_p^2 + K\,D_p^2 \; ; \; 2\,N_p\,D_p) \text{ est solution de } (1)$$

Mais cette solution est aussi la solution minimale sinon il existerait $(x'_o , y'_o)$ et $n$ 2 tel que :

$$(x'_o + \sqrt{K}\,y'_o)^n = N_p^2 + K\,D_p^2 + k\,(2N_pD_p)$$

et $(x'_o , y'_o)$ vérifierait

$$\begin{cases} x'_o < N_p \\ y'_o < D_p \\ \left(\frac{x'_o}{y'_o} - K\right)\left(\frac{x'_o}{y'_o} + K\right) = \left(\frac{1}{y'_o}\right)^2 \end{cases}$$

---

(*) On démontre que tout nombre irrationnel, solution d'une équation du second degré à coefficients entiers admet un développement en fraction continue périodique.

En résumé :

Chaque solution de l'équation

$$(x,y) \in \mathbb{N}^2 \qquad x^2 - K\,y^2 = 1$$

est de la forme $(x_n , y_n)$ , $x_n$ et $y_n$ étant donnés par :

$$x_n = \frac{(x_o + \sqrt{K}\,y_o)^n + (x_o - \sqrt{K}\,y_o)^n}{2}$$

$$y_n = \frac{(x_o + \sqrt{K}\,y_o)^n - (x_o - \sqrt{K}\,y_o)^n}{2\sqrt{K}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

où $(x_o , y_o)$ est la solution minimale.

Le nombre $\sqrt{K}$ étant développé en fraction continue périodique de période $p$ et la $p^{\text{ième}}$ réduite étant $a/b$ la solution minimale sera donné par :

$$\begin{cases} x_o = a \\ y_o = b \end{cases} \quad \text{si } p \text{ est pair}$$

$$\begin{cases} x_o = a^2 + K\,b^2 \\ y_o = 2ab \end{cases} \quad \text{si } p \text{ est impair}$$

Remarque : On peut remarquer que pour $n = 0$ on retrouve la solution triviale $(1,0)$

Par ailleurs deux solutions consécutives $(x_n , y_n)$ et $(x_{n+1} , y_{n+1})$ sont liées par :

$$\begin{aligned} x_{n+1} + \sqrt{K}\,y_{n+1} &= (x_n + \sqrt{K}\,y_n)(x_o + \sqrt{K}\,y_o) \\ &= x_o x_n + K\,y_o y_n + \sqrt{K}\,(y_o x_n + x_o y_n) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_o x_n + K\,y_o y_n \\ y_{n+1} = y_o x_n + x_o y_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_o & Ky_o \\ y_o & x_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

si $p$ est pair $\begin{pmatrix} x_o & Ky_o \\ y_o & x_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & Kb \\ b & a \end{pmatrix} = A$

si $p$ impair $\begin{pmatrix} x_o & Ky_o \\ y_o & x_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + Kb^2 & 2Kab \\ 2ab & a^2 + K\,b^2 \end{pmatrix} = A^2$

Il est donc possible de donner le résultat sous une forme un peu plus concise en utilisant l'écriture vectorielle :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } p \text{ est pair}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & kb \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{2n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } p \text{ impair}$$

$A = \begin{pmatrix} a & Kb \\ b & a \end{pmatrix}$ . $a/b$ étant la p-ième réduite du développement en fraction continue de $\sqrt{K}$ .

---

II) EXERCICES

a) Résoudre $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ $\quad x^2 - 7y^2 = 1$

Dans beaucoup de cas on peut trouver la solution minimale par tâtonnements. Ici en remplaçant successivement $y$ par $1$ , $2$ , $3$ , ... on trouve la solution minimale très rapidement : c'est $(8, 3)$ .

La matrice $A$ s'écrit :
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

On obtient les solutions par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1,0)$ $\quad (8,3)$ $\quad (127,48)$ $\quad (2024, 765)$ $\quad$ . . . . . . .

b) Résoudre $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ $\quad x^2 - 19\,y^2 = 1$

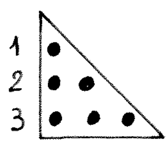
La solution minimale est moins simple que précédemment :

$$\sqrt{19} = (4)(\overline{2 , 1 , 3 , 1 , 2 , 8}) \quad p = 6 \qquad \delta_6 = 170/39$$

$$A = \begin{pmatrix} 170 & 741 \\ 39 & 170 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1,0)$ $\quad (170 , 39)$ $\quad (57799 , 13260)$ $\quad$ . . . . . . . .

c) Quels sont les nombres à la fois carrés et triangulaires ?




On appelle nombre triangulaire un nombre de la forme

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$$

exemple $6 = 1 + 2 + 3$ est un nombre triangulaire

Le problème conduit à l'équation :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = m^2 \iff \frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

$$\iff n^2 + n - 2m^2 = 0$$ résolvons en $n$ :

$$n = \frac{-1 + \sqrt{8m^2 + 1}}{2}$$ $n$ et $m$ entiers positifs

Toute valeur entière positive de $m$ pour laquelle $8m^2 + 1$ est un carré parfait convient puisque $\sqrt{8\,m^2 + 1}$ sera alors entier positif impair. Il suffit donc de trouver les entiers positifs $x$ et $y$ pour lesquels : $8\,y^2 + 1 = x^2$

$$\iff x^2 - 8\,y^2 = 1$$

La solution minimale est $(3, 1)$ . Les nombres $y_n$ seront donnés par :

$$y_n = \frac{(3 + \sqrt{8})^n - (3 - \sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}}$$

Les nombres cherchés seront (enécrivant $8 = 2\sqrt{2}$ ) :

$$X_n = y_n^2 = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{2n} + (3 - 2\sqrt{2})^{2n} - 2(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{32}$$

$$\boxed{X_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^{2n} + (3 - 2\sqrt{2})^{2n} - 2}{32}}$$

Pour trouver les premiers nombres $X_n$ il est peut-être plus simple d'utiliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

On trouve : 1 , 36 , 1225 , 41 616 , . . . . . . . . .

d) <u>Un problème de Sam Loyd</u> : La bataille de Hastings. ( 14 - 10 - 1066 )

On trouvera l'enoncé e ce problème dans le tome 1 des "casseetête mathématiques de Sam Loyd" de martin Gardner. En résumé voici l'énoncé du problème :

"... je vis les hommes de Harold groupés en 13 grands carrés tous égaux. Harold se porta alors au milieu de ses hommes et à son signal ils se réunirent en un seul et énorme carré ..."

Quels était le nombre des hommes de Harold ?

Soit $x^2$ le nombre des hommes, Harold compris, puisque ensemble il formaient un carré. On a donc pour équation :

$$x^2 = 13\,y^2 + 1$$ ou encore :

$$x^2 - 13\,y^2 = 1$$

$\sqrt{13} = (3)(\overline{1\,,1\,,\,1\,,\,1\,,\,6}\,)$ $p = 5$ $\delta_5 = 18/5$

Mais comme $p$ est impair la solution minimale est donnée par :

$$\begin{cases} x = 18^2 + 13 \times 5^2 = 649 \\ y = 2 \times 18 \times 5 \quad = 180 \end{cases}$$

Le nombre des hommes de Harold a donc été :

$$x^2 - 1 = 421\ 200$$

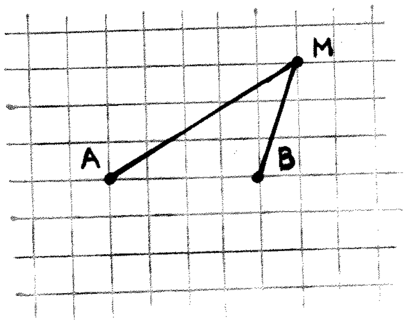
La solution suivante est en effet beaucoup trop grande pour être acceptable.

Le talent proprement diabolique de Sam Loyd réside non seulement dans le choix d'une équation peu classique mais surtout dans celui de $K = 13$ car, parmi les premières valeurs entières, $K = 13$ est certainement la valeur pour laquelle la solution minimale est la moins évidente.

e) Un des problèmes en rapport avec l'équation de Fermat-Pell est la recherche des points de coordonnées entières sur une hyperbole.

Soient $A$ et $B$ deux points situés sur une même droite d'un réseau carré et distants de 4 unités (unité = côté du petit carré). Trouver l'ensemble des points M du réseau tels que :

$$\left| d(M,A) - d(M,B) \right| = 2$$




Prenons pour axes $Ox$ et $Oy$ respectivement les droites $AB$ et la médiatrice de $AB$. Nous trouvons pour équation de $\left\{ M \ / \ d(M,A) - d(M,B) = 2 \right\}$

$$\left| \sqrt{(x+2)^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \right| = 2$$

ce qui équivaut à : $\quad 3x^2 - y^2 = 3 \qquad (1)$

si $(x_o , y_o)$ est une solution de $(1)$, $(x_o , y_o) \in \mathbb{Z}^2$, $y_o$ est nécessairement un multiple de $3$. Posons $y = 3z$.

Il nous faut résoudre l'équation :

$$x^2 - 3z^2 = 1 \qquad (2)$$

$(2,1)$ est la solution minimale et en tenant compte de $y = 3z$ on trouve les solution de $(1)$ : les couples $(\pm x_n , \pm y_n)$ sont donnés par :

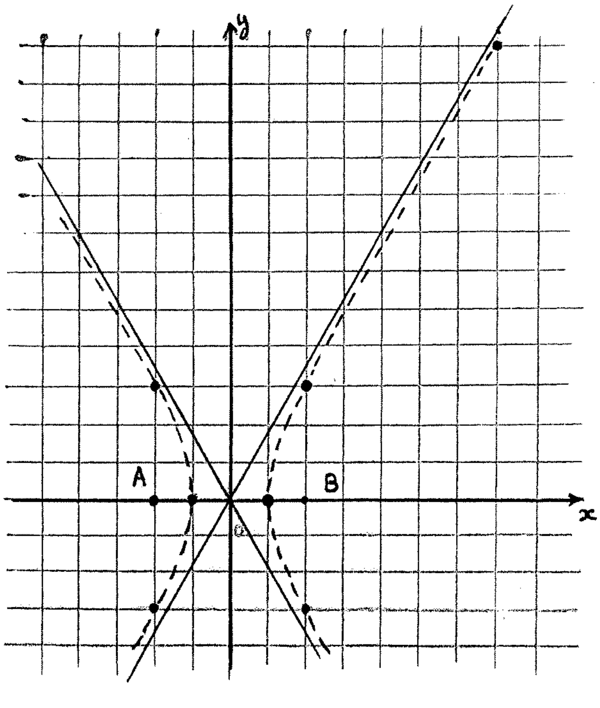
$$x_n = \frac{(2 + \quad 3)^n + (2 - \quad 3)^n}{2}$$

$$y_n = \frac{(2 + \quad 3)^n - (2 - \quad 3)^n}{2} \quad 3$$

Les premières solutions sont :

$(\pm 1 \ , \ 0)$ $\quad$ $(\pm 2 \ , \ \pm 3)$

$(\pm 7 \ , \ \pm 12)$ $\quad$ $(\pm 26 \ , \ \pm 45)$




---

Pour terminer, voici un tableau donnant la solution minimale de l'équation $x^2 - K y^2 = 1$ , pour les premières valeurs de K ;

| K | x | y | K | x | y | K | x | y | K | x | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 15 | 4 | 1 | 28 | 127 | 24 | 40 | 19 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | 17 | 33 | 8 | 29 | 9801 | 1820 | 41 | 2049 | 320 |
| 5 | 9 | 4 | 18 | 17 | 4 | 30 | 11 | 2 | 42 | 13 | 2 |
| 6 | 5 | 2 | 19 | 170 | 39 | 31 | 1520 | 273 | 43 | 3482 | 531 |
| 7 | 8 | 3 | 20 | 9 | 2 | 32 | 17 | 3 | 44 | 199 | 30 |
| 8 | 3 | 1 | 21 | 55 | 12 | 33 | 23 | 4 | 45 | 161 | 24 |
| 10 | 19 | 6 | 22 | 197 | 42 | 34 | 35 | 6 | 46 | 24335 | 3588 |
| 11 | 10 | 3 | 23 | 24 | 5 | 35 | 6 | 1 | 47 | 48 | 7 |
| 12 | 7 | 2 | 24 | 5 | 1 | 37 | 73 | 12 | 48 | 7 | 1 |
| 13 | 649 | 180 | 26 | 51 | 10 | 38 | 37 | 6 | 50 | 99 | 14 |
| 14 | 15 | 4 | 27 | 26 | 5 | 39 | 25 | 4 | 51 | 50 | 7 |

Stoltz

# Coloriage d'une carte

Vers 1850 un jeune étudiant en mathématique d'Edimbourg : Francis Guthrie se pose la question de savoir si 4 couleurs suffisent toujours pour colorier une carte de géographie. Ce problème reçoit une consécration officielle en 1878 quand Arthur Cayley le pose à la London Mathematical Society et le fait publier dans le bulletin de la Royal Geographical Society.

L'année suivante, Kempe publiait une solution qui devait se révéler fausse en 1890 grâce à l'oeuvre de Heawood. Cependant cette démonstration permettait de montrer que cinq couleurs suffisaient. La démonstration complète ne sera donnée qu'en 1976 grâce à l'ordinateur.

Entre temps le problème avait été étendu à toutes les surfaces topologiques imaginables.

Quelques définitions : La définition mathématique du mot "surface" correspond assez bien à notre idée intuitive : au voisinage de chaque point on peut assimiler le surface à un petit morceau de plan. Mais ce sont les propriétés globales des surfaces que l'on utilise pour les classer. Deux surfaces sont dites équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue. Les surfaces dites "compactes" sont les plus faciles à classer. La sphère et le tore sont compacts, mais pas le plan ni la bande de Moebius.

1) D'abord on range les surfaces en deux familles : les orientables et les non-orientables. Une surface est orientable si on peut distinguer un intérieur et un extérieur (exemple la sphère,le tore) ; elle est non-orientable dans le cas contraire (exemple la bouteille de klein, la bande de moebius).

2) Puis à chaque surface on associe un nombre entier : sa caractéristique d'Euler-Poincaré.(E.P.) Pour la calculer, on découpe la surface compacte en un nombre fini de "polygones" sans trou. Si S est le nombre de sommets, F le nombre de faces (nombre de polygones) et A le nombre d'arrêtes, la caractéristique d'E.P. est le nombre $S - A + F$ qui est indépendant du découpage choisi.

Deux surfaces compactes sont équivalentes si et seulement si elles ont même type d'orientabilité et même caractérisitque d'E.P.

La caractéristique d'une surface orientable s'écrit toujours : $n = 2 - 2g$ , avec $g$ entier positif ou nul. Le nombre $g$ s'appelle le genre de la surface. La caractéristique d'une surface non-orientable s'écrit $n = 2 - g$ avec $g$ entier supérieur ou égal à 1.

Le nombre chromatique d'une surface $S$ est le plus petit nombre entier $\chi$ tel que toute carte tracée sur $S$ et constituée de pays connexes (en un seul morceau) puisse être coloriée au moins d'une façon en utilisant au plus $\chi$ couleurs.

Quelques résultats : Heawood a démontré que si la surface compacte $S$ n'est pas une sphère et a sa caratéristique d'E.P. égale à $n$, on a l'inégalité :

$$\chi \leqslant \left[(7 + \sqrt{49 - 24\,n})/\,2\right] \qquad = \text{partie entière de } ( 7 + \ldots$$

Heawood a vérifié pour quelques surfaces que sa majoration était très bonne puisqu'il y avait égalité et non inégalité. D'où sa conjecture : "Le nombre chromatique d'une surface compacte autre qu'une sphère et sa caractéristique d'E.P. sont liés par la relation :

$$\chi = \left[(7 + \sqrt{49 - 24\,n})/\,2\right]$$ "

La conjecture était exacte, ce qui ne fut complètement démontré qu'en 1969 à l'exception de la bouteille de Klein pour laquelle $n = 0$ et dont Franklin avait démontré en 1934 que $\chi = 6$ (et non pas 7 comme le donnerait la formule).

Pour la démonstration de la conjecture on associe a toute carte un graphe de la façon suivante : On prend un point quelconque dans chaque pays et on joint deux points si ils sont dans deux pays ayant une frontière commune. Un tel graphe n'est pas plan en général. On est donc ramené au problème de trouver la surface de plus petit genre (dans le cas des surfaces orientables) contenant ce graphe et de voir que son genre est donné par la formule :

$$g = \left[(N - 3)(N - 4)\ /\ 12\right] + 1$$

où $N$ est le nombre de sommet du graphe que l'on suppose complet (c'est-à-dire que tous les sommets sont joints deux à deux).
La structure de cette expression dépend du reste de la division de $N$ par 12 ce qui explique que le problème se soit divisé en douze cas d'inégale difficulté. Les démonstrations ont été faites dans l'ordre suivant :
1954 : Surface non orientable et $N = 12\,k + 5$ par Ringel
1960 : $N = 12\,k + 3$ ; $N = 12\,k + 7$ ; $N = 12\,k + 10$ par Ringel
1963 : $N = 12\,k + 4$ par Gustin
1965 : $N = 12\,k$ par Terry, Welch et Youngs.
1966 : $N = 12\,k + 1$ ; $N = 12\,k + 6$ ; $N = 12\,k + 9$ par Youngs.
1967 : $N = 12\,k + 2$ ; $N = 12\,k + 8$ ; $N = 12\,k + 11$ par Ringel et Youngs.
1969 : $N = 18$ ; $N = 20$ ; $N = 23$ ; $N = 30$ par Mayer (ces cas n'avaient pu être traités par les méthode générale.

En guise de conclusion : Quelle est l'utilité de démontrer qu'il suffit de 4 couleurs pour colorier une carte plane ? Dans le fond cela n'aura aucune importance pratique et il est probable que la solution du problème ne modifiera jamais le métier de cartographe. La réponse est double : d'une part les mathématiciens ont du goût pour ce genre de défi qui tient de l'exploit sportif, et, d'autre part l'expérience a souvent montré que la résolution de problèmes même farfelus peut être génératrice d'idées nouvelles. Le problème des quatre couleurs a grandement contribué au développement de la théorie des graphes, une des branches vives de l'analyse combinatoire, et on reconnaîtra que ce n'est pas son moindre mérite.

D'après "La Recherche" nº 46 Juin 1974

"L'OUVERT" : responsable de la publication : Jean Lefort
22, rue du Dr. A. Schweitzer
WINTZENHEIM
68000 COLMAR
impression par les soins de : I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

Toute la correspondance doit être envoyée à l'I.R.E.M. de Strasbourg.
N'oubliez pas de signaler vos changement d'adresse.

# choisissez votre pédagogie avec autant de soin que votre moquette

## Une moquette ne s'achète pas à la légère.

**Votre décision est prise : vous allez acheter de la moquette. Vous n'ignorez pas qu'il s'agit là d'un acte important, qui va transformer votre cadre de vie pour longtemps. Bien choisie, cette moquette vous apportera autant de plaisir qu'un objet d'art ou un meuble précieux. Vous vivrez avec elle pendant de nombreuses années, sans vous en lasser, à condition que vous n'ayez fait aucune erreur dans votre choix.**

**Il est donc important que l'achat de votre moquette soit précédé d'une certaine réflexion.**

**Le problème du choix d'une moquette présente plusieurs aspects, obéissant à des critères précis, dont aucun ne peut être négligé sans vous faire courir le risque d'une erreur, irréparable hélas !**

## Pour choisir, cinq étapes faciles à retenir.

1

**Tout d'abord, le coloris.** Vous opterez pour une teinte de base en accord avec vos goûts, avec votre mobilier, l'éclairage de la pièce, ainsi que ses dimensions. La teinte de base étant définie (bleu, jaune, marron, rouge, etc...) il faudra en préciser la nuance, savoir si un bleu soutenu aura un effet plus heureux qu'un bleu pastel ou tirant sur le gris par exemple.

2

**L'aspect du velours** est le second critère qu'il vous faudra considérer. Quel est le type de velours qui conviendra le mieux à votre décor et à votre mode de vie : un velours rasé ? Un bouclé ? Un velours structuré ? A longue mèche ? Vous n'aurez que l'embarras du choix, car depuis quelques années les fabricants de moquette se sont ingéniés à multiplier les aspects de surface. Il faudra vous renseigner auprès d'un spécialiste afin de bien connaître les particularités de chaque type de velours avant de fixer votre choix.

# une pédagogie ne s'adopte pas à la légère.

VOTRE DECISION EST PRISE : VOUS ALLEZ ADOPTER UNE PEDAGOGIE. VOUS N' IGNOREZ PAS QU4IL S' AGIT D' UN ACTE IMPORTANT , QUI VA TRANSFORMER VOTRE EXISTENCE POUR TOUJOURS. BIEN CHOISIE , CETTE PEDAGOGIE VOUS APPORTERA AUTANT DE PLAISIR QU' UNE PRATIQUE SPORTIVE OU UNE ACTIVITE MUSICALE. VOUS ENSEIGNEREZ AVEC ELLE PENDANT DE NOMBREUSES ANNEES , SANS VOUS EN LASSEZ? A CONDITION QUE VOUS N' AYEZ FAIT AUCUNE ERREUR DANS VOTRE CHOIX .

IL EST DONC IMPORTANT QUE L' ADOPTION DE VOTRE PEDAGOGIE SOIT PRECEDEE D' UNE CERTAINE REFLEXION .

LE PROBLEME DU CHOIX D' UNE PEDAGOGIE PRESENTE PLUSIEURS ASPECTS , OBEISSANT A DES CRITERES PRECIS , DONT AUCUN NE PEUT-ETRE NEGLIGE SANS VOUS FAIRE COURIR LE RISQUE D' UNE ERREUR , IRREPARABLE HELAS !

## pour choisir, cinq étapes faciles à retenir.

**1** <u>Tout d'abord, la philosophie</u>. Vous opterez pour une philosophie de base en accord avec vos goûts, avec vos opinions, vos principes politiques ainsi que moraux. La philosophie de base étant définie (platonicienne, aristotélicienne, pascalienne, rousseauiste, darwinienne, piagétienne, ...) il faudra en définir la nuance, savoir si un marxisme-léninisme soutenu aura un effet plus heureux qu'un christianisme orthodoxe ou tirant sur l'intégrisme par exemple.

**2** <u>L'efficacité de la transmission</u> est le second critère qu'il vous faudra considérer. Quel est le type de transmission qui conviendra le mieux à votre comportement et à votre manière d'être : la pédagogie de l'exposition ? les méthodes actives ? la non-directivité ? la pédagogie institutionnelle ? les méthodes Freinet ? Vous n'aurez que l'embarras du choix, car depuis quelques années les pédagogues se sont ingéniés à multiplier les formules. Il faudra vous renseigner auprès d'un spécialiste, afin de bien connaître les particularités de chaque type de transmission avant de fixer votre choix.

3 **Ensuite, l'accord parfait** : il vous faudra tenir compte du style de votre intérieur, du style de votre mobilier, afin d'y accorder celui de votre moquette : moquette unie ou à dessin, moquette de style ou contemporaine.

4 **L'utilisation de votre moquette** est un autre aspect du problème, dont l'importance ne peut vous échapper. Va-t-elle connaître la douillette retraite de votre chambre à coucher, ou bien est-elle destinée à subir le trafic éprouvant d'une entrée, ou encore les risques de taches d'une salle à manger? A moins qu'elle ne doive affronter l'humidité d'une salle de bains? A chacune de ces situations devra répondre un type particulier de moquette offrant, selon le cas, une bonne résistance à l'usure, aux pressions du mobilier, aux taches, à l'humidité.

5 **Le prix** vient, évidemment, s'ajouter aux quatre éléments déterminants que nous venons de voir : coloris, aspect de surface, style, utilisation. Il faudra que vous sachiez dans quel ordre de prix au $m^2$ vous devez vous maintenir afin de respecter les limites de votre budget tout en ayant l'assurance d'un bon rapport qualité/prix.
C'est seulement lorsque vous possèderez, à partir de constatations faites dans un ou plusieurs magasins, tous les éléments qui déterminent la moquette répondant à vos besoins que vous pourrez vous lancer à sa recherche.

3

Ensuite, l'accord parfait : il vous faudra tenir compte du style de votre établissement scolaire, du style de vos collègues, afin d'y accorder celui de votre pédagogie : pédagogie traditionnelle ou novatrice, pédagogie de masse ou élitiste.

4

La mise en oeuvre de votre pédagogie est un autre aspect du problème dont l'importance ne peut vous échapper. Va-t-elle s'appliquer à des élèves dociles et intéressés, ou bien est-elle destinée à affronter des classes surchargées, ou encore les risques d'une classe d'élèves difficiles ? A moins qu'elle ne se heurte aux exigences des programmes scolaires ? A chacune de ces situations devra répondre un type particulier de pédagogie offrant, selon le cas, une bonne résistance au désintérêt, au chahut, à la contestation des élèves, aux pressions des autorités, au découragement.

5

Le coût en temps vient, évidemment, s'ajouter aux quatre éléments déterminants que nous venons de voir : philosophie, efficacité de la transmission, style, mise en oeuvre. Il faudra que vous sachiez dans quel ordre d'heures par semaines vous devez vous maintenir afin de respecter les limites de votre disponibilité tout en ayant l'assurance d'un bon rapport qualité/temps. C'est seulement lorsque vous posséderez, à partir de constatations faites dans un ou plusieurs établissements scolaires, tous les éléments qui déterminent la pédagogie répondant à vos besoins que vous pourrez vous lancer dans son application.

Interpédago
(p.c.c. F. Pluvinage )

# Témoignage

EN CLASSE DE PREMIERE

Lors d'un week-end dans les Vosges, auquel les élèves de première ont bien voulu m'inviter, les discussions se sont bien vite centrées autour d'un thème principal : le malaise au Lycée et les rapports élèves-professeurs. Il nous a paru indispensable d'y changer quelque chose, car l'organisation actuelle fait d'eux des "entonnoirs" et de nous des "machines à débiter et à sanctionner". Mais que pouvait-on bien modifier en restant en accord avec les textes et les institutions ministérielles ou rectorales ?

Etant professeur de mathématique, et cette classe de première n'étant pas de section scientifique il m'a semblé important de savoir ce que les élèves attendaient de moi. Leur réponse ne fut peut-être pas immédiate, mais unanime après peu de temps : "Vous devez nous transmettre un savoir minimum permettant de suivre le programme de terminale afin que nous décrochions notre bac dès le premier coup. Le reste pour nous a peu d'importance". Dès ce moment il nous a paru important de former une équipe et nous avons décidé les mesures suivantes :

- Il y a formation d'un groupe "élèves-professeur", et le vote est instauré pour toute décision à prendre relative à ce groupe.
- Le tutoiement réciproque est autorisé, mais reste facultatif.
- Les élèves ont droit de critique sur la matière, la manière, les attitudes à prendre face à un élément du programme, et les tests. Ils auront droit à la parole pendant les cours, à condition de ne pas trop perturber ceux-ci.
- Eux-mêmes se sentant incapables de le faire, je suis délégué pour choisir l'indispensable dans le programme officiel. Ce programme sera dicté aux élèves et servira de base à l'enseignement. Il sera suivi de près. Le temps à consacrer aux différentes parties reste de mon ressort, mais les élèves choisiront et auront l'entière responsabilité des exercices non inclus dans le cours : nombre, genre, heures à y consacrer, etc...

- En ce qui concerne le bruit, le silence absolu n'est pas exigé, mais il ne s'agira pas de perturber le groupe dans son ensemble. Celui-ci, s'il le juge utile, prendra la sanction nécessaire envers le perturbateur. J'aurai la charge d'exécuter cette sanction. A ce propos il a été décidé d'adopter la règle du"triple avertissement mensuel" : tous les mois sera établie une liste sur laquelle tout individu ayant eu trois avertissements aura la note "zéro". A la fin du mois cette liste est déchirée et les avertissements au nombre inférieur à trois supprimés.

Remarque : Cette sanction est possible car la moyenne des notes n'est pas automatiquement transcrite sur le bulletin, ce qui me laisse la possibilité de rectifier éventuellement une note trop basse due à ces zéros "de conduite".

- Attitudes envers les tests et les contrôles : les élèves choisissent leur nombre, les jours où ils sont produits, leur durée (une ou deux heures). Ils sont notés sur 20. Documents permis. Lors des corrections le groupe examine les questions à traiter. La fraude (échange de feuilles, regards jetés sur la copie voisine) doit être sévèrement punie (a été voté) : ceci a été décidé après deux tests où les élèves étaient en autodiscipline où donc des abus ont été enregistrés. La quasi totalité des membres du groupe ne tolère pas les notes convenables provenant d'un travail malhonnête. Ainsi je suis chargé d'enlever trois points lors de la première tentative, et de mettre zéro lors de la seconde. A la fin de chaque énoncé de test, je dois proposer des questions facultatives qui rapportent des points si elles sont convenablement traitées. Il est ainsi possible d'avoir une note supérieure à 20. Les élèves enfin peuvent faire appel quant à la note donnée.

- Les interrogations orales sont supprimées.

- Les exercices à faire à la maison sont facultatifs, la correction au tableau étant au départ faite par un volontaire. S'il n'y a pas de volontaire, le groupe s'interroge lui-même, en ce sens que le dernier élève passé au tableau désigne son suivant.

- Le devoir écrit à faire à la maison est en général un problème de recherche. Ce devoir est facultatif. Il n'y a pas de date limite de remise de ces devoirs. Du fait de sa non-pondération, il est souhaitable qu'il soit rédigé individuellement, la recherche pouvant se faire collectivement en petits groupes.

- Enfin tout travail personnel peut être rendu sur feuille et je serai tenu de le corriger comme un devoir classique.

- Possibilité de discussion en dehors des locaux du lycée (en tous cas en dehors des salles de cours) sur tout ce qui est relatif à mon enseignement et à leur avenir.

- Toutes modifications aux habitudes notées doivent à nouveau être soumises au vote.

La remarque générale à tirer de ces quelques observations doit faire constater qu'un contact nouveau s'établit entre enseignant et enseigné. L'élève prend davantage conscience de la nécessité d'une recherche personnelle. Il ne travaille plus pour les notes, sauf pendant les tests, et il est obligé de faire des mises au point constamment pour ne pas être rejeté du groupe. Les élèves, même les plus renfermés, ceux qui d'ordinaire ne disent rien pendant les cours, même s'ils suivent, parlent et proposent. Il y a donc une participation orale importante.

Les éléments perturbateurs sont "tués" petit à petit par la discipline qu'exige le groupe, et que je fais respecter par contrat. Enfin l'élève devient plus responsable, il n'est plus cet "entonnoir", comme il ne cesse de le proclamer.

POINTS SUR LESQUELS IL PEUT Y AVOIR NEGOCIATION

- Sur le programme : parties à traiter, importance à attacher à chacune d'entre elles.
- Organisation du travail :
  - plan de travail à partir du programme officiel,
  - équilibre cours-exercices,
  - choix des exercices, temps à y consacrer, genre, ...
  - devoirs facultatifs → équilibre entre cours et travail extra-scolaire,
  - choix du nombre et des dates des tests,
  - utilisation des documents.
- Conduite de la classe :
  - droit à la critique de part et d'autre,
  - bruit,
  - attention,
  - attitudes par rapport aux "interdits classiques", tels que la fraude, le manque de respect , etc
- Problèmes d'évaluation :
  Il faut enlever à la note sa trop grande importance.
- Deviennent alors propriétés abusives :
  la bonne tenue, la dignité, la politesse, la gentillesse, l'amabilité, le silence, l'autorité, le respect, etc...

F. BARDELANG
Ecole Normale - Forêt-Noire,
Séminaire P.E.G.C. - 3e année.

# Maths & société dans l'enseignement

Deux colloques inter-I.R.E.M. se sont tenus en mai 1976 à Caen et en mars 1977 à Port-Mort, ayant pour thèmes les fonctions sociales de l'enseignement des mathématiques.

Il est heureux que les I.R.E.M. se préoccupent de leur environnement sociologique, tentent de l'analyser et d'en tenir compte dans leur recherche. Nous y reviendrons dans les prochains numéros, mais pour l'instant nous vous livrons pêle-mêle quelques extraits de textes qui jalonneront cette prise de conscience (cf. "Bulletin Inter-I.R.E.M. n° 13, octobre 1976).

Au troisième Congrès International sur l'Enseignement des Mathématiques qui se tint à KARLSRUHE en août 1976, Sir James Lighthill avait été invité à faire la première conférence générale devant l'ensemble des congressistes. Désirant éviter de faire un exposé théorique, il voulut montrer à l'aide d'exemples comment on pouvait éveiller l'intérêt pour les mathématiques chez *de jeunes garçons* (sic). Les exemples choisis étaient extraits d'un livre à paraître prochainement dont il est l'un des auteurs et dont il précisa les références. Le premier exemple explicitait les calculs ayant permis de faire *"revivre la Tamise"*, problème écologique concernant environ 10 millions de personnes. Le deuxième exemple était un modèle météorologique pour l'ensemble de l'hémisphère nord, problème concernant plus de la moitié de l'humanité. Le troisième exemple touchait à des résolutions par ordinateurs de problèmes d'optimisation. Son exposé, il faut l'avouer, ne souleva pas l'enthousiasme et il y eut même de nombreuses personnes à quitter ostensiblement la salle. Il m'a semblé cependant que cet exposé avait l'intérêt de présenter de façon presque naïve une image très répandue des mathématiques: *sorte de langage qui permet à quelques spécialistes de faire le bien de millions de personnes.*

On peut ne pas s'inquiéter de voir l'école et l'enseignement des mathématiques en particulier renforcer ou créer auprès des enfants des mythes hiérarchiques comme cette confiance dans les *"gentils" spécialistes*, quitte à qualifier un certain pourcentage de ces enfants de *paresseux*, *bêtes*, ou comme disent les spécialistes *inaptes à la pensée abstraite*, *débiles légers*, *débiles moyens*, *dys-ceci ou dys-cela*. Le rôle de la recherche sur l'enseignement des mathématiques se réduit alors à des analyses précises de l'apprentissage de tel ou tel concept et à des études sur l'utilisation de tel ou tel matériel.

Si, au contraire, on souhaite parvenir à une école où les enfants soient reconnus comme des êtres humains à part entière et où ils puissent acquérir et exercer leur liberté, alors il est nécessaire de comprendre: *comprendre le fonctionnement de l'école*, *comprendre son rôle dans la société.* Une démarche purement quantitative n'est pas suffisante pour cela, il faut avant tout créer des concepts permettant de décrire les fonctions sociales de l'école. Etant donné l'importance actuelle des mathématiques dans notre enseignement, il est nécessaire d'étudier tout particulièrement les fonctions sociales de l'enseignement des mathématiques. Les IREM, Instituts de Recherche, ne peuvent délaisser les domaines essentiels des études sociologiques et psychologiques de l'enseignement des mathématiques.

SITUATIONS SCOLAIRES,

par Catherine LEHMAN (Caen).

Histoire de D...

Hantise du professeur, c'est malheureusement lui qui fournit leurs meilleurs arguments aux détracteurs de la jeunesse actuelle. Il semble l'écueil sur lequel vient se briser tout effort pédagogique: rien ne semble avoir prise sur lui. Son comportement semble étudié pour renvoyer au "prof" l'image de son impuissance. Dos légèrement voûté, démarche traînante, sourire sarcastique à la limite de l'insolence, inévitable sacoche du surplus américain dont il sort le papier froissé sur lequel il dessinera pendant toute l'heure; il semble n'avoir pour tout projet que de "tenir" une année scolaire, la dernière, sans rien faire. Il utilise, avec un cynisme assez étonnant, sa connaissance des règles du jeu: pas de punition, colle ou devoir supplémentaire, aucune perspective de renvoi. Le règlement de compte final: livret scolaire, interdiction de redoubler, échec au baccalauréat, ne paraît pas l'impressionner outre mesure: "nous ne l'aurons pas comme ça!" Il semble un défi au simple bon sens: on voit mal ce qui, chaque matin, peut le ramener dans la salle de classe, inertie, dépendance matérielle à l'égard de sa famille, chaleur de la petite communauté où il est regardé avec amusement et sympathie , peur du monde extérieur, ou du travail. C'est un des paradoxes de notre société que le lycée, pourtant détesté, puisse paraître plus supportable que ce qu'on appelle, curieusement, la "vie active".

La carrière scolaire de D a de quoi surprendre: il est arrivé brillant élève en seconde. Ses camarades se rappellent encore ses interventions au cours de latin. Il a donc pu "vivre" un certain temps "sur son acquis". Mais son arrivée au lycée a été le commencement d'un abandon progressif culminant dans son ataraxie finale. S'il est possible de le juger sur le peu de travail qu'on arrive à lui arracher , il est intelligent, vif, sait comprendre un texte et écrit très correctement, c'est-à-dire qu'il n'est bloqué par aucune incapacité fondamentale.

Dans ce genre de situation, on s'en tient trop facilement aux jugements sommaires: "il est paresseux", "insolent", "trop décontracté" voire "inconscient"; plus grave, il montrerait la profonde décadence de la jeunesse actuelle et l'abandon criminel des vertus traditionnelles: bonne tenue physique et morale, goût de l'effort, respect du maître et du savoir ... Pourtant son comportement est trop répandu, à des degrés divers, chez les lycéens, pour qu'on ne puisse y voir une des réponses possibles à l'expérience scolaire: la dérision opposée à la dérision.

Dérision de l' "autorité" dont il perçoit les limites et les contradictions: il objecte au proviseur qui le menace d'un renvoi de deux jours "qu'il est curieux de vider ceux qui auraient le plus besoin de travailler". Dérision d'un enseignement morcelé, disparate, déchiré entre l'idéal de ses demandes et la réalité de ce qu'il est obligé de tolérer: on étudie Racine mais on est sans prise sur la détérioration de l'orthographe. Dérision du rythme monotone des journées et des semaines, du temps brisé détruisant toute possibilité d'effort prolongé et personnel; de ce lycée couloir où la seule activité peut être de s'asseoir, lieu abstrait, presque irréel. Dérision des professeurs dont il perçoit avec acuité la fatigue, les doutes, les faiblesses ... il n'est ni le premier, ni le seul à ne plus prendre cela très au sérieux !

A travers D l'image qui se dégage de l'école est celle du "ras le bol" et du "laisser-aller". Ceux des professeurs qui refusent de s'en tirer à bon compte par le mépris, l'invective ou le châtiment se sentent très désarmés devant ce genre d'élève, et pris entre le refus de la "méthode forte" et l'affrontement avec un pareil déni. L'assouplissement des contraintes de la vie scolaire — retards, absences, refus de travail, sont de plus en plus difficilement "sanctionnés" — n'a jamais été plus que le fait d'entériner un statu quo. L'élève n'est pas plus respecté, il n'est considéré ni comme libre, ni comme responsable. C'est simplement qu'on n'arrive plus à maintenir un ordre — pourtant souhaité par le plus grand nombre des professeurs. De leur côté, les élèves ont le sentiment qu'ils mettent l'école au défi et ils la méprisent parce qu'ils arrivent si facilement à la déjouer. De là aussi, chez les professeurs, des moments de crise ou de violence, où dans une sorte de regain d'autoritarisme, ils veulent "faire un exemple" (quel lycée n'a pas connu ces houleux conseils de classe, voire de discipline, où quelques malheureuses victimes se voient chargées de tous les maux de l'institution ?). Il serait si facile d'incriminer quelques fauteurs de troubles, "caractériels", "mauvaises têtes", "provocateurs" ou militants gauchistes; trop d'entre nous rêvent d'un lycée enfin pacifié par l'élimination de cette "gangrène" — (J'emprunte cette remarquable expression à un de mes collègues).

La disparition de l'ordre juridique napoléonien a fait place dans bien des cas, à un retour à l'état de nature: c'est-à-dire à une totale indétermination des rapports entre personnes et entre groupes. Dans ce climat plane perpétuellement la menace d'une violence: révolte, chahut, grève, d'un côté, mépris, rejet ou injustice de l'autre. L'impression de chaos est aggravée par l'extraordinaire inconsistance des pratiques pédagogiques et des idéologies, qui vont de modèles d'ordre et de discipline presque ouvertement fascites à des tentatives autogestionnaires ou libertaires. Tous les professeurs qui n'assument pas ces positions extrêmes savent qu'il faudra établir avec chaque classe, voire avec chaque élève, une sorte de "modus vivendi", et ceci après un plus ou moins grand nombre de conflits. La confiance, la possibilité de communiquer et de travailler ensemble ne sont jamais immédiates; elles restent toujours précaires. Ceci se traduit chez la plupart des professeurs par une angoisse plus ou moins latente ou par un désinvestissement progressif de leur métier.

A travers des élèves comme D, ils reçoivent l'image insupportable du monde dans lequel ils acceptent encore de vivre. Faut-il faire disparaître ces témoins un peu trop gênants ?

MATHEMATIQUES MODERNES ET SPECTACLE DE LA SCIENCE,

par Rudolf BKOUCHE

## AXIOMATIQUE et ENSEIGNEMENT

**(Réflexion sur l'enseignement de la géométrie)**

### 1. SUR LA METHODE AXIOMATIQUE

Il est bien connu que la commission "Lichnérowicz" a choisi la "méthode axiomatique" comme présentation de la géométrie dans l'enseignement secondaire: faut-il en déduire que les membres de la dite commission n'ont rien compris ni à l'enseignement ni à l'axiomatique, ou plutôt qu'ils ont vu l'axiomatique à travers un voile idéologique, l'axiomatique comme organisation du spectacle de la science, et non comme organisation de la connaissance scientifique.

On peut présenter la méthode axiomatique comme une méthode universelle qui permet d'introduire la rigueur d'un raisonnement sans faille, d'éliminer toute intuition et ramener ainsi les mathématiques à un simple langage: langage à la fois gratuit (puisque construit a priori à partir de ses propres règles, indépendant de toute réalité extérieure) et nécessaire (puisque langage privilégié de la science et par conséquent de la compréhension de la réalité). On réussit à obscurcir à la fois les mathématiques qui n'apparaissent plus que comme un langage artificiel et l'utilisation des mathématiques dans les autres sciences (comment un langage artificiel peut-il être un instrument de connaissance de la réalité) ?

La méthode axiomatique n'est pas née de l'esprit "abstrait" de quelques mathématiciens, elle s'est au contraire développée à partir des problèmes rencontrés par les mathématiciens au cours de leurs travaux (le postulat d'Euclide et les géométries non euclidiennes, la mise en forme de l'analyse avec les difficultés liées aux notions de limite et de continuité, les paradoxes de la théorie des ensembles), c'est à travers les difficultés posées par ces problèmes qu'on a ressenti le besoin d'une mise en ordre, la nécessité de séparer explicitement dans le discours mathématiques, concepts non définis et objets définis, axiomes et théorèmes, et c'est pour y répondre qu'on a inventé et développé les langages formalisés.

L'apport essentiel des premiers constructeurs d'axiomatique, et particulièrement de Hilbert, est d'avoir explicité le rôle du langage formalisé, explicité la distinction entre la construction formelle et la signification de cette construction (ou, comme on dit, la distinction entre la syntaxe et la sémantique). En construisant l'axiomatique de la géométrie euclidienne, Hilbert précise qu'il n'est point nécessaire de définir les concepts points, droites, plans, (cette définition n'a aucun sens du point de vue formel) mais qu'il est nécessaire d'expliciter toutes les relations admises "a priori" entre ces concepts, avant de commencer à démontrer des théorèmes et définir de nouveaux objets; on peut changer dans l'axiomatique hilbertienne les mots points, droites, plans en chaises, tables, armoires, sans rien changer au développement de la théorie, cependant cette formalisation n'a de sens que par rapport à la situation mathématique qu'elle entend organiser, il ne peut être question d'en faire un système isolé, ce ne serait qu'une suite de phrases, correctement structurées peut-être, mais complètement vides de sens.

Il ne peut donc être question de commencer un enseignement de mathématiques par l'axiomatique, quand bien même cette axiomatique serait "simplifiée" pour être "comprise" par des élèves de 12 ans; l'axiomatique n'est pas un jeu gratuit, c'est une méthode et un instrument de connaissance, et comme tout instrument, son existence se justifie par ses objectifs. Instrument puissant d'organisation des connaissances, la méthode axiomatique peut, et même doit, jouer un rôle dans l'enseignement, mais ce rôle est essentiellement un rôle de synthèse et de clarification, il ne peut donc intervenir qu'à la fin; venu trop tôt, avant la pratique effective de la discipline enseignée, ce ne peut être qu'un obstacle supplémentaire. "Avant de pouvoir mettre de l'ordre dans un ensemble de connaissances, il faut déjà s'en être fait une idée informelle ou heuristique" [1] , ceci n'exclut pas la pratique effective de méthodes déductives qu'il ne faut pas confondre avec la méthode axiomatique (cf. paragraphe 6).

### 2. SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Dans un article antérieur sur le programme d'Erlangen [2] , j'avais rappelé comment la distinction géométrie affine — géométrie métrique est reliée à la théorie des groupes et ne peut être comprise qu'à l'intérieur du rapport géométrie — théorie des groupes. La distinction a priori telle qu'elle est pratiquée dans l'enseignement actuel de la géométrie est donc tout à fait arbitraire et ne peut donc être comprise par l'élève (voire l'enseignant), quand bien même elle est "justifiée" par des manipulations "concrètes" qui ne sont qu'une illustration du discours mais n'expliquent rien.

En fait, le choix des premiers éléments de géométrie à enseigner n'est pas seulement un problème de mathématiques ou de pédagogie, il est lié à la signification et à la place de la Science (ou des sciences !) dans la Société. Mathématiquement, rien ne permet de privilégier la géométrie affine ou la géométrie métrique, on peut évidemment présenter une axiomatique a piori mais celle-ci n'a aucune justification autre que l'idée aussi fausse que répandue que le mathématicien est libre de ses constructions théoriques (fausse parce que à l'opposée de la pratique des mathématiciens). Si l'on ne peut trancher dans un débat sur le choix affine - métrique par des arguments mathématiques, on ne peut mieux trancher par des arguments pédagogiques, au sens où l'on entend trop souvent la pédagogie comme "l'art d'enseigner", indépendamment de ce que l'on enseigne (et qui en termes plus crus, s'appelle du bourrage de crâne), et qui amène à privilégier "ce qui passe le mieux auprès des élèves", les objectifs de l'enseignement étant oubliés (ou plutôt transformés); il faudrait d'abord savoir ce qui est "facile" pour l'élève, mais ceci est d'abord un problème de pratique sociale, il n'y a pas un "Elève" mais des élèves avec des histoires différentes, et donc des habitudes et des formations différentes, réagissant différemment devant le même enseignement; d'autre part, l'enseignement ne se réduit pas au "facile", à ce qui "passe"; s'il s'agit effectivement de donner des instruments de connaissances théoriques et pratiques, l'obstacle ce n'est pas la difficulté, mais c'est le formel, l'a priori, tout ce qui apparait à l'élève sans signification.

Il est donc nécessaire avant tout choix de préciser les objectifs, objectifs généraux (pourquoi enseigne-t-on les mathématiques) et objectifs à court terme (ce qu'un élève doit savoir à la fin d'un cycle d'études); il est tout aussi nécessaire de tenir compte des connaissances antérieures des élèves (scolaires ou extra-scolaires), même et surtout si celles-ci doivent être soumises à la critique, voire remises en cause.

Nous nous proposons de préciser tout ce qui vient d'être dit à travers l'enseignement de l'algèbre linéaire et son utilisation.

## 3. L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE

Ce qui frappe dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, c'est d'une part, la facilité avec laquelle l'étudiant manie les définitions et propriétés générales, et d'autre part, la difficulté du même étudiant devant les problèmes oú apparaît la linéarité (je pense essentiellement à la géométrie et à l'analyse, on pourrait en dire autant pour la physique ou tout autre domaine).

Il est facile de vérifier qu'une partie E d'un espace vectoriel F est un sous-espace vectoriel, qu'une application d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est une application linéaire, mais les deux exercices ci-dessus ne sont pas des exercices de mathématiques, ils montrent seulement qu'un langage a été compris et qu'on sait l'utiliser dans des cas simples. La difficulté commence lorsqu'on utilise l'algèbre linéaire comme outil de travail (en géométrie, en analyse, en physique, ...), c'est-à-dire lorsque le concept "linéaire" n'apparaît plus comme une donnée en soi, mais comme exprimant un aspect de la géométrie, de l'analyse ou de la physique. Il y a là un problème profond et qui est encore loin d'être résolu.

Evidemment, il est facile de faire un cours d'algèbre linéaire, les exposés foisonnent, donnant la définition des espaces vectoriels, des applications linéaires et de leurs premières propriétés, l'axiomatique s'écrit aisément, et on se donne bonne conscience à peu de frais avec quelques exemples: géométrie élémentaire, polynome, fonctions numériques, et si on veut paraître plus savant, on peut parler de physique, de chimie, voire de sciences économiques; mais tous ces exemples n'apparaissent que comme illustration du concept (abstrait !) "linéaire". Après un cours d'algèbre linéaire, le concept "linéaire" apparaît à l'étudiant comme un concept de l'algèbre linéaire (ce qui est une tautologie et ne sert à rien), détaché de toute signification extérieure à ce chapitre; le coup des exemples n'est qu'une illustration: on se sert de situations extérieures (géométrie, analyse, etc...) pour exhiber un espace vectoriel ou une application linéaire, mais le rapport réel entre le "linéaire" et les situations extérieures est masqué; dans ces conditions, rien d'étonnant à ce que l'étudiant ne sache pas reconnaître le linéaire là où il apparaît, même s'il sait faire marcher la machine.

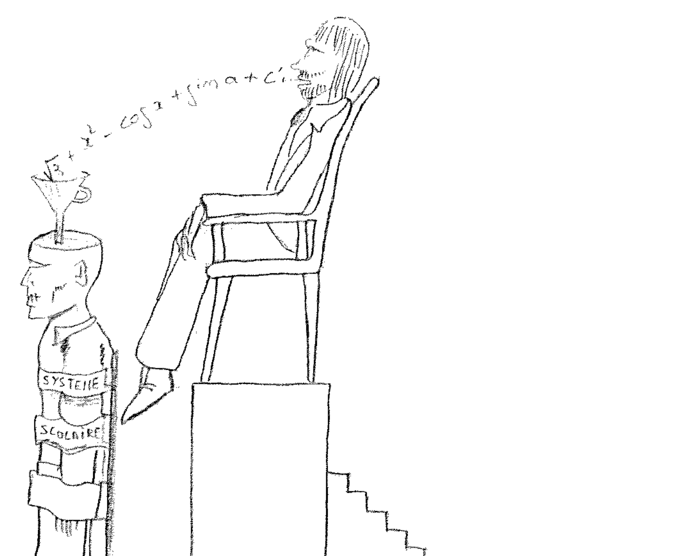
Pendant plusieurs années on a ainsi, dès la première année de l'Université, plaqué de l'algèbre linéaire à des étudiants ayant une formation secondaire dite "classique", où l'aspect linéaire était entièrement escamoté, ce qui interdisait toute compréhension du rapport algèbre linéaire - géométrie élémentaire (je ne parle même pas du caractère linéaire de l'analyse où la seule idée d'un espace vectoriel de fonctions semblait relever de la bizarrerie bien connue des mathématiciens). L'introduction de l'algèbre linéaire dans l'Enseignement Secondaire pouvait être un moyen de transformer cette situation en explicitant aussitôt que possible le caractère linéaire apparaissant en géométrie élémentaire, en algèbre (polynomes) ou en analyse (espace de fonctions), ce n'est pas cependant ce qui s'est passé. Sous prétexte que le linéaire est l'aspect unifiant diverses théories et que l'axiomatique (facile à écrire) de l'algèbre linéaire permet le déroulement quasi-automatique d'un certain nombre de théories mathématiques, c'est l'axiomatique de l'algèbre linéaire qu'on a mis en avant. Alors que le caractère linéaire est présenté sous une forme artificielle dans la classe de quatrième (géométrie affine) et complètement oublié en troisième (géométrie métrique), une présentation axiomatique "simple" est donnée en seconde, indépendamment des situations explicites (celles-ci données à titre d'exemples ne sont que des illustrations au sens donné ci-dessus), c'est après-coup seulement qu'on prend la peine de faire de la géométrie; quant au programme de première, c'est essentiellement l'étude des formes quadratiques avec, toujours comme illustration, la géométrie métrique. Il s'agit ici d'un renversement complet, l'accent a été mis essentiellement sur une méthode, isolée de tout objectif, même si certains exemples apparaissent à l'occasion comme illustrations et applications. Dans ces conditions, l'axiomatique de l'algèbre linéaire peut être connue des élèves, elle est inutile parce que isolée, coupée de ses racines (géométriques ou physiques) et, heureusement, oubliée dès que possible.

Ce renversement a cependant marqué les enseignants, de formation pourtant traditionnelle, qui, oubliant leur propre pratique mathématique, voient dans la méthode axiomatique une méthode universelle exclusive de tout autre. C'est ainsi que lorsque j'ai proposé à des enseignants de seconde, de commencer par la géométrie (géométrie plane, vecteurs, produits scalaires) avant de faire un exposé systématique de l'algèbre linéaire, on m'a répondu "C'est impossible, comment peut-on parler de vecteurs du plan avant d'avoir défini ce qu'est un espace vectoriel". Ainsi la place privilégiée accordée aux structures abstraites a pour conséquences l'impossibilité de les mettre en évidence là où elles apparaissent; ceci aboutit à un appauvrissement des mathématiques, ce qu'on appelle "la mathématique" devenant un simple langage qu'on illustre par des exemples plus ou moins nombreux, mais ce langage a perdu toute signification. Ainsi la géométrie de Première n'est qu'une illustration de la théorie des formes quadratiques, les rapports réels distance - forme quadratique, angle - forme bilinéaire ayant été complètement ignoré, puisque la distance est simplement défini en terme de forme quadratique, l'angle en terme de forme bilinéaire. Le programme le dit explicitement [3].

"Les matrices du type $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ forment un groupe commutatif: groupe des rotations vectorielles", autrement dit, pour l'élève de Première (et pour l'enseignant !) une rotation, c'est tout simplement une matrice. Bel exemple de confusion créée par un désir de trop grande rigueur ! Et comme me l'a dit un enseignant "En première c'est facile, une fois qu'on a défini la forme bilinéaire, ça va tout seul". Mais qu'est-ce qui va, et où ?

Un enseignement axiomatique de l'algèbre linéaire, coupé de toute pratique extérieure, devient alors un obstacle à la compréhension du concept de linéarité, et à son utilisation en géométrie et en physique. Loin de jouer le rôle de clarification qu'on doit attendre d'elle, l'axiomatique est ainsi un élément de confusion. Il faut donc remettre totalement en cause la conception actuelle de l'enseignement des mathématiques du moins si l'on considère que l'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques consiste à donner à l'élève ou à l'étudiant les moyens d'acquérir des connaissances, et non, comme on le fait actuellement, de lui montrer le spectacle des mathématiques (cf. paragraphe 7).

Pour revenir à la géométrie, il ne faut pas oublier que la géométrie est d'abord une science physique, et que c'est le premier exemple (et pendant longtemps ce fut le seul !) d'une théorie physique complètement mathématisé.



A PROPOS DES MATHEMATIQUES MODERNES, par Daniel SIBONY (Revue "Tel quel", n° 51 - automne 1972)

1. Plus encore que le marché des richesses matérielles, *le marché du savoir* est investi par le désir, l'angoisse, le besoin, la fatigue, la fascination, l'envie, la convoitise, les automatismes, et tous les rapports de pouvoir entre les individus et les groupes qui s'affairent sur ce marché. Nous disons " plus encore ", car alors qu'un petit paysan ou un ouvrier O. S. peuvent s'échiner jusqu'à l'épuisement, ils se doutent un peu que leurs chances " d'arriver patrons " sont nulles, vu les lois implacables de l'accumulation économique. Tandis que sur le marché des titres de savoir, les mirages sont plus fréquents, et il arrive même qu'il y ait de l'eau — et saumâtre — à l'endroit des mirages. Tout le monde " se prive " pour " faire faire des études aux gosses ", ou pour attraper le recyclage auquel " chacun a droit "; on rêve quelquefois aux titres universitaires et il arrive que ça marche ! Le petit a bien joué, de la tête, voire des coudes, et parti d'en bas le voilà agrégé, tiré du troupeau (" tiré d'affaire ", comme on dit, au moment même où il se trouve coincé, compromis, dans la plus ténébreuse affaire...)[1]. Étrange structure que celle du troupeau moderne où parce que chacun se retrouve tout seul dans le troupeau, il croit en être sorti...

Ces remarques banales sont pour rappeler cette autre banalité : le marché du savoir est traversé de discours, de circuits chargés à haute tension (les potentiels dont il s'agit ayant quelque rapport avec les potentiels de pouvoir). Au centre du marché, autour des " maths " qu'on appelle " modernes ", les remous sont plus forts; l'ambiguïté y est aussi grande que l'enjeu. C'est que " les maths modernes ", ce n'est pas seulement un titre de savoir qui " honore " son propriétaire, ça a un contenu spécifique, qui n'est pas quelconque.

Il faut pour cela étudier sous ses multiples facettes la question : « pourquoi " les maths modernes " ? », qui se double d'une autre : « pourquoi justement les " maths modernes " servent-elles de point de fixation à une série de tensions, de résistances, de contradictions, d'intimidations qui ont bien d'autres expressions que mathématiques ? »

---

# *Bibliographie*

Voici la liste de quelques livres qui permettent de prolonger les réflexions amorcées dans les pages qui précèdent.


- "Les Héritiers", de Bourdieu et Passeron (Ed. de Minuit, 1964).
  Une étude très précise sur la fonction de reproduction de l'école.

- "La reproduction", de Bourdieu et Passeron (Ed. de Minuit, 1970).
  Réflexion théorique s'appuyant sur l'étude précédente. Est particulièrement située la place du professeur dans le système de reproduction.

- "Barbiana ou lettre à une Maîtresse d'école" (Mercure de France, 1968).
  La prise de conscience par les enfants d'une classe rurale en Italie, des phénomènes que mettent en lumière les ouvrages de Bourdieu et Passeron.

- "Je suis comme une truie qui doute" de Duneton.
  Un professeur décrit son malaise.


(Les trois premiers livres peuvent être empruntés à la Bibliothèque I.R.E.M.)