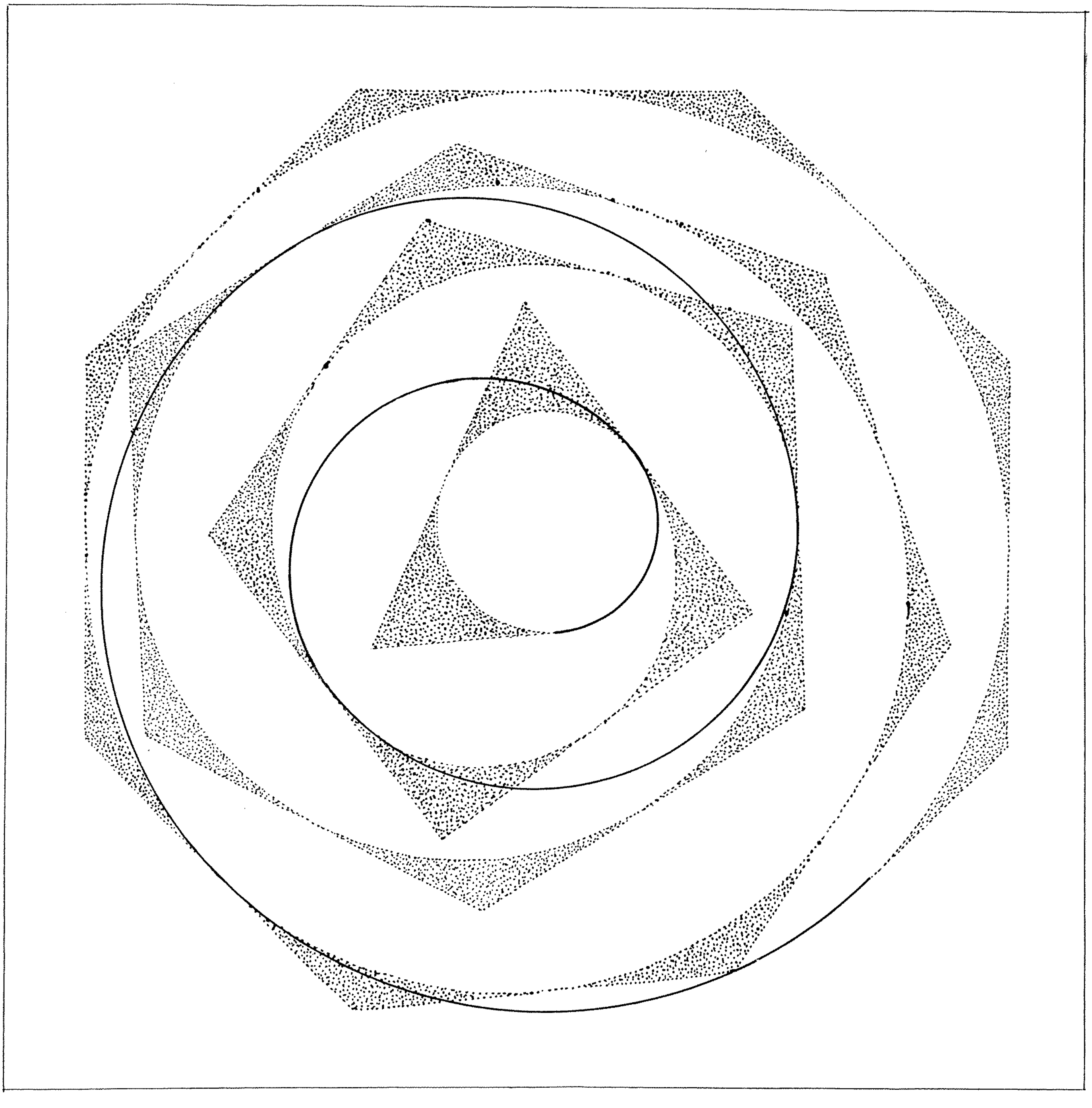
l'ouvert n°24

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE
DE LA REGIONALE APMEP D'ALSACE ET
DE L'IREM DE STRASBOURG - MAI 81



NOTRE COUVERTURE Max Bill : variation n°7 de "Quinze variations sur un même thème" (suite de 16 lithographies 30,5 x 32 cm). Développement continu de polygônes (du triangle équilatéral à l'octogone régulier) avec les cercles inscrits de composés en deux "spirales" de mouvement contraire.

Voir en dernière page l'article sur Max Bill.

OUVERTURE

L'enseignement mathématique ne fait pas de progrès si chacun exerce son métier, replié sur lui-même, en perpétuant des habitudes acquises une fois pour toute, sans songer à les remettre en cause.

Au contraire, la confrontation systématique de notre expérience pédagogique, de nos initiatives, nos soucis professionnels et nos réussites est un instrument efficace de formation continue.

C'est avec l'idée de renforcer la concertation entre collègues que la nouvelle équipe de rédaction de l'"Ouvert" a pris la relève de Jean Lefort. Nous le remercions d'avoir supporté la responsabilité de cette publication pendant des années. Il continue d'ailleurs à participer au travail.

A côté de quelques articles consacrés aux mathématiques, nous recueillons des témoignages sur des comportements d'élèves et des déroulements de classe. Nous recherchons des documents d'intérêt général: dans le dernier numéro, Stendhal et maintenant Henri Bergson nous ramènent à l'enseignement des mathématiques dans le passé. Et, un explorateur téméraire qui s'est aventuré sur la "face cachée de l'Education nationale" rend compte des efforts de quelques collègues de talent qui affrontent des situations difficiles.

Pour que l'"Ouvert" ne se referme pas sur la routine, il doit être alimenté par des enseignants de tous les coins d'Alsace et de l'Intérieur. Qu'il ne devienne pas un gadget entièrement rédigé par deux ou trois collègues, toujours les mêmes!

L'"Ouvert" ne sera l'organe de tous les professeurs de mathématiques alsaciens que si ses collaborateurs sont variés et nombreux.

Ecrivez-nous pour proposer vos projets d'articles.
... Faites passer l'information.

L'Ouvert.

SOMMAIRE

BERGSON
Sa copie au Concours Général 1876

L'élève Henri Bergson, du Lycée Fontanes, savait manier avec élégance les intersections de droites, de plans et autres théorèmes des trois perpendiculaires. Vous en conviendrez en lisant sa copie du concours général 1876, dont il obtint le premier prix. S'il existe encore des collègues persuadés que les philosophes ne savent pas raisonner - voyons, les professeurs de mathématiques ne sont pas sectaires, me souffle-t-on- qu'ils prennent la peine de lire ce texte d'un élève de dix-sept ans.

On sait que Bergson, professeur au Collège de France de 1900 à 1921, devint en quelque sorte le philosophe officiel de nos Lycées, entre les deux guerres. Ses réflexions sur la "durée" et sur le "temps" fournirent d'innombrables sujets de dissertation, et furent sévèrement critiqués par Gaston Bachelard qui pensait que sur un pareil sujet, il convenait de se tenir au courant de ce que la physique moderne apprenait, avant de philosopher.

Pour en revenir au texte, pourquoi ne pas en faire un document pour des élèves ayant quelques notions de géométrie dans l'espace. Le point de vue de Bergson n'est évidemment pas "moderne", mais la clarté et la qualité de l'exposition est insensible aux modes. Qu'il est difficile d'obtenir de nos élèves dans une copie de mathématiques des phrases en français exprimant des concepts mathématiques pour lesquels le recours au formalisme est inutile, voire lourd!

Nous serions bien sûr heureux de disposer, en retour, de quelques échos d'élèves, confrontés à leur ancêtre Bergson.

2e Année. PARIS, le 1er Mai 1878 N° 15

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL paraissant le 1er et le 15 de chaque mois

JUSQU'AU 15 JUILLET INCLUSIVEMENT

PRIX DU NUMÉRO. . .	Paris et Départements . 0f 30 Belgique, Suisse 0 35	*Pour tout ce qui concerne la Rédaction et les Abonnements, s'adresser à M. VUIBERT, 22, rue des Fossés-St-Bernard, à Paris.*
ABONNEMENT ANNUEL .	Paris et Départements . 5f Belgique, Suisse 6	Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais on préfère des mandats.

PREMIÈRE PARTIE.

Concours Général de 1876.

Philosophie.

Solution de M. Henri Bergson, élève du lycée Fontanes, lauréat du Concours (1er Prix).

N° 155. Dans un cube dont l'arête est a, on mène une diagonale AA', puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet A.

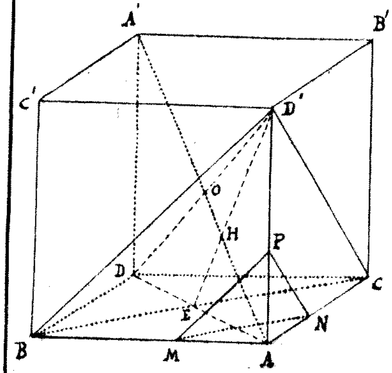
1° On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d ;

2° On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan sécant se déplace.

I.

Tirons les trois droites $D'B$, $D'C$, BC. Je dis que le plan $D'BC$ est l'un des plans considérés, c'est-à-dire est perpendiculaire à AA'.

En effet, la projection AD de la droite AA' étant perpendiculaire à BC, la droite AA' elle-même est orthogonale à BC, en vertu du théorème des trois perpendiculaires. On démontrerait de même que AA' est orthogonale à BD' ou à CD'. La droite AA', étant alors orthogonale à deux droites du plan BCD' est perpendiculaire à ce plan.



Cela posé, soit H le point où AA' coupe le plan BCD'. Je dis que HA est égal à la moitié de HA'. En effet, tirons les droites $D'D$, $D'E$. La ligne AA' rencontre évidemment $D'E$; car ces deux droites sont situées dans un même plan déterminé par les parallèles AD', $A'D$. Mais la droite $D'E$, contenue dans le plan BCD', ne peut rencontrer AA' qu'à la condition de passer par le point H où AA' coupe le plan. Dès lors, dans le triangle ADD' les droites AO, $D'E$ étant deux médianes, on a $AH = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AA' = \frac{1}{2} HA'$. Le point H partage donc bien AA' en deux parties dont l'une est moitié de l'autre.

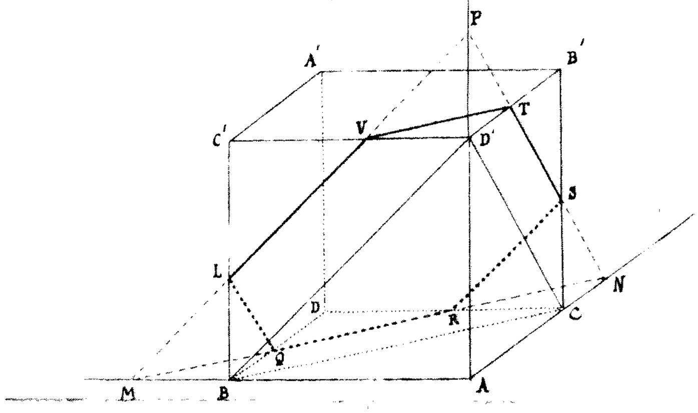
Il est maintenant facile d'étudier comment varie la forme de la section. Le côté du cube étant désigné par a, sa diagonale est égale à $a\sqrt{3}$.

1° Supposons d'abord que le point de la diagonale par lequel on élève le plan perpendiculaire soit situé entre le point A et le point H, c'est-à-dire que l'on ait $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Soit MNP la section ainsi déterminée. Le plan MNP, perpendiculaire à AA', est parallèle au plan BCD.

Par conséquent dans le tétraèdre $ABCD'$ le plan MNP est un plan mené parallèlement à la base BCD'. Donc, en vertu d'un théorème connu, la section MNP est un polygone semblable à celui de la base, c'est-à-dire un triangle équilatéral.

Ainsi, quand on a $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral.

2° _ Supposons maintenant que le point par lequel on élève le plan perpendiculaire soit situé entre le point H et le point O. Je dis que la section est un hexagone (figure 2)



En effet, si l'on suppose prolongées les faces du trièdre A, le plan perpendiculaire, en les rencontrant, détermine une section MNP qui est, comme précédemment, un triangle équilatéral. Mais ce triangle équilatéral est maintenant coupé suivant les droites LQ, RS, VT, par trois faces du cube. La section est donc un hexagone. Reste à déterminer la forme particulière de cet hexagone. D'abord, il est évident que les triangles VPT, LQM, RSN sont équilatéraux. En effet, considérons VPT par exemple : les droites VT, MN, intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles ; le triangle VPT est donc semblable à MNP, et par suite équilatéral. _ De plus, il est facile de voir que ces trois triangles équilatéraux sont égaux. Comparons en effet LQM et RSN, par exemple. On a

$$\frac{RN}{RQ} = \frac{RC}{RD} = \frac{QB}{QD} = \frac{QM}{RQ}$$

d'où $\frac{RN}{RQ} = \frac{QM}{RQ}$ ou $RN = QM$

et par suite les triangles LQM, RSN, ayant leurs côtés égaux, sont égaux.

On voit dès lors que l'hexagone $LVTSRQ$ n'est autre chose que la figure obtenue en détachant d'un triangle équilatéral trois triangles équilatéraux égaux. De là résultent diverses conséquences : 1° les angles de l'hexagone sont égaux à 120° ; 2° les côtés non consécutifs de l'hexagone sont égaux trois à trois ; 3° l'hexagone est circonscriptible. Cette dernière conséquence se démontrerait facilement.

Enfin, je dis que le périmètre de la section est constant. En effet, ce périmètre est égal à $3QR + 3RS$, ou $3(QR+RS)$, ou $3(QR+RN)$ ou enfin $3\,QN$. Mais si l'on remarque qu'on a $QN = BC = a\sqrt{2}$, on voit que le périmètre est égal à $3a\sqrt{2}$ et, par suite, constant.

A mesure que le plan perpendiculaire s'éloigne de sa position primitive BCD', la ligne MN s'éloigne de BC. Mais à mesure que MN s'éloigne de BC, QR diminue et RN augmente. Il arrivera donc un moment où l'on aura $QR = RN$, et par conséquent $QR = RS$. La section sera alors un hexagone régulier et les points L, Q, R, S, T, V seront les milieux des côtés du cube. Les droites VR, TQ, LS, joignant les milieux de côtés opposés du cube, passent par le centre de ce solide. Donc, quand le plan perpendiculaire est élevé au centre O du cube, la section est un hexagone régulier.

On voit donc, en résumé, que lorsque d est compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, la section est un hexagone, qui tend à devenir régulier à mesure que d augmente, et qui devient régulier pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Le plan perpendiculaire dépassant le point O, les mêmes circonstances se présenteront en sens inverse ; l'hexagone tendra à devenir un triangle équilatéral.

La discussion toute entière se résume donc ainsi : Si d est inférieur à $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral ;

Si d est compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, la section est un hexagone ;

Si d est compris entre $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ et $a\sqrt{3}$, la section est encore un triangle équilatéral.

II.

1° – Supposons d'abord que l'on ait $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$. La section est alors un triangle équilatéral MNP (figure 1), et l'on a

$$\frac{MNP}{BCD} = \frac{d^2}{\overline{AH}^2} = \frac{3d^2}{a^2}$$

Mais BCD est un triangle équilatéral dont le côté est $a\sqrt{2}$ et par conséquent la surface $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. On a donc

$$\frac{2MNP}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3d^2}{a^2} \quad \text{d'où} \quad MNP = \frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$$

On voit que la surface du triangle ne dépend pas du côté du cube et qu'elle est proportionnelle au carré de d.

2° – Supposons maintenant d compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. La section est alors un hexagone dont nous désignerons la surface par S. On a (figure 2)

$$S = MNP - 3RSN = \frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MN}^2 - 3\overline{RN}^2)$$

Calculons séparément MN et RN. On a d'abord

$$\frac{MN}{BC} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{a}$$

d'où, en remplaçant BC par $a\sqrt{2}$,

$MN = d\sqrt{2}\sqrt{3}$ et $\overline{MN}^2 = 6d^2$. D'autre part, on a

$$RN = MN - MR = MN - BC = MN - a\sqrt{2} = d\sqrt{2}\sqrt{3} - a\sqrt{2}$$

d'où $\overline{RN}^2 = 6d^2 + 2a^2 - 4ad\sqrt{3}$

Substituant à MN et à RN, dans l'expression de S, les valeurs trouvées, il vient $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2)$

Pour étudier les variations de S, il suffit d'étudier les variations du trinôme $-(2d^2 - 2a\sqrt{3}\,d + a^2)$

On sait que le trinôme du second degré passe par un minimum pour $x = -\frac{B}{2A}$. Donc S passera par un maximum pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Le maximum de S aura donc lieu quand la section passera par le centre du cube, c'est-à-dire quand l'hexagone sera régulier. Si l'on substitue à d la valeur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression de S, on trouve que la surface de l'hexagone est alors $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. C'est ce que l'on pouvait trouver directement en calculant la surface d'un hexagone régulier dont le côté est $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dès lors, on voit comment varie la surface

de la section : elle croît depuis le point A, où elle est nulle, jusqu'au point O où elle atteint son maximum $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. A partir de ce point elle décroît et reprend en ordre inverse les mêmes valeurs.

On pourrait trouver le maximum de S par d'autres méthodes. D'abord, remarquons que le maximum de S a lieu en même temps que celui de la quantité $2ad\sqrt{3} - 2d^2$, ou, en supprimant le facteur constant 2, $d(a\sqrt{3} - d)$. Or, la somme de ces deux facteurs étant constante, le maximum de leur produit a lieu quand ils sont égaux, c'est-à-dire quand on a

$$d = a\sqrt{3} - d, \quad \text{ou} \quad d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Enfin, on peut trouver directement le maximum en s'appuyant sur la remarque précédemment faite que la somme de deux côtés consécutifs est constante. Désignons par x et y les côtés QR et RS par exemple. La surface S est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MN}^2 - 3\overline{RN}^2)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+2y)^2 - 3y^2]$ ou enfin $\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+y)^2 + 2xy]$. Or la quantité $x + y$ est constante et le produit $2xy$ sera maximum quand on aura $x = y$. Le maximum aura donc lieu lorsque l'hexagone sera régulier.

(Ont résolu la même question MM: A. Leinekugel, lycée de Douai ; L. Mercadier, lycée de Constantine ; Ch. Mirguet, collège Chaptal ; M. Rouand, collège de Béziers)

N.B. Il s'agit du Concours Général de Philosophie, lequel comprenait une épreuve de mathématiques. Les meilleurs élèves choisissaient la section littéraire, les "humanistes" ayant à cette époque bien plus de prestige que les disciplines scientifiques. Aussi, peut-on penser que le niveau des épreuves en section mathématique n'était pas beaucoup plus élevé.

PERIODIQUE ?
Les curieuses définitions des manuels

Une fonction périodique, dites-vous? Ce n'est pas le grand théorème de Fermat! (idiotisme en usage chez les mathématiciens, et dont un équivalent serait: "Ce n'est pas le Pérou"). D'ailleurs, les manuels ne s'attardent pas trop sur le sujet:

1) . ALEPH 1 (p.10) : la fonction F est périodique si, et seulement si, il existe un réel t tel que, pour tout x de $\mathcal{D}_F$, $\overrightarrow{F(x+t)} = \overrightarrow{F(x)}$. Le réel t est une période de F, la période de F étant sa plus petite période positive non nulle.

2) . Queysanne Revuz (p.87) : Une fonction f, de domaine $\mathcal{D}$, est périodique s'il existe un nombre $P > 0$ tel que :

$(\forall x \in D),\ f(x+P) = f(x)$

On dit que P est une période de f.

On montre que kP, $k \in \mathbb{N}^*$ l'est aussi.

Lorsque nous parlons d'une fonction f, il s'agira toujours de la plus petite période (strictement positive).

3) . Col. DONEDDU. Analyse T2. (p.31) : Une fonction f est dite périodique s'il existe un nombre a tel que :

$\forall x,\ f(x+a) = f(x)$

le nombre a est une période apparente.

La période p est la plus petite période positive apparente.

4) . Condamine et Vissio: Une application f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est dite
(p.78)
périodique et de période P, si P est le plus petit nombre réel strictement positif, tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+P) = f(x)$$

5) . Lelong Ferrand: Soit G un groupe abélien, noté +, et f une appli-
(P.339)
cation de G dans un ensemble quelconque. On dit que f admet l'élément a de G pour période, si pour tout $z \in G$, on a :

$$f(z+a) = f(z)$$

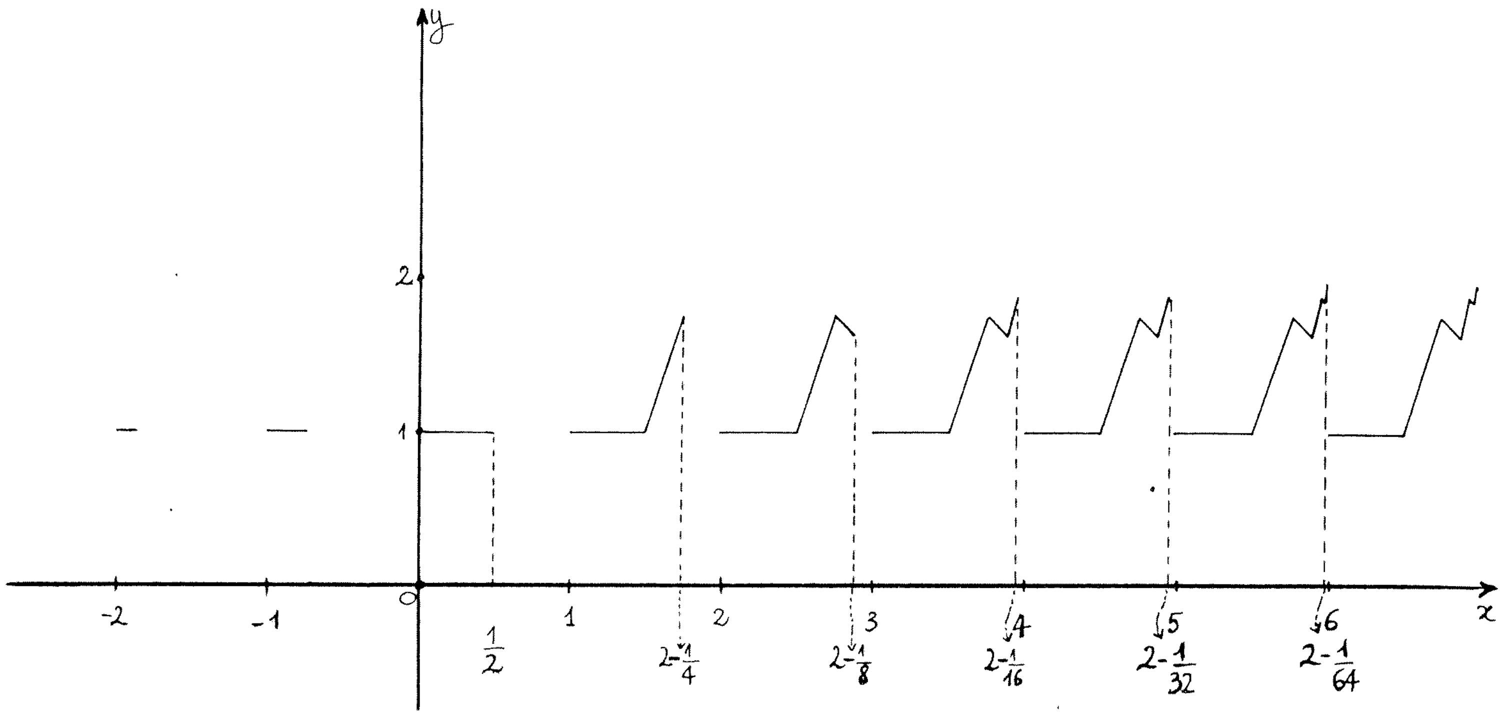
Une fonction f admettant une période non nulle a est dite périodique, de période a.

Indiquons tout de suite notre admiration devant les précautions prises dans 4) et dans 5). Seulement, selon ces définitions en béton, $x \longmapsto \operatorname{tg} x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x-E(x)}$ ne sont pas périodiques :

4) remarquera que ce ne sont pas des "applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$".

5) objectera que ces fonctions ne sont pas "définies sur un groupe"!

Mais, pour 1), 2), 3), voici le pavé à digérer :



Ce monstre a un comportement imprévisible, dans la pratique. Voici comment il est construit :

* si $x \leqslant 0$, f est définie sur les intervalles suivants, de droite à gauche :
$\left[-1, -1+\frac{1}{4}\right], \left[-2, -2+\frac{1}{8}\right], \left[-3, -3+\frac{1}{16}\right]$ ----

Elle y vaut constamment 1.

* si $x \geqslant 0$, f est définie sur les intervalles suivants, de gauche à droite cette fois :

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[1, 2-\frac{1}{4}\right] \left[2, 3-\frac{1}{8}\right], \left[3, 4-\frac{1}{16}\right] \text{ ----}$$

Chacun de ces intervalles est obtenu en translatant le précédent de 1 et en prolongeant le translaté de la moitié de ce qui lui manque pour remplir le segment $[n, n+1]$. Si on appelle I_n cet intervalle, f y est ainsi définie :

- sur le translaté de I_{n-1}, f est la copie de ce qu'elle était sur I_{n-1}
- sur la partie "nouvelle" de I_n, f est affine et a pour pente le nième chiffre du développement décimal de π, auquel on attribue le signe - si n est pair.

L'observation du dessin vaut d'ailleurs mieux que cette longue explication! Elle permet également de constater que pour 1), 2), 3), et pour bien d'autres, 1 est une période de f.

Le lecteur se convaincra vite que la seule façon de rejeter cet indigeste pavé est d'adopter l'une des définitions suivantes:

1)' f est périodique s'il existe un réel $P \neq 0$ tel que :

$$\forall x \in Df \quad , \quad f(x+P) = f(x) \quad \text{et} \quad f(x-P) = f(x)$$

variante

2)' (déductible de 1)', mais ce n'est pas un crime)

$$\forall x \in Df, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kP) = f(x)$$

3)' Soit $\mathcal{T}_P$ la translation : $x \mapsto x+P$

f est périodique de période P si:

$f \circ \mathcal{T}_P = f$ pour un réel $P \neq 0$

Chacune de ces trois définitions a pour conséquence l'invariance de Df par une translation de P. Le non respect de cette invariance était précisément la faille par laquelle 1), 2), 3) ont laissé pénétrer le monstre!

Ne croyez pas que la périodicité s'en trouve terrassée pour autant:

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et constante. Alors tout réel non nul est période de f. Mérite-t-elle vraiment le qualificatif de périodique ?

- Soit $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Tout rationnel non nul en est une période !

Ces deux exemples font réexaminer les définitions 1), 2), 3), 4). Toutes parlent, comme allant de soi, d'une "plus petite période positive non nulle". Une innocente fonction constante se joue de tant de suffisance.

En fait, il est facile de montrer que l'ensemble des réels P définis comme période par 1)' ou 3)' forme un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ pourvu qu'on lui adjoigne 0. Or il existe deux types de tels sous-groupes: les sous-groupes denses dans $\mathbb{R}$ (par exemple $\mathbb{Q}$) et les sous-groupes discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$).

On comprend que si le groupe des périodes ressort du premier type, il est difficile de trouver une "plus petite période positive". Ce n'est que s'il est du deuxième type que cette notion a un sens.

Heureusement, une bonne partie de nos fonctions usuelles se range dans ce "bon cas", en vertu du résultat suivant:

Si f est définie sur $\mathbb{R}$, continue non constante, alors son groupe de période est discret. (il se réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).

Ne faudrait-il pas réserver le vocable "fonction périodique" à celles dont le groupe de périodes est discret ?

Eric CHANEY

N.B. Le petit sourire malicieux de Jean Lefort, lorsqu'il entend "périodique", m'a mis sur la piste du monstre. Un problème posé en TC, communiqué à l'Ouvert par Roger Di Costanzo, professeur au Lycée de Villeneuve-sur-Lot traite du problème de "la plus petite période". En voici l'énoncé :

1) Montrer que, quels que soient $a > 0$ et $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$na \leqslant x < (n+1)a$$

2) Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, différent de $\{0\}$. Montrer que $H \cap \mathbb{R}^*$ admet une borne inférieure $a \geqslant 0$

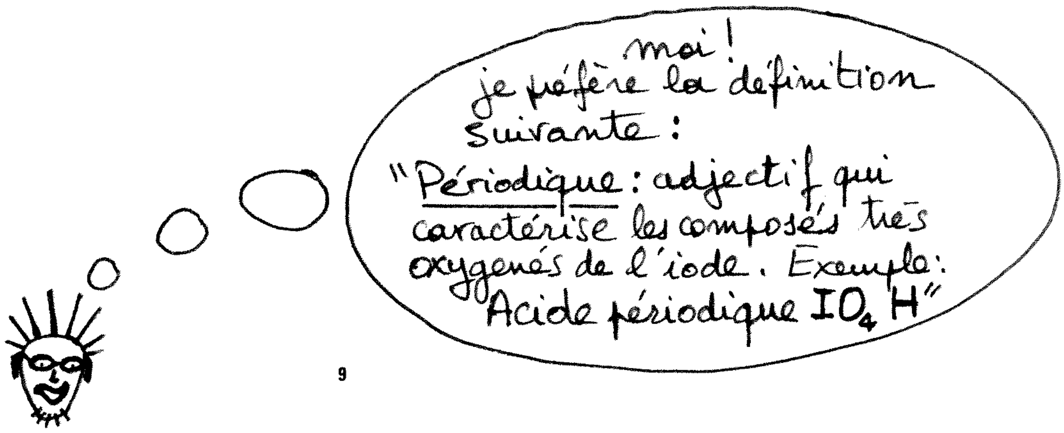
3) <u>Si $a = 0$</u>, montrer que quels que soient $y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $x \in H$ tel que : $y - \varepsilon \leqslant x < y + \varepsilon$
(on dit alors que H est dense dans $\mathbb{R}$)

4) <u>Si $a > 0$</u>, montrer alors que $H = a\mathbb{Z}$. On montrera d'abord que $a \in H$, puis on utilisera 1)

5) En déduire que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, est soit du type $a\mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$), soit dense dans $\mathbb{R}$ (voir 3))

6) Soit f définie sur $\mathbb{R}$. On dit que t est période de f si $f(x+t) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\mathcal{T}$, ensemble des périodes de f, est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

7) On dit que f est périodique si $\mathcal{T} \neq \{0\}$. Montrer que si f est périodique, continue sur $\mathbb{R}$, si son groupe de période est dense dans $\mathbb{R}$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
[Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(o)$]
En déduire le théorème: Une fonction continue, périodique, non constante, admet une plus petite période strictement positive, appelée la période de f.



THEME ET VARIATION

Les étudiants connaissent notre goût pour la géométrie : ils passent souvent dans notre bureau, à la recherche d'une "petite solution géométrique". Voici un exemple, le problème de Bertrand, qui nous a paru instructif, tant par la variété des méthodes d'attaque (il existe bien d'autres solutions que celles qui suivent) que par la richesse des prolongements (vous imaginerez facilement maints problèmes de construction et d'extremeum).

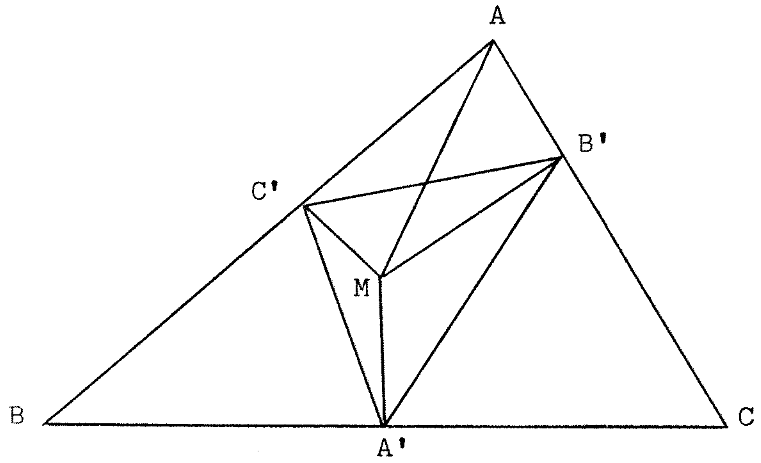
Lisez l'énoncé, sous la forme même où il fut proposé aux étudiants, tracez la figure et au lieu de vous précipiter sur la solution "naturelle" : déterminants et analytique, méditez...

PROBLEME DE BERTRAND

ON DESIGNE PAR Γ LE CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE DONNE ABC. SOIT M UN POINT SE PROJETANT ORTHOGONALEMENT EN A'B'C' SUR LES COTES DU TRIANGLE. ON DESIGNE PAR S(M) L'AIRE ALGEBRIQUE DU TRIANGLE A'B'C' (son signe est déterminé par la position du triangle par rapport à son bord, parcouru dans le sens A'B'C' : triangle vu à gauche signe + , à droite signe −). DETERMINER S(M). EN DEDUIRE LE THEOREME DE LA DROITE DE SIMSON.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans toute la suite nous supposerons l'aire algébrique s du triangle ABC positive. A'B'C' sera appelé triangle podaire de M ("podos", pied). Si M est sur l'une des droites AB,BC,CA,S(M) est nulle si et seulement si M est en A,B, ou C (remarque I)



SOLUTION I

Nous supposons que M n'est sur aucune des droites AB,BC,CA .

Le quadrilatère AB'MC' , dont les angles B',C' sont droits est inscriptible dans le cercle de diamètre MA : l'angle $\widehat{B'MC'}$ a même sinus que l'angle $\widehat{BAC}$ ou A , donc :

$$MA = \frac{B'C'}{\sin(\widehat{B'MC'})} = \frac{B'C'}{\sin A}$$

R étant le rayon du cercle Γ circonscrit au triangle ABC , de côtés a,b,c, on a $\sin A = \frac{a}{2R}$ d'où :

$$B'C' = \frac{a}{2R} MA .$$

Les côtés du triangle podaire de M s'expriment facilement en fonction de MA,MB,MC :

$$a' = \frac{a}{2R} MA \quad b' = \frac{b}{2R} MB \quad c' = \frac{c}{2R} MC$$

(il est immédiat que ces résultats restent valables si M est sur la droite

AB , ou BC , ou CA) .

La formule de Héron (cf renvoi 1) donne la surface arithmétique du triangle podaire

$$|S(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{(a'+b'+c')(b'+c'-a')(c'+a'-b')(a'+b'-c')}$$

$$|S(M)| = \frac{1}{16R^2}\sqrt{(aMA+bMB+cMC)(bMB+cMC-aMA)(cMC+aMA-bMB)(aMA+bMB-cMC)} .$$

Droite de Simson.

Les points ABC jouant le même rôle nous pouvons supposer que a' est supérieur ou égal à b' et c' . Pour que les points A'B'C' soient alignés il faut et il suffit que le plus grand côté a' du triangle A'B'C' soit égal à la somme des deux autres côtés : aMA = bMB+cMC . Cette condition est remplie si, et seulement si, M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC d'après le théorème de Ptolémée(cf renvoi 2) et la remarque 1. Il existe une droite passant par A'B'C' , dite droite de Simson de M , si et seulement si M est sur le cercle circonscrit ou triangle ABC .

Complément.

Déterminer M pour que son triangle podaire soit semblable à un triangle donné est tout aussi simple : les rapports $\frac{MB}{MA}$, $\frac{MC}{MA}$ sont connus.

SOLUTION 2.

Utilisons l'inversion I de pôle A , de puissance k = hMA , h étant la distance de A à la droite de BC . M étant supposé distinct de A a un inverse M" , B et C ont pour inverses B",C" . L'inversion I fait passer du triangle MBC à un triangle M"B"C" $\boxed{\text{égal}}$ au triangle podaire A'B'C' de M . En effet :

$$B''C'' = BC \times \frac{k}{AB.AC} = a\,\frac{hMA}{bc} = \frac{aMA}{2R} = B'C'$$

$$B''M'' = BM \times \frac{k}{ABAM} = MB\,\frac{hMA}{CMA} = \frac{h}{c}\,MB = \frac{bh}{2Rh}\,MB = \frac{bMB}{2R} = C'A'$$

$$C''M'' = CM \times \frac{k}{ACAM} = MC\,\frac{hMA}{bMA} = \frac{h}{b}\,MC = \frac{ch}{2Rh}\,MC = \frac{cMC}{2R} = A'B' \;.$$

Soit d la distance de M'' à la droite $B''C''$, comme les triangles $A'B'C'$, $M''B''C''$ sont égaux :

$$|S(M)| = \frac{1}{2}\,B''C'' \times d = \frac{1}{2}\,a\,\frac{MA}{2R}\,d = a\,\frac{MA}{4R}\,d \;.$$

Mais d, distance de M'' à la droite $B''C''$, inverse du cercle Γ circonscrit du triangle ABC, s'exprime en fonction de P, puissance de M par rapport à Γ :

$$d = \frac{|kP|}{2R \times AM^2} \quad \text{(cf renvoi 3)}$$

d'où

$$|S(M)| = \frac{aMA}{4R}\,\frac{hMA\,|P|}{2RAM^2} = \frac{ah}{2}\,\frac{|P|}{4R^2} = \frac{s\,|P|}{4R^2}$$

$$\boxed{|S(M)| = \frac{s\,|P|}{4R^2}}$$

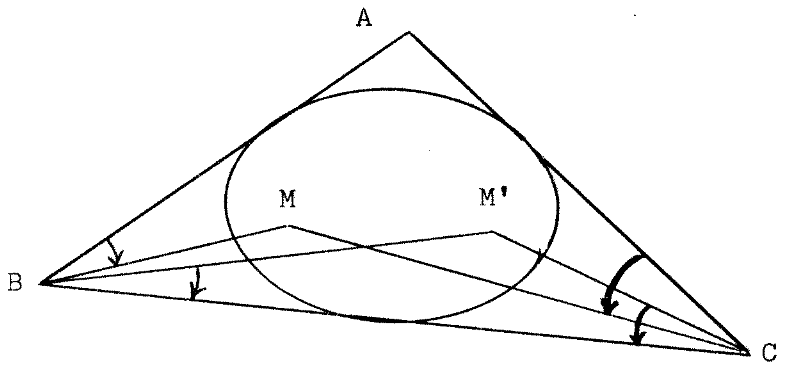
Le résultat est valable même si M est en A puis qu'on peut aussi bien le démontrer en utilisant une inversion de pôle B.

Droite de Simson.

$A'B'C'$ sont alignés si et seulement si $M''B''C''$ le sont, c'est-à-dire si et seulement si $MBCA$ sont cocycliques. Le triangle podaire de M se réduit à une droite (droite de Simson) si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

SOLUTION 3.

Cette solution est moins intéressante en elle-même que par ses prolongements : travaux de Liouville, de Poncelet (polygônes inscrits, circonscrits à une conique donnée).



On sait qu'il existe une conique Ω et une seule de foyer M donné, tangente aux trois droites AB, BC, CA. $A'B'C'$ étant les projections orthogonales de M sur les droites précédentes, supposons M sur aucune de ces droites. Alors si $A'B'C'$ sont alignés Ω est la parabole de foyer M, de tangente au sommet $A'B'$, si $A'B'C'$ ne sont pas alignés Ω est la conique à centre de foyer M, de cercle principal Γ, cercle circonscrit au triangle ABC.

Autrement dit, si M n'est pas en $A, B,$ ou C, les points $A'B'C'$ sont alignés si et seulement si Ω est une parabole (1).

Si d'un point B on mène deux tangentes BA, BC à une conique Ω de foyers M et M', les couples de droites (BA,BC) et (BM,BM') sont isogonaux (théorème de Poncelet) cette propriété est équivalente à : les angles de droites $(BA,BM),(BM',BC)$ sont égaux modulo π. De même les angles $(CA,CM),(CM,CB)$ sont égaux modulo π.

Pour que Ω soit une parabole il faut et suffit que les droites BM', CM' aient même direction. Ceci a lieu si et seulement si les angles de droites (BA, BM) et (CA, CM) sont égaux modulo π, c.à.d. si et seulement si M est sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC (sauf en ABC). En recoupant avec (1) on voit que A'B'C' sont alignés si et seulement si M est sur Γ.

SOLUTION 4.

Utilisons les coordonnées barycentriques. Pour tout point M du plan ABC il existe un triplet et un seul de nombres réels (u,v,w) tel que :

$$\begin{cases} u+v+w = 1 \\ u\vec{MA} + v\vec{MB} + w\vec{MC} = \vec{O} . \end{cases}$$

Désignons par O et R le centre et le rayon du cercle Γ circonscrit au triangle ABC et calculons la puissance $P = P_\Gamma(M)$ de M par rapport à Γ.

Nous avons

$$\vec{OM} = u\vec{OA} + v\vec{OB} + w\vec{OC}$$

avec

$$R = uR + vR + wR .$$

D'où

$$\vec{OM}^2 = (u^2+v^2+w^2)R^2 + 2(vw\vec{OB}\vec{OC} + wu\vec{OC}\vec{OA} + uv\vec{OA}.\vec{OB})$$

$$R^2 = (u^2+v^2+w^2)R^2 + 2(vw\ R^2 + wu\ R^2 + uv\ R^2) .$$

Et

$$P = \vec{OM}^2 - R^2 = 2vw(\vec{OB}\vec{OC} - R^2) + 2wu(\vec{OC}\vec{OA} - R^2) + 2uv(\vec{OA}\vec{OB} - R^2) .$$

Mais, en partant de $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB}$ nous avons $\vec{BC}.\vec{BC} = 2(R^2 - \vec{OB}\vec{OC})$ $2(\vec{OB}\vec{OC} - R^2) = -a^2$, de même $2(\vec{OC}\vec{OA} - R^2) = -b^2$, $2(\vec{OA}\vec{OB} - R^2) = -c^2$.

Alors

$$\boxed{P = -a^2vw - b^2wu - c^2uv}$$

Remarque 2

Nous pouvons aussi écrire

$$P = \vec{MO}^2 - \vec{AO}^2 = (\vec{MO} + \vec{AO})\vec{MA} = (2\vec{MO} + \vec{AM})\vec{MA} = 2\vec{MO}\vec{MA} - \vec{MA}^2$$

ainsi que les formules analogues $P = 2\vec{MO}\vec{MB} - \vec{MB}^2$ $P = 2\vec{MO}\vec{MC} - \vec{MC}^2$

donc $$P = uP + vP + wP = 2\vec{MO}(\vec{O}) - u\vec{MA}^2 - v\vec{MB}^2 - w\vec{MC}^2$$

$$\boxed{P = -uMA^2 - vMB^2 - wMC^2}$$

Ainsi P s'exprime simplement en fonction de $u,v,w,$ et des carrés des distances du point M aux sommets du triangle ABC. La formule s'étend aisément au cas de quatre points $ABCD$ non coplanaires, Q désignant la puissance de M par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$ et $u,v,w,t,$ vérifiant

$$\begin{cases} u + v + w + t = 1 \\ u\vec{MA} + v\vec{MB} + w\vec{MC} + t\vec{MD} = \vec{O}\,. \end{cases}$$

Nous obtenons, en partant de $Q = 2\vec{MO}\vec{MA} - \vec{MA}^2$:

$$\boxed{Q = -uMA^2 - vMB^2 - wMC^2 - tMD^2}$$

et en partant de $Q = \vec{OM}^2 - R^2 = (u\vec{OA} + v\vec{OB} + w\vec{OC} + t\vec{OD})^2 - (uR + vR + wR + tR)^2$

nous arrivons à :

$$\boxed{Q = -uvAB^2 - vwBC^2 - wtCD^2 - tuDA^2 - uwAC^2 - vtBD^2 - wtCD^2 - tuDA^2}\,.$$

Remarque 3

$$\begin{cases} u + v + w = 1 & \Rightarrow \quad \vec{AM} = v\vec{AB} + w\vec{AC} \\ u\vec{MA} + v\vec{MB} + w\vec{MC} = \vec{O}\,. \end{cases}$$

En formant $\vec{AM} \cdot \vec{AM}$:

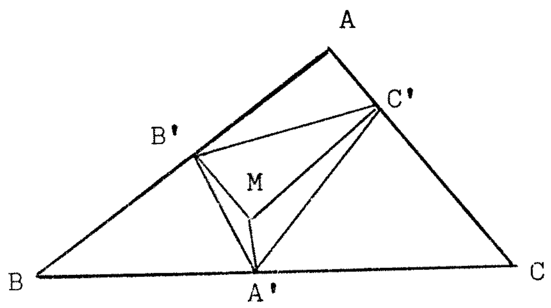
$$AM^2 = v^2c^2 + w^2b^2 + 2vw\vec{AB}\vec{AC} \quad \text{or} \quad a^2 - b^2 - c^2 = -2\vec{AB}\vec{AC}$$

$$\boxed{AM^2 = w^2b^2 + vw(-a^2+b^2+c^2) + v^2c^2}$$

$$AM^2 = (v+w)(b^2w+c^2v) - a^2vw = (1-u)(b^2w+c^2v) = b^2w+c^2v - I \ .$$

Cette formule et celles obtenues par permutation circulaire donnent u,v,w en fonction de AM^2, BM^2, CM^2 (cf renvoi 4).

<u>Calcul de l'aire algébrique</u> $S(M)$ <u>du triangle podaire</u> $A'B'C'$



Soit α le nombre relatif qui a pour valeur absolue MA' et pour signe + si M et A sont du même côté de BC , − dans le cas contraire. Définissons de même β et γ en remplaçant A' et A par B' et B , puis C' et C . L'aire algébrique s du triangle ABC a été supposée positive, c'est la somme des aires algébriques des triangles BMC , CMA , AMB :

$$\frac{1}{2}a\alpha + \frac{1}{2}b\beta + \frac{1}{2}c\gamma = 1 \ .$$

D'autre part $\sin(MB',MC') = \sin A$ (cf solution 1). L'aire algébrique du triangle $MB'C'$ vaut $\frac{1}{2}\beta\gamma\sin A = \frac{1}{4R}a\beta\gamma$, les aires algébriques des triangles

MC'A' , MA'B' valent $\frac{1}{4R}\, b\gamma\alpha$, $\frac{1}{4R}\, c\,\alpha\,\beta$ et la somme de ces 3 aires donne l'aire algébrique du triangle podaire A'B'C'

$$\boxed{S(M) = \frac{1}{4R}\,(a\,\beta\gamma + b\,\gamma\alpha + c\,\alpha\,\beta)}\ .$$

Les aires algébriques $\frac{1}{2}\,a\,\alpha$, $\frac{1}{2}\,b\,\beta$, $\frac{1}{2}\,c\,\gamma$ des triangles BMC , CMA , AMD sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques u,v,w de M (cf renvoi 5) et ont pour somme s tandis que $u+v+w = 1$, donc :

$$us = \frac{1}{2}\,a\,\alpha \quad vs = \frac{1}{2}\,b\,\beta \quad ws = \frac{1}{2}\,c\,\gamma$$

d'où $vw\, s^2 = \frac{1}{4}\, bc\,\beta\gamma = \frac{abc}{4a}\,\beta\gamma = \frac{Rs}{a}\,\beta\gamma$ car $s = \frac{abc}{4R}$

$$\beta\gamma = \frac{s}{R}\, a\, vw\,, \text{ de même } \gamma\alpha = \frac{s}{R}\, b\, w\, u\,,\ a\,\beta = \frac{s}{R}\, c\, uv\,.$$

En reportant dans $S(M) = \frac{1}{4R}\,(a\,\beta\gamma + b\,\gamma\,\alpha + c\,\alpha\,\beta)$ nous obtenons :

$$S(M) = \frac{s}{4R^2}\,(a^2vw + b^2wu + c^2uv)$$

c.à.d.

$$\boxed{S(M) = \frac{s(-P)}{4R^2}}\ .$$

Droite de Simson.

L'aire $S(M)$ du triangle podaire A'B'C' est nulle si et seulement si $P = 0$, c.à.d. si et seulement si M est sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC . Pour qu'il existe une droite passant par A'B'C' (droite de Simson) il faut et il suffit que M soit sur Γ .

De plus l'aire algébrique $S(M)$ du triangle podaire de M est positive si et seulement si M est intérieur à Γ et la plus grande valeur est atteinte pour M en O , centre de Γ . Elle vaut :

$$S(O) = \frac{s(R^2)}{4R^2} = \frac{s}{4}\,.$$

Les solutions suivantes répondent plus particulièrement aux étudiants ayant trouvé l'expression $S(M) = \frac{1}{4R}(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta)$ mais pas la liaison avec la puissance P de M par rapport au cercle Γ circonscrit au triangle ABC. Pour arriver à la droite de Simson ils souhaitaient démontrer sans trop de calculs que $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$ détermine le cercle Γ. Visiblement $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$ détermine une conique Ω passant par A, B, C (pour A par exemple on a $a\beta = \gamma = 0$ donc $a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$). Comment trouver deux autres points communs à Γ et Ω ?

SOLUTION 5.

La bissectrice intérieure Δ de l'angle A du triangle ABC passe par I, centre du cercle inscrit (rayon r) et par I_a, centre d'un cercle exinscrit (rayon r_a). Les angles $\widehat{IBI_a}$ et $\widehat{ICI_a}$ étant droits, le cercle de diamètre IJ passe par B et C. Son centre J est sur Δ et sur la médiatrice de BC, donc <u>sur le cercle Γ</u> circonscrit au triangle ABC. Pour I on a $\alpha = \beta = \gamma = r$, pour $I_a : \alpha = -r_a$, $\beta = \gamma = r_a$ et pour leur milieu J :

$$\alpha_J = \frac{r-r_a}{2} \qquad \beta_J = \gamma_J = \frac{r+r_a}{2}.$$

Pour montrer que J est sur la conique

$\Omega : a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$, calculons $q = a\beta_J\gamma_J + b\gamma_J\alpha_J + c\alpha_J\beta_J$:

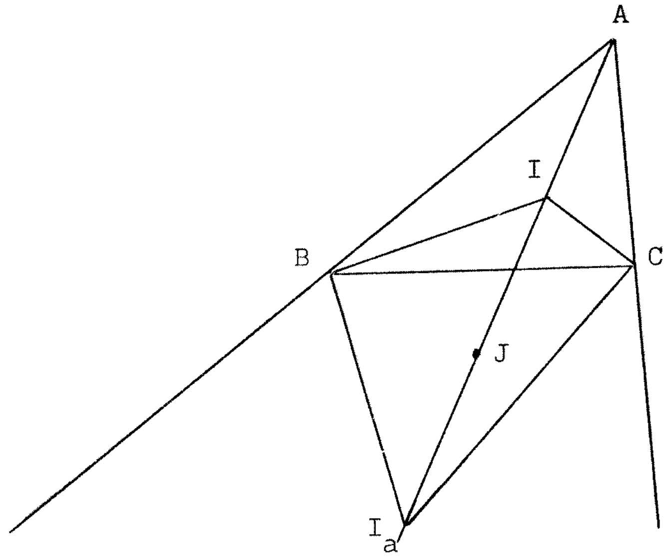
$$q = a\beta_J^2 + (b+0)\alpha_J\beta_J = \beta_J[a\beta_J + (b+c)\alpha_J]$$

$$q = \beta_J[\tfrac{a}{2}(r+r_a) + (\tfrac{b+c}{2})(r-r_a)]$$

$$q = \beta_J[\frac{a+b+c}{2}r - \frac{b+c-a}{2}r_a]$$

$$q = \beta_J(s-s) = 0$$

q étant nul J <u>est sur Ω</u>. De même Ω passe par K, milieu de II_b , et L , milieu de II_c , I_b et I_c étant centre du cercle exinscrit dans l'angle B , l'angle C . La conique Ω et le cercle Γ ont ainsi 5 points communs ABCJK donc Ω est le cercle Γ lui-même. D'autre part I est l'orthocentre du triangle $I_aI_bI_c$ donc le cercle Γ circonscrit au triangle ABC est le <u>cercle d'Euler</u> du triangle $I_aI_bI_c$.



SOLUTION 6.

Nous allons montrer que la conique $\Omega : a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta = 0$ et le cercle Γ ont deux points communs à l'infini. Les points à l'infini du cercle Γ sont ceux de n'importe quel cercle du plan, par exemple le cercle (A) de centre A , de rayon nul, caractérisé par $AM^2 = 0$. Il est aisé de calculer AM , soit d'après la remarque 3, soit en utilisant le fait que $B'C' = \frac{aMA}{2R}$ (cf solution 1)

$$\vec{B'C'} = \vec{MC'} - \vec{MB'} \Rightarrow \vec{B'C'}^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos A$$

$$AM^2 = 0 \text{ équivaut donc à } \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos A = 0 .$$

Posons $\gamma = t\beta$, alors

$$t^2 + 2t\cos A + 1 = 0$$

L'équation de la droite de l'infini L du plan est $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.
Les deux points à l'infini du cercle (A) sont les points de cette droite vérifiant $\gamma = t\beta$ avec $t^2 + 2t\cos A + 1 = 0$.

La conique Ω a pour équation

$$a\beta\gamma + \alpha(b\gamma + c\beta) = 0 \Leftrightarrow -a^2\beta\gamma - a\alpha(b\gamma + c\beta) = 0 .$$

Coupons-la par la droite $L : -a\alpha = b\beta + c\gamma$ et posons $\gamma = \beta t$:

$$-a^2t + (b+ct)(bt+c) = 0$$
$$bct^2 + (b^2+c^2-a^2)t+bc = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 2t\cos A + 1 = 0 \quad \text{car} \quad 2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 .$$

Les points à l'infini de Ω sont les points de L vérifiant $\gamma = t\beta$, t étant solution de $t^2 + 2t\cos A + 1 = 0$: ce sont les points à l'infini du cercle (A), donc du cercle Γ.

La conique Ω et le cercle Γ ont ainsi 5 points communs, deux à l'infini et les 3 points ABC, donc Ω est le cercle Γ lui-même.

Renvoi 1.

La formule $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donnant l'aire s d'un triangle en fonction des côtés a,b,c de somme $2p$ est attribuée à Héron d'Alexandrie (2e siècle après J.C.).

Renvoi 2.

Théorème de Ptolémée (astronome, géographe, mathématicien égyption 2e siècle après J.C.)

cf Géométrie classe de mathématiques par J. Commeau Masson éditeur. On y trouvera p. 327 la démonstration des résultats suivants :

Soient A,B,C,D quatre points quelconques ; associons-leur les nombres $\alpha' = DA.BC, \beta' = DB.CA, \gamma' = DC.AB$.

1° Chacun de ces nombres est inférieur ou égal à la somme des deux autres ;

2° Pour que les quatre points soient cocycliques, il faut et il suffit que l'un de ces nombres soit la somme des deux autres ;

3° Si, par exemple, $\beta' = \alpha' + \gamma'$, les quatre points se succèdent, dans l'ordre A,B,C,D sur un cercle.

Convenons de dire que quatre points distincts A,B,C,D pris dans cet ordre forment un quadrangle convexe si les segments AC et BD ont un point commun ; AC,BD sont les diagonales et (AB,CD),(AC,DB) les couples de côtés opposés du quadrangle. Les propriétés 2° et 3° nous permettent d'énoncer :

<u>THEOREME DE PTOLEMEE.</u>- Pour qu'un quadrangle convexe soit inscriptible, il faut et il suffit que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.

Renvoi 3.

L'inversion de pôle O de puissance k transforme un cercle C de rayon R en une droite D . M étant distinct de O comparer la puissance p de M par rapport à C et la distance d de l'inverse M' de M à D.

Le repère orthonormé est choisi de telle sorte que l'équation de C soit :

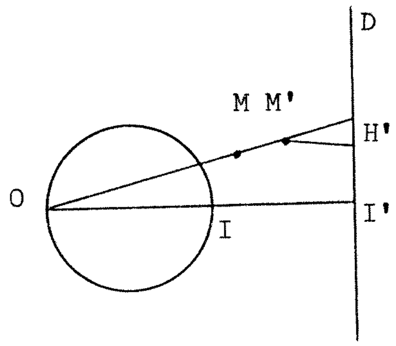
$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$$

$M(x,y)$ a pour inverse $M'(x',y')$ qui se projette orthogonalement en H' sur D

$$\overline{M'H'} = \frac{k}{2R} - x' = k\left[\frac{1}{2R} - \frac{x}{x^2+y^2}\right] = k\,\frac{x^2+y^2-2Rx}{2R(x^2+y^2)} = \frac{k\,P}{2ROM^2}$$

d'où

$$\boxed{d = \frac{|kP|}{2ROM^2}}$$



Renvoi 4.

Les formules

$$MA^2 = vc^2 + wb^2 + P$$
$$MB^2 = wa^2 + uc^2 + P$$
$$MC^2 = ub^2 + va^2 + P$$

donnent :

$$-a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 = 2ub^2c^2 + (-a^2+b^2+c^2)P$$

d'où u, et par permutation circulaire v et w

$$u = \frac{1}{2b^2c^2}\,[-a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 + (-a^2+b^2+c^2)P]\ .$$

On peut aussi exprimer u en fonction des côtés a',b',c' du triangle podaire de M car $aMA = 2Ra'$, $bMB = 2Rb'$, $cMC = 2Rc'$ (cf solution 1)

$$u = \frac{1}{2b^2c^2}\,[4R^2(-a'^2+b'^2+c'^2) + P(-a^2+b^2+c^2)]\ .$$

Renvoi 5.

Les aires algébriques $\frac{1}{2}a\alpha$, $\frac{1}{2}b\beta$, $\frac{1}{2}c\gamma$ des triangles BMC, CMA, AMB sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques u,v,w de M. En effet :

$$\vec{AM} = v\vec{AB} + w\vec{AC} \Rightarrow \vec{AM}\wedge\vec{AM} = v\vec{AB}\wedge\vec{AM} - w\vec{AM}\wedge\vec{AC} \Rightarrow 0 = v(\tfrac{1}{2}c\gamma) - w(\tfrac{1}{2}b\beta)$$

et de même
$$0 = w(\tfrac{1}{2}a\alpha) - u(\tfrac{1}{2}c\gamma)\ .$$

Gilberte PEROT et Jean-Claude SIDLER.

Le clair-obscur au Bac

Extrait d'un sujet de mathématique proposé au baccalauréat Série C à Aix-Marseille en 1980.

N.B. : Tous les instruments de calcul (tables numériques, statistiques, de fonctions trigonométriques, de logarithmes décimaux et népériens; règles et cercles à calcul; calculatrices électroniques) ne sont pas autorisés. Les candidats trouveront, si nécessaire, dans les énoncés des extraits de tables pour les calculs qui leur seront demandés. (Application de la circulaire n° 79.318 du 2 octobre 1979, alinéas 3 et 4).

LA FACE CACHEE de l'Education Nationale

Tous les élèves de CPPN de France sont des jeunes gens "parachutés" dans cette section par suite de leur comportement instable, souvent agressif, et de leurs aptitudes intellectuelles jugées nettement insuffisantes pour poursuivre des études "classiques".

Les classes de CPPN regroupent effectivement bon nombre d'inadaptés sociaux, parfois dangereux, placés là en "attente", jusqu'à l'âge de 16 ans. Cependant l'enquête que j'ai récemment menée au CES Solignac à Strasbourg tend à démontrer qu'un effort efficace y est encore possible.

Ainsi, après avoir assisté à un cours de CPPN 3 dirigé par B.B., entendez Bernard Bemer, j'ai pu constater, à mon grand étonnement, que bon nombre de ses élèves témoignaient de grandes capacités de réflexion et d'un esprit d'analyse souvent très rigoureux quand ils jouaient aux échecs. Encore fallait-il mettre ces facultés en évidence; B.B. l'a fait.

Mais qui est Bernard BEMER ?

B.B. est un enseignant de 32 ans dont la situation administrative est peu commune: titulaire depuis 1975 d'une licence de Sciences Economiques (option Analyse), il est, depuis la rentrée 1980, instituteur suppléant éventuel au CES Solignac après avoir exercé successivement en tant que Maître Auxiliaire (2 ans à Mertzwiller et à Haguenau), surveillant d'externat (1 an à Haute-Pierre puis 3 ans à La Wantzenau) et enfin à nouveau M.A. sur poste d'instituteur spécialisé (2 ans au CES Solignac).

Ce passionné des Echecs a commencé par encourager la pratique de ce jeu au CES La Wantzenau où il a créé, puis animé un club pendant deux années au cours desquelles il a fabriqué un important matériel permettant à ses élèves de mieux visualiser les explications fournies lors du déroulement d'une partie; actuellement, il continue à utiliser ce matériel au CES Solignac.

Paradoxalement, on ne voit B.B. dans des compétitions qu'à partir de la saison 1980-1981. En ce début 1981, il a à son actif 4 victoires pour 2 défaites au championnat individuel d'Alsace des Echecs et, au championnat du Bas-Rhin par équipes de 4, avec 2 anciens élèves et 1 actuellement scolarisé au CES Solignac, il totalise, avec ses coéquipiers quatre victoires pour 1 défaite.

Une autre équipe composée de 3 élèves du CES Solignac (dont 1 ancien élève CPPN) dirigée par son collègue Denis TABELLION participe également à ce championnat par équipe.

La place du jeu d'échecs dans l'enseignement de B.B.

Lorsqu'il arriva, en 1978 au CES Solignac, B.B. doit assurer un service de 21 heures, ainsi réparties: d'abord 4 heures de technologie, puis 5 heures de mathématiques dans 3 classes, et un complément d'une heure dans 2 classes (où l'essentiel des mathématiques était confié à d'autres collègues). (4 + 3x5 + 2x1 = 21). Que pouvait-il faire avec les deux classes qu'il ne voyait qu'une fois par semaine ? C'est là qu'il essaya d'intéresser ses élèves aux Echecs. Le succès fut rapide. Et, avec l'accord de M. GERTNER, principal du CES, il décida de prélever une heure sur cinq, dans chacune de ses trois classes principales pour une initiation échiquéenne.

Aujourd'hui, B.B. consacre 1 ou 2 heures hebdomadaires aux Echecs, dans les 4 classes où il enseigne les mathématiques.

Pour amener ses élèves à jouer aux Echecs, jeu réputé difficile, B.B. cherche d'abord à les motiver. Il leur fait admettre qu'ils ne présentent, de prime abord, aucun handicap logique susceptible de les empêcher de bien jouer aux Echecs. Et si l'un d'entre eux parvient à quelque succès, en compétition, il aura trouvé une chance inespérée de se valoriser dans la société, autrement qu'en acquérant une réputation de truand !

D'autre part, l'absence d'une sanction par une note a l'avantage d'éviter un découragement prématuré; seul le verdict du jeu "échec et mat" intervient et il est toujours accepté. C'est alors que les élèves qui, par leur nature, sont habitués à se battre, vont tout mettre en oeuvre pour progresser afin de gagner la partie suivante. Un élève de CPPN vit, la plupart du temps, en conflit perpétuel, soit avec ses parents, soit avec ses camarades. Les Echecs lui permettent de remplacer le conflit "verbal" et surtout "physique" par un conflit "intellectuel".

J'ouvre ici une parenthèse pour vous parler du conflit "physique". Dans chaque classe de CPPN c'est la loi du plus fort qui prédomine; c'est ainsi que, bien souvent, nous assistons à des agressions. Il est de plus en plus fréquent de voir un élève, même un enseignant, se faire attaquer par un individu porteur d'une arme blanche.

B.B. a su se préserver de ce genre d'agression en transformant, grâce au jeu d'Echecs, le conflit physique en conflit intellectuel. Le but recherché par l'élève est toujours le même: battre, écraser l'adversaire, à la seule différence qu'ici les moyens employés sont nobles .

La méthode d'enseignement de B.B.

Pour les débutants, B.B. n'utilise pas la méthode "coup de poing" en vigueur dans la plupart des cercles d'Echecs, mais une méthode progressive : le jeu se déroule d'abord sans roi, à 4 pions contre 4, puis interviennent progressivement et dans l'ordre croissant de leur importance les fous, cavaliers, tours et enfin dames et rois. Ainsi B.B. fera jouer des parties sans dame et sans roi, le but étant de prendre toutes les pièces adverses ou de "passer" un pion. Ensuite, pour montrer toute la puissance de la dame, il propose des parties où un joueur dispose d'une dame et de 3 pions contre 1 cavalier, 1 fou, 1 tour et 3 pions pour son adversaire.

Lorsque les règles sont connues, les séances varient dans l'éventail suivant :

- parties à 1 contre 1 dans la classe par tirage au sort
- parties où un groupe, désigné par vote, joue contre l'autre groupe au sein d'une même classe
- parties simultanées contre B.B. (éventuellement avec handicap pour ce dernier)
- toute la classe joue contre B.B.; les propositions des élèves étant faites sur vote à la majorité
- problèmes d'échecs
- reconstitution de parties sous forme de tests
  (il s'agit de réinventer quelques coups astucieux joués par des Grand - Maîtres. Chacun de ces coups est attribué un nombre de points (selon la difficulté) (cf. l'exemple proposé plus loin).

Le matériel utilisé par B.B.

B.B. a construit, alors qu'il était surveillant d'externat au CES La Wantzenau, un échiquier d'environ 0,85 m x 0,85m sur une plaque de contreplaqué grâce à un collage de 64 carrés de feutrine, en alternant les cases de couleur jaune et brun. Il a constitué les 32 pièces du jeu en polystyrène pour leur donner de l'épaisseur et collé au dos de chacune d'elle de l'istrex pour favoriser l'adhérence à la feutrine. 16 pièces stylisées sont blanches sur fond noir, les 16 autres sont noires sur fond blanc, les pions étant de taille légèrement inférieure. (B.B. a constitué un agrandissement des pièces habituelles représentées dans la littérature).

Pour gagner du temps en début d'heure dans les parties "problèmes", B.B. se sert d'un rétroprojecteur lui permettant de reprendre immédiatement une partie en cours. Une importante documentation lui permet de varier ses séquences d'enseignement; il utilise, entre autres, les manuels suivants:

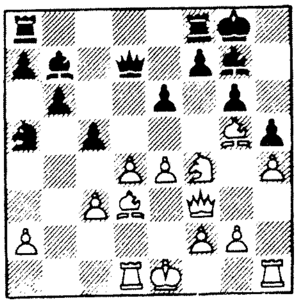
- Le Fichier GONNAUD (Hatier) pour les débutants
- Jouons aux échecs par MAC LEOD (Editions des 2 coqs d'or)
- Le jeu d'Echec par SENECA (Livre de Poche)
- Spiel mit und gegen Großmeister par EMIL GELENCZEI (Sportverlag, Berlin).

<u>Reconstitution d'une partie de grand -maîtres sous forme de tests en CPPN 3</u>

La partie reconstituée est extraite du livre déjà cité d'EMIL GELENCZEI et est intitulée: "Attaque sur l'aile roi". Elle fut jouée en 1978 lors du championnat de DDR entre KNAAK (blancs) et UHLMANN(noirs) en défense indienne, variante Grünfeld. La reconstitution s'est déroulée en deux séances; la première a comporté l'étude des 15 coups initiaux que voici :

1	d4	Cf6
2	c4	g6
3	Cc3	d5
4	cxd5	Cxd5
5	e4	Cxe3
6	bxe3	Fg7
7	Fc4	0-0
8	Fe3 !?	b6
9	h4	Fb7
10	Df3 (4pts)	Dd7
11	Ce2!(4pts)	h5
12	Fg5 (2pts)	Cc6
13	Cf4!(3pts)	e6
14	Td1!(4pts)	Ca5
15	Fd3 (2pts)	c5 ?

La seconde à laquelle j'ai pu assister reprend la partie au 16e coup. Huit garçons sur 15 inscrits sont présents (la grippe a fait des ravages); ils ont 15 ou 16 ans et en sont à leur 2ème année d'Echecs. Cinq minutes ont suffi aux élèves pour monter et installer les huit échiquiers ainsi que l'échiquier mural. Très rapidement, sur chaque échiquier, les pièces sont placées dans la position suivant le 15e coup des noirs.
Voici cette position :



B.B. précise que le total à battre est de 23 points: c'est le score qu'il a lui-même réalisé sur les 52 possibles. Il précise également que le 16e coup des blancs vaut 8 points. Les élèves savent donc qu'il s'agit de la partie intitulée "attaque sur l'aile roi" et qu'il s'agit d'un coup "difficile". 4 d'entre eux trouvent très rapidement la bonne solution:

16 Cxh5

Ils la fournissent au professeur, qui note les points, sans la jouer afin de ne pas influencer les voisins. B.B. relève également les autres réponses et, après quelques contestations montre qu'elles sont mauvaises ou qu'elles ne sont pas assez offensives. On passe sur le coup évident des noirs

16. .... gxh5

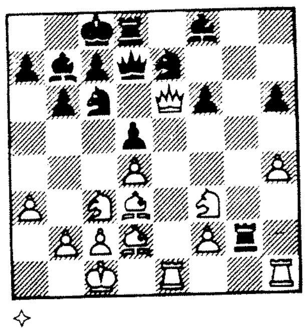
et on attaque le 17e coup des blancs pour 8 points :

17 Ff6 !!

trouvé par un seul élève. 25 minutes se sont écoulées et trois élèves se déconcentrent totalement (ils marqueront le moins de

points) et troublent quelque peu la réflexion des autres par leurs menaces. ("Je t'étrangle, connard"). Il est à noter que tout se passe verbalement et qu'aucun des antagonistes n'a quitté sa chaise! (ce qui est peu courant dans ces cas, bien des "maîtres" vous le diront). B.B. les calme et ils proposeront encore des coups "au hasard" qu'ils seront totalement incapables de justifier.
La partie se poursuit:

17	....	Fxf6
18	Dxf6 (1pt)	Dd8
19	Dh6 (3pts)	f6
20	Dg6+ (2pts)	Rh8
21	e5 (4pts)	f5
22	Dh6 (3pts)	Rg8
23	Th3 (2pts)	Rf7
24	Tg3 (2pts)	abandon



B.B. a accéléré le rythme pour éviter la déconcentration sur des coups "faciles" et aussi pour arriver à terminer la partie. Il utilise toujours le même principe: analyse et réfutation des coups douteux, justification du jeu de KNAAK. A la fin de la partie, les élèves sont anxieux: "Monsieur, combien de points faut-il avoir?" en sous-entendant :"pour avoir la récompense"(ici une tablette de chocolat). L'heureux gagnant devra défendre son bien, peut-être avant de la partager? La séance est achevée et, sans aucune injonction, les élèves rangent leurs jeux, le jeu mural et vont porter le tout à l'étage en dessous, lieu habituel de rangement. Les résultats, en points, des 8 élèves sont par ordre décroissant: 27, 23, 19, 16, 11, 3, 2, 2.

Résultats des élèves, au 26/1/81, en championnat promotionnel des jeunes par équipes de 4

Poule	Nombre d'équipes de la poule	Equipe	Classement
A	6	Solignac IV	1° ex-aequo
B	6	Solignac III	1°
D	6	Solignac I	6°(équipe de remplaçants)
E	6	Solignac II	3°
F	7	Solignac V	1°

Conclusion

L'enseignement dispensé par B.B. se traduit donc par des résultats concrets et nous pouvons assister à l'heure actuelle à l'intégration dans des championnats d'Echecs d'une catégorie d'élèves jugés "inaptes" à pratiquer certaines disciplines. Dès lors, que faut-il penser des orienteurs ? Se sont-ils trompés ? Dirigent-ils délibérément les éléments à "problèmes" sur des voies de "garage" ? Ne sont-ils pas plutôt prisonniers du système scolaire actuel?

Personnellement, je pencherais plutôt pour cette troisième alternative. En effet, même si les orienteurs pédagogiques voulaient placer ailleurs qu'en CPPN les éléments "agités" mais capables d'un raisonnement logique, ils ne le pourraient pas. Pourquoi ? Parce que l'Education Nationale n'a prévu aucune mesure spécifique pour de tels cas. Par exemple, si l'on a la possibilité de s'occuper, de temps en temps, individuellement d'un élève difficile, son instinct agressif s'atténue. Aussi serait-il utile, voire nécessaire, de mettre 2 enseignants par classe de CPPN. Si la sollicitude pédagogique pouvait écarter quelques individus de la délinquance, la société y trouverait son compte. Livré à eux-mêmes, ces jeunes gens coûtent chers !
L'Education nationale préfère également ignorer les dangers courus par les enseignants dans les sections de CPPN et les laisse, ainsi, sans protection contre d'éventuelles agressions.

Evidemment, il faudrait ici répondre à l'objection saugrenue: "Monsieur Bemer est (mal) payé, pour enseigner des mathématiques et non pour s'amuser à un jeu dangereux qui lui plait !". Il faudrait d'abord prouver qu'il lui est possible de faire mieux ! Et puis, la réussite aux Echecs provoque chez les mêmes élèves quelques progrès dans d'autres disciplines, dont les mathématiques. Songez, que certains d'entre eux empruntent des livres, lisent et étudient des parties d'échecs, ce qui est une remarquable performance... car la plupart des CPPN ne lisent jamais !

Le rôle joué par B.B. est donc d'autant plus méritoire qu'il est arrivé malgré tout, à isoler certains éléments de la masse de ceux vis-à-vis de qui, un enseignant de mathématiques ne peut plus grand chose,et leur a permis dès lors une réinsertion sociale que l'on espère durable. Je ne citerai que le cas de cet élève de 16 ans, alcoolique malgré son jeune âge, qui cessa de boire pour se consacrer exclusivement à sa nouvelle passion: les Echecs. Celle-ci n'a toujours pas faibli bien qu'il soir chômeur et actuellement, il aide bénévolement les instituteurs de l'école primaire du quartier quand ils initient leurs jeunes élèves au jeu d'Echec. C'est peut-être incroyable, mais ... c'est vrai !

Jean-Paul BOMANS.

CHASSE AUX GROUPES FINIS

I) AVEC UN REVOLVER A BOUCHON *

Les groupes finis sont cette année à l'honneur. Une extraordinaire aventure mathématique se déroule depuis un siècle et plus spécialement depuis 1955. Elle vient d'aboutir à la connaissance et à la classification de tous les groupes finis.

L'aspect acrobatique de l'exploit apparait lorsqu'on apprend qu'il a fallu, pour y parvenir, maîtriser quelques géants: le groupe simple de Janko (découvert en 1966) ne contient que 175.560 éléments, mais celui de Conway (1968) en comporte 4.157.776.806.543.360.000.
A partir d'une liste de groupes "simples", on peut reconstituer tous les groupes finis: on annonce en 1981 que l'on connait désormais la liste exhaustive de tous les groupes finis simples.

Nous avons demandé à Paul BOREL, assistant à l'U.L.P. de nous raconter cette épopée. Notre collègue a fait un effort pédagogique très efficace, et bien des non-spécialistes tireront profit de son article. *

Mais il serait dommage que quelques détails techniques effarouchent trop de lecteurs: après tout, lorsque nous nous informons sur la greffe du coeur ou sur les satellites artificiels dans les revues de vulgarisation, nous acceptons d'avoir une vue d'ensemble sans saisir toutes les finesses.

Pour faciliter l'accès à l'article de Paul BOREL, nous avons décidé de raconter quelques faits, concernant les groupes finis, qui ont leur place dans l'enseignement primaire et secondaire.

---

* Dans le prochain numéro de l'Ouvert, paraîtra un article de Paul BOREL qui chasse le groupe fini avec des armes moins rudimentaires.

Sur les permutations   Soit E_n un ensemble de n objets. L'ensemble de toutes les bijections de E_n sur E_n s'appelle le groupe des permutations de E_n, ou encore le groupe symétrique S_n. Il comporte n! éléments.

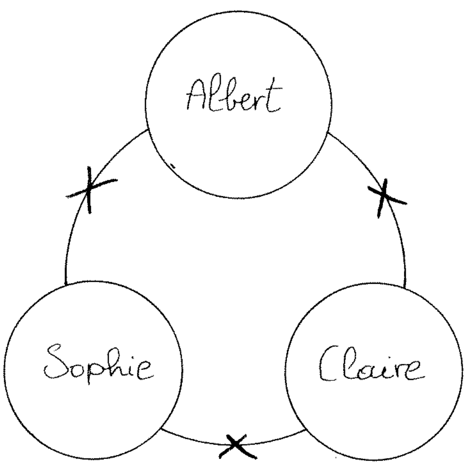
Georges PAPY a imaginé quelques manipulations qui ont été essayées dans des classes primaires [P] pour décrire des permutations.

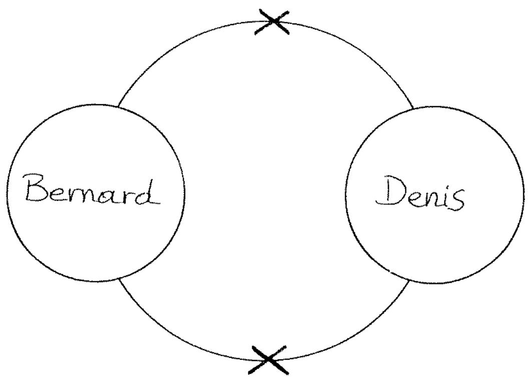
Par exemple, il choisit un ensemble E_n d'élèves, auxquels il distribue des cartons vierges. Chacun inscrit son nom sur le carton. On ramasse, on bat le jeu et l'on redistribue les cartes:

Voici un exemple pour n=5.

$E_5 = \{$	Albert,	Bernard,	Claire,	Denis,	Elise $\}$
	↓	↓	↓	↓	↓
Cartons	Claire	Denis	Elise	Bernard	Albert

Papy demande alors à chacun de ces élèves de saisir avec sa main droite la main gauche du camarade dont le nom figure sur le carton. Mais avant de le faire, on interroge la classe pour prévoir ce qui va arriver. Certains comprennent tout de suite qu'on obtiendra d'abord des farandoles, mais bientôt quelqu'un affirme: "Ca va faire des rondes".





En termes savants, on arrive au

Théorème : Toute permutation d'un ensemble fini se décompose en cycles [I_3]

Remarque : Il peut arriver qu'un enfant reçoive le carton qui porte son propre nom. (C'est alors un point fixe de la permutation). Parfois, un cycle ne comprend que deux éléments (comme ici {Bernard, Denis}). C'est alors une transposition .

Une autre façon concrète de se représenter une permutation est d'envisager un dérangement. Par exemple, dans une bibliothèque, il y a exactement n livres avec des emplacements choisis pour chacun d'eux. Malheureusement, ils sont actuellement disposés en pagaïe.

Une méthode assez longue, mais curieuse, de les remettre en place est la suivante: on choisit un livre mal rangé et on le transpose avec le livre qui occupe indûment sa place. On répète l'opération autant de fois qu'il le faut.

Mais comme après chaque transposition, le nombre des livres bien rangés a augmenté d'une unité, on parviendra finalement à un rangement complet.

Théorème : Toute permutation de n objets est composée d'un nombre fini de transpositions (cf. [I_3]).

Ce mode de rangement peut s'effectuer de nombreuses façons, mais on peut prouver que le nombre de transpositions nécessaires est toujours de même parité: cela permet de distinguer les permutations paires des impaires.

Définition : le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n$ de $\mathcal{S}_n$ est constitué par les $\frac{1}{2}$ x n! permutations paires .

Les groupes finis considérés comme groupes de transformation

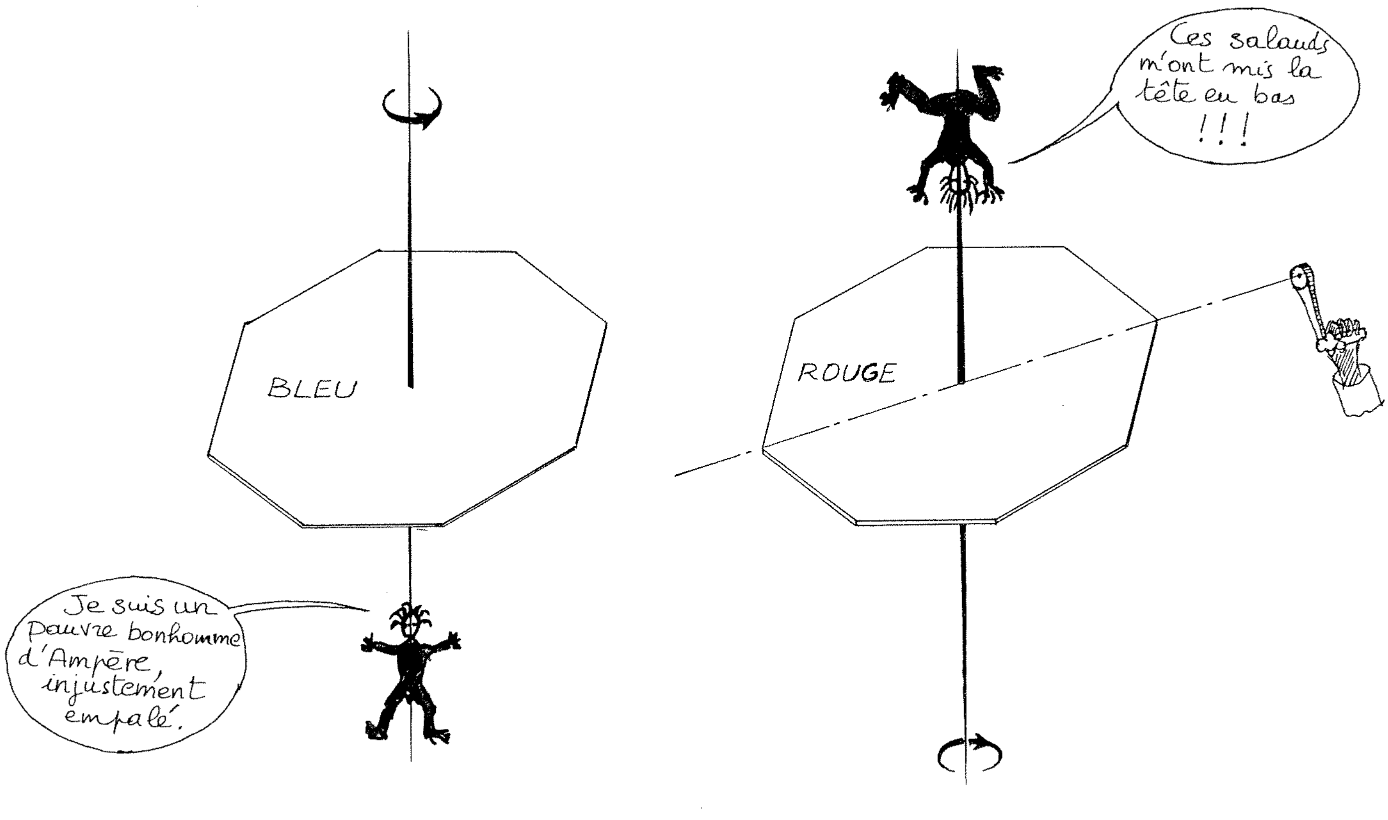
On peut munir E_n de structures supplémentaires et étudier le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ formé par les bijections d'un ensemble de n éléments qui respecte cette structure.

Exemple : $\mathcal{S}_8$ possède 8! = 40.320 éléments. Mais on peut identifier E_8 à l'ensemble des sommets d'un cube et chercher le groupe des 48 isométries de l'espace qui conservent le cube. Parmi celles-ci, il y a 24 isométries directes [B].

On peut aussi identifier E_8 à l'ensemble des sommets d'un octogone régulier, découpé dans du carton, dont les faces sont colorées différemment.

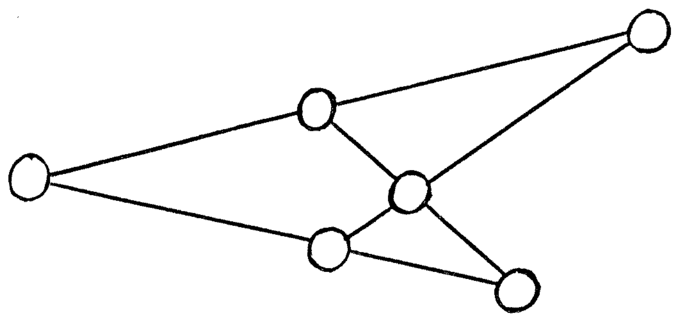
Le groupe diédral D_8 est le groupe des isométries directes qui conservent ce carton.

Il y a 8 permutations "circulaires" obtenues sans retourner le carton, mais le groupe diédral D_8 comporte aussi des isométries qui échangent la couleur des faces.



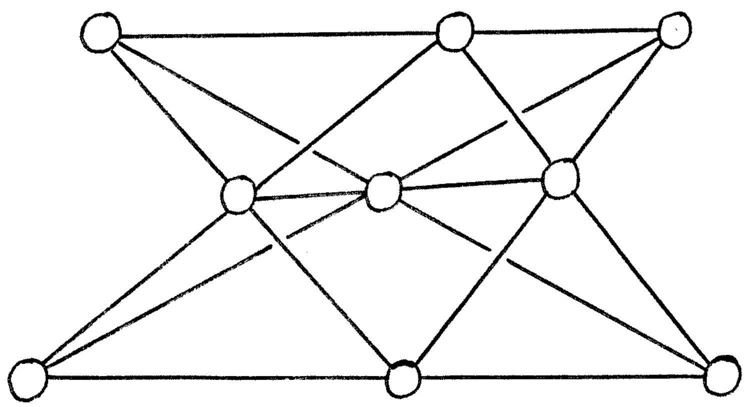
Ce sont les 8 demi-tours effectués autour d'un des 8 axes de symétrie situés dans le plan de l'octogone.

On lira dans [I_6], le récit d'une manipulation effectuée en CE_2, sur les 24 bijections du quadrilatère complet, qui conservent les alignements.



Il s'agissait de transporter de toutes les façons possibles six jetons disposés sur les cases de la marelle ci-dessus, sur une marelle analogue, en respectant les alignements.

J'ai moi-même expérimenté, avec des étudiants du DEUG, au cours de 4 séances de deux heures chacunes, l'étude des 108 bijections conservant les alignements dans la figure de Pappus ci-dessous:



Signalons enfin, le célèbre groupe de Klein. C'est celui que Dagobert manipula jadis, lorsqu'à côté de la façon triviale I de mettre sa culotte à l'endroit, il étudia les trois façons a, b, c de la retourner. Ce groupe, dont voici la table de Pythagore:

	I	a	b	c
I	I	a	b	c
a	a	I	c	b
b	b	c	I	a
c	c	b	a	I

est aussi le groupe des isométries directes qui conservent la figure de l'espace formée de trois droites concourantes deux à deux perpendiculairess.

Usage des sous-groupes pour "dévisser" un groupe

Tant que le cardinal d'un groupe n'est pas trop élevé, il est possible de l'étudier directement, (par exemple sur sa table de Pythagore). Mais pour les groupes plus "gros", on a besoin de relais.

Ainsi on cherchera à classer les éléments du groupe en classes d'équivalence. Celles-ci, pour être utiles, devraient avoir des liens étroits avec la structure du groupe étudié.

Soit Γ un sous-groupe de G.

Définition : On dira que deux éléments a et b de G, sont équivalents (modulo Γ) si le produit $a \times b^{-1}$ appartient à Γ.

C'est précisément parce que Γ est un groupe, que l'on obtient ainsi une relation d'équivalence. Et Γ lui-même est la classe des éléments de G équivalents à l'élément neutre (la transformation identique).

L'étude de l'ensemble-quotient G/Γ rend parfois de grands services pour l'étude de G, mais malheureusement, il n'est pas toujours possible de le munir naturellement d' une structure de groupe. En général, si $a \equiv a' \pmod{\Gamma}$ et $b \equiv b' \pmod{\Gamma}$, il n'est pas toujours vrai que $a \times b \equiv a' \times b' \pmod{\Gamma}$.

S'il n'en est pas ainsi, on ne peut pas composer des classes d'équivalence . Evariste GALOIS a attiré l'attention sur les sous-groupes distingués Γ qui définissent des groupes-quotient. Ils sont caractérisés par la propriété suivante:

$$\{\forall a \in G \qquad \forall b \in \Gamma \qquad aba^{-1} \in \Gamma\}$$

Dès que l'on connait un sous-groupe distingué Γ de G, on peut ramener l'étude de G à celle de deux groupes moins "gros".
Γ et G/Γ .

Exemple. Soit $\mathbb{Z}_6$ le groupe additif des entiers modulo 6. C'est un groupe commutatif. Par conséquent, tous ses sous-groupes sont distingués (car $aba^{-1} = b$).

$\mathbb{Z}_6 = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5},\}$ (la classe $\underline{6}$ est identique à la classe $\underline{0}$).

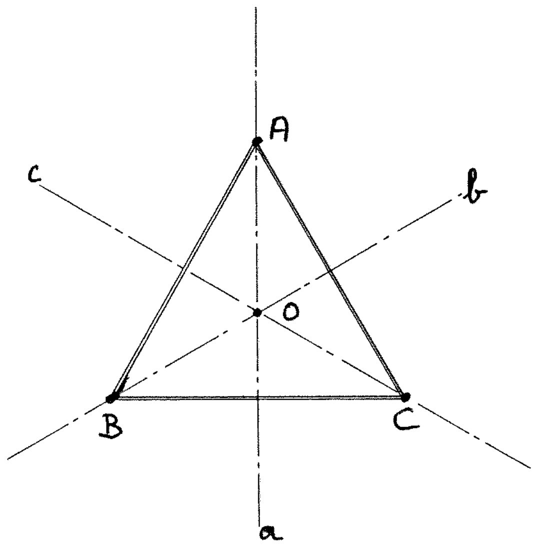
Considérons les deux sous-groupes suivants : $\{\underline{0}, \underline{3}\}$ et $\{\underline{0}, \underline{2}, \underline{4}\}$
On vérifie qu'ils sont respectivement isomorphes à $\mathbb{Z}_2$ et $\mathbb{Z}_3$.
Inversement, considérons le groupe produit $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dont les éléments sont des couples (a, b) où a est une classe d'entiers modulo 2 et b une classe d'entiers modulo 3.
La composition de (a, b) et de (a', b') s'obtient, dans $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ en ajoutant indépendamment les coordonnées : (les premiers modulo 2 et les derniers modulo 3).

On vérifie alors que $\mathbb{Z}_6$ et $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sont isomorphes comme le montre la bijection suivante:

$\mathbb{Z}_6$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$,	$(\underline{0},\underline{0})$	$(\underline{1},\underline{2})$	$(\underline{0},\underline{1})$	$(\underline{1},\underline{0})$	$(\underline{0},\underline{2})$	$(\underline{1},\underline{1})$

Autre exemple

Considérons le groupe diédral D_3 , qui compte 6 éléments. Il s'identifie à $\mathcal{S}_3$ (mais ceci ne vaut plus aux ordres plus élevés).
On peut l'incarner dans le groupe G des isométries qui laissait invariant un triangle équilatéral ABC.



Si r est la rotation de $2\pi/3$ autour de O, si Sa, Sb, Sc sont les retournements par rapport aux médianes a, b, c, on a:

* $G = \{1, r, r^2, Sa, Sb, Sc\}$,
1 désignant l'identité

$\circ$	1	r	r^2	S_a	S_b	S_c
1	1	r	r^2	S_a	S_b	S_c
r	r	r^2	1	S_c	S_a	S_b
r^2	r^2	1	r	S_b	S_c	S_a
S_a	S_a	S_b	S_c	1	r	r^2
S_b	S_b	S_c	S_a	r^2	1	r
S_c	S_c	S_a	S_b	r	r^2	1

* $\Gamma = \{1, r, r^2\}$ est le sous-groupe des rotations de G, isomorphes à $\mathbb{Z}_3$ selon :
$\underline{k} \longmapsto r^k$

$$\boxed{\Gamma \simeq \mathbb{Z}_3}$$

Il est facile de voir que Γ est distingué dans G.
Il faut prouver que, quel que soit $g \in G$, quel que soit $j \in \Gamma$, on a :

$$g \gamma g^{-1} \in \Gamma$$

C'est évident si g est aussi une rotation, un produit de rotations en étant une. Si g est un retournement, $g\gamma g^{-1}$ est le produit de 3 isométries dont deux impaires et une paire. $g\gamma g^{-1}$ est par conséquent paire. C'est donc une rotation, élément de Γ.
En conséquence, Γ est distingué dans G, et du même coup, $\mathbb{Z}_3$ l'est dans S_3 (*)

Par contre, $\{1, Sa\}$, $\{1, Sb\}$, $\{1, Sc\}$, tous isomorphes à $\mathbb{Z}_2$ sont des sous-groupes de G non distingués. Par exemple, $r \circ Sa \circ r^{-1} = Sb$. Plus généralement, les transformations de G permutent entre eux ces sous-groupes (ils sont dits conjugués), mais ne les conservent pas.

Le groupe quotient G/Γ (le seul qu'on puisse construire) est isomorphe à $\mathbb{Z}_2$, et on peut le considérer comme le groupe des permutations des deux côtés du plan où est dessiné le triangle.

"Dévissage" et "revissage" d'un groupe fini

Supposons que G possède au moins un sous-groupe distingué Γ (distinct de G et du groupe trivial réduit à l'identité). Alors l'étude de G peut se ramener à celle des deux groupes plus "petits", Γ et G/Γ. On peut essayer de continuer le même processus sur ces deux derniers groupes, et poursuivre. On est arrêté lorsqu'on aboutit à un groupe simple, c'est-à-dire à un groupe qui n'a pas de sous - groupes distingués, non triviaux.
Par exemple, il en est ainsi pour $\mathbb{Z}_p$ où p est un nombre premier.
Parmi les autres groupes simples (dont l'énumération se trouvera dans l'article de Borel), citons les groupes alternés $\mathcal{A}_n$ avec

---

(*) $\mathbb{Z}_n$ est sous-groupe distingué de D_n, (et non de S_n) sauf pour n= 2 et 3.

$n \geqslant 5$, et aussi les groupes de Janko et Conway cités au début de cet article. $\mathcal{A}_5$ est aussi isomorphe au groupe des isométries directes d'un icosaèdre régulier.

On peut toujours poursuivre le "dévissage" d'un groupe fini en sous-groupes simples. Inversement, on connait la solution du problème suivant, appelé problème d'extension des groupes :

Problème Etant donné deux groupes Γ et H , trouver un groupe G tel que :

1° Γ soit isomorphe à un sous-groupe distingué de G

2° H soit isomorphe au quotient G/Γ

Il existe une solution facile de ce problème, qui consiste à choisir pour G le groupe produit $\Gamma \times H$.
Mais il existe, en général d'autres solutions, et l'on sait les obtenir toutes.

Exemple A partir de $\Gamma = \mathbb{Z}_8$ et $H = \mathbb{Z}_2$, nous avons déjà obtenu le groupe non commutatif D_8. On peut aussi obtenir les groupes commutatifs: $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ qui ne sont pas isomorphes, car le premier contient un élément d'ordre 16 (par exemple, $\underline{1}$), alors que tous les éléments du second sont d'ordre 8 au plus.

Autre exemple

A partir de $\mathbb{Z}_3$ et $\mathbb{Z}_2$, nous avons déjà obtenu $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_6$ qui est commutatif.
Le groupe du triangle, isomorphe à S_3, est aussi fabriqué, comme on l'a vu, avec $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_3$ et des groupes isomorphes à $\mathbb{Z}_2$. Mais il n'est pas commutatif !
Il est pourtant possible de reconstituer G à partir de $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_3$ et, par exemple, de $H = \{1, Sa\} \simeq \mathbb{Z}_2$. La construction ne pourra pas se faire par produit direct, puisque ce procédé fournirait $\mathbb{Z}_6$ commutatif.

La construction à mettre en oeuvre est celle de <u>produit semi-direct</u>, qui fournit une autre solution au problème d'extension.

Cette méthode s'applique lorsque le groupe H <u>opère</u> sur Γ.

Cela signifie qu'à tout élément h de H, correspond un automorphisme φ_h de Γ, tel qu'au produit h.h' de deux éléments de H correspond le composé des automorphismes φ_h et $\varphi_{h'}$.

On peut alors définir sur l'<u>ensemble</u> ΓxH la loi de composition suivante, notée *, alors que le point. est réservé aux groupes H et Γ

$(\gamma,h) * (\gamma',h') = (\gamma.\varphi_h(\gamma'), h.h')$.

C'est la loi du <u>produit semi-direct "tordue" grâce à φ</u>.

Si φ_h n'est pas constamment réduit à l'automorphisme identique de Γ, le produit semi-direct diffère du groupe produit.

Cette construction s'applique en particulier si H et Γ sont tous les deux des sous-groupes d'un groupe Ω plus grand où Γ est en outre distingué. On peut alors choisir pour tout $h \in H$ φ_h égal à l'automorphisme intérieur de Γ défini ainsi :

$$\varphi_h : \gamma \longmapsto h.\gamma.h^{-1}.$$

C'est ce qui arrive, dans l'exemple précédent, avec $\Omega = \mathbb{Z}_3$, $\Gamma = \mathbb{Z}_3$ et $H = \{1, Sa\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

On notera l'analogie (et les différences) entre le dévissage des groupes finis et les problèmes classiques suivants:

- décomposition d'un entier naturel en <u>produit de facteurs premiers</u>
- décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples
- analyse et synthèse d'un corps chimique pur en éléments simples.

Dans ce dernier cas, comme avec les groupes simples, l'analyse de deux corps purs isomères peut conduire à la même analyse brute, sans que la synthèse aboutisse au même produit final.

Evoquons encore deux thèmes auquel l'article de Borel fera allusion.

Les corps finis .

Les corps infinis les plus communs sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On en fabrique d'autres à partir des corps de fractions rationnelles à une ou plusieurs variables. (Il existe aussi des corps infinis non commutatifs, dont le plus célèbre est le corps des quaternions, découverts par le mathématicien irlandais Hamilton en 1843).

Par contre, un célèbre théorème de Wedderburn affirme que "tout corps fini est commutatif".

Evariste Galois a trouvé tous les corps finis.

Théorème : pour chaque exposant entier $n \geqslant 1$ et chaque nombre premier p, il existe un corps fini (et un seul à un isomorphisme près) à p^n éléments.

Si $n = 1$, on trouve les corps des entiers modulo p (où p est premier)

On trouvera, dans $[I_6]$ (p. 92 et 93) des énoncés d'exercices qui fournissent une construction des corps de Galois à 4 et à 9 éléments.

Les groupes de Lie

En contraste avec les groupes finis, la mathématique contemporaine étudie beaucoup les groupes dont les éléments dépendent continuement de plusieurs paramètres, réels ou complexes.

Ce sont les groupes introduits par le mathématicien norvégien Sophus Lie (1842-1899).

Les exemples les plus faciles à imaginer sont des groupes dont les éléments sont des matrices carrées.

Le groupe linéaire GL(n) s'identifie au groupe multiplicatif des matrices carrées n x n, dont le déterminant n'est pas nul.

(Pour qu'une matrice admette un inverse, il faut et il suffit que son déterminant diffère de 0). Chaque matrice dépend de n^2 paramètres.

Tous les groupes de transformation de la géométrie, (groupe affine, groupe orthogonal, groupe projectif, etc... etc...) dérivent de celui-ci, et s'introduisent implicitement dans l'enseignement secondaire.
Ainsi le groupe des déplacements du plan euclidien est un groupe de Lie dont le sous-groupe des translations est un sous-groupe distingué.

Autre exemple

Il est possible de présenter, dans l'enseignement secondaire (à partir de la 3ème ou la 2ème), le groupe des transformations affines de la droite, à titre d'exercice de calcul.
A tout couple de nombres réels (a, b) où $a \neq o$, on associe l'application affine de R sur R, définie par

$$x \longmapsto ax + b$$

Calculons le composé des applications correspondant à (a, b) et (a', b'). On obtient :

$$x \longmapsto a'(ax+b) + b' = aa'x + (a'b+ b').$$

Donc $\quad (a', b') \circ (a, b) = (aa', a'b + b').$

Muni de cette loi de composition, l'ensemble des transformations affines de la droite $\mathbb{R}$ est un groupe de Lie non commutatif. Ces transformations dépendent de deux paramètres réels a et b.
Ce groupe est isomorphe au groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, muni de la multiplication usuelle.
On remarquera qu'on obtient des groupes finis, lorsqu'on choisit les coefficients (a, b) (avec $a \neq 0$) dans un corps fini. Il est instructif de le faire, en utilisant le corps des entiers modulo 3.

Cette analogie des groupes de Lie avec les groupes finis, conduit à envisager des groupes de matrices, qui sont des groupes de Lie lorsque les coefficients sont pris dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et qui deviennent des groupes finis lorsque les coefficients sont pris dans un corps de Galois.

Après ce petit tour d'horizon élémentaire, nous interrompons traditionnellement le feuilleton par :
La suite au prochain numéro .

G. GLAESER.

Bibliographie

[B] BUDDEN (F.J.), La fascination des groupes, Paris O.C.D.L., 1970.

[I_3] IREM DE STRASBOURG, Livre du Problème, fascicule 3, La Parité, CEDIC

[I_6] IREM DE STRASBOURG, Livre du Problème, fascicule 6, La Géométrie d'incidence, CEDIC

[P] PAPY (G.), Groupes, Paris, Dunod, 1961

• Responsable de la publication

J. LEFORT
24 rue A. Schweitzer
WINTZENHEIM 68000 COLMAR.

• Impression

IREM de Strasbourg
10 rue du général Zimmer
67084 STRASBOURG Cedex

VARIATIONS SUR LE THEME "LES ELEVES NE SONT PAS SI BETES QUE ÇA ..."

EXERCICE: compléter cette division "à trous":

```
 . . . . . .  | . . .
-. . .        |---------------
    . . .     | . . . .,. . . .
   -. . .     |
      . . .   |
     -. . .   |
        . . . |
       -. . . |
          . . . .
         -. . . .
                0
```

S'il vous faut plus d'un quart d'heure pour faire cet exercice,
ou si vous êtes persuadé que "d'année en année, les élèves sont de plus en plus bêtes",
ou si vous croyez que "les" élèves ne savent plus calculer,
(refrains connus...)

reportez-vous à la page suivante...
Cet article est fait pour vous!

Si vous n'entrez dans aucune de ces catégories,
rien ne vous empêche non plus de tourner la page...

Compte-rendu d'une expérimentation en classe de 5°, par Alain Bonnet, avec la participation de Gilbert Nuss

Dans le cadre de mon travail à l'IREM, j'ai entrepris de rechercher des exercices "ouverts", c'est à dire des exercices dont la solution ne soit pas évidente et demande un travail de recherche et de réflexion, pour le premier cycle. C'est ainsi que j'ai trouvé cette division, dans une publication de l'IREM (Heuristique et manipulations, 1974/75), assortie du commentaire "des élèves de 5° n'en croyaient pas leurs yeux, mais ils ont trouvé". Moi non plus, je n'en croyais pas mes yeux, mais j'ai trouvé aussi et j'ai voulu en avoir le coeur net...

J'ai présenté cet exercice à des collègues qui enseignent dans le 1° cycle. Non seulement ils n'en croyaient pas leurs yeux, mais il leur semblait la plupart du temps inconcevable que des élèves de 5° sachent résoudre une monstruosité pareille.

Tous n'ont pourtant pas été de cet avis, et j'ai pu observer des classes de 5°, grâce à Gilbert Nuss, du collège de Volgelsheim, qui m'a accueilli dans les siennes.

Voici le compte-rendu de cette observation.

$\boxed{\text{5° F (classe assez moyenne et peu active)}}$

9 h 05: je présente le sujet: étonnement général. Je m'y attendais. Règle du jeu: si quelqu'un a une idée, il la propose à tous.

9 h 08: il y a du flottement, c'est indéniable; certains élèves n'ont pas l'habitude de la disposition "allemande" de la division. D'autres en sont encore à recopier. On ne sait pas par quel bout s'y prendre, on discute entre voisins, on manipule trousses et cahiers. Je suis un peu inquiet, j'ai l'impression que ça part mal.

9 h 09: plusieurs élèves commencent des essais tout à fait au hasard; ils choisissent un dividende, un diviseur... et constatent que ça ne va pas.

9 h 10: un élève propose de commencer par le bas; mais il ne paraît pas avoir d'idée bien précise.

9 h 12: une élève a écrit sur les deux dernières lignes 2222; je lui demande pourquoi elle a mis des 2 et pas autre chose: elle ne sait pas; je l'invite alors à imaginer que les trous sont bouchés, qu'elle fait une division ordinaire: comment obtient-on ces chiffres? Après quelques secondes d'hésitation: "ce sont des 0, puisqu'il n'y a rien au dividende après la virgule."

9 h 14: un autre élève voit qu'on abaisse deux chiffres du dividende après la première opération: le deuxième chiffre du quotient est donc 0.

9 h 22: on est de nouveau bloqué; il faut insister pour que les élèves finissent par constater que les deux remarques qui viennent d'être faites se répètent à d'autres endroits.

9 h 25: c'était laborieux, mais les élèves ont fini par trouver eux-mêmes tous les 0 de l'opération. Voir sur la page suivante où on en est.

9 h 29: un élève constate que pour que le dernier reste soit nul, le diviseur doit être un multiple de 5. Assez vite, on constate qu'il ne peut être terminé par 0 (car alors les deux dernières lignes ne contiendraient que des 0), donc il doit être terminé par 5. Ce n'est pas

```
......      | ...
...         |-----------
 ...        | .0..,.00.
 ...        |
  ...       |
  ...       |
   ..0      |
   ...      |  9h25
    .000    |
    .000    |
       0    |
```

```
......      | ...
...         |-----------
 ...        | .0..,.00.
 ...        |
  ...       |
  ...       |
   ..0      |
   ..5      |  9h29
   5000     |
   5000     |
      0     |
```

```
......      | ...
...         |-----------
 ...        | .0..,.008
 ...        |
  ...       |
  ...       |
  630       |
  625       |  9h31
   5000     |
   5000     |
      0     |
```

une condition nécessaire, mais elle est suffisante, et on a simplement demandé de présenter une solution,pas de les trouver toutes. Je préfère ne pas intervenir.

9 h 31: le dernier chiffre du quotient ne peut être ni 2 ni 4 (car alors le diviseur aurait quatre chiffres); ce n'est pas 6 qui ne divise pas 5000; enfin il est pair: c'est donc un 8 et le diviseur est 625.

9 h 33: Maintenant, c'est presque fini; les élèves l'ont senti, et une certaine fébrilité s'empare de la classe. On fait remarquer que tous les chiffres manquants du quotient sont des 1, car tous les produits partiels ont trois chiffres. Toutefois, certains élèves sont longs à s'en convaincre.

9 h 36: tous les produits et restes partiels sont écrits.

9 h 37: le dividende est écrit à son tour et la division est complète. Une rapide vérification confirme le résultat. Il y a une véritable satisfaction dans la classe: le problème qui paraissait insoluble est résolu en 32 minutes. Inutile de dire que moi aussi, je suis satisfait. Car mon aide s'est réduite à peu de choses.

Interventions de ma part:
- inciter une élève qui était déjà sur la voie à trouver d'elle-même les six 0 des deux dernières lignes.
- inciter les élèves à vérifier si leurs observations ne peuvent pas s'appliquer ailleurs.
- empêcher la recherche de s'enliser dans une étude trop longue de tous les cas qui permettaient d'obtenir un multiple de 1000 comme dernier produit partiel.
- favoriser les "bonnes idées".
- aucune intervention directe pour indiquer un chiffre.

Il est vrai que la classe a été longue à se lancer et que si les élèves étaient restés livrés à eux-mêmes, ils auraient continué individuellement à patauger pendant toute l'heure.Mais il n'en est pas moins vrai que toute la classe a fini par se prendre au jeu de la recherche et que la découverte du résultat a laissé un sentiment de satisfaction générale. Si j'avais eu une autre division à proposer, on s'y serait immédiatement lancé avec enthousiasme. Je n'ai remarqué aucun élève à la traîne, ni rétif, ni manifestement pas intéressé.

5°A (classe de meilleur niveau, très active)

Nous avions peur qu'il y ait eu des fuites depuis le matin, d'autant plus que l'heure était normalement une heure de soutien à laquelle la classe avait été exceptionnellement convoquée dans sa totalité; les élèves ne pouvaient que se douter de quelque chose. Pourtant, il ne semble pas qu'ils aient eu connaissance du sujet avant le début du cours (15 h).

Je ne reprendrai pas pour cette classe la chronologie de la découverte, pour deux raisons: d'une part, elle est très voisine de la précédente, d'autre part, les idées ont tellement fusé de la première minute à la dernière qu'il m'eût été impossible de noter quoi que ce soit de ce déroulement.

En voici simplement les articulations:

15 h 05: position du problème.

15 h 35: les 0 sont tous trouvés, mais la recherche patauge parce que les élèves ont vu qu'il y avait de nombreuses façons d'obtenir ces 0 par multiplication.

15 h 39: le tour a été fait, le 5000 est adopté comme seule solution satisfaisante.

15 h 44: la division est entièrement complétée.

Interventions de ma part:
- aucune pour indiquer de chiffre ni pour indiquer de méthode.
- canaliser la recherche qui était très désordonnée en raison du foisonnement d'idées permanent.
- dans cette optique, obliger à une certaine systématisation de l'étude des cas permettant d'obtenir comme dernier produit partiel un multiple de 1000.

Dans cette classe, les élèves n'ont été ni étonnés ni gênés par l'aspect inhabituel de l'exercice; il n'a pas fallu 10 secondes pour que viennent les premières propositions (0 à abaisser et 0 du quotient); s'il a fallu sept minutes de plus que dans l'autre classe, c'est avant tout parce que la recherche a été plus complète; on est ici arrivé à une présomption de l'unicité du résultat.
La plupart du temps, une proposition fausse était décelée par les élèves sans que je doive intervenir: exemple:
"le dernier chiffre du diviseur doit être 0 pour obtenir des 0 en bas.
- non, parce que dans ce cas, l'avant-dernier produit serait aussi terminé par 0 et les deux dernières lignes n'auraient que des 0!
- alors, ça doit être un 5 et le dernier chiffre du quotient est pair.
- ça peut aussi être le contraire!

La fébrilité a été constante dans cette classe, à part un petit passage à vide au moment de constater qu'il y a plusieurs cas à examiner pour trouver le diviseur. C'est cet instant de découragement qui m'a amené à rationaliser la recherche. Il me paraît probable que, si je n'avais donné aucune indication, la classe aurait fini par abandonner la recherche, car les observations des uns étaient contredites par les autres et le tout s'annulait. Par contre, je pense que certains élèves, soit isolément, soit en petit groupe, auraient fini par obtenir le résultat sans aucune intervention extérieure.

En fait... ils ne sont pas si bêtes que ça, nos élèves. C'est peut-être bien nous qui manquons d'ambition pour eux et qui finissons par les rendre bêtes à force de les juger comme tels...

$\boxed{\text{SOLUTION:}}$

```
 6 3 1 9 3 8          | 6 2 5
-6 2 5                |----------------
     6 9 3            | 1 0 1 1,1 0 0 8
    -6 2 5            |
       6 8 8          |
      -6 2 5          |
         6 3 0        |
        -6 2 5        |
             5 0 0 0  |
            -5 0 0 0  |
                   0  |
```

Sceptique? Convaincu? Dans tous les cas, essayez, et communiquez-moi vos observations. Elles seront les bienvenues...

Alain Bonnet

Max Bill

Max Bill est né en 1908. Ses études au Bauhaus de 1927 à 1929, sa rencontre avec Mondrian en 1932, l'amène petit à petit à s'intéresser de plus en plus aux Mathématiques pour la réalisation de ses oeuvres.

On trouvera dans le livre de Valentina Anker: "Max Bill ou la recherce d'un art logique" (*) la représentation de tableaux ou de sculptures avec les explications mathématiques permettant de comprendre le sens profond des recherhes de Max Bill : Suites arithmétiques ou géométriques, par exemple dans "Carré blanc obtenu par addition de couleurs élémentaires" ou dans "neuvième rouge"; représentation de nombres par une intensité de couleur comme dans "1-8", véritable carré magique coloré; le théorème de Pythagore dans "$a^2 + b^2 = c^2$"; la représentation des longueurs dans "x=x" où l'illusion de l'inégalité résulte de la couverture différente de lignes de même longueur.

Dans ses oeuvres planes, la couleur a toujours été pour Max Bill une façon de représenter la troisième dimension ou encore de rendre dynamique des oeuvres qui autrement seraient statiques en raison de l'usage presque exclusif de lignes géométriques simples (surtout des droites et quelques cercles).

On ne s'étonnera donc pas de retrouver dans les sculptures de Max Bill tous les aspects de ses tableaux, encore plus développés: la métrique avec des oeuvres comme "demi-sphère" (qui ne sont pas des hémisphères mais plutôt des analogues tridimensionnels du Yin et du Yang) ou comme demi-cubes"; la topologie avec "Ruban sans fin" qui n'est autre que la célèbre bande de Moebius ou avec

(*) disponible à la bibliothèque IREM, édition Age d'Homme, Lausanne.

"Continuité".

Signalons à ce propos que Max Bill avait cru être ainsi le premier à découvrir des surfaces sur lesquelles la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180°.

Le dessin de couverture fait partie d'une série de 16 lithographies dans lesquelles Max Bill brode à partir du thème formé par le développement continu de polygônes réguliers, du triangle à l'octogone, soit en traitant les surfaces en couleur, soit en faisant intervenir les cercles inscrits et exinscrits (sous forme de lignes ou de surfaces), soit en ne laissant plus que les sommets, ou que les diagonales.... Certaines variations seraient incompréhensibles si le thème n'était pas là pour nous éclairer. C'est le génie de Max Bill qui transforme la sécheresse d'une construction rigide en une oeuvre d'art.

J. LEFORT