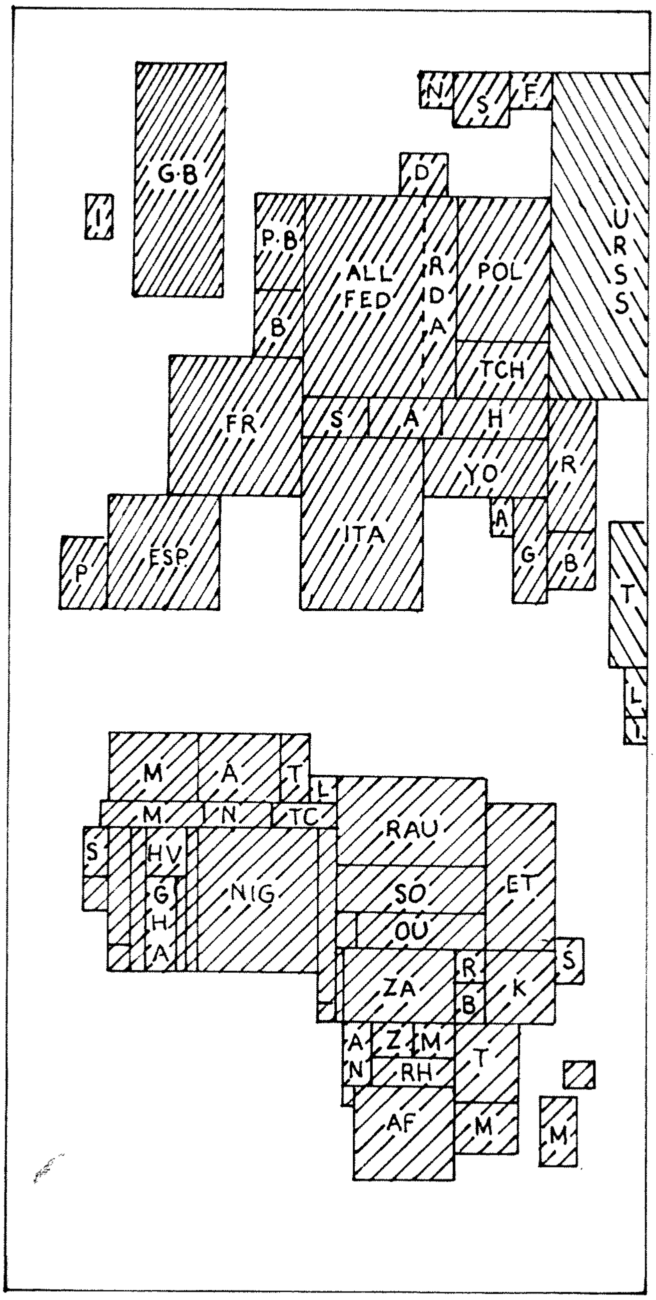
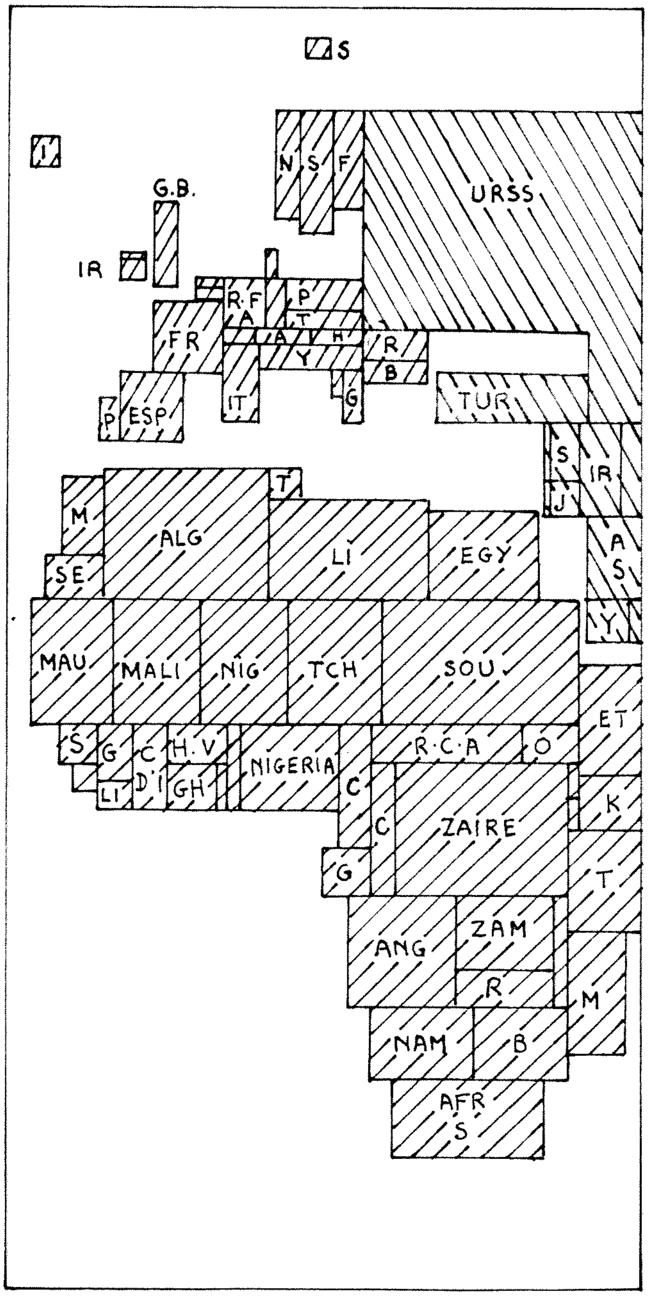
l'ouvert n°15

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG — JUIN 78





Notre couverture Deux cartes de l'Europe et de l'Afrique où chaque pays est représenté par un rectangle dont l'aire est proportionnelle à 1) sa population, 2) sa superficie. Extrait d'un document de travail de la Documentation Française (mars 1975).

A PROPOS DE LA COUVERTURE

Les deux cartes représentent l'Europe et l'Afrique ; la première figure les pays par des rectangles dont l'aire est proportionnelle à la population, la deuxième également par des rectangles, mais dont l'aire est proportionnelle à leur superficie. Dans le premier cas, un cm^2 vaut quinze millions d'habitants, dans le deuxième cas, un cm^2 vaut six cent mille km^2.

Ces représentations sont souvent utilisées pour permettre de mieux visualiser certaines données relatives à différents pays.

Malheureusement, si on limite la forme de chaque contrée à un rectangle, il n'est pas toujours possible de respecter les voisinages. Deux pays voisins peuvent ne plus l'être, c'est-à-dire que la représentation n'est pas continue. A fortiori, cette impossibilité apparaît si on impose de plus l'aire de chaque rectangle. (Le lecteur pourra faire la démonstration de lui-même).

On remarquera d'ailleurs que sur l'un des dessins, l'URSS n'est pas sous forme de rectangle et que sur l'autre, Roumanie et Grèce on t une frontière commune (!).

SOMMAIRE

De l'éducation à la garderie

Modestes, les fondateurs de l'école laïque, gratuite et obligatoire avaient baptisé leur entreprise "Instruction Publique". De l'instruction on y en faisait mais aussi et surtout de l'éducation. Il s'agissait d'éduquer le peuple pour en permettre la promotion.

Généreux, les pères de la quatrième république voulurent regrouper toute l'éducation de la nation en un grand ministère de l'éducation nationale et de la culture. Il s'agissait d'élever le niveau culturel du pays, de préparer son avenir.

Que reste-t-il de ces projets, de ce passé. Comme une peau de chagrin le ministère rétrécit chaque jour un peu plus. Les sports, la culture, les universités,... n'en dépendent plus. Les programmes de plus en plus rigides confinent le professeur dans un rôle subalterne d'instructeur, voire même de gardien avec la disparition des sanctions, tant celles de la discipline que celles de l'examen.

En voulons-nous des preuves ?

-- Que doit faire un professeur dans une classe clairsemée par les autorisations d'absence pour veille de vacances ?

-- Quel est l'attitude des élèves de cinquième, troisième ou seconde après les conseils de classe de fin d'année tenus début juin au plus tard ?

-- Que penser du fait que parmi les dépenses d'un établissement scolaire, celles d'enseignement deviennent facultatives ?

Quel avenir pour les enfants quand dans les écoles, les collèges, les lycées il n'y aura plus que des gardiens formés en trois ou six mois, taillables et corvéables à merci, présents onze mois sur douze ! Devinez qui se tournera vers les écoles privées ?

Jean Lefort

Du calcul vers l'analyse

I - CINQ EN DEUX

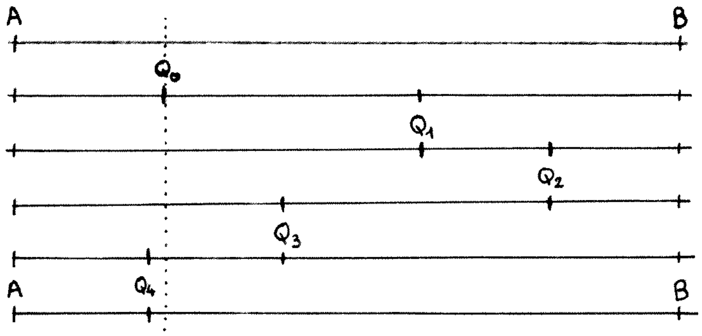
Le point de départ de la conférence de ce matin est du à deux articles de Fletcher parus dans le "Petit Archimède". Ces articles ont pour sujet l'utilisation du pliage dans les activités mathématiques.

1ére question : Marquer le milieu d'une bande de papier par pliage.

2ème question : Partager une bande de papier en cinq parties égales à l'aide de pliage en deux.

Autant la première question est triviale, autant la seconde ne l'est pas. On pourra d'ailleurs généralisée cette question en cherchant à placer le point d'abscisse x par pliage en deux.

Voici la solution de la deuxième question :



Q_0 est une première approximation.

Q_1 est le milieu de $[Q_0, B]$

Q_2 est le milieu de $[Q_1, B]$

Q_3 est le mileiu de $[A, Q_2]$

Q_4 est le mileui de $[A, Q_3]$

Alors Q_4 est une meilleure approximation du cinquième de $[AB]$ que Q_0.

Plus exactement si $\overline{AQ_0} = \left(\frac{1}{5} + h\right)\overline{AB}$

alors $\overline{AQ_4} = \left(\frac{1}{5} + \frac{h}{16}\right)\overline{AB}$

II - PREMIERE GENERALISATION

Comme il a été écrit plus haut, généralisons le problème en essayant de marquer le point d'abscisse u par pliage successif (non nécessairement en deux).

Il est d'abord bien clair qu'on peut se ramener à l'intervalle $[0, 1]$

Pour la commodité de l'exposé, on se limitera aux décimaux de la forme $u = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n$ dont le développement décimal est fini.

Posons : $$v = \frac{a_p}{10^p} + \frac{a_{p+1}}{10^{p+1}} + \ldots . + \frac{a_n}{10^n}$$

on a alors : $$\frac{a_p}{10^p} \leqslant v < \frac{a_p+1}{10^p}$$

en particulier : $$\frac{a_1}{10} \leqslant u < \frac{a_1+1}{10}$$

On peut donc affirmer que si on plie la bande en 10 , le point cherché est entre le (a_1)ième et le (a_1+1)ième plis et comme on peut écrire u sous la forme :

$$u = \frac{a_1}{110} + \frac{1}{10}\left(\frac{a_2}{10} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^{n-1}}\right)$$

on est ramené à repérer le point :

$$u_1 = \frac{a_2}{10} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^{n-1}}$$

sur le segment déterminé par les deux plis précédents. On itère le processus jusqu'à l'obtention de l'approximation voulue.

Critiquons tout de suite ce procédé. D'abord on ne sait pas faire le partage en dix, sauf l'approximation donnée au premier paragraphe. Ensuite, quand bien même saurait-on faire ce partage, au delà du deuxième coup, il est vraisemblable que la bande manipulée serait trop petite pour effectuer le moindre pliage.

III - DEUXIEME GENERALISATION

En se fondant sur ces critiques et en se rappelant le mot de Gagnaire selon lequel "Deux est tout puissant", on va travailler en base deux.

On ne considèrera que les nombres dont le développement diadique est fini ou périodique. On se souviendra qu'un nombre peut avoir un développement fini en base dix et infini périodique en base deux ; par exemple :

$$(0,\ 2)_{dix} = (0,\ \overline{0011}\ )_{deux}$$

a) Le même raisonnement qu'en base dix prouve que si le développement est fini, on a :

$$u = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{2^n}$$

avec : $$\frac{a_1}{2} \leqslant u < \frac{a_1+1}{2}$$

et par suite :

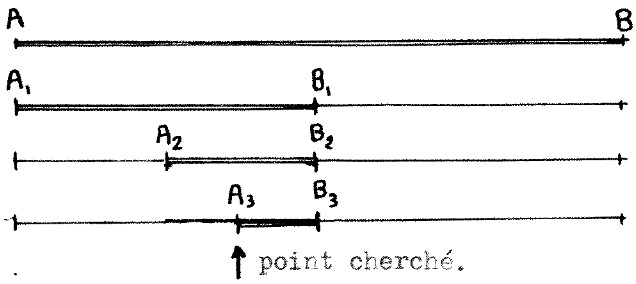
$$a_1 = 0 \Longrightarrow 0 \leqslant u < 1/2$$
$$a_1 = 1 \Longrightarrow 1/2 \leqslant u < 1$$

d'où le codage : si $a_1 = 0$ on plie $[AB]$ en deux et on garde la partie gauche.
si $a_1 = 1$ on fait de même mais en gardant la partie droite.

On fait la même chose sur le segment $[A_i B_i]$ gardé au ième pliage en raisonnant sur la ième "bicimale" .

<u>exemple</u> : $3/8 = (0,011)_{\text{deux}}$

d'où la construction suivante :



b) Si maintenant le développement est périodique, on introduit la même technique sur la partie irrégulière puis sur la première période, puis sur la deuxième, etc .... Le procédé utilisé converge puisqu'en posant :

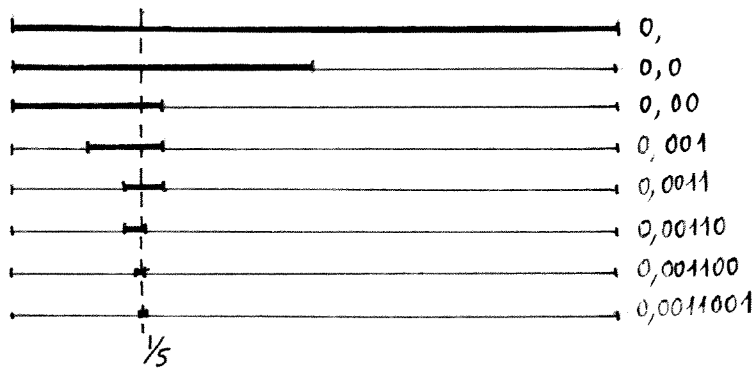
$$u = 0, a_1 a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

et $$u_p = 0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_p$$

alors : $\left| u - u_p \right| \leqslant \frac{1}{2^p}$ qui peut être aussi petit que l'on veut.

<u>exemple</u> : $1/5 = (0,\overline{0011})_{\text{deux}}$

d'où la construction suivante :



qui est une illustration magnifique du théorème sur les segments emboîtés.

<u>IV - OU L' ENVERS VAUT L' ENDROIT (et vice versa)</u>

Soit $u = 0, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ le développement limité à n bicimales d'un nombre. Supposons qu'au lieu d'effectuer le processus de pliage tel qu'il a été ennoncé en partant de a_1 , on le fasse en partant de a_n . Il est alors étonnant qu'on trouve le même point !

1) Si u a une seule bicimale : $u = 0,1$ le résultat est évident

2) Raisonnons alors par récurrence et supposons que cela soit vrai pour

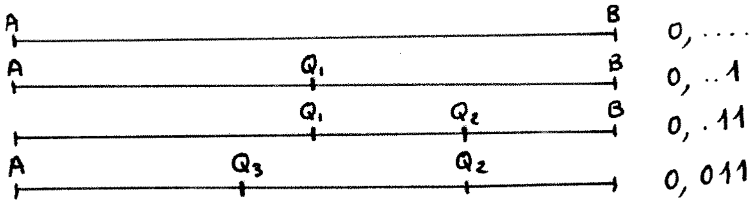
$$u_n = 0, b_n b_{n-1} \ldots\ldots b_1$$

considérons $\quad u_{n+1} = 0, b_{n+1} b_n b_{n-1} \ldots\ldots b_1$

si $b_{n+1} = 0$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ et Q_{n+1} est le milieu de $[A\, Q_n]$ c'est à dire le milieu de la partie gauche.

si $b_{n+1} = 1$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + u_n)$ et Q_{n+1} est le milieu de $[Q_n\, B]$ c'est à dire le milieu de la partie droite.

<u>exemples</u> : $u = 3/8$



$u = 1/5$; en conservant deux périodes on trouve que

$$AQ_4 = 0,\ 1875$$
$$AQ_8 = 0,\ 19921875$$

la convergance est rapide puisque $\left| u - u_q \right| \leqslant \frac{1}{2^q}$ et par conséquent si u_q s'écrit avec k périodes de longueur p et une partie irrégulière de longueur r :

$$\left| u - u_q \right| \leqslant \frac{1}{2^{kp+r}}$$

ce qui permet de prévoir le nombre de période nécessaire pour atteindre une précision donnée.

<u>Remarques</u> : 1) Il existe une méthode très simple pour trouver l'écriture dyadique de A/B où A et B sont étrangers (premiers entre eux).

— Si $2A/B < 1$ alors $A/B < 1/2$ et $a_1 = 0$

— Si $2A/B > 1$ alors $A/B > 1/2$ et $a_1 = 1$

au coup suivant, si $a_1 = 0$ on travaille avec $2A/B$

si $a_1 = 1$ on travaille avec $(2A/B)-1$

et on recommence.

<u>exemple</u> : $1/5 \dashrightarrow 2/5 \dashrightarrow 4/5 \dashrightarrow 8/5$

$3/5 \dashrightarrow 6/5$

$1/5 \dashrightarrow \ldots$

o $\quad$ 0,0 $\quad$ 0,00 $\quad$ 0,001 $\quad$ 0,0011 $\quad$ ...

2) En base n le développement de A/B n'a pas de partie irrégulière si

pgcd(B,n) = 1 . En particulier en base deux si B est impair.

contre exemple : $5/8$ n'a qu'une partie irrégulière : $(0,101)_{deux}$.

V - A LA RECHERCHE DES RACINES

Imaginons qu'un constructeur facétieux ait réalisé une calculatrice n'autorisant que les multiplications et les extractions de racines carrées (et disposant de quelques mémoires). Peut-on avec une telle machine calculer la racine cinquième d'un nombre u ?

Voici une solution et son explication :

$y = \sqrt[5]{u}$

$y^5 = u$

$y^6 = u.y$ en multipliant par y

$y^3 = \sqrt{u.y}$ en prenant la racine carrée des deux membres.

$y^8 = u\sqrt{u.y}$ en multipliant par $y^5 = u$

$y^4 = \sqrt{u\sqrt{u.y}}$ en prenant la racine carrée des deux membres.

$y^2 = \sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y}}}$ " " " " "

$y = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y}}}}$ " " " " "

On dira que la formule ne permet pas de calculer y puisqu'elle le contient dans les deux membres. En fait, elle le permet en partant d'une valeur approchée y_o et en itérant le processus

$$y_1 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y_o}}}}$$

. . . .

$$y_{n+1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{u\sqrt{u.y_n}}}}$$

car il y a convergence ; par exemple, si $u = 49$, en partant de $y_o = 3$ on obtient successivement :

$y_1 = 2,\ 221\ 937\ 524$

$y_2 = 2,\ 180\ 632\ 624$

$y_3 = 2,\ 178\ 076\ 712$

$y_4 = 2,\ 177\ 917\ 067$

$y_5 = 2,\ 177\ 907\ 090$

$y_6 = 2,\ 177\ 906\ 466$

$y_7 = 2,\ 177\ 906\ 427$

$y_8 = 2,\ 177\ 906\ 425$

Voici une autre solution :

On remarque que : $\frac{1}{5} = \frac{3}{16-1} = \frac{3}{16} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{16}}$

$$= \frac{3}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{4n}}$$

donc: $\sqrt[5]{u} = u^{1/5} = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[2^{4n}]{u^3}$

d'où le processus itératif suivant :

$$u_o = u^3$$

$$u_1 = \sqrt{u_o}$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}}$$

et : $\sqrt[5]{u} = \prod_{p=1}^{\infty} u_{4p}$

Je laisse le soin à chacun d'entre vous de généraliser cet aspect.

M. GLAYMANN
irem de lyon

Liaison math-français en CES

QUE SIGNIFIE "INTERDISCIPLINARITE"

- il faut distinguer :

1) l'interdisciplinarité dans l'institution scolaire au niveau du secondaire (de professeur à professeur)

.- si liaison, alors soit entre "sciences humaines" soit entre "sciences du milieu dans lequel baigne l'homme".

.- même au niveau des "sciences humaines", il n'y a pas de travail commun sur la langue et si l'histoire est introduite, alors seulement en tant qu'histoire-événement et non histoire de la langue; (découpage de la littérature en siècles ou époques dans le Lagarde et Michard).

.- dans le domaine des autres sciences, bien des travaux ont été mis en place (en particulier entre math et technologie, entre math et astronomie,...) mais la plupart du temps, toute interdisciplinarité se réduit alors à une utilisation en physique de mathématiques et à prendre en compte en mathématique certaines exigences liées à l'utilisation des mathématiques en sciences physiques.

.- les différentes sciences ne sont alors que des instruments plus ou moins bien adaptés et plus ou moins utilisables dans l'étude d'une science en particulier. Cela est d'autant plus frappant d'ailleurs dans des disciplines aussi voisines que math et astronomie, dans la mesure où l'astronomie a complètement disparu des programmes.

.- de toute manière ce qui manque peut-être le plus c'est un travail sur l'évolution, même schématique des diverses notions enseignées (que ce soit en math ou en sciences naturelles ...) dans une discipline même, et sur l'évolution "comparée" de disciplines distinctes.

2) Au niveau du référentiel

On fait appel à la science qui fonctionne comme transcendance (on parle de beau, de poésie). Si la langue revient, c'est pour montrer les différences entre discours scientifique et littéraire (La Fontaine ne peut être un scientifique puisqu'il fait parler des animaux et que tout le monde sait qu'un animal ne parle pas !) On admet l'existence d'une vérité unique et universelle celle de la Science et à l'intérieur de celle-ci la Logique.

3) Au niveau Universitaire.

- généralement, on peut alors constater que le niveau théorique est affiné.
- la mise en situation est différente et donc la production est différente.
- ce type de travail semble alors admis dans la mesure où il s'agit d'un travail sûr, qui ne remet pas fondamentalement en cause la pédagogie.
- ce type de travail est trop souvent considéré comme une sorte de passe-temps exotique pour savants en mal de pédagogie.
- généralement ces travaux sont de deux types :

1) tentative très poussée de la langue, ce qui met une distance importante entre l'étude et l'école. (mise en place d'une grammaire de situation dite grammaire transformationnelle par rapport à une grammaire d'autopsie, de classification du XIXème), tentative menée à partir de la mise en place des mathématiques modernes.

G. Van Hout : Une nouvelle pédagogie pour l'enseignement de la grammaire

Mais coupure avec l'expérience, d'où mauvaise évaluation des dangers pouvant résulter de l'application d'une telle théorie.

2) travaux à partir de la logique

O. Ducrot : Langue et pensée formelle
L'expression, en français, de la condition suffisante.

M.J. Borel et G. Vignaux : Stratégies discursives et aspects logiques de l'argumentation.

J. Depresle et O. Ducrot : Analyse "logique" d'un texte de Montesqieu sur l'esclavage.

P. Attal : Négation de phrase et négation de constituant. (in Langue Française nº 12)

De toute manière, il est illusoire de prétendre formaliser l'ensemble complet des règles d'une langue naturel.
Aucune grammaire réduite à ses règles ne permettra d'engendrer les phrases correctes d'une langue naturelle. On ne peut faire l'économie d'une sémantique. Il y a connexion et interdépendance de la forme et de la signification : l'une entraîne l'autre et réciproquement.

Faire en sorte que le langage obéisse aux lois de la logique est d'autre part doublement dangereux :
- car ce serait réduire tous les énoncés naturels à un noyau,
- car cela revient à considérer et à utiliser la logique comme une langue, alors que c'est la langue qui sert à fonder la logique.

POURQUOI UNE LIAISON MATH-FRANCAIS EST-ELLE PENSEE INCOMPATIBLE SINON IMPOSSIBLE ?

- dans l'institution scolaire, l'étude de la langue est menée comme s'il s'agissait d'un objet mort or les mots ne sont pas immuables, ils se génèrent eux-même.

- dans l'enseignement des mathématiques n'a-t-on pas longtemps semblé admettre que l'objet enseigné avait atteint une fois pour toute une perfection que jamais plus on ne pouvait remettre en cause.
- ce qui est plus grave, c'est que l'enseignement des mathématiques se fait coupé de l'Histoire et de son évolution. On ne considère qu'un objet tout fait qui nous provient d'on ne sait trop qui, d'on ne sait trop d'où et dans sa forme actuelle.

LA SEULE ETUDE COMMUNE POSSIBLE SE SITUE AU NIVEAU DE LA LANGUE et la richesse d'une telle étude tient déjà dans le fait que les référentiels sont différents, qu'il n'y a pas de communauté thématique, qu'il y a heurt de langages, qu'il y a le problème de la langue.

- si donc une telle liaison a été conçue, c'est en vue d'une étude de la langue, ce qui signifie :

  GARDER A LA LANGUE SES FONCTIONS PRODUCTRICES

  . <u>au niveau de l'histoire</u>
  (la langue produit dans l'histoire - l'origine de l'expérience étant la nécessité d'un travail à partir de Gallilée et Copernic) ainsi il y a production dans l'histoire pour les mathématiques et évolution (exemple, le problème de la métamathématique envisagée par Leibniz et mené dans une certaine mesure à son terme par Gödel).

  . <u>au niveau du texte</u>
  Tout texte en génére un autre, toute théorie en génère une autre.

  . <u>au niveau de la communication</u>
  le niveau le plus mal vu est celui de la mise en situation.
  Qui est l'émetteur, le récepteur, que fait le lecteur du texte ?
  TOUTE LECTURE EST UNE PRODUCTION DE TEXTE.

(mettre en situation signifie que l'émetteur intègre dans son énonciation :

- un certain nombre d'élèments situationnels qu'il lui paraît nécessaire de rappeler au titre de prémisses.
- un certain nombre d'acquis présupposés : ceux qu'il estime connu du récepteur.

on peut remarquer par lamême que cela implique déjà une impossibilité de formalisation de tout discours.)

NOTRE POSITION PAR RAPPORT A TOUT CELA

<u>Pas de logique "à tout prix"</u>

un travail sur la grammaire et sur la logique a été mené, mais en tenant compte de l'émetteur et du récepteur et donc de la culture (ou du savoir) de chacun.

Il est important de faire prendre conscience aux élèves des limites de concordance entre logique et langage ; les rendre sensibles à certains glissements dont il est trop facile d'être dupe.

Pas d'autobiographie, ni de psychanalyse

Encore que l aspect psychanalyse soit un élément important dans l'étude de la langue et des réactions du groupe classe.

Partir d'auteurs dont la situation est cruciale dans l'institution scolaire

Ainsi deux auteurs nous ont préoccupé : La Fontaine et Lewis Carroll qui ne sont pas explicables si on ne fait qu'une étude synchronique de la langue.
Auteurs qui sont renvoyés dos à dos car trop "difficiles" pour les élèves s'il n'y a pas détude de la langue ou si la langue n'est étudiée que comme un corps mort (une explication de texte est une possibilité de lecture du texte, mais ne l'épuise pas).

-- La Fontaine : Le plus expliqué, pourquoi ? comment ?
   L. Carroll : le plus évacué.

-- Pourquoi n'y a-t-il pas d'auteurs pour enfants dans les manuels scolaires ?
   et les auteurs dits scientifiques, que deviennent-ils ?

Pour nous il s'agit d'aboutir à un savoir évolutif, chaque matière gardant une certaine autonomie au niveau de son contenu propre sans éliminer les"interactions naturelles".
Nous installons la mouvance (ou évolution) dans l'emploi du temps des élèves.

J.P. MUNCH et M.C. RIEDLIN
c.e.s. d' Illkirch

La discussion s'est engagée essentiellement sur le rôle du professeur de mathématique dans cette expérience, et surtout sur le rôle spécifique du mathématicien. A cet égard, il faut noter que l'assistance est plutôt rester sur sa faim !

Le cours de français insistant particulièrement sur l'aspect "langue" cela permet de faire comprendre aux enfants que la lecture d'un texte de mathématique se fait de prime abord comme celle d'un texte de français. A ce propos il a été mis en parallèle "la chasse au snark" et un passage des "éléments d'histoire des mathématiques" de Bourbaki, passage rigoureusement incompréhensible pour des élèves de 5ème. Les enfants ont pu apréhender à cette comparaison la différence entre les deux textes au niveau de la langue : elle se trouve dans le fait que chez Bourbaki l'écrit peut recevoir une interprétation unique après étude des mathématiques. Mais surtout le texte a été lu sans qu'il y ait blocage en raison d'un mot incompréhensible.

D'autre part il semble important de faire comprendre aux élèves qu'il n'y a pas un professeur de mathématique, un professeur de français, ... mais une personne qui leur enseigne plus particulièrement les mathématiques ou le français ou,... et qu'il ne s'agit pas d'intervenir lors des cours communs (*) en tant que mathématicien mais en tant que personne connaissant des mathématiques. Et pourtant même là, la réponse à une même question selon qu'elle est posée par le professeur de mathématique ou celui de français ne sera pas la même. (par exemple il y a échange des mots "sens" et "définition").

Pour le mathématicien, l'intérêt final apparent semble donc être une meilleure disposition face à la lecture mathématique. Une discussion s'est d'ailleurs engagée à ce propos dans l'assistance. Ce point à lui seul justifie certainement l'expérience, mais il mériterait d'avantage : une étude plus fine qui a été ou sera mené dans des groupes IREM.

J. Lefort

(*) L'expérience concerne deux classes dédoublables (35 élèves), une de 5ème et l'autre de 4ème du CES d'Illkirch. Les emplois du temps sont tels que les heures de TD ont été regroupé de façon à permettre la présence des deux professeurs pendant deux heures.

Les barrières ont été suppimées. Tous les enfants seront de plus en plus réunis dans les mêmes lycées et les mêmes C.E.S. remplaçant peu à peu les anciens C.E.G. C'est-à-dire que le Secondaire à pris au Primaire les locaux qui lui manquaient (...) qu'aux meilleurs instituteurs issus du peuple et devenus professeurs par promotion interne ont succédé les rejetons de la bourgeoisie déçus de se trouver là, (...) que les sections courtes sont réservées aux enfants de milieu populaire, que l'on repousse de trois ans l'entrée dans les Ecoles normales et de deux ans dans les I.P.E.S., alors que c'était une aide considérable pour les fils de pauvres, et que la ségrégation est plus impitoyable qu'avant, puisque les barrières de protection n'existent plus et que rien n'empêche le fils d'ouvrier de prendre les allures du cancre traditionnel.(...) supprimer les examens à tous les niveaux facilite l'invasion du second degré puis du supérieur par le flot des cancres de la bourgeoisie. On retire la "sélection", la dernière barrière dont disposait l'Education nationale pour endiguer la poussée du beau monde et protéger les fils du peuple.

J. Charpentreau (La crétinisation)

Le nombre π

par Maurice MIGNOTTE
(d'après les notes de G. MEHL)

A) PARTIE HISTORIQUE

1. Introduction.

Par définition, le symbole π désigne le rapport entre la longueur d'un cercle et celle de son diamètre.

Une valeur empirique approchée était connue depuis les temps les plus reculés (on l'obtenait en mesurant la circonférence avec une corde de longueur égale au diamètre du cercle), c'est ainsi que, dans la Bible, à propos d'un bassin circulaire dans le temple de Salomon, on donne la valeur 3 .

ARCHIMÈDE fut le premier à construire un algorithme permettant le calcul de π avec une précision arbitraire. Il approchait la longueur du cercle par le périmètre de polygones réguliers inscrits et circonscrits ayant un nombre de côtés de plus en plus grand ; en prenant un polygone de 96 côtés, il obtint une valeur avec une erreur inférieure à deux millièmes.

Les premiers progrès véritables après ARCHIMÈDE n'eurent lieu qu'avec l'apparition du calcul infinitésimal. On obtint alors des développements en série de π , comme celui de Leibnitz :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

En 1761, LAMBERT démontra l'irrationalité de π .

LINDEMANN démontra, en 1882, la transcendance de π , ce qui entraîne en particulier que la quadrature du cercle est impossible.

2. Calcul approché de π .

Pour calculer π , une formule simple, très connue des élèves de Taupe, est la formule de Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ Arctg } \frac{1}{5} - \text{Arctg } \frac{1}{239} .$$

Signalons quelques étapes récentes dans la connaissance de π avec un grand nombre de décimales.

1949 : REITWEISNER sur ENIAC, 2.000 décimales (70 h)

1958 : GENUYS sur IBM 704, 10.000 décimales (100 mn)

1961 : SCHANKS et WRENCH sur IBM 7090, 100.000 décimales (8 h)

Les deux premiers calculs utilisaient la formule de Machin. Le troisième utilisait l'expression :

$$\frac{\pi}{4} = 6 \text{ Arctg } \frac{1}{8} + 2 \text{ Arctg } \frac{1}{57} + \text{Arctg } \frac{1}{239}$$

due à STÖRMER.

Cette formule est beaucoup plus efficace que la précédente. D'abord, les dénominateurs sont plus grands que dans la formule de Machin, d'où une convergence plus rapide. De plus, le plus petit dénominateur qui apparaît dans la formule de Störmer est une puissance de 2, et, sur une machine binaire, le calcul des puissances de 8 se fera par simple décalage, d'où un gain de temps considérable.

Signalons une dernière formule, due à RAMANUJAN,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{4} \left(\frac{1123}{882} - \frac{22583}{(882)^3} \frac{1}{2} \times \frac{1.3}{4^2} + \frac{44043}{(882)^5} \frac{1.3}{2.4} \times \frac{1.3.5.7}{4^2.8^2} \ldots\right) ,$$

où les termes 1123, 22583, 44043, ... sont en progression arithmétique.

3. Etude du développement décimal de π.

En connection avec la méthode de Monte-Carlo et le tirage d'échantillons en statistiques, il existe une demande croissante de suites de nombres au hasard. Il est alors naturel d'étudier si le développement décimal de certains nombres comme x et π fournit des listes de chiffres au hasard.

Les dix mille premières décimales de π ont été analysées de ce point de vue par R. K. PATHRIA, et les tests appliqués ont montré que, dans l'ensemble, ce développement pouvait être considéré comme aléatoire.

Vu mon incompétence, pour des résultats précis, voir l'article de PATHRIA [7].

4. Calcul des réduites successives du développement de π en fraction continue.

En 1969, utilisant les 25.000 premières décimales du développement de π (calculé par SHANKS et WRENCH), K. Y. CHOONG, D. E. DAYKIN et C. R. RATHBORNE ont obtenu, sur IBM 1130, les 21.000 premières réduites de π.

La méthode de calcul des coefficients successifs est la suivante.

Prenons par exemple l'approximation $\overline{\gamma} = 0,5\ 7\ 7\ 2\ 1\ 5\ 6\ 6\ 4\ 9$ de la constante d'Euler γ. Le début du développement en fraction continue est obtenu ainsi :

On travaille avec deux variables A et B. On initialise A à zéro et B à $0,5\ 7\ 7\ 2\ 1\ 5\ 6\ 6\ 4\ 9$. On forme ensuite $A + B$. La partie fractionnaire de $A + B$ est affectée en A ou en B selon que $A + B$ est plus petit que 1 ou non. Le procédé continue avec les nouvelles valeurs de A et B. Ici on obtient successivement :

0, 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	A	
0, 5 7 7 2 1 5 6 6 4 9	B	
0, 5 7 7 2 1 5 6 6 4 9	A	$a_1 = 1$
0, 1 5 4 4 3 1 3 2 9 8	B	$a_2 = 1$
0, 7 3 1 6 4 6 9 9 4 7	A	$a_3 = 2$
0, 8 8 6 0 7 8 3 2 4 5	A	
0, 0 4 0 5 0 9 6 5 4 3	B	$a_4 = 1$
0, 9 2 6 5 8 7 9 7 8 8	A	$a_5 = 2$
0, 9 6 7 0 9 7 6 3 3 1	A	
0, 0 0 7 6 0 7 2 8 7 4	B	$a_6 = 1$
0, 9 7 4 7 0 4 9 2 0 5	A	$a_7 = 4$
0, 9 8 2 3 1 2 2 0 7 9	A	
0, 9 8 9 9 1 9 4 9 5 3	A	
0, 9 9 7 5 2 6 7 8 2 7	A	
0, 0 0 5 1 3 4 0 7 0 1	B	

On compte le nombre de A et de B successifs, et on obtient

$$1 , 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 4 , \ldots$$

qui est le début du développement en fraction continue de γ .

Remarque. - Si on a choisi γ au lieu de π comme exemple, c'est par commodité, le développement de π en fraction continue débute par :

$$3 , 7 , 15 , 1 , 292 , 1 , \ldots$$

Il va de soi qu'il faut un critère pour déterminer la limite n telle que les développements en fraction continue d'un nombre x et de sa valeur approchée $\overline{x}$ coïncident jusqu'à l'ordre n , à ce sujet voir l'article cité.

Avant d'étudier en détail le début du développement de π en fraction continue, rappelons quelques résultats de la théorie métrique des fractions continues (voir le livre de KHINČIN [2]).

(i) Pour presque tout réel x (au sens de la mesure de Lebesgue), la fréquence d'apparition de n , en tant que quotient partiel du développement en fraction continue de x , est égale à :

$$\log((n+1)^2/n(n+2))/\log 2$$

(ii) Pour presque tout x réel, on a

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\log q_h}{h} = \frac{\pi^2}{12 \log 2} : 1,1865 \ldots ,$$

où q_h désigne le dénominateur de la h-ième réduite de x .

Voici la table de comparaison entre les comportements de π (21.230 premières réduites) et γ (3.470 premières réduites), et la fonction théorique moyenne (i)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence d'occurence de l'entier n pour π	0,4188	0,1694	0,0890	0,0577	0,0437	0,0278	0,0236	0,0189	0,0140	0,0120
Fréquence ... pour γ	0,4225	0,1696	0,0905	0,0550	0,0435	0,0320	0,0210	0,0202	0,0118	0,0124
Fréquence "théorique" (i)	0,4150	0,1699	0,0931	0,0589	0,0406	0,0297	0,0227	0,0179	0,0144	0,0119

Voici aussi la <u>liste des quotients partiels</u> > 2.000 qui apparaissent dans les 21.230 premières réduites de π .

Indice i	431	15.543	20.276	3.811	8.719	19.223	20.358	12.426	3.777	6.209
Quotient partiel a_i	20.776	19.055	18.127	8.277	7.444	4.767	4.415	4.264	2.159	2.050

On peut noter que le plus grand des a_i , $a_{431} = 20.776$, apparaît "très tôt". En contre partie, le nombre de valeurs des a_i , $1 \leqslant i \leqslant 21.230$, plus grands que 2.000 , à savoir dix valeurs, est relativement faible en comparaison avec la formule (i) qui conduirait à :

$$\frac{21.230 \log(2.002/2.001)}{\log 2} = 15,3 \ldots$$

Sachant que $q_{20.831}$ est compris entre $2^{35.578}$ et $2^{35.580}$, on a

$$\frac{\log q_h}{h} = 1,1838 \ldots \quad \text{pour} \quad h = 20.831 ,$$

valeur proche de (ii).

Il paraît juste de signaler que WALLIS avait déjà obtenu le développement :

$\pi = [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,1, \ldots]$

5. Le travail de MAHLER.

En 1952, MAHLER obtenait le remarquable résultat suivant :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{42}} , \text{ si } q \geqslant 2 , \quad p , q \text{ entiers.}$$

En utilisant le calcul des 21.000 premières réduites de π , ainsi que les estimations de $\frac{\psi(n)}{n}$ (ψ fonction de Čebyšev, $\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p$, p premiers) de

ROSSER et SCHOENFELD, on peut montrer que :

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{20,6}} \quad \text{si} \quad q \geqslant 2 \text{ .}$$

La démonstration de ce résultat (voir l'exposé aux Journées arithmétiques de Grenoble, 1973 [6]) est obtenue en suivant la méthode de MAHLER, mais en raffinant certaines majorations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOONG (K. Y.), DAYKIN (D. E.), RATHBORNE (C. R.). - Rational approximations to π , Math. Comp., t. 25, 1971, p. 387-392.

[2] KHINTCHIN (A. Ya.) [KHINČIN (A. Ja.)]. - Continued fractions. - Chicago, Univ. of Chicago Press., 1964 (Phoenix Science Series).

[3] LAMBERT (J.). - Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, Mémoires Acad. Sc. Berlin, 1761, (publ. 1768), p. 265-322 ; Opera Mathematica, Vol. 2, p. 112-159. - Zürich, O. Füssli, 1948.

[4] LINDEMANN (F.). - Sur le rapport de la circonférence du diamètre et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 95, 1882, p. 72-74.

[5] MAHLER (K.). - On the approximation of π , Proc. Nederl. Akad. Wet., Series A, t. 56 (= Indag. Math., t. 15), 1953, p. 29-42.

[6] MIGNOTTE (M.). - Approximations rationnelles de π et quelques autres nombres, Journées arithmétiques de France [1973 Grenoble].

[7] PATHRIA (R. K.). - A statistical study of Randomness among the first 10,000 digits of π , Math. Comp., t. 16, 1962, p. 188-197.

[8] RAMANUJAN (S.). - Modular equations and approximations to π , Quart. J. pure and applied Math. t. 45, 1914, p. 350-372 ; Collected papers of Srinivasa Ramanujan, p. 23-39. - Cambridge, at the University Press, 1927.

[9] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). - Approximate formules for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 64-94.

[10] SHANKS (D.) and WRENCH (W. J. Jr). - Calculation of π to 100.000 decimals, Math. Comp., t. 16, 1962, p. 76-99.

B) DEMONSTRATION DE L'IRRATIONALITE DE π

Nous démontrons le théorème suivant

Théorème : si $r > 0$ est un nombre rationnel alors cos r est irrationnel.

Conséquence : si π était rationnel alors cos π devrait être irrationnel, ce qui est faux ($\cos \pi = -1$)
donc, π est irrationnel.

Ce théorème, apparemment plus difficile ne peut être évité (on l'utilise toujours plus ou moins). La plus facile des démonstration de l'irrationnalité de π a été donnée par NIVEN vers 1950.

Soit $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, posons $r = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration du théorème va se faire en plusieurs étapes.

1) Construction d'une fonction auxilliaire :

$$f(x) = \frac{x^{p-1} (a - bx)^{2p} (2a - bx)^{p-1}}{(p-1)\,!}$$

p étant un nombre premier ($p \geqslant 3$) son choix sera précisé ultérieurement selon "les bésoins" de la démonstration.

Considérons alors $I = \int_0^r f(x) \sin x \, dx$.

2) Majoration de $|I|$

On voit facilement (en mettant b en facteur) qu'on peut écrire

$$f(x) = \frac{(r - x)^{2p} (r^2 - (r - x)^2)^{p-1} \quad b^{3p-1}}{(p - 1)\,!} \;.$$

Pour $0 \leqslant x \leqslant r$ on aura $0 \leqslant r - x \leqslant r$

$r^2 - (r - x)^2 \leqslant r^2$

donc

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{r^{4p-2} \; b^{3p-1}}{(p - 1)\,!}$$

et comme $|\sin x| \leqslant 1$ on aura :

$$|I| \leqslant \frac{r^{4p-1} \; b^{3p-1}}{(p - 1)\,!}$$

3) Minoration de $|I|$

Cette minoration est plus délicate et va se faire en plusieurs étapes.

a) Une "formule pour I"

Considérons $F(x) = f(x) - f^{(2)}x + f^{(4)}x - f^{(6)}x + \ldots\ldots - f^{(4p-2)}(x)$, $f^{(k)}$ désignant la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f.

Alors,

$$\frac{d}{dx}\,(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = F^{(2)}x \sin x + F(x)\sin x$$
$$= f(x)\sin x$$
$$(\text{car } F'' + F = f)$$

donc,

$$I = \int_0^r f(x)\sin x\, dx = F'(r)\sin r - F(r)\cos r + F(0)$$

or f est un polynome en $(x - r)$ qui est pair,

f' est un polynome en $(x - r)$ qui est impair, donc $f'(r) = 0$

f'' est un polynome en $(x - r)$ qui est pair,

$f^{(3)}$ est un polynome en $(x - r)$ qui est impair, donc $f^{(3)}(r) = 0$

et ainsi :

$$F'(r) = 0\,.$$

On a donc

$$I = -F(r)\cos r + F(0)\,.$$

Etudions les quantités $F(r)$ et $F(0)$.

b) Etude de F(0)

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{x^{p-1}\, g(x)}{(p-1)\,!}$ où $g(x)$ est un polynome à coefficients entiers.

$F(0)$ est une somme de dérivées de f en 0.

. $f^{(j)}(0) = 0$ si $j < p-1$ (car on peut mettre x en facteur)

. $f^{(p-1)}(0) = a^{2p}(2a)^{p-1}$ (formule de Leibniz par exemple)

. si $j \geqslant p$ $f^{(j)}(0)$ est un entier divisible par p.

On va imposer comme condition $p > a$

alors $f^{(p-1)}(0)$ est un entier qui n'est pas divisible par p donc comme $F(0)$ est une somme de multiples de p et d'un seul qui n'est pas divisible par p on peut conclure

$F(0)$ est un entier, non divisible par p.

(Donc automatiquement $F(0) \neq 0$.)

c) Etude de $F(r)$

Posons $h(x) = f(r-x) = \dfrac{x^{2p}\,(a^2 - b^2x^2)^{p-1}\; b^{p+1}}{(p-1)\,!}$,

alors $f^{(j)}(r) = \pm\, h^{(j)}(0)$,

donc

F(r) est une combinaison de dérivées en 0 de h.

En utilisant la même méthode, on obtient :

. $f^{(j)}(r) = 0$ si $j < 2p$

. $f^{(j)}(r)$ est un entier divisible par p si $j \geqslant 2p$

donc,

F(r) est un entier divisible par p.

4) Conclusion

Supposons que $\cos r = \dfrac{s}{t}$, s et t entiers .

Posons $J = tI = -t\,F(r)\cos r + t\,F(0)$,

$J = -\,s\,F(r) + t\,F(0)$,

J est un entier.

F(r) est un entier divisible par p donc $-\,s\,F(r)$ est un entier divisible par p.

Supposons $p > t$,

alors $t\,F(0)$ est un entier non divisible par p.

Donc,

J est un entier non divisible par p et J sera donc un entier non nul.

D'autre part

$$|J| \leqslant \frac{t\,r^{-1}\,b^{-1}\,(r^4b^3)^p}{(p-1)\,!} = \frac{k\,c^p}{(p-1)\,!}$$

en posant $k = tr^{-1}b^{-1}$,

$c = r^4b^3$.

On sait que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{c^p}{p\,!} = 0$,

donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{k\,c^p}{(p-1)\,!} = 0$.

On choisira $p \geqslant p_0$ pour que $|J| < 1$.

Si on suppose cos r rationnel on arrive alors à trouver un entier J non nul tel que $|J| < 1$, ce qui est absurde.

Sur un thème : les moyennes

Les moyennes autres que la moyenne arithmétique sont peu ou pas du tout connues de la majorité des élèves de l'enseignement secondaire. Elles ont pourtant leur utilité et donnent lieu, en outre, à des activités variées à des niveaux différents : ces quelques lignes inspirées par des articles de la revue américaine "Mathematics Teacher" -que l'on peut consulter à la bibliothèque de l'IREM- et un article qui doit paraître dans le bulletin de juin de l'APMEP voudraient en témoigner. Quant à l'intérêt de ces activités, on s'en assurera ... en les proposant aux élèves !

Activité n° 1

On donne un rectangle ; on appelle a et b les longueurs de ses côtés. Dans ce qui suit, x désigne la longueur du côté d'un carré. On demande :

1) De déterminer x de façon que le carré ait le même périmètre que le rectangle

2) De déterminer x de façon que le carré ait la même aire que le rectangle

3) De déterminer x de façon que le rapport de l'aire au périmètre soit le même pour le carré et pour le rectangle

4) De déterminer x de façon que le carré ait sa diagonale de même longueur que celle du rectangle.

Commentaire :

On fait ainsi apparaître dans l'ordre les moyennes arithmétique ($\frac{a+b}{2}$), géométrique ($\sqrt{ab}$), harmonique ($\frac{2ab}{a+b}$), quadratique ($\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$) des deux nombres a et b.

On peut alors proposer une "généralisation" à trois dimensions.

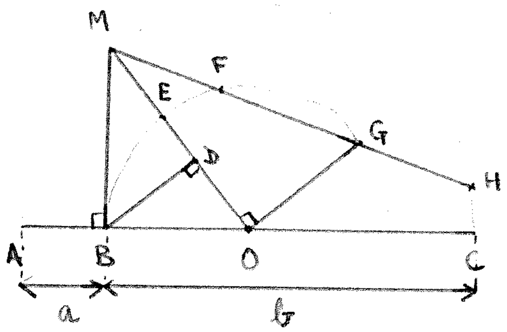
Activité n° 2

On donne un parallélipipède rectangle ; on appelle a, b et c les longeurs de ses côtés. Dans ce qui suit, x désigne la longueur du côté d'un cube. Répondre à des questions "analogues" à celles de l'exercice précédent, en faisant intervenir périmètres, aires latérales, volumes, et leurs différents rapports. Noter les résultats qui présentent des analogies avec ceux de l'exercice précédent.

Commentaire :

Ce sont les périmètres, les volumes, les rapports des volumes aux aires latérales, les diagonales principales qui font apparaître dans le même ordre les différentes moyennes citées plus haut.

Activité n° 3



Enoncé (sibyllin) : On peut lire sur cette figure les moyennes arithmétique , géométrique, harmonique, quadratique des deux nombres a et b comme longueurs de segments issus de M. Quels sont ces segments ?

Commentaires :

1) D'autres énoncés sont possibles ...

2) Il s'agit dans l'ordre de MO, MB, MD, MG : le théorème de Pythagore suffit à le démontrer.

3) Ce résultat permet de "classer" ces quatre moyennes :

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$

4) La démonstration algébrique de ces inégalités est un bon exercice d'application des règles de calcul algébrique (surtout lorsqu'on ne donne pas le résultat).

Activités suivantes

Lire le numéro de juin 1978 du "Bulletin de l'APMEP"...

Nom du jour pour une date donnée

I - DEFINITIONS ET CONVENTIONS

Le calendrier a été rectifié, avec effet du 15 octobre 1582, par le Pape Grégoire XIII, pour réajuster le défaut dû à un trop grand nombre d'années bissextiles du calendrier julien.

1) Nom du jour : J $J = 1'$ le dimanche

$J = 2'$ le lundi

. . . .

$J = 7' = 0'$ le samedi

L'ensemble des jours s'identifie à $\mathbb{Z} / 7\,\mathbb{Z}$

2) Quantième du mois : Q

3) Rang du mois : M $M = 3$ en mars, ... , $M = 12$ en décembre

$M = 13$ en janvier $M = 14$ en février

remarque : pour les mois ce choix s'impose parceque l'effet d'une année bissextile est sensible à partir du 1^er^ mars ; on déplace donc l'origine au 1^er^ mars. Attention : pour janvier et février il faut donc prendre le millésime de l'année précédente.

4) Millésime : N

5) Une date est la donnée d'un triplet $x = (Q, M, N)$

6) La date suivant x est notée $s(x)$.

remarques : l'ensemble des dates n'est pas un produit cartésien ; par exemple

(31, 4, N) n'est pas une date.

(2, 4, 1783) correspond au 2 avril 1783

7) Soit f l'application associant à toute date le nom du jour.

$$f : x \longmapsto J = f(x)$$

8) E est la fonction partie entière

II - PROPRIETES DE f

1) $f(s(x)) = f(x) + 1'$ (opération dans $\mathbb{Z}/ 7\,\mathbb{Z}$)

$\boxed{f(s^n(x)) = f(x) + n'}$ (par récurrence)

2) Changement de millésime

$$f(1,3,N) = f(1,3,N-1) + 365' \quad \text{si } N \text{ est une année commune}$$
$$= f(1,3,N-1) + 1'$$
$$f(1,3,N) = f(1,3,N-1) + 366' \quad \text{si } N \text{ est une année bissextile}$$
$$= f(1,3,N-1) + 1' + 1'$$

par récurrence :

$$f(1,3,N) = N' + \text{nombre d'années bissextiles} + \text{constante}$$
$$= N' + E(\frac{N}{4})' - E(\frac{N}{100})' + E(\frac{N}{400})' + \text{Constante}$$

rappel : une année est bissextile si N est divisible par 4 , sauf si N est multiple de 100 sans être multiple de 400 .

exemples : 1700 n'est pas bissextile
1600 est bissextile

3) Changement de mois

$$f(1,M+1,N) = f(30,M,N) + 1' \qquad \text{si } M = 4 , 6 , 9 \text{ ou } 11$$
$$= f(1,M,N) + 30'$$
$$= f(1,M,N) + 2'$$
$$f(1,M+1,N) = f(31,M,N) + 1' \qquad \text{si } M = 3 , 5 , 7 , 8 , 10 , 12 \text{ ou } 13$$
$$= f(1,M,N) + 31'$$
$$= f(1,M,N) + 3'$$

d'où :

$$f(1,4,N) = f(1,3,N) + 3'$$
$$f(1,5,N) = f(1,4,N) + 2' = f(1,3,N) + 5'$$
$$f(1,6,N) = f(1,5,N) + 3' = f(1,3,N) + 8'$$

. . . .

$$f(1,14,N) = f(1,13,N) + 3' = f(1,3,N) + 29'$$

Posons : $g(3) = 0$; $g(4) = 3$; $g(5) = 5$; $g(6) = 8$; $g(7) = 10$; $g(8) = 13$
$g(9) = 16$; $g(10) = 18$; $g(11) = 21$; $g(12) = 23$; $g(13) = 26$; $g(14) = 29$

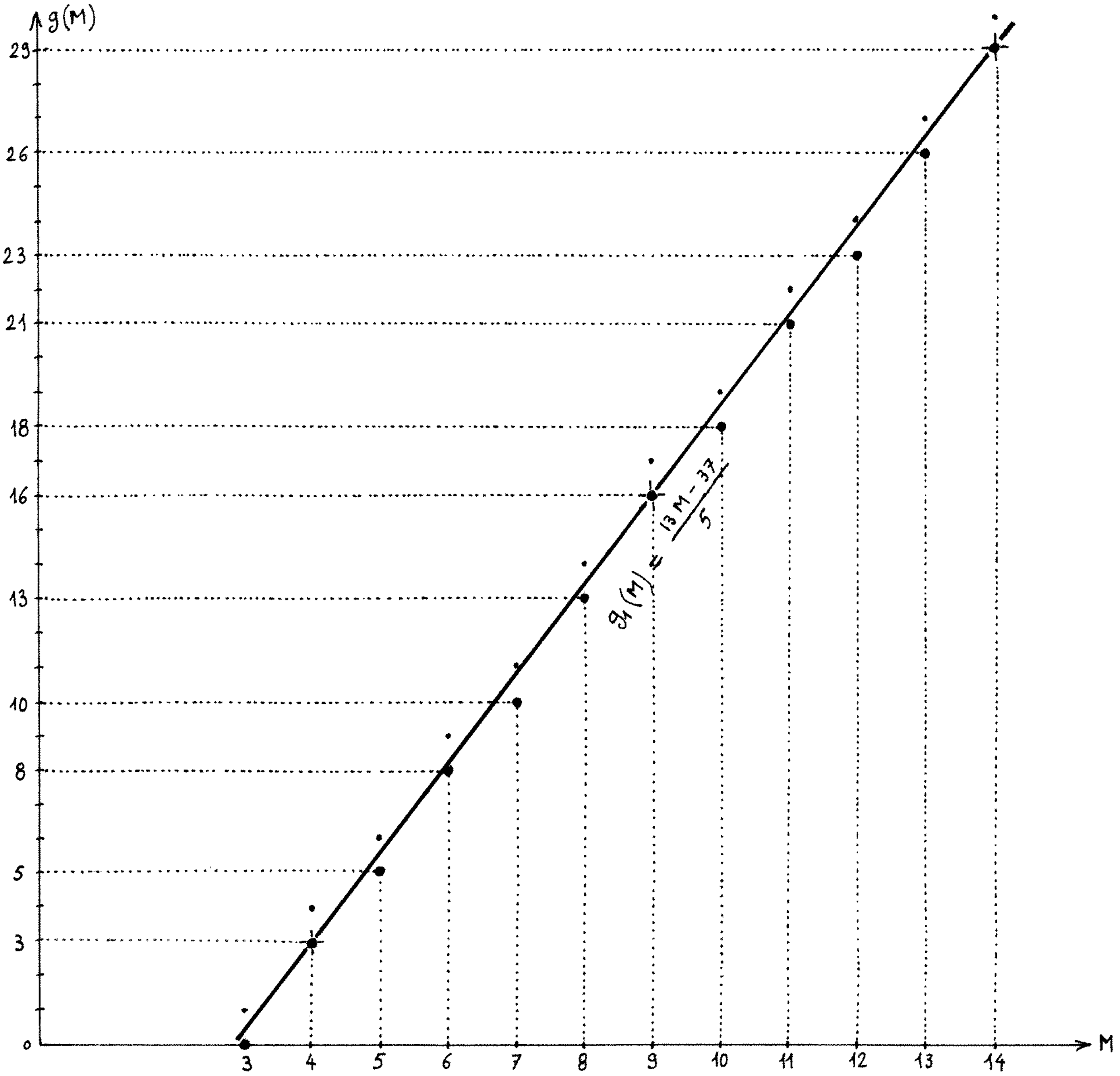
On remarque alors que :

$$(g(M))' = f(1,M,N) - f(1,3,N)$$

Une représentation de g est donnée sur le graphique ci-après. Le problème est de réduire g "à une formule", donc d'approcher g par une fonction simple. Une solution se présente par la constatation que la droite

$$g_1(M) = \frac{13\,M - 37}{5}$$

passe par trois points et que de plus : $0 \leqslant g_1(M) - g(M) < 1$



Donc on aura : $g(M) = E(g_1(M))$

et : $(g(M))' = E(\dfrac{13\,M - 37}{5})'$

$= E(2\,M + \dfrac{3\,M + 3}{5} - 8)'$

$= 2\,M' - 8' + E(\dfrac{3\,M + 3}{5})'$

$= 2\,M' - 1' + E(\dfrac{3(M+1)}{5})'$

En remplaçant dans l'expression de f , il vient :

$$f(1,M,N) = 2\,M' - 1' + E(\frac{3(M+1)}{5})' + f(1,3,N)$$

remarque : Une autre fonction g_2 vérifiant la double inégalité ci-dessus conviendrait tout aussi bien, ou encore une fonction g_3 égale à g' pour les valeurs entières, mais donneraient un aspect différent à f .

4) Changement de quantième.

$$f(Q,M,N) = f(1,M,N) + Q' - 1'$$

CONCLUSION

$$f(Q,M,N) = Q' + 2\,M' + E\left(\frac{3(M+1)}{5}\right)' + N' + E\left(\frac{N}{4}\right)' - E\left(\frac{N}{100}\right)' + E\left(\frac{N}{400}\right)' + C$$

C est une constante déterminée par un exemple : $C = 2'$. Vérifiez en prenant la date d'aujourd'hui !

III - CALENDRIER JULIEN (avant le 4-10-1582)

Le principe est le même, mais le nombre d'années bissextiles est $E(\frac{N}{4})$ à une constante près ; donc :

$$f(Q,M,N) = Q' + 2\,M' + E\left(\frac{3(M+1)}{5}\right)' + N' + E\left(\frac{N}{4}\right)'$$

la constante est nulle.

IV - TABLEAUX UTILISES PAR L' ADMINISTRATION

On trouvera page suivante un exemple de tels tableaux. Par les dispositions choisies :

a) le tableau I donne, à une constante près :

$$u_1 = N' + E\left(\frac{N}{4}\right)' - E\left(\frac{N}{100}\right)' + E\left(\frac{N}{400}\right)'$$

Comment est-il constitué ?

Pour les années : un décalage d'une unité tous les quatre ans à cause de l'année bissextile.

Pour les siècles juliens : une diminution d'une unité par siècle ; dans 100 ans, on trouve 25 années bissextiles et :

$$\begin{aligned} f(Q,M,N + 100) &= f(Q,M,N) + 100' + 25' \\ &= f(Q,M,N) - 1' \end{aligned}$$

Pour les siècles grégoriens : une diminution de deux unités par siècle, sauf quand le siècle est divisible par 400. En effet le nombre d'année bissextiles n'est que de 24. Donc :

$$\begin{aligned} f(Q,M,N + 100) &= f(Q,M,N) + 100' + 24' \\ &= f(Q,M,N) - 2' \end{aligned}$$

Lentz
lycée de Barr
(pour le groupe astronomie de l'irem)

TABLEAU I								ANNEES							
								00	0I	02	03		04	05	
								06	07		08	09	I0	II	
									I2	I3	I4	I5		I6	
								I7	I8	I9		20	2I	22	
								23		24	25	26	27		
								28	29	30	3I		32	33	
								34	35		36	37	38	39	
									40	4I	42	43		44	
								45	46	47		48	49	50	
								5I		52	53	54	55		
								56	57	58	59		60	6I	
								62	63		64	65	66	67	
									68	69	70	7I		72	
TABLEAU I								73	74	75		76	77	$\boxed{78}$	
SIECLES								79		80	8I	82	83		
								84	85	86	87		88	89	
JULIENS				GREGORIENS				90	9I		92	93	94	95	
									96	97	98	99			
0	7	I4		—	I7	2I	25	6	0	I	2	3	4	5	
I	8	I5		—	—	—	—	5	6	0	I	2	3	4	
2	9	—		—	I8	22	26	4	5	6	0	I	2	3	
3	I0	—		—	—	—	—	3	4	5	6	0	I	2	
4	II	—		I5	$\boxed{19}$	23	27	2	3	4	5	6	0	$\boxed{1}$	u_1
5	I2	—		I6	20	24	28	I	2	3	4	5	6	0	
6	I3	—		—	—	—	—	0	I	2	3	4	5	6	

	TABLEAU II							
	MOIS	mai	aou fév (b)	fév mar nov	jun	sep déc	$\boxed{\text{avr}}$ jul jan (b)	jan oct
u_1	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	$\boxed{0}$	I
	2	3	4	5	6	0	I	2
	3	4	5	6	0	I	2	3
	4	5	6	0	I	2	3	4
	5	6	0	I	2	3	4	5
	6	0	I	2	3	4	5	6
	0	I	2	3	4	5	6	0

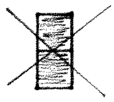
TABLEAU III							
u_2	I 8 I5 22 29	2 9 I6 23 30	3 I0 I7 24 3I	4 II I8 25	5 I2 I9 $\boxed{26}$	6 I3 20 27	7 I4 2I 28
I	D	L	m	M	J	V	S
2	L	m	M	J	V	S	D
3	m	M	J	V	S	D	L
4	M	J	V	S	D	L	m
5	J	V	S	D	L	m	M
6	V	S	D	L	m	M	J
$\boxed{0}$	S	D	L	m	$\boxed{M}$	J	V

b) le tableau II donne, à une constante près $u_2 = u_1 + h(M)$; la fonction h est la fonction g' (à une constante près) mais différente pour janvier et février pour lesquels le millésime n'a pas changé. Il en résulte les deux variantes pour ces deux mois suivant que l'année est bissextile ou non.

c) le tableau III donne $u_3 = u_2 + Q$, u_2 étant introduit en première colonne.

Activités mathématiques en sixième

Notre précédent article présentait les trois premières séances d'une activité dont le sujet était de déterminer le nombre de tours différentes que l'on peut réaliser avec des cubes de 2 couleurs, en tenant compte de la consigne suivante :



(rouge sur rouge interdit,
toutes autres possibilités permises)

Lors de la 3e séance, les élèves ayant établi "la règle" et l'ayant vérifiée pour les exemples construits en arrivent à penser qu'on ne pourra jamais dire si la règle est toujours juste puisqu'on ne peut écrire tous les exemples.

<u>4ème séance</u> : Un arrêt momentané est marqué dans le travail par groupes, et l'on discute au niveau de toute la classe du problème qui se pose.

<u>Prof.</u> : Lors de la dernière séance, plusieurs groupes qui avaient trouvé une règle qui semblait convenir, ont dit qu'on ne pourrait jamais savoir si elle est correcte.

<u>Un él.</u> : "Pour savoir si elle est correcte, on regarde les exemples ; mais on ne peut pas écrire tous les exemples car ils n'ont pas de fin"

<u>Un él.</u> : "Mais si on fait beaucoup d'exemples, par exemple jusqu'à 100 cubes, on sera déjà plus sûr"

<u>Autre él.</u> : "Peut-être que ce sera faux après quand même"

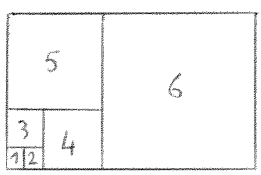
<u>El préc.</u> : "Oui, mais la chance que ce soit juste sera plus grande que si on va seulement jusqu'à 10 cubes"

<u>Un él.</u> : "Je ne comprends pas comment on pourrait montrer que c'est toujours juste !"

<u>Un autre</u> : "Sûrement pas avec les exemples"

<u>Prof.</u> : "Souvenez-vous de la construction que nous avons fait en début d'année avec les carrés :

(tracé au tableau)



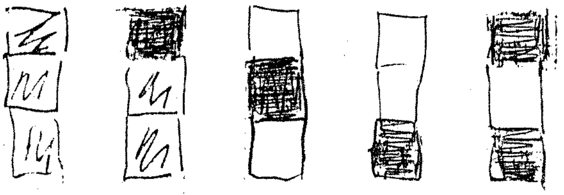
Nous avions trouvé que la suite des nombres qui indiquent la longueur en cm des côtés était 1,1,2,3,5 ... et nous avions expliqué pourquoi.

Un él. : "Là, c'est parce que le nouveau carré est posé sur les 2 carrés d'avant, c'est pour ça qu'il faut additionner"

Prof. : "Je vous propose de bien regarder vos colonnes de cubes et d'essayer comme on a pu le faire pour la figure avec les carrés, de trouver une explication pour la règle. Bien sûr, c'est un peu plus difficile"

Les groupes se reforment et l'activité redémarre. Ceux qui n'ont pas encore établi la règle continuent leur travail sur les exemples d'empilements comme s'il n'y avait eu aucune intervention. Parmi les autres, le problème posé est d'abord interprété comme : "On s'est peut-être trompé" et donne lieu à des justifications par explicitation de la règle de construction systématique des exemples.

Pour être sûr qu'on n'a pas oublié de nombres on peut protéder comme ceux-ci.



J'aligne une 1ère rangée de noir à la 1ère ligne. Unex seconde à la 3ème ligne et une autre que je distance de 1, 2, 3, 4, 5, 6 carreaux de la 7ème ligne. de noir.

Certains se remettent même à construire de nouveaux exemples et l'idée qu'on augmente les chances que ce soit juste réapparaît.

Je ~~me~~ peu n'arrive pas à prouver la justessa de la règle, Je peuse reprendre l'argument de Christophe : Si je continue jusqu'à 1000 avec cette règle est que la règle marche toujours jusque là, je pense que le nombre suivant suivra cette règle. J'ai plus de chances de ne pas me tromper que si je n'avais donné que 100 nombres.

Cette notion est même maniée avec beaucoup de précision logique :

Je pourrais aller jusqu'à 1000. et si la règle indique que c'est juste je ~~ne pourrait~~ en déduirait que jusqu'à 1000 la règle marche.

Une partie plus importante des élèves a beaucoup de mal à "lâcher" les suites de nombres pour revenir aux empilements de cubes. Pour certains même, le seul fait qu'une situation ait pu conduire à une règle numérique suffit à assurer la conviction que ce qu'on a trouvé est juste.

Si on prenait 2 qui a été obtenu par les dessins et 3 qui a aussi été obtenu par les dessins et si on les additionnait ça donnerais 5. Je suis la règle.

(2 + 3) = 5
(5 + 3) = 8
8 + 5 — 13.

Donc en partant de nombre sûr on arrive à un résultat sûr

On en arrive au cheminement linéaire :

situation	⟶	règle numérique	⟶	extrapolation de la règle
manipulations		EFFACEMENT de la		étude des particularités
		situation de départ		analyse ...

Ainsi, pour plusieurs groupes, on assiste à un travail sur la suite trouvée plutôt qu'à une tentative d'explication de l'exactitude de cette suite comme réponse au problème posé.

Pour ~~1 000~~ 16 carreaux de hauts combien puis-je faire de colonnes ? Il n'y a pas de proportionnalité ! Je peux faire 2 584 colonnes. Il n'y a pour 1 000 qu'une règle c'est : le nombre précédemment trouvé + le nombre trouvé. Il n'y a pas de règles directes. Il faudrait beaucoup de temps pour le faire !
J'ai aussi pensé à une autre règle possible.
Un ~~relation~~ opérateur qui passe d'un nombre à l'autre en grandissant suivant un autre opérateur
Mais ça ne marche que pour la suite suivante :
2 - 3 - 6 - 9 - 18 etc...
×1,5 ×2 ×3 ×1,5 ×2 ×3

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1						
2	1	2	~~1~~					
3	1	3	~~2~~ 1					
4	1	4	3					
5	1	5	6	1				
6	1	6	10	4				
7	1	7	17	9	1			
8	1	8						

A la fin de la séance, un élève me fait part de son idée :

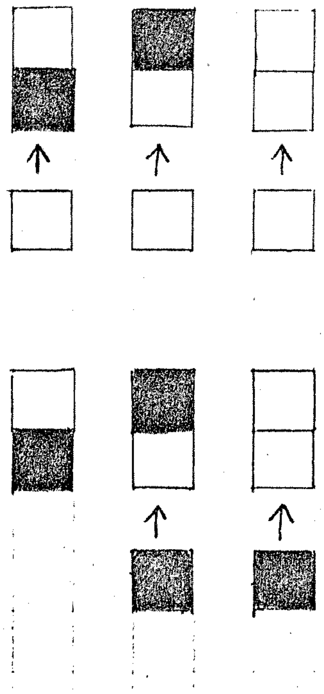
Je prends les 5 colonnes de la ligne 3, je pose sur chaque colones un carré vert, je trouve 5 solutions. Ensuite je met un carré rouge là où c'est possible je trouve 3. Total = 8 c'est le même nombre de colones de la ligne 4.

Plusieurs autres se sont lancés dans la même direction.

5ème séance : L'attrait de la "nouvelle méthode" est grand, mais l'explication du procédé de construction n'est pas simple à exploiter.

J'ai 12 solutions Pour savoir combien de solutions j'aurais avec 6 carrés, je prends une des colones de 5 et j'ajoute un carrés selon la couleur.

pour les rangées de trois il ya 5 ~~rangées~~ colonnes alors on pose un vert sur les 5 ~~rangées~~ colonnes on ajoute 5 cubes alors on pose un rouge sur ~~chacun~~ les 5 ~~rangées~~ colonnes on ajoute de nouveau 5 cubes et 5+5 = 10 mais on enlève la couleur interdite qui est placé en haut des rangès qui pour les rangés de 3 fais 2 et 10-2=8 8 étant les nombres des rangées de 4 je pense que cette règle est juste.



= sa donne 3 collones

= sa donne 2 collones

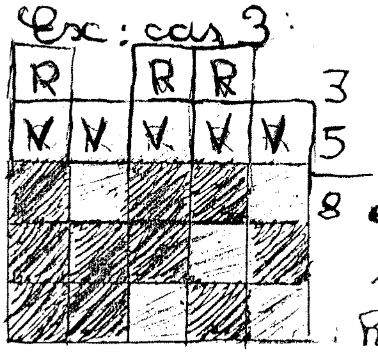
3 + 2 = N5

L'idée d'utiliser ce procédé pour expliquer la règle numérique est avancée, mais difficile à mettre en oeuvre.

On additionne ici les verts qui sont en haut et on trouve le nombre de colonne qui precède, où on additione le nombre de colone et on trouve le nombre de cube vert qui sont en haut.

Nous avons remarqué que dans les cas 1,2,3,4 ...... nous pourrons rajouté autant de carreaux ~~vert~~ rouges qu'il y a de colonnes ~~rouges~~ vertes et partout des carreaux ~~rouges~~ verts au-dessus.

Ex : cas 3 :



8 et voici le nombre de colonnes que l'on pourra trouver avec 4 carreaux de hauteur c'est-à-dire : le cas 4.

On peut fabriquer autant de colonnes avec un vert en haut que de colonnes qu'il y avait dans la famille précédente.

On peut fabriquer autant de colonnes avec un rouge en haut, que de colonnes avec un vert en haut qu'il y avait dans la famille précédente.

Il est à remarquer que dans cette formulation figurent toutes les données nécessaires à l'explication de la règle $u_n = u_{n-1}+u_{n-2}$. Ce qui y est dit pourrait se schématiser par :

colonnes se terminant par un rouge	colonnes se terminant par un vert		colonnes se terminant par un rouge	colonnes se terminant par un vert
famille précédente			famille à construire	
B			A	

Pour clore l'explication il suffit d'appliquer le même raisonnement à la famille B. (D'où proviennent les colonnes de B se terminant par un vert ?) Personne ne franchira seul ce dernier obstacle !
La question formulée entre parenthèses ci-dessus fut en général suffisante pour débloquer la situation ...

En guise de bilan :
Que peuvent donc apporter de telles activités ?

. En premier lieu, on y est conduit à des manipulations. Manipuler ne veut pas dire ici manier des objets physiques, mais augmenter la connaissance d'un objet mathématique par la construction de représentations qui permettent de dégager des invariants. Dans notre cas, faisant appel à une construction systématique de tous les exemples de hauteur donnée, cette phase nécessite d'une part une stratégie efficace et économique, d'autre part la prise de conscience que ce travail ne peut se suffire à lui-même, car inachevable.

. La deuxième phase est celle de la constatation qu'il existe une règle permettant de prévoir... Le caractère inachevable du travail de construction des exemples est ainsi englobé dans une hypothèse dont on prévoit qu'elle s'applique à tous les exemples.

. Constater qu'une hypothèse peut s'expliquer, non par confrontation avec les exemples qu'on ne peut tous expliciter, mais par retour au point de départ de la règle générative, fut pour tous les élèves ayant vécu ce passage un moment d'une densité très particulière, et qui s'apparente plus au choc émotionnel d'une poésie qu'à la récitation des tables de multiplication.

Pour terminer, observons cette autre direction de recherches :

	1 0 rouge	2 1 rouge	3 2 rouges	4 3 rouges	5 4 rouges	6 5 rouges	7 6 rouges	8 7 rouges	TOTAL
1°) 2 carrés	1	2	0						3
2°) 3 carrés	1	3	1	0					5
3°) 4 carrés	1	4	3	0	0				8
4°) 5 carrés	1	5	6	1	0	0			13
5°) 6 carrés	1	6	10	4	0	0	0		21
6°) 7 carrés	1	7	15	10	1	0	0	0	34
Présomption 8 carrés	1	8	21	20	5	0	0	0	55

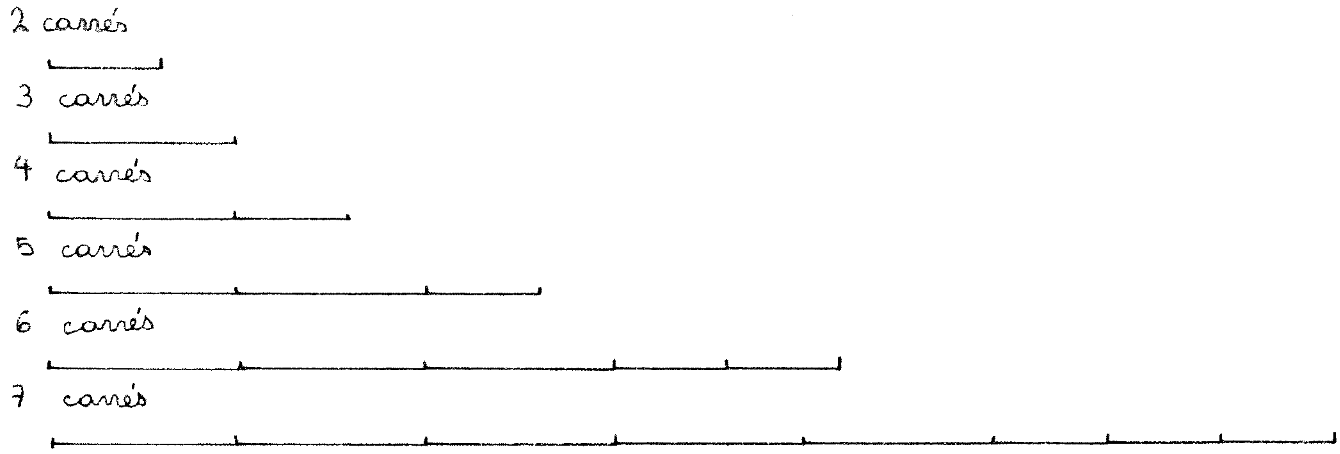
REGLE : le nombre de combinaisons possibles pour un nombre de carrés donnés est égal au total des nombres de combinaisons des deux constructions précédentes

Présomption Suite 1 : pas de progression

Présomption Suite 2 : $2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{+1} 7 \xrightarrow{+1} 8$;

Présomption Suite 3 : $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6} 21$

Présomption Suite 4 : 0 $0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+10} 20$;



J'ai constaté en construisant ce graphique des nombre de combinaisons

que chaque nombre est égal à 1 multiple de 5 + un multiple de trois

que les multiples de 5 suivent la même règle que le nombre de combinaisons possibles

que les multiples de 3 suivent aussi cette règle avec 1 décalage d'un rang en moins

Nombre de combinaisons pour 34 carrés =

(2.178.309 x 5) + (1.346.269 x 3) = 14.930.352 combinaisons

Et ne négligeons pas non plus ces 2 élèves qui, bien qu'ayant régulièrement travaillé, ne sont même pas parvenus à la découverte de la règle numérique. Totalement insensibles aux constatations des autres, elles ont impertubablement continé à fabriquer des exemples, arrivant enfin au bout des cinq séances à des procédés permettant de ne pas oublier des cas. Est-ce par hasard que ces deux élèves, et uniquement celles-ci, en sont restées à des références esthétiques ?

Moi, j'ai fait au hasard et je me suis aperçue que les numéros 11, 12, 13 font un dessin, les numéros 4, 5, 6 font un dessin.

J'ai pris les figures au hasard et je me suis aperçue que si on rassemblait quelques figures sa forme un damier.

"Le chemin du vrai passe par celui qui le pense"

Bachelard

VIE DE LA RÉGIONALE

COMPTE-RENDU DE LA REUNION DU 11-01- 78 :
ANALYSE DES PROJETS DE PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DE 4ème ET DE 3ème.

Guy Mehl, président de la régionale de Strasbourg ouvre la séance. Il informe les participants de l'existence de différents projets concernant les programmes de 4ème et de 3ème (projet de l'Inspection Générale, "remarques" et propositions de l'Académie des Sciences). Il indique également quelles ont été les premières réactions de la part de l'A.P.M. à ces différents projets et précise qu'une commission spéciale se réunira à Paris les 14 et 15 janvier pour étudier à nouveau ces projets, à partir de l'analyse faite dans les régionales. Il souhaite qu'une commission "premier cycle" soit mise en place au niveau de la régionale. Un appel de candidatures est effectué (la liste des personnes intéressées figure à la fin du compte rendu).

La séance consacrée à l'analyse des projets de programme est animée par Bernard Riehl.

1- Remarques préliminaires

1.1 Les textes proposés par l'Académie des Sciences ont été polycopiés à l'intention des participants par les soins de la Régionale, les collègues présents étant censés avoir pris connaissance du projet de l'Inspection Générale grâce au bulletin A.P.M. nº 308. Par contre, le texte de Henri Cartan, qui comprotait plus de 30 pages, n'a pu être polycopié par la Régionale. C'est pourquoi il semble indispensable que l'Association consacre un bulletin entier ou une bonne partie d'un bulletin aux différents projets de programme de 4ème et de 3ème ainsi qu'aux réactions enregistrées à propos de ces projets.

1.2 Les réactions que l'on peut observer au cours de ce type de réunion où une bonne partie des collègues ne sont pas bien informés des projets en cours, sont le plus souvent de nature "sentimentale". Seule une véritable expérimentation peut conduire à des conclusions plausibles...

2- Quelques échanges d''impressions"

2.1 Dans les observations d ordre général préalable au projet de l'Académie des sciences, un certain nombre d'idées recueillent l'adhésion unanime des collègues présents :

a) éviter une cloison étanche entre l'enseignement de l'algèbre et celui de la géométrie.

b) éviter une présentation axiomatique de la géométrie

c) rejet de l'axiomatique du milieu proposée dans le projet de l'Inspection Générale.

Mais ne s'agit-il pas ici d'évidences pour tout enseignant de mathématiques du premier cycle ?

2.2 Par contre la formulation utilisée font de l'ensemble de ces observations une "table de commandements" pour la"troupe" des enseignants de mathématiques... les verbes devoir et falloir y sont employés respectivment 11 fois et 7 fois.

2.3 Quant à la notion de"bagage suffisant", elle n'est guère explicitée. Certains collègues souhaiteraient qu'un véritable catalogue du langage minimum soit établi pour l'ensemble des classes du premier cycle. D'autres souhaitent plutôt qu'on dresse l'inventaire des savoirs, savoir-faire et activités mahtématiques qu'il est souhaitable et possible de proposer dans ces classes. Et cet inventaire ne devrait pas être dressé uniquement par les professeurs de mathématique...

2.4. Tout au long de la discussion, la "réalité scolaire" a été évoquée avec pessimisme. Par exemple :

-- beaucoup d'élèves sont faibles en mathématique

-- la plupart d'entre eux "ne savent plus calculer"

-- incapacité d'un grand nombre d'enfants à accéder à toute forme de raisonnement mathématique.

-- inutilité, voire nocivité de la présentation axiomatique de la géométrie.

3- Analyse comparative du projet de l'Académie des Sciences et de celui de l'Inspection Générale (programme de 4ème).

3.1 Nombre décimaux et approche des réels :

3.1.1 On constate d'abord qu'actuellement, personne "ne traite convenablement" les réels en 4ème, ou plutôt qu'on ne las traite pas du tout... même si $\mathbb{R}$ est un outil indispensable pour l'étude de la droite...

La plupart des collègues précisent qu'on peut uniquement à ce niveau montrer, sur des exemples, qu'il existe des nombres à développement décimal illimité et cela, lors des calculs de certains quotients ou racines carrées.

3.1.2 L'apparition de la notion de fraction dans le projet de l'Inspection Générale semble être accueillie plutôt favorablement; le fait que dans ce projet, on se limite aux nombres décimaux et à l'encadrement d'un rationnel par des décimaux semble être également bien accepté.

3.2 Géométrie plane :

Il s'agit de la rubrique qui a soulevé le plus de discussions et de controverses.

3.2.1 En ce qui concerne le projet de l'Inspection Générale, on prend bonne note de la déclaration d'intention: "la géométrie est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation". Mais l'axiomatique proposée et notamment celle qui se rapporte au milieu d'un bipoint est unanimement refusée.

Par ailleurs, pour les autres titres de cette rubrique, on ne constate guère de changement par rapport au programme précédent : on peut s'interroger sur le maintien de l'aspect affine au détriment de l'aspect métrique de la géométrie. A cet égard, la conception du projet de l'Académie des Sciences semble mieux correspondre au voeux des collègues et aux possibilités des élèves.

3.2.2 A propos du titre "plan vectoriel", les avis divergent et cela déjà sur le concept de vecteur, sa désignation et sa représentation...

Par ailleurs, il y a d'une part des adeptes du "dessin géométrique" en vue de l'étude de la géométrie par les transformations, et d'autre part, des adeptes de la "géométrie sur quadrillage" avec travaux sur les coordonnées de points.

3.2.3 Une des questions les plus délicates a été soulevée en fin de séance. Elle concerne la possibilité de "faire des démonstrations" dans le premier cycle. A cet égard, il semble que la position la plus"raisonnable" à l'heure actuelle soit celle qui se rapporte aux "ilôts déductifs" dont il a été déjà question dans diverses publications de l'A.P.M.

le rédacteur du compte-rendu
Robert Eiller

ANNEXE : Liste des professeur intéressés pour la participation à la commission premier cycle de la Régionale de l'A.P.M.

BARDELANG Francis 15, rue Tarade 67000 STRASBOURG

BERTRAND Roger 18, avenue de la marseillaise 67000 STRASBOURG

BOUDON Marie-Claude 30, rue Wimpheling 67000 STRASBOURG

BUBERT Jean 23, rue Gutemberg 67160 WISSEMBOURG

BULBER André Lycée Schuré 67140 BARR

BUSSER Elisabeth 90, Lauchwerb 68000 COLMAR

CLOSS Gérard 25, rue Pompidou 67240 HOCHFELDEN

DE COMBEJEAN Claude 1, rue des Primevères 67600 SELESTAT

DOMINSKI Karine 15, rue de Boersch 67200 STRASBOURG

DREY Francis 41, rue de Schweighouse 67500 HAGUENAU

EILLER Robert 4, rue Charles Brauer 67400 ILLKIRCH

FRITSCH Jean-François 60, rue principale 67360 WALBOURG

GAUDIER France-Marie 26 A, avenue de la Forêt Noire 670000 STRASBOURG

GOOR Monique 11, rue d'Elsasshausen 67360 WOERTH

HERRMANN Martine 19, rue Principale 67330 OBERSOULTZBACH

HUG Eliane 6, rue de Champagne 68100 MULHOUSE

KAUFFMANN Josiane 36, rue de Géroldseck 67200 STRASBOURG

KIRCHHOFFER Fernande 6, rue du raisin 67400 GEISPOLSHEIM - GARE

LAMPS Alfred 42 A, route d'Altenheim 67100 STRASBOURG

LEVY Pierre 6, rue Elisabeth 68100 MULHOUSE

MOLARD Annette 20, rue de Labaroche 67100 STRASBOURG - NEUDORF

MORITZ Charles 2, rue de Rome 67000 STRASBOURG

MOSSMANN Marie-Odile 2, rue Saint Maurice 67000 STRASBOURG

NOTHEISEN Francine 24, rue Augustin Fresnel 67200 STRASBOURG - CRONENBOURG

NUSS Gilbert 3, rue des Lilas BIESHEIM 68600 NEUF - BRISACH

PERNET Jean-Paul 21, rue des cigognes 67400 OSTWALD

REMY Gilbert 45, rue de la charmille 67200 STRASBOURG

RIEHL Bernard 5, rue des veaux 67000 STRASBOURG

SAMSON Jean 9, rue du cheval 67100 STRASBOURG - NEUDORF

STEPHAN Jean-Pierre 10, rue Mozart 67750 SCHERWILLER

UNDREINER Christine 14, rue des Dahlias 67400 ILLKIRCH

WENCKER Jean 2bis, rue des lilas 67400 ILLKIRCH - GRAFFENSTADEN