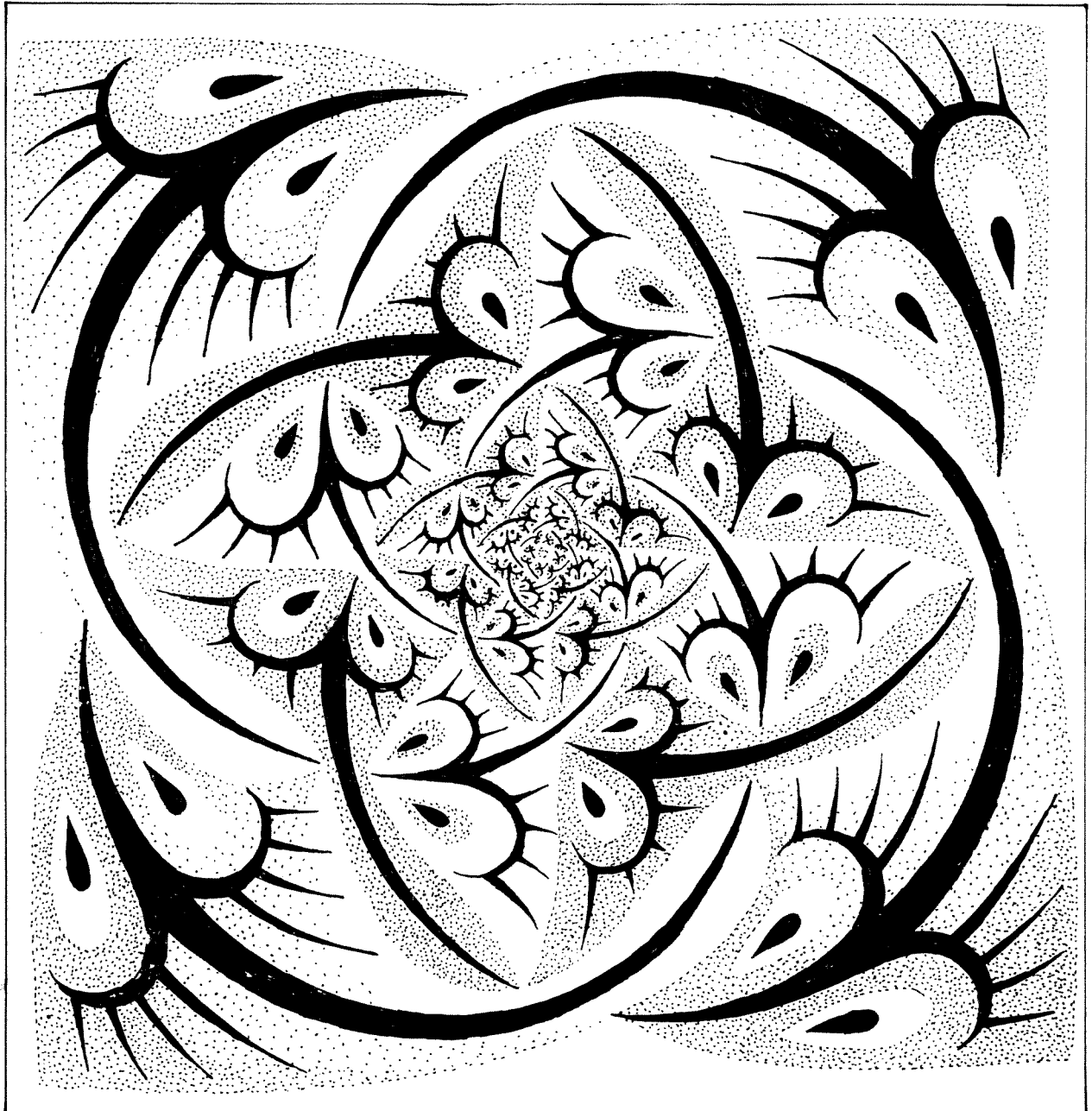


l'ouvert n°21

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG - JUIN 80



NOTRE COUVERTURE D'après Escher : "Le
cours de la vie II" 1958. Xylogravure en deux
couleurs 370 x 370 .

A l'exception des quatre "poissons" extérieurs
il s'agit d'un pavage non régulier périodique
du plan. Voir les explications en page III.

A propos de la couverture

Les pavages réguliers périodiques du plan sont classiques. Ils peuvent être classés suivant 17 groupes différents d'isométries ; (cf. La mathématique et ses applications : Galion chez Cedic). Un exemple en avait été donné sur la couverture de l'Ouvert N° 4 .

Ici il s'agit d'un pavage non régulier périodique en ce sens que ce pavage sous-tend un groupe qui est dans le cas présent engendré par une rotation de $\pi/2$ et une homothétie de rapport 2,5 , ces deux transformations ayant même centre. Ce n'est donc pas un groupe d'isométries, ce que traduisent les mots "non-régulier". C'est un groupe de similitudes. Il existe cependant une infinité de tels groupes permettant un pavage du plan : le rapport d'homothétie est arbitraire, la rotation est d'angle $2\pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Il peut s'y ajouter une éventuelle symétrie orthogonale.

Un cas particulier connu est celui où la rotation est absente. Il n'y a plus que les homothéties. Cet exemple est souvent illustré par le peintre qui peint le tableau le représentant entrain de peindre le tableau le représentant ...

Pour revenir au dessin de la couverture, il est facile de mettre en évidence des spirales logarithmiques qui sont matérialisées par les "épinnes dorsales" des poissons (à l'exception des quatre extérieurs). La propriété d'invariance par homothétie de ces spirales apparaît alors naturellement.

SOMMAIRE

<i>Hypocrisie</i> _____ j. lefort _____	1
<i>Le cube magique hongrois</i> _____ j. lefort _____	2
$1 + 1/8 + 1/27 + \dots + 1/n^3 + \dots$ est irrationnel _____ m. mignotte _____	14
<i>Flammakuecha</i> _____ bonnet et cie _____	24
<i>Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques</i> j. dieudonné (d'après les notes d'e. chaney et j. lefort) _____	27
<i>Nouvelles de Barr</i> _____ a. bulber _____	32
<i>Fermer l'ouvert</i> _____ j. lefort _____	34

Impression : I.R.E.M. de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

Responsable de la Publication : Jean LEFORT
24, rue A. Schweitzer
68000 WINTZENHEIM

Hypocrisie

Il est de bon ton de dénoncer l'hypocrisie de ceux qui nous gouvernent. Alors, dénonçons ; et pour nous limiter au domaine qui nous concerne, donnons quelques exemples relatifs à l'enseignement :

* Après avoir annoncé la diminution des horaires de mathématiques de seconde pour des raisons budgétaires, le ministre fait écrire dans les journaux que la raison essentielle est pédagogique ! Il serait intéressant de pousser le raisonnement jusqu'au bout. Quelle économie que de supprimer tout enseignement des mathématiques et on ne dirait plus que la sélection à l'école se fait sur les maths, non ! Sur l'argent bien sûr, comme pour les écoles de musique par exemple !

* Après avoir quasiment supprimé les IREM, on peut lire dans les "Objectifs de l'enseignement des mathématiques dans les lycées", texte émanant de l'inspection générale, à propos de la réforme des programmes de mathématiques : "La partie ne sera pas gagnée sans qu'une mutation profonde ne s'opère dans les habitudes d'enseignement : cette mutation est à la portée de tous ; elle relève de l'action personnelle, mais aussi collective de formation continue, avec le soutien de l'enseignement supérieur."

Je pourrai continuer. Mais à quoi bon ici ? Il est facile de voir la paille dans l'oeil du voisin et je crois que c'est un exercice salutaire en démocratie. Cela ne doit pas nous empêcher de nous demander s'il n'y a pas une poutre dans le nôtre ? Cela ne donnera que plus de forces à nos critiques.

* On proclame haut et fort qu'on est contre les heures supplémentaires et on va en réclamer, en douce, au chef d'établissement pour jurer plus tard qu'elles ont été imposées ! On ne fait pas d'heures supplémentaires, on donne des cours de promotion sociale, des heures de colles, ...

* On affecte de mépriser la notation administrative mais on s'inquiète de la meilleure note attribuée à tel collègue ; on critique l'inspection générale et on refuse la critique de ses élèves...

* On se plaint de la passivité des élèves et on est les premiers à refuser le bénévolat, et on se plaint des changements de programmes qui obligent à modifier le cours.

Arrêtons là. A quoi me sert-il de critiquer ? Ne dois-je pas, moi aussi balayer devant ma porte ? A l'avenir je laisse cette page à ceux qui la veulent .

Jean Lefort

Le cube magique hongrois

Le "cube magique" a été inventé par un ingénieur sculpteur hongrois, le professeur Ernő Rubik, qui a vendu tous ses droits de reproduction à l'industrie. Les deux spécimens que l'on peut emprunter à la bibliothèque irem proviennent de Hongrie. Il est très difficile de s'en procurer car la demande dépasse largement l'offre actuellement (*).

Pour ceux qui pensent que le mode d'emploi est donné en hongrois sur l'emballage, nous les détrompons immédiatement en donnant une traduction du texte :

**BÚVÓS
KOCKA** 

IREM
62645



térbeli logikai játék

 **Politechnika**
IPARI SZÖVETKEZET



Forgalomba hozza: TRIAL

A játék a gyermekek és felnőttek logikus gondolkodását, térképét fejleszt.

A kockát alkotó 26 db színes kis kocka szétszedés nélkül, forgatással, gyakorlatilag végtelen számú, különböző helyzetbe hozható. 1-1 irányban mind a hat szín keveredhet nagyon sokféleképpen. A játék célja 1-1 oldal ill. mind a hat oldal egy színre hozása. Egyidejűleg több oldal rendezése igen nehéz feladat, csak a forgatás lörvényszerűségeinek felismerésével oldható meg. Egy oldalnak 15-20 perc alatt rendezése már igen figyelemre méltó eredmény és jó logikai készségre vall.

Figyelje meg, különböző irányú forgatásoknál az egyes elemek helyzetüknek változásait. Az így felismert lörvényszerűségeket vezethetik a megpildához.

Magyar szabadalom: 170.062

CUBE MAGIQUE
jeu spatial et logique.

Coopérative
Politechnika.

distribué par : TRIAL

Ceci est un jeu pour enfants et adultes, développant la pensée logique et la visualisation spatiale. Il y a 26 petits cubes de couleur attachés les uns aux autres. En les tournant, ils peuvent prendre pratiquement une infinité de positions relatives. Sur chaque face, les six couleurs peuvent être mélangées de plusieurs façons. Le but du jeu est de rendre chaque face unicolore. L'obtenir sur plusieurs faces est très difficile. Cela n'est possible qu'à l'aide des connaissances des règles de rotation. Mettre 15 à 20 minutes pour colorier uniformément une seule face est un bon score et démontre une

grande aptitude à la résolution des problèmes logiques. Regardez les effets des rotations dans chaque direction sur la position de chacun des éléments. Les règles que vous pourrez ainsi découvrir vous conduiront à la solution.

Brevet Hongrois n° 170.062

TAJÉKOZTATÓ

Anyaga: Ütésálló sztirol

Jellemzői: Hőre lágyuló, kevésbé törékeny

Kezelése: Langyos, szappanos vízben mosható

Matériaux :

Matière : Styrol anti-choc

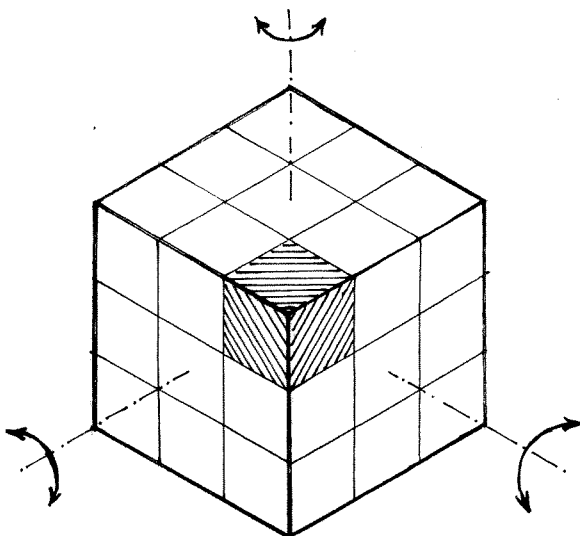
Propriétés : s'amollit à la chaleur ; peu fragile.

Entretien : lavage en eau tiède légèrement savonneuse.

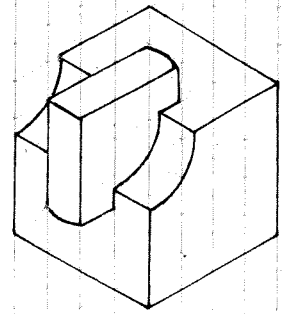
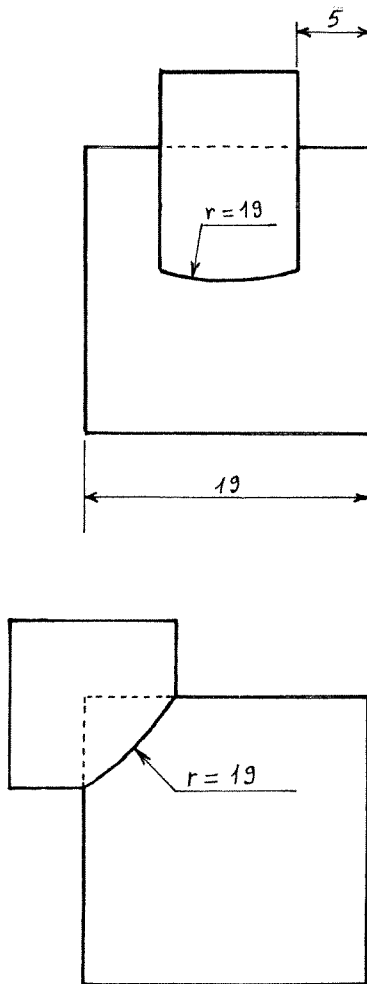
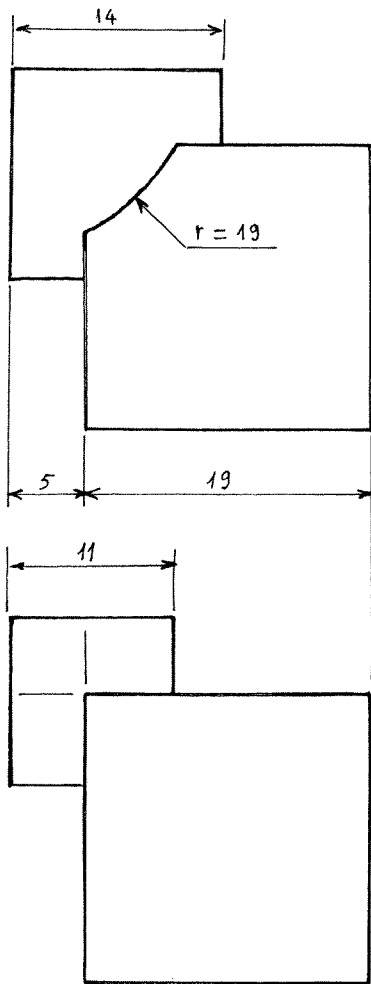
Quelques remarques a) Le mode d'emploi se complait en généralités et en banalités. Quand il annonce qu'il y a une infinité de positions relatives des couleurs, il n'exagère pour ainsi dire pas car nous démontrerons ci-dessous qu'il y en a 43,25 milliards de milliards, soit à raison d'une position par microseconde (ce qui est rapide, même pour un ordinateur) 1,370 million d'années !

b) Comme il est indiqué, s'il est presque facile de colorier une seule face, c'est un tout autre problème de colorier correctement les six faces du cube. Y passer ses loisirs pendant une dizaine de jours semble être une bonne moyenne à condition d'avoir quelques connaissances des rotations dans l'espace et de théorie des groupes.

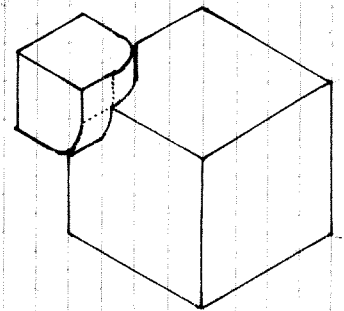
I - REALISATION ET CONSTRUCTION



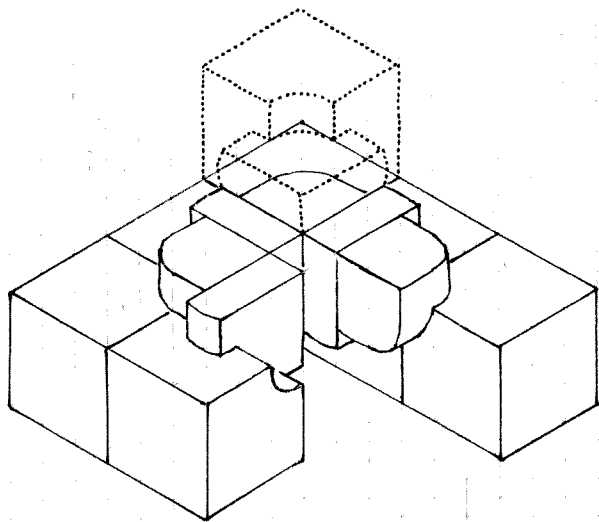
Une des premières questions qui vient à l'esprit dès que l'on a tourné les trois faces indiquées ci-contre, c'est comment sont accrochés les cubes les uns aux autres, en particulier ceux des sommets ? Comment fonctionne mécaniquement le cube magique ? Pour le comprendre le plus simple est de le démonter. Mais par où commencer ? Aucune vis, aucun trou apparent ... Et pourtant il a bien du être monté en usine ! En réalité le dernier petit cube introduit l'a été en force et il faut très légèrement forcer pour



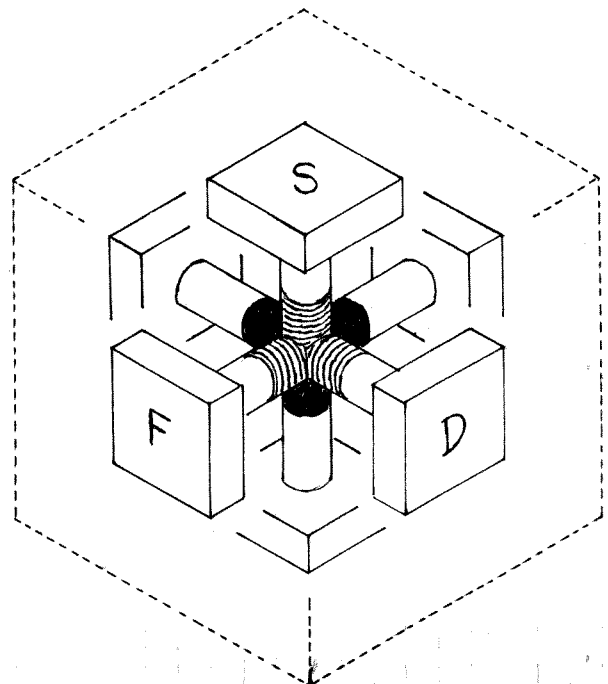
cube médian



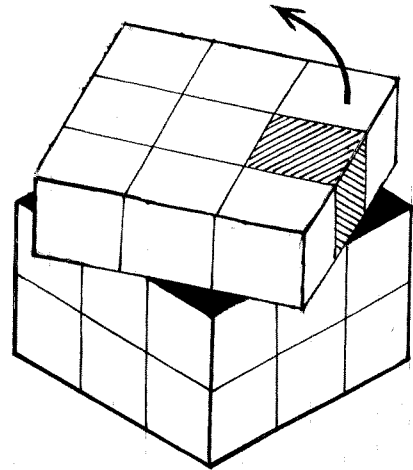
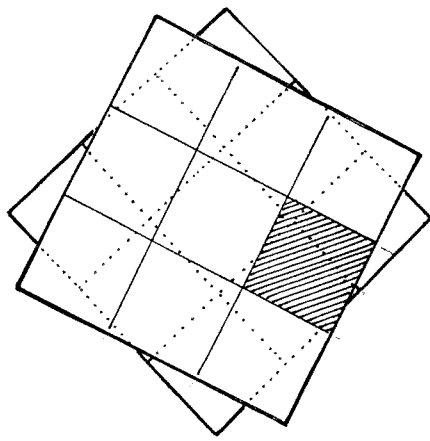
cube de coin



assemblage de quelques cubes sans le trièdre central



trièdre central; la partie ombrée est fixe, les centres des faces pivotant autour de leur axe



l'ôter, à condition de choisir l'angle convenable.

Tourner la face supérieure du cube d'environ 15 à 20° de façon à amener un petit cube médian (hachurer ci-dessus) à la hauteur de la séparation verticale de deux petits cubes des étages inférieurs. En s'aidant d'un tournevis ou d'une lame, soulever le cube médian en le basculant vers le centre. Le cube magique se démonte alors sans difficultés et laisse apparaître un mécanisme d'une simplicité étonnante (voir page hors texte). Le remontage n'est pas plus difficile, le dernier petit cube médian étant fortement pressé dans une position analogue à celle du démontage.

Attention : Pour des raisons qui vont apparaître au paragraphe suivant, il faut remonter le cube magique dans la position achevée (c-à-d avec toutes les faces unicolores). C'est ainsi une façon (peu élégante) de résoudre le problème !

II - GENERALITES SUR LES MOUVEMENTS

Il est clair qu'un cube de coin reste toujours un cube de coin et qu'un cube médian reste médian au cours d'un déplacement quelconque. On peut toujours supposer que les centres des faces sont fixes (en réalité ils peuvent tourner sur eux-mêmes comme nous l'avons vu lors du démontage, mais cela importe peu pour la coloration).

Chaque cube de coin a huit positions et dans chacune de ces huit positions il peut présenter ses trois couleurs de trois façons.

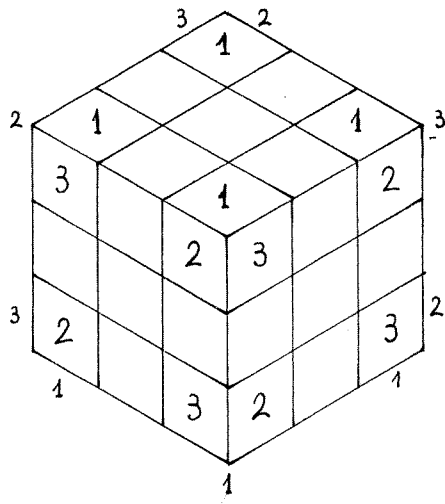
Chaque cube médian a douze positions dans chacune desquelles il peut présenter ses deux couleurs de deux façons.

Il semble donc que le nombre total de positions soit :

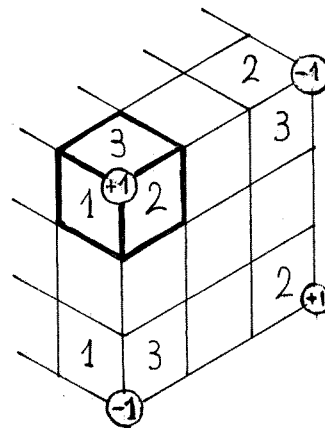
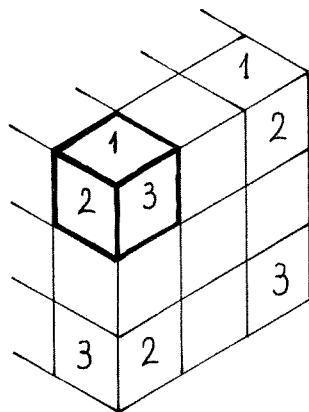
$$\begin{aligned} N &= 8 ! \times 3^8 \times 12 ! \times 2^{12} \\ &= 519\ 024\ 039\ 293\ 878\ 272\ 000 \end{aligned}$$

En réalité, par les différentes rotations, toutes ces positions ne sont pas accessibles et c'est bien pourquoi il est hautement conseillé de remonter le cube magique dans sa position achevée.

a) Pour les cubes de coin :

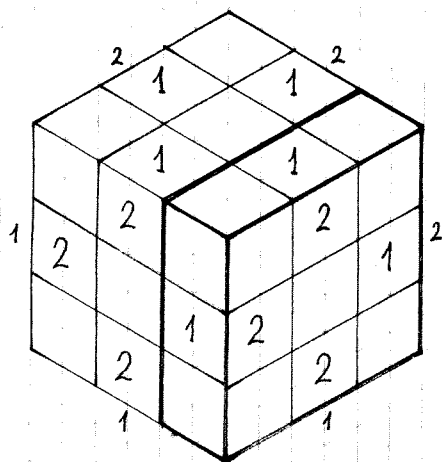


Numérotons les trois faces des cubes de coin de façon à ce que l'orientation induite soit la même sur chacun d'eux (le dessin ci-contre en donne un exemple). On regarde alors l'effet d'un mouvement élémentaire quelconque sur cette numérotation. Dans le cas de la figure, il n'y a modification de cette numérotation que si l'on tourne une face latérale. Si l'on compare la numérotation d'un cube (par exemple celui en traits gras) et de celui qui a la même position après le mouvement, on remarque que la numérotation



a tourné d'un tiers de tour dans le sens positif ; sur les quatre cubes de coin dont la numérotation a changé il y a eu exactement deux rotations d'un tiers de tour dans un sens et deux dans l'autre ; au total la somme (modulo un tour) est nulle. Comme c'est évidemment le cas pour les faces supérieure et inférieure on en déduit que le résultat est vrai pour une suite quelconque de mouvement. En conséquence les cubes de coin ne peuvent prendre que le tiers de toutes les positions possibles ; (on doit éliminer celles pour lesquelles la somme précédente équivaut à $1/3$ ou à $2/3$ de tour).

b) Pour les cubes médians :



Effectuons une démonstration analogue après avoir numéroté leurs faces comme sur la figure ci-contre. Vu la numérotation choisie, il suffit de regarder ce qui se passe lors d'un mouvement élémentaire pour la face marquée en traits gras. On remarque que le changement de numérotation n'a lieu que pour deux cubes médians, donc dans un mouvement quelconque que pour un nombre pair de cubes médians. Ceux-ci ne peuvent prendre que la moitié de toutes les positions possibles.

c) Les transpositions :

On sait qu'une permutation circulaire sur quatre éléments peut se décomposer en un produit d'un nombre impair de transpositions ; par exemple :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ D & A \end{pmatrix}$$

Or, tourner d'un quart de tour une face revient à faire à la fois une permutation circulaire sur les quatre cubes de coin et une autre sur les quatre cube médians. Il y a donc au total un nombre pair de transpositions (impair plus impair égale pair).

Finalement, le nombre total annoncé : N , doit être divisé successivement par 3, puis par 2 et encore par 2, soit en tout par 12. Le nombre de positions possibles des couleurs est alors celui qui a été donné en introduction et vaut exactement :

$$43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000$$

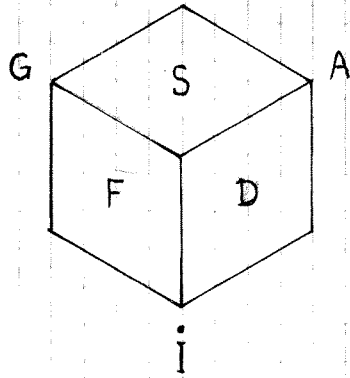
On comprend alors que si après démontage on remonte le cube au hasard, il n'y a qu'une chance sur douze pour qu'on puisse arriver à colorier uniformément chaque face.

Toutefois le nombre précédent peut être multiplié par 2048 (et non pas 4096) si l'on tient compte des rotations du centre de chaque face. Que le lecteur démontre ce résultat lui-même !

III - NOTATIONS

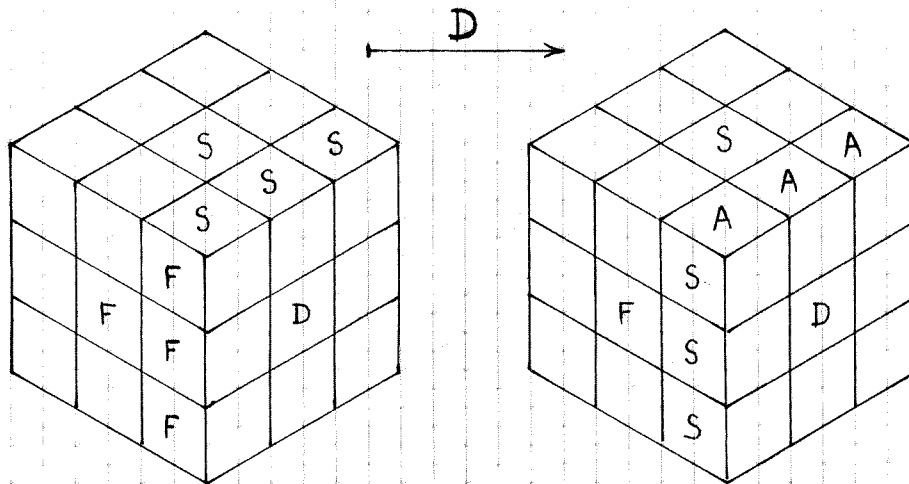
Il serait tentant d'utiliser les couleurs de chaque face pour noter une position quelconque. Cela serait cependant maladroit dans la mesure où, d'un cube à l'

autre, les couleurs ne sont pas disposées de la même façon et que, de plus, ce qui est intéressant, ce n'est pas la couleur, mais le mouvement qui échange deux positions. Utilisons donc les noms indiqués sur le croquis ci-après :



- S pour la face Supérieure
- I Inférieure
- G de Gauche
- D de Droite
- F Frontale
- A Arrière

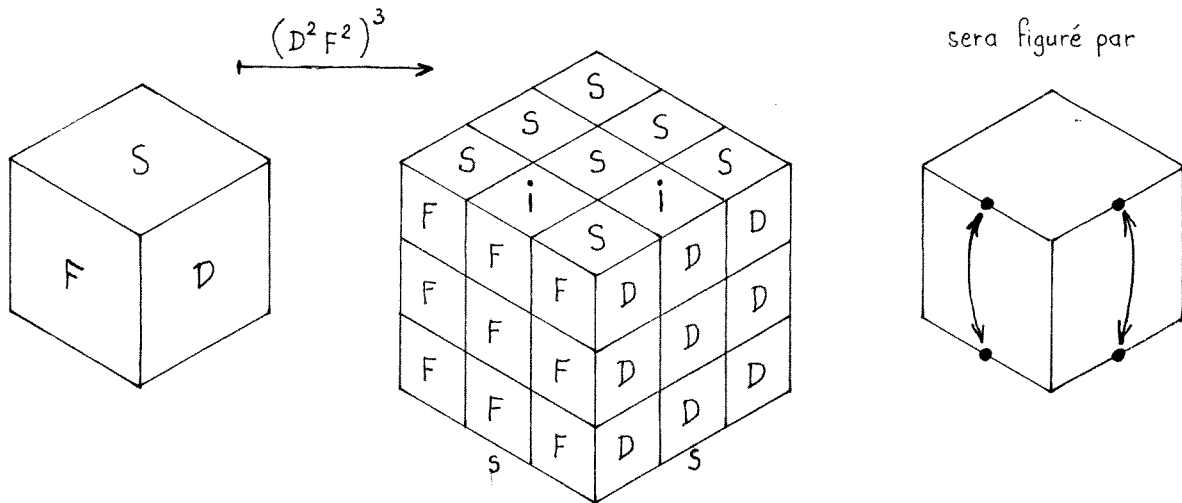
La rotation d'un quart de tour dans le sens positif d'une face quelconque sera notée par la même lettre que la face : Ainsi :



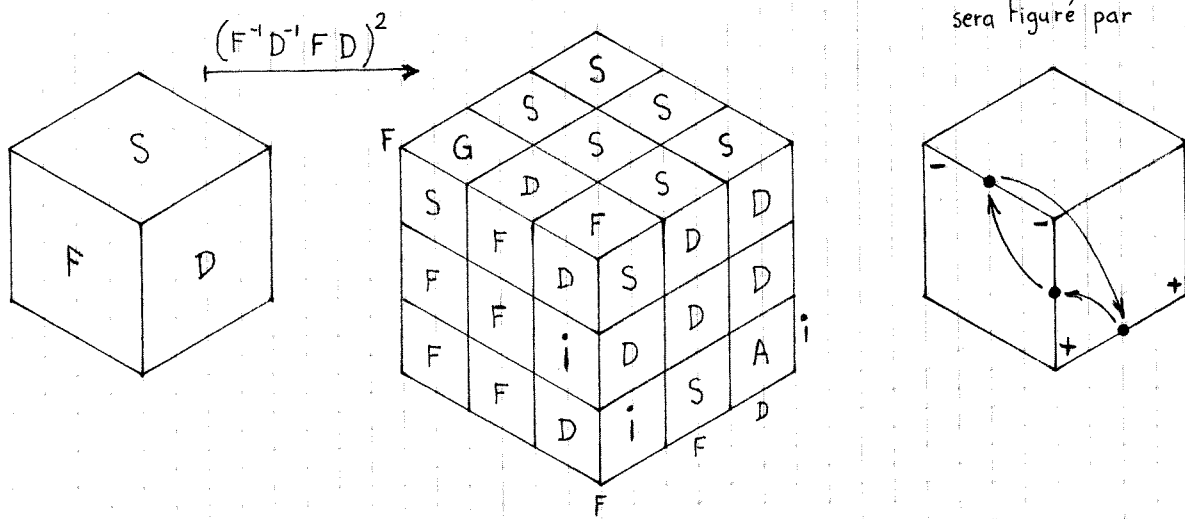
D^2 correspondra au demi-tour et $D^3 = D^{-1}$ au trois-quart de tour dans le sens positif (ou au quart de tour dans le sens négatif). Une succession de mouvement sera noté tout naturellement dans l'ordre de l'écriture ; exemple : $D F^2 (S F)^2$ signifie qu'on effectue successivement D puis F^2 puis S puis F puis S puis F .

Attention : Ce n'est pas la notation habituelle de la composition des applications, mais c'est plus facile à lire !

Dans certains cas, nous symboliserons les mouvements à l'aide de flèches



on remarquera cependant que cette figuration ne permet pas de noter un changement d'orientation d'un petit cube. On pourra parfois l'indiquer schématiquement comme par exemple :



où les signes indiquent que les cubes de coin ont tourné d'un tiers de tour dans le sens indiqué (on imagine qu'on les regarde naturellement de l'extérieur du grand cube).

IV - QUELQUES IDEES DE RECHERCHE

Dans le but de comprendre ce qui se passe, nous allons étudier quelques sous-groupes qui permettent de ne modifier la position que de certains petits cubes.

a) Le sous-groupe sandwich :

Il est formé des mouvements de la forme $D G^{-1}$, c'est-à-dire obtenus en tournant simultanément deux faces opposées en sens inverse, (Attention : avec la notation habituelle, cela veut dire les deux faces vers l'avant - ou vers l'arrière-simultanément). Cela revient à ne considérer que la rotation de la tranche intermédiaire. Nous noterons à l'aide d'une petite lettre ce mouvement :

$$d = D G^{-1}, \quad s = S I^{-1}, \quad f = F A^{-1}$$

On remarque que $d = g^{-1}$.

Ce sous-groupe est engendré par trois éléments, par exemple (f, d, s) . Il n'est pas aussi énorme que le groupe complet, il n'a que 768 éléments ce qui est assez facile à compter, et il permet l'obtention de jolies figures sur les faces, qui sont toutes de la forme ci-dessous, où α, β, γ et δ sont des couleurs. En notant

α' la couleur diamétralement opposée à α nous pouvons facilement obtenir les configurations suivantes :

α	β	α
γ	δ	γ
α	β	α

6 faces telles que $\alpha = \beta = \gamma$: "faces centrées"

6 faces telles que $\alpha = \delta = \beta' = \gamma'$: "faces en X ou croisées"

4 faces centrées et 2 faces unicolores

2 faces croisées et 4 faces telles que $\alpha' = \beta = \gamma = \delta$: "faces en +"

b) Le carré du sous-groupe sandwich :

C'est celui engendré par (f^2, d^2, s^2) . Il est encore plus simple que le précédent ; en particulier il est commutatif. Sa table de pythagore est très rapidement faite.

c) Le sous-groupe anti-sandwich :

Ce sera celui obtenu à partir de mouvements du type $D G (= G D)$. Ce groupe est plus délicat à étudier mais son carré est le même que celui du sous-groupe sandwich.

d) Autres exemples :

Nous laissons le soin au lecteur de trouver d'autres sous-groupes engendrés par quelques éléments tels que (f, d) , (FD) , En explorant ces diffé-

rentes voies, le lecteur aura remarqué qu'il est possible d'échanger deux paires de cubes médians en laissant tous les autres cubes fixes ou d'échanger deux paires de cubes de coin en laissant également toutes les autres pièces fixes. Par contre, comme il a été démontré, il est impossible de n'échanger qu'une paire de cubes.

On peut aussi échanger simultanément une paire de cubes de coin et une paire de cubes médians (c'est assez compliqué) ou bien faire tourner sur place une paire de cubes médians ou une paire de cubes de coin.

Une autre direction de recherche consiste à rechercher le nombre d'éléments de certains sous-groupes comme par exemple ceux engendrés par un seul élément ou par deux :

(S⁻¹ F) a pour ordre 63

(F D) a pour ordre 105

V - LE PROBLEME FONDAMENTAL

Il s'agit, à partir d'une position arbitraire de retrouver la position initiale (ou achevée), c'est-à-dire celle où chaque face est coloriée uniformément. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées. Dans tous les cas, les couleurs sont imposées par le centre des faces.

1ère méthode (* *)

a) On place d'abord correctement les cubes de coins en faisant abstraction des mouvements des cubes médians. Pour cela on étudiera l'effet des mouvements suivants :

$$F^{-1} D^{-1} F D \quad ; \quad (F^{-1} D^{-1} F D)^2 \quad ; \quad (F^{-1} D^{-1} F D)^3$$

b) On place ensuite les cubes médians en étudiant l'effet des mouvements :

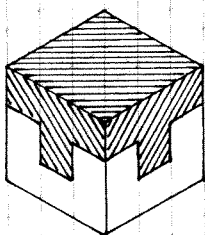
$$(D^2 S^2)^3 \quad ; \quad F^{-1} A S^{-1} (D^2 S^2)^3 S A^{-1} F$$

Dans la théorie des groupes, on remarque que l'un des mouvements est le "conjugué" de l'autre.

c) Au cours des manipulations précédentes on est amené à modifier la position du cube pour que les faces idoines soient en S, D ou F. Il faut également évaluer le nombre de transposition sur les éléments à modifier. Il est quelquefois intéressant d'effectuer quelques mouvements préalables simples dans le but de situer les petits cubes en des endroits plus agréables.

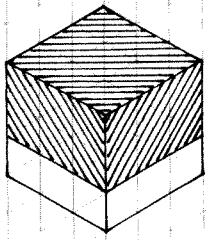
2ème méthode

a)



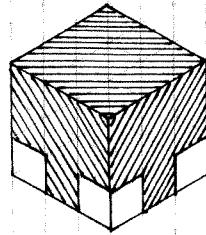
Placer correctement l'étage supérieur en tenant compte des bords comme sur le croquis ci-contre. (ceci est facile sans aucune connaissance).

b)



Placer correctement le deuxième étage en étudiant l'effet sur un cube médian de cet étage d'un mouvement tel que : $D I^{-1} D^{-1} F D^{-1} F^{-1} D$

c)



Placer correctement les cubes médians de la face inférieure en étudiant l'effet sur de tels cubes des mouvements du type :

$$(D I^2 . D^{-1} . I^2 D^{-1})(F D F^{-1})$$

ou du type de celui donné en (b) mais à la puissance 6.

d) Achever enfin la résolution du problème par des mouvements comme :

$$(D I^{-1} D^{-1} F D^{-1} F^{-1} D . I^{-1})^4$$

ou

$$(D I^{-1} D^{-1} F D^{-1} F^{-1} D)(F^{-1} I F D^{-1} F D F^{-1})$$

Dans ce dernier mouvement on remarque la combinaison de celui vu en (b) avec un mouvement "symétrique".

3ème méthode

La vôtre, obtenue peut-être en combinant certains des mouvements précédents, en trouvant certains raccourcis, en faisant preuve d'originalité, ...

En appelant "mouvement élémentaire" la rotation d'une face dans un sens ou un autre d'un quart ou d'un demi-tour, on peut estimer qu'il faut environ 200 mouvements élémentaires pour rétablir la position initiale ou achevée à partir d'une position quelconque. On conjecture même qu'une centaine de mouvements élémentaires au plus suffiraient. La première méthode donnée permet un comptage assez simple mais nécessite une bonne analyse des positions ce qui est moins utile dans la deuxième méthode qui est peut-être un peu plus longue.

CONCLUSION

Le lecteur qui m'aura suivi jusqu'ici possède tous les éléments pour résoudre n'importe quel problème qu'il peut se poser à propos du cube magique hongrois. Malgré les éléments de réponses apportés, il reste suffisamment de questions ouvertes pour pouvoir passer de nombreuses heures en compagnie de ce jouet qui reste le plus épouvantable casse-tête que je connaisse. Je lui souhaite beaucoup de plaisir.

Notes et références :

(*) En dehors des deux exemplaires du cube magique hongrois que l'on peut emprunter à l'IREM, il est possible d'en acheter auprès de :

"L'oeuf cube" 24, rue Linné, Paris 5ème.

(***) Cette première méthode est exposée par David SINGMASTER dans un fascicule intitulé : "Notes on the magic cube" que l'on peut emprunter à l'IREM. Outre des informations qui m'ont fourni la moitié de cet article on y trouve, longuement développées sur des exemples simples, des notions sur la théorie des groupes de substitution (groupes finis).

Jean Lefort

Les entiers d'Euler (E. EHRHART)

ERRATA

Dans le N° 20 de l'Ouvert il convient de lire :

- page 32, ligne 12 : un polynôme arithmétique (et non un polygone)
- page 34, Théorème 4 : Un entier N (et non n)
- page 35, Théorème 6 : $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4} - a_{n-5} = 0$
- page 38, Remarque 1 : $(3k + 1)^{3k-1}$ (et non $(3k + 1)^{3k-1}$)

PARU DANS "LE MONDE" DU 29 JANVIER 1980

Une tentative d'exclusion de l'Académie des Sciences.

Les sanctions décidées contre M. Sakharov n'ont pas été prises brusquement, mais elles ont été préparées de longue date. Seul le moment a sans doute été choisi en fonction de la conjoncture internationale. Nous croyons savoir que, au début de l'été dernier, le président de l'Académie des sciences, M. Alexandrov, a proposé d'enlever au prix Nobel de la Paix son titre d'académicien, au cours d'une réunion des instances dirigeantes de cette institution. Il n'est plus possible de fermer les yeux sur les activités d'André Sakharov, aurait-il déclaré en substance. L'exclusion est évidemment une décision grave, difficile à prendre, qui serait sans précédent. A ce moment-là un vieil homme s'est levé, l'académicien Piotr Kapitza, prix Nobel de Physique en 1978, qui a déclaré : "Si, il y aurait un précédent : Einstein a été exclu en 1933 de l'Académie allemande des sciences". Cette brève réplique a suffi pour que l'affaire soit classée et la question retirée de l'ordre du jour.

Daniel Vernet.

$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$ est irrationnel

Depuis Euler qui avait calculé les valeurs de $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, bien des gens se sont attaqués, sans succès, au problème du calcul de la somme des puissances impaires des entiers $\left(\zeta(2k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} \right)$, et ce n'est pas sans scepticisme que les spécialistes accueillirent les rumeurs selon lesquelles R. Apéry avait démontré l'irrationalité de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, d'autant plus que la personnalité originale de R. Apéry laissait à penser à un canular. Cette appréhension sembla fondée aux participants des journées arithmétiques de Luminy quant Apéry présenta sa démonstration en écrivant au tableau une suite infinie de termes tous infinis. C'était provoquer délibérément le chahut de l'assistance en reprenant une écriture très prisée d'Euler mais qu'aucun mathématicien actuel, même le moins rigoureux ne peut accepter. Et pourtant !... Il avait trouvé l'essentiel de la démonstration qui fut mise en forme par d'autres comme Cohen, Van der Poorten ...

M. Mignotte présente ici, après un rappel sur la fonction ζ et sur les techniques relatives à l'irrationalité, les principales étapes conduisant au résultat sur $\zeta(3)$.

L'OUVERT

I. Quelques formules sur la fonction ζ de Riemann

Pour $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

D'où, en particulier,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

D'autre part, la définition précédente de ζ est valable pour s complexe vérifiant $\text{Re}(s) > 1$. En comparant la série définissant ζ avec l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s}$ on voit que la fonction $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est prolongeable en une fonction holomorphe pour $\text{Re}(s) > 0$.

Riemann a démontré la célèbre équation fonctionnelle de ζ que l'on peut exprimer ainsi :

la fonction

$$\zeta(s) = \frac{s(1-s)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s)$$

est une fonction entière invariante par la transformation $s \mapsto 1-s$, Γ désignant la fonction d'Euler (prolongeant la notion de factorielle : $\Gamma(n) = (n-1)!$).

On définit les nombres de Bernoulli par la formule

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!},$$

ainsi

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 & , & & B_1 &= -1/2 \\ B_2 &= 1/6 & , & & B_3 &= 0 \\ B_4 &= -1/30 & , & & B_5 &= 0 \dots \end{aligned}$$

On démontre que ζ vérifie, pour $n \gg 0$,

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \quad (=0 \text{ si } n = -2, -4, -6, \dots)$$

Grâce à l'équation fonctionnelle, on en déduit

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} (2\pi)^{2n} B_{2n}}{2 \cdot (2n)!},$$

ainsi

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \dots,$$

ce qui montre que $\zeta(2), \zeta(4) \dots$ sont des nombres transcendants.

Malheureusement cette technique ne fournit aucune information sur les valeurs de ζ aux entiers positifs impairs : pour étudier $\zeta(2n+1)$ on aboutit à $\zeta(-2n) = 0$ tandis que $\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ a un pôle pour $x = -2n$.

Remarques

1. En plus des zéros "triviaux" $-2, -4, \dots$ on sait que la fonction ζ possède une infinité de zéros dans la bande $0 < \text{Re}(s) < 1$. L'hypothèse de Riemann, non démontrée à ce jour, affirme que ces zéros sont sur la droite $\text{Re}(s) = 1/2$.

2. Si on note d_n le p.p.c.m. des entiers $1, 2, \dots, n$ le fait que $\zeta(s)$ ne s'annule pas pour $\text{Re}(s) = 1$ permet de démontrer l'estimation

$$\text{Log } d_n \sim n.$$

11. Remarques générales sur l'irrationalité

Pour démontrer l'irrationalité d'un nombre, il faut en trouver une "bonne" définition.

Par exemple, si on pose

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

on ne sait pas utiliser directement cette formule pour démontrer l'irrationalité de e .

Autre exemple, on ignore si la constante d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

est irrationnelle ou non.

Le résultat très simple suivant caractérise les nombres rationnels

CRITERE DE RATIONALITE : soit ξ un nombre réel, on a

$$\xi \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ tel que } p/q \neq \xi \text{ implique } \left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q}.$$

c ne dépend que de ξ

Preuve :

\Rightarrow Si $\xi = a/b$ et $p/q \neq \xi$, on a

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1/b}{q}.$$

\Leftarrow Lorsque ξ est irrationnel on sait même (par la théorie des fractions continues ou grâce au principe des tiroirs de Dirichlet) qu'il existe une infinité de rationnels p/q tels que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Appliquons ce résultat au nombre e . On connaît la formule

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots;$$

elle conduit à l'estimation

$$0 < \left| e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!},$$

où le nombre entre parenthèses est un rationnel qui admet $n!$ comme dénominateur et dont le numérateur sera noté a_n . On a donc

$$0 < \left| e - \frac{a_n}{n!} \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!},$$

ce qui permet d'appliquer le critère et donc de prouver l'irrationalité de e .

Sachant qu'un nombre ξ est irrationnel il est très intéressant de déterminer une fonction f telle que pour tout rationnel p/q on ait

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > f(q),$$

une telle fonction est appelée une mesure d'irrationalité, elle vérifie nécessairement $f(q) \ll q^{-2}$.

Considérons à nouveau le nombre e , et un rationnel p/q quelconque, $q > 0$. Pour tout entier n , avec les notations ci-dessus, on a

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{a_n}{n!} - \frac{p}{q} \right| - \left| e - \frac{a_n}{n!} \right| > \left| \frac{a_n}{n!} - \frac{p}{q} \right| - \frac{1}{n \cdot n!},$$

si $a_n/n! \neq p/q$ ceci implique

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q \cdot n!} - \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Prenons $n = q + 1$ ou $q + 2$, afin que la condition $a_n/n! \neq p/q$ soit réalisée, on obtient :

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \frac{2}{(q+1)^2 \cdot (q+2)!}.$$

Cette estimation est très médiocre ! On sait que e possède le développement en fraction continue suivant

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots],$$

ce qui signifie que

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

et on en déduit (exercice de calcul assez pénible) qu'il existe une constante positive c telle que

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > c \frac{\text{Log Log } q}{q^2 \text{ Log } q},$$

résultat optimal en ce sens que cette inégalité est fautive pour $c < 1/2$.

En conclusion, pour obtenir une bonne mesure d'irrationalité il faut posséder une "très bonne" formule définissant le nombre considéré.

Par exemple, on ne connaît pas la meilleure mesure d'irrationalité de π .

III. La démonstration d'Apéry

En juin 1978, au cours des Journées Arithmétiques qui se déroulaient à Luminy,

R. Apéry donna des éléments de preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Le principe de cette preuve réside dans la formule

$$\zeta(3) = \frac{6}{5 - \frac{1^6}{117 - \frac{2^6}{535 - \frac{3^6}{\dots}}}}$$

$$34n^3 - 51n^2 + 27n - 5 - \left(\frac{n^6}{\dots} \right)$$

Voici quelles étaient les étapes indiquées, dont une preuve a été écrite par H. Cohen, Van der Poorten et D. Zagier.

1er pas :

Si

$$a_n = \sum_0^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

et

$$b_n = \sum_0^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{nk}, \text{ où } c_{nk} = \sum_1^n \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^k \frac{(-1)^{m+1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}}$$

alors les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5)u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0.$$

2em pas :

Contrairement au précédent, celui-ci est très facile. Pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$\left| \zeta(3) - c_{n,k} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

On en déduit que

$$\zeta(3) = \lim b_n / a_n,$$

ainsi que la fraction continue ci-dessus et la formule

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} (c_{n,n} - c_{n-1,n-1}) = \frac{5}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

3em pas :

Si d_n désigne le p.p.c.m. des entiers $1, \dots, n$ alors les nombres $2d_n^3 b_n$ et a_n sont entiers.

La démonstration, assez facile, utilise le fait connu que $\binom{r}{s}$ divise d_r .

4^{em} pas :

Conclusion.

On vérifie par récurrence que l'on a

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{6}{n^3 a_n a_{n-1}}.$$

D'où

$$0 < \zeta(3) - \frac{b_n}{a_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}} < \frac{c'}{a_n^2}.$$

On démontre aussi l'estimation

$$a_n \sim c \frac{\alpha^n}{n^{3/2}}, \text{ où } \alpha = (1 + \sqrt{2})^4 \text{ (donc } \alpha > e^3).$$

Posons $p_n = 2d_n^3 b_n$, $q_n = 2d_n^3 a_n$, alors, d'après le 3^e pas, p_n et q_n sont des entiers. Des estimations ci-dessus et de

$$\text{Log } d_n \sim n,$$

On déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que l'on ait

$$0 < \left| \zeta(3) - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{C(\varepsilon)}{q_n^{r-\varepsilon}},$$

où

$$r = \frac{2 \text{Log } \alpha}{3 + \text{Log } \alpha} > 1 \quad (\text{car } \alpha > e^3).$$

En choisissant ε tel que $r - \varepsilon > 1$ le critère montre que $\zeta(3)$ est irrationnel.

On peut même déduire de la formule précédente une bonne mesure d'irrationalité de $\zeta(3)$. Pour ce faire, on utilise le lemme suivant dont la démonstration est élémentaire.

Lemme 1 : Si un nombre ζ admet une infinité d'approximations rationnelles distinctes p_n/q_n qui vérifient

$$\left| \zeta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^\theta} \quad \text{avec } \theta > 1, q_n > 0,$$

$$q_{n+1} < c_1 q_n, c_1 \text{ constante,}$$

alors pour tout rationnel p/q on a

$$\left| \zeta - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_2}{q^{\frac{\theta}{\theta-1}}}$$

pour une certaine constante positive c_2 .

Ici on obtient

$$\left| \zeta(3) - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_2}{q^{13,42}} .$$

Remarque : Pour $\zeta(2)$, Apéry a obtenu la formule

$$\zeta(2) = \frac{5}{3 + \frac{1^4}{25 + \frac{2^4}{69 + \dots + \frac{n^4}{11n^2 + 11n + 3 + \dots}}}}$$

qui permet de démontrer l'irrationalité de $\zeta(2)$ (et donc de π^2) ainsi que la mesure

$$\left| \zeta(2) - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_3}{q^{11,86}} \quad (c_3 \text{ constante}).$$

Auparavant, le meilleur résultat connu était (voir [M])

$$\left| \pi^2 - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_4}{q^{18}} .$$

Pour π on sait seulement que l'on a

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{c_5}{q^{20}} .$$

IV. La preuve de Beukers

Elle repose sur le résultat élémentaire suivant

Lemme 2 : Soient $r \geq s \geq 0$ des entiers. On considère les intégrales

$$I_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} dx dy, \quad J_{r,s} = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\text{Log}(xy)}{1-xy} x^r y^s dx dy.$$

Alors, si $r > s$ on a

$$a) d_r^2 I_{r,s} \in \mathbb{Z}, \quad (\text{où } d_r = \text{p.p.c.m.}(1, 2, \dots, r))$$

$$b) d_r^3 J_{r,s} \in \mathbb{Z},$$

tandis que

$$c) I_{r,r} = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \dots - \frac{1}{r^2} ,$$

$$d) J_{r,r} = 2 \left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \dots - \frac{1}{r^3} \right) .$$

Démonstration

Pour $\sigma \geq 0$, en développant $(1-xy)^{-1}$ en série on obtient la formule

$$(1) \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dx dy = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)}$$

Pour $r > s$ cette dernière expression vaut

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1} \right) = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+1+\sigma} + \dots + \frac{1}{r+\sigma} \right).$$

En faisant $\sigma = 0$ on obtient l'assertion a).

En dérivant par rapport à σ , pour $\sigma = 0$ on trouve

$$-J_{r,s} = \frac{-1}{r-s} \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \dots + \frac{1}{r^2} \right),$$

d'où la propriété b).

Pour obtenir c) on fait $r = s$ et $\sigma = 0$ dans (1).

Lorsque $r = s$, en dérivant (1) par rapport à σ et en prenant $\sigma = 0$ on obtient d).

Démontrons d'abord l'irrationalité de $\zeta(2)$.

Théorème 1 : $\zeta(2)$ est irrationnel

Démonstration :

Considérons la quantité

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy,$$

où $P_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(x^n (1-x)^n \right)$ est le polynôme de Legendre (qui est à coefficients entiers). Grâce au lemme 2 on montre que I_n est de la forme

$$I_n = (A_n + B_n \zeta(2)) d_n^{-2}, \quad A_n \text{ et } B_n \in \mathbb{Z}.$$

En intégrant par parties relativement à x , on obtient l'expression

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n (1-y)^n x^n (1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dx dy.$$

On vérifie assez facilement la majoration

$$0 \leq \frac{y(1-y) \cdot x(1-x)}{1-xy} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5 \quad \text{pour } 0 \leq x, y \leq 1.$$

Ceci conduit à l'estimation

$$0 < |I_n| \leq \beta^n \zeta(2), \quad \text{où } \beta = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5.$$

Ainsi, on a

$$0 < |A_n + B_n \xi(2)| < (d_n^2 \beta)^n \xi(2),$$

et comme $\beta e^2 < 1$ et $\text{Log } d_n \sim n$, on conclut, grâce au critère, que $\xi(2)$ est irrationnel.

Nous arrivons au terme de notre route.

Théorème 2 : $\xi(3)$ est irrationnel

Démonstration :

Considérons cette fois l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\text{Log } xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y) dx dy.$$

Le lemme 2 permet de démontrer que J_n est de la forme

$$J_n = (A'_n + B'_n \xi(3)) d_n^{-3}, \text{ avec } A'_n, B'_n \text{ entiers.}$$

On vérifie aisément la relation

$$-\frac{\text{Log } xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz,$$

qui permet d'écrire

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x) P_n(y)}{1-(1-xy)z} dx dy dz.$$

En intégrant n fois par parties relativement à x , il vient

$$J_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz.$$

Posons

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w} \quad \text{et} \quad dz = \frac{-xydw}{(1-(1-xy)w)^2}$$

alors J_n s'écrit

$$J_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^n (1-w)^n \frac{P_n(y)}{1-(1-xy)w} dx dy dw.$$

Intégrons maintenant n fois par parties par rapport à la variable y , on obtient

$$J_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n (1-x)^n y^n (1-y)^n w^n (1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dx dy dw.$$

On vérifie que

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leq (\sqrt{2}-1)^4 \text{ pour } 0 \leq x, y, w \leq 1.$$

D'où l'encadrement

$$0 < |J_n| < \alpha^n \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dw}{1-(1-xy)w} = \alpha^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\text{Log } xy}{1-xy} dx dy = 2 \alpha^n \zeta(3),$$

où $\alpha = (\sqrt{2}-1)^4$.

Par conséquent, on a

$$0 < |(A'_n + B'_n \zeta(3))| < (d_n^3 \alpha)^n \cdot 2 \zeta(3).$$

Comme $\alpha < e^{-3}$, le critère s'applique encore et on constate que $\zeta(3)$ est irrationnel.

Références

R. APÉRY.-

Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque 61 (1979), p. 11-13.

F. BEUKERS.-

A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, J. London Math. Soc.

H. COHEN.-

Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry), Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble, oct. 1978.

M. MIGNOTTE.-

Approximations rationnelles de $\bar{\pi}$ et quelques autres nombres, Journées arithmétiques de Grenoble, Bull. Soc. Math. de France, mémoire 37 1974, p. 121-132.

R. Van der POORTEN.-

A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$.

M. MIGNOTTE

Flammakuecha

QUELQUES RESULTATS DU SEMINAIRE ORGANISE PAR LE G.R.A.S.
SUR LES PROBLEMES DES STRUCTURES TOPOLOGIQUES DES TARTES FLAMBÉES

Au mois de juin 1978, le Groupe de Recherches Appliquées de Strasbourg, avait organisé dans le cadre de l'IREM un séminaire sur la topologie des tartes flambées. Une quinzaine de spécialistes étaient attendus, mais hélas, il n'y eut que trois participants, qui n'hésitèrent pourtant pas à payer de leur personne et à étudier onze spécimens. C'est le fruit de leur recherche que je vous livre aujourd'hui.

N.B. Les démonstrations sont laissées au lecteur à titre d'exercice.

1. Topologie de la tarte flambée.

Définition 1.1. On appelle tarte flambée (TF) toute partie T de \mathbb{R}^3 qui vérifie:

- (i) T est incluse dans le plan d'équation $z = a$ (a est un réel donné);
- (ii) T est convexe, fermée, de diamètre inférieur à 2.

Lemme 1.1. Toute TF est compacte et maigre, donc d'intérieur vide.

Remarque: les TF sont contenues dans des plans: elles ne sont pas forcément d'intérieur vide pour la topologie induite.

Définition 1.2. On dit qu'une TF est dégénérée si elle est maigre pour la topologie d'espace de Baire induite par \mathbb{R}^3 sur le plan $\{z = a\}$.

Exemples: \emptyset et tout segment d'un plan horizontal sont des TF dégénérées.

Note: dans la suite, nous ne nous intéresserons pas aux TF dégénérées.

Lemme 1.2. L'intersection de deux TF est une TF. Il n'en est pas de même en général de la réunion.

Définition 1.3. Le nombre réel a est appelé prix de la TF. Si a est positif, on appelle valeur de la TF le produit de son aire par la racine carrée de son prix: $v(T) = A(T)\sqrt{a}$.
Si a est négatif, on dit que la TF est imaginaire; on convient que sa valeur est le nombre complexe: $v(T) = A(T)i\sqrt{-a}$.
Si $a = 0$, on dit que la TF est gratuite; sa valeur est alors nulle, quelle que soit son aire.

Définition 1.4. On dit qu'une TF est maximale pour un prix donné si son aire est maximale.

Lemme 1.3. Les TF maximales sont les disques de rayon 1. La valeur maximale d'une tarte flambée non imaginaire de prix a positif est donc $\pi\sqrt{a}$.

Définition 1.5. On pose $X(T) = \text{Sup} \{ x \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in T \}$ et $Y(T) = \text{Sup} \{ y \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in T \}$.
 Les vecteurs $s_1^T (X(T), Y(T), a)$; $s_2^T (X(T), -Y(T), a)$;
 $s_3^T (-X(T), -Y(T), a)$; $s_4^T (-X(T), Y(T), a)$
 sont appelés sommets de la tarte flambée T .

Lemme 1.4. Si une TF contient ses quatre sommets, c'est un rectangle.

Lemme 1.5. Trois quelconques des sommets d'une TF sont linéairement indépendants. (+)
 Leur déterminant est égal à $-4aX(T)Y(T)$, quel que soit le choix. De plus,
 on a : $s_1^T + s_3^T = s_2^T + s_4^T$. / (+) sauf si $a = 0$ ou $X(T) = 0$ ou $Y(T) = 0$.

Remarque: l'enveloppe convexe des quatre sommets n'est pas forcément une TF; c'est vrai si et seulement si $X(T)^2 + Y(T)^2 \leq 1$.

Définition 1.6. On appelle lardon tout point d'une TF dont les coordonnées sont rationnelles; on appelle oignon tout arc continu d'une TF.

Remarque: toute TF est connexe par oignon.

Théorème 1.1. Si une tarte flambée est de prix irrationnel, elle est sans lardon.
 (on dit alors que c'est une TF irrationnelle). Sinon, l'ensemble des lardons est dense dans la TF.

Corollaire: une TF rationnelle est séparable.

Remarque: A l'exception de $\{0\}$, les TF ne sont pas des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Définition 1.7. On appelle tarte flambée gratinée (TFG) toute tarte flambée dans laquelle la multiplication (définie par $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (xx', yy', zz')$) est interne. On appelle variété gratinée l'ensemble des TFG.

Théorème 1.2. (de Brombeck): La variété gratinée est non vide. Pour qu'une TF appartienne à la variété gratinée, il faut que son prix soit 0 ou 1.

Exemple: les disques de centre 0 et de rayon inférieur à 1 sont des TFG.

Théorème 1.3. (de Girault): Si une TFG est gratuite et symétrique par rapport à 0, c'est un tonneau de \mathbb{R}^3 . Il en est de même de la réunion d'une TFG gratuite et de son symétrique par rapport à 0, qui en général n'est pas une TF.

NB. Le séminaire s'est volontairement limité au champ réel et n'a pas considéré les TFG gratuites comme des parties du plan complexe. L'étude de l'intégration au sens de Cauchy dans les TFG gratuites fera l'objet d'une prochaine réunion de travail.

2. Topologie de l'espace des tartes flambées.

Définition 2.1. Soit \mathcal{F} l'ensemble des TF. On dit que deux TF sont isoconsommables si et seulement si elles ont même diamètre.

Lemme 2.1. L'isoconsommabilité est une relation d'équivalence dans \mathcal{F} .

Définition 2.2. On appelle tarte flambée spéciale (TFS) toute classe d'équivalence de l'isoconsommabilité. L'ensemble quotient s'appelle buerestuebel (noté \mathcal{B}).

Définition 2.3. On appelle diamètre d'une TFS le diamètre commun à **tous ses éléments**, noté $\delta(T)$.

Représentation des TFS: A tout diamètre δ , on associe le nombre $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \delta$.

L'application ainsi définie est une bijection de $[0, 2]$ sur \mathbb{R}^+ .

On représentera la TFS de diamètre δ par la TF T de prix $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \delta$, et qui est l'enveloppe convexe fermée des quatre sommets $s_1^T, s_2^T, s_3^T, s_4^T$ définis par:

$$x(T) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\pi}} \operatorname{Arctg} a \quad \text{et} \quad y(T) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\pi}} \operatorname{Arctg} a$$

Cette TF est dite représentation canonique de la TFS de diamètre δ .

Son aire est $\frac{2(3+\sqrt{5})}{\pi} \operatorname{Arctg} a$; sa valeur est donc (a est positif):

$$\frac{2(3+\sqrt{5})}{\pi} (\operatorname{Arctg} a) \sqrt{a}.$$

Lemme 2.2. Les représentations canoniques des TFS sont des rectangles d'or; la TFS de diamètre 0 est gratuite et dégénérée; la TFS de diamètre 2 est de prix infini; son aire est égale à $3 + \sqrt{5}$.

Convention: par abus de langage, la représentation canonique d'une TFS sera elle-même appelée "TFS de diamètre δ ". Etant donné un diamètre ou un prix, il existe une unique TFS ayant ce diamètre et ce prix.

Définition 2.4. On munit le buerestuebel d'une métrique en posant:

$$d(T, T') = |\delta(T) - \delta(T')|.$$

Lemme 2.3. d est une distance sur \mathcal{B} . Muni de cette distance, \mathcal{B} est borné.

Théorème 2.1. Muni de la topologie définie par cette distance, le buerestuebel est compact (donc complet) et connexe. L'application h de \mathcal{B} dans $[0, 2]$ qui à une TFS associe son diamètre est un homéomorphisme.

Définition 2.5. Un groupe topologique $(G, *)$ est appelé espace de Pfuhlgriesheim (ou espace pfuhlgriesheimien) si et seulement si:

- (i) il est métrisable;
- (ii) il existe un point I tel que I n'appartient pas à G et tel que:
 - I soit absorbant pour l'opération $*$ qui prolonge celle de G sur $G \cup \{I\}$;
 - $G \cup \{I\}$ est compact et connexe.

L'élément I est appelé absorbeur de l'espace G .

Définition 2.6. On définit sur l'opération $*$ par:

$$T * U \text{ est la TFS } V \text{ telle que } \delta(V) = \delta(T) + \delta(U) - \delta(T)\delta(U).$$

Lemme 2.4. Le prix de $T * U$ est égal à:

$$\frac{a + a' - (1 - aa') \operatorname{tg} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} a, \operatorname{Arctg} a' \right)}{1 - aa' + (a + a') \operatorname{tg} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} a, \operatorname{Arctg} a' \right)}$$

Lemme 2.5. La TFS I de diamètre 1 vérifie: quelle que soit T , $T * I = I$. Muni de cette opération, $\mathcal{B} - \{I\}$ est un groupe abélien. De plus, $*$ est continue.

Théorème 2.2. (de Bonnet): le buerestuebel, muni de sa métrique et de la structure de groupe définie ci-dessus, est un espace de Pfuhlgriesheim.

Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques.

J. DIEUDONNE

Je voudrais brosser quelques traits généraux de l'évolution des mathématiques et surtout dissiper des idées inexactes.

Tout d'abord rappeler qu'au moins 80 % des mathématiques datent de moins de 150 ans aussi bien en ce qui concerne les résultats que les techniques et que les idées. A l'appui de ce que j'avance on peut lire dans le livre "Panorama des Mathématiques Pures" que j'ai publié chez Gauthier-Vil. que j'y ai classé les mathématiques en 26 rubriques dont 20 sont bourbachiques et 6 non bourbachiques. Parmi ces 26 rubriques il y en a :

UNE : L'analyse classique dont la moitié de ce qu'elle recouvre était connue avant 1840

NEUF : qui n'existaient pas avant 1895 : à savoir :

- la topologie générale
- la topologie algébrique
- les espaces vectoriels topologiques
- la théorie spectrale
- l'algèbre de Von Neumann
- la théorie ergodique
- l'analyse harmonique non commutative
- les catégories
- l'algèbre homologique

Toutes ces rubriques débordent d'activité à l'heure actuelle

QUATRE : remontent à 1870 :

- la théorie des ensembles (1872)
- les groupes de Lie (1873)
- les formes modulaires et automorphes
- les fonctions de plusieurs variables complexes.

enfin il en reste

DOUZE dont seules des bribes étaient connues avant 1830.

- l'algèbre
- la logique mathématique
- la théorie des nombres (seul 20 % étaient connus avant 1840)

- l'algèbre commutative
- la géométrie algébrique
- la théorie des groupes (Cauchy 1815 - Galois 1830)
- l'intégration
- l'analyse harmonique (où il n'y avait rien en dehors de Fourier)
- les équations différentielles
- les équations aux dérivées partielles
- la géométrie différentielle
- les probabilités (en fait elles sont postérieures à 1830)

Cela donne bien une idée du développement des mathématiques actuelles. Mais ce qui est intéressant c'est de connaître les raisons de l'accélération du progrès des mathématiques.

Que s'est-il passé depuis 200 ans pour que l'on assiste à cette explosion d'idées ? Car avant c'était la préhistoire ! Il faut faire justice d'une théorie idiote et monstrueuse : qui veut que ce soit la société ambiante qui impose complètement le développement. Cela est faux bien qu'elle ait eu une influence. Il s'agit tout au plus d'une chiquenaude ; les mathématiques ayant leur vie propre. Par exemple, bien des problèmes de physique (équations aux dérivées partielles) ont ainsi hérité de méthodes venues de l'expérience physique comme le principe des extremaux ou la notion d'énergie. Mais, et cela est le plus courant, de nombreux problèmes sont purement mathématiques et se sont développés indépendamment. C'est pourquoi on peut affirmer que le progrès mathématique est le plus souvent d'origine interne, même si l'idée initiale est parfois tirée d'un problème concret.

Exemples :

- 1° Le problème de la duplication du cube dont la légende raconte qu'il a été posé par Apollon à propos d'un autel cubique qui lui était dédié et dont le volume devait être doublé pour qu'il accepte d'éloigner la peste de la ville. On ignore souvent que ce problème a eu pour conséquence le développement de la théorie des coniques pour construire par intersection $\sqrt[3]{2}$.
- 2° L'apparition des complexes est dûe à la recherche de la résolution des équations du 3e et 4e degré et à l'époque les Italiens ne comprenaient pas du tout ce qu'ils faisaient. La découverte était un peu dûe au hasard.
- 3° Plus près de nous la découverte de l'irrationalité de $\zeta(3)$ par Apéry est un heureux hasard et Apéry lui-même n'a pas très bien compris pourquoi sa démonstration "marche". Actuellement de nombreux chercheurs se penchent sur ses travaux pour essayer de comprendre et peut être que cela prendra des siècles pour que quelqu'un arrive à trouver ce qui se passe.

Ce hiatus entre les premiers résultats et la compréhension globale est phénomène courant en mathématique.

En voici quelques exemples :

- 1) Les premiers résultats sur les équations algébriques mis en forme par Euler ont conduit Galois aux deux structures de groupe et de corps qui étaient sous-jacentes.
 - 2) Les équations aux dérivées partielles posées à l'occasion d'étude de problèmes physiques ont donné naissance aux espaces topologiques, aux espaces normés puis à la théorie spectrale des opérateurs qui a elle-même une application directe à la physique quantique.
 - 3) L'étude de la Géométrie différentielle a conduit aux espaces fibrés, à la notion de connexion puis aux faisceaux et feuilletages.
-

On voit ainsi apparaître de grandes structures dont la principale vertu est de se répandre et d'envahir les mathématiques. Elles amènent l'unité en ce sens qu'elles se retrouvent dans tout compartimentage qu'on voudra mettre dans les mathématiques. Voyons l'exemple de la géométrie algébrique dont les prémisses remontent à Descartes avec l'introduction des "repères cartésiens". La Géométrie subit alors pendant le 18e siècle l'influence de l'analyse. Puis avec Riemann et Dedekind des problèmes de théorie des nombres apparaissent en Géométrie (et réciproquement). A la fin du 19e siècle, des liens étroits se nouent avec la topologie algébrique (en particulier à travers la notion de cycle). Aujourd'hui on peut affirmer que toutes les notions ont une application en géométrie algébrique et que par contre coup, la géométrie algébrique a englobé avec les idées de Grothendieck toute l'algèbre commutative et engendre actuellement l'algèbre homologique. On en arrive à considérer les nombres entiers comme des fonctions sur un espace topologique. Ce qui, pour un mathématicien de mon âge est surprenant.

Par ailleurs, en migrant hors de leur domaine de naissance, les structures entraînent avec elles leurs intuitions. Il y a donc un transfert des méthodes qui fait que maintenant l'intuition géométrique (par exemple) a envahi toutes les mathématiques.

On dit que dans un bon roman, les personnages acquièrent une vie propre. Il en va de même des structures qui prennent un aspect protéiforme, une vie propre. En résumé ce sont les inventions des structures (et aujourd'hui des foncteurs) qui font avancer le progrès mathématique. Et soyons certains qu'il en reste à découvrir.

- 1) On fait du calcul différentiel sans notion de limite, c'est le calcul différentiel abstrait qu'on effectue même sur des corps de caractéristique non nulle !
- 2) On a pensé pendant longtemps que les structures algébriques devaient s'appuyer sur la notion d'ensemble. Eh bien, on fait des structures algébriques sur des catégories.
- 3) La théorie de Kan qui, sur des objets simpliciaux mime la topologie algébrique.

A ce propos, il est nécessaire de faire quelques rappels :

- 1° La découverte des structures est contemporaine de l'adoption du langage ensembliste. Maintenant, on dispose des foncteurs, à condition de ne pas en abuser !
 - 2° La mise en évidence d'une structure s'accompagne de l'augmentation de la précision du langage. C'est un fait bien connu qu'à la lecture d'un texte du 19e siècle il est rarement possible de savoir de quoi parle l'auteur : quel type de fonction ? Quel type de nombre ? ...
 - 3° Les anciens manipulaient des objets naturels ou diverses structures sont mélangées ce qui ne facilite pas leur mise en évidence. Il a fallu attendre Cantor pour que sur la droite réelle soient distingués le cardinal, la structure de groupe, de corps, l'ordre, l'espace topologique, l'espace mesuré...
- Je me souviens de ma propre surprise quand j'ai vu qu'il y avait plusieurs topologies, plusieurs mesures sur \mathbb{R} . Certains de mes maîtres ne l'ont jamais admis ! Ce changement de point de vue a été difficilement accepté par les contemporains de Cantor qui a été en butte à de nombreuses attaques. Changer de façon de voir est fatigant d'où la tendance au conservatisme, tendance qui fait subir ses ravages essentiellement dans l'enseignement, mais parfois aussi chez de très grands mathématiciens surtout s'ils vieillissent. C'est ainsi que l'on a vu des mathématiciens manifester leur répugnance devant la notion de nombre p-adique, devant les distributions, que l'on continue à enseigner l'intégrale de Riemann en vertu d'un attachement sentimental à des notions qui ont fait leur temps, qu'il a fallu 80 ans pour que les idées de Grassman et Peano en géométrie, balayaient les coordonnées et matrices constamment utilisées.

La maturation s'accompagne parfois de tâtonnements et d'incertitudes mais ce n'est certainement pas la démarche habituelle de l'ensemble des mathématiciens contrairement à ce que pensent et veulent faire croire certains philosophes. Ce n'est le plus souvent le cas que dans les branches en formations comme par exemple la formule d'Euler finalement correctement démontrée par Poincaré - (exemple choisi par Dakatos dans son livre "Proofs and refutations"). Par contre, il n'y a jamais eu de tâtonnement en théorie des nombres.

Les philosophes aiment aussi à gloser sur les crises dans l'évolution des mathématiques. Il ne peut y avoir crise que s'il y a changement du mode de pensée comme par exemple en physique l'introduction de la relativité. Il n'y a jamais eu de telle chose en mathématique sauf peut être (mais nous manquons de renseignements) lors de la découverte des irrationnels par les Grecs. Par contre il y a eu et il y aura toujours remise en ordre dans des méthodes peu précises. En ce sens il y a une crise des fondements vers 1895 quand on a voulu étendre les règles usuelles de maniements des ensembles finis aux ensembles infinis sans chercher à préciser ce que l'on faisait. Grâce aux axiomes de Z.F. (Zermelo- Fraenkel) on a pu préciser les propriétés des ensembles infinis et le langage y afférant. Mais actuellement presque tous les mathématiciens font comme si les axiomes ZF n'existaient pas, car ils en respectent inconsciemment les règles comme le faisaient les mathématiciens avant leur introduction. Personne ne commence un mémoire par une profession de foi : "Je travaille dans le système ZF". Les antinomies ont été créées de toute pièce par les philosophes pour embêter les gens car aucun mathématicien ne croit sérieusement à la possible contradiction des mathématiques et en dehors de ceux qui se spécialisent en théorie des ensembles ou en logique (et qui restent très marginaux) on ne parle pas de philosophie en mathématique. Si les découvertes des logiciens postérieures à 1925 venaient à disparaître, aucun mathématicien ne s'en apercevrait *.

J'affirme même qu'il n'y a pas de crise de fondement et même qu'il n'y en a jamais eu, même entre 1895 et 1930. Cela n'est qu'une invention des philosophes, la meilleure preuve en est que leurs critiques n'a nullement entamé le progrès mathématique de l'époque qui reste une période des plus fécondes dans toutes les branches des mathématiques.

D'après les notes de
E. Chaney et J. Lefort

* Elles ont cependant pour effet positif de rendre les mathématiciens plus modestes : Hilbert croyait qu'on pouvait montrer la non-contradiction des maths, mais Gödel et Cohen ont montré que c'était grotesque.

Nouvelles de BARR

CONNAISSANCE QU'UN ELEVE "MOYEN" DEVRA POSSEDER EN FIN D'ANNEE

A la fin de la classe de 6e :

- 1° Très bonne pratique des 4 opérations sur les décimaux positifs.
Usage des parenthèses.
Usage pratique de la relation de proportionnalité ; application aux changements d'unité.
- 2° Pratique de l'addition et de la soustraction sur les décimaux relatifs.
- 3° Usage des instruments de dessin.
Vocabulaire de la géométrie plane.
Pratique des formules donnant les aires usuelles.

REUNION D'HARMONISATION CM2 - 6e, du 11 Février 1980 - BARR

(Compte-rendu du groupe de "Mathématiques")

Aux débats : - le signe égal
- les proportionnalités
- géométrie

I- LE SIGNE EGAL

Il est demandé aux instituteurs d'insister le plus possible sur la signification du signe =

On trouve en effet dans de nombreuses copies ce développement :

$$(8 + 5) \times 3 + 6 = 13 \times 3 = 39 + 6 = 45$$

Souvent l'élève ne comprend pas pourquoi on sanctionne ce genre d'écriture puisque la réponse finale est juste !

Autre exemple donné par un professeur : $28 : 3 = 9$ reste 1***

Il propose d'écrire à la place de ce calcul en ligne l'égalité : $28 = 9 \times 3 + 1$
Mais les instituteurs objectent que les élèves ne sauraient plus qu'il s'agit d'une division, ils estiment qu'un élève ayant abouti à *** a compris la signification de la division

On propose l'introduction de deux signes différents :

$$27 : 3 = 9 \quad (\text{quotient exact})$$

$$\text{et } 28 \div 3 = 9 \quad (\text{quotient approché})$$

Finalement la solution qui semble la plus pléscitée serait d'écrire :

"La division de 28 par 3 donne un quotient égal à 9 et un reste égal à 1".

II- PROPORTIONNALITE

- Elle devrait être abordée en CM2.

Les instituteurs constatent des difficultés de maniement des opérateurs.
Beaucoup d'élèves, lorsqu'ils doivent compléter un tableau de proportionnalité
emploient l'opérateur \oplus

On se pose la question :

"A quoi servent ces tableaux avec opérateurs \oplus ?"

Ne vaudrait-il pas mieux les supprimer ?"

- Il ne faut pas oublier de donner des exemples de situations de non-proportionnalité.

Il ressort des débats que les élèves ne semblent pas savoir ce qu'ils font quand ils manipulent ces tableaux, ils éprouvent de grosses difficultés à transcrire un énoncé en tableau.

Beaucoup d'enseignants de 6e font apparaître l'unité dans l'une des lignes du tableau, car ainsi on s'approche davantage de la réalité pratique.

- Les représentations graphiques semblent assez généralement abordées en CM2 et plaisent aux élèves.

III- GEOMETRIE

Au programme du CM2 : Observer, construire, mesurer.

Un instituteur nous fait part de son expérience :

"J'ai construit avec mes élèves 1 mètre cube et ils ont vu qu'il pouvait contenir un élève et pourquoi pas l'enseignant s'il est souple; c'est un choc psychologique qu'il n'oubliera pas".

ATTENTION : Veuillez noter l'adresse et le nouveau numéro de téléphone de notre collègue A. BULBER :

Rue de la Pierre Fontaine

67 210 - O B E R N A I

tél : 95 - 67 - 05

Fermer l'Ouvert .

Organe d'information et d'échange
de la régionale APMEP d'Alsace et
de l'IREM de Strasbourg.

Voilà six ans, dix-huit numéros, que j'ai pris en charge l'Ouvert. Organe d'information et d'échange, s'il a rempli son premier rôle, il n'a que rarement assumé le deuxième. Chaque trimestre scolaire j'ai assuré la parution de ce périodique, mais je l'ai assuré seul.

Régnant en despote (j'ose penser "éclairé") l'Ouvert est devenu pour trop de personnes les oeuvres complètes de Jean Lefort. C'est une situation malsaine que j'ai toujours critiquée et combattue chez les autres. J'ai donc décidé d'arrêter.

Sans doute est-ce ma faute de n'avoir pas su m'entourer d'une équipe qui aurait partagé la tâche et survécu au départ d'un de ses membres. Cette équipe peut encore se créer et je m'engage à l'aider pour son démarrage mais je n'assumerai plus la responsabilité de l'Ouvert à partir de 1981 . Ce sera presque un septennat : c'est plus qu'assez.

Je remercie ici tous ceux qui m'ont encouragé, tous ceux qui ont fait vivre l'Ouvert, et à ceux qui prendront la relève, je peux leur affirmer qu'écrire un texte apporte beaucoup sur les plans de la précision, de la rigueur et de la clarté.

Jean Lefort

P.S. Topologiquement un ouvert peut être également un fermé s'il s'agit de l'ensemble vide ou de l'ensemble plein. J'espère que ce ne sera pas l'ensemble vide \emptyset