l'ouvert n°16

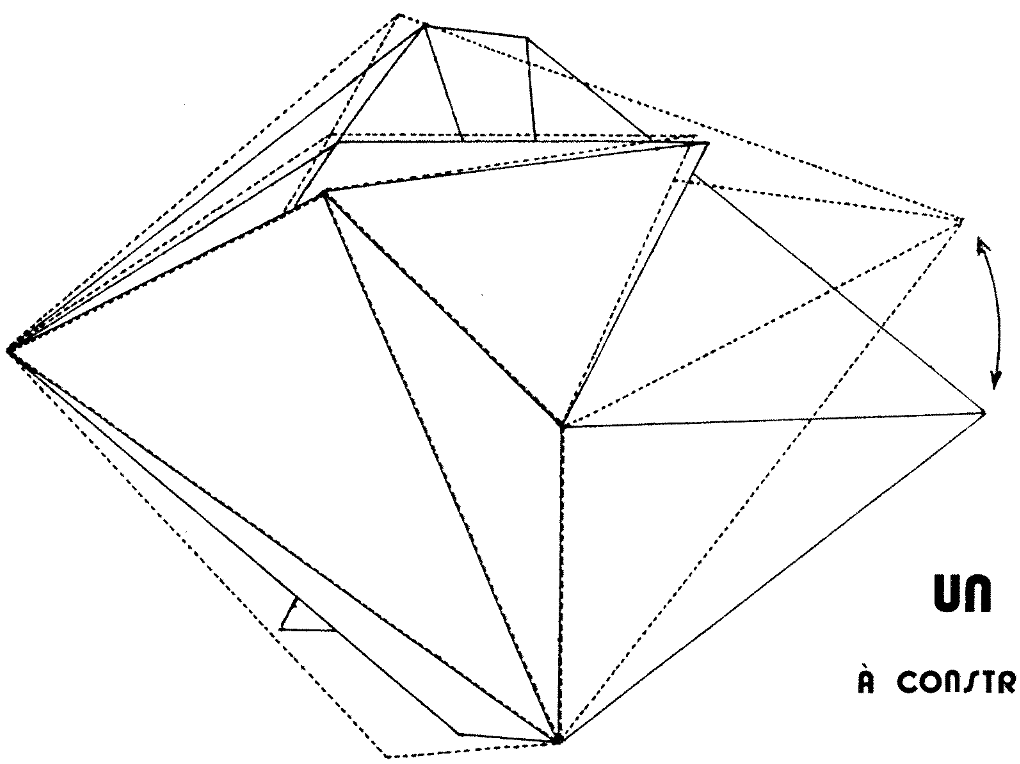
DANS CE NUMERO un super gadget

ORGANE D'INFORMATION ET ... NGE
DE LA REGION... APMEP ... ET
DE L'IREM DE S...

NOUVEAU

mieux que la concurrence

ensemble étoilé et son noyau convexe (n'a rien à voir avec le flexaèdre)



UN FLEXAÈDRE

À CONSTRUIRE SOI-MÊME. P. 6

SOMMAIRE

Vulgarisation

Au sommaire de ce numéro, deux articles témoignent de la recherche mathématique : Les flexaèdres et l'analyse non-standard. Ce n'est pas la première fois que l'Ouvert présente de tels articles puisqu'il y eu entre autre la théorie des catastrophes et le théorème des quatre couleurs. Mais cela ne semble pas une tache facile comme pourra en juger aujourd'hui le lecteur à propos de l'analyse non-standard. Et pourtant, cette branche des mathématiques semble être à l'analyse ce que l'intégrale de Lebesgue est au calcul intégral, c'est-à-dire un moyen extrêmement puissant permettant de simplifier, en les ramenant à un même moule, de nombreuses démonstrations.

Nous avons trop l'habitude, y compris dans nos classes, de dérouler des mathématiques toutes faites. Il faudrait parfois pouvoir expliquer à nos élèves des aspects de la recherche mathématique sans trop s'inquièter de la rigueur du moment que l'idée générale de la démonstration est donnée. Il faudrait parler davantage de l'histoire des mathématiques (et de l'histoire récente), des réunions de mathématiciens, etc...

Qui a entendu parler du Congrès international de mathématique d'Helsinki ? Qui pourrait esquisser l'historique de la médaille Fields (créée en 1932) ? Qui connait Deligne, Fefferman, Quillen, Margoulis (pour ne citer que les plus récents) et les raisons de leur "célébrité" ?...

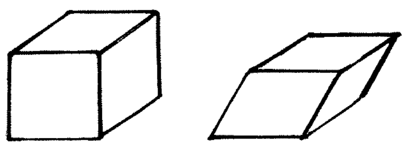
Je pense que l'Ouvert devrait s'engager plus avant dans la vulgarisation mathématique quoique cela ne soit pas aisé , devant s'adresser à des enseignants de la maternelle à l'université dont les motivations sont très éloignées. Mais c'est avec l'aide de ses lecteurs que l'Ouvert réussira.

Jean Lefort

LES FLEXAÈDRES

Tout le monde connaît le parallèlogramme déformable, ces quatre barres deux à deux égales, articulées autour des sommets et qui permet entre autre la construction de certaines dilatations. D'une façon plus générale, un polygône plan, à l'exception du triangle, est toujours déformable dès que l'on articule les sommets.

Passons à une dimension supérieure et plaçons nous dans l'espace habituel de dimension 3. L'équivalent des polygônes sont les polyèdres. On peut donc se demander s'il existe des polyèdres déformables ? Mais ici, il est besoin de préciser exactement ce que l'on entend par polyèdre. Si on selimite aux sommets et aux arrêtes, il est clair qu'un cube (par exemple) est déformable ; on peut l' aplatir en transformant en losange deux faces opposées. Si maintenant on tient compte des faces, qu'on les suppose pleines, le cube, pour reprendre l'exemple précédent, est réellement un solide. Nous aurions obtenu le même résultat en triangulant le cube, c'est-à-dire en remplaçant toutes ses faces par deux triangles obtenus en traçant une diagonale du carré. Les triangles étant indéformables, les faces du cube le sont alors aussi et la manipulation précédente échoue. Qu'en est-il des autres polyèdres ?



cube cube aplati

En 1813, Augustin Cauchy a démontré que tout polyèdre convexe(*) dont les faces planes sont rigides était solide, c'est-à-dire que les deux faces définissant une arrête ne pouvaient s'articuler autour de cette arrête. Le problème est resté ouvert jusqu'à 1977 en ce qui concerne les polyèdres non-convexes(*). L'année dernière un mathématicien américain, Robert Connelly, travaillant à l'I.H.E.S. (institut des hautes études scientifiques) de Bures-sur-Yvette construisait un polyèdre à 18 sommets, à faces rigides et cependant articulable. C'est une variante à 16 sommets que l'Ouvert vous propose de réaliser aujourd'hui. Le lecteur impatient peut se précipiter au mode d'emploi, mais il ne saura pas pourquoi "ça marche". Tant pis pour lui !

Revenons un peu en arrière. En 1897, Bricard publie un mémoire sur la "thé-

---

*

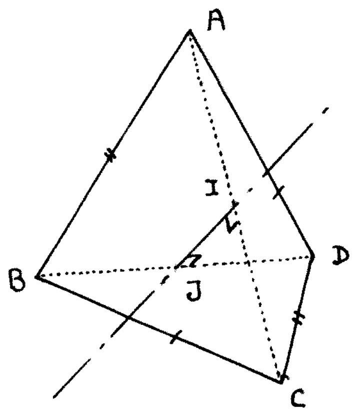
convexe : Le polyèdre est entièrement situé d'un même côté par rapport à l'une quelconque de ses faces.

non-convexe : Il existe une face dont le plan est sécant au polyédre.

orie de l'octaèdre articulé". Il ne s'agit par réellement d'un octaèdre à faces planes rigides puisqu'il n'est formé que de barres représentant les arrêtes ; mais l'octaèdre n'a que des faces triangulaires et un triangle est indéformable ! on pourrait penser qu'en remplissant les faces le problème aurait été résolu depuis 80 ans. Seulement si on se livre à cette opération de remplissage on s'apperçoit que deux faces s'interpénètrent, ce qui est évidemment facheux.

Voyons de plus près comment fonctionne l'octaèdre de Bricard. Pour cela commençons par démontrer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Dans l'espace, tout quadrilatère (gauche ou non) qui a ses côtés opposés égaux en longueur deux à deux admet un axe de symétrie qui est la droite joignant les milieux des diagonales.



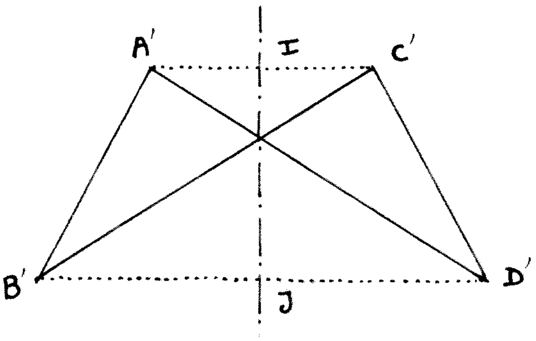
Soit ABCD le quadrilatère, tel que AB = CD et AD = BC Soient I et J les milieux respectifs de Ac et BD . Les triangles ABD et CDB sont isométriques donc leurs médianes ont des longueurs égales : JA = JC . Par conséquent le triangle AJC est isocèle et la médiane JI est également hauteur. Donc IJ est perpendiculaire à AC . On démontre de même que IJ est perpendiculaire à BD . IJ est alors perpendiculaire commune aux deux diagonales. Si nous considérons la symétrie d'axe IJ (rotation d'angle π autour de l'axe IJ) nous remarquons que A et C s'échange de même que B et D . Cette symétrie laisse donc le quadrilatère invariant.

Imaginons maintenant un point P distinct de A, B, C ou D et non situé sur IJ . L'ensemble des segments PA, PB, PC, PD, AB, BC, CD, DA, sorte de pyramide est déformable et s'articule autour des cinq sommets. Il ne saurait être question de transformer cette construction en polyèdre en remplissant les faces puisque ABCD n'est pas en général plan et que les longuerus BD et AC ne restent pas constantes.

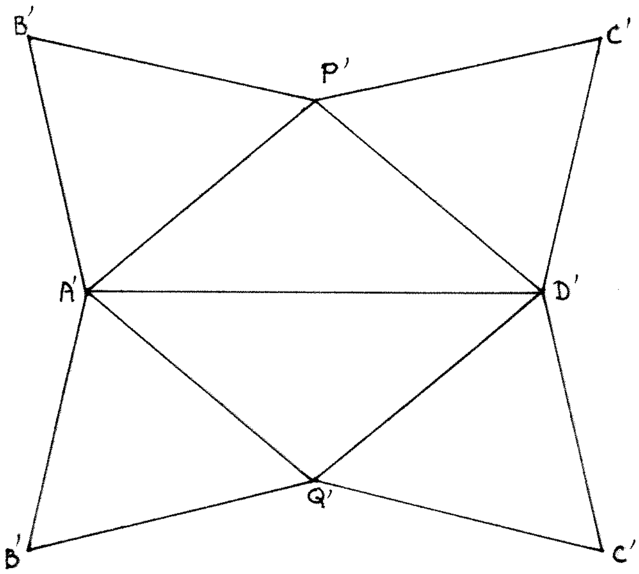
Soit alors Q le symétrique de P par rapport à la droite IJ ; construisons de même les segments QA, QB, QC et QD . Alors l'octaèdre ABCDPQ est articulable puisqu'à tout mouvement d'une arrête partant de P correspond le mouvement symétrique de l'arrête correspondante partant de Q.

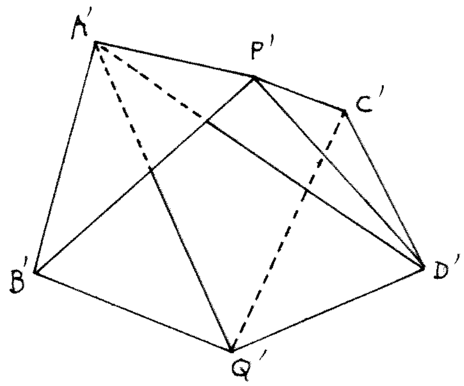
Il y a deux méthodes de construire un octaèdre de Bricard. C'est la combinaison de ces deux méthodes qui a conduit R. Connelly à la réalisation du <u>flexaèdre</u>. Essayons de visualiser ce qui se passe ; on peut évidemment construire un tel octaèdre avec des tiges articulables (par exemple des pailles dans lesquelles on insère une ficelle) ; cela évite de remplir les faces et permet de voir ce qui se passe. Peut être l'un ou l'autre lecteur a-t-il ce genre de matériel sous la main et va-t-il s'empresser de réaliser cette construction physique. Je m'adresse donc aux autres. Pour eux il s'agit de réaliser la fossette.

REALISATION DE LA FOSSETTE



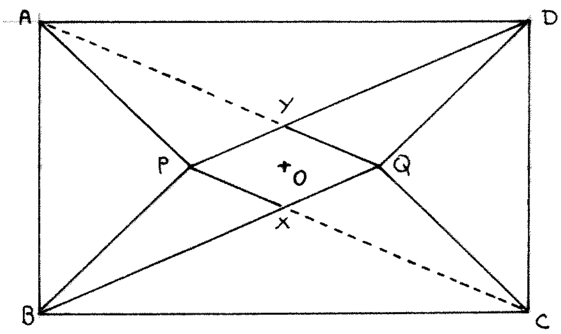
C'est un octaèdre de Bricard tel que le quadrilatère $A'B'C'D'$ soit croisé. ($A'C'D'B'$ est un trapèze isocèle). Quand le quadrilatère se défrome, il reste plan et l'axe de symétrie IJ reste dans ce plan. Prenons le point P' tel que P' soit équidistant des quatre sommets du quadrilatère (Q', symétrique par rapport à IJ présente les mêmes propriétés). Il est clair que les faces $P'A'D'$ et $P'B'C'$ s'interpénètrent (de même pour $Q'A'D'$ et $Q'B'C'$). Il est donc nécessaire de supprimer l'une des deux faces, par exemple $P'B'C'$ (et $Q'B'C'$). On obtient alos les six faces de la fossette. Ces six faces ont été développées sur les pages hors texte ci-jointes et doivent être découpées.





Si on colle ensemble les arrêtes $A'B'$ devant $A'D'$, il faut coller les arrêtes $C'D'$ derrière $A'D'$ pour obtenir ce qui est représenté ci-dessus à droite. Il est alors facile de remuer cette "fossette" par simple pression et de remarquer que la longueur $B'C'$, bien que non matérialisée, reste constante au cours du mouvement.

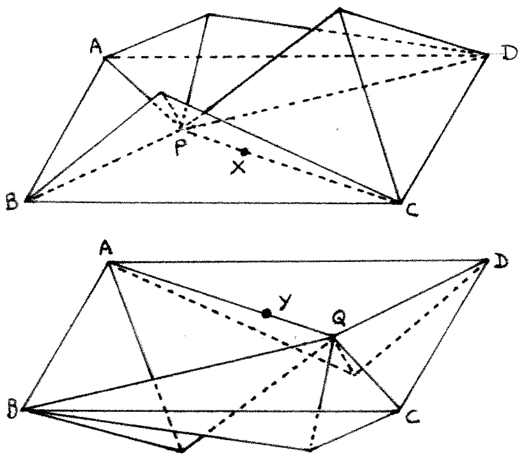
C A S   P L U S   G E N E R A L



Soit ABCD un quadrilatère à côtés opposés égaux deux à deux qui dans sa position plane est un rectangle (figure ci-contre). Plaçons P et Q dans son plan, symétriquement par rapport au point de concours des diagonales (l'axe de symétrie du rectangle est en effet perpendiculaire à son plan en ce point).
Nous obtenons encore une fois un octaèdre de Bricard, mais cette fois ci, ABCD ne reste pas plan lors de la déformation. Il est facile de s'en rendre compte en découpant dans du papier les deux surfaces PDABC et QADCB (rectangles dont on a enlevé respectivement les triangles DCP et ABQ). On les accolle avec un ruban adhésif le long de AD et BC après les avoir croisés comme sur la figure ci-dessus. Lors du mouvement, P et Q se soulèvent et s'abaissent simultanément. Pour faciliter le mouvement, on aura pris soin de marquer par un pli les arrêtes PA , PB , QC , QD . On remarque que QB est au dessus de PC et QA au dessous de PD.

C O N S T R U C T I O N   D U   F L E X A E D R E

C'est à partir de l'octaèdre précédent que l'on peut construire un flexaèdre. Remplaçons les faces PAD , PBC et PCD par des pyramides pointant vers le haut, les faces QAB , QBC et QAD par des pyramides pointant vers le bas. En accollant ces deux surfaces le long du rectangle ABCD , on obtient presque un flexaèdre. Le blocage se fait seulement en X ou en Y suivant que l'on veut soulever P et Q ou les abaisser.



L'idée est donc de faire une petite encoche en X et Y de façon à permettre le mouvement. C'est le rôle de la "fossette".
On place le point P' de la "fossette" au sommet de la pyramide de base PBC et le point Q' au sommet de la pyramide de base PDC , le point B' en C et le point C' en P . On fait de même au voisinage de Y pour la deuxième fossette. Le mouvement est alors possible et l'on vient de réaliser un flexaèdre à 16 sommets. C'est ce flexaèdre que l'Ouvert vous

propose de réaliser à partir du développement donné sur les pages hors-textes ci-jointes. Auparavant posons quelques questions :

QUELQUES QUESTIONS

En n'autorisant le mouvement que dans un sens, on peut supprimer une fossette et par conséquent deux pyramides (lesquelles ?). On obtient alors un flexaèdre à 12 sommets. Des chercheurs de Bures sur Yvette ont réduit ce nombre à 9. On a démontré qu'il est impossible qu'un polyèdre flexible ait 7 sommets ou moins. Reste le cas de 8 sommets ......

On peut vérifier que le volume du flexaèdre est invariant lors des déformations. Mais on ne sait pas si cette propriété est vrai pour tout polyèdre flexible ....

Existe-t-il des flexaèdres en géométrie non-euclidienne ? ....

Peut-on généraliser cette notion en dimension supérieure à 3 ? .....

REALISATION DU FLEXAEDRE

1) Les patrons ont été dessinés avec la convention suivante :

- en traits pleins les angles saillants ;
- en traits interrompus les angles rentrants.

Cette convention n'a évidemment pas été utilisée pour le pourtour des languettes.

2) Chaque languette porte une référence et doit être collée le long de l'arrête portant la même référence et sous la feuille. On prendra donc soin lors du découpage de reporter les références sous les faces.

3) Découper les quatre morceaux du patron. On s'astreindra à un découpage précis, surtout au voisinage des sommets.

4) Monter les deux fossettes. Lors du collage (on prendra une colle plastique) on placera les languettes <u>sous</u> la feuille et on superposera très exactement les arrêtes correspondantes.

5) Pour faciliter le montage, on pliera la feuille très soigneusement le long de chaque arrête en respectant le sens indiqué.

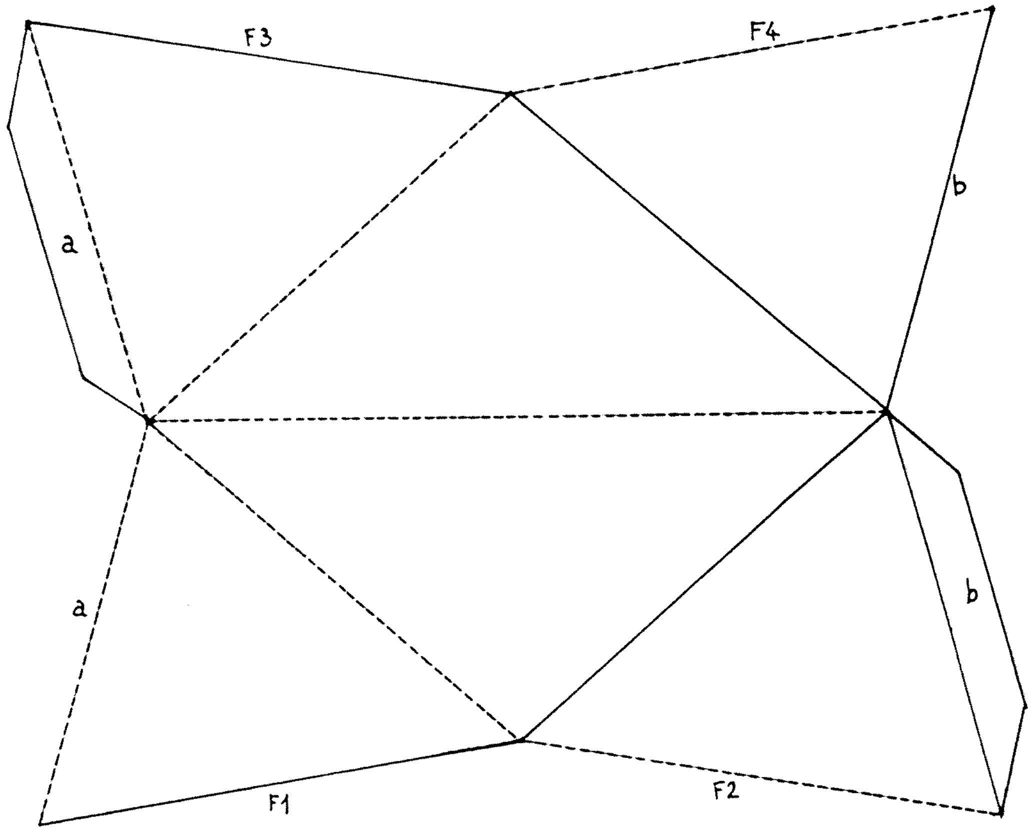
6) L'ordre du montage est peu important. Il est toutefois agréable de pouvoir terminer dans une position simple. Nous conseillons donc l'ordre suivant :

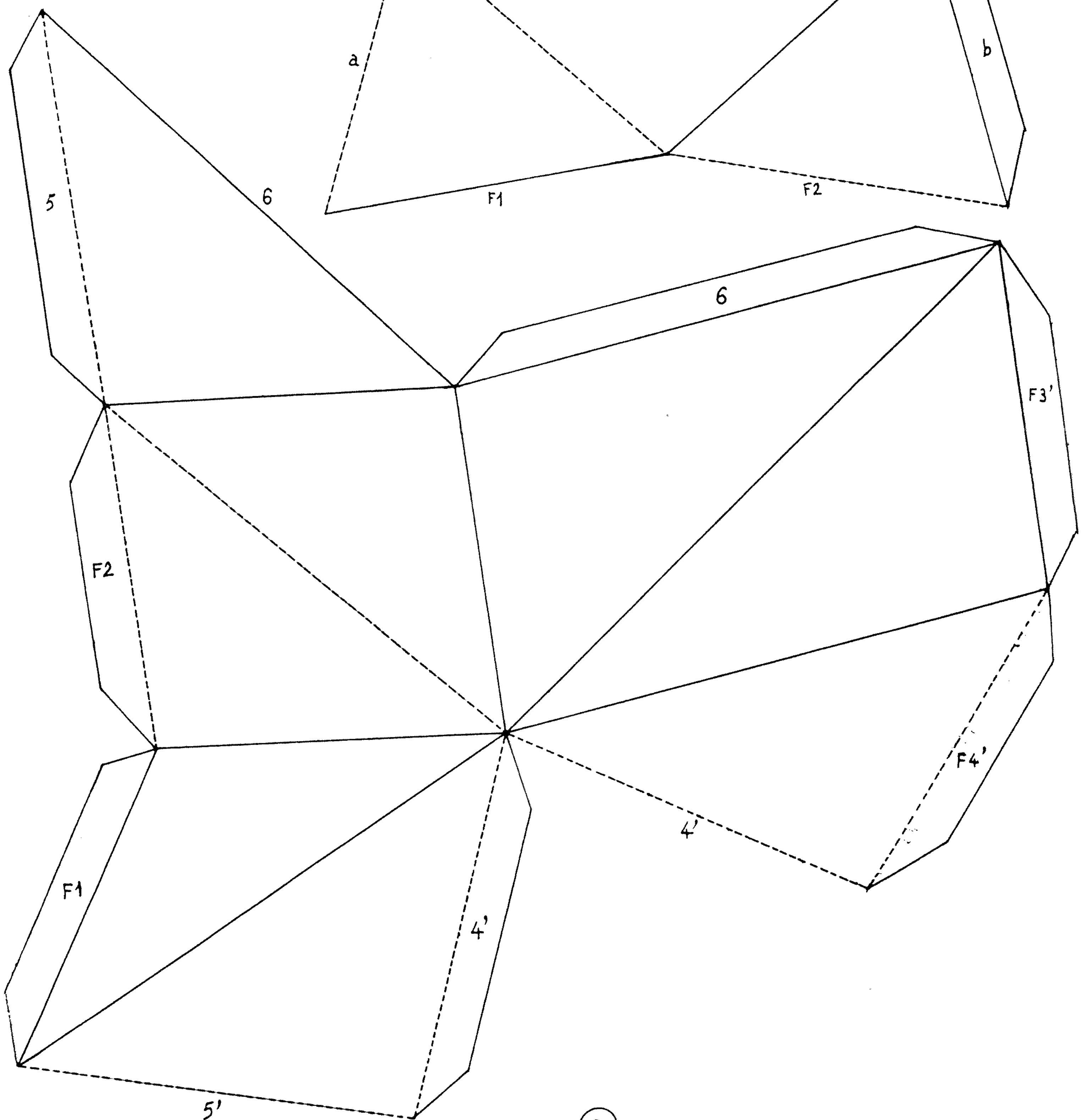
F2 , F1 , F2' , F1' , F4' , F3' , 6 , 5 , 4 , F4 , F3 , 4' , 5' , 6'

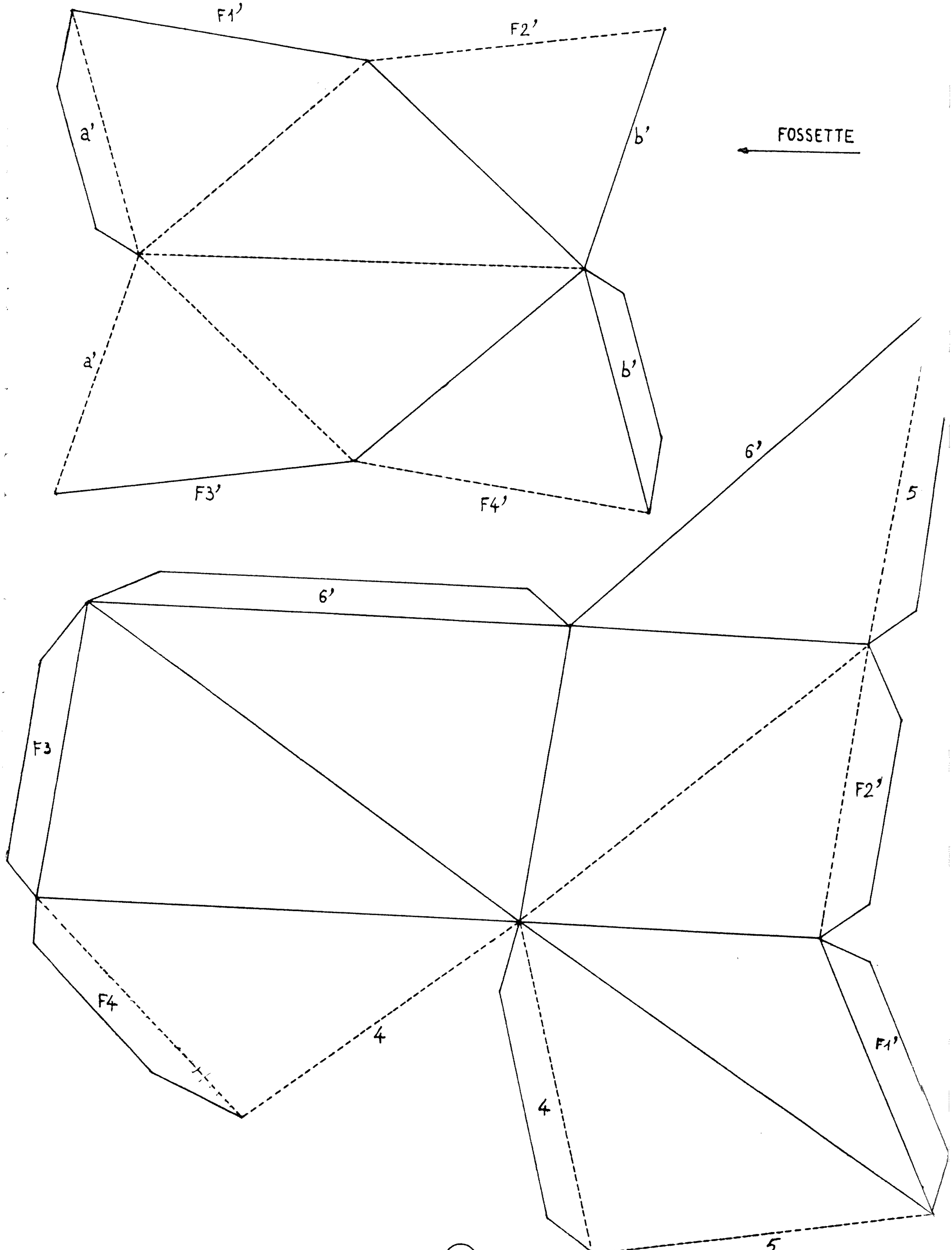
7) Les personnes sensibles qui pleureraient à l'idée de découper leur bel Ouvert peuvent décalquer le patron, ou mieux, le redessiner en mesurant les longueurs de chaque arrête. Les différentes mesures qui interviennent sont , en mm :

$$55 \ ; \ 65 \ ; \ \sqrt{55^2 + 50^2} \ ; \ \sqrt{55^2 + 80^2} \ ; \ 105 \ ; \ 110 \ ; \ 130$$

FOSSETTE






F1'
F2'
FOSSETTE
a'
b'
a'
b'
F3'
F4'
6'
5
6'
F3
F2'
F4
4
4
F1'
5

Visite du lycée franco-allemand de Fribourg

Il est toujours intéressant pour quiconque considère que l'enseignement des mathématiques doit se défier des habitudes, même s'il les croit conformes aux instructions, de jeter un regard sur ce qui se fait ailleurs. Dans cette perspective, deux visites au lycée franco-allemand de Fribourg (D.F.G.) furent organisées les 18 mai et 3 juin par la régionale de Strasbourg.

Dès l'abord ce lycée séduit par son cadre. Situé à l'est de Fribourg, au bord de la Dreisamm, là où la ville se fond dans la campagne, il est protégé au nord par les hauteurs boisées du Schlossberg, tandis qu'au sud il tourne ses immenses baies vitrées vers les contreforts du Schauinsland. Aucune grille ne délimite son territoire, et, lorsqu'on pénètre dans le bâtiment, on se trouve dans un vaste hall à l'architecture complexe ; pouvant devenir au gré des circonstances, théâtre, salle de réunion, emplacement de kermesse. Tout autour se répartissent les classes et les bureaux de l'administration ; ces derniers sont rendus volontairement discrets afinque se développent chez les élèves le sentiment de liberté et le sens de la responsabilité. Si l'on ajoute que la création prochaine d'un internat permettra le renforcement des effectifs de la section française, renforcement vivement souhaité par les familles allemandes, et que la finalité du Lycée est l'intégration progressive dans les mêmes classes des élèves des deux nations, alors on sait l'essentiel sur le lycée franco-allemand de Fribourg.

A ce propos, il n'est peut-être pas vain d'espérer que la mathématique puisse, un jour, participer activement à cette intégration. En effet le discours mathématique utilise un langage relativement pauvre, ce qui se traduit par la répétition des mêmes phrases, et il est constamment supporté par le graphisme, symboles ou figures, ce qui peut faciliter sa compréhension. Or au lycée franco-allemand de Fribourg le graphisme dispose de moyens logistiques importants : vastes tableaux magnétiques blancs sur lesquels adhèrent fermement les instruments de dessin ; on y dessine non à la craie, ce produit d'un autre âge, mais à l'aide de crayons feutres ; il en résulte une précision remarquable des tracés géométriques ; sur l'un des tableaux de petits trous matérialisent les noeuds d'un quadrillage ; un rétroprojecteur dont l'exploitation en mathématiques s'avère très efficace, vient compléter ce dispositif.

Il convient maintenant d'évoquer quelques leçons auxquelles nous avons assité dans les classes de nos collègues allemands : Messieurs Mahlmann, Bertholet et Much.

Première leçon sur les probabilité dans la dixième classe allemande (notre seconde) :

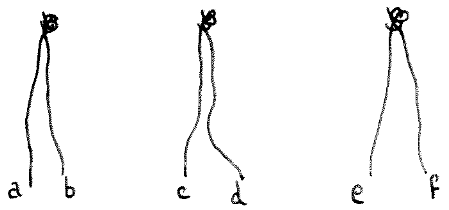
Le professeur raconte d'abord l'histoire suivante :

Chez certaines peuplades d'un continent lointain il existe une coutume étrange à laquelle se plient les couples qui désirent conclure mariage : Le garçon tient dans sa main six cordelettes dont les extrêmités dépassent au dessus et au dessous de son poing fermé ; la jeune fille noue deux par deux les extrêmités du haut, deux par deux les extrêmités du bas. Le garçon ouvre alors la main et si les cordelettes forment une seule boucle, alors le mariage est conclu.

L'auditoire, filles et garçons, déjà intrigué par la présentation originale du problème est immédiatement plongé dans l'expérimentation.

Le professeur distribue à chaque couple d'élèves six brins de ficelle. Quelques instants plus tard apparaissent les premiers résultats, trois boucles, deux boucles, une boucle. On recommence avec de nouvelles ficelles. Sur vingt expériences seize donnent une seule boucle ; le professeur est un peu déçu mais peu importe, il passe à l'analyse du problème.

Il prend six nouveau brin, les noue deux par deux et les dépose sur trois supports :



Quelqu'un remarque que les noeuds du bas vont, eux et eux seuls créer la décision. Il faut donc d'abord compter toutes les manières de les faire. On choisit l'un des brins libres ; il y a cinq manières de l'associer aux autres. L'un de ces cinq noeuds étant fait, on choisit l'un des quatre brins libres. Il y a trois manières de l'associer à chacun de ceux qui restent. Il reste alors deux brins libres ; on n'a plus le choix. Le décompte précédent indique donc 5×3 possibilités.

Pour obtenir une seule boucle, on choisit un brin libre, b par exemple ; on ne peut le lier à a évidemment, mais on peut le lier indifféremment à c , d , e , f , d'où quatre choix possibles. Choisissons c par exemple ; on ne peut lier d qu'à e ou à f . Ensuite on n'a plus le choix. Le décompte indique donc 4×2 possibilités. Ainsi le nombre de chances de conclure mariage est $8/15$.

Tout au cours de la leçon, les élèves ont agi, dénombré, conjecturé. Il n'est pas question pour l'instant de formaliser : analyse combinatoire et espaces probabilisés seront introduits dans des classes ultérieures. Le langage utilisé est celui de tout le monde.

Leçon sur la position relative de deux cercles dans la 7ème classe allemande (notre 5è)

La leçon comporte trois parties :

- Un travail préparatoire à la maison dont voici le libellé :

Klasse 7a-b $\boxed{\text{HAUSAUFGABEN}}$ 17.5.78

$\boxed{\text{GEGENSEITIGE LAGE ZWEIER KREISE}}$

Wieviel Punkte können zwei Kreise $k(M_1;r_1)$ und $k(M_2;r_2)$ gemeinsam haben ?

1) Mache zu jedem Fall eine Zeichnung. Nimm dazu $r_1 = 2{,}1$ cm und $r_2 = 1{,}3$cm. Messe dann jeweils die Länge $\overline{M_1M_2}$.

2) Berechne r_1-r_2 und r_1+r_2 . Ordne dann jeweils -soweit möglich- die Größen r_1+r_2 , r_1-r_2 , $\overline{M_1M_2}$ nach der Kleiner-Relation.

- Une première synthèse en classe : un élève vient dessiner sur un tableau blanc un cas de figure ; il indique les inégalités correspondantes. Grâce aux moyens fonctionnels mis à sa disposition, il peut exécuter le dessin relativement vite et avec précision, ce qui est pratiquement impossible avec les moyens traditionnels, craie et tableau noir.

D'autres élèves lui succèdent jusqu'à ce que les cinq cas soient dessinés sur les tableaux.

- Une dernière synthèse est réalisée par le professeur, qui, utilisant le rétroprojecteur, présente la question de telle manière qu'elle est perçue par les élèves comme un spectacle, quelque chose comme le "choc des mondes" : Exclamations à l'instant où $M_1M_2 = r_1+r_2$!

Il est indéniable que la diversité des représentations constitue un facteur de bonne pédagogie. Un élève dont l'attention n'a pas été éveillée par telle forme d'exposition sera captivé par telle autre. Notre position privilégiée d'observateur nous a permis de constater effectivement ce phénomène au cours de la leçon.

D'autres cours furent exposés, qui, pour leur contenu et leur traitement auraient tout aussi bien pu se dérouler dans une classe française.

Pourquoi donc la mathématique ne participe-t-elle pas à l'intégration des élèves français et allemands dans les mêmes sections ? La réponse est simple : Les conceptions de l'enseignement des mathématiques du second cycle divergent profondément dans les deux pays : L'existence de nos sections C, pourvoyeuses des "grandes écoles" constitue un obstacle jusqu'alors insurmontable. Les allemands, eux, n'ont pas de "grandes écoles" et n'éprouvent donc pas le besoin de soumettre leurs élèves à un baccalauréat scientifique hautement spécialisé.

La solution de ce problème réside probablement dans une conception plus simple des programmes, par exemple celle que préconise l'APM dans la formule noyau-thèmes : - un noyau réduit de connaissances fondamentales sur lequel les commissions d'harmonisation des programmes devraient normalement se mettre d'accord (Il n'est pas illusoire de penser que, ce qui est fondamental en mathématique pour un niveau donné, l'est dans les deux pays). - des thèmes qui préserveraient la spécificité de notre enseignement.

Ainsi l'enseignement des mathématiques aurait-il au D.F.G. une dimension nouvelle qui l'associerait à part entière aux ambitions communautaires de cet établissement.

Lucien Augé

Les délégations françaises étaient composées, l'une de Mme Bourdic, MM Forestier et Augé , l'autre de Mlle Cambon, MM Eiller, Bulber, Riehl et Stoltz.

L' HOMME & LA MACHINE

THEME DE REFLEXION POUR LES TERMINALES A

L'un des sujets de Terminale du Rallye mathématique d'Alsace 1977 concernait le suite de Fibonacci, le fils de Bonacci connu aussi sous le nom de Leonardo de Pise (1175 ? - ?). Tandis que j'assurais à Mulhouse, en compagnie de Glaeser le bon déroulement de l'épreuve, celui-ci m'apprenait un fait au prime abord étrange :

La dite suite définie par la relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

converge vers 0 si $u_o = 1$ et $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (le conjugué du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Mais si l'on tente de conjecturer sa limite à l'aide d'une calculatrice de poche, on a la surprise de constater qu'elle est infinie.

L'intendant du lycée de Fribourg (qu'il soit ici hautement remercié) nous ayant fourni, malgré les faibles crédits alloués chaque année aux mathématiques une calculatrice programmable, la TI 58, toutes les conditions étaient réunies, qui permettaient d'étudier le dilemme de Glaeser.

Pour ce qui concerne la convergence, on peut établir que u_n est une suite géométrique de raison $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

En effet : $u_o = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$ $u_1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$.

Supposons que l'on ait $u_{n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ et $u_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$u_{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)$. Or ce dernier facteur égal à $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ n'est autre que $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$. Il en résulte :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

u_n est donc bien une suite géométrique de pr'mier terme 1 et de raison $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La valeur absolue de ce nombre étant inférieure à 1, on déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

```
LRN
2nd  Lbl
A
STO  00
RS
2nd  Lbl
B
STO  01
RS
RCL  00
+
RCL  01
STO  00
=
2nd  Pause
STO  01
GTO  10
LRN
```

Si maintenant, on utilise la calculatrice TI 58 avec le programme ci-contre où l'on introduit après le dernier LRN , 1 en A et $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ en B , après avoir frappé la touche RS on voit apparaître d'abord des nombres alternativement positifs et négatifs dont la valeur absolue diminue, puis des nombres positifs devenant de plus en plus grands :

u_o = 1

u_1 = -0, 6I30033988I

u_2 = +0, 38I9660II3

u_3 = -0, 2360679775

. . . .

u_{29} = -0, 0000005077

u_{30} = 0, 00000II23I

u_{31} = 0, 0000006I54

u_{32} = 0, 00000I7385

. . . .

u_{60} = 1, 08958949I

. . . .

u_{200} = 1, 9748428 . 10^{29}

MORALITÉ : La plus belle calculatrice du monde ne peut donner que ce qu'elle a : Des nombres décimaux.

Lucien Augé
(lycée de Fribourg)

Du côté de nos collègues de français

De nombreuses "expériences" interdisciplinaires sont menées discrètement par des collègues. Bien que dans ce cas le travail des uns puisse difficilement être repris par d'autres, il n'est pas inutile que ces travaux soient connus.

Nos collègues de l'A.F.E.F. organisent à Strasbourg, à la Pentecôte 79, un congrès national sur les pratiques interdisciplinaires. Il va de soi que les professeurs de mathématiques sont invités et plus spécialement tous ceux qui ont vécu une expérience pédagogique interdisciplinaire avec un enseignant de français.

On trouvera ci-dessous un texte de présentation de l'A.F.E.F. et de son congrès. A la rentrée 79, l'Ouvert en publiera un compte-rendu, du moins pour ce qui concerne la liaison maths-français.

L'Ouvert.

Connaissez-vous l'AFEF ?

L'Association Française des Enseignants de Français (fondée en 1967) regroupe 5 000 enseignants, "de la Maternelle à l'Université", qui travaillent et réfléchissent ensemble pour promouvoir un enseignement du français renouvelé dans ses objectifs et ses méthodes.

Depuis 1967, l'AFEF a défini ses exigences sur les moyens et les buts d'une rénovation globale de l'enseignement du français, de l'école élémentaire à la formation des maîtres :

-- par le Manifeste de Charbonnières tout d'abord, élaboré collectivement et publié en 1969, dont certaines exigences ont commencé à passer dans la pratique (recours aux théories linguistiques, recherche d'autres méthodes de lecture, transformation de la relation maître-élèves, ...) ;

-- par le manifeste "1977 : AUJOURD'HUI LE FRANCAIS", qui définit les exigences de l'AFEF aujourd'hui, en réclamant des moyens d'action pour les enseignants, moyens matériels certes, et possibilité de constituer un milieu professionnel où se développe chaque jour, au contact des élèves, un rapport nouveau au savoir, à l'école et à la société.

L'action de l'AFEF se manifeste à divers niveaux :

-- Par sa revue trimestrielle, "LE FRANCAIS AUJOURD'HUI", elle traite des problèmes posés à tous les niveaux d'enseignement par la pédagogie du français, en réunissant la réflexion théorique et l'application concrète, et elle offre un lieu d'information et de confrontation permanentes entre toute les catégories d'enseignants.

-- Par des sections régionales et départementales, qui organisent journées d'étude, groupes de réflexion, sessions d'information, ...

-- Par une action constante auprès des pouvoirs publics, sur tous les aspects de l'enseignement du français (programmes officiels, inspection,...) et de l'enseignement en France (action contre la réforme Haby, défense des IREM,...).

L'AFEF est une association de recherche et de lutte, de positions et de propositions. Elle entend travailler avec les mouvements d'éducation nouvelle, les organisations syndicales, bref, avec tous ceux qui se battent pour une éducation vivante et authentique.

POURQUOI UN CONGRES SUR L'INTERDISCIPLINARITE ?

La question des communications entre les disciplines se pose à toutes les sciences et techniques dans le monde contemporain ; or l'école maintient, depuis le XIXème siècle, la division en disciplines étanches.

Enseignants de français, nous avons cherché à définir notre spécificité, mais nous ressentons aussi la nécessité d'un projet éducatif global. La réflexion sur le décloisonnement des disciplines et sur la notion même de "discipline" s'inscrit dans ce projet.

Mais il faudra aussi envisager les obstacles qu'oppose l'institution à ce décloisonnement (statut des maîtres, formation,...) ; également peser toutes les implications politiques de l'interdisciplinarité : face à la polyvalence que le ministère tend à généraliser, quel est le projet de l'AFEF ?

Voici quelques axes de discussion, que nous travaillons à l'AFEF, et que nous proposons aux autres associations de spécialistes :

-- Décloisonnement des disciplines (enfonction des élèves autant que des enseignants) :
  . Problème de la parcellisation des savoirs, cloisonnement des esprits chez les élèves ;
  . divergence et redondance dans les contenus et les méthodes : comment rendre cohérents des enseignements souvent opposés ? comment rendre les apprentissages méthodologiques plus complémentaires ?

-- L'enseignement du français, un enseignement parmi les autres : Etude comparative des objectifs propres à chaque discipline, à tous les niveaux d'enseignement.

-- Le français dans les autres enseignements : Tout enseignant est-il un enseignant de français ? L'enseignant de français au "service" des autres ? Qu'est-ce que les autres enseignants attendent de l'enseignement du français ?

-- Questions institutionnelles :

. L'équipe éducative ;

. Contrôle, examens, évaluation ;

. Formation des maîtres : polyvalence ? décloisonnement ?

Enseignants de français et enseignants de mathématiques :

On nous oppose souvent, comme "l'esprit de finesse" à "l'esprit de géométrie". De cette opposition simpliste, l'enseignant de français retire une image peu flatteuse : il brasse des idées, du flou, de l'indicible, et baigne dans la subjectivité. L'AFEF veut dépasser cette vision stéréotypée : l'enseignement du français doit reposer sur un savoir scientifique, fondé sur la linguistique (qui doit beaucoup aux maths) et les autres sciences humaines, et faire appel à des méthodes rigoureuses.

Les axes de recherche définis ci-dessus concernent nos enseignements. Des équipes INRDP ont déjà travaillé sur diverses utilisations des mathématiques dans l'enseignement du français, comme outil d'investigation et de réflexion, pour l'apprentissage de la langue et l'étude des textes, littéraires et autres (voir RECHERCHES PEDAGOGIQUES nº 56, 1973, et LANGUE FRANCAISE nº 12, "linguistique et mathématiques", 1971) ; c'est là un aspect limité de travail en équipe. Aux enseignants de mathématiques de nous dire ce qu'ils attendent de l'enseignement du français, et ce qu'ils pensent de nos buts.

Des contacts existent depuis longtemps, au niveau National, entre l'APMEP et l'AFEF. Nous souhaitons développer des échanges au niveau régional, et susciter des travaux en commun dans les établissements, sur des expériences interdisciplinaires existantes ou en mettre en place.

NOus formulons le souhait que le Congrès AFEF de Strasbourg donne naissance à des échanges réguliers et durables, à la base, entre les enseignants de toutes "disciplines".

RENSEIGNEMENTS :

.Bas-Rhin : M. SCWARTZ
12, rue du Maréchal Joffre, 67 000 - STRASBOURG

.Haut-Rhin : M. PELLAT
30, rue de l'Espérance, 68 120 - PFASTATT.

Analyse Non - Standard

d'après un exposé fait au séminaire LOI (Février 78)

G. REEB
A. TROESCH
E. URLACHER

PREMIERE PARTIE : POLEMIQUE.

INTRODUCTION : Un schéma (1) simple mais fondamental permet de comprendre le mécanisme de l'analyse non standard, il se résume en quelques lignes. On considère un langage $\mathcal{L}$ [pour nos besoins il est loisible de choisir pour $\mathcal{L}$ la langue parlée par tel traité d'analyse cher au lecteur, par exemple $\mathcal{L}$ sera le "Valiron" ou les textes dignes d'être incorporés au "Valiron"] et deux mathématiciens M et M^* qui (ne) parlent (que) $\mathcal{L}$. Il s'agit d'accepter le principe (ou schéma) suivant :

---

(1) Il y a, pour sûr, une grande marge entre l'acceptation du schéma proposé et la démonstration de la consistance de ce schéma avec la mathématique classique. Cette démonstration ne nous concerne pas ici. Encore est-il bon d'observer que la vue suivante : "le schéma peut être substitué à l'axiome du choix dans l'édification de la mathématique classique" est, à peine, utopiste.
Il est opportun de signaler ici l'excellent article, à l'intention de l'utilisateur, de NELSON dans B A M S (Novembre 1977) .

(Σ) <u>Le mathématicien</u> M^* <u>est plus riche en objets que</u> M . [en particulier la liste [1] des nombres réels de M^* est plus longue que la liste des nombres réels de M] .

Dès lors que le schéma Σ est accepté, la comparaison des certitudes de M et M^* [certitudes exprimées dans les mêmes termes par M ou M^* et dans le langage $\mathcal{L}$] permettent d'intéressantes constatations [exprimées quant à elles dans la langue de celui qui fait la comparaison] . Ainsi il y aura dans l'univers de M^* un réel $\alpha > 0$, tel que l'inégalité $\alpha < a$ soit vérifiée pour tout réel $a > 0$ choisi dans l'univers de M . Un tel α sera appelé un infiniment petit.

Ce n'est pas le lieu ici de développer les conséquences du schéma Σ ; d'excellents ouvrages ont été conçus dans cette intention, de plus on peut se familiariser rapidement avec la technique. Rappelons simplement que l'on aboutit ainsi à une théorie cohérente et utile des"infinitésimaux".

Dans la deuxième partie de notre exposé, nous utiliserons librement ces grandeurs infinitésimales.

<u>DIGRESSION</u> :

Depuis la nuit des temps, on connaît des situations présentant une analogie[2] plus ou moins valable avec le schéma Σ , qu'il s'agisse de littérature, d'ésotérisme, de rhétorique, de typologie .... La lecture à plusieurs niveaux de beaucoup de textes n'a rien de mystérieux. L'exemple suivant nous semble relever typiquement d'un schéma Σ : il s'agit de la boutade célèbre attribuée à B. SCHAW : ≪Anglais, Américains, deux peuples séparés par une langue commune≫ .

---

(1) Il n'est évidemment pas question de chercher l'une ou l'autre de ces listes dans "Valiron". (Cet ouvrage se contente d'évoquer, à l'occasion, des propriétés des nombres réels, par exemple ≪ 2 est un nombre réel ≫) .

(2) Certaines situations éthniques qualifiées - quelque peu improprement - par le terme de "bilinguisme" doivent être évoquées ici. On y rencontre deux cultures M^* et M^{**} et une langue $\mathcal{L}$ propre à décrire M^* et M^{**} ; la langue $\mathcal{L}$ est le privilège de l'ethnie bi-lingue.

PREVENTIONS :

Il n'est guère surprenant que la naissance et les premiers développements de l'analyse non-standard aient déclenché un tollé général: les protestations,préventions, préjugés et dogmatismes se sont donné libre cours ; citons quelques uns des a priori :

i) L'analyse non-standard n'apprend pas à "majorer ou minorer" [comme si "Valiron" ignorait la pratique et la vertu des majorations] .

ii) "Peu nous importe une théorie qui reprenne les espoirs déçus des analystes du 18^e siècle" [comme si les plus grands mathématiciens n'avaient pas constamment clamé leur nostalgie devant l'abandon - qui leur semblait inévitable - de tout recours à la notion d'infinitésimaux] .

iii) "Il est remarquable de pouvoir s'exprimer ainsi (entendez : selon les règles de l'analyse non-standard) ... mais, heureusement, on peut également fort bien s'en passer" [comme si quelque part existait une théorie dont on ne puisse se passer ... Mais, au fait, désirerait-on se passer de "Valiron" ?]

iv) "Le schéma Σ est bien compliqué, il est difficile de prouver sa consistance" [comme si la consistance des mathématiques classiques (et l'aspect chimérique de l'entreprise) inquiétaient les mathématiciens actifs] .

v) " que l'on établisse des résultats nouveaux par le moyen de l'analyse non-standard " : [comme si devant un tel résultat nouveau on ne feignait pas de trouver encore plus intéressante une preuve standard a posteriori : (une preuve non-standard d'un résultat classique, ne saurait évidemment pas retenir l'attention)] .

vi) " Le caractère prétendument "intuitif" des preuves non-standard est illusoire " [comme si ...] .

vii) " Surtout qu'on ne change rien à l'enseignement élémentaire ! [comme si au moins le changement suivant n'était pas d'ores et déjà irréversible :

alors qu'avant Robinson il était possible de dire "la méthode ϵ, δ de Cauchy-Weierstrass est la méthode permettant un fondement solide de l'analyse" , il est nécessaire d'être plus prudent après Robinson et, par exemple, de dire une méthode plutôt que la méthode] .

viii) "Les démonstrations en non-standard sont de mauvaises traductions de belles preuves en ϵ, δ " [comme si la production d'un tel jugement dispensait d'autre forme de preuve, comme si A. Robinson n'avait pas écrit d'inoubliables pages à ce sujet : principe de Saint Venant] .

ix) "Une bonne idée trouve son chemin,il n'y a donc pas de risque à se montrer circonspect" [comme si on adoptait cette attitude si l'on reconnaissait à l'idée quelque chance d'être bonne]..

x) "L'analyse non-standard ne peut pas intéresser la mathématique appliquée" [comme si le collègue qui formule ce jugement s'intéressait tant soit peu aux applications (il en convient d'ailleurs fort volontiers) ; comme si des préoccupations de mathématiques appliquées n'avaient pas joué un rôle déterminant dans les préoccupations d'A. Robinson] .

xi) "L'Algérie n'avait vraiment pas besoin de cela" , "dilettantisme" "cela fait rire tout l'Institut de Mathématique" ...

HISTORIQUE :

Quelques points d'histoire s'avéreront peut-être utiles à ce stade.

L'épisode épique de la querelle sur l'analyse non-standard se cristallise autour d'une analyse(1) d'un livre de Keisler(1), signée par Bishop. Cette critique est un monument d'absence de sang-froid et d'objectivité,elle a provoqué des ripostes en chaîne dont on trouvera l'écho dans divers périodiques U.S. récents

---

(1) cf. B.A.M.S. 83 (1977) p. 205-208 ; Keisler : Elementary calculus Boston 1976 . Le livre de Keisler a la réputation, en dehors même de toute préoccupation non-standard, de fournir une mine riche en trouvailles didactiques.

(B.A.M.S. 83 (1977) p. 10008 , Notices N° 179(1977), p. 269 et 283 , American Mathematical Monthly)

L'avenir dira comment il convient de juger des diverses péripéties de la bataille, mais il convient de rappeler qu'il s'agit ici d'une phase (la dernière ?) d'une longue histoire qui remonte vers 1966. Cette date marque approximativement la parution de deux ouvrages

- l'un est un remarqué manifeste de mathématique constructiviste :

  E. Bishop : Foundations of Constructive Analysis (N.Y) (1967) .

- l'autre est l'acte de naissance de l'analyse non-standard :

  A. Robinson Non-standard analysis Amsterdan (1966) .

Ces deux livres présentent beaucoup d'analogies : même format, même épaisseur, structures semblables, introductions construites sur des plans parallèles, même projet d'apporter une contribution essentielle à la construction de quelques pans de l'édifice mathématique, même enthousiasme et même souffle.

Au-delà de ces éphémères analogies, ces ouvrages sont parfaitement antagonistes : l'un est jaune, l'autre est vert ; l'un appartient à la mathématique formelle , l'autre rejette - selon la solide conception de Brouver - la formalisation au bénéfice de "l'intuitionisme" ... ; et surtout les deux ouvrages s'ignorent l'un l'autre de manière étonnante.

L'ouvrage fondamental de Robinson semble devoir rester longtemps l'outil pour tout travailleur dans le domaine de l'analyse non-standard. La profondeur d'inspiration en fait un des grands évènements de la publication mathématique. D'autres ont dit cela mieux que nous ne saurions le faire(1) . Certes la littérature sur le sujet s'est fortement enrichie, et comporte bien des traités et études utiles et originaux, mais cela ne modifie en rien la place du traité de Robinson.

---

(1) Voir en particulier : B.A.M.S 83 1977 p. 646-666 . A ma connaissance le B.A.M.S. n'a pas publié d'analyse du livre d'A. Robinson ?

Après cette évidence, nous nous sentons vraiment dans nos "petits souliers" au moment d'exposer, à titre d'illustration, quelques échantillons proches de nos propres préoccupations ; on nous pardonnera peut-être, soit qu'on se tourne vers des lectures choisies dans le traité de Robinson, soit qu'on nous reconnaisse pour avoir oeuvré quelque peu dans le sens du message de Robinson.

DEUXIEME PARTIE : EXEMPLES.

1) Unicité des solutions d'une équation différentielle.

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

où f est de classe C^2.

La démonstration de l'unicité des solutions de (1) revient à la démonstration de l'unicité de la solution $y = 0$ pour une équation du type

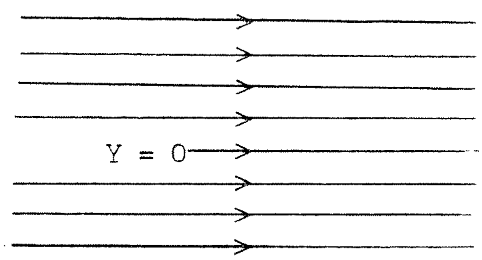
$$y' = y^2\varphi(x,y) \tag{2}$$

où φ est de classe C^0.

Faisons le changement de coordonnée $y = \epsilon Y$ où ϵ est infiniment petit. On obtient

$$Y' = \epsilon\, Y^2\, \varphi(x,\epsilon Y)$$

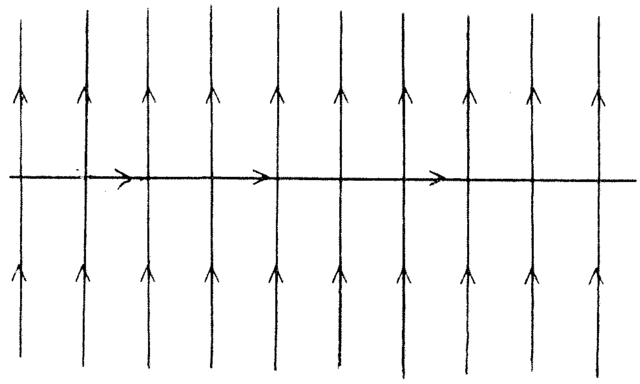
Les trajectoires du champ de vecteurs ainsi défini dans le plan (x,Y) sont infiniment proches de parallèles à Ox pour x et Y finis.



Ainsi toute solution de (2) coupant $y = 0$ est infiniment proche de la solution $y = 0$.

Par conséquent celle-ci est l'unique solution standard s'annulant pour $x = 0$

<u>Remarque</u> : Pour l'équation $y' = u^{2/3}$ le même changement de coordonnées conduit au schéma suivant :



2. <u>Existence d'une solution périodique pour l'équation de Van der Pol</u>.

L'équation de Van der Pol

$$\epsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0 ,$$

où ϵ est un réel standard positif quelconque, est équivalente au système

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon}\left[u - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right] \\ u' = -x \end{cases}$$

qui admet un cycle limite.

Ceci découle de l'existence d'une solution bornée.

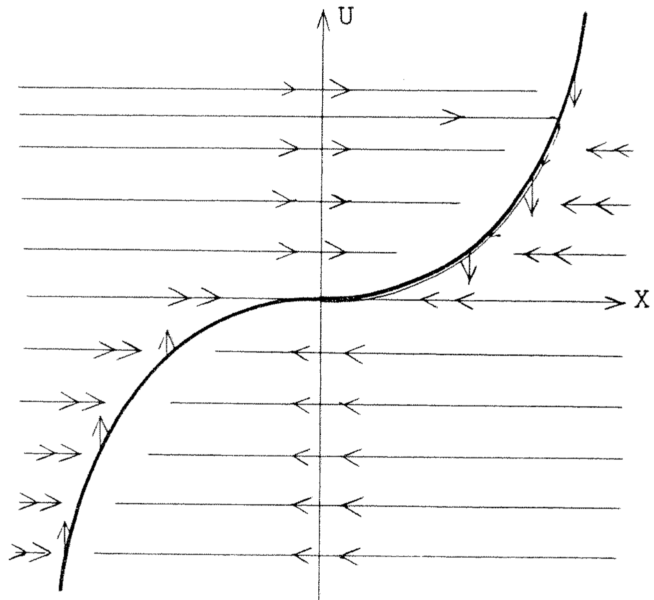
Pour démontrer l'existence d'une telle solution, on peut faire le changement de coordonnées et variables suivant

$$\begin{cases} X = \alpha x \\ U = \alpha^3 u \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ est infiniment petit.} \\ \tau = \alpha^2 t \end{cases}$$

On obtient ainsi le système suivant

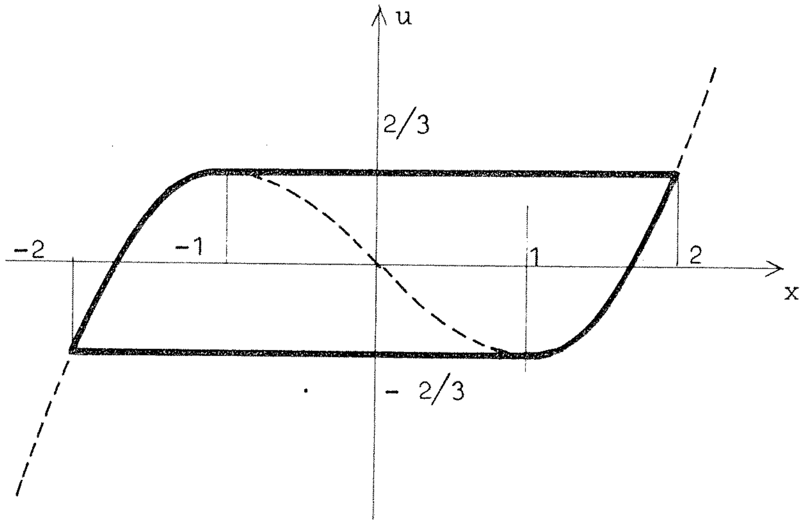
$$\begin{cases} X' = \dfrac{1}{\epsilon\alpha^4}\left(U - \dfrac{X^3}{3} + \alpha^2 X\right) \\ U' = -X \end{cases}$$

d'oü le schéma qui rend évident l'existence d'une solution bornée.

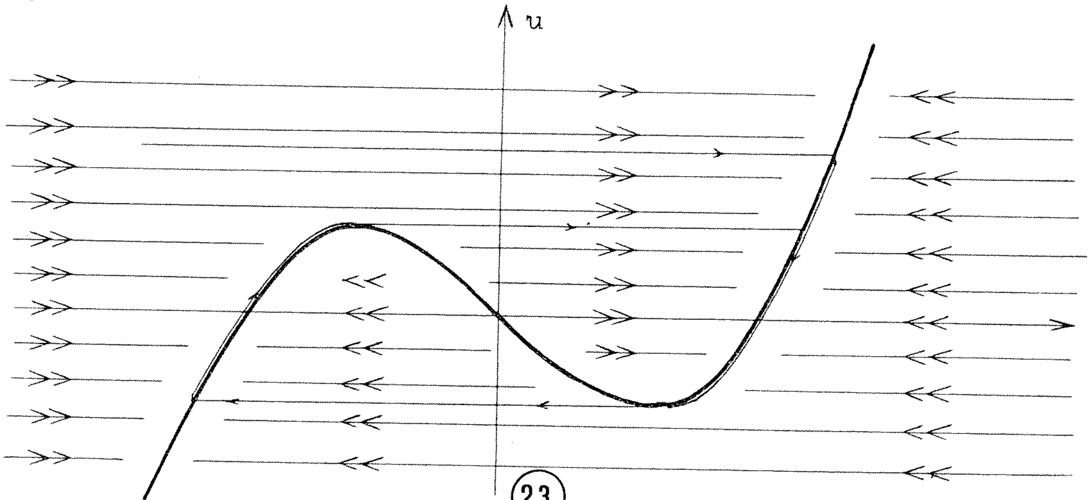


3. Convergence lorsque $\epsilon \to 0$ et stabilité du cycle limite de l'équation de Van der Pol avec paramètre.

Le cycle limite du champ de vecteurs défini par le système (Δ) de 2. tend vers la courbe Γ définie sur la figure 1 .



En effet pour ϵ infiniment petit, la composante horizontale du champ de vecteurs est infiniment grande en dehors des points infiniment proches de la cubique $u = \dfrac{x^3}{3} - x$. Il a donc la configuration suivante :



On en déduit immédiatement que le cycle limite est infiniment proche de la courbe Γ ce qui, par transfert, donne le résultat.

Remarque : la configuration du champ pour $\epsilon > 0$ infiniment petit donne aussi de façon immédiate l'unicité du cycle limite pour $\epsilon > 0$ standard assez petit.

On sait qu'un cycle limite de (Δ) est stable si le long de ce cycle la quantité :

$$I = \int_0^T \frac{(1-x^2(t))}{\epsilon}\, dt$$

est strictement négative, T désignant la période.

Pour $\epsilon > 0$ infiniment petit les parties du cycle limite pour lesquelles $|x| < 1$ sont parcourues en un temps infiniment petit, alors que les autres sont parcourues en un temps non infiniment petit. Il en résulte que $I < 0$.

4. Existence d'une solution périodique pour une équation différentielle du type

(1) $$\epsilon x'' - f(x') + x = 0$$

Supposons que $x = f(y)$ est une fonction impaire C^1 telle que

1) il existe un maximum unique M atteint en un point $\alpha > 0$

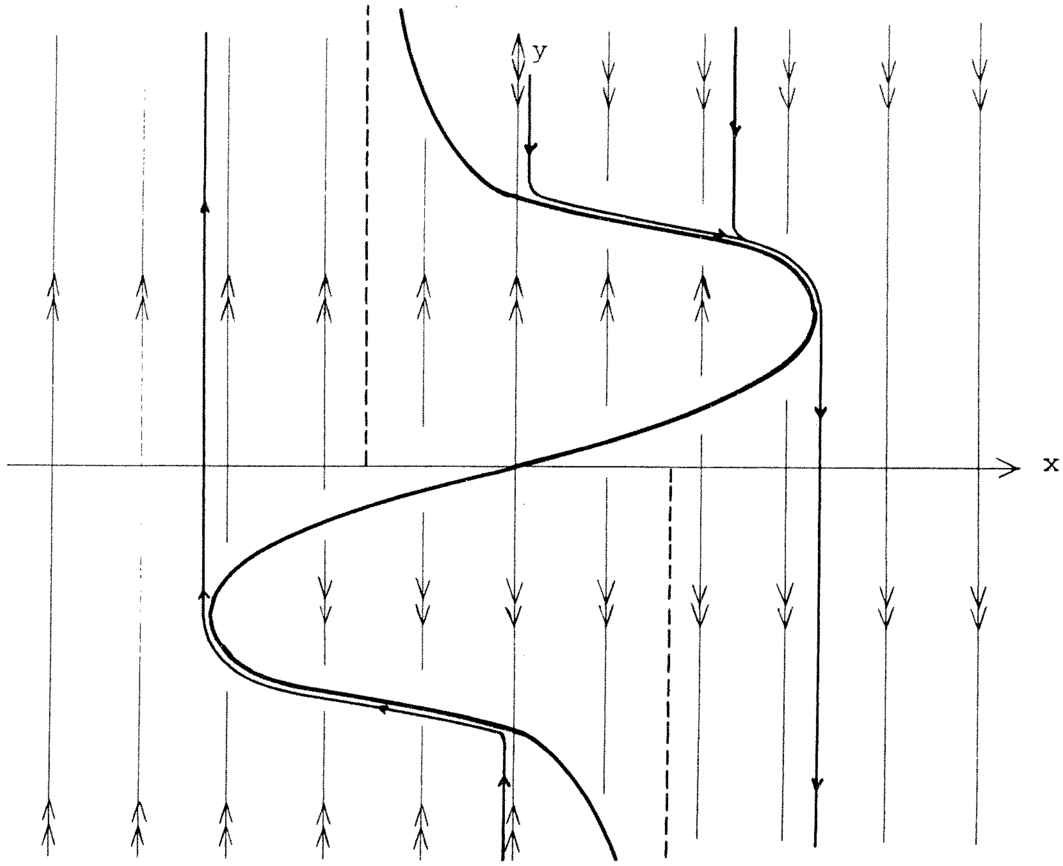
2) $\lim_{y \to +\infty} f(y) = -a$ ou $0 < a < M$.

Alors l'équation (1) admet une solution périodique pour ϵ assez petit.

Ceci découlera de l'existence d'un cycle limite pour le champ de vecteurs défini dans le plan de phase par le système différentiel suivant équivalent à (1) :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{\epsilon}(f(y) - x) \end{cases} \quad \epsilon > 0 \text{ infiniment petit.}$$

Dans le plan (x,y) on a la configuration du champ suivante :



Soit (x_o,y_o) un point fini tel que $y_o > \alpha$ et $f(y_o) < x_o < M$.

Vu la configuration du champ la trajectoire de ce point est infiniment proche d'une parallèle à Oy jusqu'à ce qu'elle soit à une distance infiniment petite de la courbe $x = f(y)$ qu'elle longera ainsi jusqu'au maximum.

Ensuite elle s'éloigne de la courbe en restant infiniment proche de la droite $x = M$, ceci jusqu'en un point (x_1,y_1) où y_1 est infiniment grand.

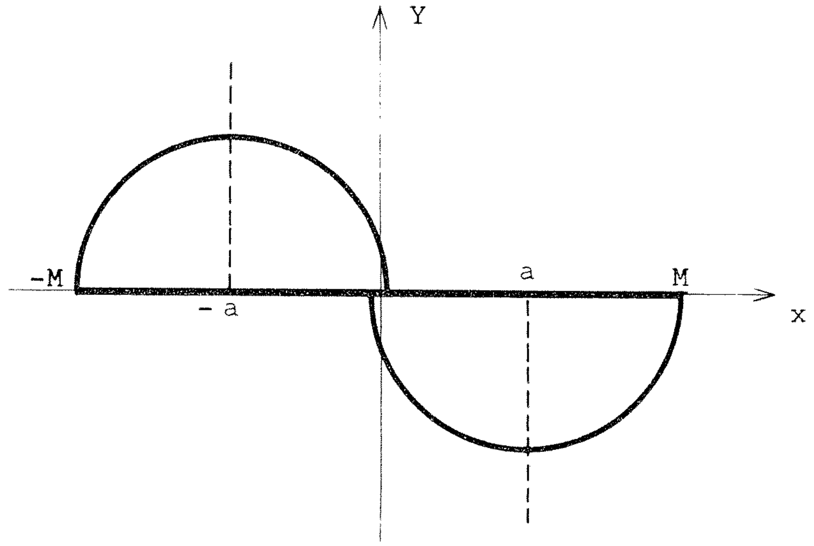
Le changement d'échelle $Y = \sqrt{\varepsilon}\, y$ sur l'axe Oy donne le système suivant

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Y \\[2ex] y' = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[-x + f\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Y\right)\right] \end{cases}$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Y$ est infiniment grand pour $Y \geq Y_1$, où $Y_1 = \sqrt{\varepsilon}\, y_1$, la trajectoire de (x_o,y_o) longe dans le plan (x,Y) le demi-cercle $(x-a)^2 + y^2 = (M-a)^2$ en restant à une distance infiniment petite jusqu'en un point (x_2,Y_2) où x_2 est infiniment proche de $2a - M$ et $Y_2 = Y_1$.

Ensuite la trajectoire revient dans le plan des (x,y) finis.

Par symétrie, on en déduit que dans le plan (x,Y) la demi-trajectoire positive est infiniment proche de la courbe représentée par la figure suivante :



Le résultat en découle.

<u>Remarque</u> : le même raisonnement s'applique évidemment dans des cas plus généraux.

<u>B I B L I O G R A P H I E</u>

[1] REEB G. Séance débat sur l'analyse non-standard. Gazette des Mathématiciens N° 8 (S.M.F. Février 1977) p. 8-14 .

[2] TROESCH A. Existence de solutions bornées des équations différentielles de Lienard (Publication IRMA Strasbourg) à paraître.

[3] TROESCH A. URLACHER E. Analyse non-standard et équation de Van der Pol. (Publication IRMA Strasbourg 1977).

[4] URLACHER E. Existence et stabilité de solutions périodiques pour des équations différentielles du type $\varepsilon x'' + f(x') + x = 0$ (Publication IRMA Strasbourg) à paraître.

A propos de Diophante

Cette année, pour la première fois, un groupe de stagiaires de l'IREM se penche sur l'histoire des mathématiques sous la direction de monsieur Glaeser.

Au cours de ce retour aux sources nous nous sommes intéressés à Euclide, Archimède, Hilbert, Diophante, le marquis de l'Hôpital, Euler, Pascal, Descartes, Poincaré, ...

A travers ces auteurs nous avons examiné les aspects divers de la géométrie (Euclide, Archimède, Descartes, Hilbert), de l'arithmétique (Euclide, Diophante), de l'analyse ...

C'est en confrontant Diophante aux mathématiques enseignées actuellement que l'idée du problème suivant nous est venue.

Voici deux problèmes du premier livre d'arithmétique de Diophante d'Alexandrie :

Problème 1 :

Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée.

Que le nombre donné soit 100 , et que la différence soit 40 unités ; trouver les nombres.

Posons que le plus petit nombre est 1 arithme ; donc le plus grand nombre sera 1 arithme plus 40 unités. En conséquence, la somme des deux nombres devient 2 arithmes plus 40 unités. Or les 100 unités données sont cette somme ; donc 100 unités sont égales à 2 arithmes plus 40 unités. Retranchons les semblables des semblables, c'est-à-dire 40 unités de 100 , et, de même, 40 unités de 2 arithmes plus 40 unités. Les deux arithmes restants valent 60 unités et chaque arithme devient 30 unités.

Revenons à ce que nous avons posé : Le plus petit nombre sera 30 unités ; tandis que le plus grand sera 70 unités, et la preuve est évidente.

Problème 2 :

I . . . .

Proposons donc de partager 60 en deux nombres qui soient dans le rapport triple.

Posons que le plus petit nombre est 1 arithme ; donc le plus grand sera trois arithmes, et ainsi le plus grand nombre est le triple du plus petit nombre. Il faut encore que la somme des deux nombres soit 60 unités. Mais la somme des deux nombres est 4 arithmes ; donc 4 arithmes sont égaux à 60 unités, et l'arithme est donc 15 unités. En conséquence, le plus petit nombre sera 15 unités, et, le plus grand 45 unités.

Questions :

1) Chercher quelques renseignement biographiques sur Diophante.

2) Traduire le problème 1 en langage actuel et rédiger la démonstration de Diophante avec des notations algébriques.

3) Quelles remarques pouvez-vous faire sur la démonstration de Diophante ?

4) Après avoir rédigé la démonstration du problème 2 avec des notations algébriques, pouvez-vous rétablir l'énoncé qui manque ?

Ce sujet a été proposé à une classe de seconde T .

En transcrivant les problèmes de Diophante en langage actuel, les élèves ont été impressionnés par la rigueur du raisonnement déductif et l'importance que prennent les conjonctions dans la rédaction d'une démonstration. Habitués à l'utilisation de lettres pour les quantités inconnues, de signes d'opérations, de symboles logiques, les élèves ont eu quelques difficultés de compréhension des textes ce qui a suscité les remarques suivantes :

" Diophante dit beaucoup pour ne rien dire."

" Le fait d'être rédigé en français correct l'embrouille et il faut bien le lire afin de comprendre."

Dans la notation du devoir, on a tenu compte de la rigueur du langage. Mais cet exercice de style a su trouver la faveur des élèves. Il est certain que d'autres textes historiques pourraient être mis à leur portée.

Roger Roth (Mulhouse)

Responsable de la publication de "L'OUVERT" : Jean Lefort
24, rue A. Schweitzer
WINTZENHEIM 68000-COLMAR

Impression de "L'OUVERT" : I.R.E.M. ;
Département de mathématiques de l'U.L.P.
10, rue du général Zimmer
67084 - STRASBOURG - CEDEX

Toute correspondance est à envoyer à Jean Lefort.

Calcul pratique de $\log_{10} 2$

RAPPEL : De même que tout nombre réel peut s'écrire sous forme d'un développement décimal illimité, il peut aussi s'écrire, en base deux, sous forme d'un développement "bicimal" illimité qui ne contiendra donc que des 1 et des 0. Par exemple : 10,1011 vaut $2^1 + 0\times2^0 + 2^{-1} + 0\times2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}$ soit en notation décimale : 2,6875 .

Considérons alors le développement binaire illimité de $\log_{10} 2$:

$$\log_{10} 2 = 0,\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_i \ldots\ldots \qquad \text{où les } \alpha_i \text{ sont dans } \{0 , 1\}$$

$$= \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_i}{2^i} + \ldots\ldots$$

et il est clair que ce nombre est compris entre 0 et 1 d'après l'étude de la fonction $\log_{10}$. En prenant l'exponentiel de base 10 des deux membres, on écrit :

$$10^{\log_{10} 2} = 2 = 10^{\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_i}{2^i} + \ldots}$$

Le dernier membre (ainsi que toute expression de la même forme) est encadré par 1 et 10. Elevons au carré les deux membres de la dernière égalité :

$$4 = 10^{\alpha_1} \times 10^{\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \ldots \frac{\alpha_i}{2^{i-1}} + \ldots} = 4 \times 1$$

Comme 10^{α_1} vaut 1 ou 10 et que le deuxième facteur est compris entre 1 et 10 il vient nécessairement :

1º) $10^{\alpha_1} = 1$, donc : $\alpha_1 = 0$

2º) $4 = 10^{\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_i}{2^{i-1}} + \ldots}$

Elevons au carré les deux membres de la dernière égalité

$$16 = 10^{\alpha_2} \times 10^{\frac{\alpha_3}{2} + \ldots \frac{\alpha_i}{2^{i-2}} + \ldots} = 1,6 \times 10$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, il en résulte :

1º) $10^{\alpha_2} = 10$, donc : $\alpha_2 = 1$

2º) $1,6 = 10^{\frac{\alpha_3}{2} + \ldots + \frac{\alpha_i}{2^{i-2}} + \ldots}$

Elevons au carré ....

A chaque étape, une élévation au carré nous conduit à :

* si le résultat à gauche dépasse 10 le α_i correspondant est égal à 1.
* sinon, le α_i correspondant est égal à 0 .

Il suffit d'écrire un tableau de nombre à trois colonnes :

<u>Dans la première colonne</u> : un nombre s'obtient par élévation au carré du nombre précédent et division éventuelle par 10 pour le ramener entre 1 et 10 . Le premier nombre écrit est 2 .

<u>Dans la deuxième colonne</u> : celle des α_i on place un 1 s'il y a eu division par 10 dans la première colonne, un 0 sinon.

<u>Dans la troisième colonne</u> : un nombre s'obtient par division par deux du nombre précédent. Le premier nombre écrit est 1 . On raye ensuite ceux qui se trouve en face d'un α_i nul.

La valeur de $\log_{10} 2$ se lit en base deux dans la colonne des α_i de haut en bas, ou en base dix en faisant la somme des valeurs non barrées de la troisième colonne.

2	0,	~~1,~~
4	0	~~5~~
1 6	1	2 5
2,5 6	0	~~1 2 5~~
6,5 5 3 6	0	~~6 2 5~~
4 2,9 4 9 6 7 2 9 6	1	3 1 2 5
1 8,4 4 6 7 4 4 0 7 . .	1	1 5 6 2 5
3,4 0 2 8 2 3 6 6 8 . .	0	~~7 8 1 2 5~~
1 1,5 7 9 2 0 8 9 2 . .	1	3 9 0 6 2 5
1,3 4 0 7 8 0 7 9 2 . .	0	~~1 9 5 3 1 2 5~~
1,7 9 7 6 9 3 1 3 2 . .	0	~~9 7 6 5 6 2 5~~
3,2 3 1 7 0 0 5 9 7 . .	0	~~4 8 8 2 8 1 2 5~~
1 0,4 4 3 8 8 8 7 5 . .	1	2 4 4 1 4 0 6 2 5
1,0 9 0 7 4 8 1 2 2 . .	0	~~1 2 2 0 7 0 3 1 2 5~~
1,1 8 9 7 3 1 4 6 6 . .	0	~~6 1 0 3 5 1 5 6 2 5~~
1,4 1 5 4 6 0 9 6 1 . .	0	~~3 0 5 1 7 5 7 8 1 2 5~~
2,0 0 3 5 2 9 7 3 2 . .	0	~~1 5 2 5 8 7 8 9 0 6 2 5~~
4,0 1 4 1 3 1 3 8 7 . .	0	~~7 6 2 9 3 9 4 5 3 1 2 5~~
1 6,1 1 3 2 5 0 7 9 . .	1	3 8 1 4 6 9 7 2 6 5 6 2 5
2,5 9 6 3 6 8 5 1 0 . .	0	~~1 9 0 7 3 4 8 6 3 2 8 1 2~~ .
6,7 4 1 1 2 9 4 4 0 . .	0	~~9 5 3 6 7 4 3 1 6 4 0 6~~ . .
4 5,4 4 2 8 2 6 1 3 . .	1	4 7 6 8 3 7 1 5 8 2 0 3 . .
2 0,6 5 0 5 0 4 4 7 . .	1	2 3 8 4 1 8 5 7 9 1 0 1 . .
4,2 6 4 4 3 3 3 4 9 . .	0	~~1 1 9 2 0 9 2 8 9 5 5 0~~ . .
1 8,1 8 5 3 9 1 7 9 . .	1	5 9 6 0 4 6 4 4 7 7 5 . .
3,3 0 7 0 8 4 7 4 6 . .	0	~~2 9 8 0 2 3 2 2 3 8 7~~ . .
1 0,9 3 6 8 0 9 5 2 . .	1	1 4 9 0 1 1 6 1 1 9 3 . .

Ainsi $\log_{10} 2 = 0,01001101000100000010011010 1 . .$

en base deux. Et l'addition des nombres non barrés à droite donne :

$$\log_{10} 2 = 0,3010299950838\ldots$$

il aurait fallu trouver : 0,3010299956 64....

9 décimales seulement sont exactes ; j'ai manqué de patience !

VIRICEL
d'après une idée de J.M. Becker

LE SOUTIEN ; TOUT LE SOUTIEN ; RIEN QUE LE SOUTIEN !

1º) Sur le plan psychologique et affectif : (...) Sans aller jusqu'au viol de la personnalité, le soutien va permettre d'établir de nouveaux rapports dans la classe cette fois. (...)

2º) Sur le plan de l'organisation : (...) Sera-ce temps perdu que leur apprendre (aux élèves) à avoir dans la giberne tout ce qu'il faut et rien que ce qu'il faut ? (...)

3º) Sur le plan pédagogique

Oserai-je rappeler que tous les élèves n'ont ni un rythme standard, ni un appétit identique. Le Soutien est un moyen d'en tenir compte. Dire qu'on perd 1 h. n'est pas sérieux (se mettre au travail 5 mn. en retard le matin, après la récréation, à 14 h. et après 16 h. représente 1 h.1/2 /semaine !!).

- Le cours face à toute une classe permet-il d'interroger ou faire parler tous les élèves ? (Le soutien le permet). (...)

- Le soutien (3 h. sur 24) ne remplace-t-il pas avantageusement les 10 % ?

- Pour effectuer en fin d'année une sortie (dont l'intérêt pédagogique n'est pas toujours évident, se préoccupe-t-on toujours des instants perdus ? (...)

4º) En conclusion, (...) il y a des moments où maître et élèves abordent ensemble une notion nouvelle, il en est où le maître ne se sent pas indispensable sur l'instant, c'est l'approfondissement, il en est enfin où maître et élèves seront un peu plus que maître et élèves : c'est le soutien. (...)

Extraits d'une note de service d'un principal
d'un collège d'Alsace.

Problème(s) politique(s)

Fin 76 - début 77, un professeur de mathématiques de l'Académie, membre de l'A.P.M. demandait à celle-ci de publier dans le Bulletin national un article qu'il avait écrit, intitulé "Mathématiques et Idéologie". Pour illustrer son propos, l'auteur y proposait des énoncés qu'il qualifiait d'"anti-exercices". A cette demande, Paul-Louis Hennequin, alors président de l'A.P.M., répondait le 10 mars 77, par la lettre suivante :

"Votre article "Mathématiques et Idéologie" a été soumis suivant l'usage à trois lecteurs. D'une façon générale, leur avis est opposé à la publication de cet article tel quel car ils estiment que cet article ne répond pas à sont itre et qu'il n'en traite qu'un tout petit aspect baclant les autres en quelques phrases finales.

Toutefois il a semblé intéressant aux rapporteurs d'envisager la publication de quelques textes "d'anti-exercices" du style de ceux de votre article. Pourriez vous nous proposer la rédaction de quelques tels exercices ?"

Par la suite, les énoncés des"anti-exercices" initialement proposés furent diffusés par le S.G.E.N.-C.F.D.T. du Haut-Rhin, avec le commentaire suivant :

"Vous trouverez ci-contre l'énoncé d'un exercice qui a l'étrange propriété d'inquiéter bon nombre de personnes. Un texte contenant ce problème a été proposé à l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public pour publication dans son bulletin ; l'accueil fut plutôt froid et la publication refusée ..."

"L'Ouvert" s'étonne de cette interprétation donnée à la lettre de Paul Louis Hennequin : A ses yeux, celui-ci ne refusait nullement la publication d'énoncés d'"anti-exercices" mais celle de l'article "tel quel" proposé par l'auteur ; ce n'est pas la même chose.

Ce sont les énoncés proposés à l'A.P.M. par ce professeur, que"l'Ouvert" avec l'accord de celui-ci propose à ses lecteurs :

1) Voici un problème concret dit neutre (Bac. A 76, Toulouse) :

Un capital C_o est placé à la caisse d'épargne au taux de 6% le 1er Janvier 1976. Chaque année ce capital est augmenté des intérêts qu'il produit. On désigne par C_n la valeur du capital disponible au bout de n années.

i) Exprimer C_n en fonction de C_o et de n .

ii) Quel sera le capital disponible le 1er Janvier 1990 sachant que C_o est 10 000 ?

iii) A quelle date le capital disponible sera-t-il le double du capital initial ?

2) Voici un problème qui a inquiété suffisament de personnes pour aboutir sur le bureau du Ministre (cf Le Monde de l'Education, Janv. 78 : "Problèmes pour un 1er mai")

<u>1ère partie</u> : Début janvier 1976 un O.S., payé au SMIC, mais ayant réussi à économiser 1 000 francs souhaite acheter un appareil photo dont le prix était exactement de 1 000 F. Après réflexion, et par prudence, il décide de retarder cet achat et de déposer cette somme à la banque au taux de 6% . Mais à la fin de l'année, il prend la décision de retirer la somme déposée afin d'acheter l'appareil désiré. Il est d'abord agréablement surpris :

i) Quelle somme reçoit-il de la banque ?

ii) Mais il est déçu quand le vendeur lui annonce que l'appareil a augmenté de 12% . Quelle somme lui manque-t-il ?

iii) Combien d'heures de travail cette différence représente-t-elle sachant qu'il gagne 15 F. de l'heure ? (par un travail au noir qu'il effectue pour un banquier qui restaure son château ...)

iv) Où est passée la somme qui lui manque ?

<u>2ème partie</u> : Début janvier 1976, un banquier décide d'acheter un immeuble de 1 000 000 . (Pour qu'il puisse disposer de cette somme, il suffit, par exemple, que mille O.S. déposent chacun 1 000 F. à sa banque). Fin décembre 1976, il décide de revendre cet immeuble à un prix 12 % supérieur à son prix d'achat pour tenir compte de l'inflation (qui a dépassé 10%) et pour couvrir ses menus frais.

i) A quel prix revend-il son immeuble ?

ii) Sachant qu'il utilise cet argent pour rembourser mille clients (des O.S. justement...) qui veulent récupérer en cette fin d'année la somme de 1 000 francs qu'ils avaient déposée en janvier, majorée de 6%, quelle somme lui reste-t-il ?

iii) A qui a-t-il pris cette somme ?

iv) En supposant qu'avec cette somme il restaure son château en embauchant des O.S. pour un travail au noir payé 15 francs de l'heure, combien d'heures peut-il les faire travailler ?

v) Moralité ? ...

L'aspect caricatural de ce problème n'échappera à personne et c'est sans doute là son plus gros défaut :

-- Le banquier tout puissant (style XIXème siècle) semble pouvoir mettre dans sa poche le dépôts des clients. Nous devons lui accorder une certaine honnêteté et supposer qu'il a obtenu un prêt de sa banque . Et si le banquier symbolise un groupe bancaire pourquoi ne pas écrire tout simplement "une banque" ; celle-ci pourrait restaurer le château qui servira pour ses oeuvres sociales (sic !).

-- Pourquoi faire travailler l'ouvrier au noi ? Pour ternir l'image du banquier ? l'O.S. n'est-il pas également coupable d'accepter un tel travail ?

-- On donne l'impression que la bonne référence c'est l'heure de travail et non la monnaie. Malheureusement si les prix augmentent régulièrement en valeur nominale, ils baissent tout aussi régulièrement exprimés en heure d'O.S. (- 50 % en 20 ans).

-- Les questions I iv et II iii sont pratiquement insolubles par des collègiens. est-ce pégagogiquement bon ? Quant à la question II v , très intéressante, ne pourrait-on lui trouver un autre libellé ?

Mais tel qu'il est ce problème a le mérite d'inciter le lecteur à se poser des questions. Encore faudra-t-il pouvoir y répondre correctement, c'est-à-dire en connaisseur des théories économiques. "L'Ouvert" ne semble pas le lieu idéal pour organiser un débat sur ce sujet mais pourrait publier des textes de problèmes d'inspiration économique mettant en évidence quelques lois du marché. A ce propos nous signalons l'excellent ouvrage de vulgarisation que sont les deux numéros (185 et 186) des CAHIERS FRANCAIS relatif à l'inflation et édités par la documentation française.

Pour une mathématique imaginative et joyeuse

La presse à sensation dépeint avec complaisance l'ennui que dégage les mathématiques lorsqu'on les enseigne d'une façon dogmatique, formelle et répressive. Elle n'a rien inventé. Voici comment Victor Hugo dénonçait les méfaits d'une "pédagogie" que l'on subissait ver 1818 :

... Après l'abbé Thuet, je maudissais Bezout, (*)
Car outre les pensums où l'esprit se di sous,
J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombres ! Enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtais du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux ;
On me faisait de force ingurgiter l'algèbre ;
On me liait au fond d'un Boisbertrand funèbre ; (*)
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec
Sur l'affreux chevalet des X et des Y. ....

"A propos d'Horace" ; "Les contemplations".

Hélas ! Les classes où l'on s'ennuie ferme, comme jadis, ne manquent pas. L'enseignement s'y réduit au dressage, au rabachage et à la mémorisation de règles qu'il faut appliquer sans comprendre. Mais - fait nouveau - on peut visiter maintes classes, où tous les élèves participent activement à un travail d'intelligence et d'imagination. Et il n'est pas rare que des jeunes déclarent : "Les maths, c'est chouette !"

Malheureusement les journalistes ignorent cette transformation, cette promotion de la mathématique au rang des disciplines culturelles. Il est tellement tentant de relater les incidents scolaires qui surgissent lors d'un cours, où l'on dicte un manuel (en omettant les démonstrations) sans corriger les fautes d'impression.

C'est le témoignage opposé que l'I.R.E.M. de Strasbourg essaya d'apporter en relevant un défi, périlluex au départ. Il s'agissait de prouver qu'il était possible de mobiliser, par un mercrdi ensoleillé de printemps, une masse de jeunes, en leur proposant de faire des maths pour le plaisir. On rassemble parfois des rallyes de natation, des "premiers pas" cyclistes ; on organise des randonnées collectives, des pélerinages. Pourquoi pas un rallye mathématique, où l'on se mesurerait avec des problèmes intéressants dans une ambiance décontractée ?

Les résultats du pari, qui semblait perdu d'avance, a dépassé toutes les prévisions. En 1975, on compté 332 participants. En 1976 et 1977 ils étaient 625 et 917 à essayer de résoudre les problèmes du Rallye mathématique d'Alsace. Enfin la présence de plus de mille concurrents au rallye 1978 commence à poser de sérieux problèmes d'organisation ! Parallèlement, des expériences ont commencé à se développer à l'intérieur (Besançon, Rennes).

Pour qu'une telle aventure réussisse, il fallait prendre le contre-pied de la routine scolaire et de l'ambiance frustrante des examens : Passer le bachot ou le B.E.P.C. n'est jamais une activité joyeuse. On ignore quel est l'"irémien" de génie qui eut l'idée décisive : le rallye se déroulerait par "binômes", par groupe de deux concurrents, dans une thurne munie d'un tableau noir, où l'on pourrait discuter à voix haute, avec son coéquipier, sans être astreint à se taire, vissé sur une chaise, avec un surveillant dans le dos !

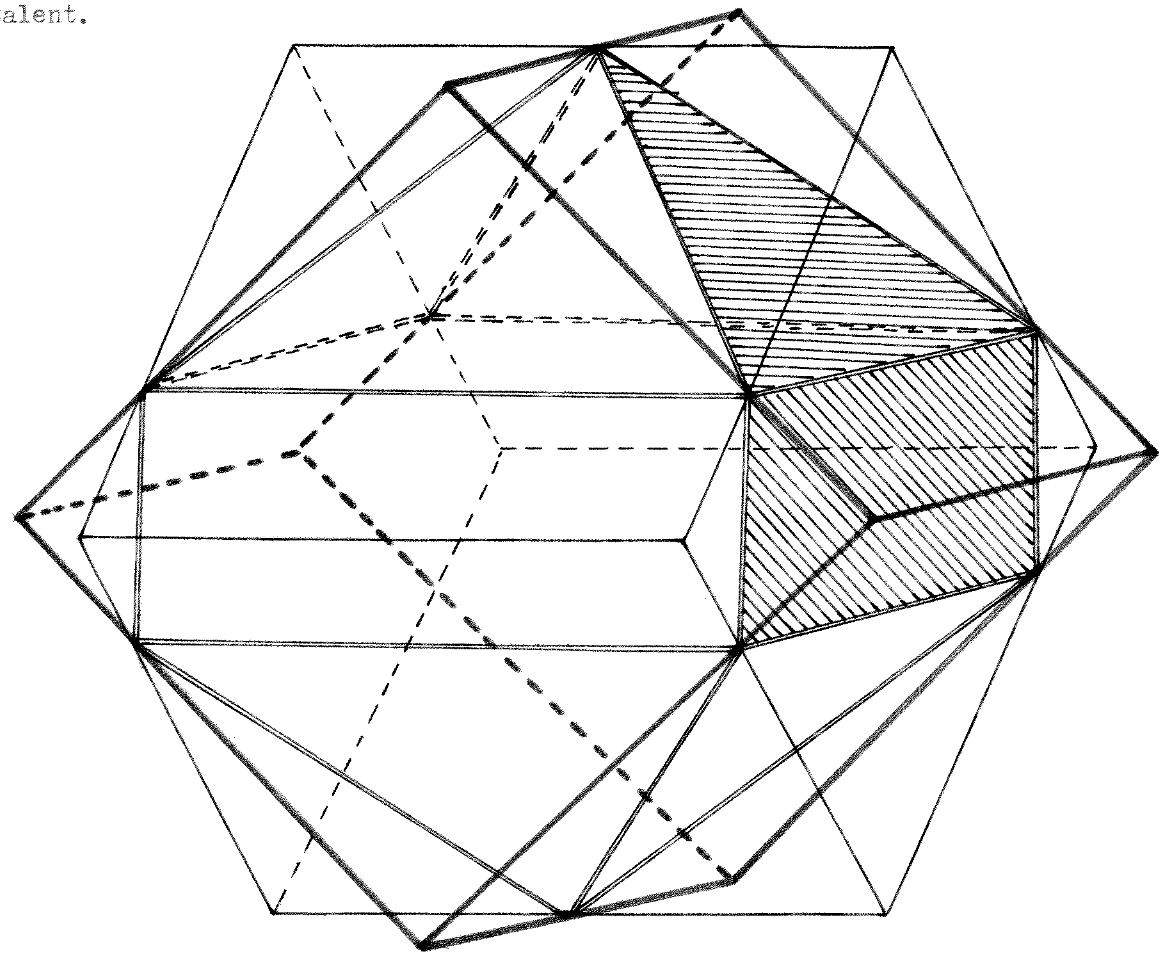
Les critères d'appréciation seraient basés sur la pédagogie du succès. On sait que dans un examen, l'essentiel est d'éviter de commettre des fautes qui enlèvent des points par contre on est dispensé de faire preuve d'invention, puisque toutes les idées à mettre en oeuvre sont fournies par l'énoncé qui indique la marche à suivre. Le rallye prend le contre pied. Aucune conséquence à redouter, si l'on n'arrive pas à résoudre un problème, et même, si l'on écrit quelques énormités. Le jury recouvre celles-ci d'un voile pudique, et braque l'éclairage sur toutes les idées originales ou fructueuses. On prend en compte ce qui est bien et on oublie ce qui est médiocre.

L'émulation n'y prend pas l'apparence d'une concurrence féroce. On s'efforce d'éviter d'établir un classement. Résoudre brillament un seul problème est une bonne performance ; faire des progrès significatifs sur les trois énoncés en est une autre ; digresser sur un problème intéressant que le jury n'a pas prévu est un effort bien venu. Ces performances ne sont pas comprarables et sont prises en considération, sans que l'on cherche à établir une hiérarchie. Evidemment, une copie qui résoud deux problèmes est trivialement meilleure que celle qui n'en résoud qu'un seul, sans fournir une plus belle solution.

Les énoncés sont aussi éloignés que possible des exercices de bachot, découpés en une succession de questions de routine, laissant peu de chance d'aboutir à une compréhension globale. Au contraire, les formulations sont concises et même parfois volontairement vague. C'est aux élèves qu'il appartient de trouver le niveau de rigueur qui revient à chaque problème, de lever les imprécisions ou même les ambiguïtés que pourraitent receler l'énoncé. Par exemple, en présentant une proposition à démontrer, la jury du rallye pourra rédiger ainsi :"Soit un intervalle ...." sans préciser s'il s'agit d'un intervalle ouvert ou fermé. Parfois la précision n'apporte rien d'important ; dans d'autres cas, les élèves devraient découvrir que ce détail est important . Il peut arriver que l'ambiguïté donne lieu à deux interprétations. Les participants sont alors invités à le dire, et à choisir l'interprétation qui semble déboucher sur le problème le plus intéressant. Si les deux variantes offrent de l'intérêt, ils pourront choisir arbitrairement l'une ou l'autre ; ou, s'ils sont inspirés, les traiter toutes les deux, en évitant de s'apesantir sur les trivialités.

Les problèmes choisis pourraient se résoudre sans recourir à des informations très particulières. Le mieux est de ne faire appel qu'à des connaissances acquises de longue date, sans allusion trop précise à des points nouveaux du programme de la classe. Le rallye est une épreuve d'ingéniosité ; ce n'est pas un test de connaissance ; Et on n'hésitera pas à poser une question sur la Lune, même si la Cosmographie a disparu des programmes à condition de n'exiger que des connaissances que n'importe qui peut connaître.

On s'est efforcé d'inclure dans chaque tercet de problème, un énoncé invitant à mathématiser une situation concrète. C'est une activité scientifique très enrichissante, trop négligée de nos jours. De même on invite souvent les candidats à effectuer un beau dessin. C'est une performance qui permet à certains de faire valoir leur talent.



Il est inévitable que dans une manifestation de cette nature, on ne recueille que peu de copies valables sur le plan mathématique. Les organisateurs souhaitent évidemment que le plus grand nombre de participants obtiennent au moins un succès parteil... Mais l'espérience nous a montré qu'à l'issue du Rallye, de nombreux concurrents affirment n'avoir pas abouti, et cependant prétendent avoir passé une bonne après-midi à chercher des questions enrichissantes. Ils se déclarent prêts à recommencer. C'est là la réussite essentielle. Le rallye veut prouver que l'exercice de l'intelligence est passionnant ; qu'il est apprécié par les jeunes qui préfèrent souvent passer quelques heures à réfléchir (même si l'effort n'est pas couronné de succès), qu'à se vautrer dans un fauteuil devant la téloche.

Des critiques grincheux vont cependant grommeler le mot "sélection". Le rallye tourne le dos à cette pratique répressive, puisqu'une performance médiocre ne met jamais l'avenir en danger (alors qu'un échec au bac peut être catastrophique pour certains candidats). Au contraire le Rallye est un instrument de promotion : il permet à certains de prendre conscience de leur valeur. On notera que certains lauréats du rallye se recrutent dans les couches socio-culturelles que la sélection tente généralement d'éliminer.

Mais le reproche le plus fréquent est proféré, en grognant le mot "élitisme" . Rappelons que ce mot désigne une pratique anti-culturelle.qui néglige le développement de la masse de la population. On se contente de "chauffer" une équipe restreinte de super-champion, d'en faire des vedettes, que les populations peuvent cotempler de loin.

Si l'on se contente de dire que le rallye permet à tous les esprits inventifs de manifester des qualités intellectuelles qui ne se déploient généralement pas dans le conformisme nivélateur, nous sommes alors résolument élitistes ; mais notre élitisme est, si l'on peut dire, un élitisme de masse !

VIVE L'ELITISME DE MASSE !

G. Glaeser

Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace

N.D.L.R. L'Ouvert publie ici les textes des sujets du rallye mathématique d'alsace depuis sa création en 1974. Le rallye a pour but de développer l'esprit de recherche des élèves. Cela ne peut se faire que si les professeurs possèdent également cet esprit de recherche, c'est-à-dire s'ils n'hésitent pas à "sécher", y compris devant leurs élèves, sur des questions souvent très spécialisées qui n'ont qu'un lointain rapport avec le programme. Une telle attitude, bien comprise, ne peut qu'augmenter le respect des élèves envers leur professeur.

Il n'est donc pas question de publier en outre des corrigés modèles ou des indications de solutions. Ce serait tuer dans l'oeuf toute velléité de recherche. Il vaut mieux collaborer avec des collègues ou avec les organisateurs du rallye, madame Ramis et monsieur Iss qui se tiennent à votre disposition, ou, pourquoi pas, avec ses élèves pour résoudre les exercices et ne pas se décourager si l'on obtient qu'un résultat partiel. Combien de grandes découvertes mathématiques sont dues à l'oeuvre de plusieurs savants, chacun reprenant les travaux de ses prédécesseurs !

RALLYE 1974

(En 1974, année de la création du Rallye, les sujets proposés étaient communs aux élèves de Première et de Terminale.)

1) Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, peuvent-ils être trois termes d'une même progression arithmétique ?
(On rappelle que si a et h sont deux nombres réels, la progression arithmétique de raison h et de premier terme a est la suite dont les termes sont $u_n = a + nh$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2) Si S est un sous ensemble non vide d'un espace affine euclidien de dimension 3 possédant la propriété :
"L'intersection de S avec tout plan affine E est vide ou est un cercle de rayon éventuellement nul",
peut-on affirmer que S est une sphère ?

3) Etant donné un nombre entier naturel N quelconque différent de zéro, on effectue les opérations suivantes :
- on écrit N dans le système décimal,
- on calcule la somme des carrés de ses chiffres,
- on écrit le nombre obtenu dans le système décimal et l'on recommence ces opérations à partir de ce dernier nombre, etc...

Exemple : N = 1 0 8 5 9 4 2

$$1^2 + 0^2 + 8^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2 + 2^2 = 191$$

$$1^2 + 9^2 + 1^2 = 83.$$

Montrer qu'au bout d'un nombre fini de telles opérations on obtient :
- ou bien le nombre 1,
- ou bien le nombre 145 et à partir de ce nombre, le cycle :
145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89.

RALLYE 1975

Classe de Première

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sqrt{x + 4 - 4\sqrt{x}} + \sqrt{x + 9 - 6\sqrt{x}} = 1.$$

(2) Une usine textile stocke de la moquette par rouleaux. Les bandes de moquette sont enroulées sur des cylindres en bois de 20 cm de diamètre. L'épaisseur de la moquette est 1 cm. Donner (en cm) un encadrement de la longueur d'une bande de moquette pour que le rayon du rouleau correspondant soit 50 cm à 0,5 cm près : on indiquera l'erreur maximum que l'on peut se permettre en mesurant la longueur de la bande.

(3) (Ce problème concerne un plan affine euclidien.)
On donne quatre points du plan, non cocycliques et tels que toute droite contienne au plus deux de ces quatre points.
Trouver les cercles équidistants de ces quatre points.
(La distance d'un cercle Γ à un point A est la plus courte des longueurs AM lorsque M parcourt Γ).

Classe de Terminale

(1) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^*$ l'équation :

$$1 + \cos^2 ax = \cos 2\pi x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

admet-elle une infinité de solutions ?

(2) Démontrer que, parmi sept entiers non nuls consécutifs, il en existe toujours au moins un qui est premier avec chacun des six autres.

(3) (Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension trois.)
Soient A et B deux points d'une sphère dont D_1 et D_2 sont deux diamètres distincts.

Imaginer un cas de figure où il n'est pas possible de passer de A à B par deux rotations seulement, l'une d'axe D_1, l'autre d'axe D_2.

Montrer que l'on peut passer de A à B par une suite finie de rotations effectuées alternativement autour de D_1 et D_2.

(Autrement dit : montrer qu'il existe des points $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ tels que pour tout i, on passe de A_i à A_{i+1} par une rotation convenable d'axe D_1 ou D_2.)

RALLYE 1976

Classe de Première

(1) Problème de "la règle trop courte" :
Un dessinateur dispose, pour seuls instruments, d'un double-décimètre de trés bonne qualité et d'un crayon. Sur sa feuille de dessin sont marqués deux points A et B dont la distance peut être évaluée grossièrement entre 50 et 70 cm.
Comment peut-il se débrouiller avec ce matériel pour tracer le segment de droite [A,B] et le mesurer avec la précision que lui permet son double décimètre ?

(2) Soit a, b, c trois nombres réels non nuls. Trouver tous les triplets (x,y,z) de réels vérifiant le système des trois équations suivantes :

$$y^2 + z^2 = axyz \qquad z^2 + x^2 = bxyz \qquad x^2 + y^2 = cxyz.$$

(3) (Ce problème concerne le plan affine usuel.)
Relativement à un repère cartésien du plan, on donne cinq points à coordonnées entières, tous distincts. Montrer qu'il existe au moins deux de ces points formant un segment (non réduit à un point) dont le milieu soit aussi un point à coordonnées entières.

Classe de Terminale

(1) Démontrer la congruence :

$$2^{147} - 1 \equiv 0 \mod (343) \quad \text{(autrement dit : 343 divise } 2^{147} - 1\text{)}.$$

(2) Démontrer la relation suivante entre réels :

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}(5\sqrt{5}+11)} - \sqrt[5]{\frac{1}{2}(5\sqrt{5}-11)} = 1.$$

(3) (Ce problème concerne l'espace affine euclidien usuel de dimension 3.)

DONNEES :

A Sur un carré (A,B,C,D) on fait la construction suivante :
Soit O le centre du carré et I', J', K', L' les milieux respectifs de [A,B], [B,C], [C,D], [D,A]. Puis on considère le carré (I,J,K,L), déduit de (I',J',K',L') par l'homothétie de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$.

B On donne maintenant un cube, dont les arêtes ont la longueur a ($a > 0$). Sur chacune des six faces, on procède à la construction indiquée en A ; les six carrés analogues à (I,J,K,L) forment donc un ensemble de 24 points. On désigne par $\mathcal{P}$ le polyèdre convexe ayant pour sommets ces 24 points. ($\mathcal{P}$ est appelé : le polyèdre de Lord Kelvin associé au cube).

C Sur le cube donné en B on considère une face (A,B,C,D) ; soit $\mathcal{T}$ le tétraèdre régulier inscrit dans le cube et dont A et C sont deux sommets.

QUESTION

Faire une figure claire, sur laquelle $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ soient représentés de manière à rendre aisé le calcul (en fonction de a) du volume de chacun des solides $\mathcal{P} \cup \mathcal{T}$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{T}$.
Calculer ces volumes.

N.B. : On rappelle que le volume V d'une pyramide de hauteur h limitée par un polygone de surface S, est $V = \frac{1}{3}Sh$.

RALLYE 1977

Classe de Première

(1) Dans un terrain minier des plaines du Nord, ont été creusées deux galeries rectilignes obliques et non situées dans un même plan. On désire les joindre par une galerie rectiligne horizontale souterraine la plus courte possible. Le problème admet-il une solution ? Si oui, où et dans quelle direction doit-on commencer à creuser ?

(2) (Cette question concerne le plan affine euclidien usuel.)
Un disciple de Pythagore vint un jour, tout heureux, lui annoncer une découverte :
"Je viens, lui dit-il, d'inventer une construction à la règle et au compas de l'heptagone régulier convexe (polygone régulier convexe à sept côtés).
Voici mon procédé : Je trace un cercle Γ, et un triangle équilatéral ABC inscrit dans Γ, puis à partir de A comme centre, je mène un arc de cercle de rayon égal à la moitié de la longueur AB : cet arc vient couper Γ en D. Je dis que [A,D] est le côté d'un heptagone régulier convexe inscrit dans Γ".
Que pensez-vous de la valeur scientifique de la découverte de l'élève de Pythagore ?
Justifiez votre réponse par une démonstration.

(3) Pour tout réel positif x, on désigne par $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x.
On donne deux entiers naturels non nuls p et q, avec $q \geq 2$, qui soient premiers entre eux. (Cela signifie que le seul nombre entier qui divise à la fois p et q est 1.)
Démontrer que les deux nombres entiers A et B définis ci-dessous sont égaux :

$$A = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)$$

$$B = \left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \dots + \left[\frac{kp}{q}\right] + \dots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] = \sum_{k=1}^{q-1}\left[\frac{kp}{q}\right]$$

Classe de Terminale

(1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de FIBONACCI : c'est, par définition, la suite d'entiers naturels que l'on obtient par récurrence à l'aide des relations :

$$U_0 = U_1 = 1 \text{ ; et, pour tout } n \geq 2,\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2}.$$

Démontrer que tout entier naturel non nul N peut être représenté d'une manière et d'une seule dans la forme :

$$N = U_{n_2} + \dots + U_{n_k},$$

avec $k \geq 1$ et $n_{j-1} \geq n_j + 2$ pour $j = 2, j = 3, \dots, j = k$.

(2) On donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2 ; déterminer le plus grand diviseur commun aux $n - 1$ nombres

$$C_n^1,\ C_n^2,\ \dots,\ C_n^{n-1},\ \text{(c'est-à-dire : aux } C_n^k,\ 1 \leq k \leq n-1).$$

(Le nombre C_n^k est le coefficient binomial, dont on rappelle la valeur :

$$C_n^k = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad .)$$

(3) Cette question concerne le plan affine euclidien usuel P.
Dans P, on donne deux cercles distincts Γ_1 et Γ_2 ; construire à l'aide de la règle et du compas seuls les points M de P ayant
la propriété suivante :
Il existe une tangente Δ_1 à Γ_1 passant par M, touchant Γ_1 en le point T_1, et une tangente Δ_2 à Γ_2 passant par M, touchant Γ_2 en T_2, telles que Δ_1 et Δ_2 soient orthogonales et que les longueurs des segments $[M, T_1]$ et $[M, T_2]$ soient égales. (1)

(1) Par définition, on dit qu'une tangente Δ à un cercle Γ touche Γ au point T pour exprimer que T est le point de contact de Γ et de Δ.

RALLYE 1978

Classe de Première

(1) On considère l'ensemble des entiers $1, 2, 3, \dots, n$. Combien admet-il de parties de k éléments (k entier donné) ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs ?

(2) On donne n chiffres $a_1, a_2, \dots a_n$ arbitraires. Montrer qu'il existe un entier naturel tel que l'écriture décimale de sa racine carrée a pour premiers chiffres après la virgule $a_1, a_2, \dots, a_n$ pris dans cet ordre.

(3) Un bloc de bois a la forme d'un parallélépipède rectangle ; sur trois de ses faces ayant un sommet commun, on marque un point. On se propose de scier le bloc de bois suivant le plan passant par ces trois points.
Trouver une construction géométrique du contour de la section sur le parallélépipède (on ne demande pas de discuter les différentes formes de la section obtenue suivant la position des trois points).

Classe de Terminale

(1) Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, on donne deux cercle C_1 et C_2 de même rayon et d'axes non coplanaires.
Déterminer toutes les rotations qui transforment C_1 en C_2.

(2) Soit p un nombre entier premier supérieur ou égal à 5 ; on écrit le rationnel

$$S_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

sous la forme irréductible

$$S_p = \frac{A_p}{B_p}$$

($A_p \in \mathbb{N}^*$, $B_p \in \mathbb{N}^*$, A_p et B_p premiers entre eux).
Démontrer que A_p est divisible par p^2.

(3) Dans une fonderie, une cuve ayant le forme d'un cube ouvert à sa face supérieure, est mobile autour d'un axe horizontal passant par les centres de deux faces opposées. On fait couler le métal en fusion, qui remplit la cuve, en inclinant celle-ci ; on admettra que lors de l'écoulement, la surface du liquide reste plane est affleure le bord de la cuve. Sachant que l'écoulement se fait à débit constant, déterminer la relation liant le temps et l'angle d'inclinaison de la cuve. Représenter graphiquement cette relation.

ORIENTATION-SELECTION

Dans le "texte d'Orientation 1978", publié dans le Bulletin n° 314 de juin 1978, l'A.P.M.E.P. dénonce, une fois de plus, le fait que les mathématiques constituent "le principal instrument d'orientation et de sélection par l'échec". Loin de nous suffire, ce texte nous incite à agir et c'est dans ce but que le Bureau National a décidé la création d'une Commission "Orientation-Sélection".

En accord avec le Bureau National, je propose de former un groupe de travail dans le Bas-Rhin*, avec tous ceux qui sont préoccupés par les graves problèmes que pose l'orientation dans l'enseignement, et auxquels ils sont implicitement ou explicitement confrontés.

Il s'agirait, par exemple de :

1° Rassembler le maximum de documents sur l'orientation et la sélection dans les faits, et en particulier, le rôle qu'y jouent les mathématiques (avec l'aide des conseillers d'orientation, des services ONISEP, des IREM, etc...) :

a) documents statistiques : par exemple, pourcentages de passages de 5e en 4e, de 3e en 2e (différentes sections), de 2e C en 1ère C, suivants les établissements.

b) Sujets de mathématiques à divers examens et concours aux :
- Baccalauréats, BEPC
- Examens d'appel ou d'entrée en 2e
- Concours de recrutement : SNCF, école d'infirmière, P et T, Ecoles de commerce, etc...
- Examens universitaires divers.

c) Comment sont vécues des situations d'orientation dans un établissement, par les élèves, les professeurs (de maths, en particulier), l'administration des parents d'élèves.

d) Ce qui est dit sur cette orientation : articles de journaux, livres, recherches.

2° Etudier ces documents et en tirer les conclusions qui s'imposent ; les critiquer avec l'idée d'essayer de déterminer les responsabilités ou plutôt auprès de qui et à quels moments il y a possibilité d'action pour lutter contre ce que dénonce l'A.P.M.E.P.

P.S. "dans les Bas-Rhin" pour limiter les déplacements. Il va sans dire que si des collègues du Haut-Rhin étaient intéressés, ils sont cordialement invités à moins qu'ils ne préfèrent former un groupe de travail sur le Haut-Rhin. Nous pourrions alors travailler "de concert".

3° Faire des propositions d'action à la départementale, à la Régionale, aux instances nationales de l'A.P.M.E.P. : intervention auprès de l'administration, information des collègues, diffusion d'informations par la presse, etc... etc...

Une première réunion de ce groupe de travail aura lieu

le 10 janvier 1979 à Sélestat de 14 heures à 16 heures

chez Monsieur Neumayer - Rue de Hunawihr

et le

le 24 janvier 1979 en Salle de Séminaire de l'I.R.E.M à 17 heures.

Michel De COINTET

Vous trouverez en vente à la bibliothèque de l'IREM les anciennes brochures de l'A.P.M. ainsi que les plus récentes (Mots IV, Pavés et bulles, Calculateurs programmables et algèbre de 4e, Géométrie au premier cycle - Tome 2).

La bibliothèque est ouverte à tous les professeurs de l'Académie, du lundi au vendredi de 8h à 11h45 le matin, et de 14h à 16h45 l'après-midi. Vous pourrez emprunter des ouvrages très variés, des manuels*, les publications des autres IREM, des périodiques et des jeux.

(* du début du siècle à nos jours.)