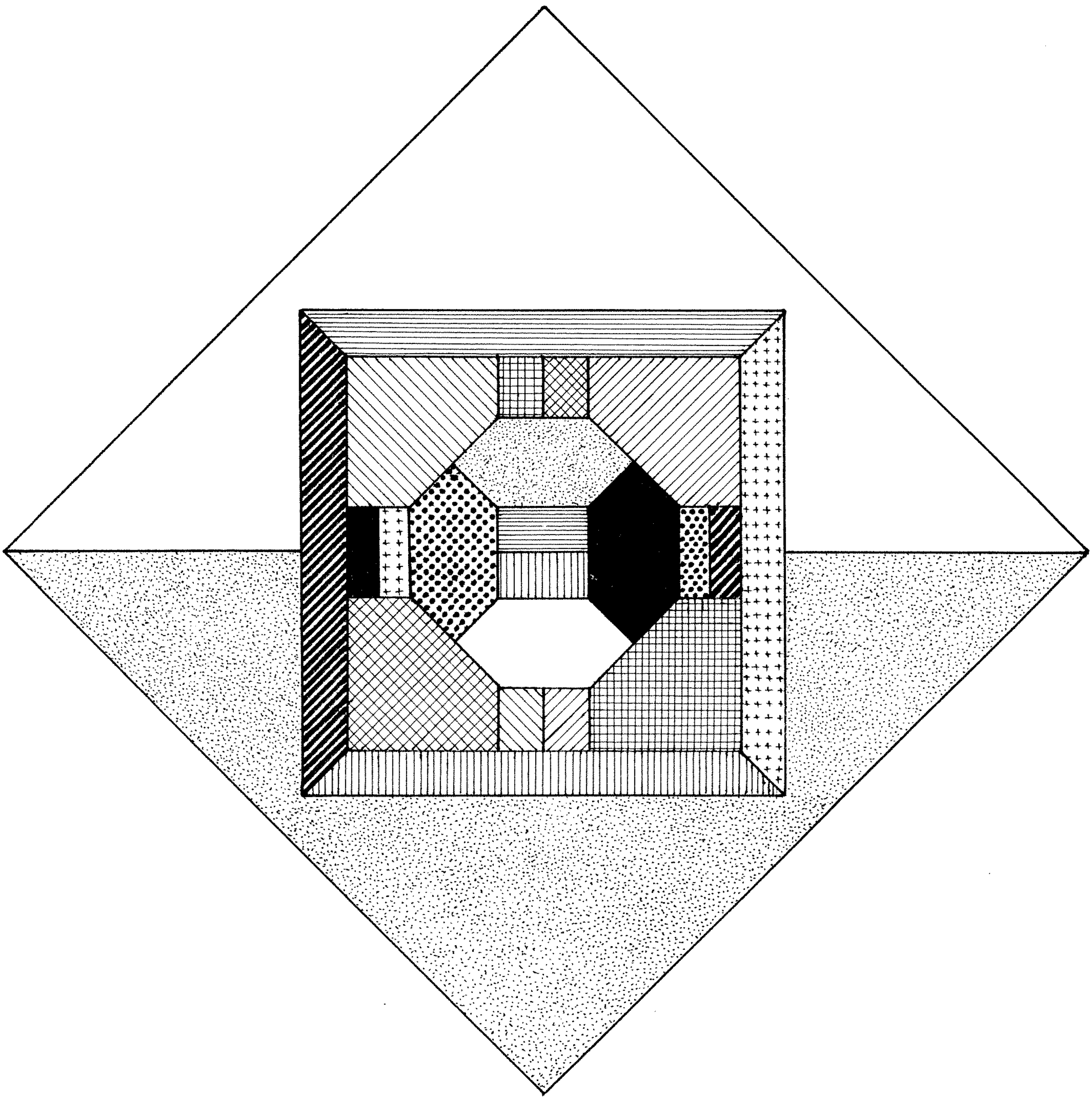
l'ouvert n°25

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE
STRASBOURG - NOV. 81 - ISSN 0290-0068



NOTRE COUVERTURE : C'est en 1980 que Heawood, dans un article où il prouvait que Kempe s'était trompé dans sa "démonstration" du théorème des 4 couleurs, démontra que dans la généralisation de ce résultat au cas où chaque pays a au plus deux composantes connexes, il faut et il suffit de disposer de 12 couleurs. La "carte" de notre couverture, symétrique, est due à Scott Kim. Elle montre que les 12 couleurs sont nécessaires

(voir article page 57)

O U V E R T U R E   L Y R I Q U E

C'est au premier janvier que l'on se dit d'ordinaire des banalités. Mais dans notre profession, le départ se refait à chaque rentrée. Et cette année, nous sommes tous curieux de savoir si nous pouvons changer quelque chose dans notre métier...

Rêvons donc un peu, voulez-vous ?

L'Ouvert vous présente ses meilleurs voeux !

Que les années prochaines vous réservent un rétablissement progressif de la dignité de l'Ecole et de notre tâche. Que se manifestent, même chez nos élèves les plus défavorisés, un ardent désir d'apprendre, et chez nous, une disponibilité efficace pour répondre à ces attentes ! Que la société perçoive notre volonté d'instituer un véritable renouveau éducatif, et qu'ainsi notre métier recommence à être respecté !

Qu'on en finisse avec l'image humiliante d'une mathématique traumatisante et ennuyeuse. Notre Président de la République vient de déclarer (Discours au Sénat - 22 avril 1981) "De la maternelle à la vie professionnelle, il faut donner le goût de la découverte, développer les idées d'ingéniosité, d'imagination, de curiosité, d'initiative". Pour une fois, ce discours peut ne pas sonner creux: nous savons tous, à l'A.P.M. et à l'I.R.E.M., quels projets concrets répondent à ce désir, puisque depuis des années, nous nous consacrons à la promotion des oeuvres créatives à l'Ecole.

Bien entendu, il n'est pas question d'oublier les mesures ponctuelles sur l'amélioration de nos conditions de travail et de recrutement. Bien des collègues n'ont guère apprécié de voir encore les effectifs des nouvelles secondes avoisinant systématiquement les 35... Mais que cela ne nous prive pas de rêves à plus long terme.

P.S. Déjà du tangible: à Strasbourg et dans les autres universités préparant le D.E.A de Didactique des mathématiques, ces diplômes sont réhabilités.

S O M M A I R E

BACHOTAGE :

un ancêtre

Nous présentons ici quelques extraits d'un curieux ouvrage, publié en 1839. A notre connaissance, c'est l'ancêtre des "Précis de bachotage", des "Comment réussir à l'épreuve de mathématiques du concours d'entrée aux P et T".

MANUEL

DES ASPIRANTS

A

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

CONTENANT

UN TRÈS GRAND NOMBRE DE QUESTIONS

RECUEILLIES DANS LES DERNIERS EXAMENS DE CONCOURS,

AVEC LES SOLUTIONS ;

PAR M. GEORGES RITT,

AUTEUR DES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE, D'ALGÈBRE, ET D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

1839

La fondation des grandes Ecoles et l'Institution du Baccalauréat provoquèrent rapidement une déviation des objectifs pédagogiques. Il s'agissait essentiellement de préparer aux examens ou concours, accessoirement de cultiver les élèves.
Le danger fut immédiatement perçu par Evariste Galois, qui dénonça cette situation, dans le passage suivant d'un lettre insolente :

> " Jusques à quand les pauvres jeunes gens seront-ils obligés d'écouter ou de répéter toute la journée ? Quand

leur laissera-t-on du temps pour méditer sur cet amas de connaissances, pour coordonner cette foule de propositions sans suite, de calculs sans liaison ? (...) L'élève est moins occupé de s'instruire que de passer son examen. Il lui faut sur chaque théorie une REPETITION de chacun des quatre examinateurs; il doit apprendre les méthodes qu'ils affectionnent, et savoir à l'avance, pour chaque question et chaque examinateur, quelles doivent être ses réponses et même son maintien. Aussi il est vrai de dire qu'on a fondé depuis quelques années une science nouvelle qui va grandissant chaque jour, et qui consiste dans le connaissance des dégoûts et des préférences scientifiques, des manies et de l'humeur de MM. les examinateurs. (...)"

L'ouvrage de RITT nous renseigne sur ce climat. Mais il confirme aussi qu'au milieu du XIXe siècle encore, la plupart des lycéens n'abordaient les rudiments de l'arithmétique -les quatre opérations - qu'à partir de 19 ans. Il fallut attendre un demi siècle pour que l'âge des premières initiations s'abaisse à 6 - 7 ans. Ce fait méconnu est confirmé par le passage suivant de l'ouvrage où l'auteur encourage les "aspirants" à ne pas commencer trop tôt l'étude des sciences. Il dénonce le danger de négliger les humanités greco-latines.

Un calcul bien simple peut mettre en état de se convaincre qu'il est très possible de suivre avec un succès égal les études littéraires et scientifiques. L'enfant qui commence à apprendre ses lettres à six ans au bout de deux ans peut commencer les études universitaires. En supposant qu'il n'entre au collège qu'en septième préparatoire, il lui faudra neuf ans pour achever toutes ses classes. Il pourra donc commencer à 17 ans son cours de mathématiques élémentaires : à 19 ans, il subira l'examen d'admission; s'il échoue, ce qui n'est pas probable, il a encore un an de travail avant d'avoir atteint l'âge auquel il ne peut plus être admis au concours. En supposant qu'il ne soit pas jugé admissible à l'École, il lui reste au moins une éducation assez complète sous beaucoup de rapports, et la possibilité de suivre utilement d'autres carrières. Nous avons adopté le calcul le plus large; mais nous sommes persuadé qu'il est facile d'avoir complété l'éducation littéraire et mathématique des collèges et de subir un premier examen dès l'âge de 18 ans. Quelles que soient les modifications que la méthode universitaire doive éprouver un jour, il n'est pas permis d'espérer que l'éducation puisse être terminée avant cet âge. Le temps est un élément nécessaire au développement complet de l'intelligence; on ne pourra jamais faire que l'aptitude la plus remarquable pour quelque branche que ce soit des connaissances humaines tienne lieu de l'expérience et de la méditation.

Nous avons insisté long-temps sur cette question, qui nous a paru très grave, tant sous le rapport des intérêts véritables de la jeunesse que sous le rapport du bien public et de l'honneur de l'École. Il est nécessaire que le renom de l'École polytechnique ne perde pas dans l'opinion de la France et de l'Europe; et nous sommes convaincu que rien ne saurait y porter atteinte autant que l'abandon des études littéraires, qui développent à la fois l'intelligence, les sentiments moraux, le goût et l'imagination. Aussi, loin de diminuer l'importance des épreuves littéraires du concours, nous ne craignons pas d'exprimer le vœu que les aspirants à l'École polytechnique soient soumis, dans quelques années, à des conditions particulières de capacité, telles qu'un certificat d'études classiques complètes ou le diplôme de bachelier ès lettres.

Quoi qu'il en soit, un élève intelligent et habitué au travail peut réussir à entrer à l'École après deux ans d'études mathématiques. Mais, pour obtenir ce résultat, il est nécessaire non seulement que l'enseignement soit parfaitement conforme aux programmes de l'Université, mais encore que l'élève adopte un mode de travail qui rende cet enseignement fructueux pour lui-même.

Ce point de vue est confirmé par l'avis que donne Lagrange au père d'Augustin Cauchy.

> Cauchy avait à peine douze ans. Toutefois Lagrange se préoccupait du danger que pouvaient courir ces dispositions précoces, si leur développement était trop hâté par une application prématurée. Il insistait souvent sur ce point :"Ne laissez pas, disait-il à M. Cauchy, cet enfant toucher un livre de Mathématiques avant l'âge de dix-sept ans." Dans une autre circonstance, il lui disait encore : "si vous ne vous hâtez de donner à Augustin une solide éducation littéraire, son goût l'entraînera, il sera un grand mathématicien, mais il ne saura pas même écrire sa langue".

D'autres passages du livre de RITT témoignent du règne du cours dicté.

> **Quant à l'élève, son occupation journalière devra être de rédiger avec soin les leçons du professeur. C'est par cet exercice éminemment utile que l'élève s'appropriera en quelque sorte les idées du maître ; il les analysera, les développera dans ses rédactions, qui lui offriront plus tard une immense facilité pour revoir tout le cours de mathématiques et se préparer avantageusement aux épreuves du concours.**
>
> **Afin que ces rédactions soient exactes et complètes autant que possible, il n'oubliera pas de prendre des notes pendant la leçon du professeur, laquelle leçon devra être préparée et étudiée d'avance sur le livre classique adopté pour l'enseignement**

L'objectif est d'obtenir la restitution fidèle du discours magistral. Ainsi l'étude des mathématiques était surtout une affaire de mémoire.

De nos jours, on reconnait volontiers qu'en mathématiques, il y a peu à apprendre, et beaucoup à comprendre. Mais c'est le point de vue opposé qu'exprime la doctrine bachomaniaque de RITT.

> Beaucoup de jeunes gens d'un esprit vif et prompt s'imaginent savoir quand ils n'ont fait que comprendre : aussi sont-ils tout étonnés de se trouver embarrassés quand il s'agit d'expliquer eux-mêmes ce qu'ils ont parfaitement entendu aux leçons du professeur ou à la lecture du livre. Nous ne saurions mettre les aspirants trop en garde contre cette funeste erreur. Il faut, à chaque leçon du maître, s'assurer qu'on l'a bien saisie, qu'on est en état de la répéter seul, sans le secours des rédactions ni des livres, au tableau noir ou sur le papier. Le professeur n'a pas le temps d'interroger chaque jour chacun de ses élèves ; c'est aux élèves à s'interroger consciencieusement, à être aussi exigeants que le serait le professeur lui-même.

Maintenant, quelques conseils à propos de la préparation des épreuves orales.

> Les questions de l'examen sont de deux sortes : les unes ont pour objet le développement d'une théorie particulière ; les autres, l'application des méthodes à la résolution des problèmes. Les premières sont presque entièrement du ressort de la mémoire ; il faut parfaitement savoir son cours pour y répondre avec succès. Les secondes exigent principalement de la sagacité et de l'intelligence ; c'est la partie difficile de l'examen.

MM. les examinateurs ont soin de poser au candidat, dès le début de l'examen, une question facile, afin de lui donner toute l'assurance nécessaire pour répondre aux questions suivantes. Le candidat doit mettre à profit cette disposition bienveillante de l'examinateur. Les effets de la timidité sont redoutables, on ne saurait le nier. Mais le candidat bien pénétré de son sujet ne manque pas de reprendre une assurance convenable, surtout s'il a bien répondu à la première question. On peut dire que le résultat de l'examen dépend en grande partie de la première ou des deux premières réponses.

Les démonstrations des théorèmes doivent être apprises avec soin, dans un véritable esprit d'analyse, de manière que l'intelligence puisse venir au secours de la mémoire : car on ne peut se dissimuler qu'il y a dans les divers procédés de démonstration quelque chose qui paraît arbitraire au premier aspect, mais qui n'est réellement que la conséquence des principes posés antérieurement. Aussi nous n'approuvons pas que l'élève entremêle dans son esprit des démonstrations appartenant à des traités différents,

Voici, à titre documentaire, une liste de questions posées à l'examen oral, vers 1839.- N'est-ce pas étonnant ?

1. Enoncer le nombre 1234567890.

Quelle est la plus haute espèce d'unités d'un nombre de 17 chiffres?

Exposer la règle générale pour énoncer un nombre entier écrit en chiffres, et réciproquement pour écrire en chiffres un nombre énoncé.

2. Théorie de l'égalité des triangles.

Démontrer que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

3. Trouver le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à deux points donnés soit égal à un rapport donné (géométrie élémentaire.)

4*. Deux voyageurs, allant à la rencontre l'un de l'autre, partent en même temps de deux villes, distantes de 215 lieues.

Le premier fait 3 lieues le premier jour, et pendant les jours suivants 2 lieues de plus que le jour précédent; le second fait 5 lieues le premier jour, et pendant les jours suivants 1 lieue de plus que le jour précédent.

Dans combien de jours se rencontreront-ils, et quel chemin chacun d'eux aura-t-il parcouru?

5. Exposer la théorie des limites des racines d'une équation.

6 *. Démontrer que le volume d'un tronc de cône droit est égal au produit de la surface du trapèze générateur par la circonférence que décrit son centre de gravité.

7. Etant donné $\sin a$, trouver $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a$.

Déterminer le nombre de valeurs de l'inconnue et expliquer leur réalité.

8 *. Exposer la méthode générale des tangentes aux courbes algébriques, et déterminer les points de la courbe pour lesquels la tangente est parallèle aux axes.

Appliquer cette méthode à la recherche de l'équation de la tangente aux courbes du 2e degré représentées par l'équation la plus générale.

9. L'angle de deux plans donnés par leurs traces.

Etant donné les traces d'un plan, les projections de l'intersection de ce plan avec un autre plan inconnu et l'angle des deux plans, déterminer les traces du 2e plan.

10. Le levier.

Déterminer les conditions d'équilibre entre la puissance et la résistance dans un système de leviers composés.

---

111. Qu'est-ce qu'une fraction? ordinaire, décimale.

Convertir la fraction $\frac{3}{7}$ en une autre fraction équivalente dont le dénominateur soit 42.

Décomposer la fraction $\frac{3}{7}$ en deux autres fractions dont les dénominations soient 7 et 56. Combien de solutions?

112. Lorsqu'on ajoute le même nombre aux deux termes d'une fraction, la valeur de la fraction change-t-elle?

Dans quels cas la fraction modifiée devient-elle plus grande ou plus petite?

Ceux qui s'étonneront des questions 1, 111 et 112 se reporteront au commentaire suivant, de RITT

Arithmétique. — En général les élèves de mathématiques spéciales affectent un superbe mépris pour le calcul en général, et en particulier pour le calcul numérique : nous regrettons de dire que nous avons vu plus d'une fois des aspirants balbutier à l'examen en énonçant un nombre écrit, hésiter en écrivant un nombre énoncé, faire avec difficulté un calcul assez simple; puis, un instant après, en poser avec un aplomb remarquable les théories les plus difficiles, ou rendre compte avec une parfaite intelligence de la forme et de la position d'une courbe dont l'équation était très compliquée.

L'épreuve écrite laissait la plus grande part à la restitution du cours. Voici les conseils de RITT.

> Les questions de théorie ne sont autre chose que la démonstration des points les plus importants de l'algèbre ou de la géométrie. C'est plutôt affaire de mémoire que d'intelligence. Les candidats exposeront les théorèmes avec ordre et exactitude, et s'attacheront à rédiger les démonstrations avec toute la clarté et la précision désirables. Cette partie de la composition écrite devant servir à constater l'instruction mathématique du candidat, il est de toute importance que les principes invoqués dans les démonstrations soient placés, chacun à son rang, dans l'ordre de l'enseignement. Ainsi pour la démonstration d'un théorème qui se rapporterait à une proposition du III[e] livre de la géométrie de Legendre, par exemple, il ne se servira pas d'un théorème démontré dans les livres suivants. En général cette question de théorie ne peut offrir de difficulté aux candidats déjà préparés par le travail de rédaction.

A côté des questions de cours, l'examen écrit comportant aussi des exercices d'intelligence. Ce n'était pourtant que des questions standard, qui se résolvaient par des procédés dûment programmés.

> Le problème à résoudre offre un peu plus de difficulté, comme toute question de ce genre. Toutefois les exercices nombreux qu'ils n'auront pas manqué de faire dans le cours des études de 2[e] année de mathématiques donneront aux candidats les moyens de sortir avec avantage de cette épreuve difficile.

En voici quelques spécimens :

517*. Etant donné le sommet de la parabole et deux points de la courbe, déterminer la parabole.

522*. Discuter et construire la courbe

$$x^2y^2+x^3y-x^2y+2=0.$$

526*. Trouver les quantités dont le cube est

$$-9+46\sqrt{-1}.$$

568. Démontrer qu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers.

574. Résoudre l'équation

$$x^6 - 1 = 0.$$

575. Etant donné les trois angles dièdres d'un angle trièdre, déterminer les angles rectilignes des faces.

576*. Quelle est la position la plus avantageuse pour se tenir solidement debout?

Autrement dit, quelle est la direction que l'homme doit donner à ses pieds, supposés réduits à leurs axes, pour que l'aire du trapèze de sustentation soit un maximum?

577. Construire les courbes

$$xy - 1 = 0,$$
$$x^2 - 2xy - y^3 = 0;$$

déterminer à moins de 0,1 près les coordonnées des points d'intersection.

Ce sont des exercices-bateaux ! Seul le problème 576 parait facile, mais amusant. En fait, notre ami André Deledicq le propose dans son livre attrayant "Mathématiques buissonnières". Il y aurait songé, raconte-t-il, un matin, en se rasant devant une glace, et en se coupant maladroitement à cause d'une stabilité défectueuse. Les grands esprits se rencontrent !

On notera, avec Evariste Galois, que la bachomanie a toujours constitué un créneau vivement apprécié des éditeurs: l'art de réussir les examens se vend si bien !

AVIS DE L'ÉDITEUR.

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

L. Hachette

Je certifie sur l'honneur qu'aucun des extraits reproduits ci-dessus n'a été contrefait.

G.GLAESER

Courrier

UN PETIT MONSTRE PERIODIQUE

Je me permets de vous écrire à propos de l'article de Monsieur Eric CHANEY sur les fonctions périodiques, paru dans l'Ouvert n°24. C'est là un problème qui m'a également démangé et il se trouve que, lors de la préparation au C.A.P.E.S., j'ai eu l'occasion de rencontrer un monstre moins "horrible" que celui proposé, mais tout aussi destructeur. Je vous le livre :

$$f : \mathbb{Z} \cup \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\text{si } x \in \mathbb{Z} \quad f(x) = 1$$
$$\text{si } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \quad f(x) = 0$$

$\forall\, x \in Df \qquad f(x+1) = f(x)$

De plus Df est stable par translation de vecteur d'abscisse 1 , mais pas invariant. Cependant, on n'a pas envie de dire que f est périodique. L'intérêt de la notion de fonction périodique est de pouvoir réduire le domaine d'étude d'une fonction à un intervalle I (d'amplitude $P \neq 0$). On reconstitue alors la fonction f en translatant (dans les deux sens) le graphe de f/I, c'est-à-dire en fabriquant la fonction g:

$$g \text{ définie sur } Dg = \bigcup_{k \in Z} \left\{ (I \cap Df) + kP \right\}$$

$$g\ (x) = g(x_0 + kP) = f(x_0) \qquad (x_0 \in I \cap Df)$$

Il faut alors avoir f = g , ce qui est vérifié si et seulement si

$$\forall\, x \in Df \qquad f(x+P) = f(x) \quad \text{et } Df + P = Df$$

(définition équivalente à celles proposées dans l'article).

L'intérêt pédagogique étant de montrer qu'une fonction , ce n'est pas seulement une formule f(x) = ..., mais aussi un ensemble de départ.

Périodiquement vôtre,

Francis JAMM.

Nous remercions ce collègue pour sa contribution à la tératogénèse des fonctions périodiques. En fait, le caractère monstrueux tient au fait que le domaine de la fonction n'est pas stable par une translation de T(si T est la période) et pas à l'étrangeté des valeurs prises. Munie du domaine proposé, une fonction constante devient "monstrueuse" !

L'OUVERT

GROUPES FINIS *

La chasse est fermée

Issue des travaux de A. Cauchy, E. Galois et C. Jordan, la théorie des groupes finis s'est fortement développée à la fin du 19ème siècle et au début du 20ème siècle sous l'impulsion de W. Burnside, G. Frobenius, I. Schur et leurs élèves, pour connaître ensuite une période de stagnation relative. Mais, à la suite des travaux de R. Brauer, P. Hall et H. Zassenhaus, pour ne citer qu'eux, cette théorie a connu depuis les années 50 un développement extraordinaire. Plusieurs problèmes jugés en 1900 comme inaccessibles viennent de trouver une solution; tout récemment, en 1980, l'un des plus importants d'entre eux, à savoir la détermination de tous les groupes finis simples, vient d'être résolu. Le but des lignes qui suivent est de retracer brièvement l'historique de cette découverte et de donner quelques références.

1. Groupes à dévisser et à étendre.

Tous les groupes dont il sera question sont finis. La loi de composition d'un groupe sera notée multiplicativement et si G est un groupe ou un ensemble fini, $|G|$ désigne son cardinal. Rappelons d'abord quelques définitions: si G est un groupe, un sous-groupe $H \subseteq G$ est dit distingué dans G si, pour tout $g \in G$ on a $g^{-1}Hg = H$, ce qui signifie que $g^{-1}hg \in H$ quel que soit $h \in H$. Un groupe G est dit simple si les seuls sous-groupes distingués de G sont les sous-groupes triviaux de G, c'est-à-dire G lui-même et $\mathbb{1} = \{1\}$, 1 désignant l'élément neutre de G. Naturellement, si G est commutatif (on dit aussi abélien), tout sous-groupe est distingué.

Voici quelques exemples: 1) désignons par $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$; on a $|S_3| = 6$ et S_3 peut être décrit par l'écriture en cycles de la manière suivante:
$S_3 = \{id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Par exemple $(1\ 3\ 2)$ est la permutation $1 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$ tandis que $(1\ 2)$ est la per-

* Voici l'article annoncé dans l'Ouvert n°24

mutation $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$. Il est alors facile de voir que $\{$ id, $(1\ 2\ 3)$, $(1\ 3\ 2)\}$ est un sous-groupe distingué de S_3, tandis $\{$ id, $(1\ 2)\}$, $\{$id, $(1\ 3)\}$ et $\{$id, $(2\ 3)\}$ sont des sous-groupes qui ne sont pas distingués dans S_3.

2) Soit $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions avec $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$; il est facile de vérifier que Q est un groupe non commutatif dont tous les sous-groupes sont distingués . Q est à ce titre un groupe assez exceptionnel.

3) Dans S_4 le groupe D_4 défini par $D_4 = \{$id, $(1\ 3)$, $(2\ 4)$, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 4\ 3\ 2)\}$ n'est pas distingué; D_4 est le groupe diédral d'ordre 8 et on peut se le représenter comme le groupe des isométries planes qui invarient globalement un carré.

Puisque l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre d'un groupe (théorème de Lagrange), les groupes cycliques d'ordre premier sont évidemment simples. Il est très facile de voir que ce sont les seuls groupes simples commutatifs; on obtient ainsi une première série infinie de groupes finis simples. Dans S_n, groupe des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$, le sous-groupe $\mathcal{A}_n$ formé des permutations paires est un sous-groupe distingué.
Disons tout de suite que $\mathcal{A}_n$ est simple non abélien dès que $n \geqslant 5$. Ce résultat pas tout à fait évident étant connu de Galois et c'est parce que $\mathcal{A}_n$ est simple, pour $n \geqslant 5$, que l'équation générale de degré n ne peut être résolue au moyen des seules opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'extraction de racines m ièmes effectuées sur ces coefficients. Avec les $\mathcal{A}_n (n \geqslant 5)$, on obtient donc une deuxième série infinie de groupes simples.

Donnons maintenant l'idée du dévissage d'un groupe: si G est un groupe, ou bien G est simple ou bien il ne l'est pas: dans le premier cas il n'y a rien à dire. Si G n'est pas simple, G possède un sous-groupe strict G_1 distingué, différent de $\mathbb{1}$ qu'on peut en outre supposer maximal pour ces propriétés. Dire qu'un sous-groupe H d'un groupe G est distingué, ce que l'on note $H \trianglelefteq G$, revient à dire que la loi $(gH)(g_1H) = (gg_1)H$ munit l'ensemble G/H des classes à gauche de G modulo H d'une structure de groupe telle que l'application $g \mapsto gH$ soit un homomorphisme surjectif de G sur G/H dont le noyau est précisément H. Pour exprimer que H est distingué dans G et différent de G, on écrit $H \triangleleft G$ ou $G \triangleright H$. Revenons alors à notre groupe G et son sous-groupe distingué G_1; dire que G_1 est maximal revient à dire que le quotient $G/G_1 = H_1$ est simple.

On est donc dans la situation $G = G_o \triangleright G_1$ avec $G_o/G_1 = H_1$ simple et on a une suite exacte $\mathbb{1} \to G_1 \to G_o \to H_1 \to \mathbb{1}$. Si maintenant G_1 est simple, c'est terminé, sinon il existe G_2 distingué maximal dans G_1 et on a $G_1 \triangleright G_2$ avec $G_1/G_2 = H_2$ simple. Puis on recommence; comme G est fini le processus s'arrête au bout d'un certain nombre de pas. Il est donc clair qu'il existe une suite de sous-groupes emboîtés :

$G = G_o \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \ldots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = \mathbb{1}$ avec $H_i = G_{i-1}/G_i$ simple pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Une telle suite s'appelle une suite de Jordan-Hölder du groupe G. Il y a alors un théorème (dit de Jordan-Hölder) qui affirme que si on a une autre suite de Jordan-Hölder de G, soit :

$G = G'_o \triangleright G'_1 \triangleright G'_2 \triangleright \ldots \triangleright G'_m = \mathbb{1}$, alors m = n et il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que $H_i = G_{i-1}/G_i$ soit isomorphe à $H'_{\sigma(i)} = G'_{\sigma(i)-1}/G'_{\sigma(i)}$. Il n'y a pas en général unicité de la suite de Jordan-Hölder, mais l'ensemble des quotients simples successifs $\{G_{i-1}/G_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est lui essentiellement unique. Remarquons dès à présent que le théorème de Jordan-Hölder n'est pas un théorème profond de la théorie des groupes finis. Par exemple, il y a 5 groupes non isomorphes à 8 éléments; ce sont, C_k désignant le groupe cyclique d'ordre k, C_8, $C_4 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, Q et D_4; chacun d'entre eux possède une suite de Jordan- Hölder du type $G = G_o \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 = \mathbb{1}$ avec $G_{i-1}/G_i \simeq C_2$ quel que soit i, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Donnons néanmoins une application pratique immédiate de ce théorème: soient G et G' deux groupes finis de même ordre,

$G = G_o \triangleright G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_n = \mathbb{1}$ une suite de Jordan-Hölder de G et

$G' = G'_o \triangleright G'_1 \triangleright \ldots \triangleright G'_m = \mathbb{1}$ une suite, non nécessairement maximale de sous-groupes de G'.

Si pour un j, $1 \leqslant j \leqslant m$, G'_{j-1}/G'_j est un groupe simple qui n'est pas isomorphe à aucun des G_{i-1}/G_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, alors on peut affirmer que G et G' ne sont pas isomorphes. Cela résulte du fait qu'on peut toujours plonger une suite de sous-groupes emboîtés, comme pour G', dans une suite maximale, c'est-à-dire de Jordan-Hölder.

La théorie de l'extension de O. Schreier, jointe au théorème de Jordan-Hölder, permet du moins en théorie, de construire tous les groupes G ayant un cardinal donné m dès que l'on connaît tous les groupes simples. En 1926, O. Schreier a résolu le problème suivant: étant donnés deux groupes N et H, trouver tous les groupes G tel que N soit un sous-groupe distingué de G vérifiant $G/N \simeq H$. Un tel groupe G s'appelle une extension de N par le facteur H. Par exemple, si $m = 6$, on trouve deux extensions de C_3 par C_2 à savoir $C_3 \times C_2 \simeq C_6$ et S_3 et on trouve une extension de C_2 par C_3 à savoir $C_3 \times C_3 \simeq C_6$. Il y a donc exactement, à isomorphie près, deux groupes à 6 éléments. Supposons que l'on connaisse la famille S de tous les groupes finis simples, soit m fixé et G un groupe tel que $|G| = m$. Il n'y a clairement qu'un nombre fini de possibilités, compte tenu du fait qu'à cardinal donné, on a évidemment qu'un nombre fini de groupes simples ayant ce cardinal, pour un dévissage de G du style $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_{r-1} \triangleright G_r = \mathbb{1}$ où $G_{i-1}/G_i = S_i$ est un groupe simple puisé dans la famille S (qu'on est censé connaître) pour $1 \leqslant i \leqslant r$.

On a alors $S_r = G_{r-1} \triangleleft G_{r-2}$ et $G_{r-2}/G_{r-1} \simeq S_{r-1}$: la théorie de l'extension de Schreier nous donne alors tous les G_{r-2} possibles.

Puis on recommence:

$G_{r-2} \triangleleft G_{r-3}$ et $G_{r-3}/G_{r-2} \simeq S_{r-2}$ et on détermine tous les G_{r-3} possibles etc...

Ceci peut être fait pour tous les r-uples $(S_1, S_2, \dots S_r)$ où $S_i \in S$, la condition étant que $|S_1| \times |S_2| \times \dots \times |S_r| = m$. Il est donc clair que la connaissance de tous les groupes finis simples permet théoriquement de déterminer tous les groupes finis: à ce titre les groupes simples apparaissent comme les briques élémentaires à partir desquelles on construit tous les groupes. Remarquons tout de même que la théorie de l'extension ne nous donne que la table de G et on ne connait pas à ce jour de procédure simple générale qui permette de décider si, deux tables étant données, elles correspondent à des groupes isomorphes ou non. Ce qui précède est donc bien théorique et les groupes ne se découvrent pas en général par ce procédé. Pour se convaincre de cela, prenez par exemple la table de $\mathfrak{A}_5$ (groupe des permutations paires de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$) dressée de façon un peu sauvage et demandez à quelqu'un qui connait suffisamment les groupes s'il reconnait là la table de $\mathfrak{A}_5$... Il n'en reste pas moins que la détermination de tous les groupes finis simples est un problème central de la théorie des groupes finis.

2. Des origines à 1955

Jusqu'à présent, on a rencontré deux familles de groupes simples, les cycliques C_p (p premier) et les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ ($n \geq 5$). Donnons maintenant un troisième exemple de famille infinie qui sera en quelque sorte prototypique des groupes simples qui proviennent des groupes linéaires classiques.

Soit K un corps fini; d'après un théorème de Wedderburn un tel corps est nécessairement commutatif et il est facile de voir que $|K| = p^r$ où p est un entier premier et r un entier ≥ 1. En outre, si $q = p^r$ est un nombre de cette forme, il existe un et un seul corps fini noté $\mathbb{F}_q$ à q éléments: c'est le corps de rupture du polynôme $X^q - X$ de $\mathbb{F}_p[X]$. Soit alors GL(n, q), le groupe de matrices carrées inversibles $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. L'application "déterminant" est un homomorphisme surjectif de GL (n, q) sur $\mathbb{F}^*_q$ dont le noyau est SL(n, q) lequel est donc un sous-groupe distingué de GL(n, q). Le centre Z de GL(n, q) est formé des matrices $\alpha.1_n$ où $\alpha \in \mathbb{F}^*_q$.

Le groupe quotient GL(n, q)/Z se note PGL (n, q) et on désigne par PSL(n, q) l'image de SL(n, q) dans PGL(n, q). On a alors le résultat suivant qui remonte à Jordan et Dickson: sauf si n = 2 et q = 2 ou 3, le groupe PSL (n, q) est simple non abélien d'ordre

$$\frac{1}{d} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^2-1)(q^3-1)\dots(q^n-1) \text{ où } d = \mathrm{pgcd}(n, q-1).$$

Il est facile de voir que $PSL(2, 2) \simeq \mathcal{S}_3$, que $PSL(2, 3) \simeq \mathcal{A}_4$ et S_3 et $\mathcal{A}_4$ ne sont pas simples. Remarquons en outre que si $(n, q) \neq (2, 2)$ ou $(2, 3)$, $PSL(n, q)$ est le seul facteur de Jordan-Hölder de $GL(n, q)$ qui soit simple et non cyclique.
Les autres groupes linéaires classiques s'obtiennent comme groupes d'automorphismes de certaines formes bilinéaires ou hermitiennes non dégénérées définies sur le $\mathbb{F}_q$ - espace vectoriel $V = \mathbb{F}_q^n$ $(n \geq 2)$. Il y a alors une procédure uniforme pour, partant d'un groupe linéaire classique, obtenir un groupe simple et ceci à un nombre fini d'exceptions près: si G est un groupe linéaire classique, soit G' le groupe dérivé, c'est-à-dire le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ $(x, y \in G)$. Alors si Z' désigne le centre de G', sauf dans un nombre fini de cas, le quotient G'/Z' est un groupe simple non abélien.
Par exemple $GL(n, q)' = SL(n, q)$ et Z' = centre de $SL(n, q)$ $= Z \cap SL(n, q)$ où Z = centre de $GL(n, q)$.
Certaines démonstrations de simplicité sont laborieuses et difficiles, particulièrement dans le cas orthogonal élucidé par Dieudonné. On obtient ainsi six nouvelles familles infinies de groupes simples: la famille $PSL(n, q)$; la famille symplectique (correspondant à une forme bilinéaire antisymétrique) notée $PS_p(2n, q)$ $(n \geq 2)$; la famille unitaire (forme hermitienne) notée $PSU(n, q)$ $(n \geq 3)$; les trois familles orthogonales (forme bilinéaire symétrique), notées $P\Omega(2n + 1, q)$ $(n \geq 3)$, $P\Omega(2n, q, +)$ $(n \geq 4)$ et $P\Omega(2n, q, -)$ $(n \geq 4)$.
Pour les ordres, on pourra consulter la table 1 placée à la fin.

Entre 1901 et 1908, L. Dickson découvrit deux autres familles infinies de groupes simples notés $G_2(q)$ et $E_6(q)$: elles sont reliées aux algèbres de Lie simples complexes G_2 et E_6. Si on ajoute aux dix familles infinies énumérées jusqu'à présent les cinq groupes simples isolés découverts en 1861 par E. Mathieu et baptisés groupes sporadiques par W. Burnside, on obtient tous les groupes simples finis connus au début de 1955. A cette époque, les groupes de Mathieu étaient considérés comme des curiosités naturelles sans réelle importance pour le problème général de la classification des groupes finis simples, mais dans les dernières années, leurs rôles ont considérablement grandi. En 1955, la situation allait être bouleversée par la parution de deux articles, l'un de C. Chevalley, l'autre de R. Brauer et K. Fowler.

3. La période des groupes de Chevalley et leurs variantes: 1955-1966

Chevalley donne une méthode générale pour construire, à partir des algèbres de Lie simples complexes, entièrement classés par W.Killing et E. Cartan au siècle dernier, des familles infinies de groupes simples infinis (appelés depuis groupes de Chevalley ou groupes du type de Lie). Indiquons très sommairement la méthode de Chevalley:

Soit G un groupe de Lie complexe connexe et soit g son algèbre de Lie, si $x \in g$, ad(x) est l'endomorphisme de g défini par $y \longmapsto ad(x)(y) = [x,y]$, $[\ ,\ ]$ étant le crochet usuel des champs de vecteurs sur G. L'application $t \longmapsto \exp(t\, ad(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (ad(x))^m$ de $\mathbb{C}$ dans $Aut(g) \subseteq GL(g)$ est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{C}$ sur un sous-groupe à un paramètre de Aut(g) : ces sous-groupes engendrent un sous- groupe de Aut(g) appelé groupe adjoint et d'ailleurs isomorphe à G/Z où Z est le centre de G.

Si G est un groupe de Lie presque simple (c'est-à-dire si G ne contient aucun sous-groupe distingué fermé non trivial de dimension > 0), Chevalley a montré qu'il existe une base de g dont certains éléments x_r ont la propriété que les sous-groupes à un paramètre X_r: $t \longmapsto \exp(t\,ad(x_r))$ qui leur correspondent engendrent déjà à eux seuls le groupe adjoint et sont tels qu'en outre : 1) la matrice $(ad(x_r))^m$ est nulle pour m assez grand de sorte que $X_r(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (ad(x_r))^m$ est une somme finie et que donc $X_r(t)$ est une matrice dont les coefficients sont en fait des polynômes en t et 2) en outre, ces polynômes sont à coefficients entiers.

On peut alors, dans ces polynômes, remplacer t par les éléments d'un corps commutatif quelconque K et on obtient ainsi un groupe $X_r(K)$, sous-groupe à un paramètre de $GL(n,K)$ si $n=\dim G = \dim_{\mathbb{C}} g$.
On montre alors qu'à quatre exceptions près ($A_1(2)$, $A_1(3)$, $B_2(2)$, $G_2(2)$), le groupe $G_k \leqslant GL(n,K)$ engendré par les $X_r(K)$ est simple (et même dans les cas non simples le groupe G_K a un centre trivial). Prenant alors pour K un corps fini $\mathbb{F}_q$ on obtient ainsi des séries de groupes finis simples.
Rapidement R.Ree montra que la méthode de Chevalley fournissait les familles infinies classiques du § 2, sauf pour les $PSU(n,q)$ et certains groupes orthogonaux; il s'aperçut ainsi que la méthode donnait également les familles $G_2(q)$ et $E_6(q)$ de Dickson, Chevalley lui-même avait montré que les familles infinies correspondant aux algèbres de Lie simples exceptionnelles F_4, E_7 et E_8 étaient nouvelles; on obtient donc ainsi trois nouvelles familles infinies de groupes simples notées $F_4(q)$, $E_7(q)$ et $E_8(q)$ qui étaient inconnues avant 1955. Des rafinements apportés à la méthode de Chevalley permirent alors à R.Steinberg, J.Tits et D. Hertzig non seulement de faire rentrer les familles $PSU(n,q)$ et $P\Omega(2n,q,-)$ dans le cadre de Chevalley, mais encore de trouver deux nouvelles séries notées ${}^3D_4(q)$ et ${}^2E_6(q)$. Ces rafinements sont basés sur des symétries de diagrammes de Dynkin de certaines algèbres de Lie simples complexes (en l'occurence A_l ($l\geq 2$), $D_l(l\geq 4)$ et E_6). Toutes ces procédures furent unifiées par Tits.
En 1960, M. Suzuki trouve, en étudiant les groupes dits de Zassenhaus, une nouvelle famille infinie de groupes simples de permutations, mais dès 1961, R.Ree s'aperçut qu'on pouvait obtenir les groupes de Suzuki avec une nouvelle variante de la méthode de Chevalley et en même temps il construisait, toujours avec une adaptation de cette méthode, deux nouvelles familles infinies de groupes simples: ces trois nouvelles familles infinies (celle de Suzuki et les deux de Ree) sont notées ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ et ${}^2F_4(q)$.

En 1961, la technique de recherche de groupes finis simples, basée sur la théorie des groupes et algèbres de Lie, avait donc permit d'agrandir l'ensemble des familles de groupes finis simples de 8 nouvelles familles portant ainsi leur nombre à 18, lequel est resté inchangé jusqu'à ce jour. Bien des spécialistes des groupes finis crurent alors que la classification des groupes simples finis était achevée.
L'autre résultat des années 55, du à R. Brauer et K. Fowler est le suivant:

Soit G un groupe fini simple et soit t une involution de G (c'est-à-dire un élément d'ordre 2). Alors, si $S = C_G(t) = \{x \in G \mid xt = tx\}$ est le centralisateur de t dans G, on a $|G| < (|S|^2)!$. Il résulte immédiatement de cela qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes simples admettant pour centralisateur d'une involution un groupe donné. Les théoriciens des groupes s'attaquèrent alors au problème suivant : étant donné un groupe S contenant une involution dans son centre, trouver tous les groupes simples G tel que $S \simeq C_G(t)$ pour une certaine involution t de G. Notons que le théorème de Brauer-Fowler, malgré son importance, n'est pas très difficile. Il n'en va pas de même du résultat suivant, établi en 1963 par W. Feit et J.Thompson: <u>tout groupe fini simple non abélien est d'ordre pair</u>. C'est la plus longue démonstration actuellement connue en mathématiques (environ 300 pages d'une revue). Un ancien résultat de Cauchy dit que si un nombre premier p divise l'ordre d'un groupe fini G, alors G contient un élément d'ordre p. Le théorème de Feit et Thompson assure alors que tout groupe fini simple non abélien contient une involution. Le problème de la détermination des groupes simples ayant pour centralisateur d'une involution un groupe donné s'en trouvait ainsi grandi et allait faire désormais l'objet de recherches actives de la part des théoriciens des groupes.

4. La période des groupes sporadiques: 1966-1980

Soit G un groupe fini, p un nombre premier divisant l'ordre de G et écrivons $|G| = p^a m$ où p ne divise pas m. Un sous-groupe P de G d'ordre p^a s'appelle un p-sous-groupe de Sylow de G; un célèbre théorème du à Sylow affirme alors que si p divise G 1) G possède au moins un p-sous-groupe de Sylow 2) tous les p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués et 3) leur nombre est congru à 1 modulo p et divise $|G|$.

Un non moins célèbre théorème du à Burnside affirme que l'ordre d'un groupe simple non abélien est divisible par au moins 3 nombres premiers distincts (c'est le mieux qu'on peut espérer, au moins naïvement car $\mathfrak{A}_5$ est simple et $|\mathfrak{A}_5| = 2^2.3.5$).

En 1966, coup de théâtre: environ un siècle après les découvertes de Mathieu, Z.Janko, en classifiant les groupes simples dont les 2 sous-groupes de Sylow sont abéliens, trouve un nouveau groupe simple qui ne rentre dans aucune des 18 familles connues. Le groupe G est caractérisé par les faits suivants: ⓐ G ne possède pas de sous-groupe d'indice 2.

ⓑ les 2 sous-groupes de Sylow de G sont abéliens

(en fait ils sont isomorphes à $C_2 \times C_2 \times C_2$)

© G possède une involution dont le centralisateur est isomorphe à $C_2 \times \mathfrak{A}_5$. Janko prouve d'abord qu'un tel groupe est nécessairement simple; ensuite il montre son existence en le présentant comme sous-groupe de GL $(7, \mathbb{F}_{11})$: c'est le sous-groupe engendré par les matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3&2&-1&-1&-3&-1&-3 \\ -2&1&1&3&1&3&3 \\ -1&-1&-3&-1&-3&-3&2 \\ -1&-3&-1&-3&-3&2&-1 \\ -3&-1&-3&-3&2&-1&-1 \\ 1&3&3&-2&1&1&3 \\ 3&3&2&1&1&3&1 \end{bmatrix}$$

A et B sont des matrices à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$, d'ordres 7 et 5 respectivement. Ce groupe, le premier sporadique découvert par Janko, est généralement désigné par J ou Ja ou encore J1. Son ordre est $|J1| = 2^3.3.5.7.11.19 = 175.560$.

Désormais la chasse aux groupes sporadiques est commencée et elle va être fructueuse puisque entre 1967 et 1980, 20 autres groupes sporadiques, outre les 5 groupes de Mathieu et le groupe de Janko J1, vont être découverts. Les méthodes utilisées sont variées et complexes et souvent l'existence est prouvée par un ou plusieurs autres théoriciens des groupes que celui ou ceux qui proposèrent la possibilité du groupe avec sa caractérisation. On renvoie le lecteur à la table 2 située à la fin.

Signalons quand même un résultat important obtenu par J.Thompson en 1968: disons qu'un groupe simple non abélien est minimal s'il ne contient strictement aucun autre groupe simple non abélien. Puisqu'un groupe d'ordre < 60 n'est pas simple non abélien, $\mathfrak{A}_5$ est clairement simple minimal et c'est le seul groupe alterné simple minimal. Thompson a déterminé tous les groupes simples minimaux; de façon précise, soit G un groupe simple non abélien, alors G contient l'un des groupes suivants : PSL $(3,3)$, PSL$(2,p)$ (p premier > 3 et $p^2+1 \equiv 0 \bmod 5$), PSL $(2,2^p)$, PSL $(2,3^p)$ (p premier impair) ou ${}^2B_2(2^p) = Sz(2^p)$ (p premier impair).

Pour terminer ce paragraphe, on peut faire la remarque suivante: les 26 groupes sporadiques ne sont pas 26 entités isolées. Il y a entre eux des liens et on peut les grouper selon la ou les techniques qui ont permis de les "détecter" puis d'établir leur existence. Disons en gros que les 5 groupes de Mathieu peuvent être obtenus comme extensions de groupes multitransitifs; il en va de même pour les groupes de Higman-Sims et de McLaughlin, (les groupes de Mathieu peuvent aussi s'obtenir comme groupes d'automorphismes de système de Steiner appropriés). Les groupes de Higman-Sims, de McLaughlin, de Suzuki, de Hall-Janko ainsi que les 3 groupes de Fischer peuvent se caractériser comme groupes d'automorphismes de graphes convenables, tandis que les 3 groupes de Conway sont issus de l'étude du réseau de Leech dans $\mathbb{R}^{24}$. C'est en cherchant à caractériser les centralisateurs d'involutions (cf § 3) qu'on a découvert les groupes de Janko, de Hall-Janko, de Higman-Janko-McKay, de Held-Higman-McKay, de Lyons-Sims ainsi que le J4 (le dernier sporadique découvert).

Les groupes de Harada-Norton, de Thompson-Smith, de O'Nan et de Rudvalis sont issus de problèmes de classification; enfin le Bébé Monstre B et le Monstre M furent découverts lorsque B.Fischer s'attaqua au problème de la classification des groupes engendrés par une classe de conjugaison d'involutions dont le produit de deux quelconques d'entre elles est d'ordre ≤ 4.

5. L'achèvement

Fin 1979, les experts estimaient qu'il n'existait que 26 groupes sporadiques, mais ils n'en connaissaient effectivement que 24: il leur en manquait donc deux, à savoir le "monstre" M = F1 et le groupe J4. Le groupe J4 est un groupe d'ordre $2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.31.37.43$ dont l'existence avait été conjecturée dès 1973 par Zvonimir Janko (Université de Heidelberg). Pour ce qui est du groupe F1, c'est un groupe d'ordre

$$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71$$

Ce nombre est de l'ordre 10^{54}: à titre de comparaison, disons qu'on estime que le nombre total de protons et de neutrons de la Terre est de l'ordre de 4×10^{51}. L'existence du groupe F1 avait été prédite en 1972 par Bernd Fischer (Université de Bielefeld) et Robert Griess (Université du Michigan); c'est John Conway (Université de Cambridge) qui l'a baptisé le "monstre" vu son cardinal. En janvier 1980, R. Griess annonçait qu'il avait construit le monstre à la main, c'est-à-dire sans ordinateur: la construction utilise un groupe de symétries dans un espace de dimension 196.833. Ceci est d'autant plus surprenant que le monstre "contient" d'une certaine façon (voir plus loin) nombre de sporadiques dont les existences ne peuvent être établies qu'à l'aide de l'ordinateur. D'autre part, le 20 février 1980, D. Benson, J. Conway, S. Norton, R.Parker et J.Thackray (Université de Cambridge) annoncèrent l'existence, prouvée par des techniques d'ordinateurs, du groupe J4.

Disons qu'un groupe H intervient dans un groupe G si G possède deux sous-groupes K et L tels que L soit distingué dans K et tels que K/L soit isomorphes à H. Clairement si H intervient dans G, $|H|$ divise $|G|$. Puisque 37 divise $|J4|$ et ne divise pas $|F1|$, J4 n'intervient pas dans F1; néanmoins 20 des 26 groupes sporadiques interviennent dans le monstre F1. (R.Griess parle de "he and his happy family").

Tout récemment (octobre 1980), on vient d'apprendre que des théoriciens des groupes (on pense généralement à M. Ashbacher (Université de Californie), J. Conway et D.Gorenstein (Université Rutgens)) auraient démontré qu'il n'existe pas d'autre groupe sporadique que les 26 connus.

Moralité: on connait tous les groupes simples finis. Jusqu'à présent, aucun article (à la connaissance du rédacteur) n'a encore été publié au sujet de l'existence de J4 et F1 ou du fait qu'il y a exactement 26 groupes sporadiques.

6. Quelques conséquences

La classification de tous les groupes finis simples va permettre d'apporter une réponse à plusieurs vieilles conjectures ou problèmes. Signalons entre autres :

a) la conjecture de Schreier: si G est un groupe simple ExtG = Aut G/Int G est un groupe résoluble. La réponse sera oui.

b) la conjecture de Frobenius : soit G un groupe fini et soit m un diviseur de $|G|$: si dans G, l'équation $x^m = 1$ possède exactement m solutions, celles-ci forment un sous-groupe (alors nécessairement distingué) de G.

Réponse : oui.

c) il n'existe pas de groupes 6-transitifs autres que $\mathfrak{S}_n$ ($n \geq 6$) et $\mathfrak{A}_n$ ($n \geq 8$). La réponse sera oui.

d) un groupe simple est engendré par deux éléments.

e) la détermination de tous les groupes 2-transitifs, voire primitifs.

Pour terminer, signalons un fait surprenant: si G est un groupe, une représentation linéaire (ordinaire) de G est un homomorphisme $R: G \longmapsto GL(V)$ où V est un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel de dimension finie. R est irréductible s'il n'existe pas de sous-espace $0 < W < V$ stable par toutes les opérations $R(g)$ (pour $g \in G$) et le caractère d'une représentation n'est rien d'autre que l'application $g \longmapsto \chi(g)$ = Trace de $R(g)$ de G dans $\mathbb{C}$. Il est assez facile de montrer que le nombre de représentations irréductibles d'un groupe G (non isomorphes entre elles) est égal au nombre de classes de conjugaison de G et manifestement un caractère est constant sur une classe de conjugaison. On peut donc parler de la table (carrée) des caractères irréductibles d'un groupe G. Il se trouve que les coefficients de la table des caractères irréductibles du monstre F 1 (c'est une table 194x194) sont intimement reliés aux premiers coefficients de la série de la fonction modulaire elliptique ($q=e^{2\pi iz}$)

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884\, q + 21493760\, q^2 + \dots$$

Cette numérologie pour le moins étrange a été découverte et étudiée par J.McKay, J.G.Thompson, J.H. Conway, S.P.Norton.

Table I : Les 18 familles infinies de groupes finis simples.

Découvert par	Notation de Lie	Ordre	
C_p		p (p premier)	
$\mathfrak{A}_n$ $(n \geq 5)$		$\frac{1}{2} n!$	
$PSL(n,q)$ $(n \geq 2)$	$A_{n-1}(q)$	$(1/d)\, q^{n(n-1)/2} (q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^2-1)$	$d=(n,q-1)$
$PSp(2n,q)$ $(n\geq 2)$	$C_n(q)$	$(1/d)\, q^{n^2}(q^{2n}-1)(q^{2(n-1)}-1)\dots(q^2-1)$	$d=(2,q-1)$
$PSU(n,q)$ $(n \geq 3)$	${}^2A_{n-1}(q)$	$(1/d)\, q^{n(n-1)/2}(q^n-(-1)^n)(q^n-(-1)^{n-1})\dots(q^2-1)$	$d=(n,q-1)$
$P\Omega(2n+1,q)$ $(n\geq 3)$	$B_n(q)$	$(1/d)\, q^{n^2}(q^{2n}-1)(q^{2(n-1)}-1)\dots(q^2-1)$	$d=(2,q-1)$
$P\Omega(2n,q,+)$ $(n \geq 4)$	$D_n(q)$	$(1/d)\, q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$d=(4,q^n-1)$
$P\Omega(2n,q,-)$ $(n\geq 4)$	${}^2D_n(q)$	$(1/d)\, q^{n(n-1)}(q^n+1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$	$d=(4,q^n+1)$
Dickson (1901)	$G_2(q)$	$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	
Dickson (1905)	$E_6(q)$	$(1/d)\, q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$	$d=(3,q-1)$
↑ ce qui était connu	en 1955 ↑	↓ ce qui a été découvert entre 1955 et 1961 ↓	
Chevalley (1955)	$F_4(q)$	$q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$	
Chevalley (1955)	$E_7(q)$	$(1/d)\, q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$	$d=(2,q-1)$
Chevalley (1955)	$E_8(q)$	$q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$	
Steinberg (1959)	${}^3D_4(q)$	$q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$	
Steinberg (1959)	${}^2E_6(q)$	$(1/d)\, q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$	$d=(3,q+1)$
Suzuki $Sz(q)$ (1960)	${}^2B_2(q)$ $q=2^{2n+1}$	$q^2(q^2+1)(q-1)$	
Ree $R_1(q)$ (1961)	${}^2G_2(q)$ $q=3^{2n+1}$	$q^3(q^3+1)(q-1)$	
Ree $R_2(q)$ (1961)	${}^2F_4(q)$ $q=2^{2n+1}$	$q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$	

Exceptions : $PSL(2,2)$, $PSL(2,3)$, $PSU(3,2)$ et ${}^2B_2(2)$ sont des groupes résolubles
$PSp(4,2)$, $G_2(2)$ et ${}^2F_4(2)$ ont un groupe dérivé d'indice 2 qui est simple
${}^2G_2(3)$ a un groupe dérivé d'indice 3 qui est simple.

Isomorphismes : $B_1(q) \simeq C_1(q) \simeq A_1(q) \simeq {}^2A_1(q)$; $B_2(q) \simeq C_2(q)$; $D_2(q) \simeq A_1(q) \times A_1(q)$; ${}^2D_2(q) \simeq A_1(q^2)$
$D_3(q) \simeq A_3(q)$; ${}^2D_3(q) \simeq {}^2A_3(q)$ Si $q=2$ $B_n(q) \simeq C_n(q)$ $(n \geq 3)$
$\mathfrak{A}_5 \simeq PSL(2,4) \simeq PSL(2,5)$; $\mathfrak{A}_6 \simeq PSL(2,9) \simeq PSp(4,2)'$; $\mathfrak{A}_8 \simeq PSL(4,2)$; $PSL(2,7) \simeq PS(3,2)$
$PSp(4,3) \simeq PSU(4,2)$; $PSU(3,3) \simeq G_2(2)'$; $PSL(2,8) \simeq {}^2G_2(3)'$.

Table II : Les 26 groupes simples sporadiques

Détecté par	Confirmé par	Symboles	Ordre
Mathieu (1861)	Mathieu (1861)	M_{11}	$2^4.3^2.5.11 = 7.920$
Mathieu (1861)	Mathieu (1861)	M_{12}	$2^6.3^3.5.11 = 95.040$
Mathieu (1873)	Mathieu (1873)	M_{22}	$2^7.3^2.5.7.11 = 443.520$
Mathieu (1873)	Mathieu (1873)	M_{23}	$2^7.3^2.5.7.11.23 = 10.200.960$
Mathieu (1873)	Mathieu (1873)	M_{24}	$2^{10}.3^3.5.7.11.23 = 244.823.040$
Janko (1965)	Janko (1965)	J ou J1 ou Ja	$2^3.3.5.7.11.19 = 175.560$
D. Higman, Sims (1967)	D. Higman, Sims (1967)	HS ou HiS	$2^9.3^2.5^3.7.11 = 44.352.000$
Hall, Janko (1967)	Hall, Wales (1967)	J2 ou HaJ ou HaJW	$2^7.3^3.5^2.7 = 604.800$
McLaughlin (1968)	McLaughlin (1968)	McL	$2^7.3^6.5^3.7.11 = 898.128.000$
Suzuki (1968)	Suzuki (1968)	Sz	$2^{13}.3^7.5^2.7.11.13 = 448.345.497.600$
Janko (1967)	G. Higman, McKay (1968)	J3 ou H-J-McK	$2^7.3^5.5.17.19 = 50.232.960$
Conway (1968)	Conway (1968)	·1 ou Co_1	$2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23 = 4.157.771.806.543.360.000$
Conway (1968)	Conway (1968)	·2 ou Co_2	$2^{18}.3^6.5^3.7.11.23 = 42.305.421.312.000$
Conway (1968)	Conway (1968)	·3 ou Co_3	$2^{10}.3^7.5^3.7.11.23 = 495.766.656.000$
Held (1968)	G. Higman, McKay (1968)	He ou H-H-McK	$2^{10}.3^3.5^2.7^3.17 = 4.030.387.200$
Fischer (1969)	Fischer (1969)	Fi_{22} ou M(22)	$2^{17}.3^9.5^2.7.11.13 = 64.561.751.654.400$
Fischer (1969)	Fischer (1969)	Fi_{23} ou M(23)	$2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23 = 4.089.470.473.293.004.800$
Fischer (1969)	Fischer (1969)	Fi_{24} ou M(24)	$2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29 = 1.225.205.709.190.661.721.292.80$
Lyons (1970)	Sims (1970)	Ly ou Ly-S	$2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67 = 51.765.179.004.000.000$
Rudvalis (1972)	Conway, Wales (1972)	Rv ou R-C-W	$2^{14}.3^3.5^3.7.13.29 = 145.926.144.000$
O'Nan (1972)	Sims (1973)	O'N ou O'N-S	$2^9.3^4.5.7^3.11.19.31 = 460.815.505.920$
Thompson (1973)	Smith (1974)	T	$2^{15}.3^{10}.5^3.7^2.13.19.31 = 90.745.943.887.872.000$
Harada, Norton (1974)	Conway, Smith (1974)	H-N ou Ha-C-N-S	$2^{14}.3^6.5^6.7.11.19 = 273.030.912.000.000$
Fischer (1973)	Leon, Sims (1976)	B ou F ou F-L-S	$2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.19.23.31.47 \approx 4{,}15 \times 10^{34}$
Fischer, Griess (1972)	Griess (1980)	M ou F1	$2^{46}.3^{20}.5^9.7^6.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.71 \approx 8{,}08 \times 10^{5}$
Janko (1973)	Norton, Parker, Benson, Conway, Thackray (1980)	J4	$2^{21}.3^3.5.7.11^3.23.29.31.37.43 = 86.775.571.046.077.562.880$

$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ interviennent dans M_{24}

$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$, J2, Sz, H-S, McL, Co_3, Co_2 et Co_1 interviennent dans Co_1

$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$, J2, Sz, H-S, McL, Co_3, Co_2, Co_1, He, Fi_{22}, Fi_{23} et Fi_{24} interviennent dans Fi_{24}

$M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$, J2, Sz, H-S, McL, Co_3, Co_2, Co_1, He, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi_{24}, H-N, T, B et M interviennent dans le monstre M.

L'ordre adopté correspond à la chronologie de la confirmation.

RALLYE 1981

Un exercice, sept méthodes!

L'un des problèmes donnés en Première au Rallye Mathématique de cette année était le suivant :

" Montrer que si n réels ($n \geqslant 2$) ont une somme non nulle, pour tout entier p tel que $1 \leqslant p < n$, il existe p termes de cette suite dont la somme est également non nulle ".

Nous devons cet énoncé à notre collègue WEISSBECKER du Lycée Couffignal de Strasbourg. L'idée lui en a été donnée par le théorème classique qui énonce la propriété dite d'"associativité" du barycentre d'un "système pondéré" de n points: on peut remplacer p de ces points, de masse totale non nulle, par leur barycentre, etc, etc .... Une question est apparue naturelle à notre collègue: est-il possible de trouver des sous-systèmes ayant cette propriété pour tout p donné ($p < n$) ?

En dehors de son intérêt pour le Rallye, cet exercice nous a paru remarquable à plus d'un titre.
D'abord, tout en étant accessible à un élève de seconde, il peut "poser des problèmes" à un élève de terminale, voire à un élève de niveau supérieur. Ensuite la correction des copies du Rallye nous a révélé une richesse tout à fait inattendue des manières de l'aborder (*). Aussi pensons-nous qu'il pourrait constituer un thème instructif de réflexion et de discussion, autant dans une classe de seconde, de première que de terminale.

C'est ce qui nous a incité à le proposer aux lecteurs de l'"Ouvert" qui trouveront ci-dessous un résumé des solutions que nous connaissons. Nous espérons qu'ils nous en proposeront quelques autres...

F.KOECHLIN R.ISS

Solutions : N.B. Pour simplifier le langage, nous commettons l'abus qui consistera à désigner par s_p à la fois une suite de p termes choisis parmi les n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ donnés et la somme des termes de cette suite (même dans le cas $p = 1$).

Solution 1: Que se passe-t-il si toutes les s_p (pour p donné) sont nulles ?
Si toutes les sommes s_p (il y en a C_n^p) sont nulles, leur somme l'est aussi. Or dans cette somme, tous les a_i figurent le même nombre de fois k (avec $k = C_{n-1}^{p-1}$) . Elle s'écrit donc $k(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = 0$

Or, $s_n \neq 0$. Il ya donc au moins une s_p non nulle.

Solution 2 : Si une s_p est nulle, peut-on, en y changeant un terme, en déduire une s_p non nulle ?

Si, par exemple, $s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p = 0 \qquad 1 \leqslant p \leqslant n-1$,
les (n-p) autres nombres ne sont pas tous nuls, car leur somme est non nulle. On en choisit un non nul, soit b.
Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ne sont pas tous égaux à b (sinon on aurait $s_p = pb \neq 0$). Il en existe donc un qui est différent de b, par exemple, $a_1 \neq b$. Alors :

$$s'_p = b + a_2 + \ldots + a_p = b - a_1 \neq 0$$

Solution 3: D'une s_p non nulle, peut-on extraire une s_{p-1} non nulle ? ("récurrence descendante" sur p)

Supposons $s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \neq 0 \qquad 2 \leqslant p \leqslant n$
Un des termes de cette somme est différent de s_p (sinon on aurait $ps_p = s_p$ et donc $s_p = 0$ car $p \neq 1$)
Soit par exemple $a_p \neq s_p$. Alors :

$$s_{p-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = s_p - a_p \neq 0$$

A partir de $s_n \neq 0$, on peut donc, en enlevant un terme chaque fois, trouver une suite de sommes $s_{n-1}, \ldots, s_1$ non nulles.

Solution 4 : Récurrence sur n

Hypothèse de récurrence: supposons que, lorsque (n-1) nombres ont une somme non nulle, pour tout $p \leqslant n-1$, il existe une s_p non nulle.

Si $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n \neq 0$, en raisonnant comme dans la 3ème solution, on en déduit une somme s_{n-1} non nulle.

La récurrence (facile à amorcer) est donc établie.

Solution 5: A partir d'une s_p non nulle, peut-on fabriquer une s_{p+1} non nulle ? ("récurrence ascendante" sur p).

Soit par exemple: $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = s_p \neq 0 \quad 1 \leqslant p \leqslant n-2$

- ou bien les (n-p) nombres restants (ils sont au moins 2) ne sont pas égaux, alors il y en a au moins un qui est différent de $(-s_p)$.

  Par exemple: $a_{p+1} \neq -s_p$

  Alors: $s_{p+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1} = s_p + a_{p+1} \neq 0$

- ou bien les (n-p) autres nombres sont égaux à $-s_p$; dans ce cas les $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ne sont pas tous égaux à $-s_p$ (sinon on aurait $-ps_p = s_p \Rightarrow s_p = 0$). Soit par exemple: $a_p \neq -s_p$. Alors :

$$s'_{p+1} = (a_1 + \ldots + a_{p-1}) + a_{p+1} + a_{p+2} = (s_p - a_p) - 2s_p = -(s_p + a_p) \neq 0$$

A partir d'un terme non nul de s_n (il y en a au moins un), on peut donc trouver une suite de sommes $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ non nulles.

Solution 6: que se passe-t-il si des sommes s_p qui ne diffèrent que par un terme sont nulles ?

Un des a_i au moins est non nul, par exemple $a_1 \neq 0$.

Supposons nulles les (p+1) sommes obtenues en supprimant successivement dans $a_1 + a_2 + \ldots + a_p + a_{p+1}$

les termes $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$:

$$\begin{cases} \quad a_2 + a_3 + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \\ a_1 \quad + a_3 + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \\ a_1 + a_2 \quad + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \\ \text{-------------------------} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p \quad = 0 \end{cases}$$

En soustrayant la première équation des suivantes, on obtient
$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = a_{p+1}$

On en déduit $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = pa_1 = 0$
Or $a_1 \neq 0$. Sur les $(p+1)$ sommes s_p ci-dessus, il y en a donc au moins une non nulle.

<u>Solution 7</u> : <u>Construire une</u> $s_p \neq 0$ <u>en choisissant convenablement le signe de ses termes</u>.

Quitte à changer tous les signes, nous pouvons supposer $s_n > 0$. On en réordonne les termes de façon que les premiers termes $a_1, \ldots, a_k$ soient strictement positifs, les suivants $a_{k+1}, \ldots, a_n$ négatifs ou nuls.

Il est facile de voir alors que toute somme

$$s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \qquad 1 \leqslant p \leqslant n$$

est strictement positive. (c'est évident si $p < k$; sinon s_p est supérieure ou égale à s_n).

<u>Commentaire</u>:

- la propriété: (1) $a \neq 0 \Rightarrow ka \neq 0$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ est essentielle dans <u>toutes</u> ces démonstrations, même dans la 7ème où la structure de groupe ordonné suppose la propriété (1).
- seules les solutions 2 et 7 permettent de fabriquer directement (autrement que par récurrence) une somme s_p non nulle, pour p donné.

---

* sur les 160 copies de première corrigées au Rallye, 113 ont abordé ce problème. 25 copies n'ont pas compris l'énoncé (interprété de la façon

suivante: $\forall n, \exists p < n$ tel que $s_p \neq 0$). 53 copies n'ont rien fourni de valable (étude pour des petites valeurs de n ou p seulement, raisonnements faux, etc...). 35 copies en revanche ont fourni sinon une démonstration complète, au moins une idée de raisonnement valable. Ainsi, six copies utilisent la solution 1; huit, la solution 2; treize, les solutions 3 ou 4; cinq, la solution 5. Des variantes des solutions 6 et 7 proposées respectivement par 1 et 2 copies.

<u>QUESTION</u>: QUEL JOUR SOMMES-NOUS ?

<u>REPONSE</u> :

$$[\, 2{,}6m - 0{,}2 \,] + d + a + [\, \tfrac{a}{4} \,] + [\, \tfrac{s}{4} \,] - 2\, s$$

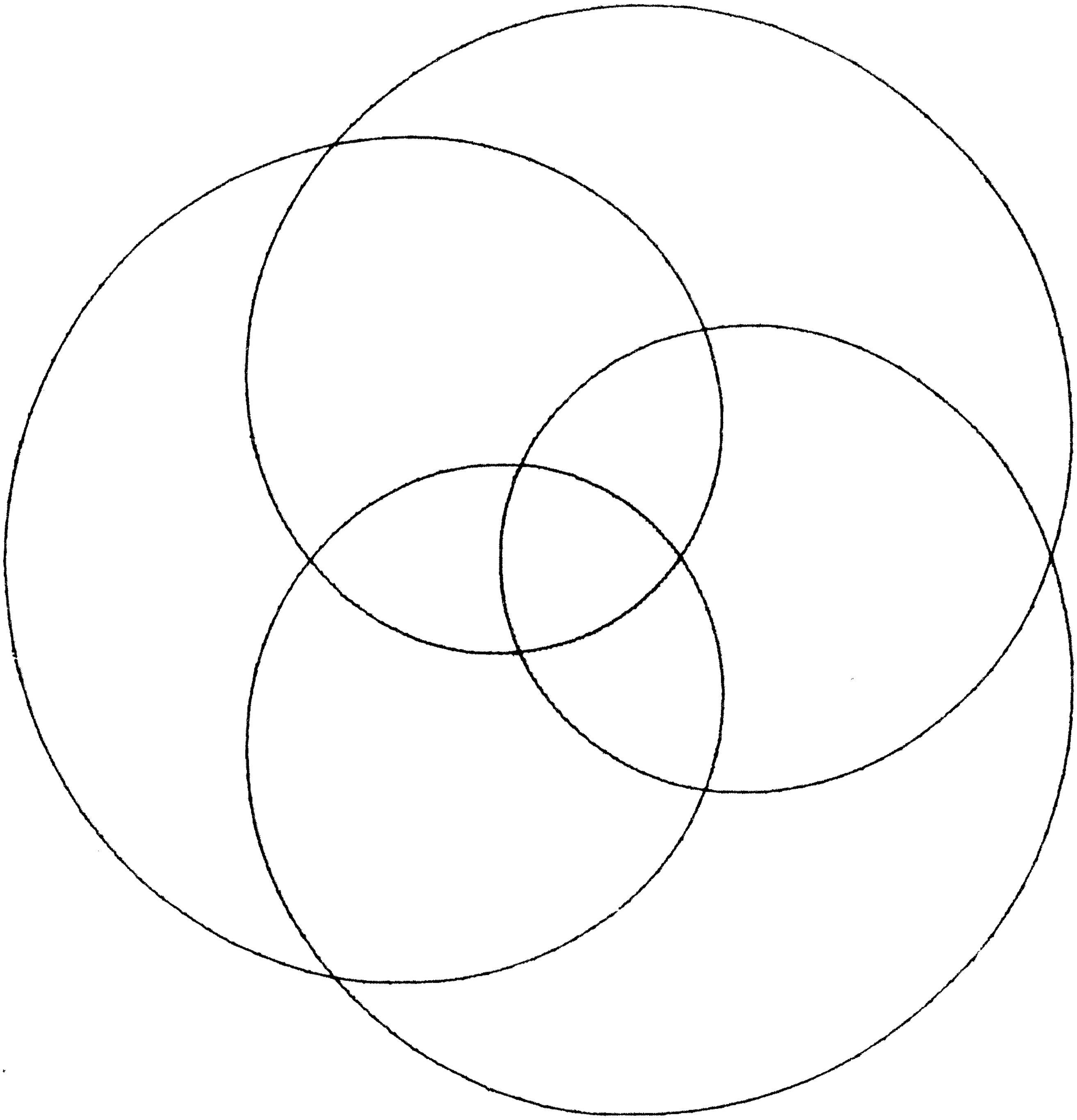
Ce résultat est à prendre modulo 7, et fournit le nom du jour en question suivant la convention: 0 est dimanche, 1 est lundi ...

D'autre part :

- d est la date dans le mois
- m est le numéro du mois, mars portant le n°1, avril le n°2, ... février le n°12.
- a est constitué des deux derniers chiffres du millésime.
- s est constitué des premiers chiffres du millésime.

Exemples :

- Pour le 16 avril 1981,
  d= 16; m= 2; a= 81; s= 19
- Pour le 1er janvier 2000,
  d= 1; m= 11; a= 99; s= 19



Cette rosace est une des courbes multifocales étudiées dans l'article qui suit. Elle est le lieu des points dont les distances r, r', r'' aux sommets du triangle curviligne central vérifient:

$$\pm r \pm r' \pm r'' = 2a, \text{ a étant le côté du triangle.}$$

Il s'agit d'une courbe algébrique du 8e degré, fermée et sans points anguleux. Elle se trace d'un seul trait.

Le dessin a été effectué par un micro-ordinateur APPLE II; d'après un programme de Nicole VOGEL.

Cette rosace illustre le premier chapitre sur les courbes multifocales de la page 30 . C'est une courbe algébrique $(\mathcal{A})$ du 8e degré. On peut la tracer d'un seul trait, fermé et sans point anguleux.

Soit a le côté du triangle équilatéral T, dont les sommets sont les points doubles de $(\mathcal{A})$ proches du centre, et soient r, r', r" leurs distances d'un point du plan. La trifocale lieu des points tels que

$$r + r' + r'' = 2a$$

est le triangle curviligne de mêmes sommets que T. Chacune des trois autres branches de $(\mathcal{A})$, ,en forme de coeur, est le lieu des points qui vérifient une relation du type

$$r' + r'' - r = 2a.$$

Chaque droite-hauteur de T porte 3 points doubles de la courbe $(\mathcal{A})$; celui qui est un sommet de T se trouve au milieu du segment des deux autres, de longueur 4a. Les côtés a, b, c des trois triangles équilatéraux, dont les sommets sont des points doubles, vérifient

$$c - b = 2a.$$

COURBES REMARQUABLES

"Le proximal de n points et leurs focales"*

On va étudier - élémentairement - une famille de courbes planes, qui ont une définition géométrique simple. Puis on étendra les résultats à des surfaces semblablement définies. Comme application essentielle, on trouvera le proximal de n points du plan ou de l'espace, problème posé jadis par Fermat pour $n = 3$.

Définitions : Nous appelons focale, le lieu des points du plan dont la somme s des distances à n points fixes est constante. Nous dirons que ces derniers sont les foyers de la courbe et que s est sa somme focale.

A part l'ellipse, nos focales n'ont pas de propriété optique, contrairement aux classiques focales de Darboux .

I. Nature analytique de la focale.

Toujours à part l'ellipse, l'étude de la focale semble inabordable par son équation cartésienne, tant elle est complexe.

Théorème 1. Une n-focale est une branche d'une courbe algébrique, qui est de degré 2^n en général .

Les rayons focaux r_i du point courant (x,y) de la focale vérifient l'équation multipolaire

$$(f) \qquad r_1 + r_2 + \dots + r_n - s = 0 .$$

La focale est une branche de la courbe d'équation

$$(A) \qquad \Pi\,(\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_n r_n - s) = 0$$

où les $\varepsilon_i = \pm 1$ présentent toutes les 2^n combinaisons de signes possibles. Le produit Π est invariant si on y change r_i en $-r_i$. Dans Π effectué, tout r_i ne figure donc que par son carré. Comme (A) est de degré 2^n par rapport aux r_i, elle est de degré 2^n au plus en x, y.

---
* Conférence faite à la Régionale de Strasbourg en mai 1981

Quelques propriétés de la courbe A

1) L'ellipse est le seul cas remarquable d'abaissement du degré de l'équation. En effet:

$$(1) \qquad \Pi_2 = (r + r'-s)\ (-r-r'-s)(r-r'-s)(-r+r'-s) = 0$$

est du second degré seulement en x, y.(Les termes du quatrième degré en r_i sont $(r^2 - r'^2)^2 = (2cx)^2$, où c désigne la distance focale). Le degré de l'équation peut aussi s'abaisser s'il y a des foyers multiples.

2) La courbe A se compose de 2^n branches, dont certaines sont imaginaires*.

En effet, toute combinaison de signes dans

$$(2) \qquad \epsilon_1 r_1 + \epsilon_2 r_2 + \dots + \epsilon_n r_n = s$$

donne une branche. Mais si, par exemple, tous les ϵ_i sont négatifs, la branche correspondante est manifestement imaginaire. Pour (1), seul le facteur $r + r' - s$ donne une branche réelle, si s est supérieur à sa valeur minimale $s_o = c$.

3) Pour tout point intérieur à la focale f (on verra qu'elle est convexe et fermée)

$$\Sigma\epsilon_i r_i < \Sigma r_i < s.$$

Donc aucun point de A n'est intérieur à f.

4) Pour n = 3, le produit Π_3 a huit facteurs, mais A_3 ne comporte pour $s > s_o$ que 4 branches réelles, car aux facteurs qui ont deux ou trois ϵ_i négatifs, correspondent des branches imaginaires. Si par exemple, les foyers sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté a et que s= 2a, chacune des trois branches réelles, autres que la focale, a la forme d'un coeur qui entoure f, et la rosace A_3 est effectivement du 8e degré (voir la figure qui précède l'article).

---

* Le mot imaginaire signifie ici inexistant et non "ayant une équation vérifiée par des nombres complexes x, y."

5) Montrons que pour $s > s_o$, <u>la courbe A n'a pas de point à l'infini</u>. Une branche réelle ne pourrait avoir un tel point, que si dans (2) il y avait autant de signes (+) que (-), car pour un point à l'infini, les rayons focaux ne diffèrent que de quantités finies. Supposons par exemple $\epsilon_i = 1$ pour $i \leqslant \frac{n}{2} = k$, les autres ϵ étant négatifs, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ et $A'_1\ A'_2 \ldots A'_k$ les foyers correspondants. Alors en sommant en un point M du plan pour i de 1 à k

$$\sum r_i - \sum r'_i < \sum (r_i - r'_i) < \sum A_i\, A'_i < s$$

où s est la somme focale de f. Donc pour ces ϵ la relation (2) ne sera satisfaite pour aucun point du plan. Ainsi l'existence d'une ellipse (F, F',2a) exclut la coexistence d'une hyperbole (F, F', 2a).

6) Pour une quadrifocale par exemple, en plus de f, la courbe A du 16e degré ne comporte que quatre branches réelles. Elles entourent f et correspondent aux facteurs du type $r' + r'' + r''' - r - s$ de Π_4.

<u>Remarque</u>. Toute courbe définie par une relation $\Sigma a_i r_i = s$, où les a_i sont des entiers positifs, est une courbe focale dont les foyers multiples sont d'ordre a_i. En particulier, <u>les ovales de Descartes</u>

$$ar + br' = s \quad (a, b, \text{entiers positifs})$$

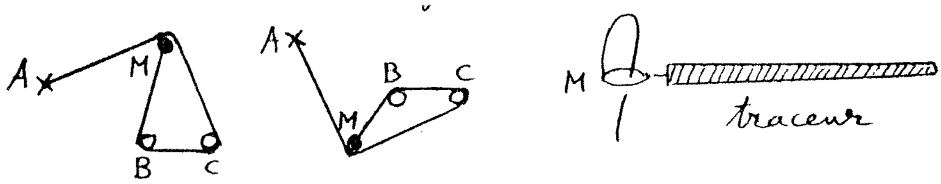
<u>sont des focales</u>.

II.- Construction par fil d'une focale.

Par fil, on peut facilement tracer une focale avec précision, en généralisant la construction de l'ellipse par la "méthode des jardiniers".

Nous nous contenterons d'exposer la méthode pour n=3, n=4 et un ovale de Descartes n=5.

1) Construction de la trifocale



On fixe la feuille à la planche à dessin par trois punaises, plantées aux foyers donnés A, B, C. Les extrémités d'un fil de longueur ℓ sont attachées l'une en A, l'autre à la pointe M du crayon. Le fil contourne le segment BC, et il est tendu en M par le crayon. Alors:

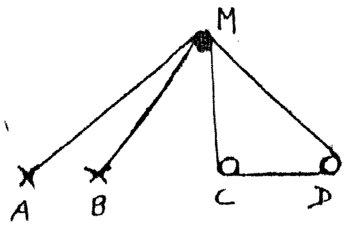
$$MA + MA + MC = \ell - BC$$

est bien constant.

Traceur : plutôt qu'un crayon, il est pratique d'employer un traceur, obtenu en enfonçant une grosse aiguille dans un porte-plume. Le fil est attaché au bout M du chas et y repasse pour former le lacet variable MBC. On repasse à l'encre la trace gravée sur la feuille par la pointe M.

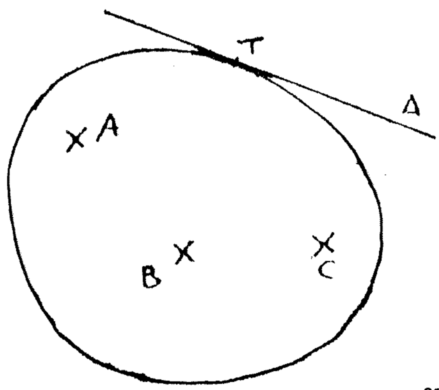
2) Construction de la quadrifocale .

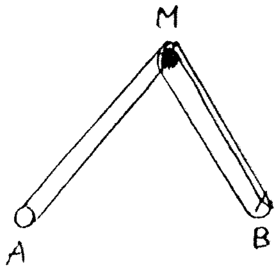
La figure ci-contre montre comment le fil fixé en A et en B et contournant le triangle MDC, assure la constance de la somme focale.



3) Construction de l'ovale de Descartes 2r + 3r' = s .

Partant du foyer d'attache B, le fil contourne successivement M, B, M et A pour revenir au point mobile M, second point d'attache du fil.





Application. Trouver sur une droite Δ le point tel que la somme de ses distances à trois points donnés A, B, C soit minimale.

On règle la longueur ℓ du fil de manière que la trifocale (A, B, C, ℓ) soit tangente à Δ. Le point de contact est le point cherché. (On admet ici implicitement que la trifocale est une courbe convexe fermée, ce qu'on démontrera par la suite).

III.- Construction de la tangente en un point d'une focale.

On sait qu'on peut construire avec règle et compas la tangente au point courant d'une focale. Mais au lieu de justifier cette construction par le gradient, nous l'établirons plus élémentairement par la cinématique.

Théorème 2. 1) La résultante $\vec{R}$ des vecteurs unitaires, dirigés d'un point d'une focale vers ses foyers, est la normale à la courbe.

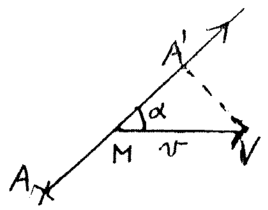
2) Si la courbe passe par un foyer F, ce point est anguleux. Soit $\vec{R'}$ la résultante des vecteurs unitaires dirigés de F vers les autres foyers. Alors $\vec{R'}$ bissecte l'angle 2α des demi-tangentes en F et $\cos\alpha = \frac{1}{R'}$, ($\frac{k}{R'}$, si F est foyer multiple d'ordre k). (Par définition $R' = \|\vec{R'}\|$)

Focale-point. 1) si en un point du plan $\vec{R} = 0$, il n'y passe pas de focale, ou plutôt la focale se réduit à ce point.

2) si en un foyer F le $R' < 1$ (ou $R' < k$ si le foyer est d'ordre k), il ne passe pas de focale par F, ou plutôt la focale se réduit à ce point (car on aurait $\cos\alpha \geq 1$).

On reviendra sur ces deux cas.

Démontrons à présent le théorème 2.



1) Soit $\vec{MV}$ le vecteur vitesse du point M qui décrit la focale de foyers A, B, .., C. Projetons V en A' sur l'axe dirigé par $\vec{AM}$. Comme $\overline{MA'}$ est la dérivée de AM par rapport au temps, la constance de AM + BM + ... + CM entraîne

$$\overline{MA'} + \overline{MB'} + \dots + \overline{MC'} = v\cos\alpha + v\cos\beta + \dots + v\cos\gamma = 0$$

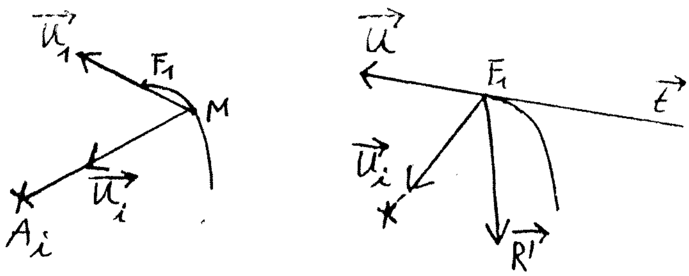
ou

(3) $\cos\alpha + \cos\beta + \dots + \cos\gamma = 0$

α étant l'angle orienté $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MV})$.

La relation (3) exprime que la projection de $\vec{R}$ sur la tangente MV est nulle: $\vec{R}$ est normale à la courbe.

2) Soient sur une focale un foyer F_1 et un point voisin M, et soient $\vec{U}_i$ les vecteurs unitaires dirigés de M vers les foyers et $\vec{R} = \vec{U}_1 + \sum_{i=2}^{n} \vec{U}_i$ la résultante des $\vec{U}_i$, normale à la courbe en M. Quand M tend vers F_1 sur la courbe, $\vec{U}_1$ tend vers le vecteur unitaire $\vec{U}$, qui prolonge la demi-tangente $\vec{t}$ en F_1 à l'arc



FM de la focale, et $\sum_{i=2}^{n} \vec{U}_i$ tend vers $\vec{R'}$, de sorte que $\vec{R}$ tend vers un vecteur $\vec{U} + \vec{R'}$, normal à l'arc F_1M en F_1. Par suite

$$\vec{U}(\vec{U}+\vec{R'}) = 1 - R'\cos(\vec{t},\vec{R'}) = 0$$

et $\cos(\vec{t}, \vec{R'}) = \frac{1}{R'}$.

Si F_1 est foyer d'ordre k, k vecteurs unitaires visent de M vers F_1. On trouve alors de même que $\cos(\vec{t}, \vec{R'}) = \frac{k}{R'}$.

<u>Remarques</u>. 1) Le théorème s'étend à la courbe, lieu des points dont la somme <u>algébrique</u> s des distances à n points fixes est constante, le vecteur unitaire issu de M ayant alors le sens de $\overrightarrow{AM}$, si la distance AM figure négativement dans s (exemple: une branche d'hyperbole).

2) Un point également attiré par les foyers et astreint à se déplacer sans frottement sur une focale ne passant par aucun d'eux, a un <u>mouvement uniforme</u> (car la résultante des forces est normale à la courbe).

IV.- Forme des focales.

Il est d'abord clair que si la somme focale est assez grande par rapport à toute distance entre deux foyers, la courbe est presque circulaire .

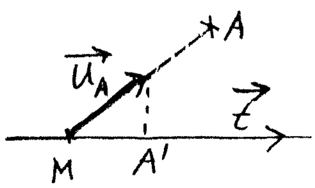
Définitions. Une courbe convexe fermée est un ovale. Nous dirons qu'il est lisse, s'il n'a pas de point anguleux, et n-latère si sa courbure passe juste par n maxima.

Voici alors un résultat court, simple, général et non évident :
Théorème 3. Toute focale est ovale. Si elle ne passe pas par un foyer, elle est lisse.

Remarques. 1) Nous verrons que si ses foyers sont alignés, elle peut dégénérer en un segment de droite.

2) Une focale régulière (foyers aux sommets d'un polygone régulier) est presque circulaire, si sa somme focale est très près de sa valeur minimale S_o.

Il est presque évident que la courbe est fermée. Pour démontrer qu'une focale lisse est convexe, il suffit de montrer qu'elle n'a pas de tangente double.



Soit $\vec{U}_A$ le vecteur unitaire dirigé d'un point M d'un axe tangent $\vec{t}$ vers le foyer A et soit $\vec{MA'}$ sa projection sur $\vec{t}$. Quand M parcourt $\vec{t}$ dans le sens de cet axe, $\overline{MA'}$ décroît constamment de 1 à -1. Il en est de même pour $\overline{MB'}$, .. , $\overline{MC'}$, obtenus en remplaçant A par les autres foyers B, .., C. Par suite, la somme

$$\overline{MA'} + \overline{MB'} + .. + \overline{MC'}$$

décroît de n à -n et passe une seule fois par la valeur zéro: $\vec{t}$ est tangente simple.
Cela est encore vrai si A est sur $\vec{t}$, car alors $\overline{MA'}$ est égal à 1 ou à -1, suivant que sur $\vec{t}$ le point M précède A ou le suit. Le théorème s'applique aussi à une focale non lisse, comme limite d'une homofocale lisse.

Application. Sur une droite, il y a au plus deux points dont la somme des distances à n points donnés a une valeur donnée.

Conjecture. Une n-focale lisse est au plus n-latère.

Cette conjecture nous semble probable parce qu'elle est vraie pour l'ellipse et les nombreuses trifocales que nous avons tracées, et qu'elle est presque évidente pour les focales régulières.

Application. Il en résulterait que sur un cercle, on peut avoir de 0 à 6 points, qui ont une somme de distances donnée à trois points donnés. Car si la trifocale correspondante est au plus trilatère, elle coupe le cercle en 6 points au plus.

V.- Proximal de n points du plan.

Comme application essentielle du précédant, nous allons résoudre pour tout n un problème de minimum, important en mathématiques appliquées, traité jadis par Fermat, pour n=3. Il se pose quand on cherche le meilleur emplacement d'une centrale pour un ensemble donné de stations, routières, ferroviaires, électriques ou adductives ("problème du château d'eau").

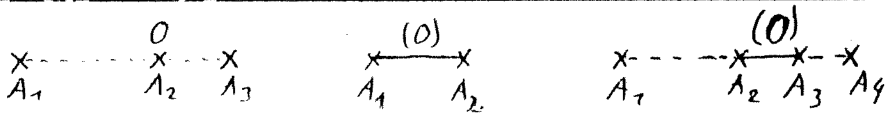
Définitions. On appelle proximal de n points A_i du plan, le point (s'il est unique) dont la distance moyenne $\frac{\Sigma r_i}{n}$ aux A_i est minimale. On appelle point de Torricelli des A_i le point T (s'il existe) tel que la résultante des vecteurs unitaires dirigés de T vers les A_i soit nulle.
On désigne par R' la longueur de la résultante des vecteurs unitaires dirigés d'un des points donnés vers les autres.

Voici alors un résultat essentiel:

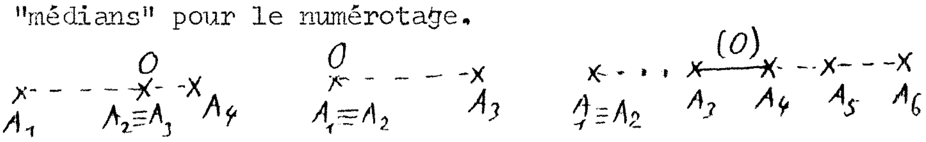
Théorème 4. Pour n points non alignés du plan, il existe juste un proximal O. Si leur point de Torricelli existe, O est ce point; sinon O est un des points donnés (celui pour lequel $R' < 1$, ou $R' < k$ si le point donné est multiple d'ordre k.)
Nous distinguerons trois cas.

1) Les points donnés A_i sont alignés. Si les A_i sont distincts, on voit faci-

lement que O est un de ces points si n est impair, et qu'il est indéterminé sur un segment fermé (O) si n est pair. Il y a le même nombre de points donnés de part et d'autre de O, respectivement de (O); O est le "point médian" des points donnés, (O) est leur "segment médian".



Il en est de même s'il y a des A_i multiples, avec la convention suivante:
on numérote tous les points dans leur ordre de succession sur leur droite-support (par exemple A_1, A_2, $A_3 = A_4 = A_5$, A_6, .., A_n); O ou (O) sont alors "médians" pour le numérotage.



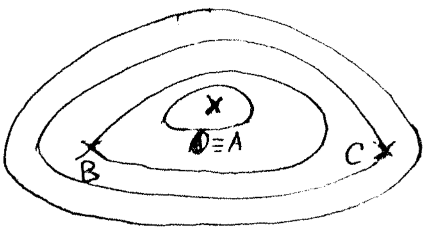
2) Les points donnés sont les sommets d'un triangle

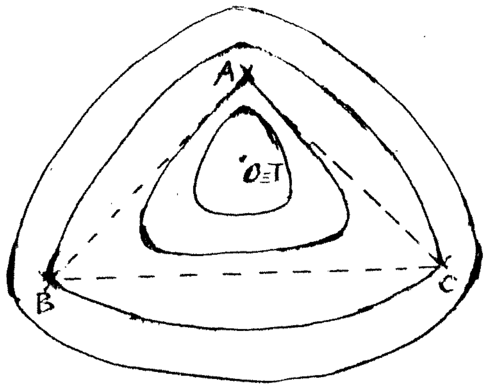
Le problème est alors classique. Dans la première moitié du 17ème siècle, d'éminents mathématiciens l'ont traité, notamment Torricelli, Cavalieri* et Fermat. Il y a deux cas à distinguer ** :

a) les angles du triangle sont inférieurs à 120°. On montre que O est le point d'où l'on voit les trois côtés sous le même angle: O est donc le point de Torricelli des sommets.

b) sinon, on montre que O est le sommet de l'angle obtus du triangle.

3) Cas général (n points A_i non alignés).





* Cavalieri, Exercitationes geometricae (1647)

**Jean de Biasi, Quelques problèmes d'extremum, Bulletin 326 de l'APMEP (décembre 1980)

La focale, lien des points du plan tels que

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = s$$

a les points donnés pour foyers. Si s varie, on obtient une famille d'ovales emboîtés, car deux homofocales ne peuvent se couper (un point du plan détermine un seul s). Ces ovales sont aussi reserrés qu'on veut.

Si les points donnés ont un point de Torricelli T, la vitesse en ce point n'a aucune direction d'après le théorème 2: la focale passant par T se réduit nécessairement à ce point, qui est donc O. Si T n'existe pas, les seuls points où la construction par le théorème 2 pourrait ne pas donner de tangente sont les foyers. Le proximal O ne peut donc être un point autre qu'un foyer (celui pour lequel $R' < 1$, ou $R' < k$ si le foyer est d'ordre k).

Construction approchée du proximal.

Les n points non alignés A_i étant donnés, leur proximal est le point d'évanouissement des homofocales f qui les ont pour foyers. On dessinera donc avec le traceur des f de plus en plus petites, en diminuant progressivement la longueur du fil.

Détermination mécanique du proximal.

En associant à tout point du plan la résultante $\vec{R}$ des attractions unitaires exercées sur lui par n points donnés A_i, on crée un champ de forces défini partout, sauf

- aux points A_i, où $\vec{R}$ est indéterminé,
- au point de Torricelli des A_i (s'il existe), où $\vec{R}$ est nulle.

On peut déterminer expérimentalement le proximal O des A_i, par un dispositif de poids égaux facile à imaginer, car si O est unique, il est en équilibre stable dans le champ, et si O est indéterminé sur un segment (O) (ce qui peut arriver si les A_i sont alignés), il est en équilibre indifférent sur (O).

Notons que les homofocales de foyers A_i sont les trajectoires orthogonales des lignes de force du champ, qui concourent d'ailleurs en O.

VI.- Proximal et surfaces focales de n points de l'espace.

Etendons rapidement l'étude précédante à l'espace.

Définitions.

Soit s la somme des distances d'un point M à n points donnés A_i de l'espace. On appelle encore focale, le lieu des M pour s constant. Le lieu des M d'un plan à s constant est dit focale plane. Les A_i sont les foyers de la surface focale ou de la focale plane. Le proximal et le point de Torricelli sont définis comme pour des A_i coplanaires. On appelle ovoïde toute surface convexe fermée. Il est dit lisse s'il n'a pas de point conique.

Théorème 6. Une n-focale est une nappe d'une surface algébrique, de degré 2^n en général.

La démonstration du théorème 1 s'applique ici identiquement.

Théorème 7. La normale en un point d'une surface focale est la résultante des vecteurs unitaires, dirigés du point vers les foyers. (on suppose que le point n'est pas un foyer).

On le démontre aisément à partir de l'équation multipolaire.

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$$

Notons qu'ici encore la résultante des vecteurs unitaires est nulle au point de Torricelli, s'il existe, et indéterminée en un foyer.

Théorème 8. Si une surface focale passe par un foyer F, on considère la résultante $\vec{R}'$ des vecteurs unitaires dirigés de F vers les autres foyers. Le cône des demi-tangentes en F est de révolution; son axe est $\vec{R}'$ et sa demi-ouverture α est donnée par $\cos\alpha = \frac{1}{R'}, \left(\frac{k}{R'}\right.$ si F est foyer multiple d'ordre k).

Théorème 9. Toute surface focale est ovoïde, toute focale plane est ovale. Si elles ne passent pas par un foyer, elles sont lisses.

Comme au théorème 3, on démontre que la surface focale lisse n'a pas de tangente double. Une focale plane est ovale, comme intersection d'un plan et d'un ovoïde de mêmes foyers et somme focale que la courbe.

L'ovoïde focal ne peut dégénérer en segment de droite, que si sa somme focale est minimale et que les foyers sont alignés et en nombre pair. On montre aussi ceci :

Le proximal de n points non alignés est le point d'évanouissement des ovoïdes homofocaux emboîtés, dont ces points sont les foyers. Soumis à des attractions égales par les foyers, il est en équilibre stable.

Mais surtout, on démontre comme le théorème 4, le résultat capital suivant, inédit à ma connaissance :

Théorème fondamental 10. Le proximal de n points non alignés du plan ou de l'espace est leur point de Torricelli, s'il existe; sinon il est l'un des points donnés (celui dont $R' < 1$, ou $R' < k$ si le point est multiple d'ordre k).

Ce théorème s'applique sans doute dans l'espace de dimension quelconque.

VIII.- L'oeuf de poule moyen.

Terminons sur une note un peu plaisante. Si l'on dit "ils se ressemblent comme deux oeufs", on sous-entend que l'oeuf a une forme bien déterminée, donc géométrique. C'est ce que nous allons justifier.

Dans l'Information scientifique, le naturaliste Sire a tracé le profil moyen statistique de l'oeuf de poule. Dans une note parue dans la même revue (décembre 1957) intitulée "L'oeuf de poule a-t-il une forme géométrique?", nous avons montré que ce profil coïncide (à l'épaisseur du trait de crayon près), avec une trifocale pour un choix convenable de trois foyers alignés et de la somme focale. L'oeuf moyen a donc une surface trifocale, à l'épaisseur de la coque près.

Il se trouve que si l'on désigne par h la hauteur de cet oeuf, par p le périmètre de son profil et par e la base des logarithmes naturels, on a avec une bonne approximation

$$\boxed{p = eh}$$

analogue à $p = \pi h$ pour la sphère.

E. EHRHART, Strasbourg.

Il ne faut pas se fier aux apparences !

Exercice 7

Regarde bien le tableau ci-dessous et devine quel nombre il faut inscrire dans la dernière case. Explique ta réponse .

2	6	8	11
5	15	20	27,5

réponse

2 il y a 5 en dessous de 2 de 2 a 6 il y a 4 d'intervale 2 vaut 5 et 4 sa fait 2 fois
15 et sa fait 10 on ajoute cinq a dix sa fait 15 on a ajoute 2 qui vaut 5 sa fait 20 j'ajoute
10 et se qui fait 20+5 = 25 mai on doit encore faire de demi de 5 = 2,5 + 25 = 27,5

2 il y a 5 en dessous de 2 de 2 a 6 il y a 4 d'intervale 2 vaut 5 et 4 sa fait 2 fois 15 et sa fait 10 on ajoute cinq a dix sa fait 15 on a ajoute 2 qui vaut 5 sa fait 20 j'ajoute 10 et se qui fait 20 + 5 = 25 mai on doit encore faire de demi de 5 = 2,5 + 25 = 27,5

Exercice 7

Regarde bien le tableau ci-dessous et devine quel nombre il faut inscrire dans la dernière cas. Explique ta réponse.

2	6	8	11
5	15	20	27,5

réponse

2 est égale à 5 si on aurrait 4 à la place de 6 la réponse s'errait 10 et si le 12 s'errait à la place de 11 la réponce s'errait 30. Parce que 10 fait 25 est 12 fait 30 alors j'ai prit la moitier

2 est égale à 5 si on aurrait 4 à la place de 6 la réponse s'errait 10 et si le 12 s'errait à la place de 11 la réponce s'errait 30. Parce que 10 fait 25 est 12 fait 30 alors j'ai prit la moitier.

Ces deux raisonnements sont extraits de travaux d'élèves de 5e effectués à l'initiative du groupe "Proportionnalité" de l'IREM. En première lecture, on serait tenté de dire "en voilà qui n'ont rien compris". En seconde approche ... ils sont parfaitement exacts et montrent une bonne compréhension du problème, à défaut d'une expression correcte. Et en tout cas, ils ouvrent une question: si tant d'élèves "ne comprennent pas les math", n'est-ce pas d'abord parce qu'ils ne comprennent pas le français et parce que - ce qui est plus grave - ils ne savent pas le parler ?

A. BONNET.

Bibliothèque de l'I.R.E.M.

CA TOURNE !

Du 1er juillet 80 au 1er juillet 81,
la bibliothèque a prêté 1020 ouvrages et 240 périodiques.
A cette dernière date, 240 ouvrages circulaient encore.

Cette statistique indique que la bibliothèque de l'IREM est considérée comme un outil efficace par un nombre croissant de collègues (ou qu'un effectif constant de collègues l'utilise de façon plus ample).

Rien ne vous empêche de contribuer à une hausse de cette statistique en venant faire un tour dans ses accueillants locaux.

Mademoiselle BATTISTI y succédera à Madame GEISMAR dont la qualité de travail est fortement correlée aux résultats cités.

Pour mémoire, la bibliothèque est sise au 10 de la rue du Général Zimmer, au rez-de-chaussée, et ouvre, durant l'année scolaire, du lundi au vendredi, de 8h à 11h45, puis de 14h à 17h.

Du nouveau en seconde

LES POLYEDRES

INTRODUCTION

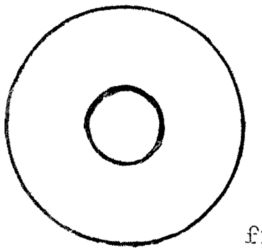


fig.1

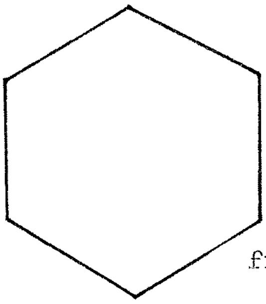


fig.2

Qu'est-ce que c'est ? "C'est un mexicain vu de dessus". Comprendre la réponse, c'est déjà connaitre toute une imagerie, à commencer par celle du sombrero, du dessin en projection, ... En mathématique, c'est un peu la même chose. Qu'est-ce que c'est ? Plusieurs réponses peuvent être données. Suivant le contexte, l'une ou l'autre seule est valide : "hexagone", "contour apparent d'un cube", "projection d'un prisme hexagonal ", ... Mais, pour comprendre chacune de ces réponses, il faut déjà avoir manipulé les objets mathématiques correspondants.

En seconde, un chapitre important du nouveau programme se rapporte à la géométrie dans l'espace. Pour moi, l'essentiel du programme consiste à faire manipuler des solides et des figures de l'espace et à montrer en quoi leur représentation plane permet de reconstituer les propriétés de ces solides ou figures. Une bonne vision dans l'espace est souvent la clef d'une bonne "vision" de théories mathématiques, plus abstraites, comme les espaces non euclidiens, le corps des p-adiques, les ensembles de cardinal transfini ...

DES DESSINS,MAIS PAS N'IMPORTE LESQUELS

La représentation plane d'un objet dans l'espace peut se faire de bien des façons; citons en vrac: perspective cavalière, projection orthogonale, géométrie côtée, perspective conique, développement, section, coupe, ... Chacune de ces représentations possède ses règles, ses avantages et ses inconvénients. Voici à titre d'exemple quelques figures fausses. Il est difficile d'expliquer pourquoi elles le sont si on n'a pas manipulé longuement des solides.

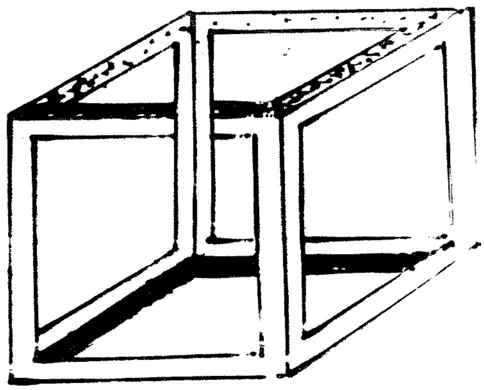


fig.3

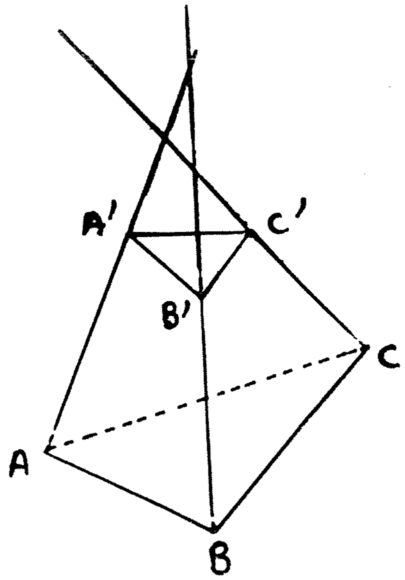


fig. 4

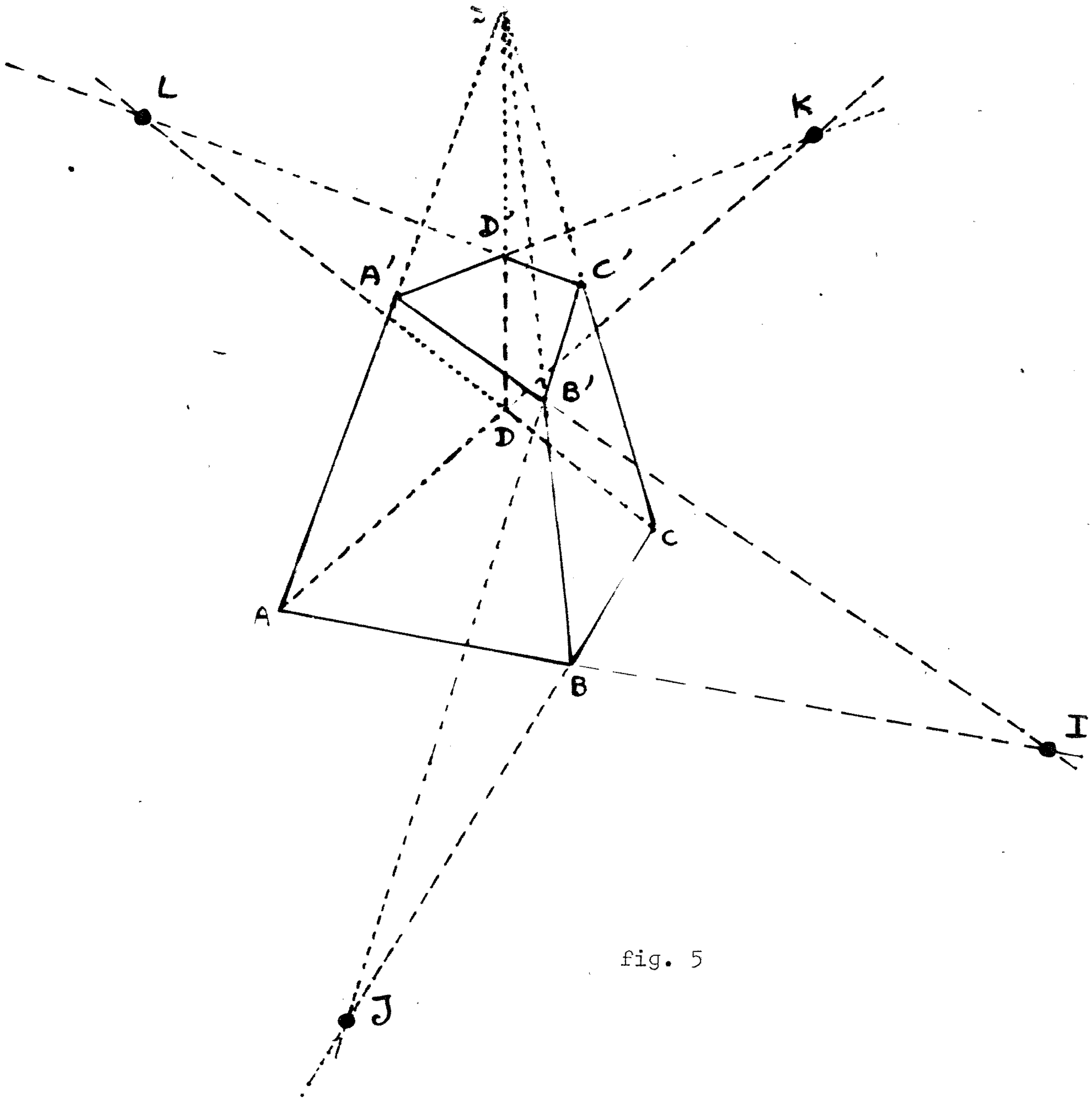


fig. 5

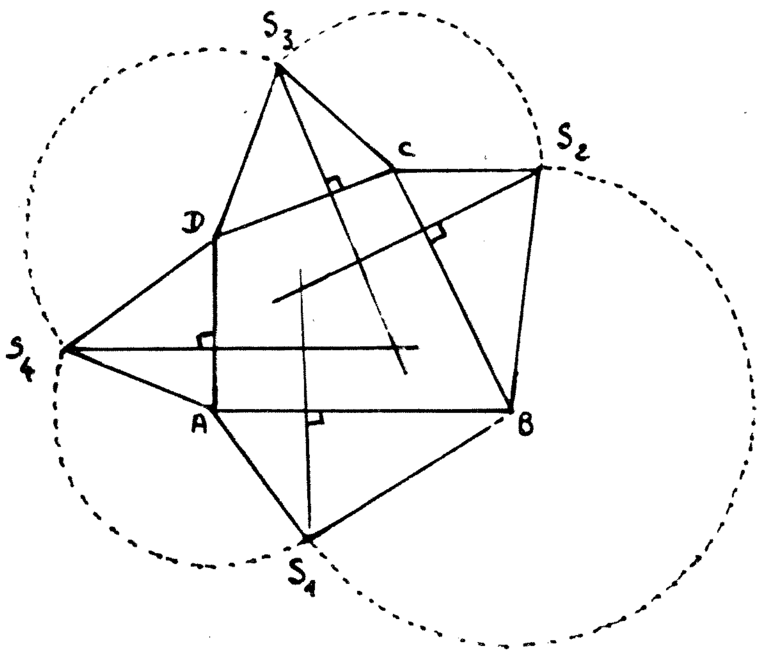


fig. 6

Il m'est difficile d'expliquer en une phrase simple et correcte pourquoi le dessin du "cube" (fig 3) est faux, mais j'ose espérer que tous les lecteurs "voient" pourquoi il en est ainsi.

Pour le"tronc de pyramide" à base triangulaire (fig 4), l'erreur provient du fait que les arrêtes devraient concourir; or il est facile de voir que les droites (AA'), (BB') et (CC') n'ont pas, sur le dessin, de point commun.

Par contre, les quatre droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') de la figure 4 sont bien concourantes. Mais on peut affirmer que soit les 4 points A, B, C, D soit les 4 points A', B', C', D' ne sont pas coplanaires sinon les deux plans ainsi déterminés se couperaient suivant "la droite" (IJKL).

Enfin, pour bien comprendre pourquoi la dernière figure n'est le développement d'aucune pyramide, le mieux est de découper un tel "patron" et d'essayer de le remonter. Il n'y a aucune difficulté à assembler deux faces consécutives telles que BS_1A et BS_2C ... mais pas moyen d'en assembler trois consécutives.
La raison profonde de cette impossibilité provient du fait que lorsqu'on bascule une face telle que ABS_1 autour de AB, S_1 décrit un arc de cercle

d'axe (AB), cercle dont la projection sur le plan (ABCD) est un segment orthogonal à (AB). Pour que la figure soit le développement d'une pyramide, il faut que les quatre droites

(S_1H_1) passant par S_1 orthogonal à (AB)

(S_2H_2) " " S_2 " (BC);

(S_3H_3) " " S_3 " (CD),

et (S_4H_4) " " S_4 " (DA), soient concourantes en un point S' qui est la projection orthogonale du sommet S de la pyramide sur le plan de sa base. Cependant cette condition nécessaire n'est pas suffisante, comme le montre la figure 7 ci-dessous.

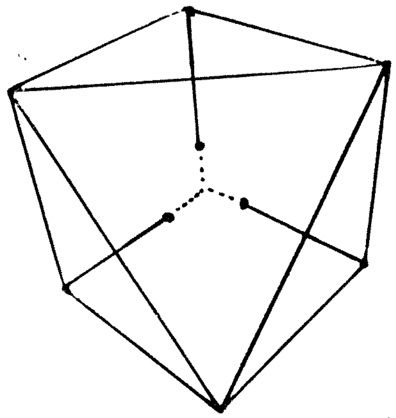


fig. 7

Ces quelques exemples simples peuvent inciter les élèves à étudier la géométrie dans l'espace. Les seuls résultats importants qu'ils ont au programme de seconde peuvent se résumer en :

1°) dans un plan de l'espace tout se passe comme dans un plan ordinaire.

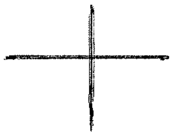
2°) quand on change de plan, l'unité de longueur ne change pas.

3°) quelques règles d'incidences et le théorème des trois perpendiculaires.

Je n'ai pas la prétention de croire que cela suffise. De toute façon, ces trois points impliquent la connaissance de bien d'autres et je prétends que l'essentiel est que l'élève de seconde finisse l'année en comprenant une figure de géométrie dans l'espace. Dans ce but, je vais essayer de montrer que l'étude approfondie du cube et de quelques autres polyèdres simples, étude alliant la théorie et la manipulation, permet d'atteindre ce but.

LE CUBE

Il peut sembler qu'en seconde les élèves aient passé l'âge de jouer avec des cubes. Pourtant, ce solide élémentaire et fondamental est souvent encore mal connu et il vaut mieux l'analyser longuement (position et nombre de faces, d'arêtes...) avant toute autre manipulation. J'en veux pour preuve l'expérience suivante : dans une terminale E, j'avais demandé à un élève de dessiner un cube par un sommet, une diagonale de bout. Au début, il a commencé par tracer une croix



avant de rectifier son erreur. Cela prouve qu'au cube est associée l'idée de carré ou celle de symétrie d'ordre 4, mais jamais celle de triangle équilatéral ou d'hexagone régulier. Et pourtant la symétrie ternaire existe bel et bien dans le cube comme le montre le triangle équilatéral de la figure 8. On peut profiter de l'occasion pour construire deux tétraèdres réguliers ayant mêmes sommets que le cube.

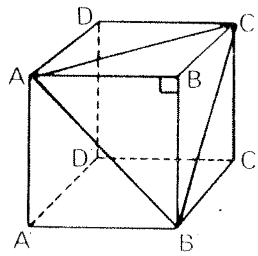
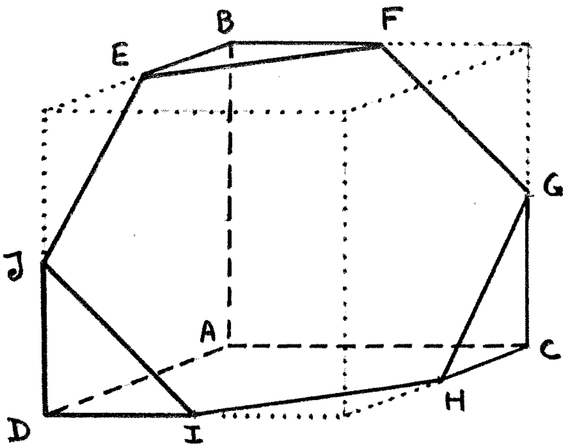


fig 8

Ce résultat est une bonne application des règles 1 et 2 énoncées plus haut.

. Si on dispose de cubes en polystyrène, il peut être intéressant de les couper par différents plans donnant des sections triangulaires, carrées, rectangulaires, pentagonales, hexagonales (en particulier donnant un hexagone régulier - figure 9-), parallélogrammique ...
Cela met en évidence un certain nombre de théorèmes comme l'intersection de deux plans parallèles par un troisième ....



demi-cube ABCDEFGHIJ

fig. 9

. on peut également étudier l'ombre au soleil d'un cube et remarquer qu'il est impossible d'obtenir l'une des figures ci-dessous.

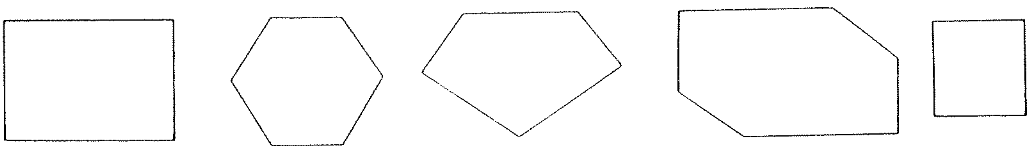


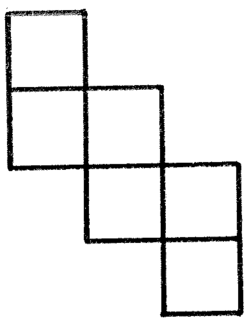
fig. 10

ce qui est une approche de la projection.

. le développement même du cube réserve lui aussi des surprises. Trouver tous les patrons possible demande beaucoup d'agilité d'esprit . On ne pensera peut-être pas à celui-ci :

et l'étude des patrons est une bonne introduction à la notion de chemin le plus court sur un cube .

fig. 11



VERS D'AUTRES POLYEDRES

. On a vu que les sommets du cube peuvent être regroupés dans les sommets de 2 tétraèdres; montrons que l'octaèdre apparait aussi dans l'étude du cube. Pour cela, prenons comme sommets les centres des faces et joignons deux sommets par une arête s'ils correspondent à deux faces adjacentes. Il est facile de voir que l'on obtient ainsi un polyèdre régulier à 8 faces (d'où le nom d'octaèdre), 6 sommets et 12 arêtes. Chaque face est un triangle équilatéral. Si l'on effectue la même construction à partir des centres des triangles, on retrouve le cube. On dit que cube et octaèdre sont duaux l'un de l'autre.

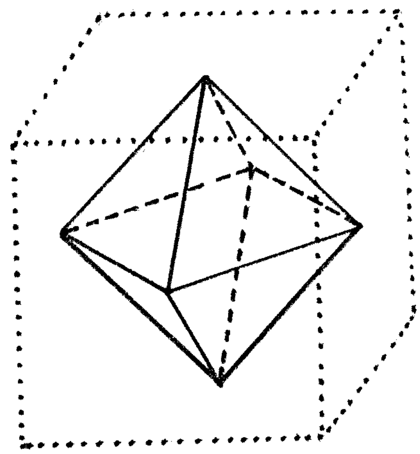


fig. 12

. A partir du cube, on peut construire bien d'autres polyèdres que l'on retrouve dans certaines structures cristallines. Les figures 13 et 14 ci-dessous montrent le cuboctaèdre et le dodécaèdre rhombique qui sont duaux l'un de l'autre.

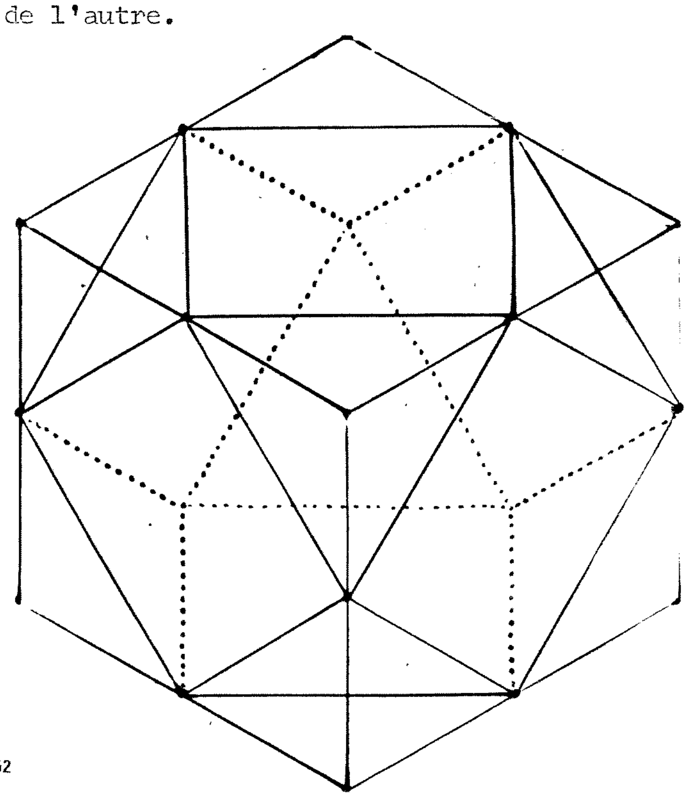


fig. 13

cube octaèdre à l'intérieur d'un cube

dodécaèdre rhombique

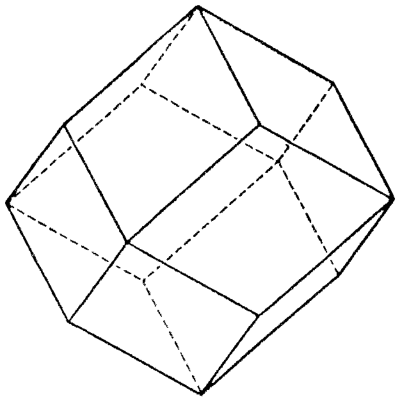


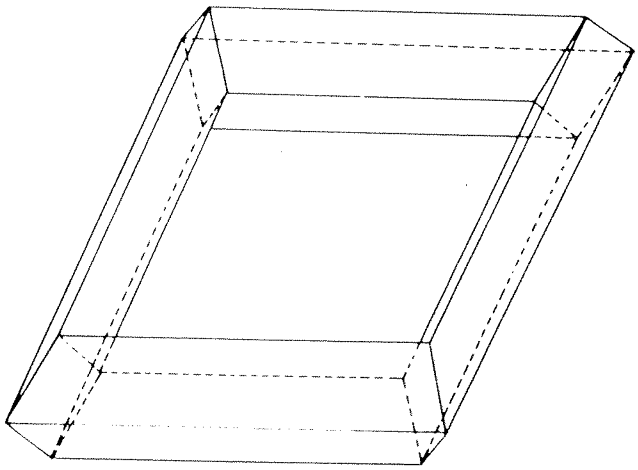
fig. 14

. le tableau ci-dessous récapitule quelques dénombrements simples sur les polyèdres déjà vus :

nom	nombre de sommets s	nombre d'arêtes a	nombre de faces f	s-a+f	
tétraèdre	4	4	6	2	autodual
cube	8	12	6	2	duaux
octaèdre	6	12	8	2	
cuboctaèdre	12	24	14	2	duaux
dod. rhombique	14	24	12	2	
$\frac{1}{2}$ cube de la fig. 9	10	15	7	2	

On peut établir plus ou moins intuitivement la relation s-a+f = 2 qui semble apparaitre. La méthode la plus habituelle consiste à ôter une face et à étaler le reste sur un plan. Pour être bien comprise la "démonstration" nécessite le recours à des polyèdres convexes, mais cette relation dite relation d'Euler, s'applique à tous les polyèdres homotopes à une sphère, c'est-à-dire sans trous. Le solide ci-dessous vérifie seulement s-a+f = 0

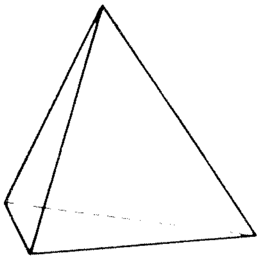
fig. 15



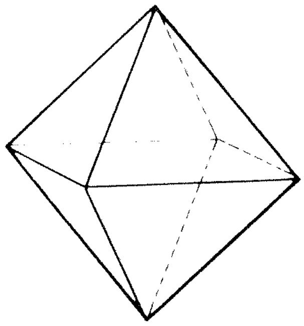
. Au moyen de la relation d'Euler, et de considérations géométriques simples, on peut construire tous les polyèdres réguliers convexes. Il suffit de remarquer qu'autour d'un sommet, il faut au moins trois faces qui, assemblées, forment un coin (angle polyèdre). On ne peut donc avoir que 3, 4 ou 5 triangles équilatéraux, 3 carrés ou 3 pentagones réguliers. En remarquant que s'il y a n faces autour d'un sommet, il y a aussi n arêtes et que si chaque face possède c côtés (donc c sommets), on a les relations :

$$\begin{cases} 2a = n\,s & \text{chaque arête détermine 2 sommets et chaque sommet n arêtes} \\ cf = 2a & \text{chage arête détermine 2 faces et chaque face c arêtes.} \\ s-a+f = 2 & \text{relation d'Euler.} \end{cases}$$

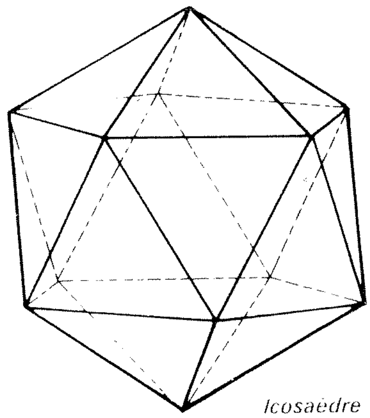
On peut alors construire les cinq polyèdres platoniciens: tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre. Ces deux derniers sont également duaux l'un de l'autre.



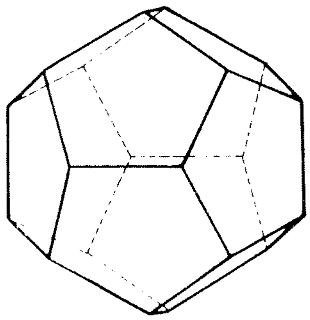
Tétraèdre



Octaèdre



Icosaèdre



Dodécaèdre

fig. 16

Le dodécaèdre permet de retrouver le cube dont nous étions partis. En effet, on peut regrouper les 20 sommets de ce polyèdre de façon à placer 5 cubes, chaque sommet appartenant à deux cubes distincts.

5 cubes dans
un dodécaèdre

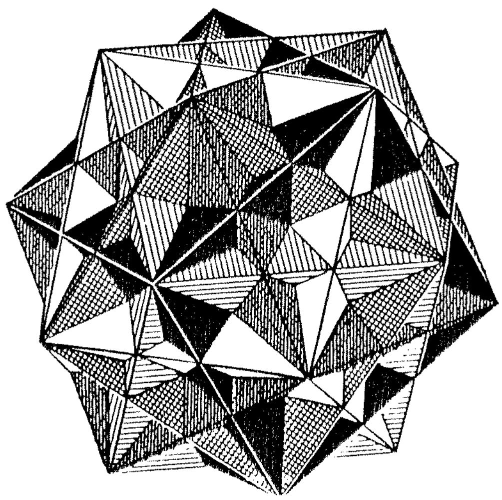


fig. 17

CONCLUSION ET OUVERTURES

Bien d'autres curiosités géométriques peuvent être mises en évidence par l'étude des polyèdres. Citons les deltaèdres, les flexaèdres ... Les bons élèves s'émerveillent devant des dessins d'hypercube de dimension 4... Tous peuvent chercher des problèmes simples comme l'inexistence de polyèdres convexes à 7 arêtes....

Pour tous ceux qui voudraient aller plus loin, je conseille la courte bibliographie ci-après :

1. Une expérience de travail autonome en seconde, KOCH, IREM de Strasbourg.
2. Mathématiques, seconde, IREM de Strasbourg, ISTRA.
3. Modèles mathématiques, CUNDY, ROLLETT, CEDIC.
4. Excursions into Mathematics, BECK, BLEICHER, CROWE, WORTH Publishers.

J.LEFORT.

LE THEOREME DES 12 COULEURS

Le théorème des 4 couleurs démontré par Haken et Appel en 1200 heures d'ordinateurs en 1976 est susceptible de bien des généralisations.

1°) Au lieu de travailler sur un plan, on travaille sur une surface quelconque (voir Ouvert n°12 - Juin 1977).

2°) Au lieu de supposer les pays connexes (c'est-à-dire en un seul morceau), on suppose qu'ils ont au plus deux, trois, ..., n morceaux.

3°) En combinant les deux hypothèses précédentes on peut s'intéresser au coloriage de cartes comportant des pays non-connexes répartis sur des surfaces quelconques, éventuellement non connexes.

....

Le plan et la sphère présentant les mêmes caractéristiques pour ce genre de problème, imaginons que chaque pays (connexe) admette une seule colonie (connexe). On peut imaginer les pays et les colonies sur la même planète, ou bien sur deux planètes différentes. On peut aussi imaginer un partage raisonnable pour l'exploitation des anneaux de Saturne.

..... Combien faut-il alors de couleurs ?

Théorème. Si chaque pays d'une sphère a au plus une colonie coloriée de la même façon que la métropole, alors il suffit de 12 couleurs.

Suivant une méthode habituelle dans ce genre de problème, transformons la carte en un graphe de la façon suivante:

Prenons un point dans chaque région (pays ou colonie); joignons deux points s'ils correspondent à deux régions contigües (ayant une frontière commune).

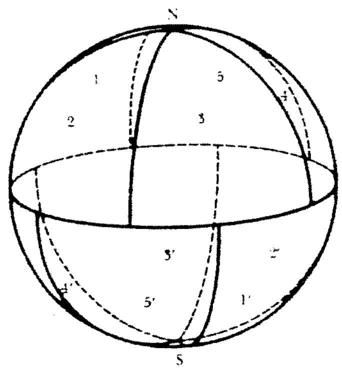
Le graphe ainsi obtenu sera le graphe C* qui est tracé sur la sphère. Soit a son nombre d'arêtes, s le nombre de sommets et f le nombre de "faces". D'après le résultat d'Euler, on a :

$$s - a + f = 2$$

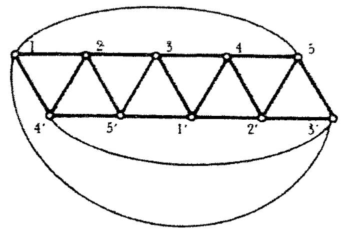
* que l'on appelle aussi graphe colonial C

Fabriquons maintenant un autre graphe que nous appellerons graphe <u>impérial</u> G qui consiste à supposer que chaque pays et sa colonie forment un seul et même empire, c'est-à-dire attribuons un seul sommet à l'ensemble pays-colonie. Cela revient à identifier dans C les sommets correspondants au pays et à sa colonie. Le graphe G n'a aucune raison de pouvoir être tracé sur une sphère.

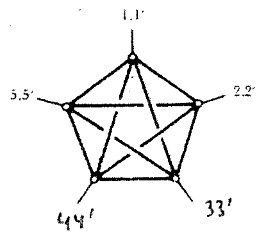
<u>Exemple</u>:



la carte



le graphe colonial



le graphe impérial

Soit k le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier G (on colorie les sommets et deux sommets de même couleur ne sont pas joints par une arête). Considérons alors un sous-graphe G' de G nécessitant également k couleurs pour son coloriage et tel que G' soit le plus petit possible.

Alors en chaque sommet de G' il arrive au moins k-1 arêtes (car si un sommet a moins de k-1 arêtes, les autres peuvent être coloriés avec k-1 couleurs et le graphe G' aussi puisqu'il suffira d'utiliser pour le sommet provisoirement délaissé une des couleurs auxquelles il n'est pas lié).

Soient s' et a' le nombre de sommets et d'arêtes de G'. On a évidemment:

$$(k-1)\, s' \leqslant 2\, a'$$

puisqu'une arête joint 2 sommets.

Mais d'après la construction de G', sous-graphe de G, lui-même construit à partir de C, on a:

$$a' \leqslant a \qquad \text{et} \qquad s \leqslant 2\, s' .$$

De plus pour C (tracé sur une sphère), il faut au moins 3 arêtes pour limiter une "face" et 2 "faces" adjacentes définissent une arête donc:

$$3\,f \leqslant 2a$$

Nous avons donc les relations:

$$\begin{cases} s - a + f = 2 \\ 3\,f \leqslant 2a \\ a' \leqslant a \\ s \leqslant 2\,s' \\ (k-1)s' \leqslant 2a' \end{cases}$$

qui conduisent à :

$$\begin{cases} a \leqslant 3s - 6 \\ a' \leqslant a \\ s \leqslant 2s' \\ (k-1)s' \leqslant 2a' \end{cases}$$

puis à :

$$\begin{cases} a \leqslant 6s' - 6 \\ (k-1)s' \leqslant 2a' \end{cases}$$

soit enfin, tout calcul fait:

$$(k-1)s' \leqslant 12s' - 12$$

et en divisant par s' :

$$k-1 \leqslant 12 - \frac{12}{s'} < 12$$

ce qui prouve que

$$\boxed{k \leqslant 12}\,.$$

Autres résultats

1°) Si au lieu d'avoir une seule colonie, chaque pays en a 2 ou 3 .... on démontrer qu'il faut alors 18 ou 24 couleurs. Heawood a démontré que si chaque pays admet au plus m composantes connexes, il faut au plus 6 m couleurs.

2°) Dans le cas du tore, le problème analogue est démontré pour toutes les valeurs de m: Il faut et il suffit de 6m + 1 couleurs.

3°) Dans le cas des 2 planètes où chaque pays connexe d'une des planètes a une colonie connexe sur l'autre, il faut 9, 10, 11 ou 12 couleurs, mais on n'en sait pas plus.

....

Bibliographie:

GARDNER, The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.

HEAWWOD, Map Colour Theorem

, On the 4-colour Map Theorem

, Quaterly Journal of Mathematics 24(1890). 29(1898)

BECK-BLEICHER-CROWE, Excursions into Mathematics (Worth 1969)

Jean LEFORT.