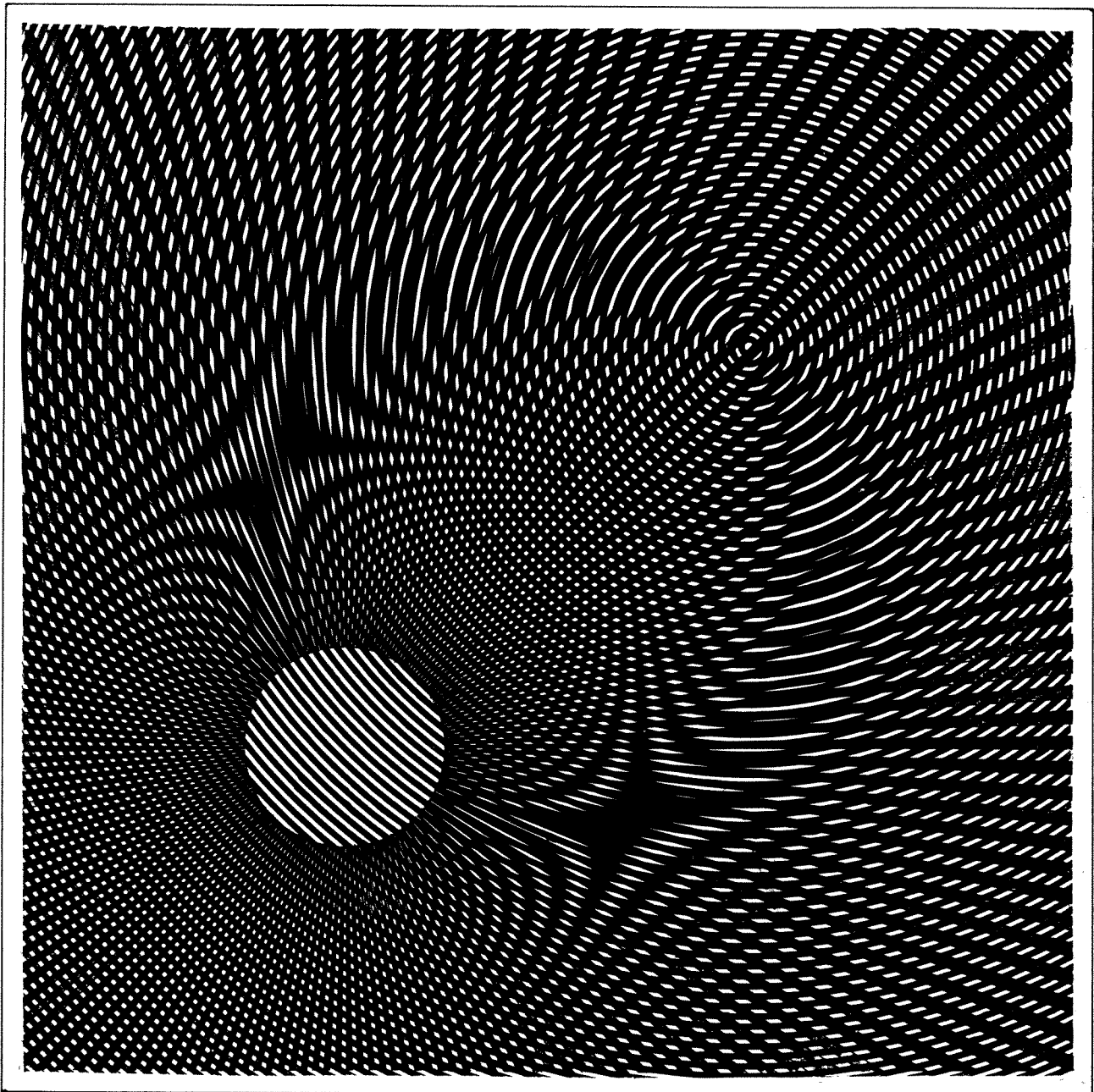


l'ouvert n°23

ORGANE D'INFORMATION ET D'ÉCHANGE
DE LA RÉGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG — FEV. 81



COUVERTURE : Moiré obtenu par superposition d'une trame formée de couronnes concentriques d'épaisseur 0,8 mm alternativement noires et blanches et d'une trame formée d'un faisceau de droites concourantes limitant des secteurs de 1° alternativement noirs et blancs. (La partie proche du point de concours des droites a été volontairement laissée blanche).

SOMMAIRE

continuité et changement

J. LEFORT

notre ancêtre, le " professorus mathematicus "
vu et jugé par l'élève stendhal

STENDHAL

en observant des élèves qui cherchent

J. KUBLER

l'explication de la règle du
parallélogramme

G. GLAESER

courrier des lecteurs, se couvrir de
gloire! le problème du couvercle

T. BAUTIER

F. PLUVINAGE

pluridisciplinarité: mais que voulais-tu
donc dire platon?

Ch. FULGONY

E. CHANEY

provoquer la curiosité

G. BOHLER

moiré

J. HARTHONG

Continuité & changement

"L'ouvert" continue et c'est sans aucun doute une bonne nouvelle pour tous ses lecteurs ; "l'ouvert" continue grâce à Georges Glaeser qu'il est inutile de présenter et à Eric Chaney qui enseigne au Lycée Schweitzer de Mulhouse et qui, à ses compétences mathématiques adjoint une solide expérience dans le journalisme.

"L'ouvert" change et l'on s'en rend compte dès le présent numéro dont le style n'a rien de commun avec celui qui était le mien et c'est un bien ; "l'ouvert" change mais c'est grâce à l'I.R.E.M. qui en prend à peu près la totale responsabilité.

C'est, je crois, le propre de toute action bénévole répondant à un besoin profond que d'être récupéré par l'Institution. Ce n'est pas obligatoirement un mal, d'autant moins qu'on m'objectera facilement que l'osmose est grande entre l'I.R.E.M. et la régionale A.P.M., mais cela ne préjuge en rien de l'avenir (la disparition des I.R.E.M. ou leur dissolution dans l'enseignement supérieur) et des tensions inévitables entre deux groupes.

Conscient de ces difficultés, G. Glaeser est le premier à réclamer l'ouverture du (futur ?) comité de rédaction de "l'ouvert" à des membres de l'A.P.M.; tous les lecteurs sont concernés par cette demande et pas seulement les membres du bureau de la régionale. C'est à ce prix que "l'ouvert" méritera intégralement son sous-titre.

Jean Lefort

Notre ancêtre, le "Professorus Mathematicus" vu et jugé par l'élève Stendhal

Stendhal entra à l'âge de dix ans, en 1796, à l'école centrale départementale de Grenoble. Son témoignage, rapporté dans l'oeuvre autobiographique "Vie de Henry Brulard" (En livre de Poche, collection Folio-Gallimard), est donc l'un des plus anciens sur cette première concrétisation de l'idée d'instruction publique.

Les écoles centrales ont été créées par la Convention vers 1793, à la suite du rapport de Michel Lepeletier. Les Conventionnels prévoyaient un système d'instruction à trois niveaux: écoles primaires, écoles centrales, écoles spéciales, et chargèrent les administrations départementales de les créer. Un jury local devait recruter les professeurs. L'ancêtre de nos jurys de concours, en quelque sorte, à ceci près qu'il n'y avait pas de concours.

A Grenoble, pour l'école centrale, le jury fut présidé par M.Gagnon, propre grand-père de Stendhal. C'est à cette circonstance que le petit Henry dut de suivre les cours de l'Ecole Centrale, dont le principe public paraissait un peu sulfureux à son père encore fort attaché aux prérogatives de la noblesse.

Stendhal décrit ses professeurs et ses condisciples sans pitié, avec une précision de naturaliste. M. Dupuy, le professeur de mathématiques choisi par un grand-père qui "haïssait" cette discipline, lui laisse le souvenir d'un "bourgeois emphatique et paternel, sans l'ombre de l'ombre d'un talent". Stendhal mit cependant beaucoup d'acharnement à l'étude des mathématiques, qui lui donnèrent du plaisir.

Voici ce que l'homme de cinquante ans retint de la fonction de notre ancêtre : **E. C.**

LES PROPOSITIONS DE BEZOUT

M. Dupuy, qui parlait sans cesse (et jamais trop) de Condillac et de sa "Logique", n'avait pas l'ombre de logique dans la tête. Il parlait noblement et avec grâce, et il avait une figure imposante et des manières fort polies.

Il eut une idée bien belle en 1794, ce fut de diviser les cent élèves qui remplissaient la salle au rez-de-chaussée, à la première leçon de mathématiques, en brigades de cinq ou de sept ayant chacune un chef.

Le mien était un "grand", c'est-à-dire un jeune homme au-delà de la puberté et ayant un pied de plus que nous. Il nous crachait dessus, en plaçant adroitement un doigt devant sa bouche. Au régiment un tel caractère s'appelle "arsouille". Nous nous plaignîmes de cet arsouille, nommé, je crois, Raimonet, à M. Dupuy qui fut admirable de noblesse en le cassant. M. Dupuy avait l'habitude de donner leçon aux jeunes officiers d'artillerie de Valence et était fort sensible à l'honneur (au coup d'épée).

Nous suivions le plat cours de Bezout mais M. Dupuy eut le bon esprit de nous parler de Clairaut et de la nouvelle édition que M. Biot (ce charlatan travailleur) venait d'en donner.

Clairaut était fait pour ouvrir l'esprit que Bezout tendait à laisser à jamais bouché. Chaque "proposition" dans Bezout a l'air d'un grand secret appris d'une bonne femme voisine.

LA PLANCHE

Je n'obtins qu'un misérable "accessit" et encore pour faire plaisir je pense à M. Gagnon, chef du jury, et à M. Dausse, autre membre du jury fort ami de M. Gagnon.

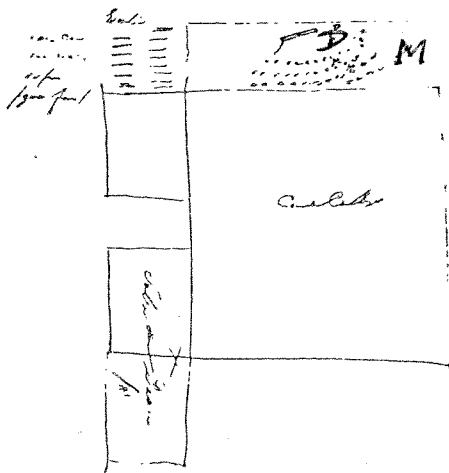
Mon grand-père en fut humilié, et il me le dit avec une politesse et une mesure parfaites. Son mot si simple fit sur moi tout l'effet possible. Il ajouta en riant: "Tu ne savais que nous montrer ton gros derrière!"

Cette position peu aimable avait été remarquée au tableau de la salle de mathématiques.

C'était une ardoise de six pieds sur quatre, soutenue à cinq pieds de haut par un châssis fort solide, on y montait par trois degrés.

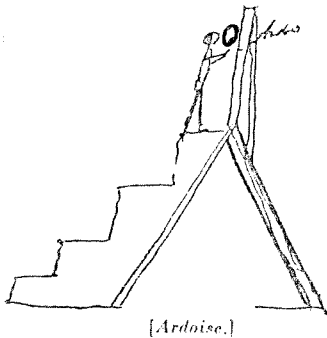
M. Dupuy faisait démontrer une proposition, par exemple le carré de l'hypoténuse ou ce problème: un ouvrage coûte sept livres, quatre sous, trois deniers la toise: l'ouvrier en a fait deux toises, cinq pieds, trois pouces. Combien lui revient-il?

Dans le courant de l'année, M. Dupuy avait toujours appelé au tableau MM. de Monval qui étaient nobles.



M. Salle des Mathématiques.- D.M.
 Dupuy, homme de 5 pieds 8 pouces, avec sa grande canne, dans son immense fauteuil.- M. Ses protégés les élèves nobles.- II. Moi, mourant d'envie d'être appelé pour monter au tableau, et me cachant pour n'être pas appelé, mourant de peur et de timidité.- II', Mon banc. (Escalier.Casse-cou, sans rampes de fer (garde-fou).- Cour du Collège.- Salle du dessin.)

Monté au tableau, on écrivait en O. La tête du démonstrant était



bien à huit pieds de haut. Moi, placé en évidence une fois par mois, nullement soutenu par M. Dupuy qui parlait à Monval ou M. de Pina pendant que je démontrerais, j'étais pénétré de timidité et je bredouillais. Quand je montai au tableau à mon tour, devant le jury, ma timidité redoubla, j'embrouillai en regardant ces Messieurs et

et surtout le terrible M. Dausse, assis à côté du tableau. J'eus la présence d'esprit de ne plus les regarder, de ne plus faire attention qu'à mon opération, et je m'en tirai correctement, mais en les ennuyant. Quelle différence avec ce qui se passa en août 1799! Je puis dire que c'est à force de mérite que j'ai percé "aux mathématiques" et au dessin comme nous disions à l'Ecole centrale.

L'ALGÈBRE ? UNE DIVISION DU TRAVAIL !

M. Chabert était dans le fait moins ignare que M. Dupuy. Je trouvais chez lui Euler et ses problèmes sur le nombre d'oeufs qu'une paysanne apportait au marché lorsqu'un méchant lui en vole un cinquième, puis elle laisse tomber la moitié du reste, etc., etc.

Cela m'ouvrit l'esprit, j'entrevis ce que c'était que se servir de l'instrument nommé algèbre. Du diable si personne me l'avait jamais dit; sans cesse M. Dupuy faisait des phrases emphatiques sur ce sujet, mais jamais ce mot simple: c'est une "division du travail" qui produit des prodiges comme toutes les divisions du travail et permet à l'esprit de réunir toutes ses forces sur un seul côté des objets, sur une seule de leurs qualités.

Quelle différence pour nous si M. Dupuy nous eût dit: Ce fromage est mou ou il est dur; il est blanc, il est bleu; il est vieux, il est jeune; il est à moi, il est à toi; il est léger ou il est lourd. De tant de qualités ne considérons absolument que le poids. Quel que soit ce poids, appelons-le A. Maintenant, sans plus penser absolument au fromage, appliquons à A tout ce que nous savons des quantités.

Cette chose si simple, personne ne nous la disait dans cette province reculée; depuis cette époque, l'Ecole polytechnique et les idées de Lagrange auront reflué vers la province.

LA REGLE DES SIGNES

Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que: moins par moins donne plus ($- \times - = +$) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle "algèbre").

On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.

M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa "leçon", celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire: "Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise. Nous savons que vous avez beaucoup d'esprit (cela voulait dire: Nous savons que vous avez remporté un premier prix de "belles-lettres" et bien parlé à M. Teste-Lebeau et autres membres du Département), vous voulez apparemment vous singulariser."

Quant à M. Dupuy il traitait mes timides objections (timides à cause de son ton d'emphase) avec un sourire de hauteur voisin de l'éloignement. Quoique beaucoup moins fort que M. Chabert, il était moins bourgeois, moins borné, et peut-être jugeait sainement de son savoir en mathématiques. Si aujourd'hui je voyais ces Messieurs huit jours, je saurais sur le champ à quoi m'en tenir. Mais il faut toujours en revenir à ce point.

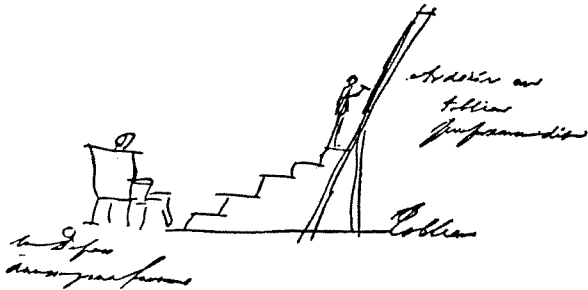


Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de "moins par moins" à un "fort", il me riait au nez; tous étaient plus ou moins comme Paul-Émile Tésseyre et apprenaient par coeur. Je leur

voyais dire souvent au tableau à la fin des démonstrations:

"Il est donc évident", etc.

Rien n'est moins évident pour vous, pensais-je. Mais il s'agissait de choses évidentes pour moi, et desquelles malgré la meilleure volonté il était impossible de douter.



[Ardoise ou tableau proprement dit. — Tableau. — M. Dupuy dans son grand fauteuil.]

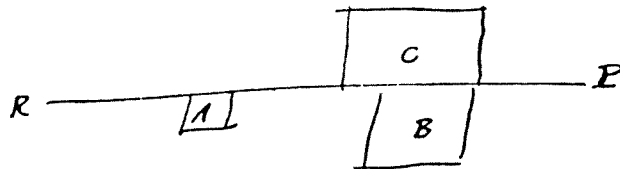
Les mathématiques ne considèrent qu'un petit coin des objets (leur quantité), mais sur ce point elles ont l'agrément de ne dire que des choses sûres, que la vérité, et presque toute la vérité.

Je me figurais à quatorze ans, en 1797, que les hautes mathématiques, celles que je n'ai jamais sues, comprenaient "tous" ou à peu près tous les côtés des objets, qu'ainsi, en avançant, je parviendrais à savoir des choses sûres, indubitables, et que je pourrais me prouver à volonté, sur "toutes choses".

Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur $- \times - = +$ ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les "forts" auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui: il faut bien que $-$ par $-$ donne $+$ soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats "vrais et indubitables".

Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C?

Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000, cinq millions?

LES PARALLELES QUI SE COUPENT

Si $-x - = +m$ avait donné beaucoup de chagrin, on peut penser quel noir s'empara de mon âme quand je commençai la "Statique" de Louis Monge, le frère de l'illustre Monge et qui allait venir faire les examens pour l'Ecole polytechnique.

Au commencement de la géométrie, on dit: "On donne le nom de PARALLELES à deux lignes qui, prolongées à l'infini, ne se rencontreraient jamais". Et, dès le commencement de la "Statique", cet insigne animal de Louis Monge a mis à peu près ceci: "Deux lignes parallèles peuvent être considérées comme se rencontrant, si on les prolonge à l'infini".

Je crus lire un catéchisme et encore un des plus maladroits. Ce fut en vain que je demandai des explications à M. Chabert.

"Mon petit, dit-il en prenant cet air paterne qui va si mal au renard dauphinois, l'air d'Edouard Mounier (pair de France en 1836), mon petit, vous saurez cela plus tard", et le monstre, s'approchant de son tableau en toile cirée et traçant deux lignes parallèles et très voisines, me dit:

"Vous voyez bien qu'à l'infini on peut dire qu'elles se rencontrent".

Je faillis tout quitter. Un confesseur, adroit et bon jésuite, aurait pu me convertir à ce moment en commentant cette maxime:

"Vous voyez que tout est erreur, ou plutôt qu'il n'y a rien de faux, rien de vrai, tout est convention."

STENDHAL.

En observant

des élèves qui cherchent ...

Au cours de recherches en didactique, nous avons été amené à observer beaucoup de comportements d'élèves. Nous avons en particulier, observé quelques élèves en train de résoudre le problème suivant qui se trouve dans "le livre du problème - vol. 6 - géométrie d'incidence" - Université Louis Pasteur - éditions CEDIC -

Énoncé :

P. 1.7 Recherche d'isomorphismes

Voici (à gauche) le diagramme cartésien d'une relation :

P	A	B	C	D	E	F
a	X	X	X			
b	X				X	X
c	X					
d		X	X	X		
e				X	X	X
f	X					X

	X				X	
		X	X			
		X		X	X	X
	X		X			
		X	X			X
	X				X	

Voici d'autre part (à droite) un autre diagramme où les lettres qui désignent les colonnes ou les lignes ne sont pas inscrites. Montrer que l'on peut inscrire des lettres, en sorte que ce second diagramme représente la même relation que le premier. (Solution p. 123)

Solution proposée : Dans cet ouvrage, nous trouvons la solution suivante :

Solution de P. 17

1. On peut commencer par se rassurer en vérifiant que les deux diagrammes ont le même nombre de croix.
2. Dans le modèle, il n'y a qu'une seule ligne (la ligne c) qui ne comporte qu'une croix. Sur le second diagramme, il n'y en a pas : mais l'on remarque qu'il y a une colonne ne comportant qu'une seule croix. On va donc essayer d'intervertir le rôle des lignes et des colonnes. Cela permet de placer la lettre c et la lettre A. De la même façon, on pourra inscrire les lettres F et f. (La colonne F, sur le modèle, est la seule qui comporte trois croix).
3. Sur le modèle, rien ne distingue les colonnes B et C. Sur le second diagramme il y a deux lignes portant deux croix, que rien ne distingue. Nous allons inscrire *arbitrairement* B et C en face de ces lignes.
4. Sur le modèle, les colonnes D et E restantes comportent chacune deux croix. Mais seule la colonne D a une croix sur la même ligne que B et C. Cette remarque permet de placer D et d, puis a, puis grâce à la colonne E, la ligne b. Les lignes a et e ont leurs croix sur des colonnes différentes, ce qui permet de placer e.
5. En conclusion, il y a deux façons de compléter le tableau : chacune correspond à un choix des colonnes B et C.

P				c		f
	x				x	
		x	x			
A		x		x	x	x
	x		x			
F		x	x			x
	x				x	

P	d	b	e	c	a	f
B	x				x	
E		x	x			
A				x	x	x
D	x		x			
f		x	x			x
C	x				x	

On remarquera qu'en général, il est difficile de reconnaître que deux tableaux cartésiens représentent des relations isomorphes. Il ne suffit pas, bien sûr, que pour chaque ligne ou colonne du modèle on trouve une ligne ou colonne du diagramme à compléter ayant le même nombre de croix qu'elle. (La simplicité des exercices 11 à 5 est exceptionnelle). Il est aisé d'imaginer des énoncés plus faciles ou plus difficiles, sur le même thème.

Méthode d'observation :

Nous avons proposé ce problème à un élève A . Une fois la solution trouvée (s'il ne l'a pas trouvé, nous la lui donnons par écrit), nous lui avons demandé de transmettre cet énoncé à un élève B. Puis nous avons demandé à l'élève B de résoudre le problème à son tour. Le compte-rendu relate ici uniquement le comportement de l'élève en train de chercher bien que nous ayons des observations relatives à la transmission de l'énoncé. Nous avons ainsi observé individuellement 4 élèves de 6ème et 4 élèves de 4ème.

Analyse des démarches à suivre

Cet énoncé ne se réfère pas à un problème de relations mais à un problème d'incidence. Il présente des invariants de 2 types qui sont à découvrir par l'élève

- premier invariant : nombre de croix par ligne, par colonne.
- deuxième invariant: les incidences doivent être conservées.

Ceci apparaît comme une contrainte du problème mais elle ne conduit pas encore à une solution.

Il est remarquable de constater que tous les enfants ont compris plus ou moins vite que le point de départ était un examen de ces invariants.

- Dans cet exercice, il y a plusieurs seuils à franchir dont :
- se rendre compte du sens de la relation (où placer les majuscules et les minuscules), en référence du premier type d'invariants.
 - réaliser qu'il y a des incidences à respecter et à conserver.
 - utiliser ces incidences de manière déductive pour arriver à trouver une solution .
 - se rendre compte éventuellement que le problème admet 2 solutions dues au choix arbitraire de B et de C qui sont interchangeable.

Stratégies employées par les élèves

Dans cette situation, les élèves peuvent utiliser différentes stratégies . Par exemple:

- 1) ils cherchent les éléments invariants du problème et les considèrent comme fixes. Il est relativement facile de placer A et f. Puis ensuite, par déduction, ils placent les lettres restantes en mettant alternativement les majuscules et les minuscules. Cette stratégie est suivie par Florence et Gérard qui ont résolu relativement vite le problème.

- 2) ils essaient de compléter d'abord la ligne (ou la colonne), majuscules ou minuscules, puis, une fois cette ligne fixée, ils complètent la colonne (ou la ligne). Cette stratégie est plus longue et conduit à certaines rectifications. Elle est utilisée le plus fréquemment (4 élèves sur 8 l'emploient). Une remarque de Daniel met en évidence cette manière de procéder: "j'ai déjà une colonne, je vais essayer de trouver l'autre".

- 3) nous observons également la stratégie du tâtonnement empirique: les élèves placent les lettres un peu au hasard et vérifient ensuite si le résultat est correct. Cette méthode conduit à repartir fréquemment de zéro et n'amène guère au résultat. Nous le retrouvons chez Valérie et chez Pierre -Alain.

Quelques démarches suivies

Dans un premier temps, les élèves respectent l'ordre du premier tableau: ils commencent par mettre la flèche dans le même sens, les majuscules en ligne et les minuscules en colonne. Ils s'aperçoivent très vite (en moyenne au bout de 2 mn), qu'on n'arrive pas à résoudre le pro-

blème de cette manière. Une remarque de Valérie illustre cette prise de conscience qui amène à changer le sens de la relation: " Vous ne vous êtes pas trompé ? Il y en a qu'une où il ne devrait pas y en avoir qu'une " . Tous les élèves ont fini par trouver qu'il fallait changer le sens de la flèche, c'est-à-dire mettre les minuscules en colonne et les majuscules en ligne.

Dans un second temps, la plupart des élèves essaient de placer A ou f. A partir de ce moment-là, nous observons des comportements différents. Nous remarquons qu'ils comptent et recomptent les croix dans les lignes et les colonnes. Certains considèrent A ou f comme éléments fixes alors que d'autres les effacent, suivant la stratégie adoptée.

Aucun élève n'a suivi exactement la solution proposée par écrit. Seule Florence a suivi une démarche qui se rapproche de cette solution. Elle ne s'est cependant pas posé de question au sujet de B et C. Elle n'a pas remarqué le choix arbitraire de B et de C. Par contre, Daniel et Laurent réfléchissent longtemps avant de placer B et C. Voici la démarche suivie par Laurent :

Recherche de problème de Laurent (quatrième)

Temps mis pour trouver une solution: 12 mn.

Laurent met la flèche vers le haut, puis l'efface.

Il compte les croix dans les deux diagrammes, remet la flèche vers le haut: . Il place cependant A en colonne (correctement) puis place f correctement, puis c, puis b, puis F, puis E et D , puis e.

Il réfléchit, compte les croix dans les deux tableaux.

Il efface F, le place en dessous, efface E. Il place a, d, E, efface b, place a, efface à nouveau E.

Il compare les deux tableaux, place d puis intervertit b et d, puis remet b et d à leurs places initiales.

Il efface D et la remplace par E. Il hésite et réfléchit avant de placer D.

	a	b	c	e	f
E					
D					
A					
F					
E					
D					

Il a mis toutes les lettres sauf B et C. Il réfléchit longtemps avant de placer B et C et compare les deux tableaux.

Il change le sens de sa flèche, n'arrive pas à se décider pour placer C et B. Il met très discrètement B en haut, réfléchit, vérifie avant de placer B et C. Il lui a bien fallu 6mn pour placer B et C.

	d	b	e	c	a
•					
E } •					
A					
D					
F					
•					

Remarque: Laurent avait tendance à placer d'abord les lettres minuscules, puis de compléter les majuscules, mais ce n'était pas systématique.

Ces deux élèves ont remarqué que B et C occupaient une position un peu spéciale par rapport aux autres lettres (ce sont les seuls éléments interchangeables), mais cependant, l'idée ne leur est pas venue que le problème pouvait avoir deux solutions. Nous pouvons nous demander pourquoi.

Il est intéressant qu'aucun des huit élèves n'ait pensé qu'un problème pouvait admettre plus d'une solution. Ils ont cherché la solution et non pas une solution.

D'autre part, nous avons observé deux comportements assez spéciaux face à cette tâche.

- 1) Pierre-Alain semblait complètement paniqué face à sa feuille et avait perdu tous ses moyens de réflexion.
- 2) Daniel, dès la moindre difficulté, dit qu'il ne comprend pas et veut abandonner le problème.

Nous lui avons suggéré à deux reprises de réfléchir encore un peu et finalement, il trouve la solution après 15 mn. Voici le protocole de recherche de Daniel.

Recherche de problème de Daniel (sixième)

Temps mis pour trouver la solution: 15 mn.

Il a d'abord mis p ↗, a repris le même ordre; puis au bout de 2mn il a vu que cela n'allait pas et il a interverti l'ordre: p ↙

Il place A, puis a, puis B et C après 2mn.
 Il compare les deux tableaux, l'air interrogateur.
 Après 7mn, il efface tout et dit: "Je ne comprends pas." Il veut abandonner. Je lui suggère de réfléchir encore un peu.

Il compte les croix dans chaque colonne, puis dans chaque ligne, dans les deux tableaux. Au bout de 3mn, il place A et F, puis C, puis a qu'il change trois fois de place. Puis, après 2mn, il place b, puis E et D après 2mn. Il est arrêté pour placer B et veut abandonner. Je lui suggère de mettre B. Après réflexion, il place B, puis C, puis D et F.

Il rend la feuille.

R	.	b	e	c	a	.
A						
.						
.						
B						
.						
C						

			e		a	f
P	d	b	f	c	e	a
C						
E						
A						
F						
B						
D						

Temps mis par les élèves pour résoudre le problème

NOM	Classe	Temps mis
Florence	4 ème	6 mn
Laurent	4 ème	12 mn
Valérie	4 ème	n'a pas trouvé après 25 mn
Ludovic	4 ème	15 mn
Gérard	6 ème	12 mn
Daniel	6 ème	15 mn
Pierre-Alain	6 ème	n'a pas trouvé après 40 mn
Dominique	6 ème	n'a pas trouvé après 25 mn

Nous constatons que le temps nécessaire aux élèves pour trouver la solution varie beaucoup d'un élève à un autre. Mais c'est bien normal ! Il s'agit d'un problème et non d'une question dont on peut exiger la réponse immédiatement. Les élèves cependant, ne cherchent plus guère après une demi-heure.

Conclusion

Ce problème est intéressant à poser aux élèves. Pour le chercher on n'a pas besoin de connaissances mathématiques spécifiques et on peut l'aborder dès la classe de sixième.

L'élève doit se plonger dans le problème pour le résoudre. Il ne s'agit pas ici d'appliquer des algorithmes appris par coeur mais cet énoncé présente un côté heuristique (d'où le grand écart de durée de recherche). Il fait appel cependant à un raisonnement déductif et demande de la part de l'élève un effort de réflexion. Cette recherche est profitable même pour ceux qui n'ont pas réussi à trouver la solution. Ils ont d'ailleurs demandé après la séance ce qu'il fallait faire et l'un d'entre eux a déclaré spontanément: " J'aurais dû le trouver tout seul".

Jeanine KUBLER,

boursière de recherche en didactique.

Soutenons LE PETIT ARCHIMEDE

C'est une revue éditée bénévolement par des collègues s'adressant à des élèves de 11 à 17 ans.

ABONNEMENT 1981 (nouveau tarif)

Abonnement de Soutien : 100F

(1)

Abonnement de Bienfaiteur : 500F

(1)

Abonnement ordinaire : 50 F

(1)

Abonnements groupés (minimum 10) : 35 F

(Ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses)

(2)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE
ou PAR AVION (le préciser) de 50 %

Toutes les collections anciennes sont disponibles :

N° 1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, 31 à 40, 41 à 50, 51 à 60 : 35F

Prix de vente au n° : 8F la collection 61 à 70 : 40 F

PRODUCTIONS SPECIALES

Le nouveau calendrier perpétuel : 50 F le paquet de cinquante

(3)

Affiches (5 affiches : 15 F) (10 affiches : 25 F)

(2)

N° Spécial PA Sp1 (index général PA1 à PA50) : 5 F

(1)

N° spécial sur le nombre π : 75F -A partir de 4 exemplaires

A partir de 10 exemplaires : 60 F l'unité 70 F l'unité

(x)

NOM :

Prénom :

Adresse d'expédition :

Code Postal :

Ville :

Bureau distributeur :

Cette demande est à adresser exclusivement à :

ADCS - Abonnement - 61 rue St Fusclerf 80000 AMIENS

Joindre chèque ou mandat à l'ordre de :

ADCS CCP 4736 63 W LILLE

(1) cocher les cases utiles

(2) Nombre d'exemplaires

(3) Nombre de paquets de cinquante cartes postales

LES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES
PEUVENT-ILS ÉVITER LES DEMANDES DE
FACTURE ? MERCI

L'explication de la règle du parallélogramme

Si la loi de composition des forces parallèles a été élucidée par Archimède, celle des forces concourantes fut beaucoup plus difficile à découvrir. Il fallut attendre le XVII^e siècle pour que Simon STEVIN (1548 - 1620) en donne une formulation claire. C'est dire que l'intervention du parallélogramme en Statique est loin d'être évidente.

Plus tard, de nombreux savants -notamment Newton, Varignon, Daniel Bernouilli - tentèrent de démontrer la règle du parallélogramme, c'est-à-dire de la déduire de quelques principes plus faciles à admettre. Leurs efforts ne furent pas très convaincants.

En 1875, Gaston Darboux (Bull. des Sciences Math. Tome IX) parvient enfin à caractériser l'addition des vecteurs par les quatre axiomes suivants :

Axiomes de Darboux

- I L'addition des vecteurs est associative et commutative.
- II Elle est continue.
- III Lorsqu'on la restreint aux vecteurs d'une droite, elle se réduit à l'addition algébrique usuelle.
- IV L'addition des vecteurs est invariante par toute isométrie de l'espace euclidien (on dit que l'addition est isotrope).

Dans la suite, nous appellerons résultante de deux vecteurs \vec{P} et \vec{Q} , le vecteur $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ obtenu en appliquant une loi de composition satisfaisant aux axiomes de Darboux.

Nous réserverons l'appellation somme (vectorielle) au vecteur $\vec{P} + \vec{Q}$ obtenu par la règle du parallélogramme.

Le théorème de Darboux affirme donc que pour tout couple de vecteurs \vec{P} et \vec{Q}

$$\vec{P} \oplus \vec{Q} = \vec{P} + \vec{Q}$$

x x x x

x x x

x x

x

Voici d'abord quelques conséquences immédiates des axiomes :

Proposition I Pour tout vecteur \vec{P} , $\vec{P} \oplus \vec{0} = \vec{P}$
 et $\vec{P} \oplus (-\vec{P}) = \vec{0}$ (conséquences de l'axiome III)

Proposition II Pour tout couple de vecteurs \vec{P}, \vec{Q} non colinéaires
 $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ appartient au plan Π défini par \vec{P} et \vec{Q} .
 En effet $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ doit être invariant par la symétrie orthogonale par rapport à Π (axiome IV)

Proposition III Si \vec{P} et \vec{Q} ne sont pas colinéaires, $\vec{P} \oplus \vec{Q}$ n'est
 parallèle ni à \vec{P} , ni à \vec{Q} .
 Car s'il n'en était pas ainsi, il existerait deux vecteurs \vec{P} et \vec{Q} et un scalaire λ tels que
 $\vec{P} \oplus \vec{Q} = \lambda \vec{Q}$. Dans ces conditions, on aurait
 $(\vec{P} \oplus \vec{Q}) \oplus (-\vec{Q}) = (\lambda - 1)\vec{Q} = \vec{P} + (\vec{Q} - \vec{Q}) = \vec{P}$
 ce qui contredit l'indépendance linéaire de \vec{P} et \vec{Q} .

Proposition IV Etant donné un vecteur \vec{P} non nul, et un vecteur unitaire
 \vec{u} orthogonal à \vec{P} , il existe deux scalaires α et β
 non nuls, ne dépendant que de $\|\vec{P}\|$, tels que

$$\vec{P} \oplus \vec{u} = \frac{\alpha \vec{P}}{\|\vec{P}\|} + \beta \vec{u}$$

L'existence de tels scalaires non nuls résulte des propositions II et III. Ces scalaires ne dépendent que de $\|\vec{P}\|$, car si l'on choisit un autre couple \vec{P}', \vec{u}' avec $\|\vec{P}'\| = \|\vec{P}\|$, il existe une isométrie qui applique \vec{P} sur \vec{P}' , \vec{u} sur \vec{u}' .

$$\text{Darboux pose } f(\|\vec{P}\|) = \frac{\alpha(\|\vec{P}\|)}{\beta(\|\vec{P}\|)}$$

La démonstration qui suit sera essentiellement une étude de cette fonction $x \mapsto f(x)$ (définie sur \mathbb{R}^+).

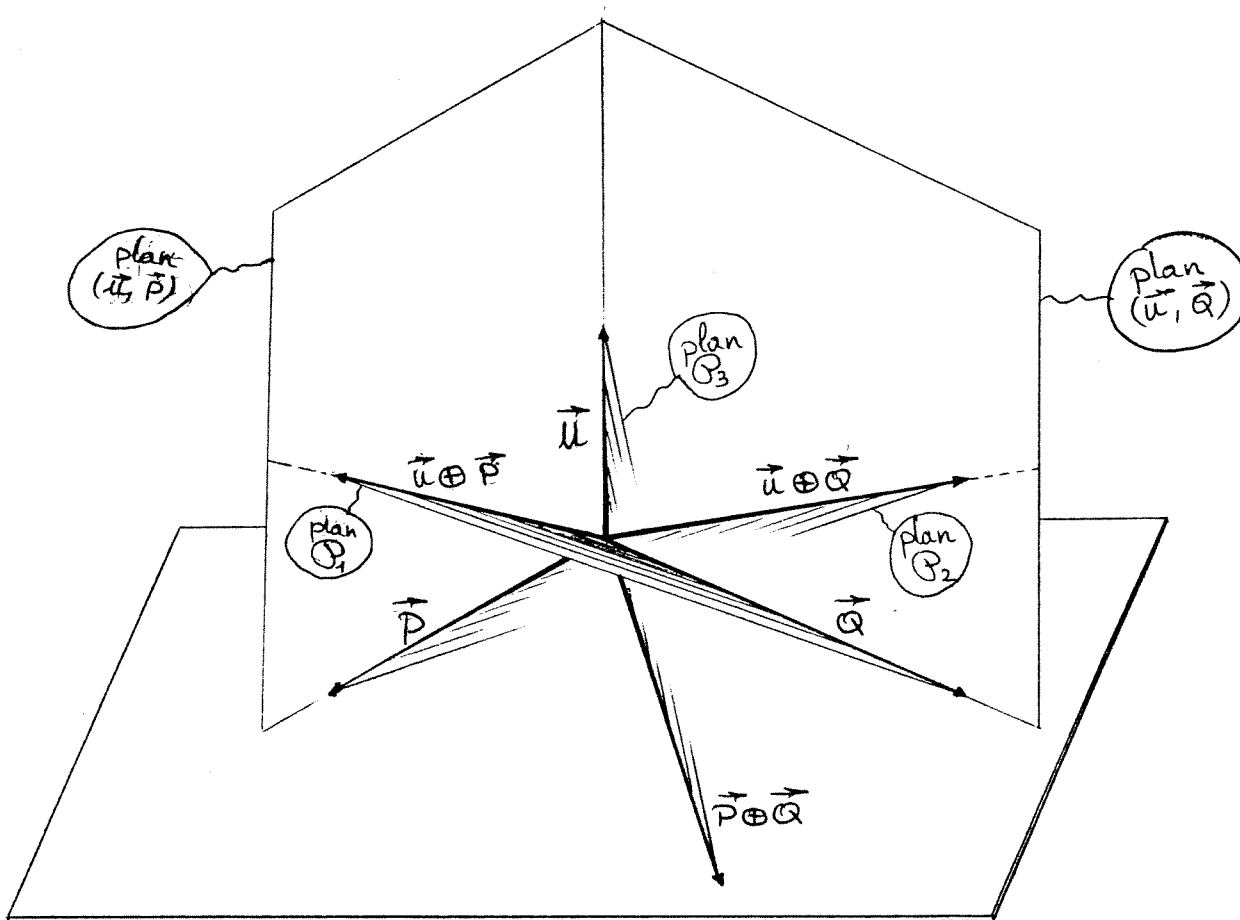
Démonstration du théorème. 1ère étape Soit \vec{P} et \vec{Q} deux vecteurs indépendants, et \vec{u} un vecteur unitaire normal au plan (\vec{P}, \vec{Q}) . Le repère $\left(\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|}, \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}, \vec{u} \right)$ est unitaire (mais non nécessairement orthogonal, si \vec{P} et \vec{Q} ne le sont pas).

Soient X, Y, Z les composantes du vecteur

$$\vec{V} = \vec{u} \oplus \vec{P} \oplus \vec{Q} \quad \text{par rapport à ce repère.}$$

Alors
$$\vec{V} = \vec{u} \oplus \vec{P} \oplus \vec{Q} = X \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + Y \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} + Z\vec{u}$$

Le vecteur \vec{V} est porté par l'intersection de trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ engendrés respectivement par \vec{Q} et $\vec{u} \oplus \vec{P}$, \vec{P} et $\vec{u} \oplus \vec{Q}$, et enfin \vec{u} et $\vec{P} \oplus \vec{Q}$.



Donc la trace de \mathcal{P}_1 sur le plan (\vec{u}, \vec{P}) porte le vecteur $\vec{u} \oplus \vec{P}$, ce qui s'exprime par

$$f(\|\vec{P}\|) = \frac{\alpha(\|\vec{P}\|)}{\beta(\|\vec{P}\|)} = \frac{X}{Z}$$

De même $f(\|\vec{Q}\|) = \frac{Y}{Z}$ et par conséquent

$$\frac{Y}{X} = \frac{f(\|\vec{Q}\|)}{f(\|\vec{P}\|)}. \quad \text{Cette égalité exprime que le vecteur } \vec{P} \oplus \vec{Q}$$

(porté par la trace de \mathcal{P}_3 sur le plan (\vec{P}, \vec{Q})) est colinéaire au vecteur $f(\|\vec{P}\|) \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + f(\|\vec{Q}\|) \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|}$.

Il existe donc un scalaire λ tel que

$$(1) \quad f(\|\vec{P}\|) \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + f(\|\vec{Q}\|) \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} = \lambda \frac{\vec{P} \oplus \vec{Q}}{\|\vec{P} \oplus \vec{Q}\|}.$$

On a alors $\vec{P} \oplus \vec{Q} \oplus \vec{R} = \vec{0}$, et $-\vec{R} = \vec{P} \oplus \vec{Q}$.
 On a alors $\vec{P} \oplus \vec{Q} \oplus \vec{R} = \vec{0}$, et $-\vec{R} = \vec{P} \oplus \vec{Q}$.

Nous allons appliquer le résultat (1), en remplaçant \vec{P} par \vec{R} :

il existera donc un autre scalaire μ , tel que :

$$f(\|\vec{P}\|) \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + f(\|\vec{Q}\|) \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} + \lambda \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} = \vec{0}$$

$$\mu \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + f(\|\vec{Q}\|) \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} + f(\|\vec{R}\|) \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} = \vec{0}$$

et par soustraction :

$$(f(\|\vec{P}\|) - \mu) \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + (\lambda - f(\|\vec{R}\|)) \frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|} = \vec{0}$$

Comme \vec{P} et \vec{R} sont indépendants (prop. III),

$$\lambda = f(\|\vec{R}\|) = f(\|\vec{P} \oplus \vec{Q}\|).$$

En portant cette valeur dans (1), on obtient l'identité.

$$(2) \quad f(\|\vec{P}\|) \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} + f(\|\vec{Q}\|) \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} = f(\|\vec{P} \oplus \vec{Q}\|) \frac{\vec{P} \oplus \vec{Q}}{\|\vec{P} \oplus \vec{Q}\|}$$

Troisième étape. L'identité (2) vient d'être démontrée pour tout couple (\vec{P}, \vec{Q}) de vecteurs linéairement indépendants. Mais par continuité (Axiome II), elle s'étend à tous les couples de vecteurs, et plus particulièrement aux cas où \vec{P} et \vec{Q} ont même direction et même sens.

Dans ce cas $\|\vec{P} \oplus \vec{Q}\| = \|\vec{P} + \vec{Q}\| = \|\vec{P}\| + \|\vec{Q}\|$.

Et sachant qu'alors $\frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} = \frac{\vec{Q}}{\|\vec{Q}\|} = \frac{\vec{P} \oplus \vec{Q}}{\|\vec{P} \oplus \vec{Q}\|}$, l'identité (2) devient

$$(3) \quad f(\|\vec{P}\| + \|\vec{Q}\|) = f(\|\vec{P}\|) + f(\|\vec{Q}\|).$$

Quatrième étape. On sait que toutes les solutions continues de l'équation fonctionnelle

$$f(|x| + |y|) = f(|x|) + f(|y|)$$

sont données par $f(|x|) = f(1) \cdot |x|$ (4)

(En effet, ce résultat classique se démontre immédiatement pour x entier ou rationnel, puis en prolongeant par continuité, pour tout x réel.)

Portant cette valeur (4) dans l'identité (2), on obtient après simplification :

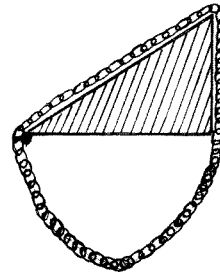
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{P} \oplus \vec{Q} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarque finale Il existe une caractérisation beaucoup plus simple de l'addition vectorielle, reposant essentiellement sur l'axiome :

La loi d'addition des vecteurs est invariante par toute projection (parallèlement à une direction).

En fait, Simon STEVIN était parvenu à deviner la règle du parallélogramme, à partir d'un raisonnement s'appuyant sur l'impossibilité du mouvement perpétuel.

Il raisonnait sur le dispositif suivant :



et aboutissait à une décomposition du poids de chaque élément de la chaîne, selon deux directions orthogonales.

Mais, il est vraiment téméraire de prétendre que l'invariance de la composition des forces, par toute projection (non nécessairement orthogonale) est une vérité d'intuition.

G. GLAESER.

Courrier des lecteurs,

se couvrir de gloire!

Le problème du "couvercle"

Dans le manuel de 3ème, élaboré par une équipe de l'IREM de Strasbourg (éd. Istra), on trouve une étude destinée à ouvrir l'enseignement sur la curiosité de nos élèves.

Voici ce texte:

1. Problème du «couvercle»*.

Découpons dans une feuille de papier un morceau C. On dit que C est un *couvercle* pour un ensemble E de points du plan si on peut placer C sur le plan de manière à cacher tous les points de E. (On dit : couvrir E.)

Problème : Chercher C aussi *petit* que possible, de façon qu'il soit un couvercle pour *tous* les ensembles E de diamètre au plus égal à 1. (Un ensemble E est de diamètre inférieur ou égal à 1 si deux points quelconques de E sont toujours à une distance inférieure ou égale à 1.)

Suggestion : Organiser dans la classe un concours. Trouver le plus petit couvercle C pour les ensembles E ayant seulement trois points (avec distances mutuelles inférieures ou égales à 1). Si vous pensez avoir une bonne réponse, adressez-la à l'IREM de Strasbourg, 10, rue du Général Zimmer, 67084 Strasbourg Cedex.

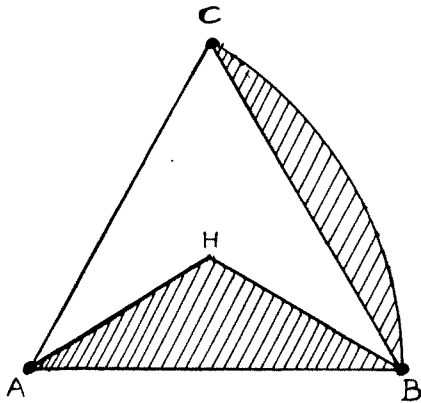
Le livre du professeur (compagnon indispensable du même ouvrage), indique à ce propos :

Il n'est évidemment pas question de demander aux élèves de trouver les solutions des problèmes encore ouverts que nous proposons ici, à moins de découvrir un Gauss au milieu des gosses de la classe... Mais l'apparente simplicité de certains de ces problèmes peut être un sujet d'étonnement.

Nous recevons à ce propos une lettre de M. Thierry Bautier qui enseigne à Arras. ("L'intérieur avec nous!")

Voici ce qu'il écrit :

Une solution pour un ensemble de trois points, de diamètre inférieur ou égal à 1 est :



le triangle est équilatéral de côté 1. L'arc de cercle est obtenu en traçant le cercle de centre A, de rayon 1. Le point H est le centre de gravité du triangle ABC.

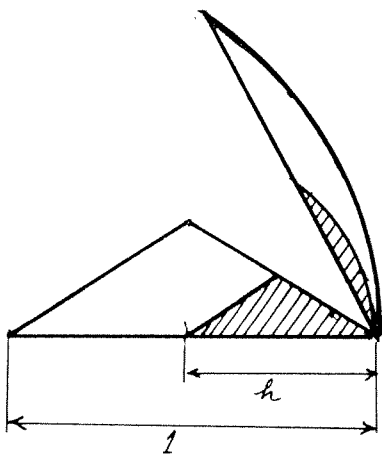
Il fallait donner une signification précise à l'expression "C aussi petit que possible". J'ai choisi celle-ci :

Ce couvercle doit couvrir tout ensemble de trois points de diamètre inférieur ou égal à 1, mais il doit perdre cette propriété si on lui enlève l'un quelconque de ces points.

Il est facile de voir que le couvercle proposé recouvre bien tout ensemble de trois points de diamètre égal à 1.

Si α et β sont les deux points à la distance 1, et γ le troisième point. Selon la position de γ par rapport à α et β , on met α et β en correspondance avec A et B, ou avec B et C, ou avec C et A.

Si l'ensemble est de diamètre égal à h $h < 1$, on sait alors qu'il est recouvert par le couvercle solution à l'échelle h . Or ce plus petit couvercle est inclus dans le plus grand:



donc le grand couvercle recouvre tout ensemble de trois points de diamètre inférieur ou égal à 1.

"le" plus petit couvercle recouvrant tout ensemble de trois points de diamètre inférieur ou égal à 1 est le couvercle solution auquel on a ôté le segment AH.

En effet, si $\alpha = A$, $\beta = B$ $\gamma \in [A,H]$, on peut aussi recouvrir $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ d'une autre manière.

$\alpha = B$, $\beta = C$ $\gamma \in [B,H]$.

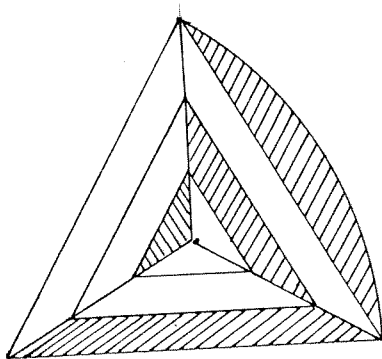
On n'a donc pas besoin de $[A,H]$.

Une fois cette précision apportée, tous les autres points sont nécessaires. Il suffit d'imaginer l'ensemble $\{A, B, D\}$ (A et B sont nécessaires pour recouvrir $\{A, B, C\}$) où D est le point que l'on a ôté. On ne peut plus le recouvrir par notre couvercle.

Si l'on met de côté le problème des bords que l'on évacue du couvercle (impossible dans la réalité), cette solution n'est pas l'unique "plus petit couvercle".

On peut en imaginer une infinité.

Par exemple:

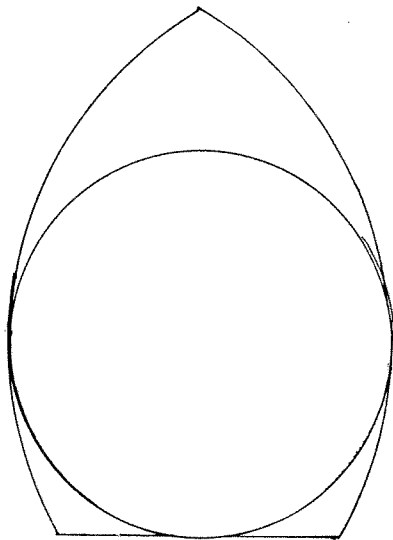


(la partie noircie est la partie conservée)

Je n'ai pas eu le temps de bien regarder le cas où le nombre n de points augmente.

Il me semble que les cas difficiles sont $n = 4$ et $n = 5$.

Par contre, pour $n \geq 6$, "le" plus petit" couvercle me semble être:



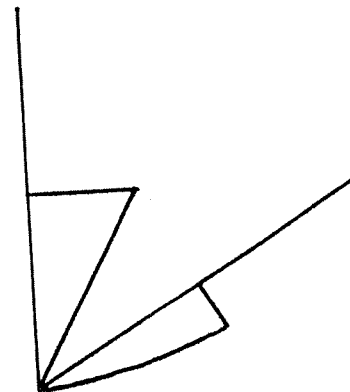
Si $\text{diam } \epsilon = 1$, on met la "pointe" du couvercle du côté des points les plus éloignés des deux points à la distance 1.

Notre correspondant termine sa lettre en émettant quelques doutes sur la possibilité de faire trouver ces solutions par des élèves.

Voici des extraits de la lettre par laquelle F. Pluvinage a répondu à notre collègue :

Cher Collègue,

Merci de votre lettre. Votre solution mérite d'être proposée à l'Ouvert (organe commun de l'IREM de Strasbourg et de la régionale APM). Elle est certainement minimale* au sens de l'inclusion, sens que vous avez, très raisonnablement, choisi pour l'expression "aussi petit que possible". Est-elle également minimale au sens des aires? A voir.



Un seul point, dans votre lettre, m'accroche un tout petit peu. La recherche est très certainement non seulement accessible, mais fructueuse pour des élèves. Je ne saurais trop vous conseiller de la proposer pour un travail en groupes de quelques séances (pas une toute seule), en évitant surtout de parler de votre solution. Vous risquez d'être étonné de toute la géométrie qui aura ainsi été abordée sérieusement, et de vous voir proposer des idées que vous n'attendiez pas. Essayez même de parler du problème avec 4 points au lieu de 3. Et si après 4 ou 5 séances de travail en groupes sur ce sujet, qui vous a intéressé vous-même, vous regrettez que votre classe se soit lancée dans cette activité, écrivez-moi une lettre d'eng...

Bien cordialement,

* toutefois, on peut faire plus "petit" en admettant de retourner la feuille de papier (isométries inverses).

Pluridisciplinarité:

Mais que voulais-tu donc dire platon?

Une collègue philosophe, désirant entretenir ses élèves de la nature de la Science, décida de leur faire étudier le "Théétète" de Platon. Socrate, le géomètre Théodore de Cyrène et son brillant élève, le futur mathématicien Théétète y examinent les différentes définitions de ce terme.

Or, au début du dialogue, Socrate éprouve le jeune homme en l'interrogeant, et celui-ci affirme sa valeur ainsi :

Théétète :

Théodore, que voici, avait fait devant nous les constructions relatives à quelques unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérées selon leur longueur, commensurables à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une, jusqu'à celle de dix sept pieds: il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là. Il nous vint donc à l'esprit, le nombre des puissances apparaissant infini, d'essayer de les rassembler sous un terme unique, qui pût servir à désigner tout ce qu'il y a de puissances.

Socrate :

Et vous avez trouvé un terme adéquat ? (...)

Théétète:

Tout ce qui est nombre fut par nous séparé en deux groupes : celui qui peut se résoudre en un produit d'égal par égal, nous l'avons représenté par la figure du carré, et nous l'avons appelé tétragonal et équilatéral (...)
Celui qui s'intercale entre les nombres du premier genre, comme le trois; le cinq, et, en général, tout nombre qui ne peut se résoudre en produit d'égal par égal, mais se résout en plus grand par plus petit et constitue une figure à côtés inégaux, nous l'avons représenté par la figure du rectangle et l'avons appelé nombre rectangulaire.

Socrate :

Excellent, mais ensuite ?

Théétète :

Toutes les lignes dont le carré constitue un nombre plan équilatéral, nous les avons définies longueurs. Toutes celles dont le carré constitue un nombre rectangulaire, nous les avons définies puissances, parce que, non commensurables aux premières si on les considère selon leur longueur, elles leur sont commensurables si on considère les surfaces qu'elles ont puissance de former. Pour les solides, enfin, nous avons fait des distinctions analogues.

Cette collègue, troublée, m'a demandé de lui "traduire" les assertions de Théétète.

Il s'agit, comme on l'a deviné, de l'irrationalité des racines carrées d'entiers qui ne sont pas carrés parfaits, exprimée dans le langage géométrique en vigueur dans la mathématique grecque.

Théétète commence par expliquer que son maître Théodore a montré, par des constructions géométriques semble-t-il, l'irrationalité (la "non commensurabilité à l'unité") de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... jusqu'à $\sqrt{17}$. Il affirme en avoir obtenu une généralisation. Appelant "nombre tétra-gonal (carré) et équilatéral" (à côtés égaux) ce que nous appelons carré parfait, il nomme les autres entiers " nombres rectangulaires ".

Il donne ensuite un début de classification des lignes, c'est-à-dire des réels positifs, à l'aide de leurs carrés :

- . ceux dont le carré est un carré parfait, autrement dit les entiers.
- . ceux dont le carré est un entier non carré parfait (dit rectangulaire).

...

Il nomme ces derniers puissances, car ils ont "puissance d'engendrer une surface commensurable" (i.e. leur carré est entier). Nous les nommons racines carrées d'entiers. Et il annonce le résultat suivant: les racines carrées d'entiers qui ne sont pas carrés parfaits sont irrationnelles.

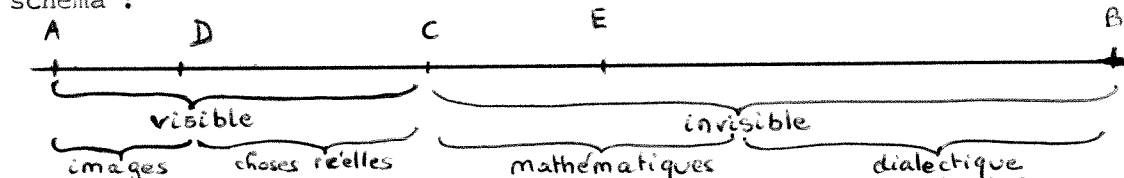
Enfin il affirme s'être attaqué à la même classification à l'aide des cubes. Le support géométrique rendait bien plus ténébreuses les puissances supérieures.

LE POINT DE VUE DU PHILOSOPHE

Ainsi, selon mon collègue mathématicien, le jeune Théétète annonce un résultat mathématique de taille au vieux maître. Une lecture attentive de Platon montre cependant que ni Théétète ni Socrate ne soulignent l'acquis que représente la preuve de l'irrationalité des racines d'entiers non carrés parfaits. Ce résultat est annoncé en passant. Théétète est fier "d'avoir rassemblé sous un terme unique tout ce qu'il y a de puissances". Socrate, pour souligner la qualité de son jeune interlocuteur, le félicitera d'avoir su "comprendre la pluralité (des puissances) sous un terme unique" et l'incitera à trouver "à la pluralité des sciences, une définition unique".

La conception qu'avait Platon des mathématiques, de leur importance et de leur usage est à l'origine de cette attitude, surprenante pour un mathématicien, cohérente pour un philosophe.

Dans la République, Platon fixe le Bien comme terme unique de la Science. Les modes de connaissance s'en trouvent hiérarchisés, selon le schéma :



Cette ligne se décompose en deux parties, le visible et l'invisible, chacune étant partagée à son tour avec la constance du rapport : le visible (AC) est à l'invisible (CB) ce que, dans le visible, les images (AD) sont aux choses réelles (DC). L'invisible, l'intelligible se partage selon la même proportion, et la section mathématique (CE) est à la section dialectique (EB) ce que les images sont aux choses.

La section mathématique, bien que située dans un domaine supérieur au visible, a un statut inférieur vis à vis de la Science dialectique. La raison de ce statut est un double déficit que Platon attribue à la connaissance mathématique: elle est tributaire des figures d'une part, et d'autre part d'hypothèses non critiquées. De plus ces hypothèses sont utilisées non pas pour remonter à l'essentiel, à l'archè (au principe), mais pour aboutir à une fin, le théorème que le mathématicien se propose de démontrer. Platon considère que le raisonnement hypothético-déductif n'a pas pour but la remontée vers le principe du Bien, principe premier de tout ce qui est. Par cette carence, les mathématiques se couperaient de l'origine radicale des choses.

Pour en revenir aux assertions de Théétète, il était plus important de déceler l'unique dans la multiplicité, à propos des puissances, que de prouver une caractérisation de ces puissances, fût-elle un argument pour la présence de l'unique dans "l'infinité des puissances".

Le refus des mathématiciens grecs d'attribuer aux irrationnels, et même aux rapports la qualité de nombre ne provient-il pas de la même exigence philosophique ?

Christiane FULGONY et Eric CHANEY.

VIEUX DE 2500 ANS, ET TOUJOURS UTILE !

L'irrationalité de $\sqrt{2}$, attribuée à Pythagore ou à son école était bien antérieure à Platon. Sa généralisation fut par contre contemporaine du philosophe. On ne sait pas si elle fut obtenue par des raisonnements strictement géométriques, ou par des raisonnements arithmétiques.

Vieux de quelques 2500 ans, ce résultat constitue toujours un excellent outil pédagogique, et m'a permis de convaincre certains élèves de 1e A de l'utilité de la logique.

En effet, s'il est facile de prouver :

"Si n est un entier pair, alors n^2 est pair"

les élèves sèchent longuement sur l'implication réciproque :
" n étant un entier, si n^2 est pair, alors n est pair"

jusqu'à ce qu'ils s'intéressent à la proposition contraposée :
" n étant un entier, si n est impair alors n^2 est impair"

dont la preuve est triviale.

Or de (n^2 pair \Rightarrow n pair) découle aisément l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Eric Chaney.

Provoquer la curiosité

(extrait d'une lettre de Gérard BOHLER - Lycée J.J. Henner, Altkirch)

"Je précise tout de suite que je ne procède pas en classe à des "séances dirigées d'heuristique" mais que je soumetts régulièrement ce genre de sujet à une longue réflexion, en dehors des heures de cours. Mon but est de donner aux élèves de seconde C le goût de la recherche et de l'initiative, par le travail personnel, seul ou en groupe. Tout en donnant une très large priorité au programme :

- je leur propose des sujets de réflexion (style rallye) sur une période d'environ un mois. Les élèves me font part de leurs idées et solutions éventuelles, au fur et à mesure qu'ils en ont à proposer. Puis avant de leur proposer d'autres sujets de ce genre, je fais un rapide bilan parfois accompagné d'une tentative d'analyse détaillée tenant compte de leur démarche.

- indépendamment de cela, ils ont la possibilité de rédiger n'importe quel exercice choisi dans un manuel et portant ou non sur la partie du programme traitée (ils peuvent aussi demander des conseils sur le choix de ces exercices), en plus de l'habituel devoir à la maison ou en classe. Chacun peut donc faire autant d'exercices suivant son rythme ou sa disponibilité qu'il le veut.

- j'essaie de satisfaire les curiosités suscitées par certaines questions du programme en leur donnant des documents à étudier personnellement sur d'autres parties des Mathématiques, pas forcément au programme. Quelques bons élèves commencent à étudier des variations de fonctions, à manipuler les nombres complexes, mais toujours en donnant priorité absolue au programme en cours.

Ainsi la proposition de ce genre de sujet s'inscrit dans le cadre d'un objectif plus large: apprendre à réfléchir sur

un sujet, même si cela prend beaucoup de temps, et avoir le goût de l'initiative et du travail personnel (ou en groupe) et ne pas se contenter uniquement du cours tel qu'il est fait et des exercices traités en classe (bien que toujours - et c'est clair depuis le début - la priorité est donnée aux cours, aux préparations, aux devoirs imposés et au programme étudié).

Beaucoup - et de plus en plus - sont intéressés par cette formule. Les plus faibles rattrappent leurs lacunes de calcul algébrique en travaillant ensemble des exercices appropriés, les autres font des exercices plus en rapport avec leur niveau. Je ramasse à chaque heure de plus en plus d'exercices que je n'avais pas imposés et qui sont le fruit de l'initiative des élèves, malgré le rythme imposé de 2 devoirs en 3 semaines. Pour les sujets de réflexion (genre du document qui vous est parvenu), je recueille les avis d'environ un bon tiers de la classe qui a vraiment cherché et 3 à 7 élèves vont jusqu'à trouver une bonne solution, cette proportion étant variable suivant les sujets."

Voici maintenant un extrait d'un "corrigé" que Gérard BOHLER distribue à ses élèves.

Un rectangle dont les côtés mesurent respectivement m et n unités de longueur (m et n entiers) est subdivisé en carrés de côté unité. Quel est le nombre de ces carrés traversés par la diagonale ?

1. Remarques sur la formulation de l'énoncé

a) "la diagonale" : L'énoncé dit : "la diagonale". Or il y a deux diagonales. Mais, pour des raisons de symétrie évidentes, les deux diagonales traversent le même nombre de petits carrés.

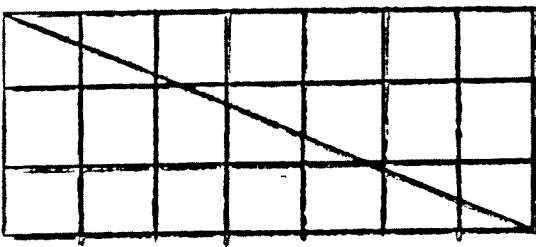
De même que : "la diagonale" d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement m et n unités traverse autant de petits carrés que "celle" d'un rectangle dont les côtés mesurent respectivement n et m unités. Ainsi, m et n devront jouer le

même rôle dans ce problème, et le résultat sera donc symétrique en m et en n .

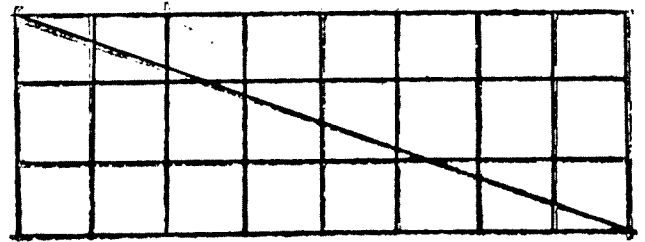
- b) ce qu'on cherche : Par ailleurs, on dit bien "le nombre de ces carrés" et non le nombre des carrés, il s'agit des carrés de côté unité de la subdivision, et non de tous les carrés qu'on peut former sur la figure.

Mais il faudra encore préciser le mot "traversés"
Il s'agit de carrés tels que la diagonale passe à l'intérieur et ne se contente pas de passer par un sommet.

2. Etude de quelques exemples



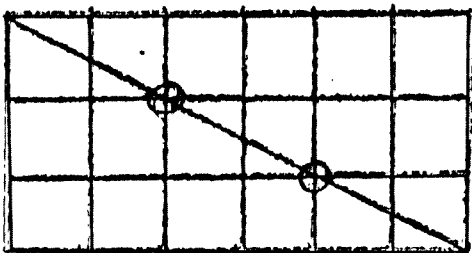
$$\left. \begin{array}{l} m = 8 \\ m = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 10}$$



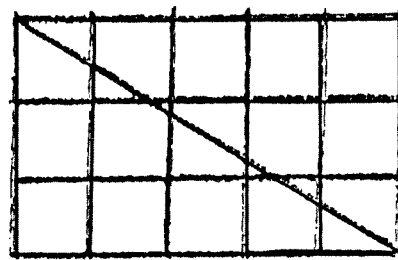
$$\left. \begin{array}{l} m = 7 \\ m = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 9}$$

On désigne par $d(m, n)$ le nombre cherché, pour un rectangle dont les côtés mesurent m et n unités.

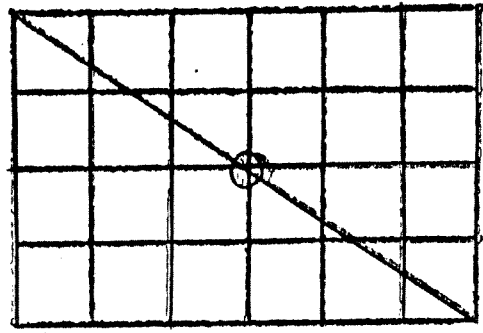
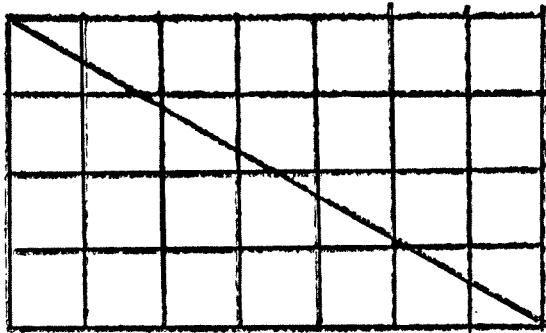
On a, d'après ce qui précède, $d(m, n) = d(n, m)$.



$$\left. \begin{array}{l} m = 6 \\ n = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 6}$$



$$\left. \begin{array}{l} m = 5 \\ n = 3 \end{array} \right\} \text{on trouve : } \boxed{d(m, n) = 7}$$



$$\left. \begin{array}{l} m = 7 \\ n = 10 \end{array} \right\} \text{ on trouve : } \boxed{d(m,n) = 10}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = 6 \\ n = 4 \end{array} \right\} \text{ on trouve : } \boxed{d(m,n) = 8}$$

3. Conjecture

a) Déjà sur les deux premiers exemples, il apparaît que le nombre cherché serait: $d = m + n - 1$.

En effet, si $n = 7$ et $m = 3$, on a trouvé : $9 = 7 + 3 - 1$

si $n = 8$ et $m = 3$, on a trouvé : $10 = 8 + 3 - 1$

si $n = 5$ et $m = 3$, on a trouvé : $7 = 5 + 3 - 1$

b) par contre, ce résultat est mis en défaut par la suite:

Ainsi, si $m = 6$ et $n = 3$, on a trouvé : $6 \neq 6 + 3 - 1 = 8$

si $m = 6$ et $n = 4$, on a trouvé : $8 \neq 6 + 4 - 1 = 9$

Mais dans ce cas, contrairement aux exemples précédents, m et n ne sont pas premiers entre eux: cette constatation va nous servir de point de départ pour notre recherche.

On commence à se demander si $d(m, n)$ ne serait pas égal à $m + n - 1$, chaque fois que m et n sont premiers entre eux.

4. Démonstration

Il s'agit de démontrer maintenant la conjecture formulée précédemment :

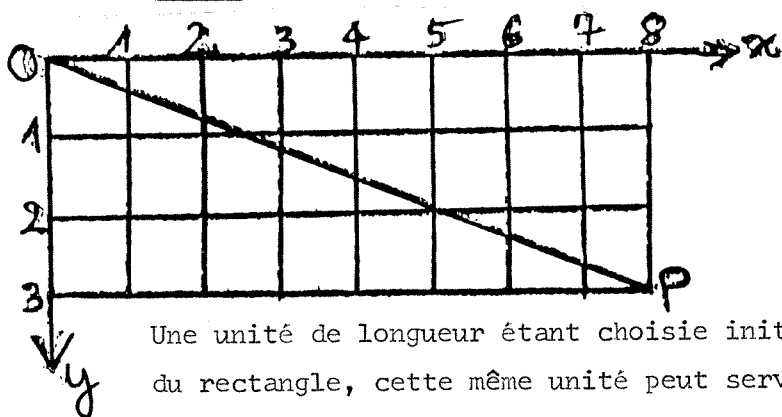
Si m et n sont premiers entre eux, alors la diagonale traverse un nombre de petits carrés égal à :

$$d(m, n) = m + n - 1$$

Chaque fois que la diagonale traverse une ligne, horizontale ou verticale, on rentre dans un nouveau carré.

Si la diagonale rencontre bien toutes les horizontales et toutes les verticales, il s'agit de voir si elle passe à l'intersection d'une horizontale et d'une verticale: un tel point sera appelé un noeud. Il est clair que l'origine et l'extrémité de la diagonale seront des noeuds, dans tous les cas.

Lemme : si m et n sont premiers entre eux, il n'existe pas d'autre noeud



Une unité de longueur étant choisie initialement pour mesurer les côtés du rectangle, cette même unité peut servir à définir un repère orthonormé, comme sur la figure ci-dessus.

Si I (a, b) était un noeud, les points O (0, 0), I et P (m, n) seraient alignés. Leur alignement se traduirait par la relation:

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$$

(Si I \neq O, a et b ne sont pas nuls)

donc par la relation : $an - bm = 0$ dont les solutions sont :

$$\left\{ m = ka, n = kb, k \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \right\} \quad (k \neq 0 \text{ et } k \neq 1 \text{ si } I \neq O \text{ et } I \neq P).$$

Donc il existerait k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tel que k soit un diviseur commun de m et n, ce qui contredirait l'hypothèse que m et n sont premiers entre eux. (démonstration par l'absurde).

Il en résulte qu'on compte un carré traversé chaque fois que la diagonale traverse une horizontale (il y en a m qui sont traversées) ou une verticale (il y en a n qui sont traversées) en faisant attention au fait que l'horizontale m et la verticale n sont atteintes en même temps: il y aura donc bien $m + n - 1$ carrés traversés par la diagonale.

5. Généralisation

Si m et n ne sont pas premiers entre eux, désignons par p le p.g.c.d. de m et n. Soient m' et n' les entiers tels que:

$m = p \cdot m'$ et $n = p \cdot n'$

Lorsque $k = 1, 2, \dots, p-1$, alors $\frac{m}{n} = \frac{km'}{kn'}$.

Donc les points $O(0,0)$, $P(m, n)$ et $I_k(km', kn')$ sont alignés, c'est-à-dire que I_k se trouve sur la diagonale.

Or ces points I_k correspondent à des noeuds. Comme m' et n' sont premiers entre eux, ce seront les seuls noeuds autres que O et P , et ils seront au nombre de $p - 1$. Donc:

$$d(m, n) = (m + n - 1) - (p - 1)$$

Soit finalement : $d(m, n) = m + n - p$

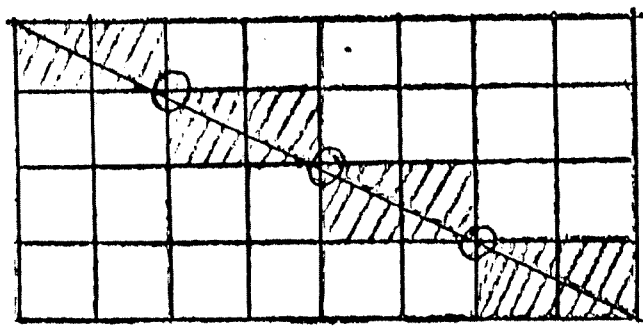
Remarque :

On peut aussi décomposer le rectangle de côtés m et n en rectangles de côtés m' et n' , et alors appliquer le résultat obtenu pour m' et n' (qui sont premiers entre eux) p fois pour obtenir le résultat correspondant à m et n .

Le nombre cherché est donc : $p(m' + n' - 1)$, soit encore :
 $pm' + pn' - p = m + n - p$.

On retrouve que : $d(m, n) = m + n - p$

Exemple :



Si $m = 8$ et $n = 4$, on peut appliquer 4 fois le résultat obtenu pour 2 et 1, compte tenu du fait que la diagonale traverse, dans ce cas, autant de carrés que pour 4 fois un carré pour lequel $m = 2$ et $n = 1$.

Synthèse Compte tenu du fait que si m et n sont premiers entre eux, leur p.g.c.d. est égal à 1, on a la relation générale

$$d(m, n) = m + n - p, \quad p = \text{p.g.c.d.}(m, n).$$

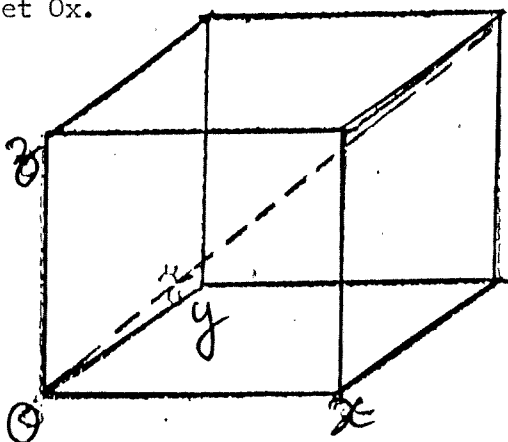
On vérifie que cette relation est symétrique en m et n .

La diagonale d'un rectangle de côtés m et n traverse $m + n - p$ petits carrés, avec $p = \text{p.g.c.d.}(m, n)$.

6. Extension

Le problème précédent peut être posé avec des cubes de côté unité rassemblés pour constituer un parallélépipède, dont les côtés mesurent a, b, c unités de longueur.

Cette fois-ci, il y aura plusieurs types de "noeuds": les intersections de droites parallèles à Ox, Oy, Oz , à Ox et Oy , à Oy et Oz , à Oz et Ox .



Par un raisonnement analogue, on obtient que :

$$d(a, b, c) = a + b + c - \text{pgcd}(a, b) - \text{pgcd}(b, c) + \text{pgcd}(a, b, c)$$

N.B.

Ce problème de la traversée du rectangle posé à des enfants a fait l'objet d'un compte-rendu dans l'ouvrage :

. Starting Points (Oxford University Press) p. 23.

Une traduction est faite chez CEDIC, sous le titre "Points de départ".

Il est à noter que nos collègues anglais qui racontent une expérience faite en 6ème, font cesser leurs investigations lorsque les élèves se sont aperçus que pour certains couples (m, n) , la solution semble être $m + n - 1$.

G. Glaeser en a tiré quelques méditations mélancoliques sur les charmantes perspectives qu'ouvrirait un mariage entre nos méthodes et les leurs (Bulletin de l'A.P.M. N° 297 : "La mathematical education" chez les Bretons et les Gaulois").

L'Ouvert.

Moiré

Deux ouvrages viennent de paraître sur l'effet de moiré :

Le premier, très élémentaire, en principe destiné à des élèves de terminale, est dû à l'I.R.E.M. de Paris-Nord. Son principal intérêt est de donner une série de trame que l'on peut superposer à son choix. (ouvrage disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.).

Le deuxième donne des résultats généraux grâce à l'analyse non-standard. Les lecteurs qui ne connaissent pas cette théorie peuvent cependant parcourir l'ouvrage pour prendre connaissance des différents usages du moiré. Avec l'autorisation de l'auteur, Jacques Harthong, nous en donnons ici de larges extraits.

l'ouvert

Le moiré est un tissu à reflets ondulés et chatoyants que l'on obtient en superposant par leurs endroits deux pièces d'étoffe ; ainsi superposées, on les fait défiler lentement, préalablement humectées et sous forte pression, entre deux cylindres bien lisses et chauffés. Les étoffes destinées au moirage sont en effet tissées à partir d'une chaîne constituée de gros fil ; comme, lors de la superposition des deux pièces, les fils de la première ne viennent jamais se disposer de façon exactement parallèle aux fils de la seconde, mais les recouvrent seulement par-ci, par-là, en formant avec eux des angles extrêmement aigus, il apparaît aux points d'intersection de ces fils un glaçage dû à la compression à chaud, car c'est en ces points-là que la pression est la plus forte. Par contre, aucun glaçage ne se fait en un point situé en face de l'intervalle entre deux fils. La juxtaposition globale de ces innombrables petits points micassés crée l'effet de moirage.

Si nous observons un tissu moiré avec un compte-fil ou une très forte loupe, les motifs ondulés ne sont plus visibles :seules apparaissent des zones brillantes, micassées, sur le fil de chaîne, qui sont séparées par des zones sombres et mates. Ainsi, le long d'un fil de chaine alternent les zones brillantes et les zones sombres, de manière discontinue ; tout au plus pouvons-nous

constater, en déplaçant la loupe, que les zones brillantes sont plus étroites en certaines régions et plus larges en d'autres. Les franges claires du moiré sont justement les régions où les zones microscopiques micassées sont les plus larges, tandis que les franges sombres sont les régions où les zones micassées sont les plus maigres. C'est donc exactement le même principe que pour la photo-gravure : une photographie imprimée est composée de millions de points noirs sur un fond blanc ; à la loupe nous observerons que les points noirs sont plus gros dans les régions de gris foncé que dans les régions de gris clair.

Notons bien que ce qui permet à la structure microscopique de donner un effet macroscopique visible, c'est la quasipériodicité de la structure microscopique : si nous observons une photogravure au microscope, nous voyons des points noirs parfaitement identiques, alignés, et équidistants dans tout le champ de vision. Si nous plaçons maintenant notre microscope ailleurs, nous observerons des points noirs également identiques, alignés, et équidistants ; mais ils seront plus gros, ou plus petits que les premiers. Ainsi, pour observer une structure macroscopique, il faut une structure microscopique qui soit périodique dans toute région grande pour la structure microscopique, mais petite pour la structure macroscopique.

Un tel principe n'est pas nouveau ; il est connu au moins depuis Démocrite. Depuis les développements modernes de la théorie atomique, nous pouvons dire que pratiquement toute la physique classique (non quantique) décrit des lois macroscopiques issues de ce principe. Par exemple, l'équation de continuité en électrodynamique est possible parce que les densités de charge et de courant sont des grandeurs constantes dans des régions grandes à l'échelle microscopique, mais petites à l'échelle macroscopique. Il en va de même pour la propagation de la chaleur dans un corps, l'hydrodynamique, la théorie du champ, etc. etc.

Mais ce qui caractérise l'effet de moiré parmi toutes les réalisations de ce principe, c'est que la structure microscopique y est obtenue par la

superposition de deux structures microscopiques neutres. Neutres, dans le sens suivant : aucune des deux structures microscopiques, prises séparément (ici, chacune des deux étoffes avant le moirage) ne donne lieu à une structure macroscopique ; les deux étoffes sont unies. C'est pourquoi on appelle, par extension, "effet de moiré" une structure macroscopique obtenue par superposition de deux structures microscopiques neutres.

Le plus simple des effets de moiré est le vernier : supposons que l'on superpose deux réseaux de bandes parallèles, alternativement noires et transparentes, de largeurs microscopiques ϵ et η , et supposons que $\frac{\epsilon - \eta}{\epsilon}$ soit lui-même microscopique, de sorte que $\frac{\epsilon^2}{\epsilon - \eta}$ soit une longueur macroscopique. Les bandes noires viendront alors recouvrir exactement les bandes claires en des endroits espacés de $\frac{\epsilon^2}{\epsilon - \eta}$, produisant ainsi des zones (franges) opaques, tandis que les bandes transparentes viendront coïncider avec les bandes transparentes à mi-chemin entre les franges opaques, donnant des franges claires. Le vernier est ainsi un moiré unidimensionnel. Notons la propriété de grossissement du vernier : une différence infime entre les pas des deux réseaux donne un effet macroscopique ; on peut également se convaincre par une courte réflexion qu'un déplacement microscopique de l'un des réseaux par rapport à l'autre produira un déplacement macroscopique des franges. C'est cette dernière propriété du vernier qui est utilisée dans le pied à coulisse. Le phénomène de battement, bien connu en acoustique, est aussi une illustration de l' "effet de vernier" .

L'interférométrie repose sur le même principe : au lieu de superposer deux tissus, ou deux réseaux, elle consiste à superposer deux ondes ; une modification infime de la phase de l'une des deux ondes produit une modification macroscopique des figures d'interférence. La fameuse expérience de Michelson et Morley , à l'origine de la Relativité Restreinte, a exploité cette propriété d'énorme grossissement que produit l'effet de moiré !

En 1874, Lord Rayleigh proposait une méthode reposant sur l'effet de moiré pour tester la qualité des réseaux de diffraction utilisés en optique : si on en superpose deux, en principe identiques, le moindre défaut dans la

périodicité sera mis en évidence par les franges de moiré.

Le moiré est donc un phénomène bien connu des expérimentateurs ; en cristallographie, on réalise des moirés en superposant deux lames très minces de cristaux : les franges renseignent sur l'alignement des cristaux, et surtout sur les dislocations de cet alignement . Des ingénieurs l'utilisent pour mettre en évidence des déformations infinitésimales dues à une contrainte mécanique ou thermique (en aéronautique, notamment) . Par exemple, M. P. Dantu, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a mis au point des méthodes utilisant le moiré pour visualiser la dilatation sur une tôle . La technique est la suivante : un réseau fin constitué de bandes parallèles comme pour le vernier (voir plus haut) et imprimé sur film transparent, est photocopié directement sur la tôle, enduite préalablement d'une couche d'émulsion photographique. La tôle est ensuite chauffée et se dilate ; en superposant à nouveau le réseau de référence au réseau que la dilatation a déformé, on fait apparaître des franges de moiré, qui renseignent sur la dilatation. (...)

En topométrie de précision, pour vérifier si une surface est parfaitement plane ou présente au contraire des cuvettes de profondeur si faible qu'elles sont invisibles, on emploie le procédé suivant (voir figure) : à peu près parallèlement à la surface que l'on veut tester, on place un réseau de droites parallèles. Au-dessus, une source lumineuse ponctuelle projette l'ombre du réseau sur la surface. En plaçant l'oeil près de la source de lumière, la faible parallaxe décale légèrement, par la perspective, le réseau par rapport à son ombre ; par conséquent, l'oeil de l'observateur verra des franges de moiré qui sont les courbes de niveau de la surface. Si celles-ci sont rectilignes, la surface est parfaitement plane ; mais le moindre défaut de planéité courbera les franges. (...)

Un principe analogue est utilisé par les astronomes amateurs qui polissent eux-mêmes le miroir de leur télescope : il s'agit de tester, au cours du polissage, la qualité de la surface, la perfection des franges de moiré indiquant que celle-ci

est devenue rigoureusement parabolique. Dans ce cas, on ne superpose pas par perspective le réseau à son ombre, mais à son image dans le miroir. La théorie de ce phénomène est évidemment plus complexe, du moins au niveau des calculs ; en effet, la réflexion sur une surface est d'analyse plus difficile que la simple projection. (...)

- LE PROBLEME INVERSE DU MOIRE.

Le problème que nous avons étudié jusqu'à présent était de déduire les figures de moiré de la structure microscopique des deux réseaux. Or dans les usages expérimentaux du moiré, c'est le problème inverse qui est posé : ce sont les figures de moiré qui sont observables, et il faut en tirer une information sur la structure microscopique qui est invisible. Bien entendu, comme il fallait s'y attendre, c'est le problème inverse qui est mathématiquement le plus difficile. En effet, plusieurs problèmes inverses peuvent se présenter :

a) on dispose de deux réseaux inconnus, mais que l'on sait identifier. Si on déforme infinitésimalement l'un d'entre eux selon une loi connue, peut-on déduire leur profil des figures de moiré obtenues ?

b) Si les réseaux sont connus, peut-on déduire la déformation à partir des figures ?

c) Si les deux réseaux sont inconnus et non identiques mais assez voisins pour avoir un moiré, peut-on, connaissant la déformation, en déduire les deux profils ?

d) Enfin, peut-on connaître les modules des réseaux à partir du module du moiré ?

On pourra remarquer que la distinction entre les problèmes relatifs aux seuls profils et les problèmes relatifs aux seuls modules est possible à cause d'un fait plus important qu'on ne croit : le profil du moiré ne dépend que des profils des réseaux et non de leurs modules, et le module du moiré ne dépend que des modules des réseaux et non de leurs profils. (...)

Il peut paraître curieux, à première vue, que les mathématiciens ne se soient pas intéressés au moiré. Pourtant, si on y réfléchit, on croit en deviner la raison. (...)

Dans les ouvrages écrits par des physiciens sur n'importe quel sujet, d'innombrables raisonnements mathématiques reposent sur (la) dualité :

<< Prenons une région grande par rapport à ... , mais petite par rapport à ... , etc. >> , mais ces raisonnements paraissaient si hasardeux aux mathématiciens professionnels et leur inspiraient une telle angoisse que pour l'exorciser, ils ont déployé des trésors d'ingéniosité, produisant ainsi une foule de concepts abstraits (et redoutables pour les physiciens) destinés à reconstruire des méthodes correctes à leurs yeux. Mais un mystère subsistait : comment tant de démonstrations "fausses" pouvaient-elles aboutir à des résultats justes ? Expliquer cela par une sorte d'intuition du physicien, d'origine expérimentale n'est pas satisfaisant. Laurent Schwartz avait senti la vraie nature de ce mystère, car il écrivait << Comment expliquer le succès de ces méthodes ? Quand une telle situation contradictoire se présente, il est bien rare qu'il n'en résulte pas une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens ; il y a même là une source importante de progrès pour les mathématiques et la physique >> .

Autrement dit, ces méthodes réussissent, parce que, en réalité, elles utilisent une théorie mathématique rigoureuse, mais sans qu'on le sache !

L'intuition de L. Schwartz se confirme ici encore, car la théorie mathématique parfaitement rigoureuse qui permet de produire des concepts tels que la structure microscopique ou la structure macroscopique, l'infiniment petit ou l'infiniment grand, et qui justifie, sous une forme modifiée, ce langage des physiciens, existe : c'est l'analyse non-standard, créée par Abraham Robinson, qui donne un sens universel à la notion d'infiniment petit. (...)