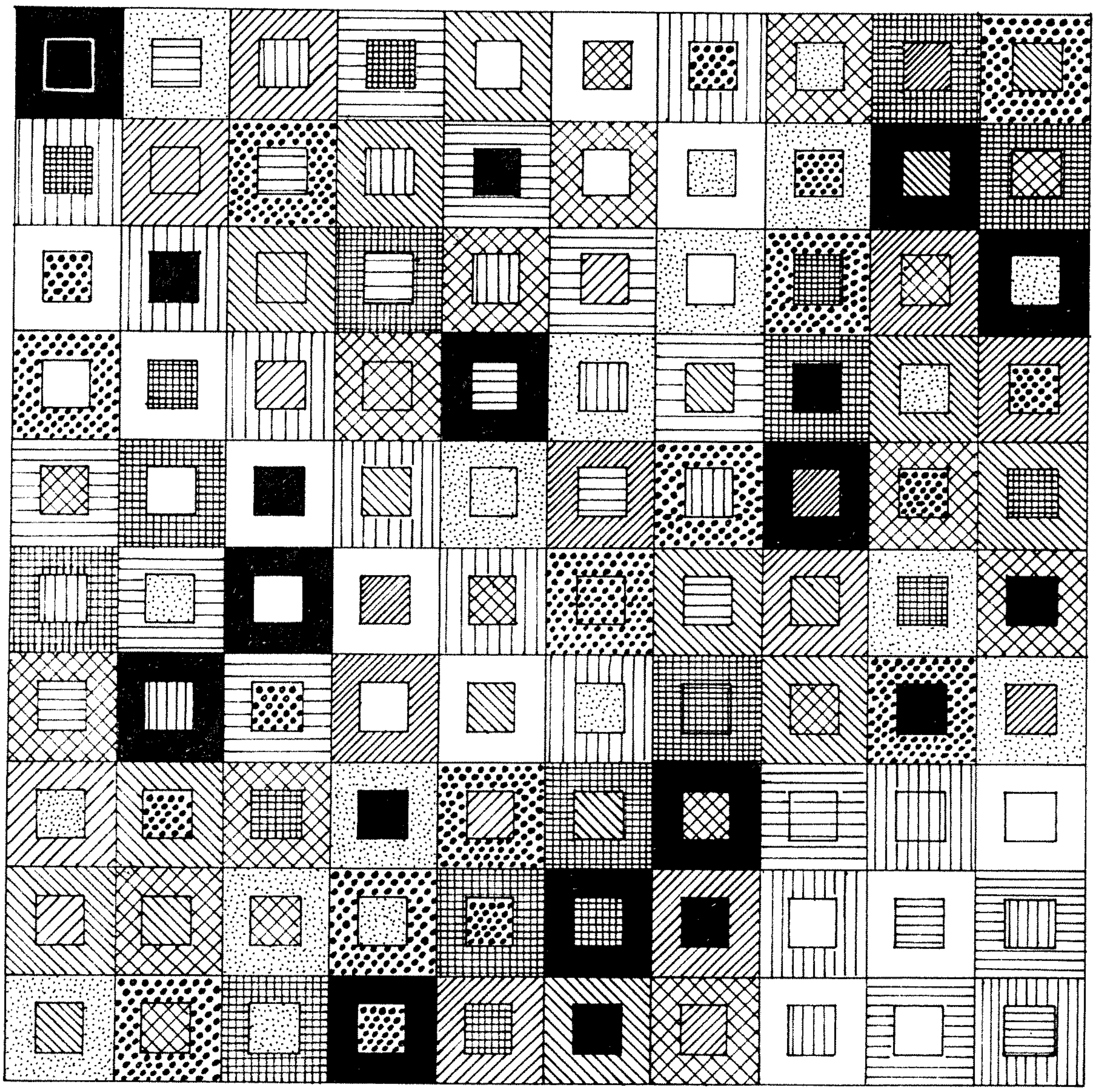
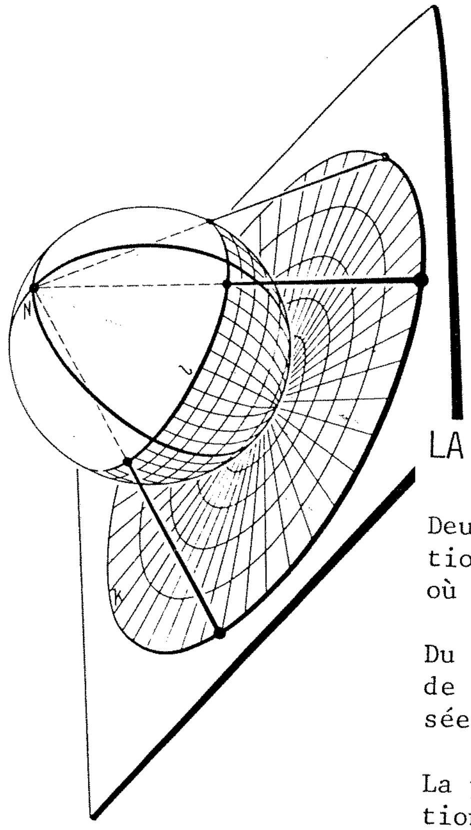
l'ouvert n°26

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE
STRASBOURG - FEV 82 - ISSN 0290-0068



NOTRE COUVERTURE : Composition sur un carré gréco-latin d'ordre dix.

Des carrés gréco-latins d'ordre dix furent découverts par PARKER en 1959, 177 ans après qu'Euler ait conjecturé leur impossibilité dans un mémoire intitulé "Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques".
(voir article p.49).



$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc...}}}}}$$

LA MATHEMATIQUE DU VOYEUR !

Deux évènements d'actualité attirent l'attention sur une pédagogie où l'on parle peu, mais où l'on exhibe !

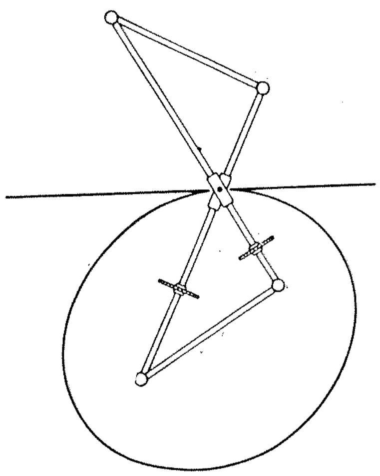
Du 12 au 13 juin se déroulera au Koïfhus de Colmar une EXPOSITION MATHEMATIQUE organisée par l'IREM.

La presse annonce, par ailleurs que l'édification du musée national des Sciences et Techniques, sur l'emplacement de feu les abattoirs de la Villette, rentre dans une nouvelle phase en prévision d'un achèvement vers 1985.

Ces faits nous invitent à réfléchir sur les objectifs et les méthodes d'une action culturelle qui se situe délibérément en dehors de l'école.

Ici, il s'agit surtout d'éveiller la curiosité, de faire venir l'eau à la bouche sans chercher à étancher prématurément la soif.

Ainsi un public, qu'on espère large, contemplera-t-il des joyaux mathématiques avec l'envie d'en savoir davantage... plus tard.



N'est-il pas souhaitable que de jeunes enfants aient joué avec des spirographes ou aient tracé des ellipses avec des ficelles ou des bandes de papier, une dizaine d'années avant éventuellement d'aborder ces questions en classe ?

Mais n'est-il pas souhaitable dès maintenant de de réfléchir sur les possibilités qu'offrent la mathématique montrée, pour une préparation précoce d'études plus approfondies ?

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots$$

Référence des illustrations :

* ANSCHAULICHE GEOMETRIE
  David Hilbert and S. Cohn-Vossen
* GEOMETRY and the IMAGINATION
  Chelsea Publishing Company

S O M M A I R E

L'OUVERT

. responsable de publication : J.Lefort

. impression :IREM de Strasbourg

. correspondance à adresser à :

IREM de Strasbourg

10, rue du Général Zimmer

67084 STRASBOURG Cedex

12 ET 13 JUIN : MATH - EXPO AU KOIFHUS A COLMAR

Combien de fois n'entend-on pas qu'il faut "ouvrir l'école sur la vie", mais le professeur se heurte régulièrement à une série d'obstacles dont la contrainte des programmes n'est pas le moindre, surtout en mathématique. Mais on peut essayer de prendre le problème à l'envers. N'y a-t-il pas eu maintes fois des pièces de théâtre jouées par des élèves, des expositions de dessin d'élèves, des chorales...
Ce qui est possible dans d'autres disciplines, est-il réellement impossible en maths ? Je ne l'ai jamais pensé bien que pendant longtemps je me sois demandé ce qui était faisable en dehors de quelques réalisations évidentes qui n'allaient pas bien loin. Depuis deux ans, j'ai commencé à entrevoir une solution et j'ai rassemblé des documents et du matériel.
Le renouvellement des programmes de lycées et en particulier ceux de seconde m'ont fait franchir le dernier pas en demandant un crédit d'heure et les moyens financiers nécessaires à la réalisation (avec la participation d'élèves de seconde) d'une exposition de mathématique qui sera ouverte au public et qui aura lieu en dehors des bâtiments scolaires.

Pour des raisons administratives, c'est l'IREM qui a pris en charge l'essentiel des moyens nécessaires à la réalisation de ce projet. Cela a un avantage: c'est qu'il a été possible d'y intéresser plusieurs établissements scolaires de l'académie. Par ailleurs, il a été prévu un concours mathématique dans un quotidien régional, en l'occurence "L'Alsace", concours qui apparaît comme une extension du rallye mathématique qui a le succès que l'on sait. Finalement, nous obtenons le programme suivant :

1) Concours d'affiche : auprès des lycéens et collégiens d'Alsace. Il s'agit de réaliser l'affiche annonçant l'exposition et qui sera distribuée chez les commerçants de Colmar et des environs.

2) Concours mathématique dans "L'Alsace" qui paraîtra dans ce quotidien en trois fois, les 2, 3 et 4 avril; 18 questions seront proposées au public (non enseignant mathématique).

3) Distribution des prix du concours, le 12 juin, en même temps que la remise des prix du rallye mathématique. Cette cérémonie aura lieu à Colmar (au lycée Bartholdi) et nous espérons la présence du Recteur. Immédiatement après, aura lieu l'inauguration de l'exposition.

4) L'exposition qui aura lieu au Koïfhus (salle de la Décapole), lieu habituel d'exposition et de conférence à Colmar. L'exposition présentera des travaux réalisés par des élèves de différents établissements, essentiellement Camille Sée à Colmar, le lycée technique de Guebwiller et celui de Haguenau. Les thèmes suivants (entre autres) seront développés :

- Numération
- Géométrie dans l'espace
- Représentation plane de figures
- Informatique (avec un micro-ordinateur)
- Statistique
- Jeux...

Bien sûr, j'engage tous les professeurs à avertir leurs élèves de l'existence de cette manifestation. Même les élèves des collèges trouveront de l'intérêt dans la visite de l'exposition. Si celle-ci remporte un franc succès, nous envisagerons d'en faire une exposition itinérante qui resterait plusieurs jours dans un même lieu et qui pourrait s'enrichir de diverses réalisations d'élèves au fur et à mesure qu'elles seraient produites. On éviterait ainsi l'impérialisme culturel qui veut que les musées soient à Paris ou dans les très grandes villes et qu'ils organisent de temps à autres pour la province quelques expositions partielles itinérantes.

J. LEFORT

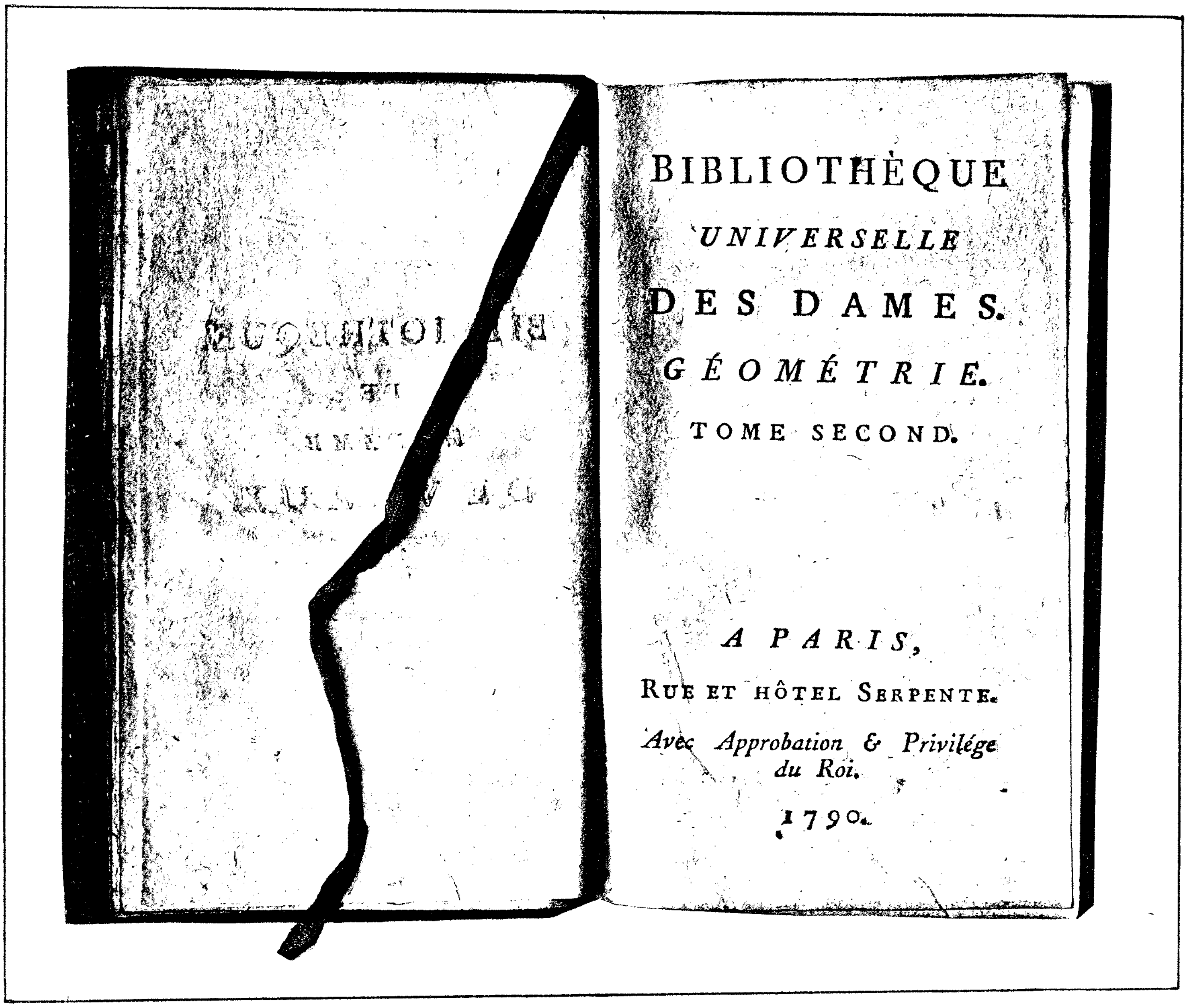
OUVRAGE DE DAME

UN MANUEL MONDAIN DU XVIIIE SIECLE

Le XVIIIe siècle a vu paraître de nombreux manuels de mathématiques destinés à un public cultivé, mais ignorant des mathématiques.

Les jeunes femmes constituaient-elles un public privilégié pour les pionniers de la vulgarisation mathématique ?
Clairaut, maître en la matière, donnait des leçons à la Marquise du Châtelet, et ses prestations étaient fort prisées dans les salons mondains. Euler entretint de 1760 à 1762 une correspondance suivie avec une cousine de Frédéric II de Prusse, publiée sous le titre: "Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne".

L'ouvrage dont nous présentons ici quelques fragments date de la fin du XVIIIe siècle et s'adresse nommément à un public féminin. Il se propose d'initier à la géométrie et affiche nettement une ambition pédagogique.
La référence est évidemment Euclide dont l'auteur s'estime obligé de faire la louange. Cela ne l'empêche pas de renvoyer, pour cause de futilité, l'examen de certaines "vérités si palpables" qui méritaient pourtant d'être méditées, et de dénoncer le caractère antipédagogique des exposés des anciens.
Nous ne sommes pas loin de la "pédagogie mondaine" dont le but est de plaire.


BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSELLE
DES DAMES.
GÉOMÉTRIE.
TOME SECOND.
A PARIS,
RUE ET HÔTEL SERPENTE.
Avec Approbation & Privilége du Roi.
1790.

Peu leur importe après tout qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de lignes fans largeur, pourvu qu'on ne leur conteste pas la possibilité d'en fuppofer dont la largeur foit fi petite, que l'on puiffe n'en tenir aucun compte. Car enfin il faut bien partir d'un terme fixe ; & les Géomètres ont mieux aimé partir avec *Euclide* de celui qui n'admet aucune largeur dans les lignes, que de démontrer en particulier les propriétés de celles qui en auroient une plus ou moins grande. Ils ont confidéré les furfaces fous le même point de vue, & par-là ils font parvenus à connoître, à développer les dimenfions & les rapports des folides d'une manière que l'expérience n'a jamais démentie. Tel eft en abrégé l'objet qui va nous occuper.

Les anciens Géomètres avoient cependant d'autres ufages que nous nous difpenferons de fuivre, à caufe de l'inutilité dont ils feroient aujourd'hui. Tel étoit, 1°. celui de donner des démonftrations des axiômes, c'eft-à-dire, de vérités fi palpables que perfonne ne les contefte ; par exemple, ils perdoient un tems précieux à prouver que *le tout eft plus grand*

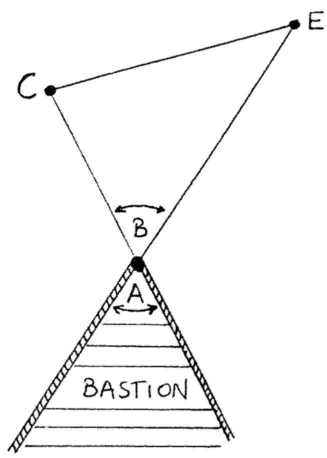
qu'une de fes parties....que la ligne droite eft la plus courte des lignes que l'on peut tirer d'un point à un autre, &c. &c. Tel étoit, 2°. l'ufage de pratiquer les quatre régles d'Arithmétique fur les lignes, comme nous les pratiquons fur les nombres ; d'où nous font venues plufieurs expreffions qui font vuides de fens pour ceux qui ignorent cet ufage des anciens : par exemple, *multiplier une ligne par une autre.* Tel étoit, 3°. l'ufage de paffer d'une propofition abftraite à une autre propofition, fans avoir fait de la première une application *pratique.* On doit attribuer à ce dernier ufage les dégoûts qu'infpirent aux étudians les premières notions de la Géométrie, & qui en ont tant éloigné. Il eft fi naturel de demander après la démonftration de chaque vérité abftraite, *à quoi fert-elle ?* Nous nous attacherons dans ces Elémens à fatisfaire, toutes les fois qu'il fera poffible, une impatience auffi bien motivée.

Le point de vue pratique va jusqu'aux instructions les plus détaillées:

> Pour tracer une portion d'un très-grand cercle sur le papier, on se sert d'une régle de bois ou de métal, à une extrêmité de laquelle on attache la pointe fixe. On assujetit ensuite sur cette même régle à la longueur du rayon la pointe mobile qui doit tracer. Pour opérer sur le terrein, on emploie un cordeau au lieu de régle.

Les applications que l'auteur s'est engagé à donner à chacun des énoncés ont un caractère pratique plutôt abstrait, surtout pour un public de dames. Il s'agit ici d'un bastion "dont on ne peut approcher". Sous peine de recevoir de la mitraille ?
On le constatera à nouveau: le caractère "utile" que l'auteur prétend donner aux mathématiques relève plutôt de la précaution oratoire.

> 14. THÉORÊME. *Les angles opposés au sommet sont égaux.*
>
> *Usage de ce Théorême.* Veut-on mesurer l'angle A [*Fig.* 4] d'un bastion dont on ne peut approcher? on prolonge à l'œil & à l'aide des piquets ou jalons, les deux côtés de l'angle A jusqu'en C & E, pour former le triangle BCE. Il est facile d'en mesurer les deux angles C & E. Avec cette somme on trouve l'angle B; parce que les trois angles de tous triangles sont égaux à deux droits, comme nous le prouverons bientôt (66). L'angle B étant connu donne l'angle A qui lui est opposé au sommet.



L'ouvrage suppose en fait une familiarisation avec le calcul algébrique peu répandue à l'époque et il détaille longuement toute une série de constructions géométriques de radicaux de diverses expressions rationnelles. La pétition utilitaire a été provisoirement oubliée.

146. Voyons donc comment on peut construire les radicaux du second degré.

Si on avoit d'abord $xx = am$, ou $x = \sqrt{am}$, il faudroit prendre une moyenne proportionnelle entre a & m, & ce feroit la valeur de x. Si on avoit $x = \sqrt{(ab + bc)}$, on prendroit entre b & $a + c$ une moyenne proportionnelle qui feroit égale à $\sqrt{(ab + bc)}$.

Géométrie, Tome I. G

En général, on voit que toute quantité dans laquelle il n'entre que des radicaux du second degré, ou même du quatrième, ou du huitième, &c. peut toujours être construite par le moyen du cercle.

153. De-là il suit que toute équation du second degré, peut être résolue par le moyen du cercle. En effet, l'équation $xx - px = qq$, qui peut représenter toutes celles du second degré, donne $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp + qq)}$, quantité facile à construire par ce qui précéde.

On remarquera au passage que la constructibilité à la règle et au compas des nombres d'une extension de degré 2^n est mentionnée.

On est cependant surpris, après le maniement de tant de radicaux de lire la précision suivante :

D'où l'on peut conclure en général que *lorsque le résultat d'un calcul donne une valeur négative de l'inconnue, cela signifie qu'on doit prendre cette inconnue dans un sens opposé à celui où on l'avoit prise d'abord.*

Le concept de nombre négatif n'est pas encore clair et l'idée qu'une lettre puisse représenter un nombre négatif est rejetée comme étant une erreur (*).
L'inévitable problème de la quadrature du cercle est bien sûr abordé. L'"utilité" est bien oubliée!

167. SCHOLIE II. D'après tout ce que nous avons dit juſqu'ici, on voit que le fameux problême de la *quadrature du cercle* conſiſte à trouver exactement la ſurface de cette figure, ou à faire voir qu'elle ne peut point être trouvée ; car l'une & l'autre de ces deux manières réſoudroit également la queſtion. Et comme cette ſurface ſeroit connue (164), ſi l'on trouvoit le rapport exact de la circonférence à une ligne droite donnée, c'eſt à la recherche de ce rapport que les Géométres ſe ſont attachés. Quelques-uns ont prétendu que ſa valeur eſt inaſſignable, & qu'ainſi la quadrature du cercle eſt impoſſible ; d'autres au contraire ont cru ce rapport aſſignable, & ont fixé des limites plus ou moins rapprochées, entre leſquelles il ſe trouve. Ainſi Archimède a fait voir que le diamètre étant 7, la circonférence eſt entre 21 & 22, mais plus près de 22 que de 21. Adrien Metius a donné un rapport plus approché, en diſant que le diamètre étant 113, la circonférence eſt entre 354 & 355, mais plus près de ce dernier nombre que de l'autre. Ludolph en a approché juſqu'à la trente-cinquième décimale. De Lagny a encore porté cette approximation plus loin dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, de l'année 1719, en diſant que le diamètre étant 1, la circonférence ſera exprimée par 3,141592, &c. juſqu'à 127 caractères décimaux, de manière qu'il ne s'en faudra pas d'une unité décimale du 127^e rang, qu'on n'ait par-là la véritable valeur de la circonférence. Enfin Neuton, Léibnitz & d'autres grands Géomètres (car ce n'eſt qu'à ceux-là qu'il appartient d'eſpérer quelques ſuccès dans cette recherche) ont trouvé différentes approximations, parmi leſquelles nous nous bornerons à rapporter la ſuivante, dont l'invention eſt attribuée à Léibnitz, quoique d'autres Géometres l'aient réclamée dans le tems ; ſavoir que le quarré du rayon étant un, le quarré du cercle ſera $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. Ainſi à l'infini, en approchant toujours de ſa valeur alternativement en-deſſus & en-deſſous.

(*) Le choc que m'a procuré ce passage me fait considérer avec plus d'indulgence ces élèves pour qui -x est "forcément" plus petit que x ...

L'auteur ignorait visiblement qu'en 1768, Lambert avait prouvé l'irrationnalité de π (*). Mais il ne manquait pas de jugement en réservant aux meilleurs cerveaux toute avancée significative sur le sujet !

Après ce passage dans les hautes sphères, on en vient à de véritables problèmes concrets, mais qui n'ont pas grand chose de mathématique : les opérations sur des longueurs, aires, volumes avec le système d'unités de l'Ancien Régime.
Que le système métrique (nous sommes en 1790) est urgent !

On voit en même-tems qu'il n'y a ici aucune nouvelle régle à apprendre pour faire ces fortes de multiplications qui font évidemment les mêmes que celles que nous avons données en Arithmétique fous le nom de *Multiplication des nombres complexes*.

Ainfi, pour nous borner à un exemple, fi on me demande quelle eft la furface d'un rectangle qui auroit $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p}$ de long, & $44^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$ de large ; je fais l'opération comme il fuit :

52^{T}	4^{P}	5^{p}		
44^{T}	4^{P}	8^{p}		
208^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	$0^{T.l.}$	$0^{T.pt.}$
208				
22				
7	2			
2	2	8		
0	3	8		
26	2	2	6	
8	4	8	10	
2	5	6	11	4
2	5	6	11	4
2361^{TT}	$2^{T.P}$	$5^{T.p}$	$2^{T.l.}$	$8^{T.pt.}$

c'eft-à-dire, je multiplie 52 par 44, puis les 4^{P} du multiplicande par 44, en prenant pour 3^{P} la moitié de 44, & pour 1^{P} le tiers de ce que j'aurai eu pour 3^{P} ; enfuite je multiplie 5^{p} par 44, en prenant pour 4^{p} le tiers de ce que j'ai eu pour 1^{P} ; & pour 1^{p} je prends le quart de ce que j'ai eu pour 4^{p}.

Pour multiplier par 4^{P}, je prends pour 3^{P} la moitié du multiplicande total, & pour 1^{P} le tiers de ce que j'ai eu pour 3^{P}. Enfin, pour multiplier par 8^{p}, je prends le tiers de ce que j'ai eu pour 1^{P}, & je l'écris deux fois, réuniffant tous ces produits particuliers, j'ai $2361^{TT.}\ 2^{T.P.}\ 5^{T.p.}\ 2^{T.l.}\ 8^{T.pt.}$ pour produit total.

Quand on a ainfi évalué une furface en toifes quarrées, toifes-pieds, toifes-pouces, &c. il eft fort aifé d'en trouver la valeur en toifes quarrées, pieds quarrés, pouces quarrés, &c. Il faut écrire alternativement les deux nombres 6 & $\frac{1}{2}$ fous les parties de la toife, à commencer des toifes-pieds,

et ce n'est pas fini ...

(*) Le "Petit Archimède" a consacré un numéro spécial à π ...

Pour finir, ouvrons "l'étui de mathématiques ordinaires" dont l'auteur parle à plusieurs reprises. On pourrait le comparer à certaines de nos calculettes d'aujourd'hui qui proposent de multiples conversions d'unité, mais reconnaissez que le mystère qui entoure "l'étui" est plus poétique ...

Ufage du Compas de proportion.

De toutes les pièces que renferme l'étui de Mathématiques ordinaire, la plus compliquée eft le *Compas de proportion*. On conçoit affez facilement l'ufage des autres ; mais les ufages de celle-ci demandent une explication détaillée que l'on cherche en vain dans les Cours de Mathématiques.

Le *compas de proportion* eft ainfi nommé, parce qu'il fert à déterminer les *proportions* entre les quantités de même efpèce, entre une ligne & une autre ligne, entre une furface & une autre furface, entre un folide & un autre folide, &c. &c.

On a coutume d'y tracer fix fortes de lignes ; favoir, d'un côté la ligne des parties égales, celle des plans & celle des polygones ; de l'autre côté la ligne des cordes d'arcs de cercle, celle des folides & celle des métaux.

On trace encore fouvent fur les bords du *Compas de proportion*, d'un côté une ligne divifée fervant à faire connoître le calibre des canons, & de l'autre côté une ligne fervant à faire connoître le diamètre & le poids des boulets de fer depuis $\frac{1}{4}$ de livre jufqu'à 64$^{\text{lt}}$. L'explication de ces deux lignes fe trouvera dans les *Ufages de la ligne des folides.*

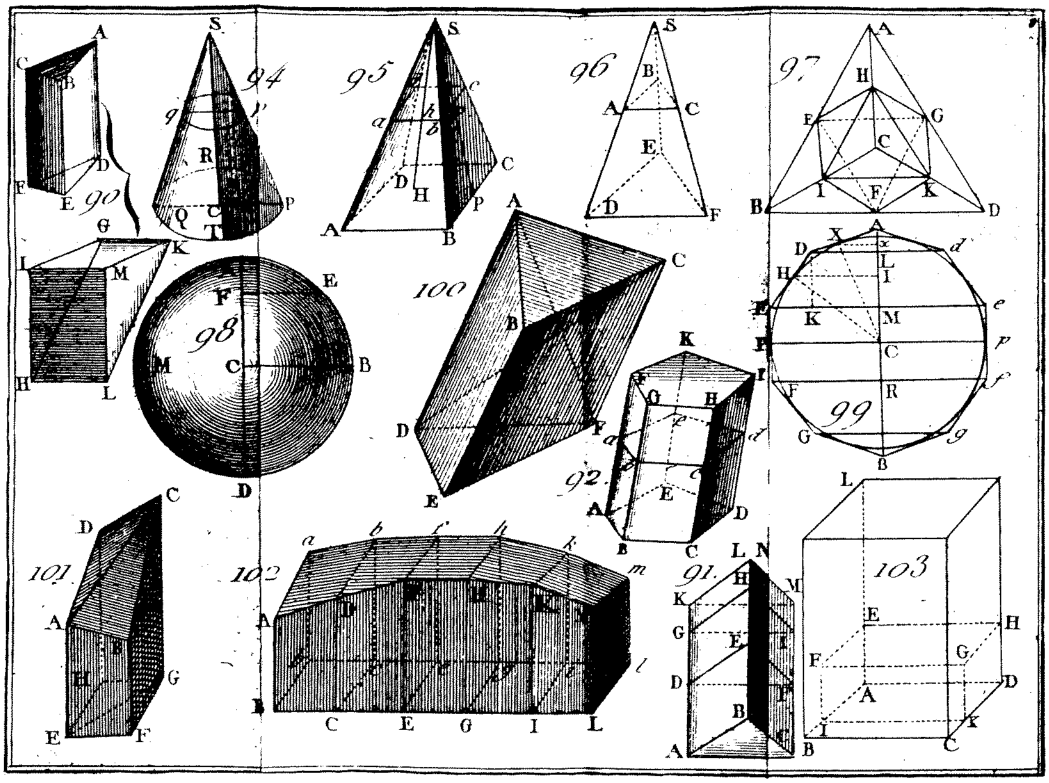
... même si l'on s'aperçoit que ledit compas de proportion permet de calculer le calibre des canons, le poids des boulets et à évaluer la valeur des pièces d'or.

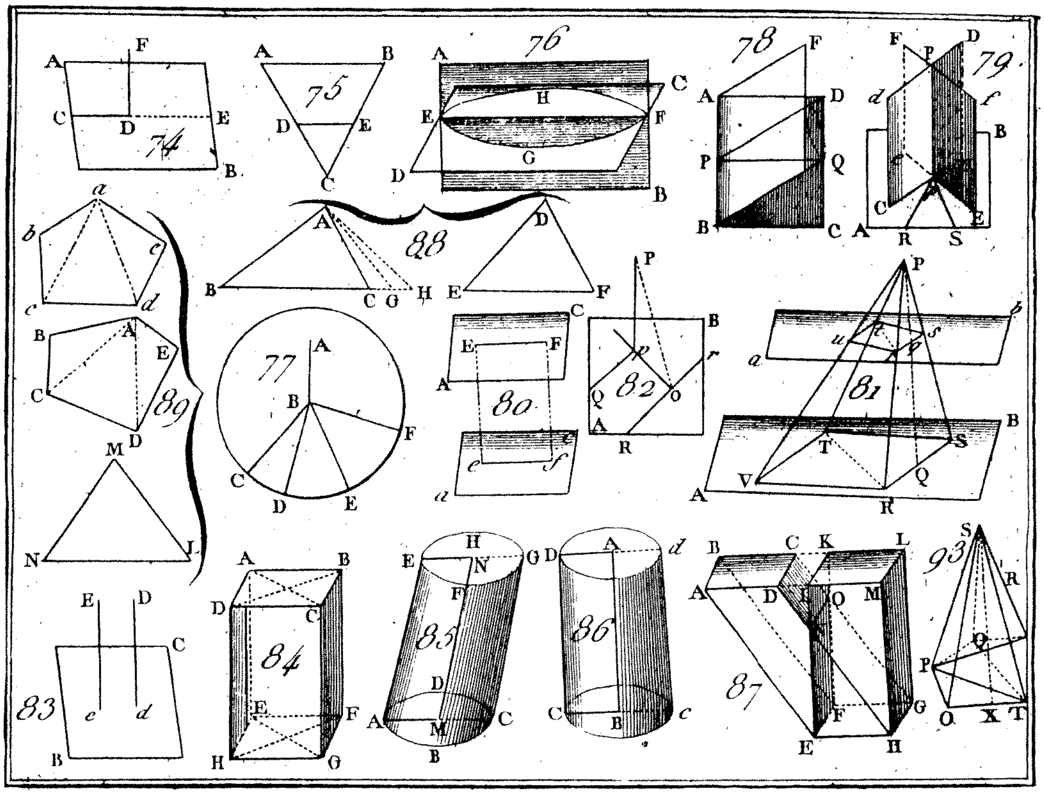
L'auteur, qui reprochait tant à Euclide de ne pas motiver ses lecteurs par des applications concrètes, était-il partisan de l'enrôlement de ses lectrices dans les armées du Roi ?

Concédons-lui que l'oisiveté de ses lectrices potentielles réduisait singulièrement les possibilités d'applications "concrètes" de la géométrie.

Et d'une façon générale, il faut reconnaître que l'ouvrage est plutôt plaisant et ne manque pas de rigueur.

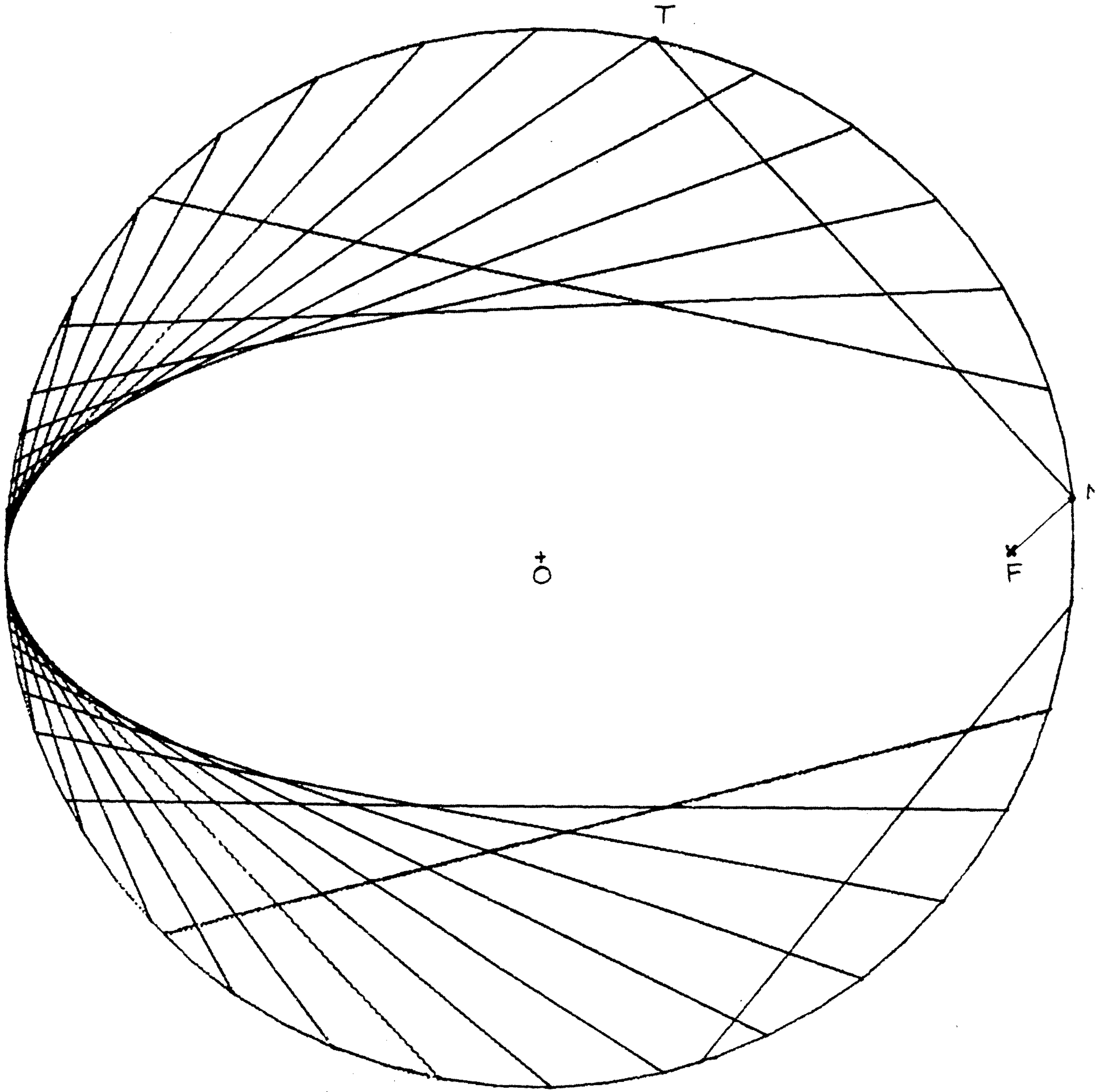
Eric CHANEY.





L'ouvrage ne méprise pas les figures de géométrie, comme en témoignent ces deux planches extraites parmi une vingtaine.
La technique typographique de l'époque rendait cependant malaisée l'insertion de figures dans le texte. Aussi ces planches sont-elles reportées en fin d'ouvrage, dans des feuillets dépliants. L'amoncellement de figures ne les empêche pas d'être claires.

UNE ELLIPSE BIEN ENVELOPPEE



La génération tangentielle de l'ellipse a été réalisée à l'IREM sur le traceur Houston commandé par micro-ordinateur LX515 au moyen d'un programme LSE.

On trace d'abord le cercle (en fait un polygone régulier de 62 côtés).

Pour une trentaine de points de ce cercle, on calcule les coordonnées (α, β) de $\overrightarrow{FM}$, puis d'un vecteur $\lambda\vec{u}$ avec $\vec{u}\,(\beta, -\alpha)$.

Il ne reste plus qu'à déterminer λ pour que $[\ \overrightarrow{MT} = \lambda\vec{u}$ et $\|\overrightarrow{OT}\| = R\ ]$.
Le traceur joint les points M et T ainsi calculés.

On dispose de procédures LSE permettant de commander le traceur :

- se déplacer du point actuel au point donné (x, y).
- abaisser la plume (pour tracer)
- relever la plume (pour se déplacer sans tracer).

(Pour plus amples renseignements, s'adresser à l'IREM).

A L'INTENTION DES PROFESSEURS DE CURIOSITES

L'enseignant peut-il rêver d'un plus beau succès pédagogique que d'inciter un élève à faire des mathématiques pour son plaisir ?
Ce que les jeunes apprennent tout seul (ou entre eux), au cours de loisirs studieux, constitue la part la plus solide de leur culture. Il n'y a vraiment pas de quoi s'inquiéter s'ils étudient des choses intéressantes qui ne figurent pas au programme !
J'y songeai récemment au cours d'une visite à des parents dont la jeune fille (nommons-la L.N.) est une élève de 4ème plutôt faible en mathématiques. Il y a quelques années, elle jouait avec un spirographe, et depuis que sa classe a adopté le manuel d'André Deledicq et Claude Lassave, elle passe parfois une heure à des jeux mathématiques suggérés par l'ouvrage. Cela n'empêche pas qu'elle commette souvent des erreurs de calcul dues à un entrainement insuffisant, et qu'elle récolte de temps en temps des notes médiocres: les activités libres et joyeuses ne dispensent pas d'un certain dressage, qui fixe les mécanismes... Mais, c'est là une toute autre histoire, étrangère à mon propos.
Il faut féliciter Deledicq et Lassave: leur livre contient beaucoup de thèmes d'activités susceptibles d'éveiller la curiosité.
Je vais maintenant émettre quelques critiques pédagogiques suggérées par l'observation d'une situation didactique où la jeune L.N. se trouvait impliquée lors de ma visite. Les remarques qui vont suivre sont de portée générale et profitables à tous les enseignants qui s'efforcent d'être des professeurs de curiosités.

L'incitation à l'initiative ne porte ses fruits que si la tentative est couronnée de succès. Par exemple, on trouve dans des journaux illustrés destinés aux jeunes des recettes de pâtisserie qu'on invite à exécuter. Si le jeune lecteur parvient à confectionner un succulent gâteau, on aura favorisé une vocation culinaire. Mais si la recette, mal rédigée, n'indique pas les précautions indispensables à la réussite, et si l'apprenti aboutit à des ragougnasses immangeables, il risque d'être définitivement dissuadé de mettre la main à la pâte !

Or, j'ai pu observer L.N. aux prises avec l'exercice suivant qui présentait une activité fort instructive: il s'en fallut de peu que l'expérience ne rate, et cela se serait sans doute produit si la jeune expérimentatrice était restée livrée à elle-même :

« Enveloppes ».

21 – a) *Trace un cercle dont le rayon soit le plus grand réalisable dans ta feuille.*

b) *Prends un point S à l'intérieur du cercle, distinct de son centre.*

c) *Prends un point A_1 sur le cercle.*

d) *Trace d'un trait léger, au crayon à papier, le segment $[SA_1]$.*

e) *Trace d'un trait léger, au crayon à papier la demi-droite qui est perpendiculaire à (SA_1) en A_1 et qui recoupe le cercle.*

f) *Choisis une couleur une fois pour toutes. Utilise-la pour repasser le segment de la demi-droite tracée en* e) *qui est intérieur au cercle.*

g) *Si tu n'as pas suffisamment de segments colorés pour conclure, reprends en* c) *avec un autre point.*

h) *Tu vois que tes segments coloriés enveloppent une courbe. Dessine cette courbe au crayon à papier. Renseigne-toi sur son nom.*

Il manquait au départ une liste précise d'instruments indispensables à la réussite de l'expérience. Pourtant L.N s'était munie d'un bon compas, d'une grande feuille de papier à dessin (bonne idée !), de crayons de couleurs... Très bien. Mais elle ne se rendit pas compte que sa règle était beaucoup trop courte. En cours d'expérience, elle s'aperçut qu'il lui fallait une équerre: elle descendit en acheter une (d'ailleurs pas assez grande) au bazar. Cette interruption aurait bien pu s'avérer dissuasive.

L'instruction a) de l'énoncé est excellente et très importante. Si les auteurs ne l'avaient pas écrite, l'expérimentatrice risquait de produire un dessin de la taille d'un ticket de métro !. Mais la règle trop courte l'incita à choisir son point A sur la petite portion du cercle qu'elle pouvait atteindre.
L'analyse linguistique des instructions b) et c) suivantes fait apparaître beaucoup d'ambiguités. En particulier, il faut être bien perspicace pour deviner que le point S est destiné à rester fixe tout au long de l'expérience , et que le point A_1 n'est qu'une première détermination d'un point variable A <u>destiné à décrire tout le cercle</u> .

Ainsi L.N dessina une demi-douzaine de segments SA_i où les points A_i se resseraient sur un faible arc du cercle. Manifestement, il ne se passait rien !
C'est alors qu'elle vint me trouver et m'annonça qu'elle ne comprenait rien à l'exercice !
Dès que je diagnostiquai la cause de l'échec dû à sa règle, elle alla emprunter une belle règle plate à son frère aîné.
Elle repris l'expérience... en ma présence, cette fois.
L.N. me demanda où il serait avantageux de choisir le point S. Très bonne question ! Puisque l'ellipse que l'on cherche à obtenir a même centre que le cercle, et que S est l'un des foyers, on n'obtiendra une ellipse très aplatie que si S est éloigné du centre. Dans le cas contraire, l'enveloppe ressemblera à un cercle, et l'effet sera moins saisissant.
L.N. ne devina pas d'elle même qu'il fallait recommencer l'opération élémentaire plusieurs dizaines de fois de suite pour aboutir à l'effet voulu. Et elle ne comprit pas que l'instruction d) n'avait qu'une valeur provisoire, en attendant qu'on se familiarise avec la manoeuvre. Après quoi, on a intérêt à faire simplement glisser l'équerre, en sorte qu'un de ses côtés passe par S et que le sommet décrive le cercle. Il suffit alors de tracer la corde perpendiculaire à SA, au crayon de couleur, sans s'attarder à marquer le segement SA .

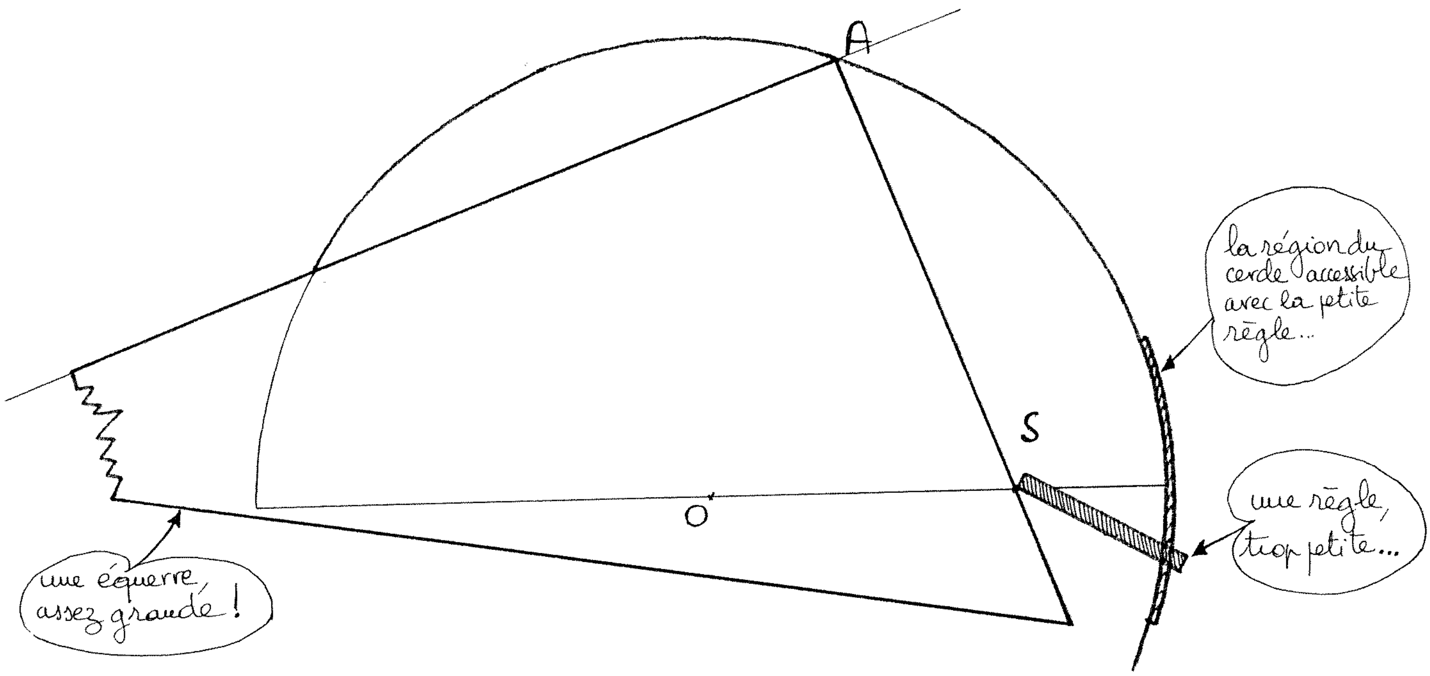


Fig 1. Des causes techniques des malheurs de L.N. et des moyens d'y remédier.

L.N. fut fort satisfaite d'obtenir une enveloppe bien apparente. Au cours de cette séance, elle améliora son adresse à manier les instruments à dessin, et acquit beaucoup de souvenirs cognitifs qui pourront lui être utiles, plus tard. Il est même probable qu'elle retienne ainsi la belle génération tangentielle de l'ellipse qui ne figure pas à son programme d'étude.
Mais il est clair qu'il ne s'agit pas là d'une activité "élitiste" destinée seulement aux futurs mathématiciens . Les habitudes acquises au cours de manipulations semblables trouvent leur utilité dans l'exercice de beaucoup de métiers manuels où l'on a l'occasion de réfléchir un peu à ce que l'on fait !

Revenons aux auteurs du manuel scolaire. Ils me rétorqueront sans doute que l'énoncé était destiné à une séance de travaux dirigés: le maître serait alors disponible pour fournir aux élèves toutes les précisions pratiques qui ne se trouveraient pas explicitement dans l'énoncé.

Mais n'oublions pas qu'un livre est un discours écrit qui s'adresse à un interlocuteur anonyme ! On ignore à l'avance dans quel contexte tel passage sera lu. Le hasard a fait que j'ai observé une situation didactique où l'énoncé a mal fonctionné.
Et que les auteurs ne viennent pas me raconter qu'ils savaient d'avance qu'au moment où la gamine serait sur la point d'abandonner, il se trouverait là, à point nommé, quelqu'un pour rétablir la situation !

Georges GLAESER.

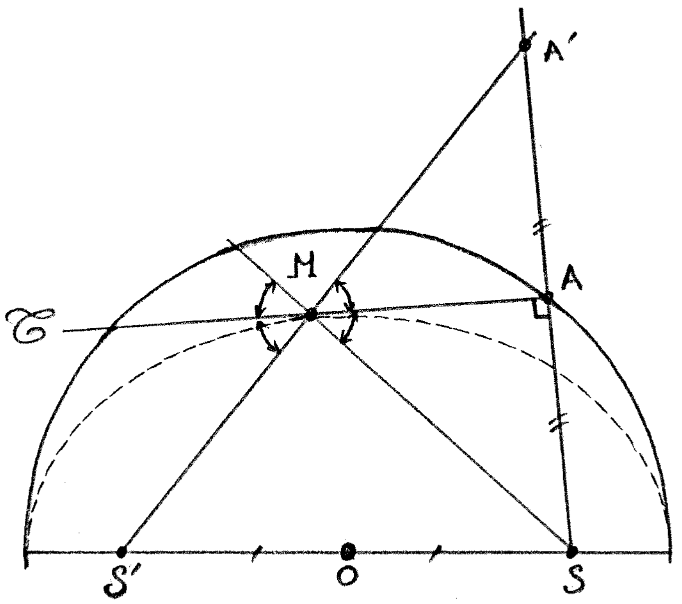


fig 2. L'ellipse comme antipodaire d'un cercle par rapport à un point S qui lui est intérieur.

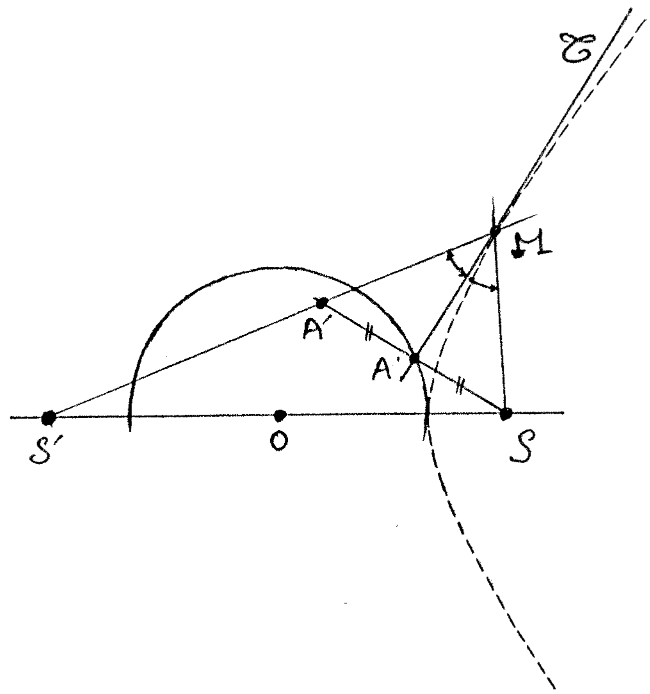


fig 3. L'hyperbole comme antipodaire d'un cercle par rapport à un point S qui lui est extérieur

La belle génération tangentielle de l'ellipse que L.N. a failli méconnaitre à jamais repose sur une propriété des tangentes aux coniques à foyer que l'on aurait naguère qualifiée de classique :

> Si $\mathcal{T}$ est tangente en M à la conique $\mathcal{C}$ de foyers S et S', $\mathcal{T}$ est la bissectrice (intérieure pour l'hyperbole, extérieure pour l'ellipse) du couple de demi-droites (MS, MS'). (Fig 2 et 3).

Revenons au problème de L.N. Soit S' le symétrique de S par rapport à O, centre du cercle. Soit A l'un des points de la circonférence choisis, et A' le symétrique de S par rapport à A. Si $\mathcal{T}$ est la perpendiculaire en A à SA, construisons A'S' qui coupe $\mathcal{T}$ en M (fig 2). $\mathcal{T}$ étant la médiatrice de SA', le triangle SMA' est isocèle et $\mathcal{T}$ est par conséquent la bissectrice extérieure du couple de demi-droites (MS, MS'). Elle est donc tangente en M à l'ellipse de foyers S et S' dont le cercle est le cercle principal. L'ellipse lui est bitangente.

Si S avait été donné à l'extérieur du cercle, $\mathcal{C}$ aurait été la bissectrice intérieure de (MS, MS') et aurait enveloppé une hyperbole de foyers S et S', bitangente au cercle donné.

Le cercle est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de S sur les tangentes de la conique. Autrement dit, il constitue la podaire de la conique par rapport à S. La correspondance ainsi définie étant bijective, la conique est l'antipodaire du cercle.

Eric CHANEY.

REPUTEE NULLE ...

L'élève dont nous reproduisons un fragment de copie réalisée lors d'un contrôle en classe, était alors dans une 1ère G'_2, l'une de ces "passerelles" mises en place pour permettre à des élèves ayant fait leurs études en LEP de rejoindre le cycle long.

Comme ses camarades, Martine a été acceptée en 1ère après avoir réussi un BEP commercial et présenté avec succès une demande d'admission en Première. Son niveau en mathématiques était très faible, l'enseignement général étant prisé de la façon que l'on sait en LEP.
Les conditions d'enseignement dans ces classes d'adaptation sont pour beaucoup dans la réussite indéniable dont témoigne sa copie, quelle que soit l'opinion que l'on puisse avoir sur le genre d'exercice qu'elle eut à traiter.

L'horaire hebdomadaire est de cinq heures - contre deux heures et demie dans une 1ère G_2 "normale". L'effectif de la classe était inférieur à 15. Il faut ajouter à ce rêve pédagogique(*) un élément moins "matériel": les élèves admis en Lycée après des études en LEP éprouvent généralement un sentiment de promotion et sont fortement motivés dans les matières où ils savent que leur niveau est trop faible, ce qui est le cas en mathématique. Echouer à leur BAC, alors qu'ils sont relativement âgés et avaient la possibilité de trouver (de chercher, du moins...) un travail avec leur BEP, serait ressenti par eux comme un échec bien plus cuisant que par d'autres.
Bref, en s'en donnant les moyens, on peut apprendre les mathématiques à des gens réputés faibles, voire "bouchés",
N'en concluons pas pour autant que cette procédure des passerelles baigne dans l'huile. Plusieurs collègues de LEP m'ont assuré que ce ne sont pas toujours leurs meilleurs élèves qui présentent un dossier d'acceptation en première d'adaptation: la nécessité de trouver un emploi rapidement prime le plus souvent. D'autre part, le nombre de places est fort limité, ce qui donne à cette filière un statut marginal. Enfin, elle s'avère être

(*) que leur professeur a su parfaitement exploiter.

piège pour certains élèves. Je pense en particulier aux jeunes ayant rejoint le cycle long en seconde, après un CAP.
Leur niveau mathématique est a priori encore plus faible que celui des élèves ayant un BEP en poche. Ils bénéficient en seconde de conditions comparables à celles dont profita si bien Martine.
Mais en Première, c'est fini ! Ces élèves se retrouvent avec leurs camarades issus d'une seconde "normale" et ont souvent les plus grandes difficultés à surmonter leur handicap. En se souvenant qu'on leur présentait le BAC comme assuré, "à condition de travailler", bien sûr, certains s'estiment floués. Il me parait difficile de leur donner tort.

Eric CHANEY.

Lors du contrôle, Martine avait:

1) à "débarasser" la fonction $x \longmapsto \dfrac{|x^2-5x+4| + 5x+1}{|x-4| -1}$

de ses encombrantes valeurs absolues, puis à en étudier la continuité.

2) à étudier la continuité en $x = 6$ de la fonction :

$$\begin{cases} x \longmapsto \frac{1}{2} + 1 & \text{si } x \geqslant 6 \\ x \longmapsto 2x - 10 & \text{si } x \leqslant 6 \end{cases}$$

après en avoir fait le graphique.

1°) Montrons que f est non continue à gauche en 6

Soit $J =]3 ; 5[$, intervalle centré ouvert de centre $f(6) = 4$ de rayon 1. Quelque soit l'intervalle I de la forme $]6-\alpha ; 6]$, α appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, choisissons x appartenant à I, x différent de 6.

$f(x) = 2x - 10$ or $x < 6$

$2x < 2 \times 6$

$2x < 12$

$2x - 10 < 12 - 10$

$f(x) < 2$

donc $f(x)$ n'appartient pas à J

f n'est pas continue à gauche en 6.

2°) Montrons que f est continue à droite en 6

Soit ε, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, existe-t-il α, $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, tel que, quelque soit x appartenant à $[6 ; 6+\alpha[$, tel que $|f(x) - f(6)| < \varepsilon$

$|f(x) - f(6)| < \varepsilon$ avec $x \geqslant 6$

$|\frac{1}{2}x + 1 - 4| < \varepsilon$ avec $x \geqslant 6$

$|\frac{1}{2}x - 3| < \varepsilon$ avec $x \geqslant 6$

$0 \leqslant \frac{1}{2}x - 3 < \varepsilon$

$3 \leqslant \frac{1}{2}x < 3 + \varepsilon$

$6 \leqslant x < 6 + 2\varepsilon$

donc $x \in [6 ; 6+2\varepsilon[$

On a trouvé un nombre α ($\alpha = 2\varepsilon$)

f est continue à droite en 6

Conclusion : f est continue à droite en 6 et discontinue à gauche en 6.

DANS LE COURRIER DE FERMAT

Fermat entretenait une correspondance suivie avec d'autres mathématiciens de son temps. Il était de règle dans ces lettres de se lancer de courtois défis mathématiques. Parmi les correspondants figuraient Roberval, Digty, Carcavi, Sainte-Croix et bien d'autres.

En septembre 1636, il s'attaque, sans succès, à un problème posé par Sainte-Croix. A cette occasion, il lui retourne le défi en proposant une série de problèmes, par l'intermédiaire du Père Mersenne.
Entre autre (**), il soumet une variante de ce qu'on appelle aujourd'hui "l'équation de Fermat" dans le cas n=4.

(Lettre de Fermat à Mersenne pour Sainte-Croix, septembre 1636.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Quoique j'aie à dire que je ne suis point un Œdipe, mais un Dave, et que j'avoue très volontiers que je ne suis point parvenu à résoudre la question de M. de Sainte-Croix, je vous demanderai la permission de vous adresser, en échange des nombres qu'il a divulgués, la solution de votre problème, et de lui proposer à mon tour quelques questions qu'il ne débrouillera pas, je crois, de si tôt, malgré les promesses qu'il vous fait et la singulière puissance de son esprit.

2. Pour rendre donc l'épreuve plus honorable, ainsi qu'il le dit, en choisissant des problèmes plus difficiles, voici ceux que je propose :

1° Trouver un triangle rectangle en nombres, tel que son aire soit un carré.

2° Étant donnée la somme de l'hypoténuse d'un triangle rectangle en nombres et du produit des trois côtés, trouver les limites entre lesquelles l'aire se trouve comprise.

Ne vous étonnez pas de l'addition d'une longueur et d'un solide; car dans les problèmes numériques, comme on le sait, toutes les quantités sont homogènes.

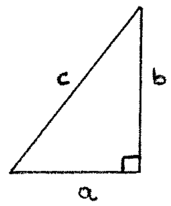
3° Trouver deux bicarrés dont la somme soit un bicarré ou deux cubes dont la somme soit un cube.

4° Trouver trois carrés formant une progression arithmétique dont la raison soit également un carré.

13. Pour votre proposition des triangles rectangles, elle me semble énoncée dans votre lettre avec quelque peu d'obscurité; je la résoudrai peut-être, si vous me la proposez plus clairement.

Le problème n°1 revient à trouver quatre entiers naturels strictement positifs, a, b, c, p, qui vérifient le système d'équations :

$$E_1 \ : a^2 + b^2 = c^2$$



$$E_2 \ : ab = 2p^2$$

Supposons que ce système admette une solution $(a,b,c,p) \in \mathbb{N}^4$ avec $abcp \neq 0$.
On peut supposer que pgcd $(a,b,c,p) = 1$.
D'après E_1, il existe x et y, entiers naturels stictement positifs, avec pgcd $(x,y) = 1$, tels que :

$$c = x^2 + y^2, \quad a = x^2 - y^2, \quad b = 2\,x\,y.$$

En vertu de E_2, nous aurons :

$$xy(x^2 - y^2) = p^2$$

Or, comme pgcd$(x,y) = 1$, pgcd $(x, x^2 - y^2) =$ pgcd $(y, x^2 - y^2) = 1$.
Donc x,y et $(x^2 - y^2)$ doivent être, séparément, des carrés parfaits. Autrement dit, il existe u, v et t, entiers strictement positifs, tels que :

$$x = u^2, \quad y = v^2, \quad x^2 - y^2 = t^2.$$

Donc, $u^4 - v^4 = t^2.$

Le triplet (u,v,t) est donc solution de l'équation (dans $\mathbb{Z}$)

$$X^4 - Y^4 = Z^2 \qquad (1)$$

avec $\quad uvt \neq 0 \qquad (2)$

Nous allons montrer que cette équation n'a pas de solutions.

UNE DESCENTE INFINIE

La démonstration est basée sur la méthode de la "descente infinie", due à Fermat lui-même.
Supposons qu'il existe des solutions de (1) vérifiant (2); nous pouvons en choisir une (x_1, y_1, z_1) avec $x_1 > 0$, $y_1 \neq 0$, $z_1 \neq 0$. Supposons qu'à partir de cette solution , nous puissions trouver une autre solution (x_2, y_2, z_2) avec $0 < x_2 < x_1$, $y_2 \neq 0$, $z_2 \neq 0$.

Nous pourrons, si les mêmes hypothèses se renouvellent, trouver, quel que soit n, une suite de solutions (x_n, y_n, z_n) avec

$$0 < x_n < \quad \dots \quad < x_2 < x_1$$

ce qui est impossible. En d'autres termes, plus actuels, s'il existe une solution avec $x > 0$, il en existe une où <u>x est > 0 et minimal</u> .

Admettons que (1) ait des solutions vérifiant (2) et choisissons parmi ces solutions (x,y,z) où $x > 0$, $y > 0$, $Z > 0$ et telle que si (x', y', z') est aussi une solution de la forme (2) avec $x' > 0$, alors $x' \geqslant x$.
Le choix de (x,y,z) entraîne que x,y et z n'ont pas de facteurs communs autre que 1
Il en sera de même pour (x^2, y^2, z).
Or, (x^2, y^2, z) est une solution de l'équation

$$X^2 = Y^2 + Z^2 \qquad (3)$$

dont on connait toutes les solutions. (*)

Il existe r et q , entiers $>$ 0 premiers entre eux, tels que l'un des deux cas suivants ait lieu:

$$\text{(E)} \begin{cases} x^2 = r^2 + q^2 \\ y^2 = r^2 - q^2 \\ z = 2rq \end{cases} \qquad\qquad \text{(E')} \begin{cases} x^2 = r^2 + q^2 \\ y^2 = 2rq \\ z = r^2 - q^2 \end{cases}$$

Regardons chacun des cas.

- Dans le cas (E), nous aurons :

  $$r^4 - q^4 = (xy)^2$$

  c'est-à-dire que le triplet (r,q,xy) est aussi solution de (1) vérifiant (2). Or, $x^2 = r^2 + q^2 > r^2$. Donc $r < x$, ce qui contredit le choix de x.

•• Si on est dans le cas (E'), on voit (compte tenu du fait que x,r et q n'ont pas de facteurs communs) qu'il existe m et n, entiers naturels strictement positifs, premiers entre eux, tels que :

$$x = m^2 + n^2$$
$$r = m^2 - n^2$$
$$q = 2mn$$

Nous aurons donc $y^2 = 4mn\,(m^2 - n^2)$. Ainsi m,n et $(m^2 - n^2)$ doivent être des carrés parfaits:

il existe k, w et ν , entiers strictement positifs, tels que :

$$m = k^2, \quad n = w^2, \quad m^2 - n^2 = \nu^2$$

d'où $\quad k^4 - w^4 = \nu^2$

Le triplet (k,w,ν) est donc aussi une solution de (1) vérifiant (2).

Or, $k \leq k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = x$

ce qui contredit à nouveau le choix de x !

Tout ceci montre que (1) n'a pas de solutions vérifiant (2).

Donc, l'hypothèse initiale selon laquelle le système d'équations E_1, E_2 admet une solution $(a,b,c,p) \in \mathbb{N}^4$, avec $abcp \neq 0$ est fausse. Autrement dit, le problème proposé par Fermat à Sainte-Croix n'a pas de solution.

Luis RADFORD.

Note:

(*) Rappelons que l'équation de Fermat dans le cas n=2 a des solutions non triviales: si x,y,z sont des entiers > 0 tels que $x^2+y^2 = z^2$, il existe un entier d et des entiers u et v tels que (à une permutation près), on ait :

$x = d(u^2 - v^2)$; $\quad y = 2duv$; $\quad z = d(u^2 + v^2)$.

Pour $n \geqslant 4$, on conjecture que l'équation n'a pas de solutions non triviales, ce que l'on démontre ici dans le cas n=4. Si l'anneau des racines nième de l'unité est principal (c'est le cas pour n=3), il n'est pas très difficile de vérifier la conjecture. Malheureusement, il n'existe qu'un nombre fini de n premiers pour lesquels on a cette "bonne" propriété.

(**) Rien n'empêche les lecteurs de L'OUVERT de se mettre dans le peau du Père Mersenne ou de M. de Sainte-Croix, et de nous envoyer leurs solutions commentées des problèmes 2,3 et 4 !

L'OUVERT.

SUR LES TRIANGLES DIOPHANTIENS

Deux problèmes de triangles diophantiens (c'est-à-dire à côtés entiers) sont classiques.

1. Trouver tous les triangles rectangles diophantiens . Rappelons la solution :

   Les mesures des côtés sont :
   $a = k(n^2 + m^2)$, $b = k(n^2 - m^2)$, $c = 2knm$

   où n et m sont des entiers arbitraires premiers entre eux, dont l'un est pair ($n > m$) et k un facteur entier quelconque. [1]

2. Quel est le nombre u_n de triangles diophantiens de périmètre n ? Dans [2], on donne la solution sous la forme curieuse :

   $$u_n = \left\| \frac{n^2}{12} \right\| - \left[\frac{n}{4}\right] \cdot \left[\frac{n+2}{4}\right]$$

   où figurent à la fois les notations $[- -]$ de partie entière et $\| - - \|$ d'entier le plus proche. Dans [3], on trouve le résultat élégant :

   $$u_n = \begin{cases} \left\| \dfrac{n^2}{48} \right\| & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \left\| \dfrac{n^2 + 6n}{48} \right\| & \text{sinon .} \end{cases}$$

Mais pour arriver à cette formule condensée, Yaglom examine l'un après l'autre 12 cas, suivant les classes résiduelles de n modulo 12.

On va établir ce résultat simplement et automatiquement par notre "méthode des polyèdres" [4]. Il est vrai qu'on s'appuiera implicitement sur trois théorèmes de [4], que le lecteur ignore sans doute; mais cela ne l'empêchera guère de comprendre le principe de la méthode.
On se servira de la notation de nombre périodique $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Ce crochet, fonction de n, est égal à celui des a_i dont le rang $i=n$, modulo k.
Par exemple $[a,b]$ vaut a si n est impair, b s'il est pair.

Résolution du problème 2. Soient par ordre de grandeur x,y,z les mesures entières des côtés du triangle. Alors,

$$x + y + z = n , \qquad 0 < x \leq y \leq z < x + y.$$

Donc u_n compte les solutions entières du système à deux inconnues

$$(1) \qquad 0 < x \leq y \quad , \; 2x + 2y > n \quad , \qquad 2y + x \leq n.$$

Son domaine polygonal D_n dans le plan des x,y est le triangle semi-ouvert $(0,\frac{n}{2})$ $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4})$, obtenu en supprimant du triangle fermé le côté fermé $(0,\frac{n}{2})$ $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4})$.

L'aire de D_n étant $\frac{n^2}{48}$ et les dénominateurs de ses sommets 2,3,4, on sait [4] que u_n est de la forme :

$$48\, u_n = n^2 + [a,b]n + [a',b',c'] + [a'',b'',c'',0].$$

Si s et c désignent le nombre de sommets et de côtés du triangle supprimés par les inéquations strictes de (1), on sait aussi [4] que

$$u_o = 1 - s + c = 1 - 2 + 1 = 0$$

Par suite, c' = 0 et

$$(2) \qquad 48\, u_n = n^2 + [a,b]n + [a',b',0] + [a'',b'',c'',0].$$

Soit v_n le nombre de points entiers du "domaine réciproque" de D_n, obtenu en échangeant dans (1) les signes $>$ et $\geq$. D'après notre loi de réciprocité [4] $v(n) = u(-n)$, de sorte que :

$$(3) \qquad 48\, v_n = n^2 - [a,b]n + [b',a',0] + [c'',b'',a'',0].$$

Dans le triangle $(0,\frac{n}{2})$ $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4})$, on constate pour n de 1 à 4 que

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0, \qquad u_1 = u_2 = 0 \quad , \qquad u_3 = 1 .$$

Pour déterminer les 7 inconnues a,b,a',b',a'',b'',c'', on obtient donc 7 équations linéaires simples en écrivant (2) pour n de 1 à 3 et (3) pour n de 1 à 4.
La première de ces équations est par exemple

$$0 = 1 + a + a' + a''.$$

On trouve ainsi sans peine le "polynôme arithmétique".

$$(4) \qquad u_n = \frac{n^2 + [6,0]n - [16,16,0] + [9,12,21,0]}{48} .$$

Si dans [4] on néglige les deux derniers nombres périodiques, l'erreur commise sur u_n est toujours inférieure à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue, de sorte que :

$$u_n = \left\| \frac{n^2 + [6,0]n}{48} \right\| .$$

Remarques

1) Comme tout polynôme arithmétique de la forme $n^2 + [a,b]n + [a',b',c'] + [a'',b'',c'',d'']$ u_n vérifie la relation de récurrence linéaire (4).

$$u_n - u_{n-2} - u_{n-3} - u_{n-4} + u_{n-5} + u_{n-6} + u_{n-7} - u_{n-9} = 0 .$$

Voici les premières valeurs de u_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	0	0	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3 .

2) La méthode des polyèdres donne de même [4] le nombre de quadrilatères convexes inscriptibles diophantiens de périmètre n :

$$q_n = n \left\| \frac{n^2 - [0,3]n + [-7,20]}{96} \right\| .$$

NOTE HISTORIQUE

On sait bien que PYTHAGORE connaissait le triangle rectangle (3,4,5). Dans notre ère, DIOPHANTE (4e siècle) trouve les triangles à côtés entiers ($n^2 + m^2$, $n^2 - m^2$, $2\,nm$). BRAHMAGUPTA (6e siècle) signale le quadrilatère (25,52,60,39) à diagonales perpendiculaires 56 et 63. PRAETORIUS (16e siècle) montre que pour le quadrilatère inscriptible (116,105,87,106) les diagonales, l'aire et le diamètre du cercle circonscrits sont entiers (respectivement 143 et 144, 10296, 145).

Références :

[1] E.EHRHART, Sur les triples pythagoréens, Les Humanités scientifiques, 1968.

[2] G.E. ANDREWS, Triangles with integer sides, Amer. Math. Monthly, 86, 1979.

[3] A.M. et I.M. YAGLOM, Challenging problems, Vol.1, problème 30. Traduit du russe, Holden-Day, 1964.

[4] E. EHRHART, Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire, Birkhäuser, Bâle, 1977.

E. EHRHART.

SUR LES CERCLES QUI SE "FROLENT"

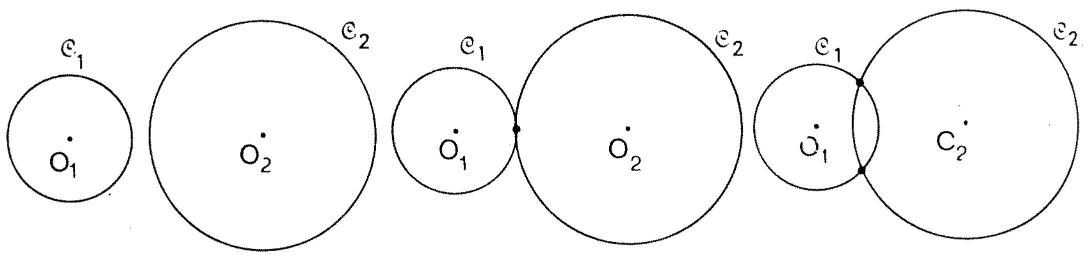
Au cours d'observations de communication orale entre deux élèves de 5ème (ou de 4ème), j'ai été amenée à faire construire un cercle tangent de centre donné tangent extérieurement à un cercle donné. Cette opération comporte à ce niveau quelques difficultés qui méritent d'être signalées.

En fait, la notion de contact figure à peine dans les programmes du 1er cycle, et en tous cas, elle ne fait pas l'objet d'un enseignement intensif. Par ailleurs, ces idées ne sont pas complètement étrangères aux élèves de cet âge puisqu'ils parlent couramment de cercles qui se touchent, se frôlent, etc...

1. Comment cette notion est présentée aux élèves

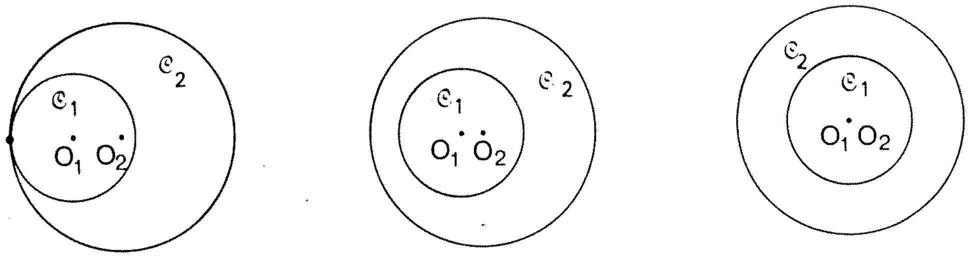
On parle de "tangente à un cercle" en 6e. La présentation varie avec le manuel.

Dans le livre de l'IREM de Strasbourg, classe de 6ème, les auteurs comparent le nombre de points de contact entre deux cercles: deux cercles tangents sont deux cercles qui ont un seul point commun.



Cercles tangents

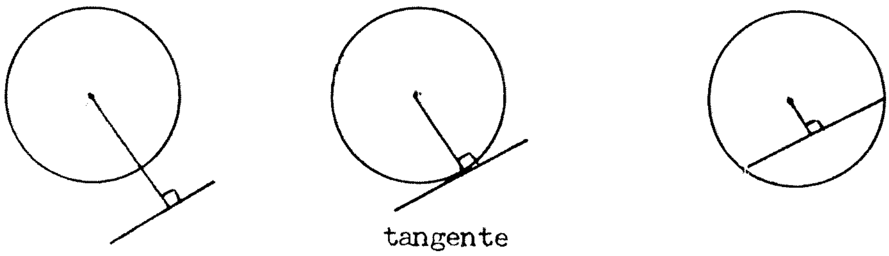
Cercles sécants



Cercles tangents

Cercles concentriques

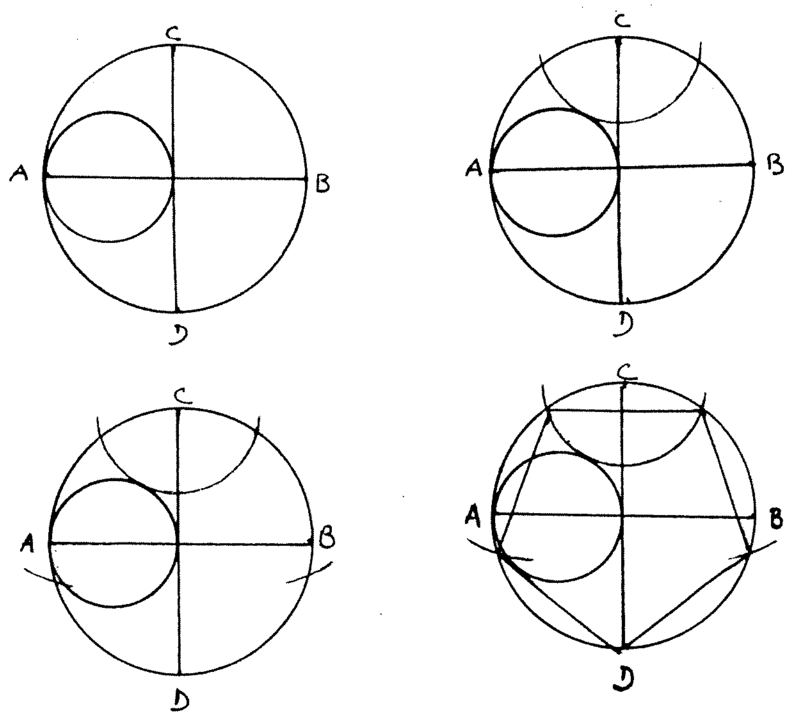
Dans le livre de Monge, 6ème, les auteurs ne parlent pas de cercles tangents. Ils parlent de droite tangente à un cercle et comparent la distance de la droite au centre du cercle. Cette définition est basée sur la convexité : la tangente au point A est la droite dont la distance au centre du cercle est égale au rayon du cercle. Voici les figures correspondantes :



A partir des différentes présentations, voyons comment les élèves se représentent deux cercles tangents.

2. La notion de "cercles tangents" chez les élèves .

Dans notre expérience de communication entre deux élèves (l'émetteur et le récepteur), l'émetteur devait transmettre l'instruction :"trace un cercle de centre C, tangent au cercle de diamètre AO". Cette information s'inscrit dans une suite d'instructions où l'émetteur devait transmettre au récepteur la construction d'un pentagone régulier (voir figures ci-dessous)



Les différentes étapes de la construction du pentagone régulier

Cette information ne précise pas le point de contact entre les deux cercles. Elle laisse également une ambiguité car il existe deux cercles tangents vérifiant cette condition. Les élèves n'ont jamais pensé à tracer les deux cercles tangents intérieurement. Ils expliquent, à leur manière , l'expression "cercles tangents".

Les élèves peuvent avoir conscience ou non que les deux conditions suivantes sont à remplir pour que deux cercles soient tangents extérieurement :
- les deux cercles ont un point commun et un seul
- l'intersection des intérieurs des disques ouverts est vide

Nous essayons de voir à quelle notions peuvent se rattacher les explications variées fournies par les élèves.

Exemples de type 1.

Dans ces exemples, les élèves précisent qu'il y a contact. Ils indiquent la nature du contact par l'emploi de verbes tels que "toucher", "coller", "frôler", en opposition au verbe "couper" qui est employé intuitivement dans le sens de contact transversal. Voici quelques exemples :
- "tu fais un rond, ça fait deux cercles qui se collent"
- "tu fais un cercle de manière à ce qu'il vienne frôler le petit cercle que tu as fait".

Le contact entre les deux cercles ne leur parait pas quelconque. Pour eux, les deux cercles se touchent en un endroit infiniment petit mais ils ne précisent pas que ce contact se fait en un seul point.

Exemples de type 2.

Dans ces discours, l'émetteur utilise l'opposition entre transversalité et tangence.

Exemple 1 : "J - Maintenant tu vas tracer un autre cercle qui aura pour centre le point C et sera tangent au cercle que tu viens de tracer.

P - Qu'est-ce que c'est tangent ?

J - qui colle.

P - Ah, oui ! D'accord.

J - mais qui ne doivent pas se couper en deux points. Ils se touchent juste. Ils doivent se toucher. Ils n'ont pas le droit de se couper en deux points.

Exemple 2 : "A - Puis après, tu traces un cercle de centre C tangent au cercle de diamètre AO.

C - C'est quoi tangent ?

A - Qui touche mais sans couper "

Ces élèves font une différence essentielle entre les verbes "toucher", "coller", d'une part et "couper" d'autre part.

Exemples de type 3.

Certains élèves utilisent aussi la convexité des disques. Ils parlent de bord et d'intérieur.

Exemple 1 : D - "Tu mets ta pointe de compas sur C et tu fais que celui que tu vas faire là touche celui que tu viens de faire avant. T'as compris ?

E - Non

D - Juste touche, pas qu'ils se rentrent à l'intérieur, mais qui touche juste le bord ..."

Exemple 2 : R - "Alors, tu mets ton compas sur le point C... et avec l'extrémité du compas, celle qui écrit, et ben, tu la mets sur le ... sur le cercle

C - A l'intérieur du cercle ?

R - Non, sur le bord... le rayon du point C jusqu'au bord de l'autre cercle ...

Par rapport aux discours précédents, ces élèves utilisent également la seconde propriété : "l'intersection de leurs intérieurs est vide ". Ils précisent : "toucher le bord", "toucher le bord le plus près du point C" qui utilise également le minimum de distance.

Exemples de type 4.

On peut éviter de parler de cercles tangents quand on détermine le point de contact entre les deux cercles. Un discours très différent en résulte comme le montre l'exemple suivant : la notion de "tangent" est remplacée par la notion de ligne de construction auxiliaire.

M - "Bon, alors tu prends le ... point C et le milieu du cercle, enfin le point O, l'autre, le petit cercle là, le milieu... Tu traces un trait assez fin.

G - Entre C et le milieu ?

M - Entre C et le point. Voilà... Assez fin, le trait.

G - D'accord.

M - Et puis, et le point qui situe, qui passe sur la droite et le cercle, le point du cercle, du petit cercle.

G - Qui coupe ?

M - Voilà, qui coupe la droite, qui coupe. Tu mets un point là.

G - D'accord, ça y est

M - Bon, tu mets la pointe sur le point C

G - D'accord.

M - et qui va au point que tu viens de faire là... Voilà, et tu traces autour.

G - Ca y est. Vas-y."

Quand ils disent "milieu", ils pensent "centre".

<u>Remarque 1 :</u> sur l'acquisition du mot "tangent".

Quand le maître a employé le mot "tangent", les élèves le reprennent mais l'explicitent à leur manière. Près des deux tiers des élèves ne connaissent pas ce mot. Les élèves ne l'utilisent jamais spontanément. Certains élèves mélangent "la tangente au cercle" et "deux cercles tangents", comme le montre le discours suivant :

R - "Tu traces la tangente à ce cercle ... euh, la tangente, la tangente, la tangente du point ...C

W - Ah.

R - Avec le centre

W - C, donc C est le centre de la tangente ?

R - Oui

W - D'accord".

William trace le cercle tangent et non pas la tangente.

<u>Remarque 2</u> :

Les élèves ont conscience que le contact entre les deux cercles tangents n'est pas quelconque. Ils ont cependant tendance à croire que lorsque deux courbes sont tangentes, elles n'ont pas nécessairement qu'un seul point commun. Ils ne parlent jamais de point mais de bord, d'endroit. Pour eux, la notion n'est pas liée à un point mais à un ensemble. Ils ont l'intuition de la notion de voisinage car ils ont conscience que cet ensemble est très petit. Ils confondent l'endroit où les cercles sont infiniment proches l'un de l'autre et le point où ils se rencontrent. Ils ne disent jamais que deux cercles se touchent en un point. A plus forte raison, aucun d'entre eux n'a conscience que ce point est facile à obtenir comme intersection du cercle de diamètre AO du segment qui joint les centres des deux cercles.

Conclusion

Ces observations nous donnent à réfléchir sur ce qui se passe lorsqu'on fait confiance aux connaissances spontanées que les élèves peuvent avoir. Dans le cas de la notion de "contact", il est bien vrai que les élèves ont une certaine connaissance spontanée. Celle-ci leur permet de faire une figure mais elle s'avèrerait trop incomplète et trop imprécise s'il s'agissait de raisonner.
A travers tous ces discours apparaît plutôt la notion de contact physique qui est un endroit (et non un point) avec une certaine épaisseur.

Jeanine KUBLER.

Note :
Mme J.Kubler a soutenu le 19 février une thèse de 3° cycle intitulée "Traitement de l'information dans une communication orale entre élèves de 12-14 ans".

DRAPEAU DANOIS

Par un week-end pluvieux d'automne, l'IREM s'était réuni au village de vacance de Plaine. Comme d'habitude, il y avait de nombreuses activités prévues, mais ce qui avait étonné les participants, c'est qu'on leur avait demandé d'apporter leur matériel de dessin, celui qu'utilisaient les professeurs de mathématiques, il y a bien longtemps.

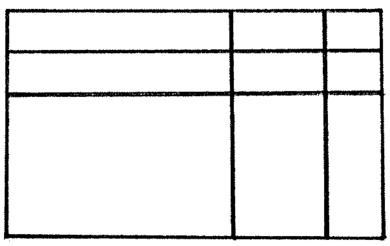
Mais on ne tarda pas à être fixé: les règles et les compas allaient servir à une séance d'heuristique prévue le dimanche matin, à l'aube, juste après le petit déjeuner, quand les esprits sont encore bien dispos.

Pendant une bonne heure, tout le monde travailla, s'acharna sur l'énoncé proposé par Georges Glaeser. On trouva beaucoup de choses ce jour-là, mais on peut en trouver bien plus en regardant le problème de plus près.

Mais, au fait, quel était ce problème ?

Tout le monde connait le drapeau danois. On adoptera donc la définition suivante :

Définition : On dit que 16 points du plan forment un drapeau danois, s'ils sont disposés comme sur la figure ci-dessous :



Problème : Etant donné un cercle (Γ) et quatre points A; B; C; D de ce cercle, on considère les centres des cercles inscrits et exinscrits de chacun des triangles que l'on peut obtenir en prenant trois des quatre points A; B; C; D.
Montrer que la figure obtenue est un drapeau danois.

Commentaire : Ce problème contient un certain nombre de difficultés qu'il convient de résoudre.

1) notation
2) construction
3) démonstration

Afin de faciliter l'étude du problème, vous trouverez en fin d'article, 5 feuilles appelées planche 1, planche 2, ...

1) Choix d'une notation

Pour le centre du cercle inscrit au triangle ABC, on a pris I_D.
Pour les centres des cercles exinscrits au triangle ABC, on a désigné

par E_{DC}	celui	du	cercle	qui	est	inscrit	dans	l'angle	C
E_{DB}	"	"	"	"	"	"	"	"	B
E_{DA}	"	"	"	"	"	"	"	"	A

2) Construction

Il est judicieux de se donner le milieu des arc MNPQ et de construire ensuite les points ABCD. Cela permet d'éviter les fastidieuses constructions des bissectrices. (voir planche 1).
Pour la construction des centres, il est intéressant de remarquer que 1 I_D P E_{DC} sont alignés (voir planche 2).

3) Démonstration

Pour obtenir la propriété, on l'établira dans un cas, la généralisation se faisant sans problème.

Montrons, par exemple, que $E_{DC}\ E_{CD}\ I_D\ I_C$ est un rectangle (voir planche 3).

D'après la remarque 2 faite pour la construction,

C, I_D, P, E_{DC} sont alignés

D, I_C, P, E_{CD} sont alignés

$\widehat{E_{DC}\ A\ I_D}$ est un angle droit

par construction

$\widehat{E_{DC}\ B\ I_D}$ est un angle droit

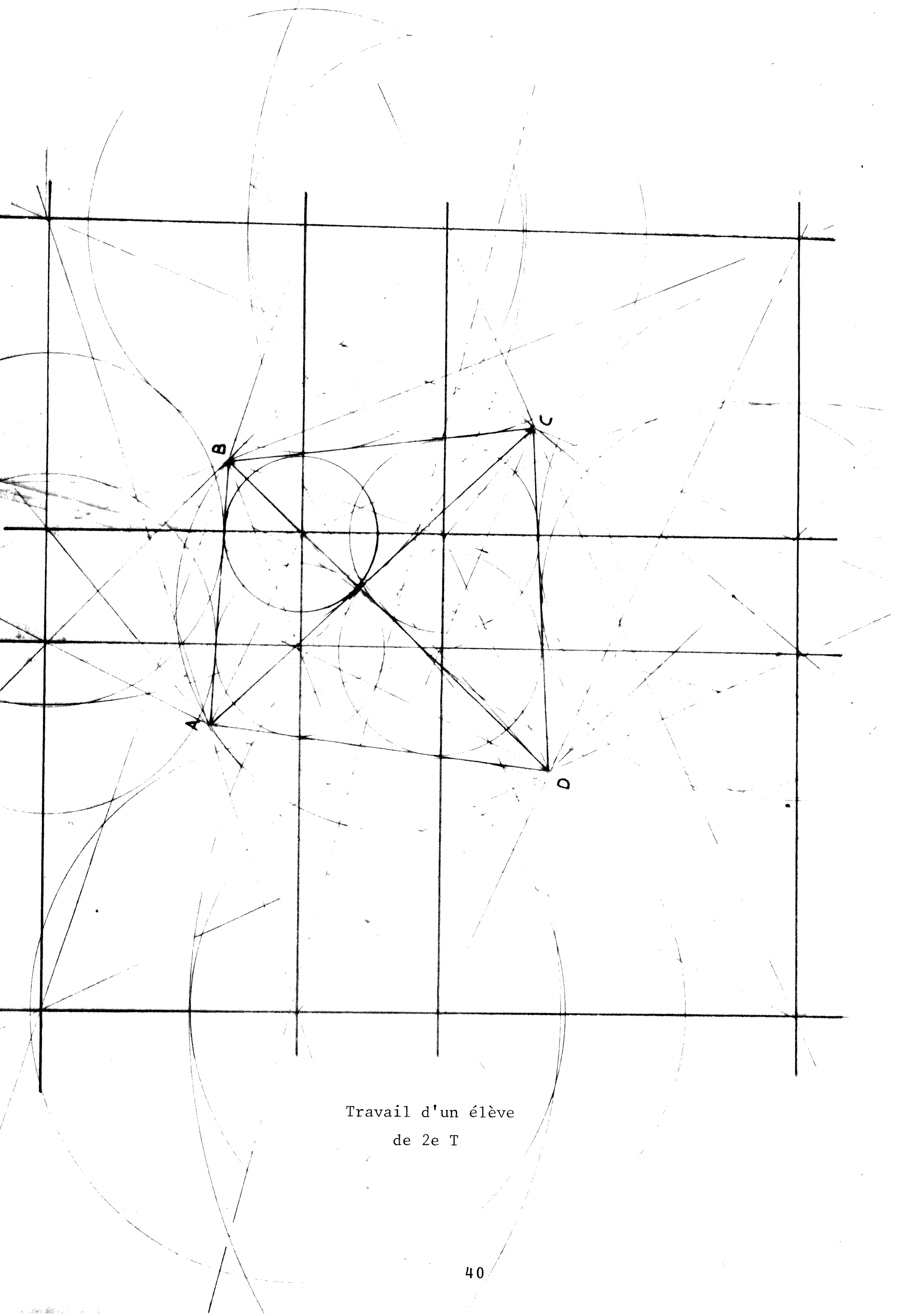
Le quadrilatère $E_{DC}\ A\ I_D\ B$ est inscriptible dans un cercle dont $[E_{DC}, I_D]$ est le diamètre. Le centre de ce cercle se situe aussi sur la médiatrice de [A, B], c'est donc P.
En faisant la même démonstration pour $E_{CD}\ A\ I_C\ B$, on montre que $[E_{DC}\ I_D]$ et $[E_{CD}\ I_C]$ sont deux diamètres d'un même cercle, donc que la figure $E_{DC}\ E_{CD}\ I_D\ I$ est un rectangle.
La démonstration se généralise à tous les rectangles de la figure. (voir planche 4 et 5).

<u>Conclusion</u> : Les élèves actuels des lycées ne pratiquent pas beaucoup la géométrie élémentaire. Un problème comme celui qui vient d'être énoncé serait de nature à les inciter à s'y intéresser.

Pour le savoir, on a donné ce problème à des élèves de seconde, mais sans donner la définition préalable du "drapeau danois". L'expérience a eu lieu dans une classe de seconde spéciale qui est une classe d'adaptation pour les élèves titulaires d'un CAP industriel. Dans ce type de seconde, les élèves ont en général trois années de dessin industriel derrière eux et sont en général capables de constructions graphiques complexes. La plupart des élèves a réussi une construction complète assez précise. Quelques uns ont "oublié" des points alors qu'un petit nombre était totalement incapable d'entreprendre le travail. Aucun n'a été capable de formuler ou d'ébaucher

une démonstration. Il semble donc utile de susciter l'intérêt en amorçant dès le début (dans la définition) un résultat attrayant. A ce prix, on obtiendra surement des constructions soignées et des ébauches de démonstration.
Afin de stimuler les fanatiques de la règle et du compas, l'"Ouvert" lance le concours du plus beau drapeau danois (en noir et blanc) afin d'en faire la décoration de couverture d'un prochain "Ouvert".

Jean DREYER,
sur une idée de Georges GLAESER.



Travail d'un élève
de 2e T

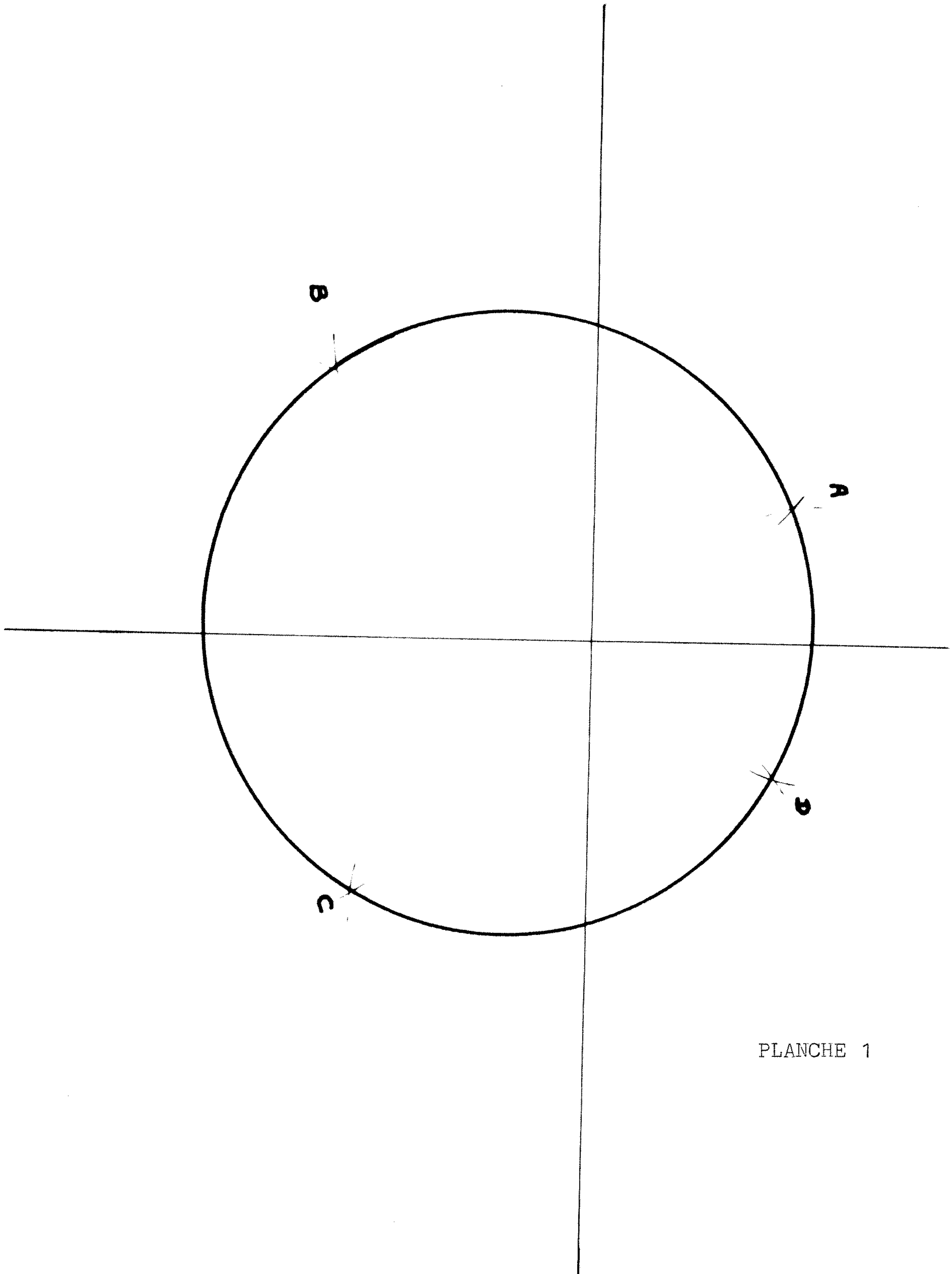


PLANCHE 1

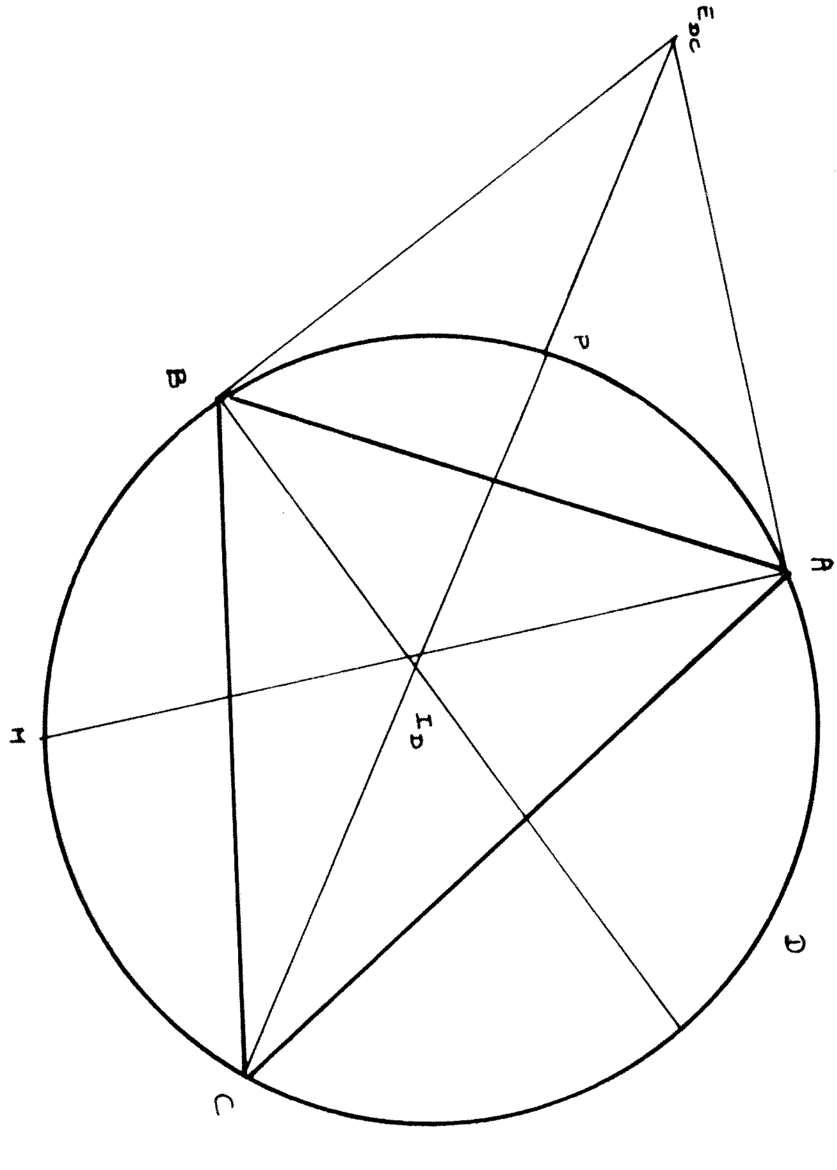


PLANCHE 2

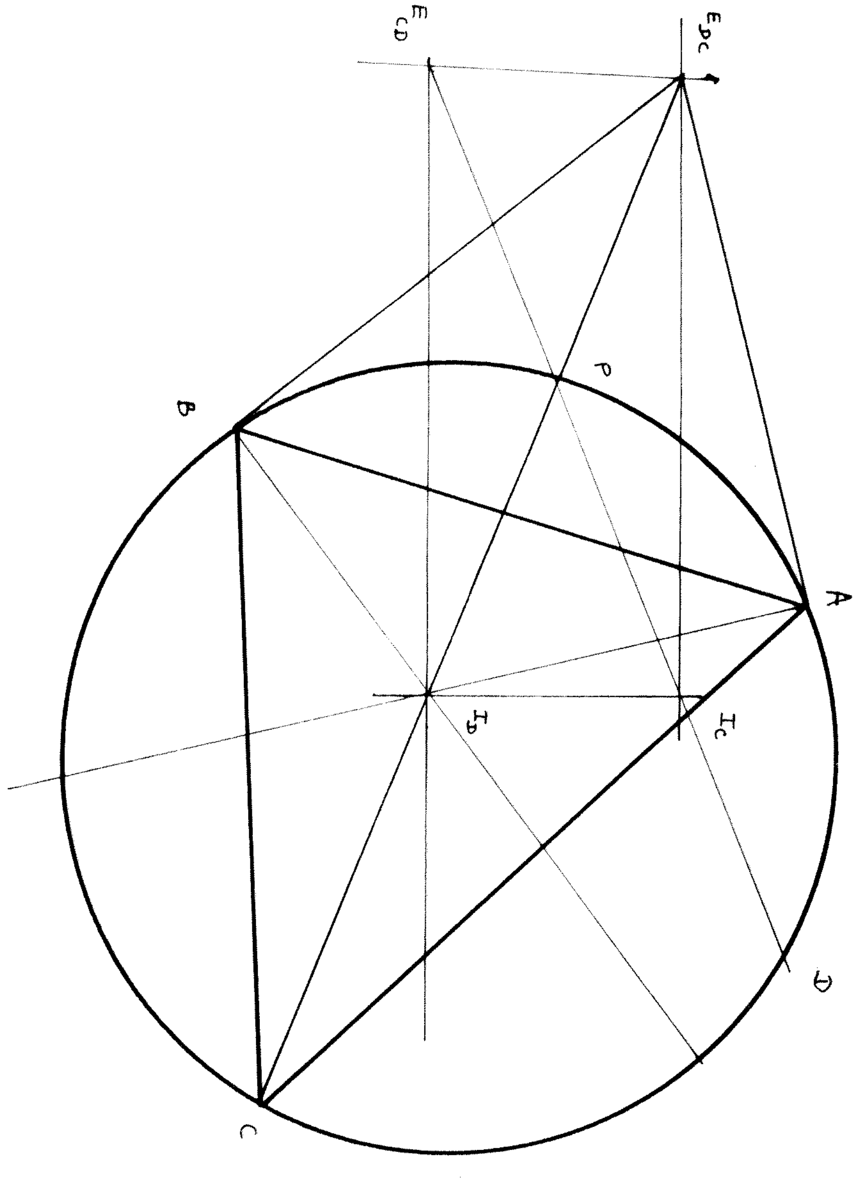


PLANCHE 3

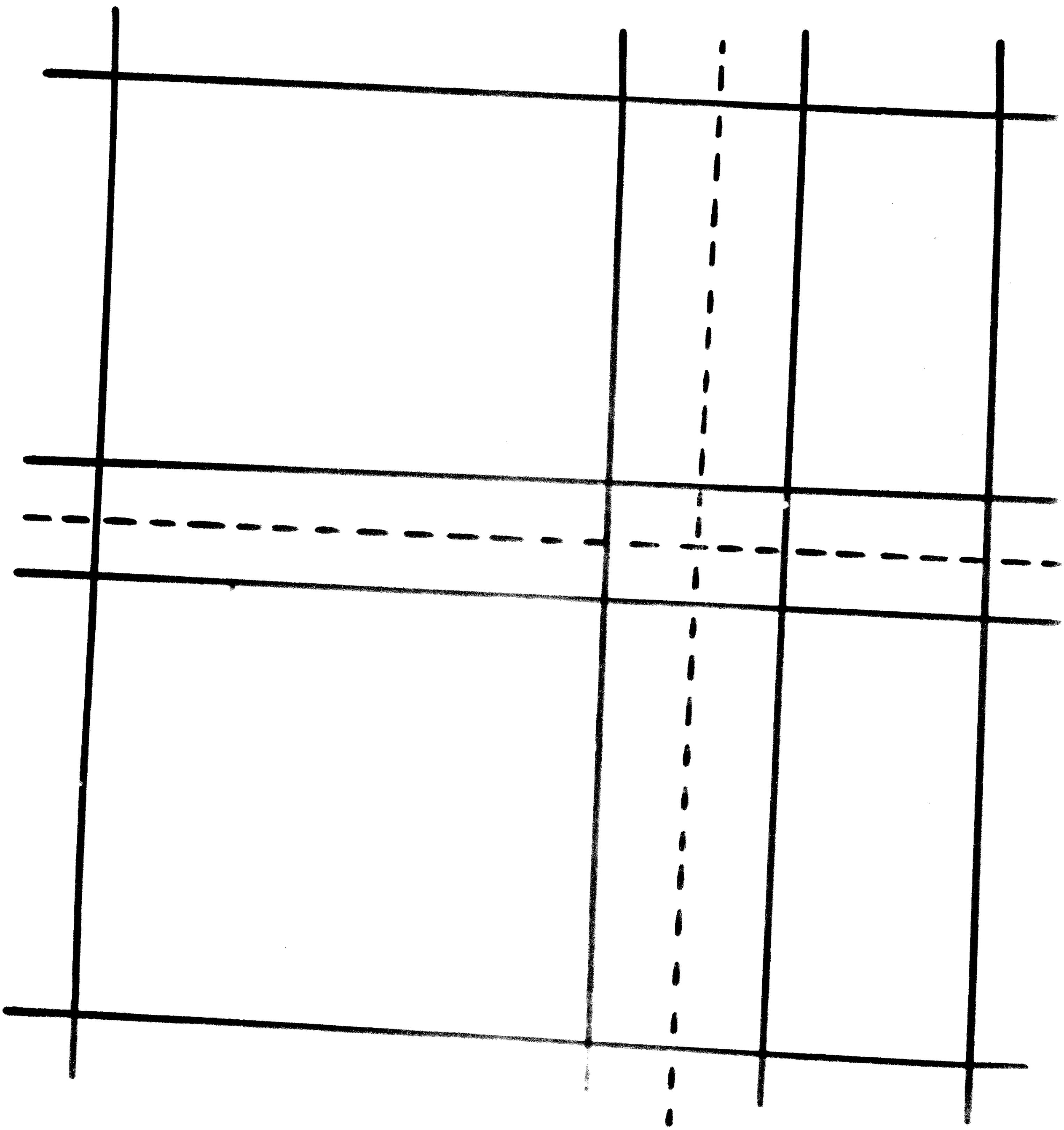


PLANCHE 4

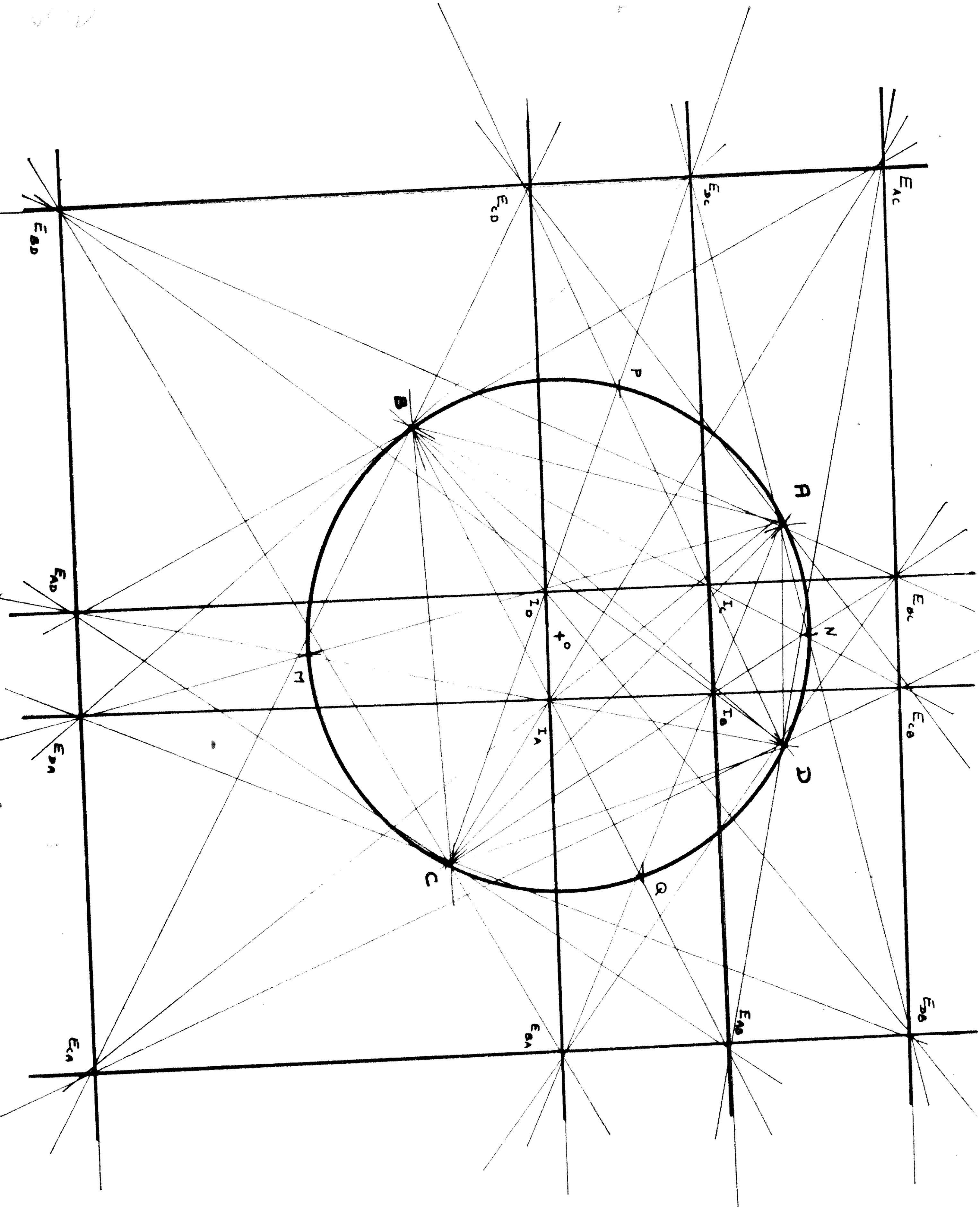
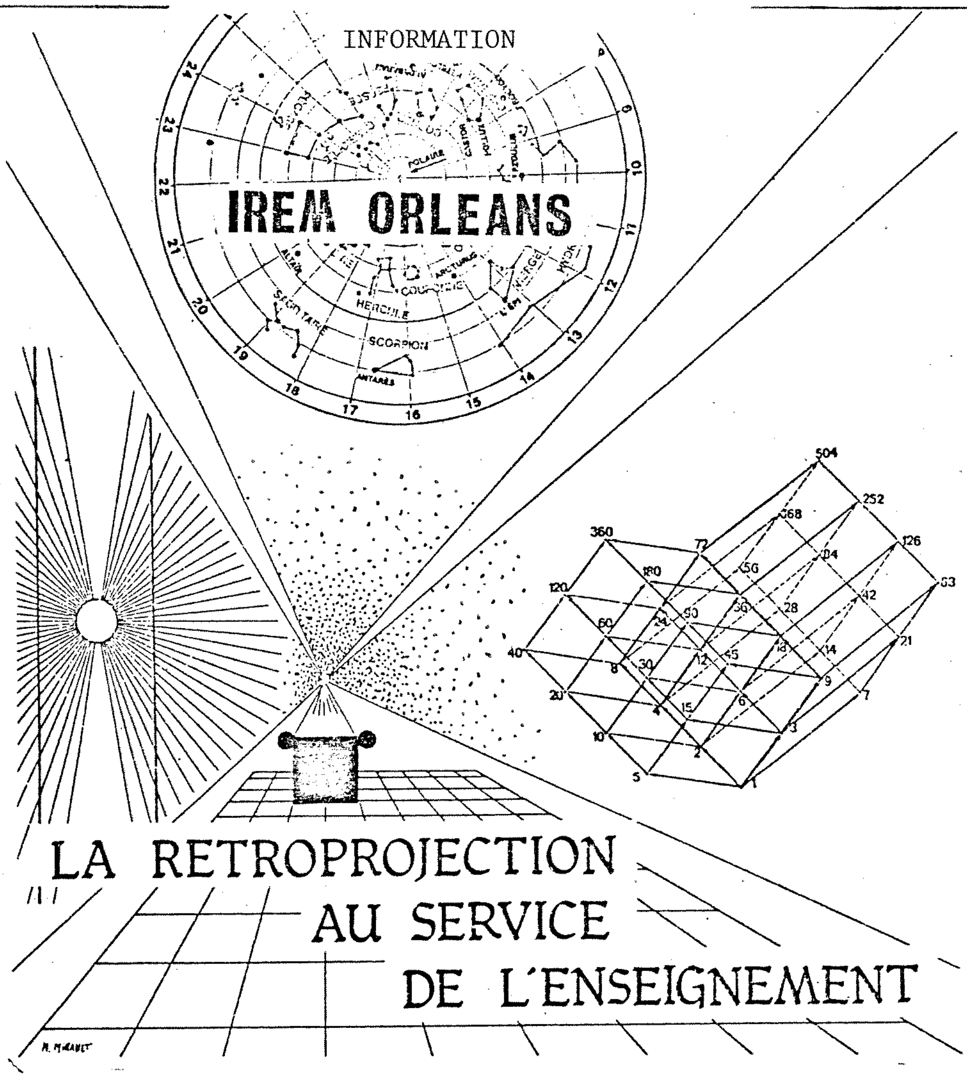

A
B
C
D
P
M
N
Q
O
E_{BD}
E_{CD}
E_{BC}
E_{AC}
E_{AD}
E_{DA}
E_{DC}
E_{CB}
E_{CA}
E_{BA}
E_{AB}
E_{DB}
I_D
I_C
I_A
I_B

PLANCHE 5



LA RETROPROJECTION AU SERVICE DE L'ENSEIGNEMENT

Le groupe de Recherche Pédagogique Spontanée "Mathématique, Physique et Rétroprojecteur" a réalisé une série de documents rétroprojetables dans le but d'aider les collègues désireux d'intégrer l'audiovisuel dans leur cours grâce au rétroprojecteur.

Les pochettes ainsi publiées par l'IREM d'ORLEANS sont donc destinées à éviter aux collègues la longue mise au point que nécessite les documents complexes ; ce sont des outils pédagogiques qui doivent leur permettre de gagner un temps précieux tout en étant particulièrement adaptés à la rétroprojection.

R1. INSTRUMENTS DE MESURE POUR RETROPROJECTEUR (20 F), (2 transparents).

- documents imprimés sur transparent et sur papier (règles graduées, équerres, rapporteurs, règles-échelles)
- documents destinés à tout utilisateur d'un rétroprojecteur amené à faire des mesures dans le plan ou sur une carte, ou cherchant à apprendre aux élèves l'utilisation de ces instruments.

Ces instruments sont particulièrement adaptés à la rétroprojection et évitent l'effet de diffraction que l'on constate en projection avec les instruments courants.

R2. QUADRILLAGES POUR RETROPROJECTEUR (Nouvelle édition) (25 F), (7 transparents).

- principaux quadrillages utilisables en classe. Impression sur polyester et sur papier.

Indispensable pour tout repérage et à tout apprentissage au repérage, dans le plan. Ces quadrillages font gagner beaucoup de temps dans les tracés de courbes tout en permettant une précision qu'il est difficile d'atteindre par les procédés classiques.

R3. CALCULS D'AIRES SIMPLES POUR RETROPROJECTEUR (20 F) (3 transparents).

- documents imprimés sur transparents et sur papier :
  . Figures géométriques simples (carré, rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, losange).

Surtout destinés à l'enseignement des mathématiques, ces documents permettent une approche aux rétroprojecteur, menant au calcul d'aires, simples, avec des manipulations visibles par toute la classe.

R4. CERCLE TRIGONOMETRIQUE REPROPROJETABLE (15 F), (1 transparent).

- Indispensable en trigonométrie, ce cercle permet de mettre en évidence et de visualiser les nombreuses propriétés des lignes trigonométriques. Il peut être le point de départ de nombreux exercices. D'autre part sa précision est suffisante pour la majorité des problèmes de physique.

R5. PARTIE ENTIERE, PARTIE DECIMALE, AU RETROPROJECTEUR (15 F), (1 transparent).

Utile à l'introduction de la numération en base dix pour le classement des nombres ; pour l'introduction des techniques opératoires (addition-soustraction).

R6. CRIBLE D'ERATOSTHENE RETROPROJETABLE (25 F), (5 transparents).

- Crible d'Eratosthène transparent avec rabats colorés permettant de mettre en évidence progressivement les nombres premiers inférieurs à 100. Un document papier est destiné aux élèves.

R7. ILLUSIONS D'OPTIQUE ADAPTEES AU RETROPROJECTEUR (25 F), (12 transparents).

Destinés à mettre en évidence des situations où il est nécessaire d'aller plus loin que la simple impression visuelle ; les transparents proposés pourront être utiles pour susciter des réactions d'élèves, pour introduire ou illustrer certaines notions géométriques.

R8. TRIANGLE DE PASCAL (3 transparents).

Adaptation visuelle illustrant le célèbre triangle numérique. La rétroprojection permet de mettre en évidence toutes les propriétés de ce triangle et facilite la démarche. Le thème peut alors être abordé dès la connaissance des notions de puissance et de développement d'un polynôme. Un document papier est destiné aux élèves.

R9. CARTE DU CIEL RETROPROJETABLE (25 F), (4 transparents).

- Carte du ciel retroprojetable à volets rabatables.
- Un document élève, d'accompagnement, permet à chacun de faire de observations sur le terrain en disposant d'une mini-carte du ciel simplifiée.

R10. TREILLIS DE DIVISEURS RETROPROJETABLES (25 F), (6 transparents).

Thème utilisable dès la classe de 5è, les treillis de diviseurs pouvant constituer une charnière originale et intéressante entre le calcul numérique et le tracé géométrique.
La pochette contient 7 treillis superposables.

BON DE COMMANDE

à retourner à l'IREM D'ORLEANS *Domaine universitaire 45046 ORLEANS CEDEX.*

NOM : ....

ADRESSE : ....
....
....

Pour les ETABLISSEMENTS :

- Joindre, SI POSSIBLE, un titre de paiement à l'ordre de : Monsieur l'Agent Comptable de l'Université d'Orléans. CCP 4604 99 La Source
- Sinon ! bon de commande officiel signé par le gestionnaire.

Pour les commandes PERSONNELLES

- Joindre un titre de paiement à l'ordre de : Monsieur l'Agent Comptable de l'Université d'Orléans. CCP 4604 99 La Source.

Pochettes (*Les frais d'envoi -paquet poste simple- sont inclus*). *(tarif au 1.10*

R1 :	Instruments de mesure	20 F	Nombre d'exemplaires	☐
R2 :	Quadrillages	25 F	" "	☐
R3 :	Calculs d'aires	20 F	" "	☐
R4 :	Cercle trigonométrique	15 F	" "	☐
R5 :	Partie entière, partie décimale	15 F	" "	☐
R6 :	Crible d'Eratosthène rétroproj.	25 F	" "	☐
R7 :	Illusions d'optique au rétroproj.	25 F	" "	☐
R8 :	Triangle de Pascal au rétroproj.	(à paraître)		
R9 :	Carte du ciel rétroprojetable	25 F	" "	☐
R10 :	Treillis de diviseurs rétroproj.	25 F	" "	☐

CARRES LATINS ET GRECO-LATINS

Pour avoir travaillé sur des tables de Pythagore de groupe, tout le monde (ou presque) sait ce qu'est un carré latin: un carré de n^2 cases dont chacune contient un symbole choisi parmi n symboles de façon que sur une même ligne ou une même colonne, il n'apparaisse pas deux fois le même. En voici deux exemples pour des carrés de 16 cases:

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

a^α	b^β	c^γ	d^δ
b^β	a^δ	d^α	c^β
c^δ	d^γ	a^β	b^α
d^β	c^α	b^δ	a^γ

Si maintenant on combine ces deux carrés en les superposant, on obtient (figure de droite ci-dessus) un carré dont chacune des cases est occupée par un des n^2 couples possibles, chacun des couples apparaissant exactement une fois. On dit que les deux carrés sont orthogonaux, le carré résultant portant le nom de gréco-latin.

Euler avait démontré l'existence de carrés gréco-latins pour n=3, 4, 5... et d'une façon générale pour $n \neq 4k + 2$. En 1901, en construisant tous les carrés latins d'ordre 6 et en les comparant, G. Tarry démontra qu'il n'existait pas de carré gréco-latin pour n=6.

En 1920, R.Fisher montra l'intérêt des carrés latins et gréco-latins dans la recherche agronomique: Supposons que l'on désire tester 5 engrais différents en éliminant tout biais dû aux variations de la fertilité du sol; on divise la parcelle en un carré de 5 sur 5 et on applique les 5 engrais suivant la structure d'un carré latin d'ordre 5. Alors, les méthodes de l'analyse statistique permettent d'éliminer le biais dû à la variation de fertilité du sol. On peut même aller plus loin en cherchant l'effet des engrais sur 5 variétés de plante en disposant la variable engrais et la variable plante selon la structure d'un carré gréco-latin... Cette méthode a été généralisée à la biologie, la sociologie, la médecine...

On peut chercher à construire un ensemble de carrés latins orthogonaux deux à deux. Cet ensemble contient au plus n-1 éléments. On peut effectivement construire 6 carrés latins d'ordre 7 deux à deux orthogonaux, ce qu'on appelle un ensemble complet. L'existence d'un ensemble complet d'ordre n est équivalent à l'existence d'un plan projectif fini d'ordre n (c'est-à-dire à $n^2 + n + 1$ points). On n'a pas encore trouvé, ne serait-ce que 3 carrés latins d'ordre dix, orthogonaux deux à deux, mais on sait qu'il existe des carrés gréco-latins pour toutes les valeurs de n sauf 2 et 6.

J. LEFORT.

ERRATA DU N° 25

* C'est en 1880 (et non en 1980 !) que Heawood montra que Kempe s'était trompé dans sa "démonstration" du théorème des 4 couleurs. Nous aurait-il pardonné de l'avoir catapulté à la fin d'un siècle où on se permet de faire prouver des théorèmes à des ordinateurs ?

* L'étude passionnante consacrée à la "chasse aux groupes finis" (p.10) est due à Paul BOREL, du département de mathématiques de l'Université Louis Pasteur.
Qu'il trouve ici toutes nos excuses pour l'omission regrettable de sa signature.

* p.29 - Quel jour sommes-nous ?
Dans les exemples proposés pour appuyer la formule donnant le nom du jour d'une date donnée, il faut bien lire a = 99 et s = 19 (et non pas a = 00 et s = 20 comme nous l'ont signalé d'attentionnés lecteurs) pour le 1er janvier 2000: la numération des mois se fait en partant du mois de mars. Janvier et février, qui portent les numéros 11 et 12 sont donc à placer dans l' année <u>précédant</u> leur année réelle.

* p. 53 - Le nombre d'arêtes d'un tétraèdre est bien sûr 6 et le nombre de ses faces, 4.