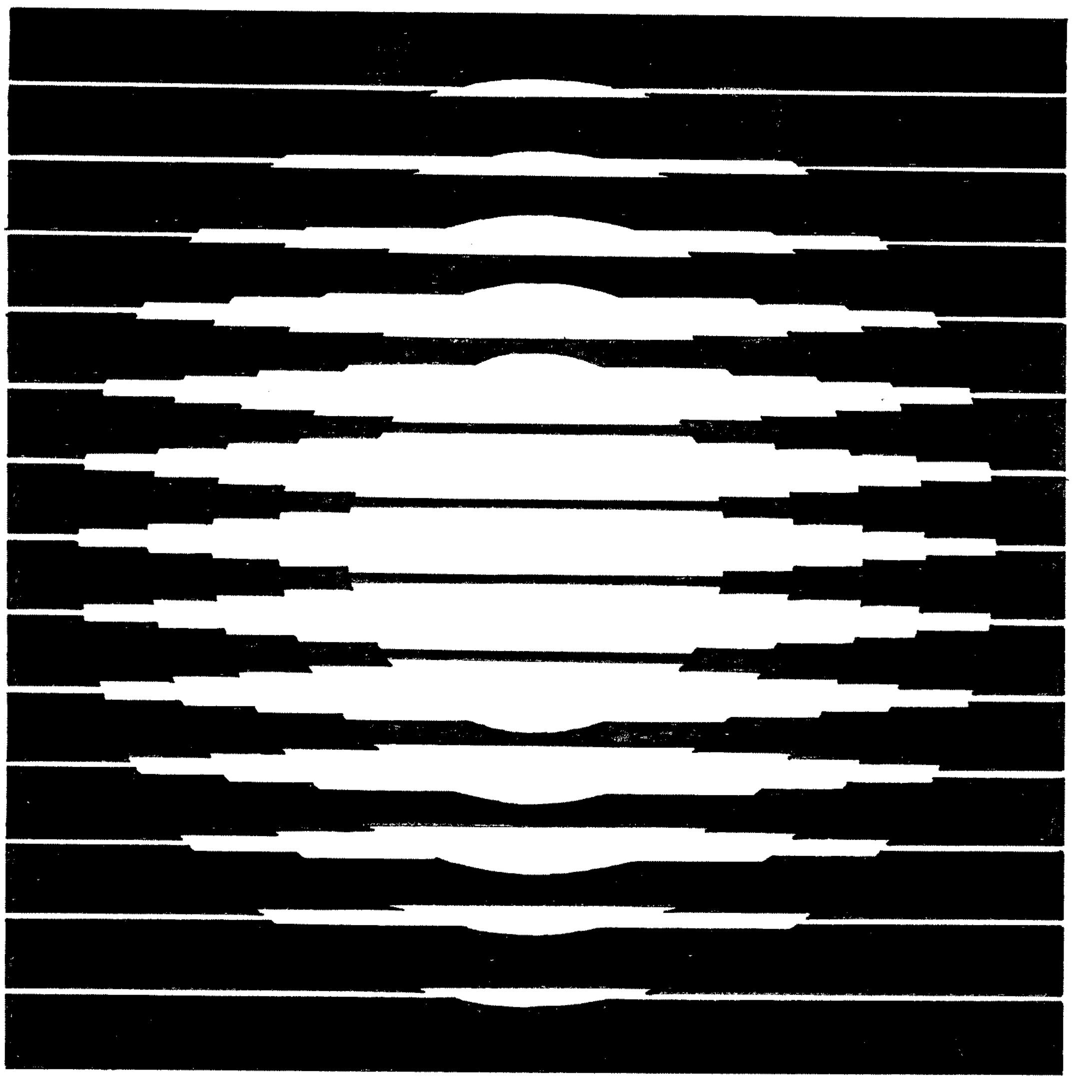
l'ouvert n°20

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG - JAN. 80



NOTRE COUVERTURE : D'après Vasarely :
"Capella 1 , 1964 huile 200 x 100 cm."
Construction à la règle et au compas .
Certains pourront voir des ellipses et
ils n'auront pas tort.

SOMMAIRE

A propos du questionnaire

La communication entre les rédacteurs d'une publication et les lecteurs se fait toujours très mal. Les lecteurs comprennent-ils les motivations des rédacteurs, les rédacteurs devinent-ils les sujets d'intérêt des lecteurs ? Non, en général. Quand une publication est vendue, l'indice de vente, le nombre d'abonnements... sont des indications sérieuses sur le degré d'adéquation entre les désirs des uns et ceux des autres. Mais pour "L'Ouvert" cela n'existe pas. Bien sûr, l'académie est suffisamment peu étendue pour que le "bouche-à-oreille" fonctionne, ce qui permet aux rédacteurs de connaître certaines réactions de lecteurs. C'est pour essayer d'avoir une opinion un peu plus générale qu'un questionnaire a été glissé dans le dernier numéro.

Nous avons obtenu 56 réponses, soit environ 10 % du nombre d'exemplaires distribués. Nous remercions tous ceux qui se sont donnés la peine d'y répondre. Nous pouvons ainsi mieux cerner les désirs des professeurs de mathématiques d'Alsace et essayer , avec leur aide, d'y répondre.

Voici quelques résultats et commentaires :

I Les renseignements d'ordre personnel nous ont permis de mettre à jour notre fichier. Régulièrement des numéros nous reviennent faute de trouver le destinataire à l'adresse indiquée. Nous savons aussi que des envois se perdent, mais nous n'y sommes pour rien et nous remettons à toute personne qui en fait la demande autant de numéros qu'elle désire jusqu'à épuisement des stocks.

En ce qui concerne le niveau d'enseignement, nous avons la répartition :

Primaire	1
1er cycle	24
1er et 2ème cycle	3
2ème cycle	18
École Normale	3
Post bac	4
Divers	3

II

- Lisez-vous l'Ouvert

1° entièrement ☐ en partie ☐ pas du tout ☐

2° immédiatement après réception ☐ plus tard ☐

- Conservez-vous les anciens numéros de l'Ouvert oui ☐ non ☐

Il fallait se douter que les réponses au questionnaire n'émaneraient que des personnes lisant tout (25) ou partie (31) de "L'Ouvert". La lecture est faite rapidement et on y revient ensuite pour approfondir. Cela est d'autant plus facile que la grande majorité (49) conserve les anciens numéros.

III

● Qu'est-ce qui vous intéresse le plus

(numérotez 1 ce qui vous intéresse le plus, puis 2, 3 ...)

- ☐ les articles de vulgarisation (expliquant les découvertes récentes)
- ☐ les réflexions pédagogiques
- ☐ les articles théoriques (donnant démonstrations et résultats sur certains sujets classiques)
- ☐ les commentaires d'ouvrages
- ☐ les articles permettant une application en classe
- ☐ les articles d'histoire des mathématiques
- ☐ autres, précisez ...

A partir des préférences individuelles il y a plusieurs manières de déduire une préférence collective (nombre de citation en premier, dans les premiers, ordre inverse de citation en dernier, dans les derniers, position du centre de gravité de l'histogramme ....) A quelques variantes près, c'est l'ordre suivant qui prédomine :

{ 1) Articles permettant une application en classe
  2) Réflexions pédagogiques }

{ 3) ARTICLES d'histoire des mathématiques
  4) Articles de vulgarisation
  5) Articles théoriques }

6) Commentaires d'ouvrages

Les accolades indiquent que les sujets ainsi réunis ont des préférences très voisines.

Signalons de plus que sept lecteurs ont cité "les jeux" quelques fois même en premier.

IV

● Voici quelques titres d'articles parus dans les derniers numéros. Cochez ceux qui vous ont le plus intéressé

- ☐ Quelques problèmes posés par la phyllotaxie
- ☐ Les flexaèdres
- ☐ Transmissions des messages secrets grâce à l'arithmétique
- ☐ Les sondages, une forme du mensonge
- ☐ Orientation en fin de seconde
- ☐ Mathématique dans le 1er cycle
- ☐ Un livre : "Les objets fractals"
- ☐ Multiplions-nous
- ☐ calcul matriciel appliqué

- ☐ Philosophie et mathématique
- ☐ La preuve par ordinateur
- ☐ L'analyse non-standard
- ☐ La vitesse de la lumière
- ☐ Calcul pratique de log 2
- ☐ Sujets du rallye mathématique
- ☐ Un jeu de hasard (?)
- ☐ Les olympiades internationales
- ☐ L'homme et la machine
- ☐ A propos de Diophante
- ☐ Géométrie et statique

Voici la liste des articles par ordre décroissant de citation :

Sujets du rallye mathématique	36 fois
Les sondages, une forme du mensonge	31 fois
Les flexaèdres	27 fois
Mathématiques dans le premier cycle	24 fois
Philosophie et mathématique	19 fois
Les olympiades internationales Transmission des messages secrets... La vitesse de la lumière	18 fois
Orientation en fin de seconde	17 fois
A propos de Diophante	16 fois
Calcul pratique de log2	14 fois
L'homme et la machine	13 fois
Calcul matriciel appliqué L'analyse non-standard Un livre : "Les objets fractals"	12 fois
Multiplions-nous Quelques problèmes posés par la phyllotaxie	11 fois
Un jeu de hasard	10 fois
La preuve par ordinateur	8 fois
Géométrie et statique	0 fois (*)

On remarque que l'ensemble des titres se tient en un peloton assez serré d'où se détache en tête les quatre premiers et en queue un bon dernier. Cela laisse penser aux rédacteurs que "L'Ouvert" est intéressant en général avec quelques bons titres accrocheurs mais aussi, plus rarement, des sujets rébarbatifs.

Quand on compare les réponses aux points III et IV , il ne semble pas qu'il y ait adéquation entre les désirs (question III) et les actes (question IV). Un arcle comme "Multiplions-nous" directement applicable en classe par les professeurs du premier cycle, et ils sont 27 à avoir répondu, a été jugé plutôt peu intéressant, alors que "les sujets du rallye mathématique" qui ne peuvent guère s'appliquer qu'aux élèves de première C ou de terminale C, (et encore, les meilleurs) correspondent à l'article le plus cité. Sans doute peut-on voir là l'intérêt général porté aux jeux mathématiques. C'est d'ailleurs ce sujet qui revient régulièrement dans les suggestions.

(*) A ce propos, l'équipe de "L'Ouvert" est prête à accueillir un rédacteur régulier pour animer une rubrique de jeux et problèmes, mais il lui est difficile, dans l'état actuel, de présenter un tel sujet pour chaque numéro ; nous proposons une telle activité dans ces pages.

(V) Les frais relatifs à la publication de l'Ouvert sont assurés par l'I.R.E.M. En cas de disparition complète des I.R.E.M., accepteriez-vous de vous abonner à l'Ouvert ?

Oui ☐ A quel prix le numéro

Non ☐

Cette question sur les prix a troublé plus d'un lecteur ; certains même ont refusé de répondre. 46 cependant sont prêts à s'abonner pour un prix moyen de 7,85 F le numéro. Ce n'était pas une question piège. Elle était destinée à savoir si le lecteur se rend compte des prix. Il semble que oui, malgré une légère sous-estimation.

Par ailleurs on nous a proposé, en cas de disparition des irems, soit de fusionner avec le bulletin national, ce qui signifierait la disparition de l'organe régional qu'est "L'Ouvert", soit d'utiliser la quasi totalité de la somme reversée à la régionale de Strasbourg.

CONCLUSION

D'un numéro à l'autre, "L'Ouvert" intéresse plus telle ou telle catégorie de lecteurs, ce qui est bien normal , mais dans l'ensemble il répond assez bien à l'attente des professeurs de l'académie. C'est un encouragement pour tous ceux qui en assurent la publication. Puissent les lecteurs soutenir encore plus activement cet organe d'information et d'échange en y faisant paraître des articles.

L'équipe de "L'Ouvert"

L'OUVERT : Responsable de la publication : Jean Lefort
24, rue A. Schweitzer
Wintzenheim 68000 COLMAR

Impression : I.R.E.M. de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 Strasbourg Cédex

A propos de la conférence du Pr H. Whitney

Le professeur Hassler Whitney est un grand mathématicien, peut-être l'un des plus grands de notre époque comme l'a rappelé à juste titre Monsieur G. Glaeser dans son introduction. Il a oeuvré en topologie différentielle, fait faire des progrès au théorème des quatre couleurs, commencé les premiers travaux de la théorie des catastrophes avec ses études sur les singularités des applications différentiables et la mise en évidence de l'importance de la notion de fronce. *

Depuis une douzaine d'années ce grand mathématicien s'intéresse à l'enseignement des mathématiques et pour en parler en connaissance de cause, visite les classes dans différents pays. Dans ces conditions, il était normal qu'il soit appelé à être Président de la C.I.E.M. (Commission internationale pour l'enseignement des mathématiques).

De passage à Strasbourg au cours d'un voyage en Europe, le professeur Whitney n'a pas voulu donner une conférence au cours de laquelle il aurait enseigné la bonne parole. Il a préféré concevoir sa visite comme un échange d'idées à propos des difficultés que rencontrent les élèves dans l'apprentissage des mathématiques. Cela a donné une réunion un peu informelle qu'il est très difficile de retranscrire, avec malheureusement deux fausses notes :

1) Tout le monde parlait français et il faut remercier le professeur Whitney d'avoir bien voulu exposer ses idées dans notre langue, mais le public s'est vite rendu compte que s'il la parlait correctement, il l'entendait très mal, répondant de travers aux questions posées. Cela limite considérablement le dialogue (à moins de parler anglais !)

2) L'auditoire n'était pas le bon : beaucoup de professeurs du secondaire, des enseignants du supérieur mais personne de l'élémentaire comme l'a fait remarquer un professeur d'école normale. Or l'expérience du professeur Whitney est essentiellement basée sur des visites de classes primaires.

Ces précisions apportées, je vais tâcher de retranscrire les principales idées qu'a dégagées le "conférencier".

* Voir Ouvert n° 5.

(1) La constance des problèmes rencontrés.

C'est pour avoir préféré les gens aux mathématiques que Whitney s'est intéressé aux visites des classes : voir comment les gens réfléchissent. Cela n'a pas été simple du point de vue affectif et ce n'est que depuis cinq ou six ans qu'il se sent aussi à l'aise avec des enfants qu'avec des adultes. Que ce soit au Brésil, aux E. U. ou ailleurs, il a toujours rencontré des personnes confrontées aux mêmes problèmes ou à des problèmes très voisins. Seules changent les solutions à ces problèmes.

(2) Systématisation des attitudes.

Aux E. U. on a l'habitude de présenter les problèmes sous la forme $2 + 3 = \square$ où il faut remplir le rectangle par la réponse juste. Mais les enfants développent l'attitude "mettre un nombre quel qu'il soit, pourvu qu'il y en ait un". Si plus tard ceux qui ont répondu juste se trouvent en présence de $\square = 6 + 2$ ils seront déroutés, les plus "intelligents" penseront que le problème est écrit à l'envers : deux plus six égal à ..... et un peu plus tard écrirons 4 comme réponse à $\square - 2 = 6$.
Une attitude a été systématisée.
Trois exemples sont fournis par l'assistance :

a) à une question du professeur Whitney la salle reste muette, attitude caractéristique des élèves pendant le cours !

b) à la résolution de $3x = 5$ l'élève fournit $x = 3$ par le raisonnement suivant :
"pour passer de $3x$ à $x = 1x$ il faut ôter 2 à 3, on ôte donc 2 au deuxième membre 5 d'où le résultat !

c) tant que les élèves n'ont pas vu la résolution de l'équation du 2e degré ils résolvent correctement $(x - a)(x - b) = 0$, mais on rencontre au niveau post baccalauréat des développements suivis d'une longue discussion sur le signe de Δ ..... et qui bien souvent n'aboutit pas au résultat !
Cette dernière attitude est à rapprocher d'une question souvent formulée, tant par les élèves que par les professeurs :

(3) Quelle formule appliquer ?

Entre le professeur qui cherche inconsciemment le "truc" pour enseigner et l'élève qui demande ou apprend une formule, il n'y a pas de différence. Accuser les élèves de ne plus savoir (ou vouloir) penser et de vouloir des formules c'est oublier que beaucoup (et Whitney lui-même en fait partie), préfèrent faire la vaiselle que de cuisiner car dans le premier cas contrairement au second, il n'est nul besoin de penser. Or, rien n'est plus traumatisant pour l'élève que de sécher et la formule est très sécurisante puisqu'elle conduira au résultat fut-ce après un long détour et de multiples erreurs de calculs.

4 L'importance des explorations.

Elle s'oppose justement à la formule et n'est correctement développée qu'au niveau du préscolaire. Voici l'exemple d'une gamine de 3 ans qui devait mettre la table et pour cela distribuer 2 cuillères à chacune des trois personnes. Après plusieurs essais elle s'est rendu compte qu'il revenait au même de prendre trois cuillères deux fois de suite et de distribuer à chaque fois une cuillère ou de distribuer les cuillères 2 par 2 trois fois de suite. Il était alors inutile de parler de commutativité.

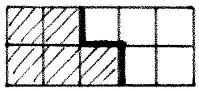
5 Le choix du vocabulaire et des notations.

Se méfier autant du mot nouveau que les élèves retiennent sans référence à son sens comme "commutativité" que du mot classique qui sera pris dans un sens différent de celui de l'adulte. Quand on dit à un enfant que la "terre est ronde", rare est celui qui comprend "sphérique". L'un comprendra "cylindrique", l'autre "circulaire" et essayer d'expliquer "sphérique" ne conduira pas plus à la compréhension réelle.

De la même façon on doit se méfier du dessin explicatif qui finit par supplanter la notion. On représente souvant $\frac{2}{5}$ par 

donc $\frac{3}{5}$ par 

et l'élève sera tenté de faire l'addition $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ en mettant les dessins côte à côte.



Un auditeur fait d'ailleurs remarquer que nombreux sont les professeurs qui notent le 1er exercice 5 sur 8 et le 2em 7 sur 12 et écrivent $\frac{5}{8} + \frac{7}{12} = \frac{12}{20}$.

On peut d'ailleurs se poser la question de savoir si le dessin n'est pas considéré par les élèves comme la formule tant désirée ?

De la brève discussion qui suivit, il y a lieu de retenir quelques points importants. Tout d'abord, à la demande de Mr Glaeser qui reprochait à l'exposé d'être un peu pessimiste, Mr Whitney expose une méthode de division à l'aide de bâtonnets colorés (chaque couleur vaut 10 fois la couleur précédente) qui a l'heur de plaire et d'intéresser de nombreux élèves qui semblaient rebelles à toute mathématique. Voici l'exemple : diviser 2163 par 6. On présente les résultats partiels sur le tableau ci-dessous au fur et à mesure des manipulations avec des baguettes :

m	c	d	u
2	1	6	3
2	1	0	3
	21	0	3
	3	0	3
		30	3

m	c	d	u
		1	
		1	
	3	1	
	3	1	

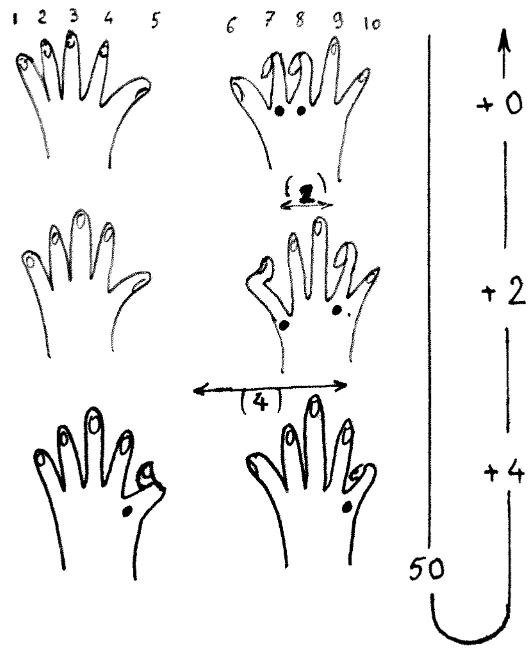
.on a reconnu un 6 que l'on décompose en 6 fois 1
.on décompose les 2 milliers en vingt centaines
.en faisant 6 tas on a pu mettre 3 centaines dans chaque tas et il reste 3 centaines

... etc ...

Le professeur Whitney reconnait cependant que si cela donne de grandes satisfactions à l'élève qui peut enfin faire quelque chose, cette méthode est très difficile à appliquer au niveau global. Il rejoint en ce sens un auditeur qui posait le problème de la formalisation : Quand ? Comment ? Aucune réponse ne peut encore être donnée à ce problème et l'analyse même des difficultés qui sont en jeu repose sur des hypothèses qui sont loin d'être admises par tous.

Un autre moment intéressant de la discussion fut l'explication par le professeur Whitney de l'art de compter sur ses doigts pour multiplier. Si tout le monde sait compter sur ses doigts pour additionner ou soustraire, la technique "digitale" de la multiplication fut une découverte pour la majorité de l'assistance qui regardait avec admiration le professeur pianoter au tableau :

exemple : 7 x 8



On abaisse l'index et le majeur de la main droite (qui représentent respectivement 7 et 8). Puis on déplace les marques (doigts abaissés) d'une unité vers la droite pour le doigt abaissé de droite, vers la gauche pour l'autre et on continue jusqu'à une position correspondant à une multiplication facile ; ici 5 x 10 = 50. Ensuite, on revient en arrière en prenant soin d'ajouter à la valeur précédemment trouvée le nombre de doigts libres entre les deux doigts abaissés en position 5 x 10 : il y a 4 doigts libres, 50 + 4 = 54 correspondant à la position 6 x 9 que l'on marque en revenant à pouce et annulaire gauche baissés ; il reste alors deux doigts libres ce qui permet de revenir à 7 x 8 = 54 + 2 = 56.

Pour des multiplications plus compliquées, il faut trois ou quatre mains ! On fait alors intervenir des mains imaginaires que l'on place convenablement.

Le professeur Hassler Whitney n'a pas de recette à proposer, de truc qui permettrait la compréhension des mathématiques sans effort. Sans doute cela n'existe t-il pas ! Mais ses nombreuses observations lui ont montré que, quel que soit le niveau mathématique, les types de difficultés et des erreurs sont toujours les mêmes, que les fautes sont naturelles (errare humanum est) et que ce n'est qu'en considérant l'élève comme son égal dans la relation pédagogique, en le laissant librement interroger ses camarades et questionner le professeur qu'on évitera l'augmentation progressive de l'incompréhension qui pressurise l'élève et lui fait réclamer des formules pour s'en sortir.

D'après les notes de J. LEFORT

MATHEMATIQUES

Un chiffre, et deux et trois
se bousculent à la fois
Ah ! douce migraine
Tu viens récompenser
Le fruit de cette graine
qui vient me démanger

Petit x, signe adoré
Symbole dont personne en vain peut
se passer

Moi je suis une troubadour
jouant d'la mandoline
qui songe à l'amour
Aux fleurs sans épines

Un chiffre et deux et trois
Des sommes algébriques
forment une rubrique

Ah douce migraine
Tu reviens en rengaine
me donner l'énoncé
Du problème du Roi
Un chiffre, et deux, et trois

Moi je suis une poète
Grattant à la guitare
Chantant les jours de fête
Animant chaque foire
Moi je suis vagabonde
Racontant des histoires
En mêlant dans mon onde
Des étoiles de fard

Ah Mathématiciens !
Il ne vous faut qu'un rien
Alignant l'un à l'autre
x, y et les siens
Ajoutant la logique
vous vous en sortez bien !

une élève de 3ème du collège de Barr.

La sphère chevelue

Considérons la sphère unité S de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire, relativement à un repère othonormé, l'ensemble des points

$$S = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

On appelle champ de vecteur tangent à S toute application de S dans $\mathbb{R}^3$, qui à chaque point M $\in$ S fait correspondre un vecteur $\vec{V}$ tangent à S en M, soit :

$$S \longrightarrow (x,y,z) \longmapsto \vec{V} = (u,v,w) \text{ avec } xu + yv + zw = 0$$

les notions de champ de vecteur continu, différentiable, sont intuitives.

Voici un célèbre théorème dû à H. Poincaré et Brouwer. Tout champ de vecteurs continu, tangent à S, s'annule en au moins un point.

Si l'on pense à S comme couverte d'une fine pellicule fluide, animée d'un mouvement permanent, la vitesse de la "molécule" passant à chaque instant au point M étant $\vec{V}(M)$, le théorème précédent signifie qu'il y a toujours, quelque part sur S, une "molécule" qui reste immobile (ceci quel que soit le mouvement envisagé).

Une autre façon de voir le problème est d'imaginer une sphère couverte de "cheveux" (d'où le titre de l'article) ; initialement la sphère est "hirsute" c'est-à-dire qu'en chaque point, le cheveu est normal à la sphère ; on essaye de "peigner" la sphère c'est-à-dire de disposer ces cheveux tangentiellement. Le théorème précédent signifie que cette opération est impossible, sauf si l'on abandonne la continuité du peignage en certains points (au voisinage desquels le peignage pourra avoir l'allure d'un tourbillon par exemple).

Ce théorème est, historiquement, un des premiers résultats marquants de ce qu'on appelle la "théorie qualitative des équations différentielles", dont Poincaré est en fait le fondateur.

On connaît de nombreuses démonstrations de ce théorème, qui ressortissent toutes de la "topologie algébrique" (théorie dont Poincaré est également le fondateur).

John Milnor (un très fameux mathématicien américain, titulaire de la médaille Fields) provoqua une belle surprise en 1978 en proposant une nouvelle démonstration de ce théorème [1] ; cette preuve est entièrement différente de celles déjà connues ; elle est de plus parfaitement "diabolique". Exposons la sans plus attendre.

1. La démonstration de Milnor

On va démontrer en fait un résultat apparemment un peu moins fort :

Tout champ de vecteurs différentiable *, tangent à S, s'annule en au moins un point.

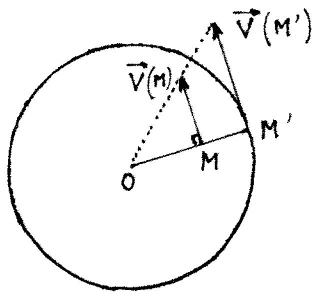
La démonstration se fait par l'absurde :

(*) voir page 15

1) Supposons que $\vec{V}(M)$ soit un champ tangent à S, différentiable, avec $\vec{V}(M) \neq 0$ quel que soit $M \in S$. Le champ $M \mapsto \frac{\vec{V}(M)}{|\vec{V}(M)|}$ est alors de longueur 1 en tout point ($|\vec{V}(M)|$ = longueur de $\vec{V}(M)$), et tout aussi différentiable.

Ceci nous permet de supposer, dans la suite : $|\vec{V}(M)| = 1$ pour tout M.

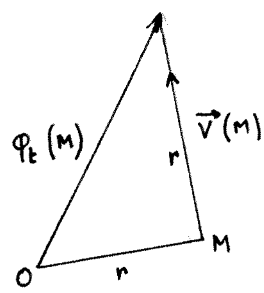
2) Prolongeons l'application $\vec{V}$ à $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ en posant $\vec{V}(M) = \lambda \vec{V}(M')$ où $\lambda = OM$ et $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.



On dit qu'on a prolongé $\vec{V}$ par "homothéties".

Le champ ainsi prolongé a la propriété suivante : soit S_r la sphère de rayon r (et toujours de centre O) ; le long de S_r, $\vec{V}$ est tangent à S_r, et il y est de longueur constante égale à r.

3)



Soit t un nombre réel positif. Considérons l'application

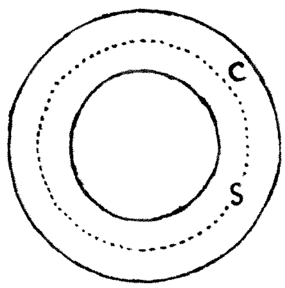
$\varphi_t : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$.

$\varphi_t(M) = \overrightarrow{OM} + t\,\vec{V}(M)$.

Remarquons que si OM = r, alors $|\varphi_t(M)| = \sqrt{1+t^2}\,.\,r$ (théorème de Pythagore). Nous traduirons ceci en disant que φ_t envoie la sphère de rayon r dans la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}\,.\,r$.

Notez enfin que φ_0 est l'application identique.

4) Je vous demande maintenant de vous concentrer sur une <u>couronne</u> $C \subset \mathbb{R}^3$, constituée des sphères concentriques à S, de rayon r compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.



Essayez d'imaginer le <u>transformé</u> de C par φ_t (on posera $C_t = \varphi_t(c)$)

Pour t = 0, évidemment $C_0 = C$ (φ_0 est l'application identique).

Maintenant pour $t \neq 0$, mais <u>assez petit</u>, la tranformation φ_t est <u>très voisine</u> de φ_0 = identité ; ceci permet de voir que φ_t transforme <u>bijectivement</u> chaque sphère S_r ($\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{3}{2}$) en la sphère de rayon $r\sqrt{1+t^2}$, compte-tenu de la remarque faite en 3) ; la couronne C est donc tranformée en la couronne $C_t = \sqrt{1+t^2}$. C <u>homothétique</u> de C (mais $\varphi_t : C \rightarrow C_t$ n'a aucune raison d'être elle-même une homothétie). Je viens en fait d'escamoter un raisonnement d'analyse qui suppose quelque famaliarité avec la compacité, la connexité, et le théorème des fonctions implicites (ce qui fait quand même beaucoup !).

5) La fin arrive :

Nous allons nous intéresser maintenant à la fonction de t : $t \longmapsto$ Volume de C_t (pour t voisin de 0).

a) d'après le paragraphe précédent, comme C_t se déduit de C par une homothétie de rapport $\sqrt{1+t^2}$, son volume est le produit de celui de C par le cube du rapport d'homothétie (nous sommes dans $\mathbb{R}^3$) ; donc :

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(C_t) = (1+t^2)^{3/2}\ \mathrm{Vol}\,(C)}$$

b) Mais nous avons une autre façon d'estimer le volume de C_t, en utilisant le théorème du changement de variables dans les intégrales triples ; en posant :

$$\varphi_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} X = x + tu \\ Y = y + tv \\ Z = z + tw \end{array} \right.$$

on peut écrire :

$$\mathrm{Vol}\ C_t = \int_{C_t} dX \,.\, dY \,.\, dZ = \int_{C_t} \mathrm{Jac}\ \varphi_t \,.\, dx\,dy\,dz \qquad (1)$$

où $\mathrm{Jac}\ \varphi_t = \begin{vmatrix} 1 + t\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & C\,\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ t\,\dfrac{\partial v}{\partial x} & 1 + t\dfrac{\partial v}{\partial y} & t\,\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ t\,\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & 1 + t\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$ est le déterminant jacobien de φ_t (voir au paragraphe suivant un bref commentaire intuitif sur cette formule).

Mais il est clair que Jac φ_t est de la forme :

$$\mathrm{Jac}\ \varphi_t = \alpha(x,y,z) + t\,\beta(x,y,z) + t^2\,\gamma(x,y,z) + t^3\,\delta(x,y,z)$$

c'est-à-dire un polynôme en t, de degré 3.

Si on calcule l'intégrale (1), on obtient :

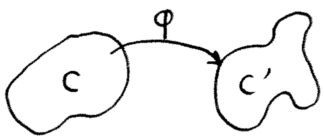
$$\boxed{\mathrm{Vol}\ C_t = a + bt + ct^2 + dt^3}$$

où a,b,c,d, sont des constantes, intégrales de α, β, γ, δ sur C.

Si vous comparez les expressions encadrées de Vol (C_t), vous voyez la contradiction : la fonction $(1+t^2)^{3/2}$ ne peut être un polynôme en t ! C.Q.F.D. !!!

Commentaire sur la formule du changement de variables.

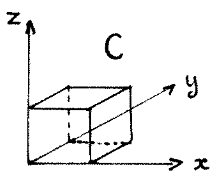
Soit $\varphi : C \longrightarrow C'$ une transformation bijective différentiable d'un domaine compact C de $\mathbb{R}^3$ sur un autre domaine C'.



Cherchons à montrer que

(1) $\quad \mathrm{Vol}\,(C') = \int_C \mathrm{Jac}\,(\varphi)$.

Supposons d'abord que C soit un très petit cube.



Considérons la transformation linéaire D φ (A) (A étant par exemple un sommet de notre cube) définie par la matrice des dérivées partielles de φ en A.

L'application D φ (A) transforme C en un parallélépipède de volume = det D φ (A) = Jac φ (A) Vol (C), par définition du déterminant.

En utilisant la définition de la dérivée de φ en A, on voit facilement que $\frac{\text{Vol }(C')}{\text{Vol }(C)} \longrightarrow$ Jac φ(A) quand Vol (C) $\longrightarrow$ 0.

On en déduit la formule (1), pour un domaine C quelconque (compact) en le pavant par des cubes de plus en plus petits, et en appliquant à chacun d'eux la remarque précédente.

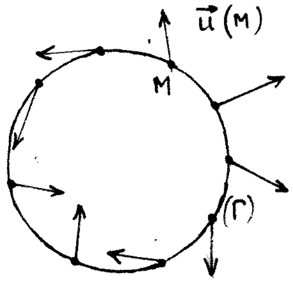
4. Commentaires sur le théorème de Poincaré

Comme je l'ai dit plus haut, ce théorème a reçu de très nombreuses démonstrations ; un célèbre mathématicien a même pu donner un cours d'introduction à la topologie algébrique consistant essentiellement en l'exposé de ces multiples preuves (belle manifestation de pédagogie par l'exemple) : elles permettaient de faire le tour de la plupart des idées essentielles de la théorie.

Je vais donner succintement le principe d'une autre démonstration de théorème de Poincaré ; elle m'a été communiquée par C. Godbillon.

4.1. Nombre de rotation

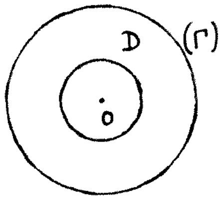
Soit $\vec{u}$(M) un champ de vecteurs continu dans le plan euclidien , c'est donc une application qui à tout point M du plan associe un vecteur $\vec{u}$(M) du plan.



Soit Γ une courbe fermée du plan (par exemple, un cercle) ; on appelle nombre de rotation N($\vec{u}$, Γ) de $\vec{u}$ le long de Γ la variation angulaire totale de $\vec{u}$ lorsque le point d'application M décrit Γ une fois. Dans l'exemple évoqué sur la figure ci-contre, ce nombre serait 2 : le vecteur $\vec{u}$ fait 2 tours complets lorsque M décrit Γ . Ce nombre est, par définition, un entier relatif ; il n'est défini que si $\vec{u}$(M) est non nul en tout point de Γ . Si l'on "déforme continûment" une courbe Γ , sans passer par un zéro de $\vec{u}$, le nombre de rotation ne peut changer : en effet, il est clairement fonction continue de Γ , et donc constant puisqu'à valeurs entières.

Lemme 1. Soit $\vec{u}$ un champ de vecteurs dans le plan, non nul en tout point d'un disque D. Alors le nombre de rotation de $\vec{u}$ le long du cercle Γ bord de D est nul.

Démonstration.



D'après la remarque précédente, N ($\vec{u}$, Γ) = N ($\vec{u}$, Γ_r) où Γ_r est le cercle de centre 0 (0 = centre de D) et de rayon r $<$ rayon de D.

Pour r très petit, $\vec{u}$ est presque constant sur le disque de centre O et de rayon r ; son nombre de rotation est donc nul sur Γ_r.

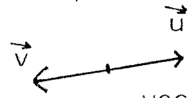
Maintenant, soit Γ une courbe fermée fixe. Si l'on déforme continûment un champ de vecteurs $\vec{u}$, de façon qu'il ne s'annule jamais sur Γ , le nombre N ($\vec{u}$,Γ) reste fixe pendant la déformation (même argument qu'auparavant).

Ceci est la clef du

Lemme 2. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux champs de vecteurs, et Γ une courbe fermée. Supposons que

a) $\vec{u}(M)$ et $\vec{V}(M) \neq 0$ en tout point de Γ

b) pour tout $M \in \Gamma$, $\vec{u}(M)$ et $\vec{V}(M)$ ne sont pas "en opposition" (voir figure)



vecteurs en opposition

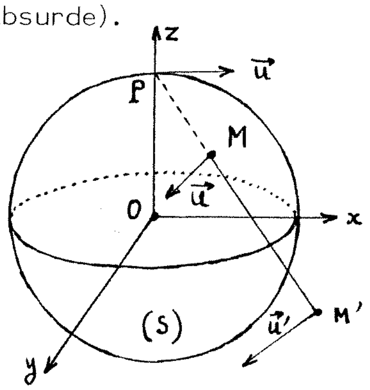
Alors $N(\vec{u}, \Gamma) = N(\vec{v}, \Gamma)$.

Démonstration

Soit, pour $t \in [0,1]$, $\vec{u}_t = (1-t)\vec{u} + t\vec{V}$; ce champ dépend continûment du paramètre t, et, d'après les hypothèses faites, il ne s'annule jamais sur Γ . Comme $\vec{u}_0 = \vec{u}$ et $\vec{u}_1 = \vec{V}$, le résultat est établi.

4.2. Application à la démonstration du théorème de Poincaré

Cette démonstration sera directe (au contraire de celle de Milnor, qui se faisait par l'absurde).



Soit un champ de vecteurs quelconque tangent à S ; on ne restreint pas la généralité de l'étude en supposant qu'au pôle $P(0,0,1)$ de la sphère, $\vec{u}(P) = (1,0,0)$. On considère la projection stéréographique de S sur le plan "équatorial" xOy, avec P comme point de vue (voir figure) ; le champ $\vec{u}$ se projette en un champ $\vec{u}'$ défini dans tout le plan. Soit un cercle de très grand rayon de ce plan, centré en 0 ; il est clair que $\vec{u}'$ est non nul en chaque point de Γ .

Lemme 3. Si Γ est assez grand, $N(\vec{u}', \Gamma) = 2$.

D'après le lemme 1, $\vec{u}'$ s'annule forcément dans le disque limité par Γ ; donc $\vec{u}$ s'annule sur S. Ceci achève la démonstration du théorème.

Démonstration du lemme 3

a) Considérons d'abord le champ de vecteurs particulier

$$\vec{u}_0 = (1 - x^2, -xy, -xz)$$

il est bien tangent à la sphère, car :

$$\vec{OM} \cdot \vec{u}_0 = x(1-x^2) - xy^2 - xz^2 = x(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$$

sur S. Au pôle $P(0,0,1)$ sa valeur est

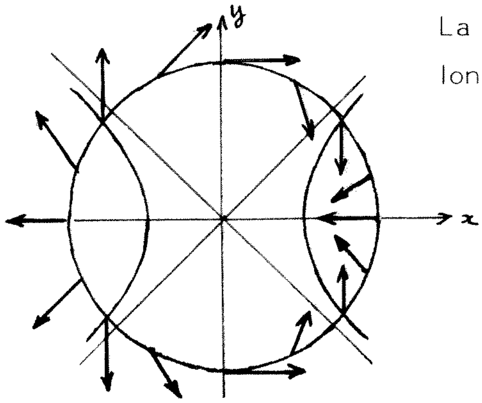
$$\vec{u}_0(P) = (1,0,0).$$

Un petit calcul facile montre que sa projection stéréographique est le champ :

$$\vec{u}'_0 = \left[\frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2) , - xy\right]$$

(ce champ s'annule aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$)

Calculons le nombre de rotation de $\vec{u}'_0$ le long d'un cercle Γ de rayon $R > 1$.



La figure ci-contre montre le comportement de $\vec{u}'_0$ le long de Γ. Il est clair que

$$N(\vec{u}'_0, \Gamma) = 2.$$

b) Revenons à notre champ quelconque $\vec{u}$ de départ ; comme $\vec{u}$ et $\vec{u}_0$ ont même valeur en P, ils restent voisins dans un voisinage de P. Ils ne peuvent donc être en opposition dans ce voisinage.

Le lemme 2 assure donc que si Γ est de rayon assez grand, les nombres de rotation de $\vec{u}'$ et $\vec{u}'_0$ le long de Γ seront les mêmes ; ceci achève la démonstration.

[1] Référence : J. MILNOR. Analytic proofs of the "Hairy Ball Theorem and the Brouwer fixed point theorem"- American math. Monthly, Vol. 85, 7(1978) - pp. 521-524.

J. MARTINET

(*) La restriction n'est qu'apparente ; rappelez-vous que toute fonction continue peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une fonction différentiable. Ainsi, si S admettait un champ continu sans zéro, elle admettrait aussi un champ différentiable sans zéro.

De la fonction ζ aux travaux de Weil & Deligne

1 La fonction ζ de Riemann

Considérons la fonction h qui à s associe le nombre

$$h(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \, .$$

On démontre que cette écriture a un sens, c'est-à-dire que la fonction h est définie dès que s est strictement supérieur à 1. De plus on peut étendre h aux nombres complexes $s = x + iy$ en posant, selon l'habitude, $n^s = n^x \cdot e^{i(y \ln n)}$; h est alors définie dans le demi-plan complexe de partie réelle x strictement supérieure à 1.

Cette fonction h présente un intérêt majeur dans l'étude de la répartition des nombres premiers car il n'est pas trop difficile de voir que :

$$h(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \qquad (1)$$

où le produit infini du membre de droite est étendu à l'ensemble de tous les nombres premiers.

Sous l'une des deux formes (1), cette fonction h n'est malheureusement pas facile à manipuler et Riemann a découvert en 1859 la fonction ζ qui prolonge la fonction h au plan complexe tout entier (sauf en 1). Il se trouve alors que ζ vérifie la relation fonctionnelle importante :

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \qquad (2)^{*}$$

où Γ n'est autre que la fonction qui prolonge la notion de factorielle $[\Gamma(n) = (n-1)!]$ et qu'on peut écrire :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}$$

---

* Cette relation avait été conjecturée par Euler qui l'avait démontrée pour s entier et vérifiée pour quelques autres valeurs.

La relation (2) nous montre que la fonction ζ présente une certaine symétrie, plus exactement, comme les points d'affixe s et 1 – s sont symétriques par rapport au point d'affixe $\frac{1}{2}$, la fonction ζ qui n'est autre que h pour Re(s) $>$ 1 est également bien connue pour Re(s) $<$ 0 (0 est le symétrique de 1 par rapport à $\frac{1}{2}$).

Reste le cas de la bande de plan correspondant aux parties réelles comprises entre 0 et 1 et surnommée bande critique. On démontre que ζ s'annule une infinité de fois dans cette bande et on a de bonnes raisons de penser que tous les zéros non triviaux * de ζ sont de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$. C'est ce qu'on appelle l'hypothèse de Riemann et qui permettrait (si elle était vraie) de démontrer d'excellents résultats sur la répartition des nombres premiers, par exemple le "théorème" des nombres premiers qui dit que le nombre ϖ (x) des nombres premiers inférieurs à x est donné par :

$$\varpi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + 0(\sqrt{x}) .$$

L'avènement de l'ordinateur a permis de vérifier que l'hypothèse de Riemann est vraie pour les 3 500 000 premiers zéros ! **

Depuis 120 ans les mathématiciens se sont attaqués sans succès à l'hypothèse de Riemann. L'une des méthodes a été de construire des analogues de la fonction ζ dans d'autres corps que $\mathbb{Q}$ et d'essayer de voir ce qui se passe dans ces cas là. Différentes voies sont possibles : corps p-adiques, corps finis, corps de fonctions. C'est dans cette dernière direction qu'a travaillé A. Weil.

(2) Quelques rappels d'algèbre

Avant que d'essayer de généraliser la fonction ζ nous donnerons quelques rappels sur les anneaux et les modules. Le lecteur familiarisé avec ces notions peut évidemment passer au troisième paragraphe.

a) Anneau unitaire. C'est un ensemble muni d'une addition qui en fait un groupe abelien et d'une multiplication associative, ayant un élément neutre (1) et distributive par rapport à l'addition [dans les exemples d'utilisation, l'anneau sera aussi commutatif, c'est-à-dire que la multiplication le sera] . Exemple : ($\mathbb{Z}$,+,x).

b) Idéal. C'est un sous-ensemble I de l'anneau A tel que

$$\forall a \in A \quad \forall x \in I \quad ax \in I$$

Les idéaux jouent un rôle très important en théorie des nombre et on est amené à étudier les propriétés particulières des idéaux .

---

* ζ possède une infinité de zéros triviaux qui sont les entiers négatifs pairs.

** On a même démontré qu'il y a une infinité de zéros de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$ (mais une infinité ne veut pas dire tous !).

idéal premier : si tout élément de l'idéal de la forme ab est tel que soit a, soit b appartient à l'idéal

$$\forall x \in I \quad x = ab \Longrightarrow (a \in I \quad \text{ou} \quad b \in I).$$

Dans $\mathbb{Z}$, tout idéal est principal, c'est l'ensemble des multiples d'un nombre donné ; les idéaux premiers ne sont autres que ceux engendré par les nombres premiers. Mais cette notion a l'avantage de permettre la généralisation à un anneau quelconque de la notion de nombre premier.

c) Entiers dans un corps. Dedekind avait réussi à définir la notion d'entier dans un corps de nombre (c'est-à-dire dans une extension de $\mathbb{Q}$), mais sa méthode ne pouvait pas être généralisée à un corps K quelconque. Dans ce cas il faut passer par l'intermédiaire des valuations :

valuation : on appelle valuation ν dans un corps K une application surjective de K dans $\mathbb{Z}$, telle que $\nu(\alpha \cdot \beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$ et qui vérifie la relation : $\forall \alpha \in K \ \forall \beta \in K \quad \nu(\alpha+\beta) \geqslant \min[\nu(\alpha), \nu(\beta)]$. On pose de plus $\nu(0) = +\infty$.

On démontre que l'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments de K dont toutes les valuations sont positives ou nulles forme un anneau qu'on appelle (pour un tas de bonnes raisons) anneau des entiers de K. Tout idéal de $\mathcal{D}$ sera dit idéal entier de K. On caractérise les éléments premiers π de $\mathcal{D}$ par le fait que pour toutes les valuations $\nu(\pi) = 0$ sauf pour une pour laquelle $\nu(\pi) = 1$.

exemple : Prenons K = $\mathbb{Q}$. Soit p un nombre premier, $\frac{a}{b}$ un élément de $\mathbb{Q}$, α et β les exposants respectifs de a et b dans leur décomposition en nombre premier. Posons

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \alpha - \beta .$$

Il est facile de vérifier que ν_p est une valuation dans $\mathbb{Q}$ qui vaut 1 pour p, 0 pour tout autre nombre premier de $\mathbb{Z}$ et est positif ou nul pour tout nombre entier. On démontre que toutes les valuations de $\mathbb{Q}$ sont obtenues de cette façon. Il est alors facile de voir que les définitions données ci-dessus pour la notion d'entiers dans un corps K s'appliquent à $\mathbb{Q}$ et redonnent exactement $\mathbb{Z}$.

Soit alors $\mathfrak{a}$ un idéal entier de K (idéal de l'anneau $\mathcal{D}$ des entiers de K). On définit la norme de $\mathfrak{a}$ et on note $N(\mathfrak{a})$ le nombre des éléments de $\mathcal{D}/\mathfrak{a}$, ensemble quotient de $\mathcal{D}$ par la relation d'équivalence :

$$\forall \alpha \in \mathcal{D} \quad \forall \beta \in \mathcal{D} \quad \alpha \sim \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in \mathfrak{a}$$

d) corps de fonctions. Soit K un corps et K $[x,y]$ l'ensemble des polynômes à deux variables à coefficients dans K. On sait que K $[x,y]$ est un anneau. Considérons alors l'idéal $\mathcal{Q}$ engendré par un polynôme q(x,y) ; q(x,y) = 0 peut être considéré comme l'équation d'une courbe Q et $\mathcal{Q}$ est alors l'idéal des polynômes s'annulant sur Q. L'ensemble quotient K $[x,y]/\mathcal{Q}$ (obtenu par identification de deux polynômes dont la différence est dans $\mathcal{Q}$ peut être muni d'une structure d'anneau. On construit alors son corps des fractions (de la même façon que l'on passe de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$) et on obtient le corps des fonctions rationnelles sur la courbe algébrique Q.

Cette construction peut être étendue à un nombre quelconque de variables. On obtient alors le corps des fonctions rationnelles sur une variété algébrique.

e) Genre d'une courbe. Soit $f(x,y) = 0$ l'équation d'une courbe Γ, où x et y sont des nombres complexes. Si on veut résoudre en y et écrire $y = \varphi(x)$ cela est en général impossible sauf à introduire des "fonctions multiformes". Pour pallier cet inconvénient on peut imaginer de démultiplier le plan complexe en autant de feuillets que nécessaires chacun correspondant à une valeur de la fonction pour que sur l'ensemble des feuillets, φ soit une "vraie" fonction. L'ensemble des feuillets forme une surface appelée surface de Riemann de la courbe Γ considérée. Du point de vue topologique, cette surface est caractérisée par son genre, c'est-à-dire par son nombre de "trous" (le tore est une surface de genre 1, la sphère de genre 0). Le genre de la surface de Riemann ne dépend que de f. On dira donc que c'est le genre de la courbe Γ définie par f. Cette notion de genre a pu être étendue à d'autres corps que $\mathbb{C}$.

3 Généralisation de la fonction ζ

Soit K un corps, on définit pour K une fonction ζ_k de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (fonction ζ de Dedekind) par :

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

où la sommation est étendue à tous les idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de K. On démontre qu'on a encore :

$$\zeta_k(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

où le produit est étendu à tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de K.

Malgré cette définition très générale les propriétés des fonctions ζ ainsi construites dépendent du corps K. Suivant sa nature ces fonctions sont plus ou moins simples.

4 Les Travaux d'Artin, Hasse et Weil

Dans sa thèse en 1921, Artin pris comme corps une extension de degré deux d'un corps premier $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ plus exactement il prit le corps $K_D = \mathbb{F}_p\left(x, \sqrt{D(x)}\right)$ où D(x) est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Il démontra alors que la fonction ζ associée au corps K_D est une fonction rationnelle en p^{-s}. Artin vérifia pour de petites valeurs de p et différents choix du polynôme D que "l'hypothèse de Riemann" avait bien lieu, c'est-à-dire que sa fontion ζ qui par ailleurs vérifiait une équation fonctionnelle reliant ses valeurs en s et 1 - s, ne s'annulait que pour s de partie réelle égale à 1/2. Mais ce n'est qu'en 1936 que Hasse démontra cette conjecture.

Dans la pratique, travailler dans K_D consiste à travailler dans le corps des fonctions sur la courbe $y^2 = D(x)$. Que se passe-t-il si on prend une courbe quelconque ?

Hasse put démontrer "l'hypothèse de Riemann" dans le cas d'une courbe de genre 1, mais ce n'est qu'en 1948 que Weil acheva la démonstration pour une courbe de genre quelconque. Il se mit alors à généraliser tous ces différents résultats au cas d'une variété algébrique de dimension n quelconque. Il émit à ce propos diverses conjectures :

. La fonction ζ est rationnelle en p^s et il en donnait une expression formelle.

. La fonction ζ satisfait à une équation fonctionnelle généralisant celle obtenue dans les cas classiques.

. La fonction ζ vérifie "l'hypothèse de Riemann" sur la position de ses zéros.

5 Les résultats de Grothendieck et Deligne

Au moyen de puissants instruments de topologie algébrique (cohomologie ...) qu'il n'est pas question de présenter dans cet article (j'en serais d'ailleurs bien incapable), Grothendieck, en collaboration avec Artin, prouva les deux premières conjectures de Weil en 1963. Ce n'est qu'en 1973 que Deligne démontra la troisième conjecture. Il démontre même un peu plus puisqu'il généralise le théorème de Hadamard-de la Vallée Poussin disant que la fonction ζ n'a pas de zéro de partie réelle égal à 1.

Ces différents résultats, outre leur intérêt intrinsèque, ont des applications et des retombées importantes en théorie des nombres ; par exemple le calcul du nombre de solutions dans un corps fini d'un système d'équations polynomiales (généralisation des équations diophantiennes) ; par exemple en théorie additive des nombres ; par exemple la démonstration de la conjecture de Ramanujan-Peterson...

La médaille Fields (qui avait été attribuée en son temps à Grothendieck) ne récompense donc pas un résultat précis (encore que la démonstration de la troisième conjecture de Weil suffirait sans doute à la justifier) mais un mathématicien dont les travaux en de nombreux domaines font autorité et suscitent de nombreuses recherches. N'est-il pas aussi important de savoir poser les bonnes questions que de savoir en résoudre ?

Jean LEFORT

Bibliographie

* Borevitch et Chafarevitch. Théorie des nombres (G.V. 1967)

  Traite essentiellement les corps de nombres. Très complet, on y trouve des renseignement sur les valuations, sur les entiers...

* Dieudonné. Cours de géométrie algébrique (P.U.F., 1974)

  Le 1er tome est lisible et très historique.

* Dieudonné (sous la direction de). Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900 (Hermann 1978)

  Très complet, donne beaucoup de résultats modernes malgré sa limitation à 1900.

* Fulton. Algebraic curves (Benjamin)

  Permet de comprendre ce qu'est la géométrie algébrique dans un cas particulier.

* Serre. Travaux de Pierre Deligne (La Gazette des mathématiciens , n° 11 - octobre 78)

  C'est le rapport de J.-P. Serre sur les travaux de Deligne en vue de l'attribution de la médaille Fields.

* Weil. Foundations of algebraic geometry (1949)

  Livre de base, très théorique et qui a un peu vieilli.

Notion de tangente à une courbe

chez les élèves de seconde

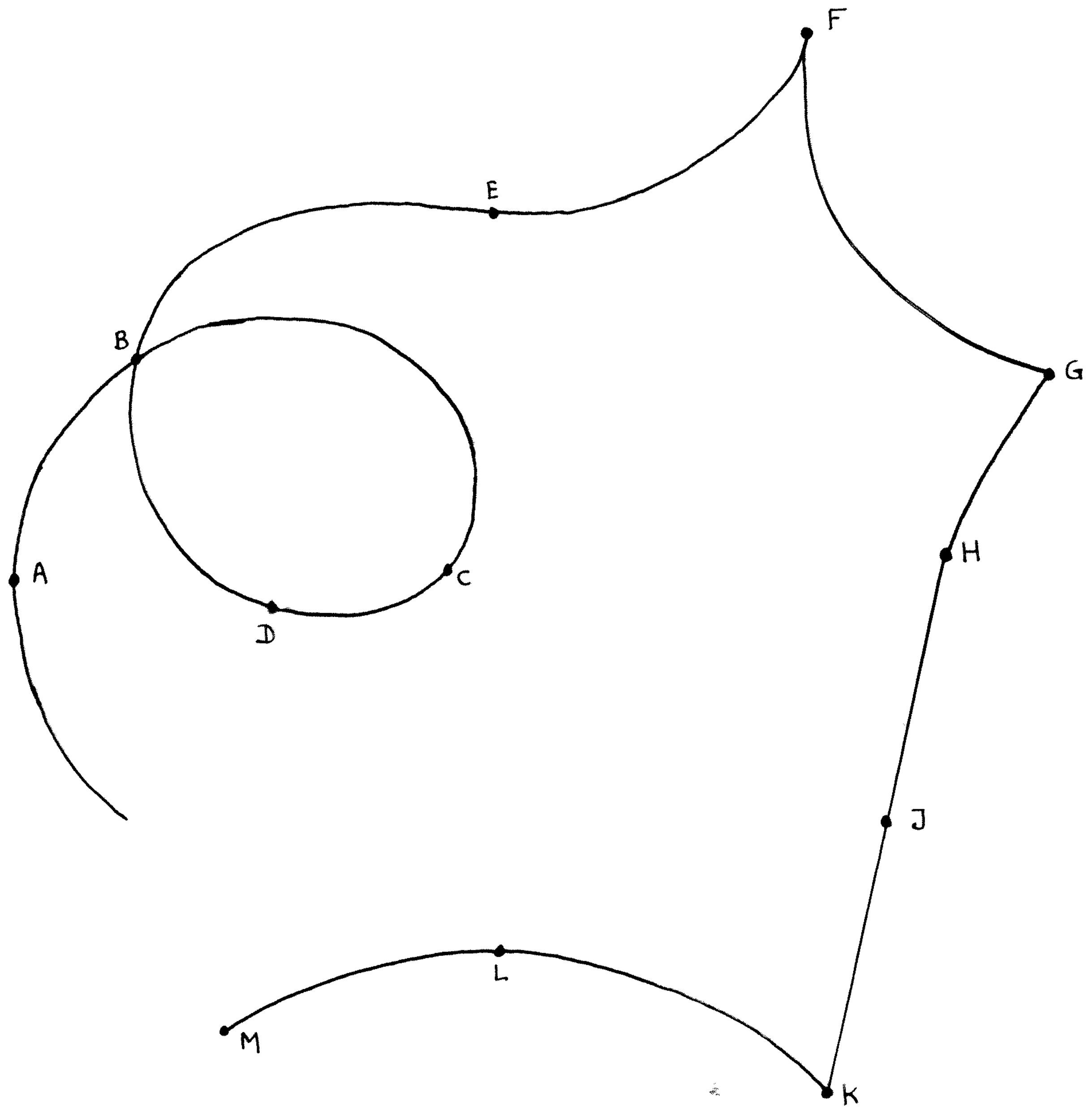
I - Introduction

Les nouveaux programmes de physique pour la classe de seconde amènent à parler du vecteur-vitesse dès le début de l'enseignement de la mécanique. Cette grandeur nécessite chez l'élève une notion, au moins vague , de la tangente, en un point, d'une ligne. Cette notion n'a été vue dans le passé scolaire des élèves de seconde que dans le cas du cercle, où la tangente est perpendiculaire au rayon et coupe le cercle en un point et un seul. Elle ne sera vue en mathématiques qu'en première (tangentes à la représentation graphique d'une fonction numérique) et en terminale (fonctions vectorielles). Or, l'une au moins des présentations possibles du vecteur-vitesse en seconde (ou du moins, une propriété du vecteur-vitesse que l'on ne saurait passer sous silence) s'appuie sur une certaine connaissance de la tangente. D'où l'idée de chercher à savoir ce qu'en savent déjà les élèves de seconde, d'une manière intuitive et visuelle. (Une tout autre question, très importante à mon avis, serait d'étudier la manière d'utiliser les connaissances acquises en seconde en physique, pour enseigner en première en mathématique, les dérivées et leur interprétation géométrique). Monsieur Monnin, professeur de mathématiques, participant au groupe Math-Physique, a lancé dans cet esprit le test ci-joint, invitant de nombreux collègues à le suivre. C'est ainsi que nous avons recueilli plus de 300 réponses d'élèves de seconde, nous donnant une idée assez précise du degré auquel ils possèdent ou ne possèdent pas la notion de tangente. Pour faire un travail relativement scientifique, il aurait fallu s'accompagner d'un certain nombre de précautions et mieux dominer certaines variables, (en particulier : par rapport au cours de physique, à quel moment a été passé le test ...) ce qui n'a pas été le cas. Peu importe, l'enseignement à tirer de ces réponses nous paraît loin d'être négligeable et nous permet d'énoncer quelques hypothèses qui feront peut-être l'objet d'une vérification plus sérieuse.

II - Le test posé

Le texte : La figure ci-dessous présente une ligne sur laquelle certains points sont marqués. Pour chacun des points marqués, demandez-vous s'il existe une ou plusieurs droites qu'on peut appeler "tangentes à la ligne en ce point" ; si vous pensez que oui, tracez cette droite dans la figure à la règle ; si vous pensez qu'il n'y en a pas, dites pourquoi au verso.

Le dessin : Voir ci-après le dessin le plus courant. (Il y a eu d'autres dessins, d'autres questions ...)



III - Etude des réponses

1) Quelques généralités

* il n'y a aucune différence significative entre un type de seconde et un autre (A , AB , C , T . . .)
* deux élèves sur trois (est-ce peu ? est-ce beaucoup ?) possède une notion qui n'est pas trop éloignée de celle de tangente à une courbe ; un élève sur trois

en a une idée vague ou fausse ...

* à travers les réponses écrites au verso de la feuille, on peut constater une fois de plus le niveau d'expression très très faible et un manque total de précision dans le langage. Sans vouloir insister ici sur cet aspect des choses, voici quelques exemples :

" il y a une infinité de tangentes, car à chaque point , nous pouvons tracer un cercle "

" E n'a pas de tangente car il ne se trouve pas sur une droite en forme de cercle "

" Je pense que pour les points E F G H J K M on ne peut pas tracer de droite qu'on appelle tangente car cette droite ne se trouve pas sur la même ligne et cette droite ne touche pas la ligne sur le même côté "

" Il n'y a pas de tangentes à la droite aux points B C D E H J L car les tangentes à ces points coupent la droite."

. . . .

2) Etude par type de difficultés

Un premier dépouillement des réponses nous a amené à regrouper les différents points de la ligne de la manière suivante :

type I : A , C , D , L : ils permettent de déceler s'il y a déjà une certaine notion du concept de tangente.

type II : M : extrémité de la courbe

type III : B : point double, deux "tangentes"

type IV : F , K , G :(et H suivant le dessin de départ) point anguleux ou de rebroussement.

type V : E (sauf sur l'un des dessins) point d'inflexion

type VI : J (et parfois H) point sur un segment de droite.

résultats (approchés) en pourcentage sur l'ensemble des réponses exploitées :

type	I	II	III	IV	V	VI
réussite en %	70	25	20	5	10	10

Ce qui permet de classer par ordre de difficulté les différents cas présentés.

résultats un peu plus fins (en %)

Le tableau ci-après permet de préciser un peu le type de difficulté rencontrée.

	I	II	III	IV	V	VI
pas de réponse	16	38	40	39	67	72
réponse fausse	9	34	24	47	16	15
réponse en partie juste	7	2	16	9	8	2
réponse juste	68	26	21	6	9	12

* point d'inflexion et point sur une portion de droite : ils laissent perplexe, sans idée ; l'élève a du mal à concevoir une tangente en de tels points.
* point double : la voie est ouverte pour y saisir "les tangentes".
* point à l'extrémité ou point anguleux... : c'est là qu'il y a le plus de réponses fausses ; ce sont certainement les points les plus révélateurs de la notion que possèdent les élèves ; ce seront les plus durs "à faire comprendre".

3) Etude de la stratégie susceptible d'avoir été utilisée par l'élève

Plus intéressante peut-être est la recherche de stratégies utilisées par les élèves pour répondre. Dans ce domaine, l'interprétation subjective des auteurs du dépouillement est nettement présente, mais s'appuie sur de nombreuses remarques d'élèves s'expliquant sur leur manière de procéder.

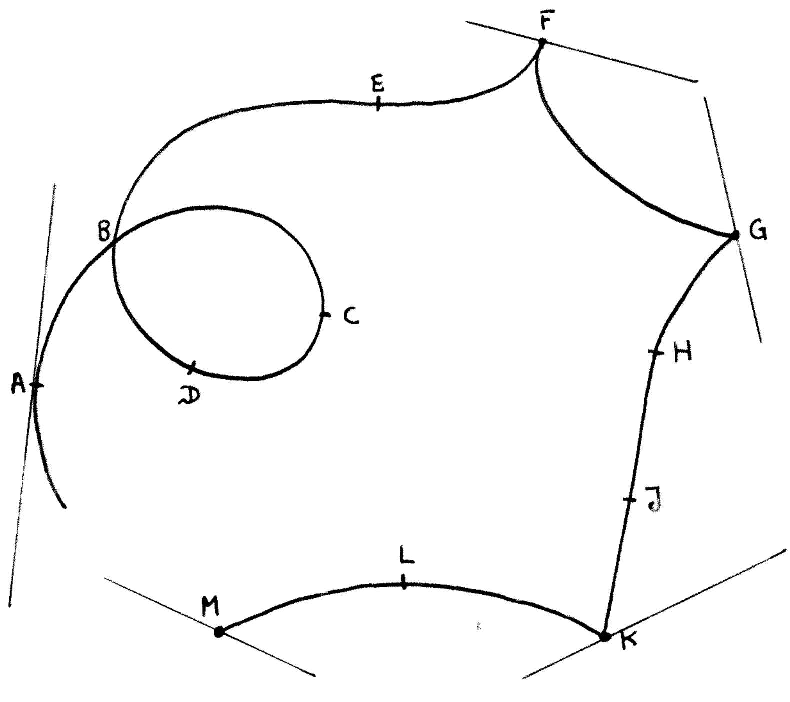
1º) Stratégie extérieure

Pour ces élèves, la tangente est une droite située de telle manière

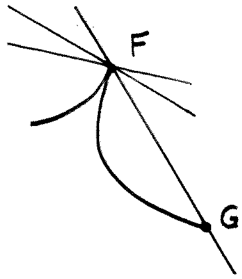
. Qu'elle touche la courbe

. et que la courbe se trouve tout entière d'un même côté de la droite.

remarque : dans certains cas, cela donne bien la tangente !



Beaucoup d'élèves tracent d'ailleurs plusieurs tangentes :

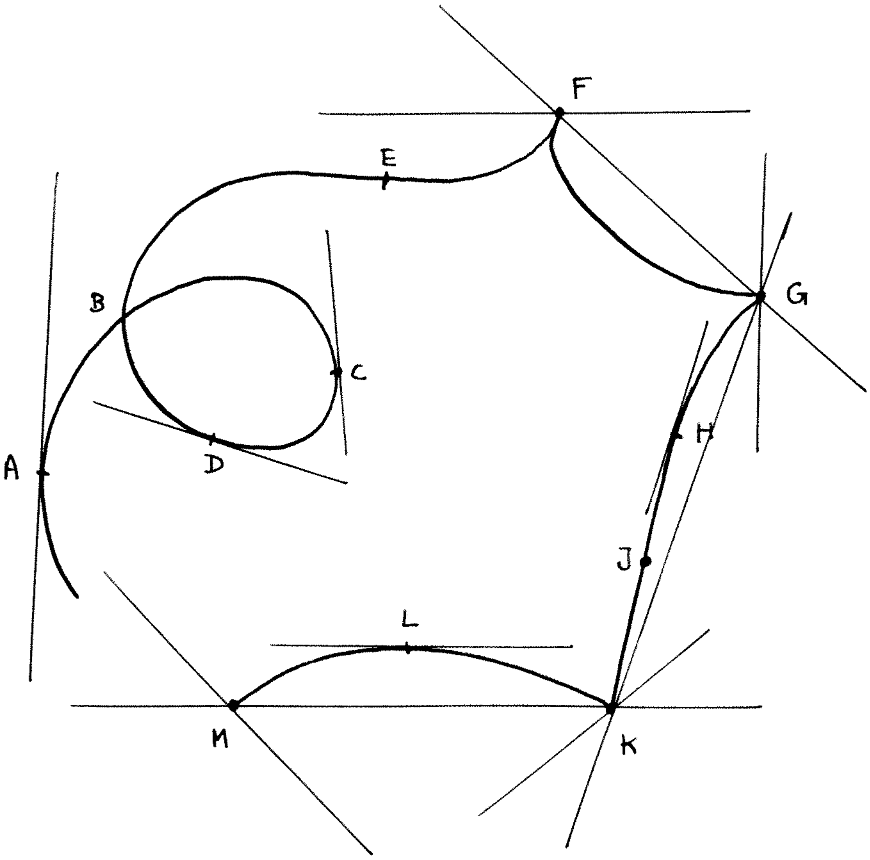


2º) <u>Stratégie localement extérieure</u>

La tangente est ici une droite située de telle manière

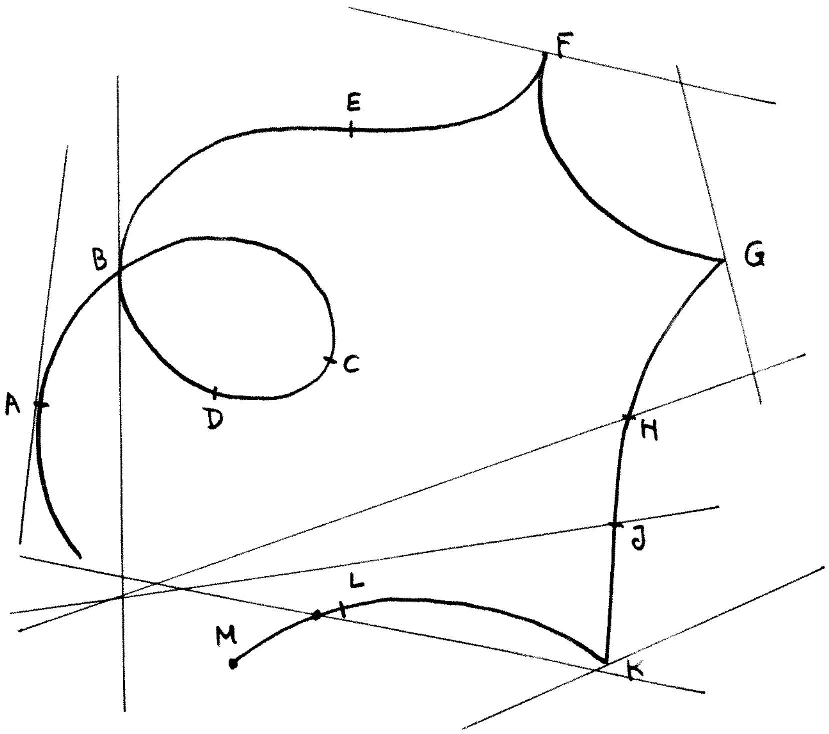
. Qu'elle touche la courbe

. et que la courbe se trouve "toute entière", au voisinage du point considéré, du même côté de la droite.

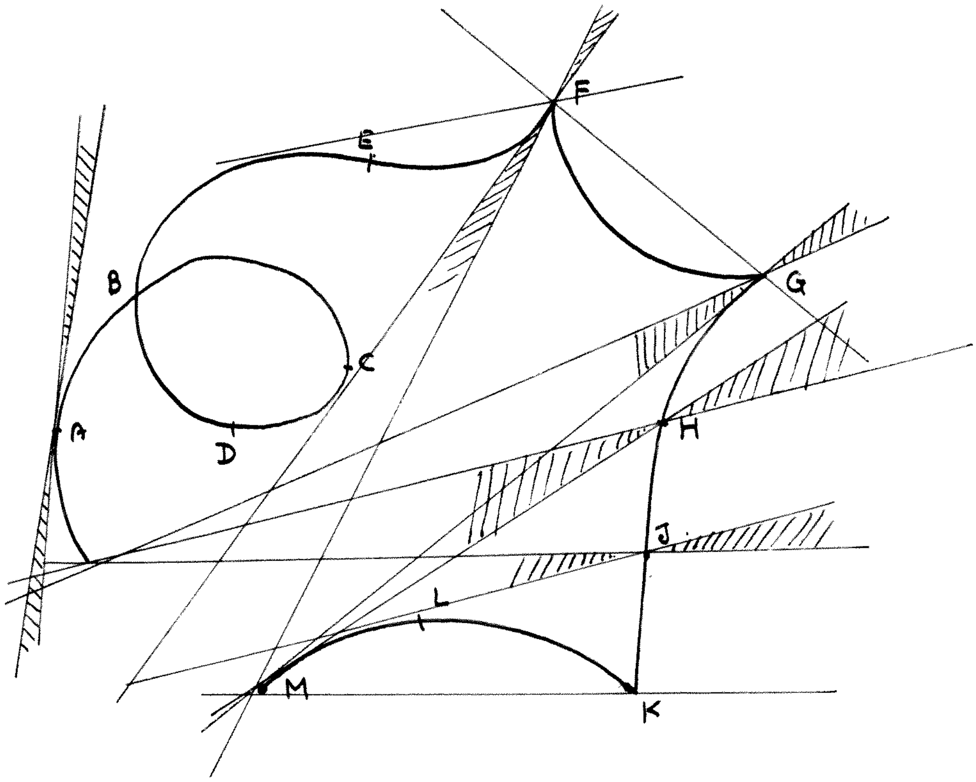


3º) <u>Stratégie du point unique</u>

La tangente est ici une droite qui rencontre la ligne en un seul point. Il est remarquable de constater à quel point certains élèves ont appliqué "cette règle" avec rigueur. Certains élèves ont même, pour chacun des points proposés, cherché toutes les droites qui ne rencontre la ligne qu'en ce point, et les résultats obtenus sont très surprenant à première vue. Que penser de telles réponses ? ... voilà au moins des élèves qui savent appliquer avec précision une règle !



stratégie du point unique



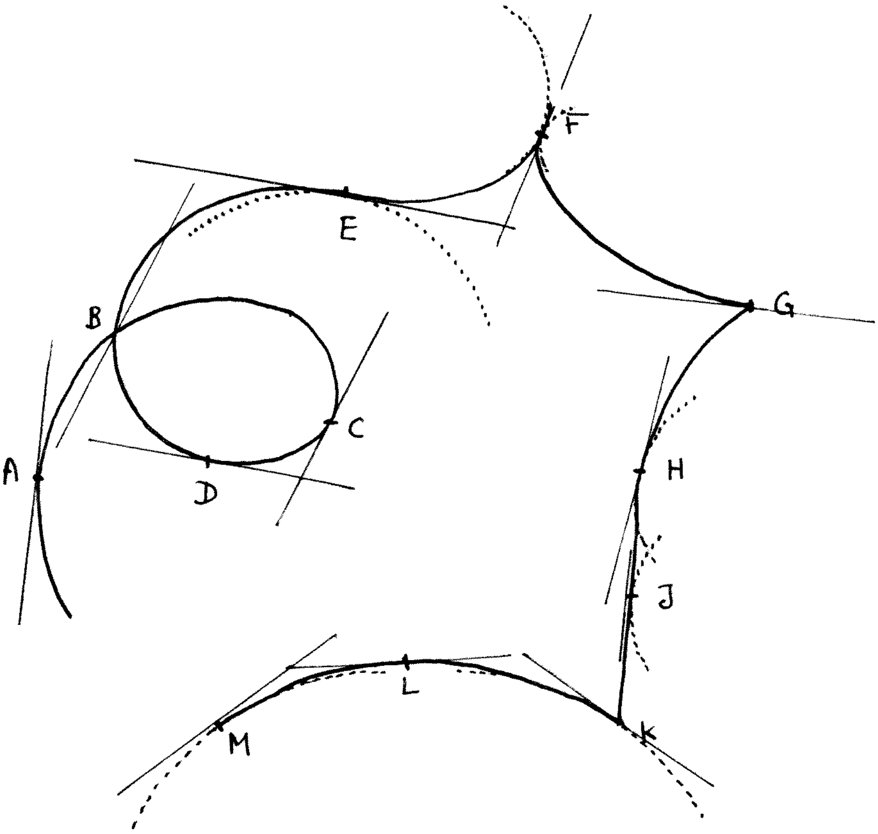
stratégie complexe, presque complète, du point unique

4º) <u>Stratégie du tout est donné</u>

Une tangente est une droite qui passe par deux points marqués de la figure. Bien que rare, ce type de réponse se rencontre d'une classe à l'autre ... On imagine le résultat obtenu par l'élève appliqué ou farceur qui dessine toutes les droites joignant deux des points marqués ...

5º) <u>Stratégie du cercle</u>

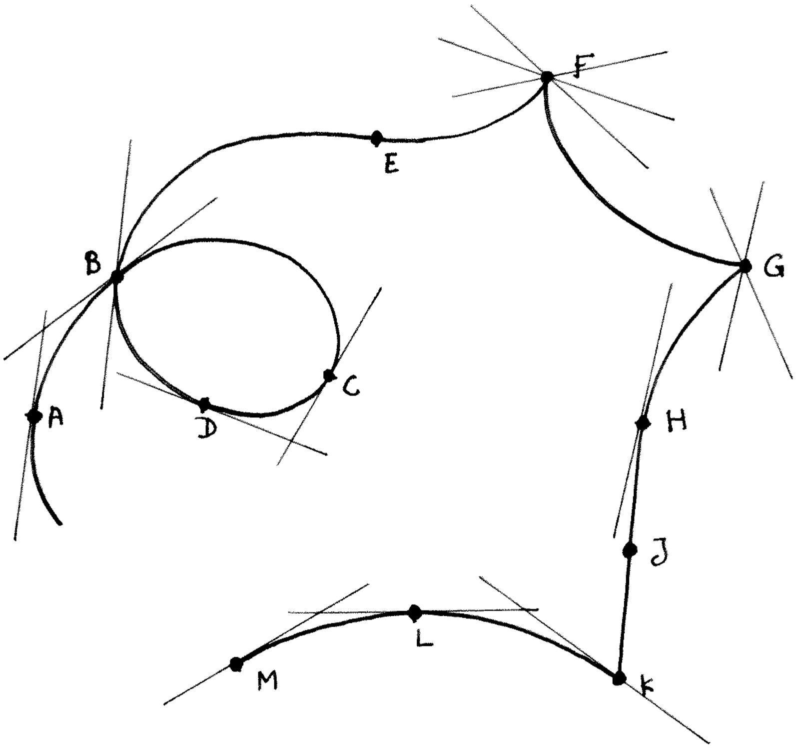
Au point considéré, on peut tracer une tangente à la ligne ou pas, suivant que, au voisinage de ce point, la ligne a une forme suffisamment semblable à un cercle ou pas. A l'appui de ce principe, certains élèves, pour tracer la tangente, ont préalablement tracé un cercle auxiliaire (et parfois même le rayon correspondant).



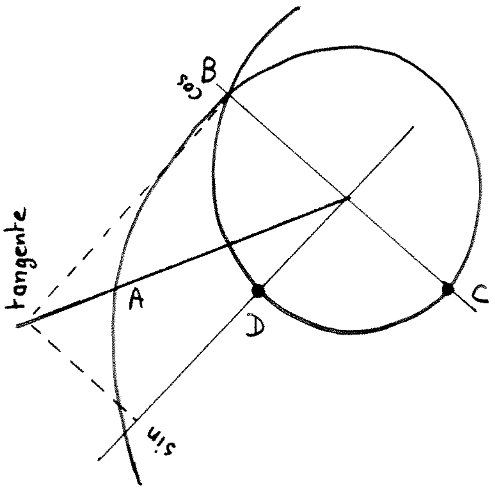
Remarque d'un élève n'ayant donné aucune droite :
"Si le dessin a été tracé à main levé il est impossible d'avoir un cercle parfait donc impossible d'avoir une tangente".

6º) <u>Vers une certaine notion correcte</u>

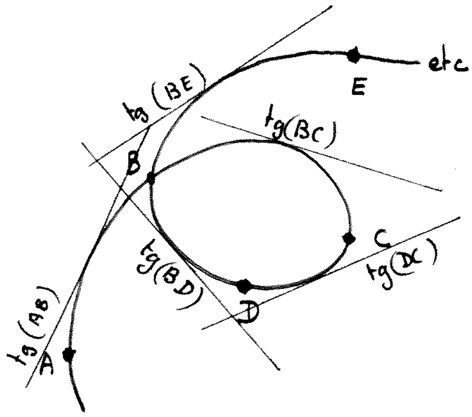
Les droites tracées montrent que, chez ces élèves, une certaine notion est présente, mais avec des erreurs (en F par exemple) ou des interdits (E et J par exemple).



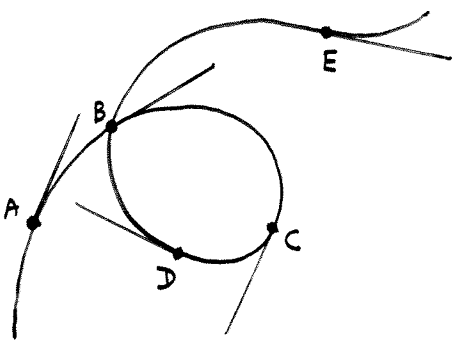
7°) Quelques particularités :



7.1) sans commentaire

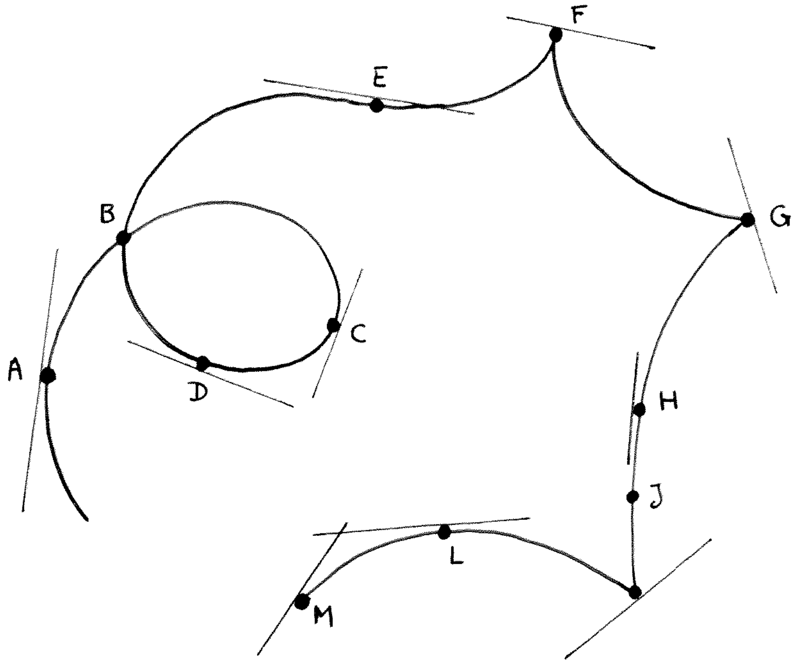


7.2) un extrait de la réponse d'un élève qui sait bien dessiner des tangentes.



7.3) demi-tangentes (souvenir de la notion de vecteur-vitesse ?)

7.5) Devinez cette dernière stratégie ... Elle nous en apprend beaucoup sur les évidences qui n'en sont pas pour tout le monde ...



IV - Une conclusion possible : Vers une pédagogie de l'apprentissage de la notion de tangente.

Là, comme ailleurs et plus qu'ailleurs, il est impossible de penser qu'une définition permette de faire acquérir la notion. Et quelle définition prendre ? Et pour être rigoureux il faudrait d'abord définir courbe, point d'une courbe,... et on en connaît les difficultés. Cependant ceci ne doit pas être un obstacle à une première approche, aussi précise que possible, de la notion de tangente, d'autant plus que celle-ci intervient dans l'enseignement de la physique : il s'agit donc d'une nécessité à laquelle doivent répondre également les professeurs de mathématiques, même si les actuels programmes ne les y incitent guère. Et il est possible d'imaginer, à partir de ce travail, une série de questions affinant progressivement la notion, à partir de ce que savent déjà les élèves, et en passant par leurs "bonnes" idées "fausses" et leurs hésitations. Si l'un d'entre nous s'y lançait, ces essais seraient favorablement accueillis....

Monnin et Meyer

Groupe Irem Math-Physique de Mulhouse
1978 - 79

Les entiers d'Euler

Les entiers dont je veux vous entretenir sont moins connus que les nombres d'Euler ou les nombres eulériens, analogues respectivement aux nombres de Bernoulli ou aux nombres de Stirling. Et pourtant, sous une certaine forme, ces entiers qui fascinaient Euler étaient déjà connus des Anciens.

Je vais d'abord en montrer l'origine et en donner l'expression générale. J'en établirai ensuite quelques propriétés remarquables. Puis j'en donnerai des applications en théorie des nombres.

On verra à cette occasion la commodité de la notation de nombre périodique et l'utilité de la notion de polynome arithmétique.

I. Expression générale des entiers d'Euler

Considérons le produit illimité

$$\Pi(X) = (1 - X)(1 - X^2)(1 - X^3)\dots$$

qu'Euler a rencontré à propos du problème de la partition des entiers. Il a par exemple montré que le nombre p(n) des partitions de n en sommes d'entiers distincts ou non, est engendré par la fonction

$$\frac{1}{\Pi(X)} = 1 + \sum_{n>0} p(n)X^n.$$

En développant $\Pi(X)$ en série entière, on s'attend a priori à trouver des coefficients de plus en plus grands. On est d'autant plus surpris de ne constater que des coefficients 1 ou -1, isolés dans des lacunes de coefficients nuls, lacunes dont l'ampleur croît dans l'ensemble et tend vers l'infini. De façon plus précise :

(1) $$\Pi(X) = 1 - X^{a_1} - X^{a_2} + X^{a_3} + X^{a_4} - X^{a_5} - X^{a_6} + \dots + \varepsilon_n X^{a_n} + \dots$$

Les coefficients sont, par couples de termes, alternativement -1 et +1. Pour voir comment se comportent les exposants, dressons en une liste initiale :

Tableau I des entiers d'Euler a_n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57	70	77	92	100
Δ_n	1	3	2	5	3	7	4	9	5	11	6	13	7	15	8	

* Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en avril 1979

Les a_n semblent suivre une loi compliquée, puisque leur vitesse de croissance est oscillante. Il est naturel de former la suite des différences $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$. On constate que ses termes de rang impair sont les entiers naturels et ses termes de rang pair sont les nombres impairs en partant de 3.

Nous allons donner une expression simple du terme général $\mathcal{E}_n X^{a_n}$ de la série (1), grâce à deux définitions et à un théorème.

Définitions

(1) Un nombre périodique $u_n = [u_1, u_2, \ldots, u_k]$ est égal au u_i des crochets tel que $n = i$, modulo k. (On représente donc très naturellement une suite de période k par ses k premiers termes, en particulier $u_n = [a,b]$ signifie que $u_n = a$ si n est impair et $u_n = b$ si n est pair.)

(2) Un polygone arithmétique P(n) n'est défini que pour n entier positif et ne prend que des valeurs entières ; il diffère d'un vrai polynome en ce que certains de ses coefficients sont des nombres périodiques.

Nous admettrons le théorème de sommation suivant, facile à établir.

Théorème 1

(1) Si $u_n = [a,b]$ et $v_n = [a,b]\,n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{(a+b)n + [a-b,\ 0]}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{(a+b)n^2 + [2a,\ 2b]\,n + [a-b, 0]}{4}$$

On voit sans peine que

$$\Delta_n = \frac{n+1}{2}\,[1,2]$$

On peut donc calculer

$$a_n = 1 + (\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n-1}).$$

En appliquant le théorème 1 et en tenant compte pour les crochets de la différence de parité de n − 1 et de n, on trouve :

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3(n-1) + [0,\ -1]}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3(n-1)^2 + [4,\ 2]\,(n-1) + [0,\ -1]}{4}$$

D'où en simplifiant

Théorème 2

(2) Le n-ième entier d'Euler est le trinome arithmétique

$$a_n = \frac{3n^2 + [4,\ 2]\,n + [1,\ 0]}{8}$$

Corollaire

Le terme général de la série $\Pi(X)$ est

$$[-1, -1, 1, 1] \quad X^{\frac{1}{8}(3n^2 + [4, 2]\; n + [1,0])}$$

Nous définissons les entiers d'Euler a_n par le tableau I, indéfiniment prolongé à l'aide des deux progressions arithmétiques imbriquées, et la formule (2) en découle. Par contre nous avons admis la formule (1). Du vivant d'Euler elle restait conjecturale. Ce n'est qu'au siècle suivant que diverses démonstrations en ont été données, notamment par Legendre (2), Cauchy, Jacobi et Sylvester. Au sujet de cette relation je crois qu'il vous intéressera d'entendre Euler lui-même. Dans un mémoire intitulé "Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs" (3), il dit :

"J'ai multiplié actuellement un grand nombre de facteurs ensemble et j'ai trouvé cette progression (.....). On n'a qu'à entreprendre cette multiplication et à la continuer aussi loin qu'on jugera à propos, pour se convaincre de la vérité de cette série (.....). J'ai longtemps cherché en vain une démonstration rigoureuse (.....) et j'ai proposé la même demande à quelques-uns de mes amis dont je connais la force dans ces sortes de questions ; mais tous sont tombés avec moi d'accord sur la vérité de cette conversion, sans avoir pu déterrer aucune source de démonstration. Ce sera donc une vérité connue, mais pas encore démontrée."

Euler a écrit ce texte en français, comme celui des citations qui vont suivre.

II. Propriétés des entiers d'Euler

Posons d'abord une question toute simple. Quelle est la parité du n-ième entier d'Euler ? En examinant le tableau I, il semble que les parités se reproduisent avec la période 8. Or,

$$a_{n+8} = \frac{3(n+8)^2 + [4, 2]\;(n+8) + [1, 0]}{8} = a_n + 6_n + [28, 26]$$

Comme $6n + [28, 26]$ est pair pour tout n, il s'en suit :

Théorème 3

La parité de a_n est celle du nombre périodique $[1,0,1,1,0,1,0,0]$

De même $a_n = [1,-1,-1,1,0,0]$ modulo 3, car $a_{n+6} = a_n + 3\ \dfrac{3n + [11,10]}{2}$

Voici maintenant une question plus importante. Trouver une propriété caractéristique des a_n. Pour que N soit un nombre d'Euler, il faut que l'équation

$$N = \frac{3n^2 + [4, 2]\; n + [1, 0]}{8}$$

ou

$$3n^2 + [4, 2]\; n + [1, 0] - 8N = 0$$

ait une racine positive entière. Il faut donc que son discriminant réduit

$$\Delta = [2,\ 1]^{2} - 3\,[1,\ 0] + 24\,N = [4,\ 1] - [3,\ 0] + 24\,N = [1,\ 1] + 24N = 1 + 24\,N$$

soit un carré parfait. Reciproquement soit

$$24\,N + 1 = k^2$$

où k, nécessairement non multiple de 3, est de la forme 3n + 2 ou 3n + 1. L'égalité (2), qui peut s'écrire

$$24a_n + 1 = 9n^2 + 3\,[4,2]\,n + [4,1] = (3n + [2,1]\ )^2,$$

montre alors que N est le n-ième entier d'Euler.

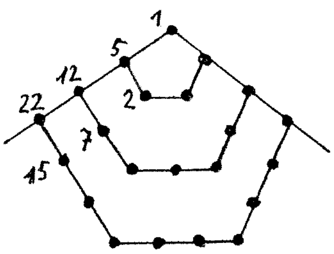
Théorème 4

Un entier n est d'Euler si et seulement si 24 N + 1 est un carré parfait k^2. Son rang est alors $\left[\frac{k}{3}\right]$ (partie entière de $\frac{k}{3}$).

Les a_n ont encore une autre propriété caractéristique. Distinguons dans (2) n impair ou pair :

1) $n = 2k - 1 \Longrightarrow a_n = \dfrac{3k^2 - k}{2} = 1,\ 5,\ 12,\ 22\ \ldots$

2) $n = 2k \Longrightarrow a_n = \dfrac{3k^2 + k}{2} = 2,\ 7,\ 15,\ \ldots$



Les entiers $\dfrac{3k^2 - k}{2}$ sont les nombres pentagonaux, connus depuis l'Antiquité. Ils comptent les points marquants des pentagones fermés ci-contre. Les entiers $\dfrac{3k^2 + k}{2}$ ont aussi une représentation arithmogéométrique simple : ils comptent les points marquants des pentagones ouverts. Nous les appellerons donc nombres pentagonaux de seconde espèce.

Remarquons qu'on les obtient aussi par $\dfrac{3k^2 - k}{2}$ pour k = −1, −2, −3, ...

Théorème 5

Les entiers d'Euler sont identiques aux nombres pentagonaux $\dfrac{3k^2 \pm k}{2}$

Les a_n vérifient-ils une relation de récurrence ? Oui, car a_n est un polynome arithmétique. On sait en effet (1) que tout polynome arithmétique u_n de caractéristiques (d, g, p) (on précisera de suite cette notion) vérifie la relation de récurrence linéaire

$$\left\{(1 - u)^{d - g}\,(1 - u^{p})^{g + 1}\right\} = 0$$

les accolades signifiant que dans le polynome développé on remplace toute puissance u^i par u_{n-i}.

Pour a_n de (2) le <u>degré</u> $d = 2$, le <u>grade</u> $g = 1$ (c'est-à-dire que n^1 est la plus haute puissance à coefficient périodique) et la <u>pseudo-période</u> $p = 2$ (plus petit commun multiple des périodes des coefficients). Donc :

$$\left\{(1 - a)(1 - a^2)^2\right\} = \left\{1 - a - 2a^2 + 2a^3 + a^4 - a^5\right\} = 0$$

et par suite :

Théorème 6

<u>Les entiers d'Euler vérifient la relation de récurrence linéaire</u>

$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-5} = 0.$

Quelle est la fraction génératrice de a_n ? On sait (1) que tout polynome arithmétique u_n de relation de récurrence $\left\{F(u)\right\} = 0$ est engendré par une fraction rationnelle $\dfrac{f(X)}{F(X)}$, où le degré de $f(X)$ est inférieur à celui de $F(X)$. Donc a_n est engendré par une fraction

$$\frac{f(X)}{(1 - X)(1 - X^2)} = 1 + X + 2X^2 + 5X^3 + 7X^4 + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

où le polynome $f(X)$ est du 4e degré au plus. On en déduit facilement

$$f(X) = 1 - X^2 + 3X^3 + X^4$$

d'où :

Théorème 7

Les entiers d'Euler sont engendrés par la fraction rationnelle

$$\frac{1 - X^2 + 3X^3 + X^4}{(1 - X)(1 - X^2)^2} = 1 + \sum_{n > 0} a_n X^n$$

III. Applications

1) Partitions d'entiers.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Théorème 8

<u>Soient p et i respectivement les nombres de partitions d'un entier en un nombre pair ou impair d'entiers inégaux. Alors $p = i$, sauf pour les entiers d'Euler. Pour un tel entier de rang n, $p = i + \left[-1, -1, 1, 1\right]$, la variable du crochet périodique étant n.</u>

Corollaire

<u>Le nombre de partitions d'un entier en parts inégales est pair, sauf pour les entiers d'Euler</u>.

Le coefficient C_N dans la série entière

$$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\ldots = 1 + C_1X + C_2X^2 + \ldots + C_NX^N + \ldots$$

est le même que celui de X^N dans le polynome

$$(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\ldots(1-X^N) = 1 + C_1X + C_2X^2 + \ldots + C_NX^N + X^{N+1}P(X). \tag{3}$$

Or en effectuant le produit (3) sans réduire les termes semblables, on obtient avec le coefficient (+1) tout X^N dont l'exposant se présente comme partition de N en un nombre pair de termes inégaux et avec le coefficient (−1) tout X^N dont l'exposant est obtenu comme partition de N en un nombre impair d'entiers distincts. Donc $C_N = p - i$, qui d'après (1) vaut $\mathcal{E}_n = [-1,-1,1,1]$ ou 0, suivant que N est entier d'Euler ou non.

Remarques

1) Quoique le théorème 8 résulte presque immédiatement de l'identité (1), il semble que Legendre ait été le premier à l'énoncer (2).

2) A présent les grandes lacunes de la série (1) s'expliquent : elles traduisent simplement le fait qu'en général les partitions d'un entier en un nombre pair ou impair de termes inégaux s'équilibrent.

2) Fonction σ (n) d'Euler

On désigne habituellement par σ (n) la somme des diviseurs de l'entier n. Ainsi $\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Voici les premières valeurs de σ (n) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
σ(n)	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31

Les nombres premiers sont évidemment caractérisés par $\sigma(p) = p + 1$. Pour des nombres premiers inégaux $p_1, p_2, \ldots, p_r$ la fonction σ (n) est multiplicative, c'est-à-dire

$$\sigma(p_1 p_2 \ldots p_r) = \sigma(p_1)\sigma(p_2)\ldots\sigma(p_r)$$

On le voit aisément en effectuant le produit $(1+p_1)(1+p_2)\ldots(1+p_r)$ du second membre. Plus généralement

$$\sigma(p_1^{\alpha 1}\, p_2^{\alpha 2} \ldots p_r^{\alpha r}) = \sigma(p_1^{\alpha 1})\ (p_2^{\alpha 2}) \ldots (p_r^{\alpha r}).$$

A propos du tableau des σ (n) Euler observe : "L'irrégularité de la suite des nombres premiers s'y trouve entremêlée (...). Il semble même qu'il y ait ici beaucoup plus de bizarrerie." Et pourtant il y a découvert une loi :

Théorème 9

La fonction σ (n) vérifie la relation récursive

$$\sigma(n) = \sigma(n-a_1) + \sigma(n-a_2) - \sigma(n-a_3) - \sigma(n-a_4) + \ldots, \text{ par convention } \sigma(k) = \begin{cases} n & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Les a_i sont les entiers d'Euler et les signes sont alternés par couples de termes.

Exemple : $b(7) = b(6) + b(5) - b(2) - b(0) = 12 + 6 - 3 - 7 = 8.$

Voici l'ingénieuse démonstration du maître.

Prenons la dérivée logarithmique des deux membres de (1) et multiplions la par (-X) :

$$Y = \frac{X}{1-X} + \frac{2X^2}{1-X^2} + \frac{3X^3}{1-X^3} + \dots = \frac{X + 2X^2 - 5X^5 - 7X^7 + \dots}{1 - X - X^2 + X^5 + X^7 \dots} = \frac{N}{D}\,.$$

Développons les fractions du premier membre en série entière :

$$\begin{array}{rcccccccccl}
Y = & x & + x^2 & + x^3 & + x^4 & + x^5 & + x^6 & + x^7 & + x^8 & + \dots \\
& & 2x^2 & & + 2x^4 & & + 2x^6 & & + 2x^8 & + \dots \\
& & & 3x^3 & & & + 3x^6 & & & + \dots \\
& & & & 4x^4 & & & & + 4x^8 & + \dots \\
& & & & & 5x^5 & & & & + \dots \\
& & & & & & 6x^6 & & & + \dots \\
& & & & & & & 7x^7 & & + \dots \\
& & & & & & & & 8x^8 & + \dots \\
\hline
\end{array}$$

où

$$Y = b(1)X + b(2)X^2 + b(3)X^3 + b(4)X^4 + \dots$$

La relation 0 = YD − N s'écrit donc

$$\begin{array}{rcccccccl}
0 = & b(1)x & + b(2)x^2 & + b(3)x^3 & + b(4)x^4 & + b(5)x^5 & + b(6)x^6 & + b(7)x^7 & + \dots \\
& & - b(1)x^2 & - b(2)x^3 & - b(3)x^4 & - b(4)x^5 & - b(5)x^6 & - b(6)x^7 & + \dots \\
& & & - b(1)x^3 & - b(2)x^4 & - b(3)x^5 & - b(4)x^6 & - b(5)x^7 & + \dots \\
& & & & & & + b(1)x^6 & + b(2)x^7 & + \dots \\
\hline
& -x & - 2x^2 & & & + 5x^5 & & + 7x^7 & + \dots
\end{array}$$

En annulant le coefficient de X^n au second membre on trouve la relation (4). On le voit facilement en regardant comment s'obtient par exemple le coefficient de X^7.

Signalons une proposition d'Euler qui ressemble étrangement à la précédente. Elle concerne le nombre de partitions de n, dont voici les premières valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

Théorème 10

Le nombre $p(n)$ de partitions de n, répétitions admises, vérifie la relation récursive

$$p(n) = p(n-a_1)+p(n-a_2)-p(n-a_3)-p(n-a_4)+\dots, \text{ par convention } p(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Les a_i sont les entiers d'Euler et les signes sont alternés par couples de termes.

Cette formule résulte immédiatement du fait déjà mentionné que $p(n)$ est engendré par $\frac{1}{\Pi(X)}$.

N'est-ce pas fabuleux que deux êtres aussi disparates que σ_n, la somme des diviseurs de n, et p_n, le nombre de ses partitions, suivent la même loi récursive, à un détail près ($\sigma(0) = n$, $p(0) = 1$) ?

Ramanujan a montré que $p(5k - 1) = 0$, modulo 5. J'ai trouvé un résultat analogue pour $\sigma(n)$:

Théorème 11

Tout $\sigma(3k - 1)$ est multiple de 3

Abrégeons la notation "A = B, modulo 3" en l'écrivant $A \equiv B$. Désignons par p ou q un nombre premier N autre que 3, suivant que $N \equiv -1$ ou $N \equiv 1$.

La décomposition en facteurs premiers de $n = 3k - 1$ est de la forme

$$n = 3k - 1 = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}) = PQ.$$

De $n \equiv -1$ et $Q \equiv 1$ il résulte $P \equiv -1$ et donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ impair.

Il y a donc au moins un α_i, soit α, impair et par suite

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha \equiv 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^\alpha \equiv 0$$

Or, on sait que

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\,\sigma(p_2^{\alpha_2}) \dots \sigma(p_r^{\alpha_r}) \times \sigma(q_1^{\beta_1})\,\sigma(q_2^{\beta_2}) \dots \sigma(q_s^{\beta_s}).$$

Par suite $\sigma(n) \equiv 0$, car dans ce produit le facteur $\sigma(p^\alpha) \equiv 0$.

Remarques

1) On voit de même que $\sigma(n)$ est multiple de 3, si et seulement si la décomposition de n en facteurs premiers présente au moins une puissance de la forme $(3k - 1)^{2k'+1}$ ou $(3k + 1)^{3k-1}$.

2) Liouville a montré que $\sigma(n)$ est pair, sauf si n est un carré ou le double d'un carré.

Pour finir je voudrais vous lire et commenter un texte d'Euler, qui montre, avec une charmante fraîcheur, d'une part son enthousiasme pour son étonnante formule (4) et d'autre part le mystère qui entourait encore pour lui les entiers d'Euler :

"On sera d'autant plus surpris de cette belle propriété, qu'on ne voit aucune liaison entre la composition de ma formule et la nature des diviseurs sur la somme desquels roule la proposition. La progression des nombres 1,2,5,7,12,15, ... ne paraît pas seulement avoir nul rapport au sujet dont il s'agit, mais, comme la loi de ces nombres est interrompue et qu'ils sont mêlés de deux progressions différentes, à savoir 1,5,12,22,35,51, ... et 2,7,15,26,40, 57, ..., il semble presque qu'une telle irrégularité ne saurait trouver lieu dans l'Analyse."

Ainsi Euler s'étonne que a_n prenne ses valeurs dans deux progressions différentes, plus précisément dans deux trinômes du second degré. Or, contrairement à ce qu'il pense, on rencontre fréquemment en analyse des suites d'entiers qui prennent leurs valeurs dans plusieurs polynomes : ce sont les polynomes arithmétiques, qui ont tous une fraction rationnelle génératrice et vérifient une relation de récurrence linéaire. Il est piquant de constater que de telles suites se présentent en particulier dans une question dont justement Euler s'est occupé : la partition d'un entier en parts de valeurs données. En voici un exemple concret : de combien de manières peut-on partager un ensemble de n objets identiques en lots de 12, 13 et 17 pièces ? Cela revient à trouver le nombre j_n de solutions non négatives de l'équation diophantienne

(5) $\qquad 12X + 13Y + 17Z = n.$

Ces partitions sont régies par un théorème très général, dont la première partie est due à Euler :

<u>Théorème 12</u>

<u>Le nombre j_n de solutions non négatives de l'équation diophantienne à coefficients entiers positifs</u> $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i = n$ <u>est engendré par la fraction</u>

$$\frac{1}{(1-t^{\alpha_1})(1-t^{\alpha_2})\dots(1-t^{\alpha_r})} = \sum_{n\geqslant 0} j_n t^n$$

<u>La fonction j(n) est un polynome arithmétique qui a pour degré r − 1, pour grade m − 1, m étant le nombre maximum de α_i ayant un diviseur commun autre que 1, et pour pseudopériode le plus petit commun multiple des α_i (1).</u>

Ainsi pour l'exemple (5) j_n est un polynome arithmétique de caractéristiques (2,0,2652). Plus précisément on sait (1) que j_n vérifie une relation de la forme

$$2(12 \times 13 \times 17)j_n = n^2 + (12 + 13 + 17)n + u_n$$

où u_n est un nombre de période 12 x 13 x 17 = 2652. Le nombre j_n prend donc ses valeurs non pas dans 2 mais dans 2652 trinômes du second degré.

Vous pensez sans doute que les 2652 composantes de u_n sont longues à calculer et l'expression de j_n longue à écrire. Il n'en est rien. Le calcul de u_n prend exactement 5 secondes, car il se fait par ordinateur (avec le programme de résolution d'un système d'équations linéaires, dont dispose tout centre de calcul) et j_n s'écrit

$$j_n = \left\| \frac{n^2 + 42n + 100(A_n - B_n)}{5304} \right\|$$

où

$$A_n = [5,21,25,17,-2,17,25,21,5,30,42,42,30]$$

$$B_n = [-2,17,6,17,-2,0,24,17,33,17,24,0]$$

ont respectivement 13 et 12 composantes ; les doubles barres désignent l'entier le plus proche.

E. EHRHART,
Strasbourg.

(1) E. Ehrhart - Polynomes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhäuser, Bâle, 1977

(2) A.M. Legendre - Théorie des nombres, 1830

(3) L. Euler - Opera Omnia, série 1, Vol. 2, p. 241-253

PRECISIONS

Le compte-rendu d'une expérience pédagogique est toujours chose délicate : trop de détails, et la narration sera pénible, la lecture fastidieuse ; pas assez et certains lecteurs se méprendrons sur le sens de certains passages.

L'article "Philosophie et mathématique" pêche sans doute par un défaut d'informations. D'autant plus que comme nous l'avions dit à la fin, le mot "sexe" reste tabou et pas seulement auprès des parents d'élèves puisque certains lecteurs de "L'Ouvert" ont été étonnés qu'on puisse parler de relation sexuelle dans un cours.

Nous tenons donc à apporter les précisions suivantes sur le déroulement de cette expérience :

- Ce sont les élèves eux-mêmes qui à la lecture des résultats du sondage du "Nouvel Observateur" et en les comparant à leur comportement, ont estimé qu'il y avait peut-être tromperie. Pour vérifier cette hypothèse le professeur de philosophie leur a proposé d'effectuer le même sondage dans l'ensemble de ses classes. Cette proposition fut acceptée par les élèves. Ceux-ci se sont d'ailleurs bien rendu compte du biais introduit dans les réponses en raison du non-anonymat de l'enquête ainsi réalisée entre eux.
- Ce n'est qu'après coup que le professeur de mathématique a observé que les questions 3 et 4 étaient (volontairement ou non) très mal présentées. Les élèves avaient déjà réalisé leur enquête et c'est pourquoi dans le texte de l'article le commentaire d'élèves vient avant la critique mathématique. Cette critique a durée environ une heure face à des élèves de terminale C dont l'intérêt pour le cours de philosophie s'est soudain accru.

Nous ne renions nullement cette expérience malgré ses lacunes et ses défauts. Il nous semble pédagogiquement bon de partir des désirs des élèves pour les amener à réfléchir à travers la philosophie, les mathématiques ou une autre discipline sur la société actuelle. Ouvrir l'école sur le monde, c'est ne pas refuser, à l'occasion, de parler des questions sexuelles en classe quand elles s'étalent dans toutes les publications accessibles aux élèves.

J.-J. EPP et J. LEFORT

REGIONALE A.P.M.E.P.
de Strasbourg

Année 1979/1980

MEMBRES DU COMITE

Mr HAEGEL Marcel	Route de Wangenbourg 67310 COSSWILLER	
Mr BURG Pierre	8, rue du Haut Koenigsbourg 67800 HOENHEIM	
Mr AUGÉ Lucien	S.P. 69487	27.71.83
Mr BULBER André	Rue Pierre Fontaine 67210 OBERNAI	91.12.68
Mr DE COINTET Michel	25, rue des Acacias 67600 SELESTAT	92.10.61
Mr EILLER Robert	4, rue Charles Brauer 67400 ILLKIRCH-GRAFFENSTADEN	66.09.46
Mr GLASER Jacques	Lotissement Le Hameau d'Alsace 67460 SOUFFELWEYERSHEIM	20.10.36
Mr GOERG J-Baptiste	29, rue Saint Florent 67200 STRASBOURG	30.01.87
Mme LAMBINET Paulette	4, rue J-S Bach 67600 SELESTAT	92.02.71
Mr LEFORT Jean	22, rue Albert Schweitzer WINTZENHEIM 68000 COLMAR	27.07.82
Mr MARTZ André	7, rue de Scherwiller 67100 STRASBOURG	34.42.09
Mr MEHL Guy	8, rue de Franck 67000 STRASBOURG	31.05.62
Mle MOLLET Françoise	29, rue Erckmann Chatrian 67000 STRASBOURG	36.15.60
Mr RIEHL Bernard	5, rue des Veaux 67000 STRASBOURG	35.66.95
Mr SILVESTRE Henri	17, rue Grimling 67200 STRASBOURG	30.33.96
Mr SAMSON Jean	9, rue du Cheval 67100 STRASBOURG	34.43.40
Mr SCHMITT Jean Denis	14, rue Saint Thomas 67540 ECKBOLSHEIM	78.38.14

UNIVERSITE LOUIS PASTEUR

INSTITUT de RECHERCHE
MATHEMATIQUE AVANCEE

Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 1

10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex (France)
Téléphone (88)61.48.20

le 4 janvier 1980

Le Séminaire sur les FONDEMENTS DES SCIENCES est consacré cette année à quelques points concernant l'Histoire et le développement de certaines notions mathématiques. Les organisateurs ont fait un effort particulier pour solliciter des conférenciers prestigieux et leurs efforts ont été couronné de succès (voir programme ci-dessous) .

J'ai à coeur de recommander à mes collègues un effort en vue d'achalander ce séminaire .

G. REEB

PROGRAMME

17 Janvier	**M. Jean DIEUDONNE,** de l'Académie des Sciences : «Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques»
24 Janvier	**M. Bernard MALGRANGE,** Université de Grenoble : «Mathématique et Physique : quelques aspects de leurs rapports aujourd'hui»
31 Janvier	**M. Maurice CAVEING,** C.N.R.S. «Le sens de l'axiomatisation euclidienne»
14 Février	**R.P. Pierre COSTABEL,** École des Hautes Études en Sciences Sociales : «Mathématiques instrumentales et structures logiques au XVIIème siècle»
21 Février	**M. Jean SEBESTIK,** C.N.R.S. : «Le système mathématique de Bolzano»
6 Mars	**M. Guy WALLET,** Université de Poitiers : «L'origine du calcul différentiel chez Leibniz»
13 Mars	**M. Roshdi RASHED,** C.N.R.S. : «Diophante dans les Mathématiques Classiques»
20 Mars	**M. Pierre DUGAC,** École des Hautes Études en Sciences Sociales : «Sur les fondements de l'analyse : de Cauchy à Dedekind»
27 Mars	**M. Jean-Paul PIER,** Université de Luxembourg : «Histoire de la notion de compacité»

24 Avril	**M. Jean LADRIERE**, Université Catholique de Louvain : «La philosophie mathématique de Gödel»
8 Mai	**M. Jean-Louis OVAERT**, Université de Marseille : «Le rôle des problèmes numériques dans la construction des concepts de l'analyse au XVIIIème siècle»
22 Mai	**M. Guy HIRSCH**, Université Libre de Bruxelles : «Comment la topologie est devenue algébrique»
29 Mai	**M. Gert H. MULLER**, Université de Heidelberg : «Essai sur le Platonisme dans les mathématiques d'aujourd'hui».

Toutes ces conférences auront lieu à l'Amphi A. Frenkel, ou à la Salle C9, proche de l'Amphi Strasbourg, Esplanade, à 17 heures.