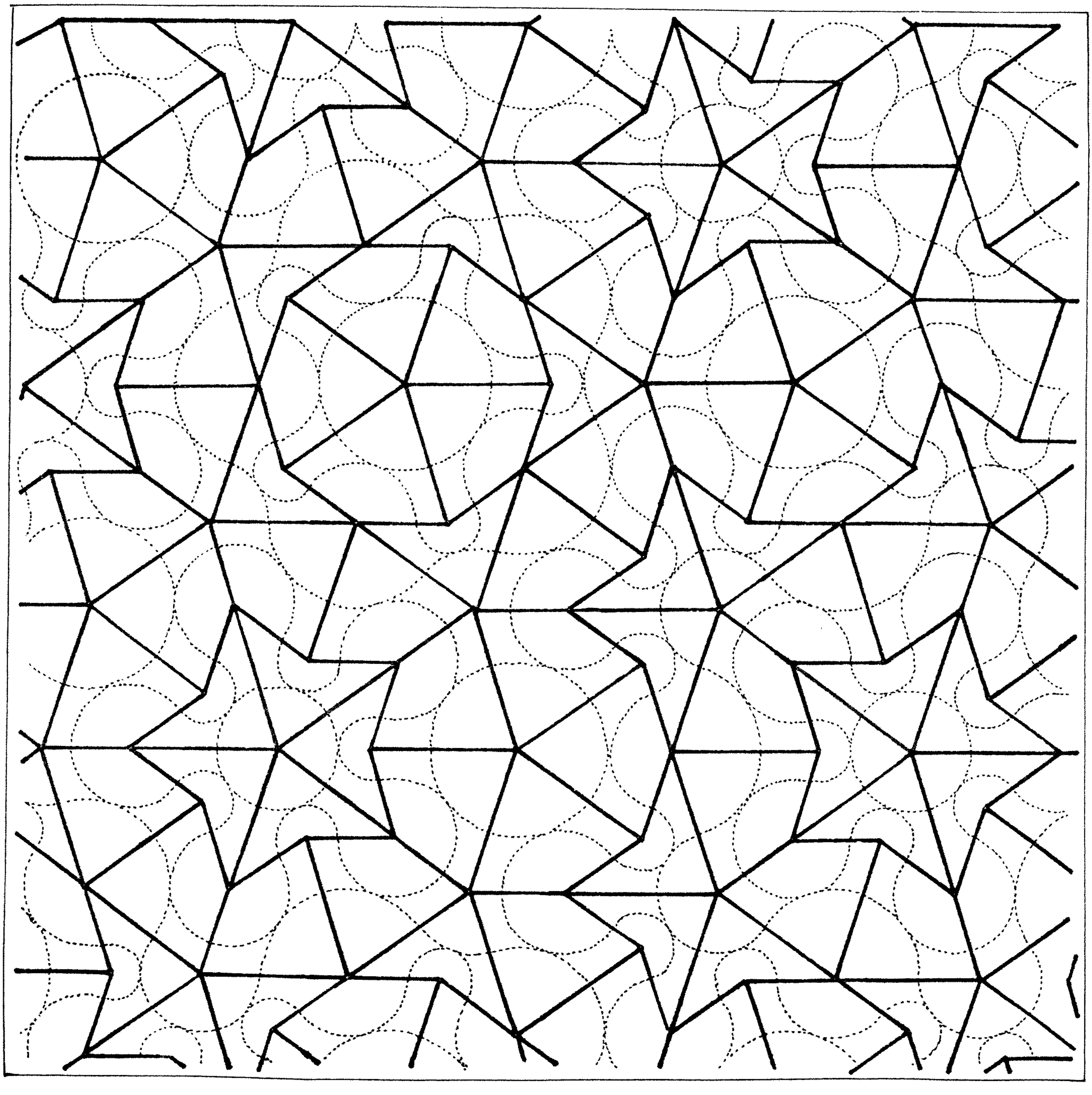
l'ouvert n°22

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG – OCT. 80

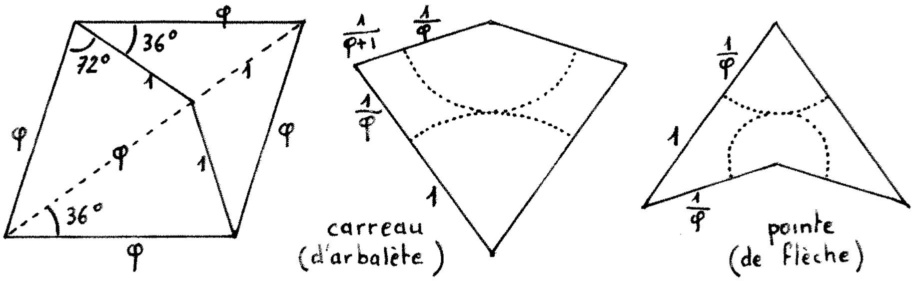


NOTRE COUVERTURE : Pavage régulier obligatoirement non-périodique du plan. Il est non-périodique, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune translation (ni même ici, d'autre isométrie) sauf l'identité qui applique ce pavage sur lui-même ; il est obligatoirement non-périodique, c'est-à-dire que quelque soit la façon d'assembler les pavés, il est impossible d'obtenir un pavage périodique. Voir p. III de la couverture et aussi pour une bibliographie "Mathematical games ; extraordinary non periodic tiling that enriches the theory of tiles". par M. Gardner : Scientific American janvier 77, p. 110 et suivantes.

A propos de la couverture

Le problème de l'existence de pavages réguliers obligatoirement non-périodiques est intimement lié aux questions de décision en logique symbolique. Ce problème fut posé pour la première fois en 1961 par Hao Wang qui conjecturait une réponse négative, mais il fut résolu par l'affirmative en 1964 par Robert Berger avec un ensemble de plus de 20 000 pavés qu'il réduisit plus tard à 104. R. M. Robinson et L. S. Penrose le réduisirent finalement à 2 pavés qui peuvent avoir différentes formes, mais qui toutes dépendent du nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$. En particulier les deux pavés ont des aires dans le rapport φ et le plus grand des deux est φ fois plus nombreux que le petit dans tout pavage du plan ;(le décompte des pavés dans un ensemble borné permet le calcul d'une approximation de φ d'autant meilleur que l'ensemble est plus vaste - vérifiez-le sur la couverture). Penrose a même dessiné deux pavés en forme de poules.

Les deux pavés de la couverture sont réalisés de la façon suivante :



Les arcs de cercles auraient pu être remplacés par des tenons et des encoches situés respectivement à chacune des extrêmités des arcs et ils n'ont pour but que d'interdire l'assemblage du carreau et de la pointe suivant le losange de gauche, ce qui conduitait à un pavage périodique.

Si vous réalisez un tel pavage (il en existe une infinité non-dénombrable) vous verrez que les arcs de cercle décrivent des courbes qui en général se referment, (au plus 2 d'entre-elles ne se referment pas) et englobent des régions possèdant une symétrie d'ordre 5. Par contre, le pavage complet ne présente souvent aucune symétrie bien qu'on puisse en construire deux ayant cette symétrie d'ordre 5 (l'étoile en commençant par 5 pointes ; le soleil en commençant par 5 carreaux) et une infinité ayant un axe de symétrie.

On pourrait penser que le dessin de couverture est original. En fait il n'en est rien, aucun dessin fini ne l'est, en ce sens qu'il se retrouve (et une infinité de fois) dans n'importe quel pavage. C'est un phénomène analogue qui se produit pour le développement décimal de π par exemple, où tout groupe, aussi grand soit-il, de décimales se répète une infinité de fois. Mais ici l'écart entre deux groupes identiques consécutifs est arbitraire ; dans le cas du pavage de Penrose, une région quelconque est au plus à une distance égale à deux fois son diamètre d'une région isométrique.

Sommaire

Piston

Il est de mode de choisir un thème par année. Après la femme, l'enfant, le patrimoine, en cette rentrée scolaire je me permets d'attirer l'attention des collègues sur le piston.

Certes, nombreux sont ceux qui disent n'en point avoir, mais rares ceux qui le refusent quand ils peuvent en profiter. Je voudrais plus particulièrement m'intéresser ici à la race de ceux qui le recherchent et le cultivent.

Il y faut un certain don : Tout le monde n'est pas capable de démagogie, de bassesses, de flagorneries et de flatteries pour prétendre obtenir un piston efficace. Si c'est par leur acharnement au travail et à leur conscience professionnelle que les honnêtes gens montent les échelons de la hièrarchie, acceptant de longs exils pour atteindre le poste convoité, le pistonné aura à coeur de faire travailler les autres, de s'approprier leur travail et s'il lui faut s'exiler, il saura obtenir un exil bref ou/et doré qui lui servira toujours d'alibi en cas d'accusation trop précise. Les plus efficaces sauront se faire créer un poste tout exprès pour eux. C'est alors que des collègues s'étonnent : bizarre cette mutation ! étrange ce transfert ! curieux cette promotion !

Si l'heureux promu n'est pas un ingrat (et comment le serait-il s'il veut continuer à profiter de ce système ?) on verra bientôt se développer d'un bout à l'autre de la hiérarchie, le piston appelant le piston, les magnifiques qualités énnoncées précédemment, auxquelles s'ajouteront le nepotisme, l'hypocrisie et même la prévarication.

Quels merveilleux exemples pour la jeunesse dont nous avons la charge. Grâce à ces modèles qu'ils cotoyent : professeurs, censeurs, inspecteurs ... (et je n'ose monter plus haut bien que j'en connaisse des exemples) ils sauront vite quelle société ils se doivent de construire. Elle rappellera de près la période de décadence de certains empires. Je laisse le soin à mes collègues historiens de préciser ce qu'il en advînt.

jean lefort

Mathématique & sélection

Le texte présenté ici est le fruit d'une réflexion de dix-huit mois environ d'un groupe constitué de professeurs de mathématiques (deux enseignant en C.E.S., un en lycée technique industriel, un en lycée classique et un lycée classique et technique commercial), d'une institutrice et d'un directeur de centre d'information et d'orientation. Nous ne prétendons nullement avoir fait oeuvre de sociologues - nous n'en avions ni la compétence, ni le temps , ni les moyens - notre réflexion est celle d'enseignants, de praticiens du système scolaire, qui avons chacun notre personnalité, notre idéologie, et une vue -forcément partielle -des problèmes liée au contexte de nos pratiques scolaires et de nos expériences humaines. Le texte qui suit n'a d'autre prétention que de témoigner de ce que nous ressentons et vivons quotidiennement face au problème posé par le rôle joué par les mathématiques dans l'orientation et la sélection scolaire. C'est dire que ce texte est soumis d'avance au feu des critiques. Nous l'acceptons bien volontiers, espérant simplement apporter notre contribution à un très grave débat provoqué par de récents articles de journaux ou de revues pédagogiques qui ont largement dénoncé les méfaits du rôle que l'on fait jouer aux mathématiques dans l'enseignement français. En réalité, le problème n'est pas si récent puisque, depuis plus de dix ans, l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public n'a cessé de condamner l'utilisation abusive des mathématiques comme outil de sélection. Mais il convenait de regarder les choses de plus près si l'on voulait aller au-delà de la critique et chercher des remèdes appropriés à un changement qui se fasse en faveur des élèves.

Notons d'abord que les textes officiels ne parlent que d'orientation - le mot sélection n'existe pas - . C'est que des deux mots, le premier a une connotation positive et le second un caractère négatif. L'orientation, c'est la possibilité du choix, qui ne va pas sans liberté, c'est le issue d'une décision personnelle mais prise en connaissance de cause en fonction de ses goût et de ses aptitudes. La sélection, c'est la contrainte imposée par la société, les institutions ; c'est une décision dictée par autrui à laquelle on ne peut que se soumettre.

Dans la pratique orientation et sélection sont souvent mêlées ; d'une part dans la conscience de l'individu qui intériorise ses limites et n'envisage pas, par autocensure, certaines directions, certaines filières et qui sélectionne ainsi ses orientations possibles ; d'autre part dans la conscience collective qui, nous l'avons vu, préfère fermer les yeux sur les aspects contraignants, donc négatifs, de l'orientation-sélection et renforcer l'autocensure de l'individu.

Les exemples abondent : On comprend bien qu'une certaine habileté manuelle soit indispensable pour être orfèvre ; y-a-t-il alors orientation ou sélection quand on détourne de cette filière un élève gauche et maladroit dans ses gestes ? Par contre on comprend mal pourquoi on impose un tel bagage de connaissances mathématiques aux futurs vétérinaires et il y a là une réelle sélection par les maths.

En simplifiant, disons que "lorsqu'à un palier du système éducatif plusieurs filières de formation sont possibles, nous pouvons convenir de parler d'orientation lorsque l'affectation dans l'une de ces filières est l'aboutissement d'un choix de l'élève ou de sa famille, et de sélection lorsque celui-ci est affecté dans une filière qu'il n'avait pas choisie"(1). Mais on se souviendra que le choix de l'élève n'est souvent que l'aboutissement d'un long marchandage avec l'institution.

Mais avant de voir comment cela fonctionne, il nous faut situer le contexte socio-culturel de ce fonctionnement.

I - MATHEMATIQUES ET SOCIETE

I.1 La valorisation et la critique de la place prise par les mathématiques dans la culture s'inscrivent dans le culte et la contestation (mais celle-ci est récente) de l'idéologie technico-scientifique devenue celle de toute société industrielle. Cette idéologie véhicule un certain nombre d'idées plus ou moins explicites dont nous citons ici celles qui nous paraissent les plus marquantes et qui sont très liées entre elles :

a) La Science est "neutre" : on entend par là qu'elle est neutre par rapport à l'usage que l'on peut en faire : le meilleur ou le pire, comme nous le montre l'histoire ; mais ce n'est pas le fait de la Science qui ne fait que remettre son savoir au pouvoir des hommes. Cela signifie aussi qu'elle n'est lié à aucun régime politique ; la Science n'est ni de droite, ni de gauche, ni du "juste milieu", malgré les tentatives de récupération des différentes idéologies politiques qui y cherchent une caution.

b) La Science est "objective" : Elle ne relève pas des subjectivité des individus ou des foules, de leurs phantasmes, de leurs désirs mais elle décrit "la réalité" - ce qui sous-entend qu'il n'y a de réalité que scientifique - : c'est en cela que l'on peut parler de "vérités scientifiques" qui ont un caractère d'absolu et d'universel.

c) "La Science c'est la rigueur" : Rigueur de la pensée, rigueur du raisonnement, du langage, de la méthode.

d) "La Science, c'est le progrès" : Toutes les grandes découvertes scientifiques proviennent et conduisent à des applications techniques et industrielles ; ainsi, la Science est la source des progrès considérables de la médecine, du machinisme, de l'automatisation qui allongent la durée de la vie et la facilitent de bien des façons.

Du reste, on ne parle de la Science qu'en terme de progrès : Il n'y a pas de régression, il n'y a que des"progrès scientifiques".

Tout ceci contribue à faire de la Science, la religion séculière -qui doit prendre le relais des religions traditionnelles "pré-scientifiques" - de la société rationnelle scientifique en laquelle réside le salut de l'humanité, nolens volens :"où donc alors retrouver la source de la vérité et l'inspiration morale d'un humanisme réellement scientifique, sinon aux sources de la Science elle-même, dans l'éthique qui fonde la connaissance en faisant d'elle, par libre choix, la valeur suprême mesure et garant de toutes les autres valeurs" (2).

A ceci il faut ajouter une conception de la Science très répandue : "N'a de valeur scientifique que ce qui est quantifiable" : C'est le grand"mythe du quantitatif qui a permis à des milliers d'auteurs d'écrire des équations sans significations, se donnant ainsi l'apparence de faire oeuvre scientifique" (3). Pour René Thom, c'est une vieille histoire : Ce sont les découvertes de Maxwell, après les travaux de Galilée puis ceux de Newton qui "justifiaient, aux yeux de tout scientifique, l'emploi du formalisme quantitatif, rejetant le monde de la qualité dans l'ère des tâtonnements pré-scientifiques" (3). Mais l'idée est tenace (et les possibilités quantitatives des ordinateurs ne peuvent que la renforcer) ; nous n'en voulons pour preuve que l'importance donnée à la quantification dans des domaines les plus variés, par exemple l'histoire (4); les sciences humaines ou l'information. Tout se mesure par des nombres, sans qu'il y ait grand monde pour s'interroger et encore moins éveiller l'attention sur la validité et la signification de ces mesures. Le pourcentage est devenu une nécessité quasi absolue dans tout discours - autre que philosophique ou métaphysique - qui prétend recueillir quelque crédit auprès de ses lecteurs. (Ce texte y échappera-t-il ?)

I.2 En réalité, la Science contemporaine est une énorme entreprise, à la fois recherche organisée et technique réalisée (5), et ceci à une échelle encore inconnue il y a cinquante ans. De ce fait, elle ne peut échapper au pouvoir de nos sociétés industrielles : Savoir et Pouvoir ne peuvent plus se passer l'un de l'autre, Science et Politique se trouvent étroitement imbriquées : "La Science n'est plus une institution sociale hétérodoxe dans le système économique de production et de consommation, au sens où il existe et existera toujours des formes de création dont le produit est indifférent, dans ses intentions comme dans son usage, au processus d'industrialisation. Tout au contraire, elle affecte ce processus comme une force déterminante dans la métamorphose des sociétés modernes en sociétés "scientifiques"... Le chercheur scientifique ne peut pas se passer du soutien de la société. L'aventure de l'esprit qu'est la Science n'est plus une odyssée de l'individu, mais une entreprise collective dont les ouvriers, les intérêts et les directions dépendent, pour une large part, des choix du corps social dans son ensemble" (5). Les choix politiques et économiques en matière d'Education sont, à n'en point douter, de ceux-là. Pour ne prendre qu'un exemple relatif à notre préoccupation, l'Etat s'est doté avec la carte scolaire - ensemble de constructions scolaires, de créations et fermetures de classes, dans le cadre des dotations budgétaires attribuées - d'un outil efficace pour répercuter ces choix sur les structures éducatives. Elle joue un rôle important, bien que souvent implicite, dans les voeux d'orientation formulés par les parents et les propositions faites par les conseils de classe ; au reste, pour plus de sûreté, l'article 23 de l'arrêté du 4 juin 1960 : "Si la famille suit l'avis émis par le conseil d'orientation, l'élève entre de plein droit dans la classe de l'enseignement conseillé" a été remplacé dans la circulaire du 27 juillet 1973, par : "l'affectation des élèves se fait sous la responsabilité de l'Inspecteur d'Académie en fonction des décisions d'oreintation et des choix offerts par la carte scolaire." La liberté peut être ainsi contrôlée !

I.3 Les mathématiques, elles, tiennent une place particulière parmi les sciences. Cela leur vaut d'être perçues tantôt comme le modèle, le paradigme de la Sciences, tantôt comme la servante et l'outil des autres sciences. Elles seront survalorisées par les uns : les mathématiques sont pour eux, si l'on peut dire, encore plus neutres, plus objectives, plus rigoureuses que les autres sciences - y compris les sciences dites exactes - ; et de plus, elles leur sont indispensables. Les mathématiques seront , par ailleurs, examinées de façon critique par les ingénieurs et ceux qui ne voient dans la Science que ses applications et les progrès techniques qu'elle permet. Pour ceux-ci, les mathématiques ont la valeur d'un outil, ni plus, ni moins ; elles doivent donc avoir les qualités d'un bon outillage, et c'est à cette jauge qu'elles seront évaluées. Enfin, leur importance dans la culture sera violemment mise en cause par ceux qui contestent le plus vivement l'idéologie "technico-scientifique" dont elles apparaissent comme le symbole : c'est l'impérialisme de cette idéologie qui est visé à travers celui des mathématiques.

Certaines critiques et contestations de l'enseignement des mathématiques dites "modernes", provenaient ainsi d'horizons forts différents mais se rejoignaient pour juger les mathématiques selon le seul critère de l'utilité ("à quoi ça sert"?) et pour finalement leur refuser, de droit ou de fait, toute autonomie intellectuelle par rapport aux autres sciences.

Mais quelles que soient les critiques formulées à l'encontre de l'enseignement mathématique, une certitude demeure : le caractère neutre et objectif donc absolu et indiscutable de la note mise à une épreuve de mathématiques d'un examen ou d'un concours ("en maths, c'est vrai ou c'est faux"). Dans une certaine mesure, cette certitude rassure le candidat à l'examen ou au concours, en ce sens que la note de mathématique lui semble plus justifiée que celle des autres disciplines. C'est en partie une illusion comme le démontrent les travaux de M.C. Dauvisis et de J. Cransac (6) : L'évaluation d'un devoir de mathématique ne se réduit pas à la vérification de l'exactitude des résultats ; et les barêmes de notation n'empêchent pas les différences d'appréciation des correcteurs qui notent de façon fort variée "l'à-peu-près-juste", le "pas-tout-à-fait-faux", le "juste-mais-mal-démontré", le "mal-dit-mais-compris", le juste-mais-trop-mal-présenté" (6) et tout ce qui peu être lu entre les lignes. Mais comme cela a toute chance d'être pire dans les autres disciplines, voilà qui ne saurait ébranler une certitude. D'autre part, celle-ci permet aux correcteurs de se retrancher derrière une note dont le caratère tranchant évite toute discussion, toute interrogation, toute inquiètude ; cela est particulièrement précieux dans les concours, où il faut éliminer à tout prix des candidats "qui se valent". S'y ajoute le caractère très discriminatif de la note de mathématiques : celles-ci sont bien plus dispersées, plus étalées que celles des autres disciplines, pour des raisons purement techniques qui tiennent au caractère même des disciplines et des épreuves (7).

I.4 Ainsi, instrument objectif et discriminatoire, outil indispensable des Sciences et des Techniques, symbole de la Science (synonyme de progrès) dont le développement contrôlé est devenu indispensable au pouvoir politique, les mathématiques ne sont pas devenues, par hasard, l'instrument de sélection que beaucoup dénoncent aujourd'hui.

D'autant plus que l'enseignement des mathématiques ne nécessite que peu d'investissement matériel ce qui peut le faire préférer comme instrument de sélection, dans la société technico-scientifique actuelle, à un enseignement de la physique ou de la technologie beaucoup plus coûteux.

II - LA PART DES MATHEMATIQUES DANS L'ORIENTATION ET LA SELECTION A L'ECOLE

Comment les mathématiques jouent-elles leur rôle dans l'orientation et la sélection à l'Ecole ?

II.1 D'après Alix Jacquemin, qui a mené une enquête approfondie sur l'orientation en fin de Troisième, "L'analyse de l'orientation à l'issue du premier cycle fait apparaître plusieurs points, touchant à l'orientation vers la section scientifique C ou vers le cycle court. Tout d'abord, il faut noter l'influence du facteur retard, d'importance analogue dans les deux cas. Ceci se traduit par le fait que les sections C ne comportent que 20 % d'élèves en retard contre 90 % dans les sections B.E.P.. Quant à l'influence des deux disciplines fondamentales (mathématiques et français) sur la décision d'orientation,..., nous relevons les traits suivants :

a) prédominance nette du facteur maths en ce qui concerne l'admission en seconde C, ce qui est tout naturel, compte tenu que cette section est à dominante scientifique, mais importance non négligeable du facteur français ;

b) influence analogue de ces deux matières dans l'orientationvers le cycle court qui se présente essentiellement comme une sélection par l'échec ; ...

Les résultats de notre enquête tendraient à prouver qu'il est quelque peu abusif de parler de l'impérialisme des maths, d'en faire l'unique outil de sélection... Il apparaît que d'autres facteurs jouent de façon importante. En particulier, l'influence du facteur retard ... montre l'effet de tout redoublement au cours de la scolarité obligatoire ; a priori, rien ne permet d'attribuer à une moindre réussite en mathématiques l'origine de ces redoublements. L'apprentissage de la lecture semble être, dans les premières années de la scolarité, bien plus en cause " (8).

Précisons que :

- ce facteur retard concerne un très grand nombre d'élèves puisque quatre élèves sur dix du C.M.2 (dernière année de l'enseignement primaire) ont une ou plusieurs années de retard sur l'âge"normal" ;

- un peu plus d'un tiers seulement des élèves d'une classe de sixième sera admis dans une classe de seconde.

Ceci confirme que le problème de la sélection scolaire ne se réduit pas à celui de l'entrée en seconde C - la question ne se pose même pas pour un très grand nombre d'élèves - . De plus, et l'expérience des maîtres de l'enseignement primaire et du premier cycle que nous avons interrogés (sans toutefois procéder à une étude scientifique) le confirme : La sélection par les maths en fin de troisième (actuellement ; et bientôt en fin de seconde indifférenciée) s'effectue sur une population déjà sélectionnée : Cette "première" sélection beaucoup moins explicite, plus diffuse, échelonnée sur tout le temps de la scolarité obligatoire, a ses racines, au moins apparentes, dès le début de la scolarité : Elle a des aspects multiples mais le critère scolaire en est "la capacité de lecture" d'un texte : compréhension rapide, appropriation, capacité d'exploitation et de restitution par oral et par écrit. Cette "capacité" de lecture est indispensable dans la plupart des disicplines - y compris les mathématiques : Combien d'élèves butent sur un problème faute d'avoir compris le texte de l'enoncé.- Ce critère de par son importance, l'étendue de son utilisation, son aspect cumulatif, est autrement "efficace" que la réussite en mathématiques, même s'il est plus "discret", durant toute la scolarité obligatoire.

II. 2 Cela conduit à s'interroger sur les facteurs de réussite scolaire qui permet à un élève un véritable choix dans son orientation - et sur les facteurs d'échec qui l'oblige à suivre les impératifs de la sélection -. Ces facteurs sont nombreux ; ils jouent très tôt dans le cursus scolaire de l'élève, agissent en interaction et ont un caractère cumulatif que nous pouvons tous constater : compétences d'ordre corporel et psychomoteur (rythme, utilisation des sens, construction du schéma corporel, chez les plus jeunes) ; compétence d'ordre méthodologique (faculté d'organiser son temps et son travail) ; capacité d'attention, de concentration, aptitudes aux raisonnements, à l'abstraction, rapidité de compréhension et d'exécution ; autonomie, socialisation, capacité d'adaptation ; etc...

Il est difficile d'évaluer leur importance, plus encore de les prendre en compte de façon explicite dans les objectifs de formation de chacun de nos élèves et dans leur orientation ; il faudrait d'abord en connaître les origines : ici le débat, idéologique, est largement ouvert :

- certains insistent sur l'importance de l'affectif et du relationnel vécu par l'élève dans son environnement : dans sa famille principalement, mais aussi à l'école, au sein de la classe avec ses camarades et ses professeurs, dans et hors de son établissement scolaire.
- d'autres insistent sur l'importance du milieu socio-culturel des parents, de la société dans laquelle nous vivons : valeurs culturelles et idéologiques, organisation, influence et importance des mass-média, etc...
- beaucoup s'interrogent sur l'institution scolaire elle-même : sa structure, son organisation, ses finalités, ses moyens. Cela conduit aussi à s'interroger sur la qualité de notre enseignement et de ce dont elle dépend : notre culture et notre compétence mathématique, nos capacités pédagogiques et didactiques, notre attitude vis à vis de nos élèves, nos relations avec leurs parents, notre autonomie vis à vis de l'Administration, etc... (il y faut beaucoup d'humour et de sens critique) : La réussite scolaire d'un élève est fonction des institutions mais aussi des hommes et des femmes qu'il y rencontre !

II.3 L'enseignement dans les lycées n'a pas de fin en soi ; il prépare les élèves à l'Enseignement Supérieur (court ou long) et de ce fait les modes de sélection de celui-ci influent considérablement sur celui-là. Or de nombreux établissement de l'Enseignement Supérieur exigent à leur concours d'entrée un niveau de connaissances mathématiques sans commune mesure avec celui qui est nécessaire à la poursuite des études, mais à des fins de sélection ; c'est ainsi que certaines écoles de commerce "ouvertes à tous les bacheliers" sont par le jeu des coefficients, des notes éliminatoires, des sujets proposés, inabordables aux élèves de la section B (Sciences économiques et sociales) et sont réservées de fait aux élèves de la section C.

La pratique des mathématiques se réduit, pour la majorité des élèves à comprendre le discours du professeur et à utiliser à bon escient une série de définitions, de théorèmes, de recettes apprises pour l'examen. Toute interruption dans le processus d'apprentissage, toute incompréhension risque d'avoir de lourdes conséquences pour l'avenir de l'élève : D'une part à cause du caractère cumulatif des mathématiques, d'autre part en raison de la quasi-impossibilité de les apprendre seul, enfin parceque les exigences de rigueur en banissent tout discours approximatif.

Tout enseignement mathématique qui ne donne pas aux élèves (en classe et non en cours particuliers !) le temps de réfléchir, d'appréhender, d'abstraire les concepts en vue de leur acquisition et de leur maîtrise, de les faire fonctionner en cherchant à résoudre des problèmes et donc le temps de se tromper puis d'analyser son erreur, bref tout enseignement qui ne privilégie pas l'activité de l'élève favorise les esprits rapides et contribue efficacement à dégager l'élite des "bons" élèves bien adaptés au système scolaire.

Or, il faut bien voir que les défauts de conception des programmes actuels de mathématiques des lycées renforcent leur caractère sélectif ; trop conceptuels, trop linéaires et trop chargés, appliqués dans des classes trop nombreuses par des professeurs dont la formation conduit naturellement à un enseignement dogmatique (ce qui ne le justifie pas), ces programmes ambitieux ne peuvent que renforcer cette sélection déguisée qui va conduire les "bons" élèves dans les sections scientifiques et conforter les différents utilisateurs (enseignants et enseignés) dans leur rôle habituel.

Plus profondément, "faut-il s'étonner que la plupart des élèves de troisième souhaite s'orienter vers la seconde C lorsque cette section cumule tous les avantages : c'est le seul choix qui n'implique aucun renoncement, puisque la filière C laisse toutes les formations ultérieures possibles. Les autres filières se hièrarchisent derrière la seconde C en fonction du resserrement des possibilités de choix ultérieurs qu'elles impliquent. Cet état de chose transforme en hiérarchie de fait - faisant pendant à la hiérarchie des emplois - une différenciation des filières de formation présentée comme une simple diversification et change ainsi un processus d'orientation en processus de sélection" (1). Même la sélection médicale y trouve son compte : si elle ne se fait pas sur une épreuve de mathématiques, ce sont la quantité de travail, l'esprit de compétition, la capacité d'abstraction et d'accumulation des connaissances auqule l'élève de C aura été entraîné qui l'y préparent mieux que d'autres - même ceux qui ont suivi en D un enseignement biologique plus poussé -. Et les exemples de ce type ne manquent pas. Les élèves, eux, n'y trouvent pas leur compte :

- Il y a d'abord cette hiérarchie des sections qui recrée dans les lycées une véritable hiérarchie sociale ;
- Ensuite, trop d'élèves sont obligés de fournir un effort, un travail en mathématique disproportionnés avec les fruits qu'ils seraient en droit d'en espérer : ils sentent que cet effort et ce travail sont nécessaires à l'obtention du baccalauréat mais qu'ils ne seront pas suffisants pour être admis dans un établissement supérieur conforme à leurs aptitudes et leurs goûts ;
- Enfin, les qualités que développe un véritable apprentissage des mathématiques - attention, raisonnements, rigueur de pensée, esprit critique sur sa propre action, goût de la recherche, humilité devant les faits, choix d'un stratégie face à un problème,etc... - sont trop souvent négligées au profit de la rapidité de compréhension et d'exécution, la mémoire, la capacité d'accumulation des connaissances, l'aptitude à restituer ce qui a été appris, etc...

<u>II.4</u> Les divers examens qui jalonnent la scolarité secondaire devraient avoir un rôle sélectif certain. Or cela est loin d'être vrai quand on regarde d'un peu plus près.

Le B.E.P.C. n'a jamais prétendu sélectionner les élèves pour la poursuite des études. Depuis la réforme de celui-ci ce rôle de sélection que les parents ont toujours été tentés de donner à cet examen a été nié : tout élève entrant en seconde (ou en B.E.P.) se voit attribuer d'office le B.E.P.C. et pour ceux à qui on refuse l'entrée en seconde malgré leur désir, on a institué un examen de passage distinct. Le B.E.P.C. sanctionne donc bien un niveau acquis au cours de la scolarité. On notera cependant qu'il ne sanctionne que l'enseignement des mathématiques, du français, d'une langue vivante et de l'éducation physique, faisant fi de toute culture générale.

Dans le Département du Haut-Rhin, les seules disciplines qui apparaissent dans les examens d'admission et d'appel sont le français et les maths (et cette dernière avec des épreuves identiques dans des sections différentes comme A et B , ou C et D) et pour quelques sections la physique ou une langue vivante et seulement à partir de l'entrée en première (cf annexe). Est-ce différent ailleurs ?

Ces deux premiers exemples renforce bien la conclusion donnée par A. Jacquemin (9) sur le rôle essentiel du français et des mathématiques dans la scolarité.

Reste les examens terminaux de l'enseignement secondaire : C.A.P. , B.E.P., B.T., Baccalauréat. Contentons nous d'étudier le cas de ce dernier, qui est aussi le plus connu et voyons le rôle qu'y joue les mathématiques (12).

Si dans la section C plus du quart des coefficients est réservé aux mathématiques (5/19), c'est curieusement en F1 et F3 que le système des coefficients (joint à la séparation en épreuves d'enseignement général et épreuves d'enseignement professionnel) privilégie au maximum les mathématiques avec près de la moitié du total (5/11). N'est-ce pas là une traduction de l'importance du technico-scientifique dans la civilisation actuelle ?

Au delà des coefficients, on constatera que les épreuves de mathématiques portent sur des programmes qui sont inclus dans celui de C. On a à peu près l'ordre C, D, B, F3, F1, G(2 ou 3), A. Or la longueur de chaque programme est sensiblement proportionnelle à l'horaire hebdomadaire imparti, au moins pour les sections B, C, D, F3 et F1 ; ce qui veut dire que la difficulté de l'étude des mathématiques est la même pour toutes ces sections malgré une grande variation de l'horaire et des programmes. Alors, il n'est pas étonnant de constater que la note moyenne à l'épreuve de mathématiques des candidats au baccalauréat diminue de 9,7 en C à 9,5 en F3, 8,9 en D , 7,8 en F1 et 6,6 en B (notes de l'écrit 78 en Alsace), d'autant plus qu'en raison de la similitude des programmes, les correcteurs (qui sont souvent les mêmes) ont des exigences voisines, voire identiques dans les différentes sections. Ajoutons à cela la sélection par l'échec en mathématiques qui s'est faite, à l'entrée en première, entre C et D ou entre F3 et F1 ... et la hiérarchie obtenue ne doit plus surprendre personne.

Enfin il y a la façon de noter qui fait que la dispersion des notes est, en mathématiques, deux fois plus importante que dans les autres disciplines (8), ce qui, toute chose égale par ailleurs, a pour effet de multiplier par deux le coefficient relatif à cette discipline et d'en augmenter le caractère discriminatif.

Mais le baccalauréat, s'il sanctionne trois années d'études, ne sélectionne pas en ce sens que la sélection a eu lieu en amont par le choix des filières ou aura lieu en aval soit par concours ou examen, soit sur dossiers. Et c'est alors qu'on mesure le poids absurde des mathématiques et le rôle primordial de la section C. Le baccalauréat n'est que le révélateur du système d'orientation-sélection du second cycle long.

II.5 La très bonne corrélation qui existe entre la réussite en mathématiques et la réussite dans les autres disciplines pour les élèves de la section C (8), ne fait que confirmer la hiérarchie décrite précédemment. Elle met aussi en évidence le fait que le système scolaire privilégie dans une large mesure "l'intellect" et que les capacités et savoir-faire mis à l'honneur y sont, pour beaucoup, ceux que révèle la réussite en mathématiques. Ceci fait sinon dire, du moins penser à certains que les mathématiques sont, au sein du système scolaire actuel, un instrument de sélection qui, globalement, est relativement pertinent... Combien de professeurs d'autres disciplines ne préfèrent-ils pas enseigner dans les classes de C ? Pas tous, mais beaucoup.

A l'appui de ces affirmations, citons l'exemple de l'histoire-géographie où les programmes et les sujets du baccalauréat sont les mêmes dans toutes les sections, mais où l'horaire en C est inférieur, sans conséquence, bien au contraire, sur les résultats.

III - LES VRAIS PROBLEMES

III.1 Il faut aller plus loin, et d'abord faire un peu d'histoire (10): L'orientation des élèves qui s'appelait jusqu'en 1962 "Orientation professionnelle", date de 1922 ; elle prenait en charge les élèves sortant de la classe de fin d'études de l'enseignement primaire pour les conduire vers les centres d'apprentissage ou le collège technique ; son but était d'adapter les jeunes au monde de la production. A l'autre extrémité du système éducatif, le Bureau Universitaire des Statistiques (B.U.S.) créé en 1932 avait pour but essentiel d'aider les étudiants des facultés à prévoir leurs études en fonction de leurs goûts, leurs aptitudes et les débouchés prévisibles. Ainsi jusqu'en 1963, date de la mise en application de la réforme scolaire de 1959, l'orientation est absente de l'Ecole et la sélection se fait en amont de l'enseignement secondaire. En outre, les élèves qui ont accès à cet enseignement - c'est le petit nombre : moins d'un tiers des élèves de CM2 entrent en sixième en 1957 - y viennent pour se préparer au baccalauréat, soit en raison de leur appartenance à un milieu social où c'est la norme, soit en raison de résultats scolaires antérieurs ; de toute façon, la population du secondaire et le système scolaire sont bien adaptés l'un à l'autre : les élèves qui ne s'y adaptent pas n'ont à s'en prendre qu'à eux-mêmes ; il y a du reste des solutions de rechange.

La réforme du 6 janvier 1959 institue la scolarité obligatoire jusqu'à 16 ans, et rapproche dans des filières et des établissements distincts des populations scolaires jusque là étrangères l'une à l'autre (classes de fin d'études, cours complémentaires et sixièmes classiques et modernes). En 1963, ces filières, (classes de transition, d'enseignement court, d'enseignement long) sont réunies dans un même établissement, le C.E.S. L'enseignement secondaire est généralisé. Alors l'orientation entre dans l'enseignement du second degré. Elle se situe principalement à deux niveaux : celui de la sixième - l'orientation dans une filière a des conséquences déterminantes pour l'avenir de l'élève - et celui de la troisième, en fin de cycle dit "d'orientation". Mais n'ayant pas atténué les effets des inégalités des enfants, les filières sont supprimées. En les remplaçant par des mesures ponctuelles et très limitées de "soutien" pédagogique, on nie, en fait, l'importance de ces inégalités : c'est plus simple. Le maintien d'une structure d'élimination en fin de cinquième et l'abandon de ces mesures en quatrième et troisième avouent l'échec de l'entreprise. Que deviendra l'orientation en fin de troisième, quand sera mis en place la seconde indifférenciée (en 1981) ? Que deviendra le baccalauréat ? Passera-t-il de premier grade universitaire à un diplôme de fin d'études délivré par les lycées ? Nous ne le savons pas encore. On pourra d'ailleurs remarquer l'apparition récente d'un "certificat de fin d'études secondaires" que les jurys du baccalauréat décernent aux candidats refusés mais dont la moyenne des notes se situe entre huit et dix sur vingt. Va-t-on vers le rejet de toute forme de sélection explicite vers l'aval de l'enseignement secondaire en faveur d'une élimination discrète mais tout aussi "efficace" quantitativement que la précédente, de ceux qui ne s'adaptent pas au système ? L'avenir le dira.

III.2 En accueillant en classe de sixième tous les petits français - à l'exception des handicapés - sans prendre les moyens d'une réelle démocratisation, l'enseignement secondaire se trouve chargé de fait.(ce qui peut se discuter), et implicitement (ce qui est malsain) d'une mission de sélection voire d'élimination.

Remarquons, à ce propos, que les professeurs, chargés d'une mission d'orientation de plus en plus importante au fil des ans, ne reçoivent aucune formation à cet effet. Cela leur permet de justifier leur refus de toute sélection et d'en demander le report à plus tard ce qui ne traduit souvent qu'un refus de responsabilité et une manière de s'en décharger sur d'autres. La notation, du coup, devient pour les élèves, les parents, les professeurs une préoccupation bien plus importante que l'enseignement proprement dit, ce qui est un comble ! En outre, des travaux récents montrent par exemple, la faiblesse prédictive des résultats scolaires obtenus en troisième pour la réussite ou l'échec au lycée (11).

Tout cela engendre auprès des élèves ou/et de leurs parents une inquiètude latente, diffuse qui ne favorise en rien leurs études ou alors une indifférence totale qui se transforme bientôt en refus de l'Ecole (ce qui n'est pas mieux car les solutions de rechange sont très limitées pour de tels élèves). Ceci dit, c'est en réalité le contexte socio-économique et culturel actuel qui transforme cette inquiétude en véritable angoisse pour certains, et qui donne au problème de la sélection une dimension aussi grave et en fait un véritable problème de société. Alors les mathématiques, à la fois tant vénérées et tant redoutées deviennent le bouc émissaire dont on souhaite et redoute le sacrifice ; voilà qui risque de dispenser les pouvoirs publics, tous les professeurs, les parents et les étudiants eux-mêmes d'une réflexion beaucoup plus étendue et plus profonde sur l'Education, sur l'avenir proposé aux jeunes dans notre société, sur la part de responsabilité que chacun prend réellement et doit prendre dans l'éducation de celui ou celle dont il a la charge ; il est si facile de la rejeter sur les autres.

III.3 Mais que dit la loi ?

"Tout enfant a droit à une formation scolaire qui, complétant l'action de sa famille, concourt à son éducation. Cette formation scolaire est obligatoire entre six et seize ans.

Elle favorise l'épanouissement de l'enfant, lui permet d'acquérir une culture, le prépare à la vie professionnelle et à l'exercice de ses responsabilité d'homme et de citoyen. Elle constitue la base de l'éducation permanente. Les familles sont associées à l'accomplissement de ces missions.

Pour favoriser l'égalité des chances, des dispositions appropriées rendent possibles l'accès de chacun, en fonction de ses aptitudes, aux différents types ou niveaux de la formation scolaire." Article premier de la loi d'orientation relative à l'Education du 11 juillet 1975.

Programme politique oh combien ambitieux, mais qui faute de stratégie et de moyens, met tous ceux qui vivent la réalité scolaire dans un état de contradiction permanente :

- Contradiction entre orientation, choisie en fonction de goûts, d'aptitudes à un type d'études ou à une activité professionnelle et Sélection subie en fonction de résultats et de contraintes extérieurs ;
- Contradiction entre la nécessité et l'insuffisance grandissante des diplômes ;
- Contradiction entre formation et sélection : La première nécessite une "pédagogie de la réussite" où tout, y compris l'évaluation (auto-évaluation) est mis en oeuvre pour progresser et accroître au maximum la compétence, la seconde demande d'évaluer chez l'élève le seuil de savoir et de savoir-faire à partir duquel il échoue, pour détecter son niveau d'incompétence : on saura alors ce à quoi il ne peut prétendre ;
- Contradiction entre l'attitude du professeur au cours de l'année pendant laquelle il doit soutenir, encourager et accompagner l'élève et l'attitude de ce même professeur en fin d'année, au conseil de classe ou à l'examen où il doit prendre de la distance par rapport à l'élève pour le juger et le sélectionner ;
- Contradiction entre les demandes des futurs employeurs en matière de qualification professionnelle - il est facile de les nier ou de les rejeter, mais c'est alors refuser

une réalité -, et les exigences d'une formation intellectuelle ;

- Contradiction entre certaines initiatives ponctuelles des pouvoirs publics (10 %, "PACTE", clubs, etc...) et la réalité scolaire quotidienne en particulier le tranchant des résultats d'examen ;

- Contradiction entre les idées généreuses de syndicats ou d'Associations et leurs applications ;

- Contradiction entre une société hiérarchique dont la réussite est basée sur l'individualisme, la compétition, le pragmatisme, l'adaptation et une éducation idéaliste qui voudrait l'épanouissement de chacun et le bonheur de tous : "Une école démocratique cherchant à développer l'autonomie, la socialisation, le respect de la personne, permettant à chacun de se réaliser selon ses possibilités propres, est impossible dans une société inégalitaire fondée sur la compétition et le profit. Il faut choisir". (13)

Nous n'avons pas la naïveté de croire que l'on puisse vivre sans contradiction ; mais les rédormes successives n'ont fait que les accroître ; rien n'est pire que l'ambiguïté des objectifs de l'enseignement actuel, l'absence de projet éducatif, de choix et de visées explicites, le caractère implicite d'une sélection qui ne veut pas dire son nom : Elèves, parents et professeurs se sentent de plus en plus démunis face à une situation sur laquelle ils ont de moins en moins de prise, faute d'en connaître les règles. Comment s'étonner dans un tel contexte des réactions de plus en plus individualistes des "partenaires" du système éducatif. Le mythe de "l'égalité des chances" ne peut décidément pas remplacer une politique de l'éducation.

* *

*

Puissent ces réflexions aider à voir derrière l'arbre des mathématiques la forêt des problèmes de l'orientation et de la sélection, puissent-elles inciter tous les intéressés à s'y attaquer réellement. Qui en aura la volonté ?

Claude DE COMBEJEAN
Colette UTZMANN
Jean LEFORT
Lucien KOFFEL
Michel DE COINTET
Philippe DE COMBEJEAN
Pierre NEUMAYER

Pour toute correspondance s'adresser à:
Michel DE COINTET
25 rue des Acacias
67600 SELESTAT

Annexe ORGANISATION DE L'EXAMEN D'APPEL DANS LE HAUT-RHIN EN 1980

Admission en	Discipline	Coefficient	Durée	Observations
4ème ou 1°année LEP	Français	3	2h	entrée en 4ème.
		2	2h	entrée en LEP.
	Maths	3	1h30	
2de ou 1°année BEP	Français	4	2h	entrée en 2de
		3	2h	entrée en BEP
	Maths	2	2h	entrée en 2de A-AB BEP tertiaire
		4	2h	entrée en 2de C - T BEP industriel
1ère	Français	4	2h30	
	LV 1	2	1h30	seulement pour l'entrée en A - B et G
	Physique	3	2h	entrée en C - D - E
		2	2h	entrée en F
	Maths	2	2h	entrée en A et G
		3	2h	entrée en B
		4	2h	entrée en F
		4	2h	entrée en C - D - E
Term.	Français	4	2h30	
	LV 1	2	1h30	seulement pour A, B et G
	Physique	3	2h	seulement pour C, D et E
	Maths	2	2h	entrée en A, B, G_2, G_3
		4	2h	entrée en F
		4	2h	entrée en C - D - E

BIBLIOGRAPHIE

(1) M. Huteau et J. Lautrey : "L'utilisation des tests d'intelligence et de la psychologie cognitive dans l'éducation et l'orientation", L'Orientation Scolaire et Professionnelle, 1978, nº2.

(2) Jacques Monod (1970) cité dans "La Science dans l'idéologie" de Jean-Marc Lévy-Leblond dans "Philosopher" publié sous la direction de Christian Delacampagne et Robert Maggiori (Fayard, 1980).
Ce n'est pas le lieu ici d'entrer dans un débat idéologique, mais on pourra lire et faire lire avec profit à nos élèves, le chapitre cité ci-dessus.

(3) René Thom : "La Science malgré tout...", Organum, Encyclopaedia Universalis.

(4) Le Roy Ladurie : "La révolution quantitative et les historiens français : bilan d'une génération", Le territoire de l'historien, Gallimard 1977.

(5) Jean Jacques Salomon : "Science et Politique"; Seuil 1970.

(6) J. Cransac et M.C. Dauvisis : "La rigueur des professeurs de mathématiques et la notation", Bulletin A.P.M.E.P. Septembre 1975.

(7) M.C. Dauvisis : "D'une illusion entretenue ... l'évaluation et les notes en mathématiques", L'Ecole Ouverte, mai 1980.

(8) J. Lefort : "Mathématique et baccalauréat", Bulletin A.P.M.E.P. Septembre 1979.

(9) A. Jacquemin : "Orientation en fin de premier cycle et sélection sociale", L'orientation scolaire et Professionnelle, 1978, nº3.

(10) E. Vandermeersch : "De l'examen à l'Orientation, une mutation significative de l'école"; Pédagogie, avril 1975.

(11) M. Chauveau : "L'adaptation des élèves en classe de seconde", L'Orientation Scolaire et Professionnelle, 1980, nº2.

(12) J. Lefort : "Quelques idées de recherche sur le rôle des mathématiques dans le second cycle long et le baccalauréat", Irem de Strasbourg 1980 (à paraître).

(13) Louis Legrand : "Pour une politique démocratique de l'Education" P.U.F. Pédagogie d'aujourd'hui, 1977.

Problèmes numériques dans l'enseignement

Ecouter un exposé de J.L. Ovaert est toujours enrichissant. Spécialiste d'analyse, passionné d'histoire des mathématiques, tout ce qu'il dit est argumenté et il sait séparer en quelques mots simples les idées forces qui font date dans la pensée mathématique.

Dans le cadre du séminaire sur le fondement des sciences, il a donné une conférence sur : "le rôle des problèmes numériques dans les concepts d'analyse au XVIII è siècle", conférence dont on trouvera l'essentiel dans l'article : CALCUL NUMERIQUE (histoire du), dans le supplément qui vient de paraître de l'Encyclopaedia Universalis. (On pourra également consulter : Golstine : "A history of numerical analysis" chez Springer).

J.L. Ovaert a bien voulu, profitant de son passage à Strasbourg, présenter à la régionale A.P.M. un sujet voisin où l'accent à davantage été mis sur l'aspect pédagogique. On trouvera ci-après les principales idées qu'il a dégagé à cette occasion.

J. Lefort

*   *

*

On ne peut pas dire que les activités numériques fassent actuellement partie de la formation des professeurs. Peut-être peut-on parler d'activités numériques dans certains DEUG par l'intermédiaire de l'initiation à l'informatique, mais cela reste trop coupé du reste du cursus universitaire.

Dans les établissements scolaires, c'est encore pire : Si dans les programmes de terminale on parle d'intégrale de Riemann, on ne dit rien de leur calcul approché et si on en parle, aucune activité n'est prévue à ce sujet. Cette situation est encore aggravée dans les manuels où l'on cite le théorème des valeurs intermédiaires sans songer à l'appliquer à la résolution des équations numériques sauf quelques rares fois en exercice à la fin d'un chapitre.

Et pourtant, il ne faut pas oublier qu'historiquement, les problèmes numériques sont intimement liés aux concepts mathématiques et il est curieux de remarquer que l'accès aux calculatrices et aux ordinateurs a donné un regain d'intérêt à ces problèmes. On ne peut plus fermer les yeux devant la multiplication des calculatrices entre les mains des élèves. La question est alors de savoir quel apport ces machines peuvent avoir dans l'enseignement et plus précisément : Comment intégrer les problèmes numériques dans l'enseignement de l'analyse ?

On peut situer grossièrement le début de l'analyse en première dans le cursus scolaire. Mais on l'aborde alors par la continuité, les limites, puis les dérivées avec des ε-η-raisonnements qui rebutent les élèves. On ne s'intéresse finalement qu'à des propriétés qualitatives en négligeant complètement les propriétés quantitatives liées aux ordres de grandeur, à la rapidité de convergence d'une suite...

Il faut penser en termes de problèmes mathématiques, car c'est en se frottant à la résolution de tels problèmes à différents niveaux qu'on trouve le moyen d'approfondir les concepts mathématiques.

Voici donc quelques problèmes intervenant dans le second degré.

1º) <u>Approximations et représentation des nombres réels</u> :

On peut avoir différente représentation initiales, comme :

$$\text{Log } 2 = \int_1^2 (1/x)dx$$

$$= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$$

mais pour le calcul, on se ramène toujours à une <u>suite finie</u>. C'est là qu'intervient la notion de rapidité de calcul pour une précision donnée. Le problème - et donc l'approche pédagogique - est plus délicat quand on se trouve face à une suite dont on ne connait pas a priori le devenir comme : $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + 1/n)^n$

2º) <u>Recherche de solutions des équations numériques</u> :

C'est le problème de la recherche d'un point fixe, de la stabilité de ce point, et de la performance du processus qui conduit à son calcul.

Cette notion de performance est délicate car elle englobe, bien sûr, la notion de rapidité de convergence qui est en gros le nombre d'itérations qu'il faut faire pour gagner une décimale :

<u>exemples</u> : 1) Une suite géométrique en $1/2^n$ nécessite environ 3 pas (ou itérations) pour le gain d'une décimale (3   1/ln2).

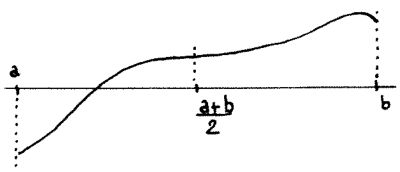
2) Si on a une suite en $1/10^{2^n}$ comme cela arrive dans le processus de Newton, on double le nombre de décimale à chaque pas.

3) Au contraire, si la suite est en $1/n^2$ la convergence est très lente.

mais cette notion de rapidité de convergence n'est pas suffisante pour apprécier la performance d'un processus. Il se peut que le calcul d'une itération soit tellement compliqué qu'on a plus vite fait à utiliser un processus à convergence un peu plus lente mais à calculs beaucoup plus simples. Ce qui compte finalement, c'est le temps de calcul pour un matériel donné (calculatrice, ordinateur,...).

<u>exemples</u> : 1) On connait le procédé de dichotomie pour la résolution de

$f(x) = 0$



On pourrait imaginer le procédé de "décachotomie" qui permettrait un gain d'une décimale à chaque étape. Mais il nécessite 9 opérations au lieu d'une pour la dichotomie et c'est donc ce dernier processus que l'on préfèrera malgrè la moindre rapidité de sa convergence.

2) Nous avons dit que la méthode de Newton donne une convergence en 10^{-2^n}. Il existe un algorithme en 10^{-3^n} mais qui est beaucoup trop compliqué et qui n'entraîne pas de gain voire même, entraîne une perte de temps.

3º) <u>Valeur approchée d'une fonction en un point</u> :

Un problème que se pose très souvent tout utilisateur de calculatrice, c'est de savoir comment sont calculées les fonctions élémentaires (fonctions trigonométriques, exponentielles,...). Certains pensent à tort aux développements en séries entières. En pratique, la méthode est très compliquée et repose sur les travaux de Padé (au XVIII è siècle) et de Tchebycheff : interpollation par des polynômes et des fractions rationnelles. Devant les difficultés théoriques qui sont ainsi soulevées, il vaut mieux montrer aux élèves comment fait à peu près la machine :

- Trouver des exemples de suites convergentes qui divergent sur la machine et inversement.
- Expliquer l'influence des erreurs d'arrondi.

<u>exemples</u> : 1) $\begin{cases} u_{n+1} = \sin u_n \\ u_0 = 1 \text{ rd} \end{cases}$

On démontre, mais cela est très difficile, que cette suite converge vers 0 en $1/\sqrt{n}$. On peut cependant accéder à ce dernier résultat expérimentalement. Par ailleurs, la machine va converger vers 10^{-4}, tout simplement parceque $\sin x - x \quad x^3/6$ et que pour $x \quad 10^{-4}$, $x^3/6 \quad 10^{-12}$ n'apparaît plus dans la calculatrice.

2) Il y a un phénomène analogue dans les tables numériques.

Tout cela montre bien l'intérêt, dans l'enseignement, d'avoir des inégalités plutôt que des $o(x^2)$ ....

4º) <u>Calculs asymptotiques</u> :

Juste pour mémoire ; il en est fait très peu usage dans l'enseignement secondaire en dehors de la formule de Stirling et des suites de Fibonnacci.

5º) <u>Interpolation et extrapolation</u> :

C'est l'exemple classique de la fabrication des tables trigonométriques. On sait calculer sin 60º, sin 72º, donc sin 12º puis sin6º et enfin sin 3º . Le problème s'est posé de calculer sin 1º dès l'époque des grecs avec Ptolémée ; (d'où le problème ultérieur de la trisection de l'angle).

- Dans l'Almageste, Ptolémée le résoud de la façon suivante : Calcul de sin 1,5º et sin 0,75º et interpolation linéaire entre ces deux valeurs ce qui fournit sin 1º à 10^{-6} près.

- Les progrès de l'astronomie ont amené les mathématiciens arabes à améliorer cette précision. Vers 1400, Alkachi, astronome à l'observatoire de Samarcande, part de la relation $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$. Connaissant sin 3º, il en déduit sin 1º en résolvant par approximation successives l'équation :

$$(1/3)(\sin 3^\circ + 4y^3) = y$$

en partant de $u_1 = (1/3)\sin 3^\circ$ et de $u_{n+1} = (1/3)(\sin 3^\circ + 4u_n^3)$

Il suffit de trois itérations pour arriver à 10 décimales exactes.

D'un point de vue pédagogique, la théorie est loin d'être captivante pour les élèves et elle ne se fera que sur des exemples bien choisis où on peut montrer les raisons de la rapidité de convergence et les procédés qui permettent d'accélérer cette convergence.

* *

*

Les quelques exemples qui viennent d'être donnés sont magnifiquement illustrés d'un point de vue pédagogique par un texte d'Euler de 1748 : "Introduction à l'analyse des infiniments petits" chapitre XVI : De la résolution des équations par approximations. Ce texte (dans une réédition du XIX ème siècle) doit être mis entre les mains des élèves. Il ne prés nte aucune difficulté de lecture en dehors des notations : 4 1/2 pour 4 + 1/2 et xx pour x^2. On trouvera ci-après une copie de ce texte.

J.L. Ovaert

CHAPITRE XVI.

De la résolution des Equations par des approximations.

784.

LORSQUE les racines d'une équation ne sont pas rationnelles, soit qu'on puisse les exprimer par des quantités radicales, soit qu'on n'ait pas même cette ressource, comme c'est le cas pour les équations qui passent le quatrieme degré, on est obligé de

Vv 3

fe contenter de déterminer leurs valeurs par des approximations, c'eft-à-dire par des voies qui font qu'on approche toujours davantage de la vraie valeur, jufqu'à ce que l'erreur puiffe être cenfée nulle. On a propofé différentes méthodes de cette efpece, nous allons détailler les principales.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, fuppofe qu'on ait déjà déterminé affez exactement la valeur d'une racine (*) ; qu'on fache, par exemple, qu'une telle valeur furpaffe 4, & qu'elle eft plus petite que 5. Dans ce cas, fi l'on fuppofe cette valeur $=4+p$, on eft sûr que p exprime une fraction. Or fi p eft une fraction, & par conféquent moindre que l'unité, le quarré

(*) Cette méthode eft celle que *Newton* a donnée au commencement de fa *méthode des fluxions*. En l'approfondiffant on la trouve fujette à différentes imperfections ; c'eft pourquoi on y fubftituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 et 1768.

de p, fon cube, & en général toutes les puiffances plus hautes de p, feront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puifqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4+p$; on partira de là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, jufqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le fouhaitoit.

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx=20$.

On voit ici que x eft plus grand que 4 & plus petit que 5 ; en conféquence de cela on fera $x=4+p$, & on aura $xx=16+8p+pp=20$; mais comme pp eft très-petit, on négligera ce terme pour avoir ſeulement l'équation $16+8p=20$, ou $8p=4$; elle donne $p=\frac{1}{2}$ & $x=4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on ſuppoſe à préſent $x=4\frac{1}{2}+p$; on eſt ſûr que p ſignifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raiſon. On aura donc $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, ou $9p=-\frac{1}{4}$, & par conſéquent $p=-\frac{1}{36}$; donc $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$.

Que ſi l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x=4\frac{17}{36}+p$, & on auroit $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$; ainſi $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$, $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, & $p=-\frac{1}{36\cdot 322}=-\frac{1}{11592}$. Donc $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche ſi fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

787.

Généraliſons ce que nous venons d'expoſer, en ſuppoſant que l'équation donnée ſoit $xx=a$, & qu'on ſache d'avance que x eſt plus grand que n, mais plus petit que $n+1$. Si après cela nous ſuppoſons $x=n+p$, en ſorte que p doive être une fraction, & que pp puiſſe ſe négliger comme une quantité très-petite, nous aurons $xx=nn+2np=a$; ainſi $2np=a-nn$, & $p=\frac{a-nn}{2n}$; par conſéquent $x=n+\frac{a-nn}{2n}=\frac{nn+a}{2n}$. Or ſi n approchoit déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur $\frac{nn+a}{2n}$ en approchera encore beaucoup plus. Ainſi en la ſubſtituant à n, on ſe trouvera encore plus près de la vérité; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra ſubſtituer de nouveau, afin d'approcher encore davantage; & on pourra continuer le même procédé auſſi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, $a=2$, c'eſt-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2; ſi

N.D.L.R : il faut lire $4\frac{5473}{11592}$ comme ultime valeur approchée de $\sqrt{20}$.

on connoît déjà une valeur assez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

I.) $n=1$, on aura $x=\frac{3}{2}$,
II.) $n=\frac{3}{2}$, on aura $x=\frac{17}{12}$,
III.) $n=\frac{17}{12}$, on aura $x=\frac{577}{408}$;

& cette derniere valeur approche si fort de $\sqrt{2}$, que son quarré $\frac{332929}{166464}$ ne differe du nombre 2 que de la petite quantité $\frac{1}{166464}$, dont il le surpasse.

788.

On pourra procéder de la même maniere, quand il s'agira de trouver par approximation des racines cubiques, quarré-quarrées, &c.

Soit donnée l'équation du troisieme degré, $x^3=a$, & qu'on se propose de trouver la valeur de $\sqrt[3]{a}$. On supposera, sachant qu'elle est à peu près n, que $x=n+p$; on aura, en omettant pp & p^3, x^3

$=n^3+3nnp=a$; ainsi $3nnp=a-n^3$, & $p=\frac{a-n^3}{3nn}$; donc $x=\frac{2n^3+a}{3nn}$. Si donc n est de fort près $=\sqrt[3]{a}$, la formule que l'on vient de trouver en approchera encore beaucoup plus. Mais pour une précision encore plus grande, on pourra la substituer à son tour à la place de n, & ainsi de suite.

Soit par exemple $x^3=2$, & qu'on veuille déterminer $\sqrt[3]{2}$. Si n approche de près le nombre cherché, la formule $\frac{2n^3+2}{3nn}$ exprimera ce nombre encore de plus près; qu'on fasse donc

I.) $n=1$, on aura $x=\frac{4}{3}$,
II.) $n=\frac{4}{3}$, on aura $x=\frac{91}{72}$,
III.) $n=\frac{91}{72}$, on aura $x=\frac{162130896}{128634294}$.

789.

On emploie cette méthode avec le même succès, pour trouver par approximation les racines de toutes les équations.

Supposons, pour le faire voir, qu'on ait l'équation générale du troisieme degré, $x^3+axx+bx+c=0$, où n approche déjà beaucoup d'une des racines. Faisons $x=n-p$; &, puisque p sera une fraction, négligeant les puissances de cette lettre plus hautes que le premier degré, nous aurons $xx=nn-2np$, & $x^3=n^3-3npp$, d'où résulte l'équation $n^3-3nnp+ann-2anp+bn-bp+c=0$, ou $n^3+ann+bn+c=3nnp+2anp+bp=(3nn+2an+b)p$; ainsi $p=\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}$, & $x=n-\left(\frac{n^3+ann+bn+c}{3nn+2an+b}\right)=\frac{2n^3+ann-c}{3nn+2an+b}$. Cette valeur, qui est déjà plus exacte que la premiere, étant substituée à la place de n, en fournira une nouvelle encore plus exacte.

790.

Soit, pour appliquer ce procédé à un exemple, $x^3+2xx+3x-50=0$, où

$a=2$, $b=3$ & $c=-50$. Si n est censé approcher de près une des racines, $x=\frac{2n^3+2nn+50}{3nn+4n+3}$, sera une valeur encore plus proche de la vraie. Or la valeur $x=3$ n'étant pas éloignée de la véritable, nous supposerons $n=3$, & nous trouvons $x=\frac{62}{21}$. Que si nous écrivions cette nouvelle valeur à la place de n, nous en trouverions une autre encore plus exacte.

791.

Nous ne donnerons pour les équations des degrés supérieurs au troisieme, que l'exemple suivant:

Soit $x^5=6x+10$, ou $x^5-6x-10=0$, où on remarque facilement que 1 est trop petit, & que 2 est trop grand. Or, si $x=n$ est une valeur assez proche de la vraie, & qu'on fasse $x=n+p$, on aura $x^5=n^5+5n^4p$, & par conséquent $n^5+5n^4p=6n+6p+10$, ou $5n^4p-6p=6n+10-n^5$. Donc $p=\frac{6n+10-n^5}{5n^4-6}$

& $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Qu'on suppose $n = 1$, on aura $x = \frac{14}{-1} = -14$; cette valeur est tout-à-fait impropre, & cela vient de ce que la valeur approchée de n étoit de beaucoup trop petite. On fera donc $n = 2$, & on aura $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, valeur qui s'écarte beaucoup moins de la vraie. Si on se donnoit la peine de substituer maintenant, au lieu de n, la fraction $\frac{69}{37}$, on parviendroit à une valeur encore bien plus exacte de la racine x.

1 Activité des groupes IREM participant au groupe Inter-IREM d'Analyse :

Les groupes IREM -Analyse sont le plus souvent formés d'un animateur (éventuellement de plusieurs), membre de l'enseignement secondaire ou supérieur, et de stagiaires membres de l'enseignement secondaire dans le premier ou le second cycle. Ces groupes comprennent très rarement plus de dix personnes.
Parmi les motivations qui amènent à participer à de tels groupes, on trouve notamment :

- le besoin de réflexion collective sur les problèmes pédagogiques vécus chaque jour dans la classe. La confrontation des expériences conduit à se remettre en question, donne des éléments pour progresser, appelle à diversifier ses recherches et ses sources de réflexions personnelles.
- Le besoin de renouveler ses méthodes de travail, de savoir susciter l'intérêt des élèves, de leur proposer des activités mathématiques significatives et formatrices.
- Le besoin de remettre à jour ou de compléter ses connaissances théoriques. Mieux maitriser un sujet permet de mieux l'enseigner, même (ou surtout ?) si c'est à un niveau élémentaire.
- Le besoin d'aborder certaines notions de façon pluridisciplinaire.

Dans la plupart des cas, les travaux des groupes Analyse sont menés à deux niveaux :

- un niveau général : réflexion sur l'Analyse, sur son enseignement à un stade donné ou à tous les stades (d'un point de vue scientifique), sur les objectifs de cet enseignement.
- Un niveau plus ponctuel ou pratique : partant des réalités ambiantes (programmes, homogénéité ou hétérogénéité des classes, motivation des élèves ...) il s'agit de recenser les difficultés concrètes de l'enseignement de l'Analyse, d'en chercher les origines, de proposer des remèdes.

Ces travaux s'étalent en général sur plusieurs années scolaires. Ils intègrent le plus souvent à leur progression des expérimentations avec des classes réelles. Seules ces expérimentations et les conclusions qui s'en dégagent permettent de juger les modifications pédagogiques que propose un groupe.

Ces comptes rendus d'expérimentations illustrent fréquemment les publications au travers desquelles les divers groupes IREM voudraient faire connaître les résultats théoriques ou pratiques de leurs activités.

2 Publications des groupes participant au groupe Inter-IREM d'Analyse

BORDEAUX

. Dans le Journal de liaison de l'IREM de Bordeaux de Mars 1978 :

- Une introduction à la notion de suite réelle en Seconde : une série de TD destinés à familiariser les élèves avec la notion réelle infinie, de convergence, de rapidité de convergence, et par là, à préparer le terrain pour le concept de limité, avec quelques exemples de situations concrètes où les suites interviennent.

- A propos d'intégrales : des thèmes d'activités pour montrer qu'on peut faire bien des choses avec les intégrales sans les ramener à des calculs de primitives.

- Une définition des fonctions Log et Exp à partir de suites : par une considération "naturelle" Log est définie à partir de $\lim\limits_{n \to +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$, et les propriétés de Log sont démontrées élémentairement (niveau Terminale) à partir de cette définition. Puis Exp. est obtenue comme fonction réciproque.

. Dans le Journal de liaison de l'I.R.E.M de Bordeaux de Juin 1979 :

- A propos des dérivées d'une fonction en un point : lien entre la notion de dérivée $n^{\text{ième}}$ de f en x_o et la notion de meilleure approximation locale en x_o de f par un polynôme de degré n.

. Une présentation de l'Intégrale de Riemann à l'aide de Suites (1978) en cherchant à calculer l'aire de la surface associée à une courbe $y = f(x)$, on est amené à définir l'intégrale de Riemann au moyen de 2 suites intrinsequement liées à une fonction f bornée sur $[a,b]$, et on démontre les propriétés classiques de l'Intégrale à partir de cette définition.

. Quelques exercices d'Analyse pour le Second Cycle (1978) propositions de de thèmes d'activités (de la Seconde à la Terminale) visant à familiariser l'élève avec les techniques clefs du raisonnement en Analyse : majorations, minorations, encadrements, recherche de valeurs approchées, évaluation d'erreurs, amélioration d'une approximation, d'une rapidité de convergence...

. Quelques TD numériques (1979) approximations de fonctions usuelles (sin. , Log., cos., exp.,....) avec usage de calculatrices.

. Une série de fiches d'Analyse pour la classe de Première (1978) par une succession de TD où les élèves sont amenés à manipuler des suites et des fonctions. On essaie de faire apparaître les questions clefs du programme d'Analyse. La priorité est donnée aux préoccupations d'ordre quantitatif ou global, le souci du qualitatif et du local vient après. (Les inégalités de type lipschitz jouant un rôle primordial)

DIJON

. Colloque "Enseignement de l'Analyse" (Janvier 1977)

1) Usage des calculateurs programmables dans l'enseignement de l'Analyse
   - Diviser des tables de valeurs numériques : usage de ces tables. Calcul des différences finies, interpolations.
   - Limite d'une fonction : faire présenter en Première l'existence d'une limite en 2 (resp. en $+\infty$) de la fonction $x \to \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ (resp. $x \to \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$) au moyen d'une sous-suite d'une suite avec utilisation d'une HP 25.
   - Résolution approchée d'équation par la méthode de Newton (avec HP 25) : étude expérimentale d'exemples ($x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, $x - \sin x - 0{,}25 = 0$, $x^3 + x = 1000$ ...) et étude théorique de conditions suffisantes de convergence.
   - Calcul d'intégrales par des méthodes d'approximations (et HP 25) et comparaison des méthodes (fonctions en escalier, trapèzes, tangentes, Simpson)
   - Pour une approche heuristique de l'Analyse (en Terminale C) : "comprendre d'abord, formaliser ensuite" (déclaration d'intentions)

2) Analyse et épistémologie : réflexion sur la situation actuelle et les remèdes possibles, autour des thèmes suivants : suites et fonctions, calcul intégral, la notion de rigueur en Analyse.

3) Activités préparatoires à l'Analyse : propositions pour organiser ces activités.

4) Les causes d'échecs et d'erreurs en Analyse.

5) A propos de la notion de limite de la Maternelle à l'Université (réflexion générale)

6) Liaisons Terminales - DEUG (réflexion générale).

. Pour une approche heuristique de l'enseignement de l'Analyse (avec usage de calculatrices) (1978)

1) Approche heuristique des nombres réels : à partir des développements décimaux, à partir d'une "pseudo-convergence" dans Q (suites de Cauchy) d'où la notion de coupure.

2) Approche heuristique de la notion de convergence de suites réelles : par l'étude expérimentale de plusieurs suites il s'agit d'amener les élèves à prendre conscience du phénomène de convergence.

3) Fonctions : à propos de fonctions explicites, ne pas se contenter d'une étude qualitative, mais montrer l'intérêt de l'aspect quantitatif, la compréhension concrête des concepts qu'il permet.

4) Résolution approchée d'équations : intérêt des méthodes approchées quand on ne connaît pas de formules universelles, approfondissemnt que ces méthodes appellent...

4) Calcul intégral (même objectif que dans le point 4)).

. Bulletin Spécial "exercices" (Mars 1978) : propositions de thèmes d'exercices d'Analyse ou de Géométrie, tirés souvent de domaines extra-mathématiques, échelonnés de la 6ème à la Terminale.

. Bulletin Spécial "Activités numériques" (Avril 1979)

- Histoire du calcul numérique
- Leibriz et la numération
- La division à l'école élémentaire.... et après
- Calcul numérique : exemples introduisant les notions de fraction et de rationnel
- Jeux de nombres dans le 1er Cycle : exemples de situations, autour de nombres, où il est assez difficile de "théoriser", pour lesquelles le professeur n'a pas un discours tout prêt.
- Les détours du jeu de Tsyanshidzi :
- Grand Prix de Formule 1 : exemples d'études expérimentales de rapidité de convergence de suites (Terminale)
- Calculs et moyennes : quelques exemples concrêts où interviennent les notions de moyennes mathématiques, géométriques, harmoniques ou quadratiques
- Valeurs approchées : intérêt des moyennes arithmétiques, géométriques ou harmoniques pour obtenir des valeurs approchées de nombres dont on connaît un encadrement, en liaison avec le critère d'optimisation choisi.
- Calculs numériques et racines carrées : une méthode d'approximation de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par une suite de fonctions rationnelles, avec connaissance à chaque étape de l'approximation, et programmation de cette méthode sur un calculateur.
- A propos des dénombrements : nombres de Stirling et nombres de Bell.

. Pages et calculs choisis de Blaise Pascal (1978)

GRENOBLE

. Activités préparatoires à l'Analyse (1978)

- Valeur absolue - Distance sur $\mathbb{R}$. Intervalles : comprendre ces notions dans leurs divers aspects au moyen d'activités sur fiches (niveau 4ème)
- A propos de l'approximation (en Seconde) de $\frac{1}{x}$ au voisinage de 1, de $\sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $\frac{1}{2}$.
- Une étude expérimentale de suites et séries géométriques de raison $q \in]-1,1[$

. Quelques réflexions sur l'Analyse enseignée en Première et Terminale C et D (1976) : mise en évidence des difficultés pédagogiques que soulèvent six thèmes précis, propositions de remèdes : le composition des applications, les notations sur les fonctions, les définitions de continuité et dérivabilité, continuité et dérivabilité sur un intervalle, limites d'applications dérivées, fonctions croissantes.

. Les notions spontanées de limite en conflit avec la notion mathématique (1980)

au moyen de tests et interviews, le groupe IREM a cherché à déceler comment les notions de "tendre vers" et de "limites" sont assimilées par les élèves, comment les connaissances spontanées des élèves et le concept mathématique se justaposent, se complètent ou se contrarient.

LILLE

. Approche des réels en classe de 4ème (P. Jeannin et J.P Muselet - 1974)

Série de fiches rédigées par des élèves de 4ème

. Sur les nombres réels et la géométrie (R. Bkouche)

A propos du rapport Géométrique-numérique : il n'y a pas de priorité de l'un ou l'autre. Les deux domaines sont liés et chacun d'eux permet d'éclairer l'autre.

. Logarithmes et exponentielles (D. Poisson - Formation des Adultes)

Construction des fonctions logarithmes et exponentielles par la recherche de solutions mathématiques à des problèmes d'origine concrète.

. Pente - Hauteur - Surface (D. Poisson - 1978 - Formation des Adultes)

Introduction à la dérivation et à l'intégration.

A propos de la notion de limite (P. Tison - Bulletin n° 3 de l'IREM de Lille- Novembre 1976)
Remarques d'ordre général sur l'introduction de l'Analyse dans l'enseignement, du cours moyen aux Terminales.

. A la poursuite des réels (A. Michel et P. Tison) :

Quelques exercices destinés à faire appréhender la notion de nombre réel avec usage de petites calculatrices.

. Introduction à la notion de filtre (P. Tison) (Niveau : approfondissement théorique)

Construction de la notion de filtre à partir de quelques exemples déjà connus (suites convergentes, diverses extensions de la notion de limite d'une application en un point, intégrale de Riemann....)

. A paraître : "Les réels : de la suite dans les idées ...." (A. Michel et P. Tison)

(Niveau : approfondissement théorique) Etude des relations entre la propriété d'Archimède et les diverses propriétés de complétion.

. A paraître : "Etude locale des fonctions : approximation, encadrement, tangente"

(A. Michel et P. Tison) (Niveau : Seconde et Première) Construction de représentations graphiques de fonctions, encadrements et approximations, tangente, "développement limité", dérivées. (Ces activités ne supposant pas connue la notion de limite).

LIMOGES

. Les nombres réels (J. Dupuis - 1973)

Construction de $\mathbb{R}$: 1° à partir des décimaux - 2) à partir des suite de Cauchy - 3) à partir des sections commençantes.

. Introduction à l'Analyse en Seconde à l'aide de mini-calculateurs (M. Clément - 1979) - Série de fiches à utiliser avec une petite calculatrice programmable, visant à mettre l'élève en présence de représentations graphiques nombreuses et variées et à susciter autour d'elles des problèmes d'interpolation linéaire, de calcul approché de racines d'équations, de recherche d'extremum.

. Approximation des racines d'une équation $f(x) = 0$ (J. Ezquerra - 1978)

Etude de problèmes théoriques, et traitement sur calculatrices.

. Continuité - Limites - Dérivation - Etude de fonctions en Première B - (1979)

Série de fiches de T.P destinées à des élèves de Première B, les objectifs étant : ne pas ramener l'étude des limites à l'application de recettes, rendre concrête la notion de continuité, introduire le nombre dérivé à partir d'exemples physiques et économiques, utiliser la fonction dérivée et l'étude de fonctions dans des problèmes de physique et d'économie.

. Analyse I (MM Blanchet et Roumilhac - 1979)

Exposé des définitions fondamentales et théorèmes classiques, suivi d'exercices d'application, pour les notions suivantes : domaine d'existence d'une fonction, limites, continuité, sens de variation, dérivées, fonction affine tangente.

LYON

. Premiers balbutiements (1976)

- L'enseignement de l'Analyse en question
- Enquête sur la connaissance des nombres réels chez les élèves de la 3ème à la Terminale (toutes sections)
- Des décimaux aux réels (réflexion générale)
- Etude de fonctions en Seconde : construction graphique précise de paraboles, d'où valeurs approchées de racines carrées, construction graphique précise de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$
- Fonctions circulaires : proposition pour réintroduire les fonctions circulaires par une "description" du cercle trigonométrique, intérêt pédagogique de cette méthode dans le déroulement du cours d'Analyse.
- Aires : proposition de retour à l'ancienne présentation de l'intégrale par les aires, en particulier pour construire la fonction Log.

. Pliages et Calculs (Avril 1979)

Comment construire sur le segment $[0,1]$, matérialisé par une bande de papier, n'importe quel point d'abscisse donnée (entre 0 et 1) avec l'approximation désirée, uniquement par une succession de pliages en deux. Exposé des fondements théoriques de cette recherche et de ses prolongements.

. Intégration (Janvier 1979)

Proposition pour un enseignement de l'intégration en Terminale basé sur l'étude de "problèmes d'intégration" et non sur une définition préalable. Ces problèmes sont entre autres : aire plane délimitée par $y = f(x)$, centre de gravité, volume de révolution, moment d'inertie, travail d'une force, quantité d'électricité, distance parcourue par un mobile.

. Sans tambour ni trompette (Juin 1978)

Concernant l'Analyse, on trouve les articles suivants :

- auteur de π : historique de diverses méthodes d'approximation de π (Egyptiens, Babyloniens, Archimède, Hippocrate de Chio, Métius, Huyghens, Viète, Wallis, et les modernes).
- Deux T.P. de Maths. en Terminale avec calculatrices ; construction de quelques courbes point par point, approximation de la constante d'Euler par usage des "paquets de Cauchy".

. Vers la dérivée en Première A (R. Gauthier - 1977) :

On cherche à rendre sensible à des élèves de Première A la notion de dérivée, au travers d'activités multiples tirées le plus souvent de problèmes concrêts.

. Premiers pas (1977)

- Les fractions en 6ème et 5ème : présentation d'une expérience destinée à apprendre aux élèves de 6ème et 5ème la manipulation des fractions (et non la définition du corps des rationnels)
- A propos de l'enseignement de la récurrence en Terminale
- A propos de quelques axiomes des réels (segments emboités, borne su périeure, Archimède)
- Calculs numériques avec ou sans machine dans le Second Degré ; suites récurrentes de rationnels convergeant vers $\sqrt{a}$ avec maîtrise de l'approximation (processus de Héron), convergence vers π (formules de Wallis, de Viète, méthode des polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle de rayon 1) avec usage de machines programmables.
- A propos de la monotonie : réflexion sur les rapports de la monotonie avec l'intégrabilité, la dérivabilité, la continuité.
- Fonctions dérivées et théorème des valeurs intermédiaires.
- Le formalisme des dérivées et des différentielles.

NANCY

. Autour d'un prêt bancaire (M. Deschazeaux - 1978)

Une expérience pédagogique en 2AB où l'on tente de faire passer les mathématiques à travers du concrêt (plutôt qu'illustrer les mathématiques par une application) donc partir de la vie courante (plutôt qu'y arriver).

NANTES

. Quelques difficultés pédagogiques dans l'enseignement de l'Analyse dans le Second Cycle (MM Fouques et Seroux)

Analyse critique d'énoncés de problèmes d'analyse tirés des Annales du Bac. (toutes séries). Réflexions et propositions concernant la présentation de quelques uns des concepts fondamentaux ou théorèmes clefs relatifs à l'ensemble des nombres réels, aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, aux limites et à la continuité, aux équations.

. Etude épistémologique et historique des idées de nombre, mesure et de continu (Nanta - Iremica 3)

MARSEILLE

. Suites (1977)

Proposition d'activités autour de la notion de suite réelle (classe de Seconde et Première) destinées à familiariser les élèves avec la notion de suite infinie, de convergence, de rapidité de convergence, à leur faire percevoir l'efficacité de cet outil (approximation des réels par des suites de décimaux, solutions approchées d'équations, étude des restes de séries convergentes ou des sommes partielles de séries divergentes, approximation de fonctions et de nombres attachés à des fonctions).

. Calcul de valeurs approchées de π

- Méthode des polygones inscrits et exinscrits : méthode d'Archimède et méthode utilisant l'encadrement de Snellius : $\dfrac{3 \sin x}{2 + \cos x} \leq x \leq \dfrac{2 \sin x + \operatorname{tg} x}{3}$
- Méthode des développements en séries : méthode de James Grégory (par développement de Arctg x en série entière), méthode d'Euler.

. Intégration (1977)

1° Réflexion sur le rôle de la formule d'intégration par parties dans de nombreux problèmes d'approximation de fonctions (avec évaluation de la performance du procédé d'approximation).

2° Quelques méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales : exposé des méthodes (rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson), contrôle des erreurs.

. Eléments de bibliographie sur le Calcul infinitésimal et l'Analyse (1978)

. Histoire du Calcul numérique (1979)

Il s'agit de mettre en lumière comment dans l'histoire des mathématiques il y a interaction constante entre les progrès du calcul et l'approfondissement des concepts.

. Objectifs et méthodes de travail pour l'enseignement de l'Analyse dans le Secondaire (1979)

Le groupe Analyse de l'IREM de Marseille :

1° fait une étude de l'état actuel de l'enseignement de l'Analyse

2° présente ses objectifs et méthodes de travail

3° dresse une liste des problèmes de l'Analyse qui doivent être abordés au cours de la scolarité

4° analyse le rôle didactique que peuvent avoir les calculatrices de poche : contribution à l'apprentissage du calcul, contribution aux activités liées à l'Analyse.

. Résolution de l'équation $f(x) = x$ par approximations successives (1980)

Etude de l'existence et de l'unicité d'une solution. Obtention de "la" solution par approximations successives. Etude de la stabilité. Etude de la rapidité de convergence. Accélération de la convergence. Comment ramener la résolution de $h(x) = 0$ au problème précédent.

MONTPELLIER

. Document n° 1 : Continuité (1978)

Quelques remarques sur la continuité d'une fonction $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en liaison avec l'interpolation linéaire ou la limite de suites.

. Document n° 2 : Intégration (1978)

Présenter l'intégrale (en Terminale) sans faire appel à la notion de dérivée, mais en insistant sur sa définition en qualité de limite et en partant de problèmes concrets (énergie potentielle d'un ressort, volume d'une pyramide).

POITIERS

. Sur l'enseignement de l'Analyse n° 1 - Fonctions (1976)

Réflexions sur la notion de fonction et la façon de l'enseigner. Tests (niveau Seconde) et commentaires sur les réponses. Indications pour une leçon sur les fonctions en Seconde : comprendre le concept à partir de la construction explicite de nombreuses fonctions, par l'usage de dessins et diverses manipulations concrètes. Compte-rendu d'une séance de T.D. Note historique.

. Sur l'enseignement de l'Analyse n° 2 - Valeur absolue (1976)

Au niveau Seconde, que savoir sur ce thème ? Cause des difficultés. Remèdes Deux présentations de la valeur absolue sont proposées : par restriction à l'axe (0x) de la distance dans le plan, ou par construction d'une distance sur la droite réelle. Exercices - Fonction valeur absolue, avec exercices. Propriétés de la valeur absolue, avec exercices. Equations et Inéquations. Vers la continuité.

. Sur l'enseignement de l'Analyse n° 3 - Notion de limite, suites réelles - (1978) : (Pour toutes sections à partir de la Seconde)

- Réflexions sur la notion de limite. Objectifs. Options
- Bibliographie sur le nombre π
- Introduction à la notion de limite par quatre T.D. dont un auteur de π (recherche d'une valeur approchée de π par encadrement de la circonférence au moyen de polygones réguliers), et un autre autour de $\sqrt{2}$ (encadrement de $\sqrt{2}$ par deux suites de décimaux, ou par résolution approchée avec graphiques de $x = 1 + \dfrac{1}{1+x}$, ou de $x = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{2}{x})$)
- Formalisations, définitions.

. Dérivabilité (1977 (Première et Terminale)

Dégager l'idée de nombre dérivé à partir de situations concrètes (vitesse d'un mobile; tangente en un point à une courbe). Puis le concept étant formalisé, exercices divers d'application pour en saisir toute la portée. Il s'agit de fiches de travail avec compte rendu des réactions observables d'élèves.

. Intégration en continuité (document pour les professeurs) :

Fonctions intégrables, fonctions non intégrables.

RENNES

. Activités en Analyse : majorer, minorer, encadrer - ou "comment faire de l'Analyse sans limite ni continuité" (M. Viallard - 1978) :
Proposition de thèmes d'exercices visant à préparer l'enseignement des concepts fondamentaux, à faire manipuler d'abord des proprités globales ou quantitatives

qui, une fois maîtrisées, permettront d'introduire les problèmes du local et du qualitatif. Ces exercices font établir des encadrements, majorations, minorations de fonctions sur des intervalles donnés, par des nombres ou par d'autres fonctions. Recherche de valeurs approchées. Tout cela sans recours à des notions de limite, continuité ou dérivabilité. Ces exercices sont répartis en trois niveaux qu'on peut faire correspondre aux classes de Seconde, Première et Terminale.

3 Quelques publications intéressant l'enseignement de l'Analyse faite par d'autres groupes IREM

BORDEAUX

. Mathématiques et Calculatrice de poche (G. Noël et J. Bastier -Editions Technique et Vulgarisation - 1979)
A travers un grand nombre d'exercices (dont beaucoup d'Analyse) il est proposé une découverte concrète de l'utilisation mathématique qu'on peut faire d'une calculatrice de poche.

GRENOBLE

. Matchinettes 1 et Matchinettes 2 (1978)

Divers exemples d'utilisation d'une calculatrice à tous les niveaux (même dans le Primaire), possibilités et induffisances de la machine.

LIMOGES

. Compte rendu du groupe Mini-Calculateurs (1978)

Expériences d'initiation à l'Informatique dans le Second Cycle ou même dans le Premier, retombées dans l'activité mathématique (problèmes de dénombrements, tracés de courbes, éléments liés à une courbe : tangentes, asymptotes...)

NANCY

. A propos de Calculettes (1977)

Quelques thèmes d'activités pour s'initier à l'usage des petites calculatrices.

. Journées Calculatrices - Epinal 20 mai 1978

Propositions d'activités de toutes sortes, simples ou élaborées, pour apprendre à manipuler les calculatrices.

NANTES

. H-P 25 (1978)

Une série de sept fiches pour apprendre à programmer

. Contribution à l'introduction de l'Informatique dans l'enseignement secondaire

Compte rendu des réalisations du Club Informatique du Lycée Bellevue du Mans et groupe IREM auquel il est associé.

POITIERS

. Histoire et enseignement des Mathématiques

Compte rendu des journées d'étude de Poitiers (Juin 1977)

RENNES

. Vers un programme éducatif par objectifs en Mathématiques (R. Gras 1977)

Réflexion générale, en particulier sur qu'enseigner ? (définir les objectifs de contenus) - comment enseigner ?-comment s'acquiert la connaissance ? - comment évaluer l'acquisition des connaissances ?

. Responsable de la publication

J. LEFORT

24 rue A. Schweitzer

WINTZENHEIM 68000 COLMAR.

. Impression

IREM de Strasbourg

10 rue du général Zimmer

67034 STRASBOURG Cedex

Sur les suites de Fibonacci et de Lucas

Après un bref aperçu historique, on signale quelques résultats remarquables, plus ou moins récents, sur les suites F_n de Fibonacci et L_n de Lucas. Puis on expose une méthode simple et nouvelle, qui permet d'obtenir automatiquement une foule de relations entre les fonctions F_n et L_n. Enfin, on étend cette méthode à des suites plus générales.

I.- Aperçu historique

Voici quelques dates marquantes arrondies, qui montrent que jusqu'à la fin du 19e siècle on ne s'est occupé de la suite de Fibonacci que très sporadiquement.

1200 - Fibonacci tombe sur sa suite à propos d'un problème de population de lapins. Ce mathématicien, le plus illustre du Moyen-Age, est mieux connu sous le nom de Léonard de Pise. On lui doit entre autre l'introduction de la numération décimale en Europe. Après lui, la suite va dormir pendant quatre siècles.

1600 - L'astronome Képler rencontre la suite dans l'étude de la disposition des feuilles sur la tige d'une plante, racines lointaines de la moderne phyllotaxie [1].

1750 - Robert Simson déduit de la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ la formule $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, qui relie également trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

1850 - Binet montre comment on peut calculer un terme de la suite connaissant son rang.

1880 - Lucas introduit sa suite, qui vérifie la même loi de récurrence linéaire, mais diffère par les valeurs initiales [2]. Il est d'ailleurs le premier à employer la dénomination actuelle "suite de Fibonacci". On va voir que le jumelage des deux suites dépasse de loin en intérêt cette dernière seule, qui devient dès lors aussi prolifique que des lapins.

1963 - Le "Fibonacci Quarterly" est créé, revue américaine consacrée essentiellement à ces suites jumelles. Depuis ce temps 17 gros volumes ont déjà paru!

---
* Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en octobre 1980.

De nos jours, la suite de Fibonacci a trouvé des applications inattendues dans des domaines aussi variés que la composition musicale et la distribution électrique, la génétique et la théorie d'optimisation ou la combinatoire.

II.- Quelques propriétés des suites F_n et L_n

Formons une suite dont chaque terme à partir du troisième est la somme des deux précédents, en prenant pour valeurs initiales d'abord 1 et 1, puis 1 et 3:

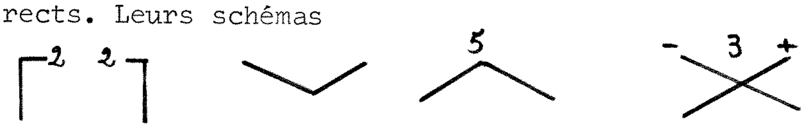
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	...

Les suites F_n de Fibonacci et L_n de Lucas sont donc définies par la récurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_1 = F_2 = 1$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad L_1 = 1, \ L_2 = 3$$

Voyons d'abord quelques <u>relations de voisinage entre les deux suites</u>, relations linéaires dans lesquelles n'interviennent que les termes F_n, L_n et leurs voisins directs. Leurs schémas



se lisent respectivement

$$L_n + F_n = 2F_{n+1}, \qquad L_n - F_n = 2F_{n-1}, \qquad F_{n-1} + F_{n+1} = L_n,$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5\,F_n, \qquad L_{n-1} + F_{n+1} = L_{n+1} - F_{n-1} = 3\,F_n .$$

Naturellement il existe aussi des relations de voisinage non linéaires. Par exemple:

$$L_n^2 - F_n^2 = 4\,F_{n-1}\,F_{n+1}, \qquad L_n^2 + F_n^2 = 2\,(F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2),$$

$$F_{n-1}^4 + F_n^4 + F_{n+1}^4 = 2\left[\,2F_n^2 + (-1)^n\,\right]^2.$$

Remarquons que les deux premières de ces huit formules entraînent immédiatement la troisième et celles du second degré.

Notons que F_n et L_n sont de même parité, et que leurs valeurs paires se suivent de 3 en 3. Ceci est un cas particulier d'un beau théorème établi par Carmicael vers 1900:

Toute suite d'entiers vérifiant une relation de récurrence linéaire et homogène

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_r u_{n-r}$$

est périodique modulo k, si k est premier avec a_r.

Pour la suite de Fibonacci on peut même énoncer:

F_n est divisible par un entier k si et seulement si n est divisible par a, F_a étant le plus petit nombre de Fibonacci divisible par k.

Par exemple le plus petit F_n divisible par 13 étant F_7, les multiples de 13 de la suite sont F_7, F_{14}, F_{21}, ...

On sait d'ailleurs qu'au moins un des $k^2 -1$ premiers nombres de Fibonacci est divisible par k.

Citons encore le remarquable théorème de Zeckendorf:
Tout entier est, de manière unique, une somme de nombres de Fibonacci , tels que deux quelconques soient non consécutifs et distincts.

Au cours des quinze dernières années, on a montré que la suite F_n ne présente que deux carrés (1 et 144) et deux cubes (1 et 8). Le seul cube de la suite L_n est 1.

Question ouverte: on ne sait si la suite F_n présente une infinité de nombres premiers. Mais on a démontré (ce qui semble à priori plus difficile) qu'un entier voisin d'un nombre de Fibonacci supérieur à 8 n'est jamais premier (c'est-à-dire $F_n \pm 1$ est composé pour $n > 6$).

Autre question ouverte: on voit facilement que la série de terme général $1/F_n$ converge. Mais on ne connait pas la valeur exacte de sa somme; on ne sait même pas si elle est rationnelle ou non.
Par contre, on sait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1.$$

III.- Association avec les fonctions hyperboliques

Tout repose ici essentiellement sur une notation simple*, mais non courante:

$$[A,B]_n = \begin{cases} A \text{ si n est impair} \\ B \text{ si n est pair.} \end{cases}$$

* Plus généralement $[u_1, u_2, \dots, u_p]$ désigne le terme courant u_n d'une suite de périodes p, égal au u_i du crochet tel que $i = n$, mod p (E. EHRHART , Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhaüser, Bâle, 1977).

Les fonctions " fibonacciennes" (c'est-à-dire F_n et L_n) sont données par les formules de Binet

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} \qquad L_n = a^n + b^n$$

où a et b sont les racines de l'équation

$$X^2 - X - 1 = 0$$

Dans le bulletin de l'APMEP (septembre 1980), nous avons montré que si l'on pose

$$\log a = \alpha, \qquad \alpha n = x, \qquad \alpha m = y$$

on obtient

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} kx = \frac{1}{2}[\sqrt{5}F_{kn}, L_{kn}]_{kn} & \operatorname{sh} kx = \frac{1}{2}[L_{kn}, \sqrt{5}F_{kn}]_{kn} \\ \operatorname{ch}(x+y) = \frac{1}{2}[\sqrt{5}F_{n+m}, L_{n+m}]_{n+m} & \operatorname{sh}(x+y) = \frac{1}{2}[L_{n+m}, \sqrt{5}F_{n+m}]_{n+m}. \end{cases}$$

Les formules de la dernière ligne subsistent si on y remplace partout le signe (+) par (-).

D'où:

Théorème 1. La subsistution (1) associe à toute identité hyperbolique, qui ne présente que des arguments de la forme $kx \pm k'y$, une ou plusieurs identités entre fonctions fibonacciennes .

IV.- Recherches d'identités fibonacciennes

Trois exemples suffiront pour montrer l'efficacité et l'aisance de notre méthode.

Exemple 1.

La substitution (1) donne

$$n \text{ impair: } \quad \frac{5F_n^2}{4} - \frac{L_n^2}{4} = 1$$

$$n \text{ pair : } \quad \frac{L_n^2}{4} - \frac{5F_n^2}{4} = 1$$

Donc pour tout n:

$$(2) \qquad L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Application. Soit à résoudre en entiers positifs l'équation diophantienne

$$X^2 - 5Y^2 = 4.$$

D'après (2) conviennent

$$X = L_{2n}, \qquad Y = F_{2n} \qquad (n > 0).$$

On montre qu'on obtient ainsi toutes les solutions.

Exemple 2.
$$\mathrm{ch}(x + y) + \mathrm{ch}(x - y) = 2\,\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y$$
$$\mathrm{sh}(x + y) + \mathrm{sh}(x - y) = 2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y.$$

En examinant quatre cas, suivant les parités de n et m, on obtient finalement

$$L_{n+m} + L_{n-m} = \left[5F_nF_m,\ L_nL_m\right]_m$$
$$F_{n+m} + F_{n-m} = \left[L_nF_m,\ F_nL_m\right]_m.$$

Pour $m = 1$, on trouve les relations de voisinage

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$$

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$$

On établit de même

$$L_{n+m} - L_{n-m} = \left[5F_nF_m,\ L_nL_m\right]_{m-1}$$

$$F_{n+m} - F_{n-m} = \left[L_nF_m,\ F_nL_m\right]_{m-1}.$$

De ce qui précède on déduit sans peine

$$2F_{n+m} = F_nL_m + L_nF_m$$

$$2L_{n+m} = L_nL_m + 5F_nF_m.$$

En portant $m = \pm 1$ dans l'avant-dernière identité, on trouve les relations de voisinage

$$2F_{n+1} = F_n + L_n$$

$$2F_{n-1} = L_n - F_n.$$

Exemple 3.
$$\mathrm{sh}(x + y)\ \mathrm{sh}(x - y) = \mathrm{sh}^2x - \mathrm{sh}^2y$$

$$\mathrm{ch}(x + y)\ \mathrm{ch}(x - y) = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2y.$$

Selon les parités de n et m, la substitution (1) fournit quatre expressions pour $F_{n+m}F_{n-m}$ et autant pour $L_{n+m}L_{n-m}$. En tenant compte de (2), on peut condenser les résultats dans deux identités:

$$F_{n+m}F_{n-m} - F_n^2 = (-1)^{n+m+1}F_m^2$$

$$L_{n+m}L_{n-m} - L_n^2 = (-1)^{n+m}L_m^2 - 4(-1)^n.$$

La première est la formule de Catalan qui date de 1886, la seconde est sans doute inédite.

En portant dans ces deux relations d'abord $m = 1$ puis $m = 2$, on trouve les identités

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad F_{n+2}F_{n-2} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$$

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n+1} \qquad L_{n+2}L_{n-2} - L_n^2 = 5(-1)^n.$$

Dans la première on reconnait la formule de Simson, mentionnée au début.

V.- Fonctions fibonacciennes généralisées.

Soit s un entier positif et a et b les racines de l'équation

$$X^2 - sX - 1 = 0.$$

Nous appellerons "fonctions fibonacciennes généralisées" les entiers

$$f_n = \frac{a^n - b^n}{a-b} \qquad \mathcal{L}_n = a^n + b^n.$$

Nous désignerons encore ces égalités par "formules de Binet".

Si on pose

$$\Delta = s^2 + 4, \qquad \alpha = \log a, \qquad \alpha n = x, \qquad \alpha m = y,$$

on trouve, en opérant comme pour les fonctions fibonacciennes ordinaires,

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} kx = \frac{1}{2}[\sqrt{\Delta}\, f_{kn}, \mathcal{L}_{kn}]_{kn} & \operatorname{ch}(x+y) = \frac{1}{2}[\sqrt{\Delta}\, f_{n+m}, \mathcal{L}_{n+m}]_{n+m} \\ \operatorname{sh} kx = \frac{1}{2}[\mathcal{L}_{kn}, \sqrt{\Delta}\, f_{kn}]_{kn} & \operatorname{sh}(x+y) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}_{n+m}, \sqrt{\Delta}\, f_{n+m}]_{n+m}. \end{cases}$$

D'où:

Théorème 2. La substitution (3) associe à toute identité hyperbolique, qui ne présente que des arguments de la forme $kx \pm k'y$, une ou plusieurs identités entre fonctions fibonacciennes généralisées.

Soulignons que ce sont les mêmes qu'entre fonctions fibonacciennes ordinaires, à cela près qu'un éventuel facteur 5 ou $\sqrt{5}$ est remplacé par Δ ou $\sqrt{\Delta}$.

Par exemple

$$f_{2n} = f_n \mathcal{L}_n \qquad \mathcal{L}_n^2 - \Delta f_n^2 = 4(-1)^n.$$

Les relations de voisinage sont en général modifiées (quand dans leur démonstration intervient Δ ou $\mathcal{L}_1 = s$). Mais si dans l'identité

$$(4) \qquad f_{n+m} + f_{n-m} = [\mathcal{L}_n f_m, f_n \mathcal{L}_m]_m$$

on met $m = 1$, on voit, en tenant compte de $f_1 = 1$, que subsiste

$$(5) \qquad f_{n+1} + f_{n-1} = \mathcal{L}_n.$$

Application. Si l'on pose

$$n + m = a, \qquad n - m = b$$

la formule (4) devient

$$f_a + f_b = \left[\mathcal{L}_{\frac{a+b}{2}} f_{\frac{a-b}{2}} , f_{\frac{a+b}{2}} \mathcal{L}_{\frac{a-b}{2}}\right]_{\frac{a-b}{2}}$$

qui exige que a-b soit pair, pour que les indices soient entiers. D'où:

Théorème. Un nombre $f_a + f_b$ n'est pas premier, si a − b est pair autre que 2. Quant à $f_a + f_{a+2}$, il est premier juste si $\mathcal{L}_{a+1}$ l'est.(5)

Car $f_a + f_b = f_{\frac{a+b}{2}} \mathcal{L}_2$ si $a - b = 4$, et si $a - b > 4$ il n'y a pas de facteur $f_1 = 1$ ou $f_2 = \mathcal{L}_1 = s = 1$ dans le crochet.

Remarques. 1) Dans les mêmes conditions $\mathcal{L}_a \pm \mathcal{L}_b$ n'est pas premier; si $a - b$ est pair autre que 2 ou 4, $f_a - f_b$ n'est pas premier.

2) On comprend maintenant pourquoi un entier voisin direct d'un nombre de Fibonacci supérieur à 8 n'est jamais premier.

Il suffit de considérer $F_a \pm 1$ comme $F_a \pm F_1$ si a est impair, comme $F_a \pm F_2$ si a est pair, et de noter que $a - 1$ et $a - 2$ dépassent 4 si $a > 6$.

Récurrence. On peut aussi définir f_n et $\mathcal{L}_n$ par la récurrence

$$f_{n+1} = s f_n + f_{n-1} \qquad \mathcal{L}_{n+1} = s\mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n-1}$$

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \qquad \mathcal{L}_0 = 2, \mathcal{L}_1 = s$$

que l'on déduit sans peine des formules de Binet.

E. EHRHART,
Strasbourg.

[1] F. Stoltz, Quelques problèmes posés par la phyllotaxie, L'Ouvert, 18, (1979).

[2] Lucas, Note sur le triangle de Pascal et la série de Lamé, Nouvelle Corresp. Math., 2, 74, (1876) et Théorie des fonctions numériques périodiques, Am.J. Math., 1, 184-220, (1878).