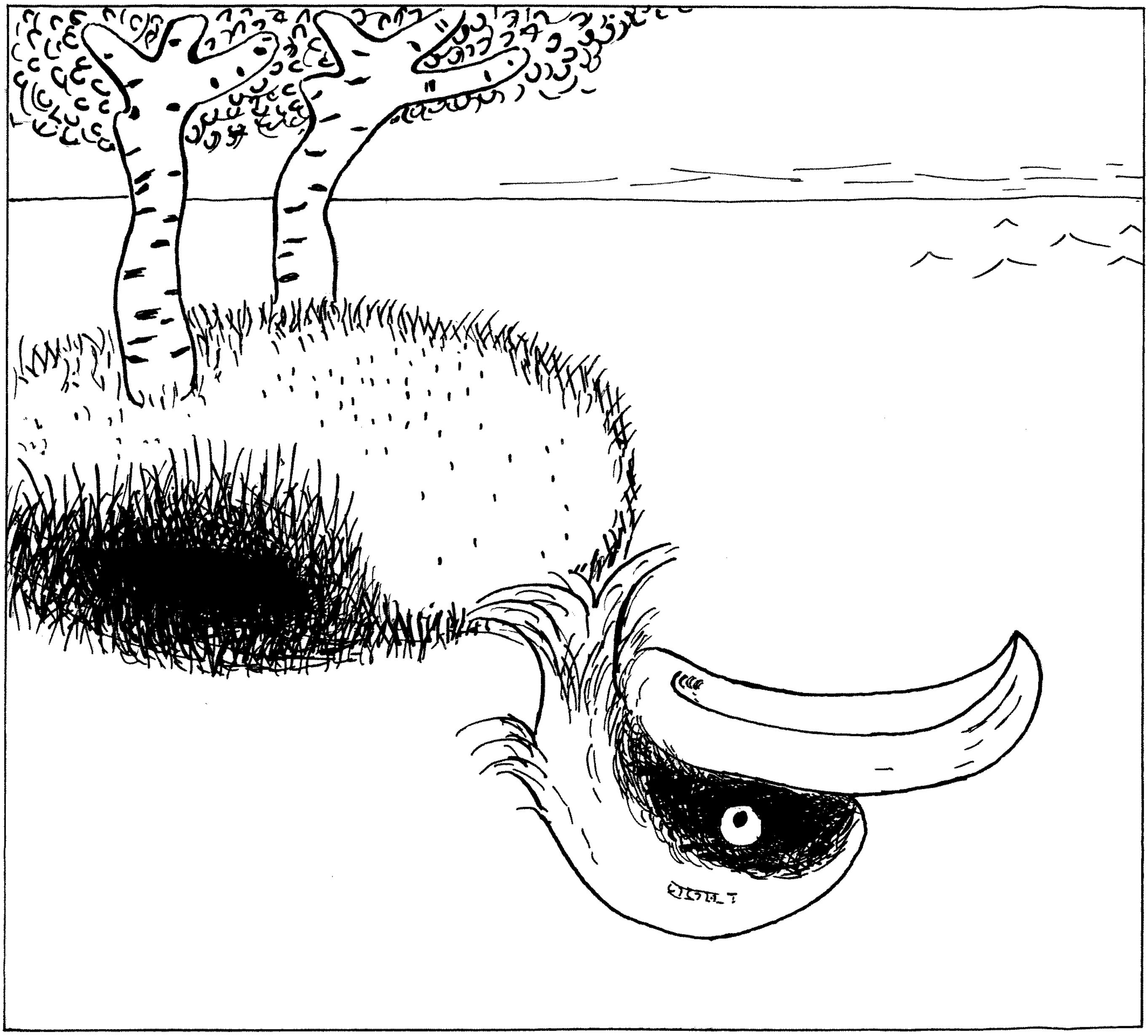
l'ouvert n°29

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE
STRASBOURG - DEC 82 - ISSN 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE : "La symétrie n'est plus ce qu'elle était !" (voir article page 39).

Dessin d'après Gustave Verbeek : "The upside-downs of Lady Lovekins and old Man Mufaroo". C'est aussi une illusion d'optique montrant qu'on ne voit bien que ce qu'on a l'habitude de voir.

EDITORIAL

Un de nos lecteurs - professeur dans un Lycée de Strasbourg - nous a récemment écrit en substance : "*n'adhérant plus à l'A.P.M. que j'estime ne plus être représentative, je vous prie de ne plus m'expédier l'OUVERT*".

De quel péché de "non représentativité" l'A.P.M. s'est-elle rendue coupable, je l'ignore et ne chercherai pas à l'élucider ici.

Mais que notre collègue déduise de son désaccord avec l'Association la conclusion "l'OUVERT ne saurait désormais encombrer ma boîte aux lettres" me pousse à poser plusieurs questions :

1. Il est vrai que les abonnés alsaciens au bulletin de l'APM reçoivent chaque parution de l'OUVERT. C'est la suite d'un accord passé avec l'IREM, et il n'est pas question que le journal ne devienne l'organe que de l'IREM pour des raisons d'indépendance et de pérennité.

Mais est-il inconcevable que des collègues, voire des personnes s'intéressant aux mathématiques et à leur enseignement, lisent l'OUVERT pour lui-même ?

2. L'OUVERT est-il d'ailleurs un simple haut-parleur des positions et activités de l'APM ? Honnêtement, il me semble **au contraire** que, par manque de contacts, les liens se sont trop relachés. Puisque nos lecteurs sont, dans leur majorité, adhérents de l'association, ne pourraient-ils pas nous donner leur sentiment à ce sujet : comment doit se traduire le lien entre l'APM et l'OUVERT ?

3. Le journal a changé, depuis l'héroïque époque lefortine. A-t-il regressé, évolué ... ? Jean Lefort avait en 1980 (n° 20) lancé un questionnaire sur la lecture de l'OUVERT. Sans mettre sur pied pour l'instant une telle procédure, nous serions heureux de connaître votre opinion. Ou simplement votre réaction à la réception du journal : que se passe-t-il entre le dépot dans la boîte aux lettres et l'archivage définitif (ce dernier se fait-il dans votre cheminée...).

Un élargissement de l'enquête serait encore plus intéressant : pouvez vous nous renvoyer l'écho de ce que disent de l'OUVERT les collègues qui le reçoivent mais ne trouvent pas le temps de nous écrire?

Eric CHANEY

S O M M A I R E

L'OUVERT

. responsable de publication : J. Lefort
. impression : IREM de Strasbourg
. correspondance à adresser à :
IREM de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cedex

EN SOUVENIR D'UN COLLEGUE DISPARU

G. GLAESER et
E. CHANEY

Le **jeudi 4 octobre** 1582 se produisit un fait prodigieux. On se reveilla le lendemain à la date du **vendredi 15 octobre** 1582 ! Ce n'était pas la semaine des quatre jeudis, mais le calendrier grégorien venait d'être mis en pratique.

Le pape Grégoire avait confié la mise au point de la réforme à un Christoph Schlosser (né à Bamberg en 1537) qui est plus connu sous le nom qu'il portait à la société de Jésus : **Christophorus CLAVIUS.**

Célèbre professeur de mathématiques, il fut l'auteur des manuels scolaires les plus répandus au XVIIe siècle. On les utilisait dans tous les pays de mission : Chine, Egypte, Amérique Latine, et bien entendu Europe.

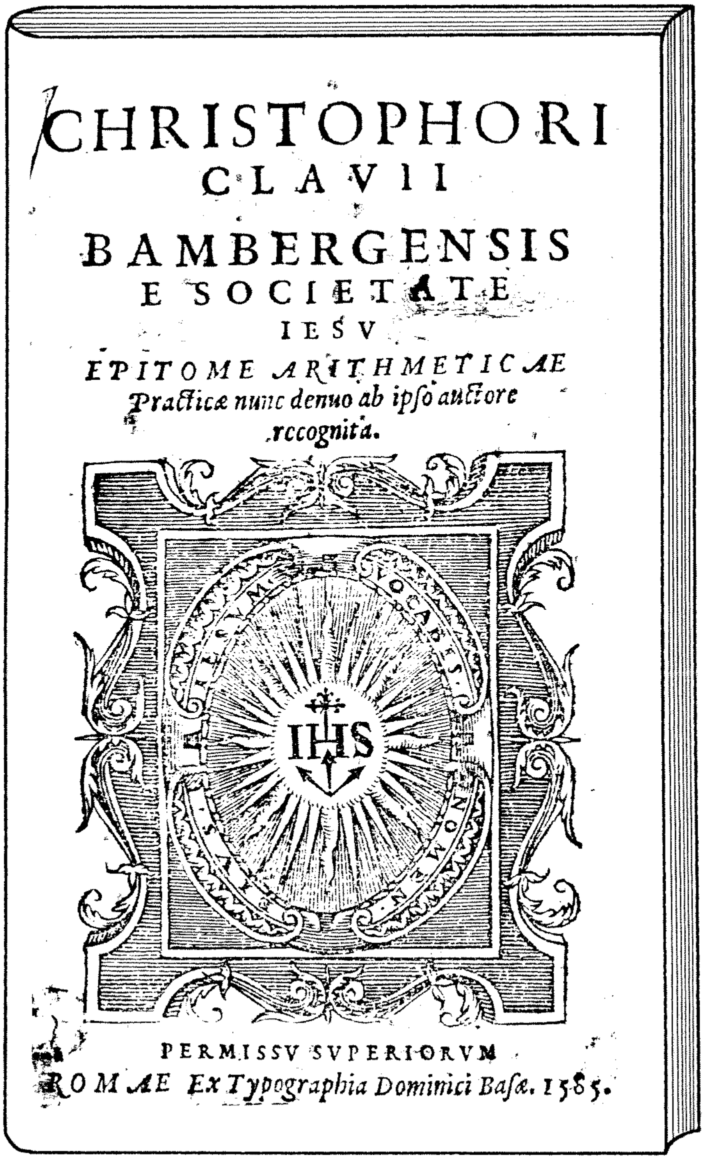
Voici quelques reproductions extraites d'un manuel d'arithmétique de Clavius.

Pour ceux qui ne parlent pas jésuite, ou qui n'ont pu étudier Astérix en classe, signalons que :

aureus	signifie	d'or
addemus	"	ajoutons
detrabamus	"	ôtons
aggregatum	"	la somme
dimidium	"	la moitié
terminus	"	terme

Mais que peuvent bien vouloir dire

"Regula trium", "progressiones arithmeticae"... ?



CHRISTOPHORI
CLAVII
BAMBERGENSIS
E SOCIETATE
IESV
EPITOME ARITHMETICAE
Practicæ nunc denuo ab ipso auctore
recognita.

PERMISSV SVPERIORVM
ROMAE Ex Typographia Dominici Basæ. 1585.

REGVLA TRIVM, QVÆ ALIO NOMINE REGVLA AVREA, SIue regula proportionum dici solet.

Cap. XVII.

HACTENVS iacta sunt à nobis necessaria Arithmetices fundamenta; sequuntur iam variæ regulæ, in quibus mirificus eorum vsus apparet, non solum Mathematicis, verum etiam mercatoribus, immo vero & cuilibet priuato homini, si in commercijs, conuentisque mutuis non vult decipi, aut decipere (quorum illud turpe, hoc vero etiam iniquum foret) maxime vtiles, ac necessariæ. Primo autem loco sese offert regula illa nunquam satis laudata, quę ob immensam vtilitatem, Aurea dici solet, vel regula proportionum, propterea quòd in quatuor numeris proportionalibus, quorum priores tres noti sunt, quartus autē ignotus quęritur, versetur; vnde & regula trium apud vulgus appellata est: quòd tres numeros ponat cognitos, & ex ijs quartum ignotum eliciat. Ita autem regula hæc proportionum se habet.

Regula aurea, siue proportionū, aut regula triū, cur sic dicta sit.

DISPOSITIS tribus numeris notis, ita vt is, qui quæstionem habet annexā, (Semper enim vnus illorum quęstionem secum affert, ut in exemplis

Numeri in regula triū quo pacto sint collocandi.

plis apparebit.) tertio statuatur loco; reliquorū autem ille, qui de eadem est re, hoc est, qui tertio similis est, (Exempla autem declarabunt, in quo similitudo hæc consistat.) primum occupet locum, mediam denique sedem teneat alter, cui quartus, qui quæritur, similis esse debet: Dispositis, inquā, hoc modo numeris, multiplicentur tertius, & medius inter se, productū que numerus per primum diuidatur. Nam quotiens numerus, erit quartus, qui quærebatur, satisfacietque quæstioni propositæ: hoc est, tertius numerus ad eum habebit eandem proportionem, quam primus ad secundum.

Quo pacto per regulā triumquartus numerus ignotus sit inquirēdus.

Exemplum.

[*] *QVATVOR aureis emuntur 12. libræ piperis, quæritur, quot libræ emi possint aureis 20. Hic vides, 20. aureos habere annexam quæstionem: de illis enim quæritur, quotnam libras exhibere possint: Huic numero similis est numerus 4. aureorum. Nam sicut 4. aureis emptæ sunt 12. libræ, ita 20. aureis emendæ sunt aliæ libræ, ita vt vterque numerus sit pretium: at 12. libræ piperis sunt merces. Ita ergo stabit exemplum.*

Aurei.	Lib.	Aurei.		Lib.
4.	12.	20?	fiunt	60.

Multiplicando autem inter se secundum, & tertium numerum, & productū 240. per primum diui-

diuidendo, inueniemus libras 60. pro quarto numero, qui quærebatur. Vbi vides, quemadmodum primus numerus 4. tertia pars est secundi numeri 12. ita numerum tertium 20. tertiam partem esse quarti numeri inuenti 60.

Aliud exemplum.

AVREOS 60. expendo 5. mensibus, peto, 132. aureos quot mensibus expendam? Hic etiam cernis, quæstionem fieri de 132. aureis, & huic numero similem esse hunc 60. aur. Sic igitur exemplum stabit.

Aurei.	Menses.	Aurei.		Menses.
60.	5.	132?	fiunt	11.

Multiplicando autem secundum numerum, & tertium inter se, productumq; 660. diuidendo per primum, reperiemus 11. menses, quibus expēdam 132. aureos. Vbi etiam vides, tertium numerum 132. duodecies continere quartum inuentum 11. quemadmodum primus 60. secundum 5. complectitur duodecies.

Illa demonstratio sequitur...

PROGRESSIONES ARITHMETICÆ.

Cap. XXIIII.

Progressio Arithmetica quid.

PROGRESSIO Arithmetica est series plurium numerorũ se æqualiter superantium, vt hic.

Progressio naturalis numerorum incipiens ab 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.

Progressio numerorum imparium incipiens ab 1.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. &c.

Progressio numerorum pariũ incipiens à 2.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. &c.

Progressio naturalis numerorũ, & numerorũ imparium, pariumq; quid.

PRIMA enim harum trium progressionũ dicitur progressio naturalis numerorum, incipitq; ab 1. in qua omnes numeri se ordine superãt vnitate. Secunda vero dicitur progressio numerorũ imparium, incipitq; ab 1. in qua omnes numeri se ordine superant binario. Tertia deniq; appellatur progressio numerorum parium, incipitq; à 2. qui est...

Proprietas pgressionis Arithmeticę quotcunque terminorũ, si numerus terminorũ fuerit par.

EX posteriore quoque proprietate efficitur, in omni progressione Arithmetica, cuius numerus terminorum est par, aggregatum extremorũ æquale esse cuilibet aggregato duorum numerorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium. Vt hic manifestum est.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.

Quod probabimus, vt prius, hoc dempto, quòd postremo loco sumendi sunt quatuor numeri medij 15. 19. 23. 27. non autem tres tantũ, vt prius; quia hic non est vnicus numerus medius, sed duo. Nunc sequuntur regulę ad Arithmeticas progressiones spectantes.

REGVLA I.

[**] SI in quauis progressione Arithmetica notus fuerit numerus terminorum vnà cum minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionem summæ omnium terminorum, hac ratione. Addatur primus terminus vltimo, & aggregatũ per numerum terminorum multiplicetur. Dimidium enim numeri producti erit summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

Sũma cuiuscunq; progressionis Arithmeticę quo pacto inueniatur.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37.

Ex 4. & 37. fiunt 41. quæ multiplicata p numerũ terminorũ, hoc est, per 12. (Sunt enim 12. numeri

in

in ea progressione) faciunt 492. Huius numeri dimidium 246. est summa omnium numerorum datæ progressionis. Eademque ratio est de cæteris.

HAEC regula à nonnullis diuiditur in duo membra, hoc modo. Quando numerus terminorũ est par, multiplicant aggregatum ex primo, & vltimo termino per dimidium numeri terminorũ. Si vero numerus terminorum est impar, multiplicant dimidium aggregati ex primo, & vltimo termino (quando enim numerus terminorum est impar, semper illud aggregatum est par) per numerum terminorum. Hac enim ratione semper producitur summa omnium numerorum progressionis. Vel hoc modo. Quando aggregatum ex primo, & vltimo termino est par, multiplicant eius dimidium per numerum terminorum, siue is par sit, siue impar. Si vero aggregatum illud est impar, multiplicant illud per dimidium numeri terminorum, qui numerus tunc semper par est. Vt in superiori exemplo, quia numerus terminorum est par, nempe 12. vel quia aggregatum ex primo termino, & vltimo est impar, videlicet 41. multiplicant illud per 6. dimidium numeri terminorum; efficiuntq; summam omnium numerorum 246. vt prius. In his autẽ duabus progressionibus, in quarum priore numerus terminorum est par, nempe 10. & in posteriori impar, nempe 11. quoniam aggregatum ex primo termino, & vltimo est par, mũ

Summa cuiuscunq; progressionis Arithmeticę quo pacto aliter inueniatur.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. 31. 35. 39.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

S 2 mirum

PROGRESSIONES GEOMETRICÆ.

Cap. XXV.

PROGRESSIO Geometrica est series plurium numerorum se in eadem proportione superantium, vt hic apparet.

Progressio Geometrica quid.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.128.256.512 1024.2048.&c.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. &c.

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384 768. 1536. &c.

PRIMA enim harum progressionum progreditur per proportionem duplam, ita vt quilibet numerus sit duplo maior eo numero, qui eum proxime præcedit; Secunda vero per triplam, ita vt quilibet numerus sit triplo maior eo, qui proxime eum antecedit; atq; vtraque harũ progressionum ab 1. incipit; tertia denique per duplam etiam proportionem progreditur, non tamen ab 1. sed à 3. initium sumit.

CONTINVATVR qualibet progressio Geometrica; si per denominatorem proportionis numerus ille, post quem progressio extendendenda est, multiplicetur. Vt si progressio hæc proportionis triplæ, 4. 12. 36. continuanda sit, multiplicabimus vltimum numerum 36. per 3. de...

Geometrica progressio quo pacto continuetur.

REGVLA I.

[**] SI in quauis progressione Geometrica notus fuerit denominator proportionis, vnà cũ minore, & maiore extremo, perueniemus in cognitionẽ summæ omnium terminorum, hac ratione. Detrahatur primus terminus ab vltimo, & reliquus numerus per numerum, qui vna vnitate minor sit, quàm denominator, diuidatur. Si enim Quotienti vltimus terminus, siue maius extremum adyciatur, componetur summa omnium terminorum. Vt in hac progressione.

Summa cuiuscũq; progressionis Geometricæ quo pacto inueniatur.

3.12.48.192.768.3072.12288.49152.

Demptis 3. ex 49152. remanẽt 49149. Et quoniam denominator proportionis quadruplæ, quã habent numeri datæ progressionis, est 4. diuidemus 49149. per 3. & Quotienti 16383. vltimum terminum, siue maius extremum 49152. adyciemus, conficiemusq; summam totius progressionis 65535. Item hic.

4.6.9.13$\frac{1}{2}$. 20$\frac{1}{4}$. 30$\frac{3}{8}$. 45$\frac{9}{16}$.

Subtractis 4. ex 45$\frac{9}{16}$. relinquuntur 41$\frac{9}{16}$. quæ si diuidantur per $\frac{1}{2}$. (Est enim 1$\frac{1}{2}$. denominator proportionis sesquialteræ, quam habent numeri huius progressionis, ablata autem 1. remanet $\frac{1}{2}$.) fiet Quotiẽs 83$\frac{1}{3}$. cui si addatur vltimus numerus, siue maius extremum 45$\frac{9}{16}$. fiet summa

ma totius progressionis 128$\frac{1}{16}$. atq; eodem modo summam cuiuscunque progressionis Geometricæ inueniemus.

ITAQVE, vt vides, satis est, vt cognoscatur primus terminus, & vltimus, vnà cum denominatore proportionis, ad inueniendam summã totius progressionis, etiamsi intermedij termini ignorentur. Quo pacto autem in cognitionem vltimi termini peruenire possimus, licet non continuetur tota progressio, sequenti regula explicabimus.

IN progressione autem Geometrica duplæ proportionis, cuius initium est 1. facillimo negotio summa totius progressionis quotcunque terminorum reperietur, si vltimus terminus duplicetur, & à duplo abyciatur 1. Vt hic.

Particularis inuẽtio summæ progressionis proportionis duplæ cuius initium est 1.

1.2.4.8.16.32.64.128.256. 512.

Si vltimus terminus 512. duplicetur, & à duplo 1024. reyciatur 1. habebitur summa totius progressionis 1023.

In progressione proportionis duplę incipiẽte ab 1. quilibet numerus, abiecta prius vnitate, est summa omnium antecedentium numerorum.

EX quo fit, quemlibet numerum in huiusmodi progressione, abiecta prius vnitate, esse summã omnium numerorum antecedentiũ, cum quilibet numerus sit proxime præcedentis numeri duplus.

REGVLA II.

IN omni progressione Geometrica, quæ ab 1. incipit, quiuis numerus seipsum multiplicans gignit

Quelques passages méritent d'être traduits, ne serait-ce que pour montrer aux étudiants qui répugnent à l'usage des lettres le pouvoir de concision qu'il qu'il donne :

(*) La Règle de trois (exemple)

Quatre pièces d'or permettant d'acheter douze livres de poivre, on demande de combien de livres vingt pièces permettraient d'acheter

Pièces d'or	*livres*	*pièces d'or*	*livres*
4	*12*	*20*	*60*

En multipliant entre eux le second et le troisième nombre, on obtient le produit 240. En divisant ce produit par le premier nombre, nous trouvons 60 livres, comme quatrième nombre cherché. On voit alors que, de même que le premier nombre 4 est le tiers du second nombre 12, de même le troisième nombre 20 est le tiers du quatrième nombre obtenu, 60.

(**) Progressions arithmétiques. Règle 1

Si, dans une progression arithmétique, nous sont donnés 4 termes situés aux extrémités, nous pouvons connaître la somme de tous les termes de cette façon : ajoutons le premier au dernier terme et multiplions la somme par le nombre de termes. La moitié de ce produit sera la somme de tous les termes.

(évidemment, $a_0 + \ldots + a_{n-1} = n(a_0 + a_{n-1})/2$ est plus concis, mais est-ce plus clair ?)

(***) Progressions géométriques. Règle 1 $\left(a_0 + \ldots + a_n = \dfrac{a_n - a_0}{r - 1} + a_n\right)$

Si, dans une progression géométrique nous sont donnés le dénominateur de proportion, le premier et le dernier terme, nous parvenons à connaître la somme de tous les termes, de la façon suivante. Otons le premier terme au dernier et divisons le résultat par le dénominateur diminué d'une unité. Si nous ajoutons alors le dernier terme, l'extrême le plus grand, au quotient, nous obtenons la somme de tous les termes.

Une lecture hative pourrait faire croire, latin de cuisine aidant, que le livre de Clavius est un catalogue de recettes. Ce n'est pas le cas. Les définitions et premiers exemples sont lourdement redondants, mais laissent entrevoir un certain souci formaliste (dans la présentation de la règle de trois, par exemple). D'autre part, si les différentes règles ne sont pas démontrées stricto sensu, l'auteur s'attache à prouver que les résultats annoncés sont acceptables : les règles donnant la somme des termes des progressions arithmétiques et géométriques sont données, mais Clavius s'attache à prouver que les quotients qui y figurent sont bien entiers, en se référant aux propositions arithmétiques d'Euclide.

Le jésuite mathématicien s'est d'ailleurs montré virtuose dans le domaine de la déduction formelle, et son nom se rencontre toujours dans les ouvrages de logique : à la suite de Lukasiewicz les logiciens intitulent "Loi de Clavius" la tautologie suivante :

$$(\bar{a} \Rightarrow a) \Rightarrow a$$

Nommée "consequentia mirabilis" (de la fausseté de a, on peut déduire la véracité de a !) par les contemporains de Clavius, elle était déjà connue des philosophes Mégariques. Clavius la retrouva en analysant la preuve d'un résultat d'Euclide :

si p premier divise n^2, alors p divise n .

Adoptons l'hypothèse h : **p est premier et divise n^2.**

Soit a la proposition : **p divise n.**

Il s'agit de prouver que a est vraie, sous l'hypothèse h.

Or un célèbre lemme d'Euclide dit que :

si p premier divise r.s sans diviser r, alors p divise s.

En prenant r = s = n, ce lemme assure que :

si p premier divise n^2 sans diviser n, alors p divise n.

Ce qui peut s'écrire encore, sous l'hypothèse h :

si p ne divise pas n, alors p divise n

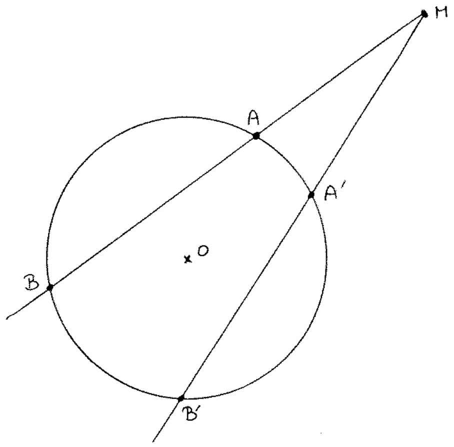
On reconnaît la proposition : $(\bar{a} \Rightarrow a)$.

Merveille, la loi de Clavius assure alors que **a est vraie** !

"MAIS ILS ONT PLEIN D'IDEES"

Francis JAMM

Fin mars, j'ai donné dans deux classes de 2e T le problème suivant :



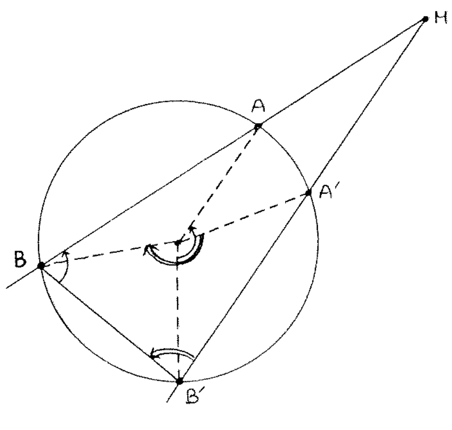
M étant un point extérieur au cercle de centre O, démontrer que :

$$2\,(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}) + (\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}})$$

La question me semblait assez difficile mais somme toute anodine; or, j'étais loin de me douter de la richesse qu'elle recelait. La difficulté principale consiste à remplacer $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}})$ par un angle plus directement utilisable (angle inscrit...), c'est là que j'ai été surpris par la diversité des solutions proposées par les élèves; en effet, presque toutes les méthodes vues en cours ont été utilisées.

(Pour alléger l'écriture, on notera $\widehat{BAC}$ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$
$\hat{p}$ désignera l'angle plat)

1° <u>La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat</u> .



En considérant le triangle MBB' on remplace $\widehat{AMA'}$ par deux angles inscrits :

$\widehat{AMA'} = \hat{p} - \widehat{B'BA} - \widehat{A'B'B}$ (1)

On utilise le théorème de l'angle inscrit :

$2\,\widehat{B'BA} = \widehat{B'OA}$

$2\,\widehat{A'B'B} = \widehat{AOB}$

Par la relation de Chasles : $2\,\widehat{B'BA} + 2\,\widehat{A'B'B}$

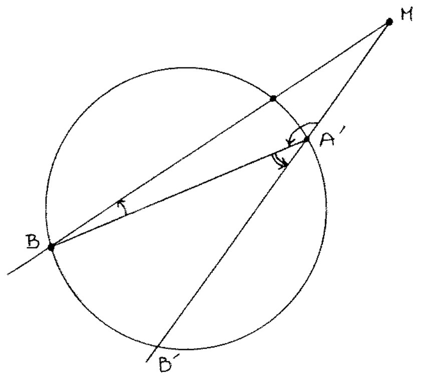
$= \widehat{B'OA'} + \widehat{A'OA} + \widehat{A'OB'} + \widehat{B'OB}$

$= \widehat{A'OA} + \widehat{B'OB}$

En remplaçant dans (1) $2\,\widehat{AMA'} = 2\,\hat{p} - \widehat{A'OA} - \widehat{B'OB} = \widehat{AOA'} + \widehat{B'OB}$

- Plusieurs élèves ont suivi cette démarche mais n'ont pas su utiliser la relation de Chasles. Ils ont introduit les triangles isocèles OBB' et OAA' puis se sont servis des égalités angulaires qui en découlent.
Cette méthode est bien plus longue (2 pages) et l'on ne peut que féliciter les élèves qui ont su la mener à son terme.

- Dans le même ordre d'idées certains élèves ont utilisé un autre triangle que MBB'; par exemple, le triangle MBA'. Moyennant un passage au supplémentaire pour $\widehat{MA'B}$, on obtient directement les angles inscrits intéressants.

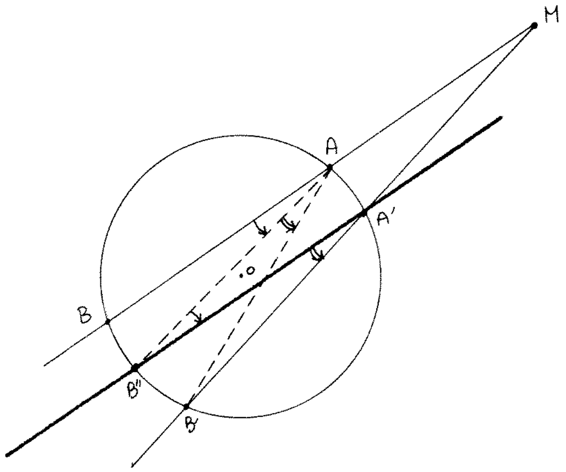


- On a aussi utilisé le triangle MAA', puis par passage au supplémentaire on se ramène à l'utilisation de la relation de Chasles comme en 1°)

- Certains élèves ont recherché quelques unes des nombreuses égalités angulaires qu'il était possible de tirer de la figure (6 à 8) et après des manipulations assez complexes, sont arrivés au résultat.

- On pourra aussi consulter la solution proposée par le manuel de 3e de l'I.R.E.M. de Strasbourg, p. 69 n°4.

2° Les translations conservent les angles



Par la translation de vecteur MA' on obtient : (AB) // (A'B'')

AMA' = B''A'B'

En utilisant le théorème de l'angle inscrit :

$\widehat{AOA'} = 2\ \widehat{AB''A'}$

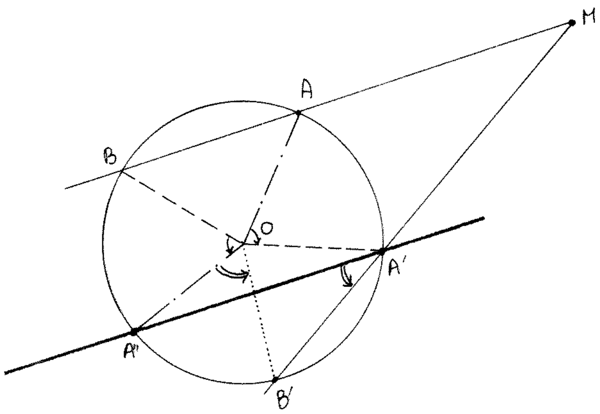
$\widehat{BOB'} = 2\ \widehat{BAB'} = 2(\widehat{BAB''}+\widehat{B''AB'})$

$= 2(\widehat{A'B''A}+\widehat{B''AB'})$ angles alternes-internes

donc: $\widehat{AOA'} + \widehat{BOB'} = 2\ \widehat{B''AB'}$

$= 2\ \widehat{B''A'B'}$ (ils interceptent le même arc)

3°) Les rotations conservent les angles



La rotation de centre O et l'angle $\widehat{A'OB}$ transforme A' en B et A en A''. On a donc $\widehat{AOA'} = \widehat{A''OB}$.

D'où $\widehat{AOA'} + \widehat{BOB'} = \widehat{A''OB'}$

La translation de vecteur AM' transforme la droite (MB) en la droite (A'A'') (*); donc $\widehat{AMA'} = \widehat{A''A'B'}$.

En utilisant le théorème de l'angle inscrit, on obtient :

$2\ \widehat{AMA'} = 2\ \widehat{A''A'B'} = \widehat{A''OB'} = \widehat{AOA'}+\widehat{BOB'}$

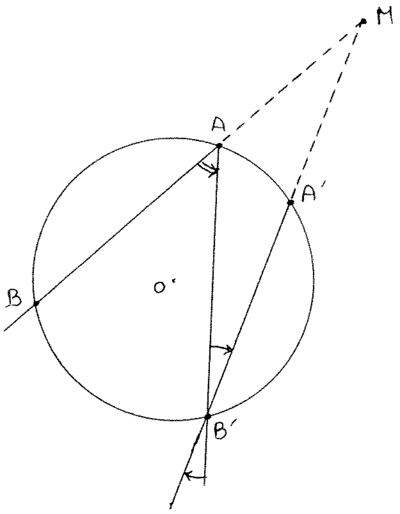
$\widehat{AOA'} = \widehat{A''OB}$ donc AA' = BA'' (1)

(*) justification :

(BA) et sa translatée déterminent sur le cercle un trapèze, isocèle pour des raisons de symétrie. L'égalité (1) montre que le 4e sommet de ce trapèze est A''. Cette justification a été escamotée par les élèves.

Les élèves disent qu'ils font "pivoter" l'angle $\widehat{AOA'}$, ce qui montre bien l'aspect dynamique du raisonnement, qui est dans l'esprit des programmes actuels, qui préconisent une géométrie des transformations.

4°) Les symétries centrales conservent les angles

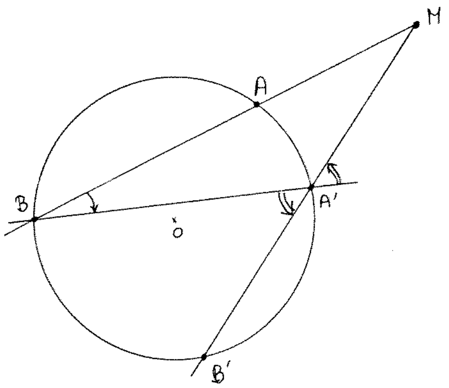


C'est la solution que je trouve la plus élégante :

$$\widehat{(\vec{OA},\vec{OA'})}+\widehat{(\vec{OB},\vec{OB'})}=2\widehat{(\vec{B'A},\vec{B'A'})}+\widehat{(\vec{AB},\vec{AB'})}$$
$$=2\widehat{(\vec{AB'},\vec{A'B'})}+\widehat{(\vec{AB},\vec{AB'})}$$
$$=2\widehat{(\vec{AB},\vec{A'B'})}$$
$$=2\widehat{(\vec{MA},\vec{MA'})}$$

Cet élève a mis près d'une heure pour aboutir à ce résultat, après plusieurs tentatives infructueuses d'utilisation de la relation de Chasles.

- Utilisant un peu le même genre de manipulations, on peut signaler la solution proposée par les auteurs du manuel.



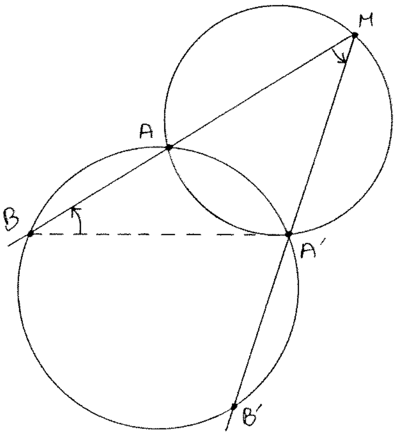
$$\widehat{(\vec{MA},\vec{MA'})}=\widehat{(\vec{MA},\vec{BA})}+\widehat{(\vec{BA},\vec{BA'})}+\widehat{(\vec{BA'},\vec{B'A'})}+\widehat{(\vec{B'A'},\vec{MA'})}$$
$$=\hat{p}+\widehat{(\vec{BA},\vec{BA'})}+\widehat{(\vec{A'B},\vec{A'B'})}+\hat{p}$$

donc : $2\widehat{(\vec{MA},\vec{MA'})}=\widehat{(\vec{OA},\vec{OA'})}+\widehat{(\vec{OB},\vec{CB'})}$

A chacun de l'apprécier comparativement aux solutions proposées par les élèves.

5°) Une tentative malheureuse

Puisque A'MA n'est pas un angle inscrit, un élève a tout simplement considéré le cercle circonscrit à AMA'

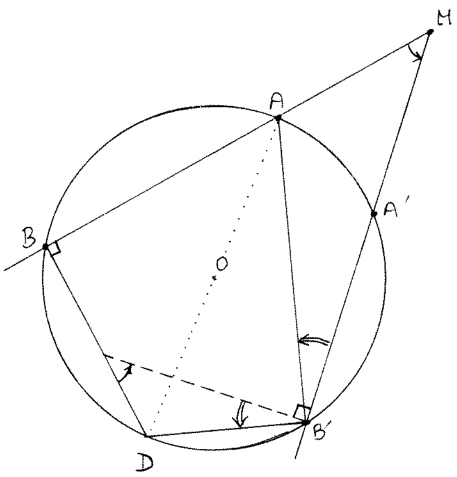


" $\widehat{AMA'}$ et $\widehat{A'BA}$ interceptent la corde AA' donc $\widehat{AMA'}=\hat{p}-\widehat{A'BA}$ puis en raisonnant de même avec le triangle ABA', on arrive au résultat".

L'élève utilise ici le théorème de l'angle inscrit pour deux cercles différents, ce qui est une erreur classique; mais il existe peut-être une solution reprenant l'idée des cercles circonscrits aux triangles.

6)° Pour conclure

Si l'on veut essayer d'être exhaustif, on peut imaginer une solution faisant intervenir le fait que deux angles ayant leurs côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires. La solution est un peu longue mais elle passe en revue de nombreux résultats.



$$\left.\begin{array}{l}(BC)\perp(BM)\\(B'C)\perp(B'M)\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{DCB'}=\widehat{AMA'}$$

Dans le triangle CDB', on a:
$\widehat{DCB'}=\hat{p}-\widehat{B'DB}-\widehat{CB'D}$ (1)
$\widehat{CB'D}=\widehat{A'B'A}$.
En effet, D,O,A sont alignés car BAD est un triangle rectangle donc DA est un diamètre. Mais alors $\widehat{AB'D}$ est un angle droit et la rotation de centre B' et d'angle de mesure $-\pi/2$ transforme $\widehat{A'B'A}$ en $\widehat{CB'D}$

En revenant à (1)
$$2\,\widehat{AMA'} = 2\,\widehat{DCB'} = 2\,\hat{p} + 2\,\widehat{BDB'} + 2\,\widehat{AB'A'}$$
$$= BOB' + AOA'$$

On adaptera la solution pour le cas où les perpendiculaires à (BM) et (B'M) se recoupent en dehors du cercle.

Pour la petite histoire, je précise que ce problème a été donné dans une classe A (bonne) et une classe B (moyenne). Rapidement, les élèves de la classe A sont venus me dire *"Monsieur, on ne sait pas comment aborder ce problème"*. Je leur ai alors suggéré de considérer le triangle BMB'. Les élèves de la classe B on attendu le dernier moment pour s'occuper du problème et n'ont plus pu me demander de renseignements. C'est dans leurs copies que j'ai trouvé les solutions les plus originales. Ceci étant, quelques esprits indépendants de la classe A n'ont pas utilisé mon indication et ont cherché leur propre méthode. Il va de soi que l'année prochaine je ne donnerai plus aucun renseignement ! Peut-être verrai-je de nouvelles solutions ?
En tout cas, je pense que cela vaut la peine de passer du temps sur ce problème; car venant en fin d'apprentissage, il permet d'utiliser l'ensemble des résultats vus en cours, et de montrer aux élèves qu'il peut exister pour un problème une grande diversité de solutions d'inégale valeur.

POLYEDRES REGULIERS ET SEMI-REGULIERS DE L'ESPACE   P . DIBLING

Les solides dont toutes les faces sont égales à un même polygone régulier et dont tous les sommets sont identiques sont appelés des polyèdres réguliers. On appellera par la suite semi-réguliers des polyèdres soumis à des conditions moins restrictives.

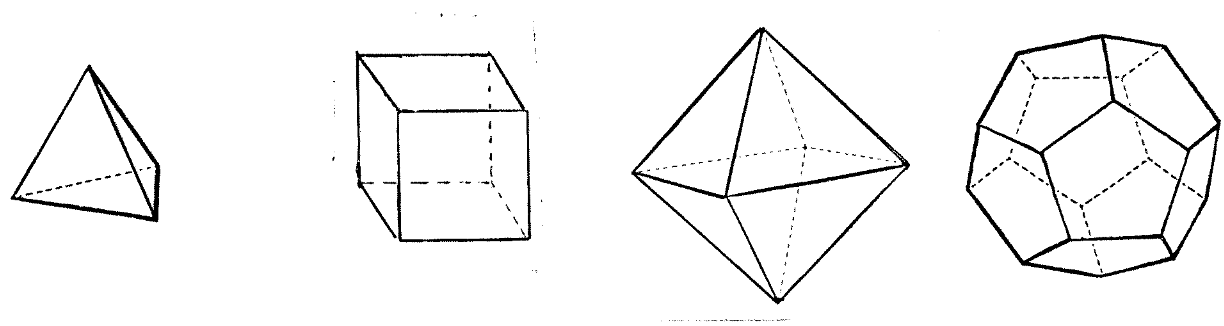
Les polyèdres conduisent à des applications pratiques pour les ingénieurs, à des concepts de structure pour les cristallographes, les chimistes, à des développements esthétiques pour les architectes et les sculpteurs.

On aura successivement :
- les solides de Platon
- les solides d'Archimède
- les prismes et antiprismes de Kepler
- les polyèdres réguliers de Kepler
- les polyèdres réguliers étoilés de Poinsot

Puisse cet article donner envie à nos collègues de faire construire dans leurs classes ces jolis solides de l'espace !

I.- Les solides de Platon encore nommés les cinq polyèdres réguliers platoniciens

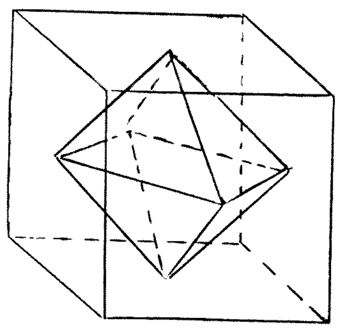
Le tétraèdre   le cube   l'octaèdre   le dodécaèdre



Il est probable qu'aucun homme n'a pu les concevoir d'emblée.
On sait que les Etrusques utilisaient des dés à jouer dodécaédriques durant le premier millénaire avant Jésus-Christ.
Vers cinq cents ans avant Jésus-Christ, les cinq solides étaient manipulés dans l'entourage de Platon qui les a décrits dans un de ses dialogues.
Deux siècles plus tard, Euclide couronnait ses Eléments en discutant la géométrie des cinq polyèdres platoniciens.

Notion de dualité:

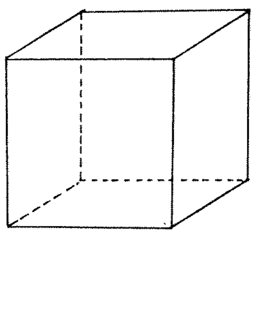
A première vue, les solides de Platon peuvent sembler indépendants les uns des autres; ils ne le sont pas.
On marque un point au centre de chaque face d'un cube. On relie par des segments les six points marqués et l'on obtient un octaèdre.
En procédant de la même façon avec un octaèdre, on obtient un cube.
On dit que le cube et l'octaèdre sont duaux l'un de l'autre. Ainsi le dodécaèdre et l'icosaèdre sont duaux alors que le tétraèdre est son propre dual.

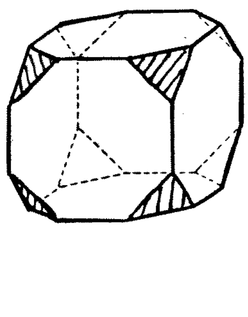


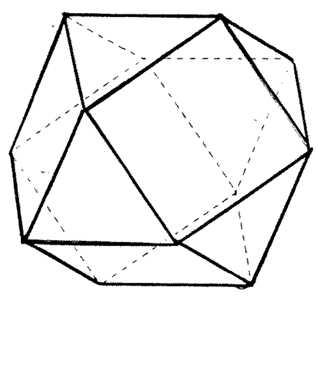
II.- Les solides d'Archimède

A. Observons la chaîne des solides suivants et commentons-la :

le cube ⟶ le cube tronqué ⟶ le cuboctaèdre

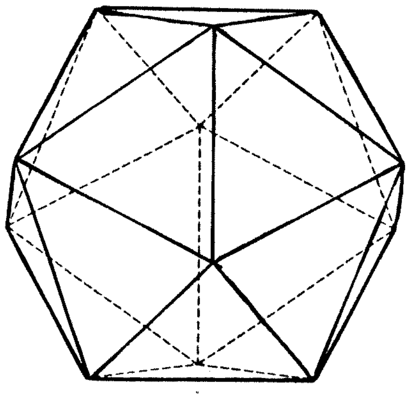


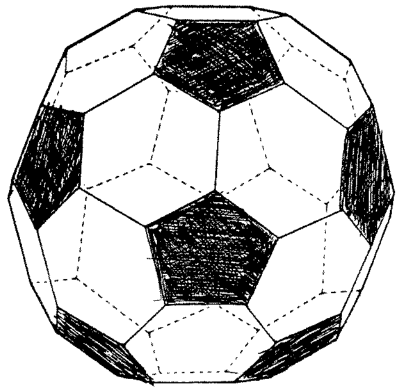




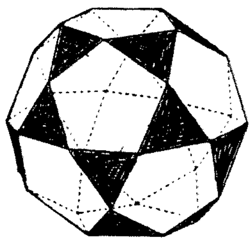
B. D'autres solides semi-réguliers sont obtenus par troncature de l'icosaèdre

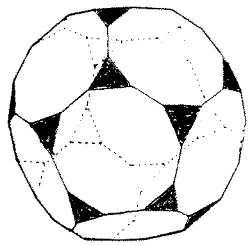
l'icosaèdre 3^5 ⟶ l'icosaèdre tronqué 5.6^2 ⟶



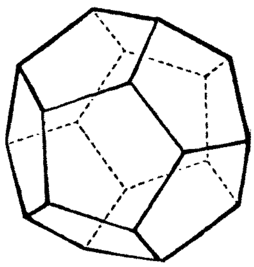


⟶ l'icosidodécaèdre $(3.5)^2$ ⟶ le dodécaèdre tronqué 3.10^2 ⟶



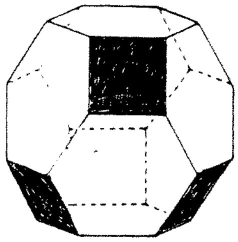


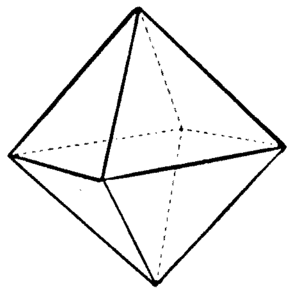
⟶ le dodécaèdre 5^3



L'icosidodécaèdre qui occupe le milieu de cette chaîne possède les vingt faces triangulaires de l'icosaèdre et les douze faces pentagonales du dodécaèdre, d'où son nom !

→ l'octaèdre tronqué → l'octaèdre





Commentaire :

Quand on coupe les coins d'un cube, on remplace chaque sommet par un triangle équilatéral. On peut couper de telle façon que les faces cassées du cube deviennent des octogones : on obtient le cube tronqué.
En coupant davantage, il arrive un moment où les triangles équilatéraux se touchent en leur sommet; on obtient le cuboctaèdre.
Si on continue au-delà, les triangles deviennent des hexagones; on obtient l'octaèdre tronqué car lorsque les reliquats des faces carrées d'origine disparaissent, il reste un octaèdre.

L'octaèdre tronqué ou cube de Kelvin réalise, comme le cube, un pavage de l'espace, d'où son intérêt en cristallographie.
Le cuboctaèdre possède les six faces carrées du cube et les huit faces triangulaires de l'octaèdre, d'où son nom !
Les trois solides du milieu de la chaîne sont des polyèdres semi-réguliers car leurs faces comptent deux types de polygones réguliers et leurs sommets sont tous identiques.

Un polyèdre régulier (ou semi-régulier) se caractérise par une notation n^p (ou $n^p.n'^{p'}$...) où n désigne le nombre de côtés d'une face et p le nombre de faces de ce type qui se rejoignent en un sommet.

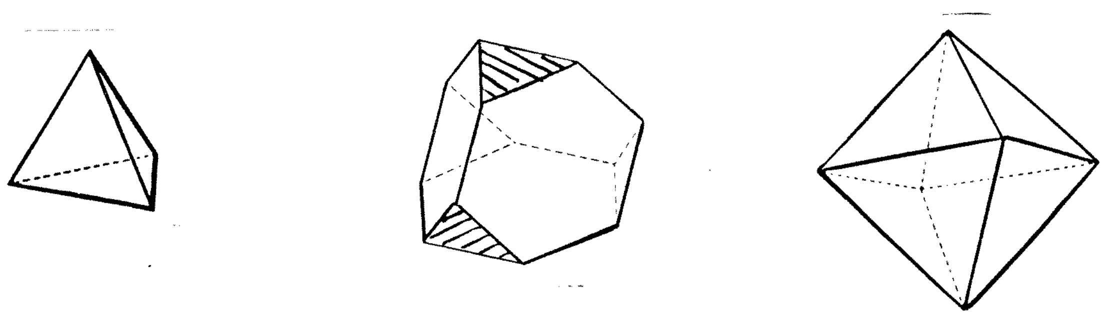
Ainsi le cube	est caractérisé	par		4^3
le cube tronqué	"	"	"	3.8^2
le cuboctaèdre	"	"	"	$(3.4)^2$
l'octaèdre tronqué	"	"	"	4.6^2
l'octaèdre	"	"	"	3^4

C. La troncature du tétraèdre fournit le tétraèdre tronqué 3.6^2 comportant quatre faces triangulaires et quatre faces hexagonales.

En poursuivant la troncature jusqu'à ce les sommets du triangle se rejoignent, on obtient un octaèdre.

La chaîne obtenue est donc :

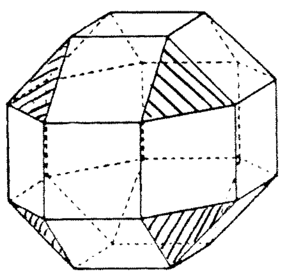
tétraèdre $\longrightarrow$ tétraèdre tronqué $\longrightarrow$ octaèdre



D. Il existe d'autres solides semi-réguliers; énumérons-les :

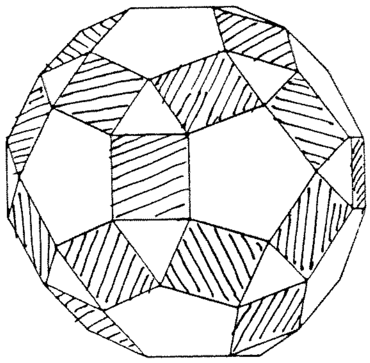
1. En remplaçant les sommets du cuboctaèdre par des carrés, on produit le <u>petit rhombicuboctaèdre</u> que l'on trouvera au Mont Saint-Odile sous forme de cadran solaire très original permettant de lire l'heure dans de grandes villes des différents continents .

<u>Le petit rhombicuboctaèdre</u> 3.4^3



2. En remplaçant les sommets de l'icosidodécaèdre par des carrés, on obtient le petit rhombicosidodécaèdre qui compte 20 triangles équilatéraux, 30 carrés et 12 pentagones

le petit rhombicosidodécaèdre   3.4.5.4.

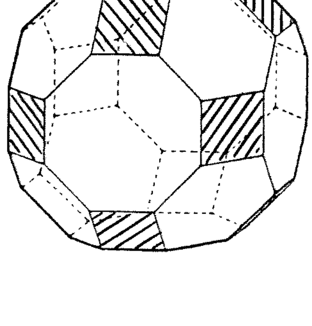


3. Voici deux très jolis solides semi-réguliers

le grand rhombicuboctaèdre

4.6.8.

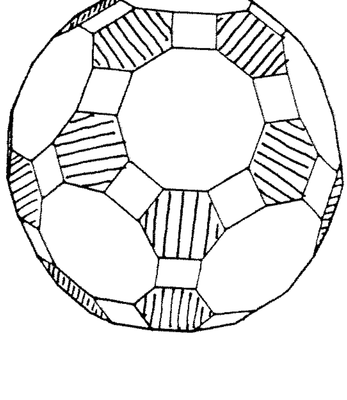
composé de 12 carrés, 8 hexagones, 6 octogones



le grand rhombicosidodécaèdre

4.6.10

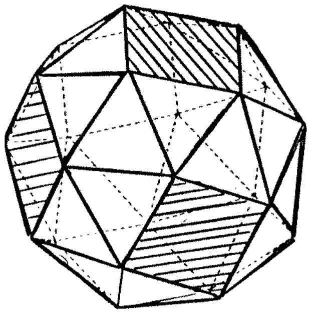
composé de 30 carrés, 20 hexagones, 12 décagones



4. Enfin les deux derniers :

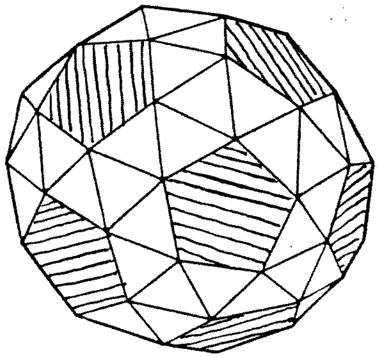
Le snub-cube $3^4.4$

comporte 6 carrés et 32 triangles



le snub-dodécaèdre $3^4.5$

comporte 30 carrés, 20 hexagones, 12 décagones



Chacun de ces deux derniers solides existe sous forme gauche et sous forme dextre, cela dépend de la façon dont s'inclide le cube pour le snub-cube l'hexagone pour le snub dodécaèdre.

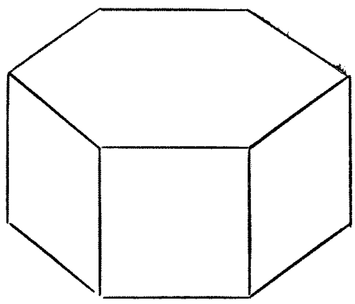
Ces quinze solides semi-réguliers s'appellent les solides d'Archimède : dès le début de l'ère chrétienne, à Alexandrie, les mathématiciens Héron et Pappus s'intéressaient à ceux-ci.
Les duaux des solides d'Archimède fournissent de nouveaux solides mais qui ne sont pas semi-réguliers.

III.- Prismes et antiprismes semi-réguliers de Kepler

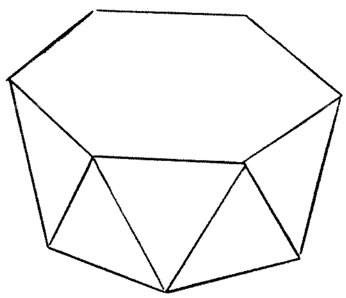
KEPLER (astronome allemand 1571-1630) passionné de géométrie montra que toute une classe de solides avait beaucoup de points communs avec les solides de Platon.

1) Tout prisme dont les faces latérales sont les carrés et terminé en haut et en bas par un polygone régulier répond à la définition d'un solide semi-régulier.

En effet ses faces sont des polygones de deux sortes et ses sommets sont identiques.



2) Un antiprisme diffère uniquement du prisme par le fait que ses faces latérales sont des triangles équilatéraux; c'est donc aussi un solide semi-régulier



Ainsi depuis l'Antiquité, Kepler élargissait le domaine des solides semi-réguliers. Comme le nombre de polygones réguliers formant les bases est illimité, il y a une infinité de prismes et antiprismes.
Là aussi, on peut construire les duaux, mais on n'obtient pas de solides semi-réguliers.

IV.- Polyèdres réguliers étoilés de Kepler

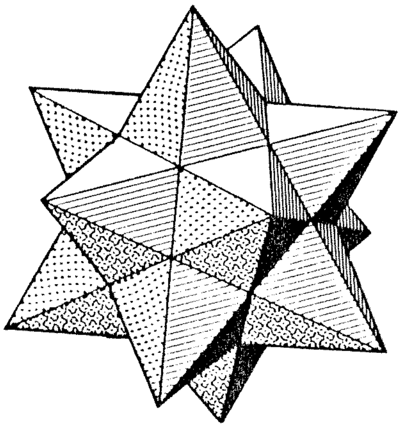
A. Kepler découvre que douze pentagrammes (pentagone régulier étoilé) peuvent se juxtaposer par paire le long de leurs côtés.
L'originalité de Kepler est d'avoir abandonné la notion grecque de convexité.

Le nouveau solide satisfait bien les critères des polyèdres réguliers.

1) Les faces sont des des pentagrammes dont les parties centrales nous sont cachées par les pyramides formées de cinq pointes de pentagrammes.
2) Les sommets sont identiques : ce sont les sommets des pyramides.

Une méthode de construction consiste à faire reposer douze pyramides à cinq faces sur un dodécaèdre régulier. Les faces des pyramides sont des trianges isocèles du type (36°, 72°, 72°).

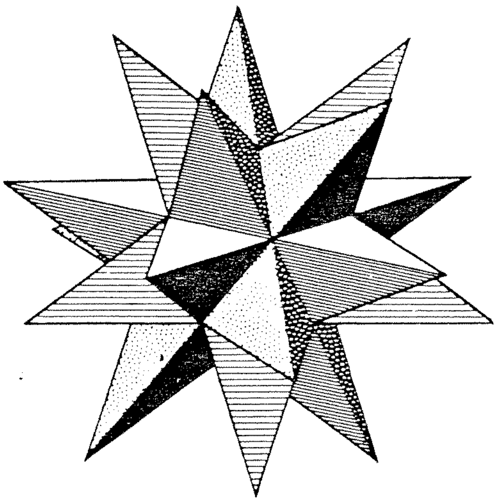
Le polyèdre s'appelle le petit dodécaèdre étoilé $(\frac{5}{2})^5$



B. Kepler observa que les même douze pentagrammes peuvent être assemblés différemment. Le polyèdre obtenu a douze faces en forme de pentagrammes au centre desquelles s'élève une saillie formée de cinq pyramides triangulaires (1).

Une méthode de construction consiste à produire vingt pyramides triangulaires avec les mêmes triangles isocèles (36°, 72°, 72°), puis des assembler en tenant compte de la remarque (1) ci-dessus.

Ce polyèdre s'appelle le grand dodécaèdre étoilé $(\frac{5}{2})^3$

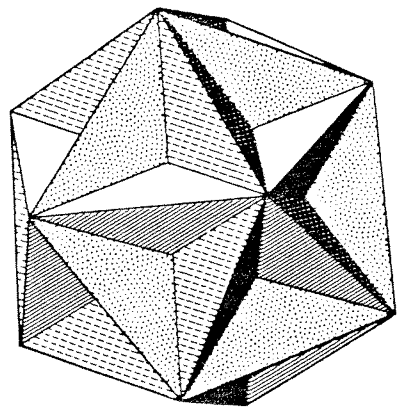


V.- Les polyèdres réguliers de Poinsot (mathématicien français 1777-1859)

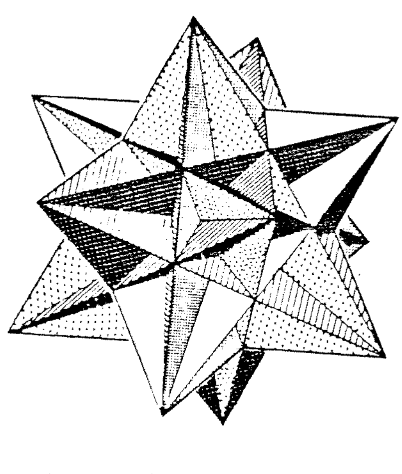
Deux siècles s'écoulent après la découverte de Kepler avant que Poinsot ne trouve deux autres solides réguliers.

Le premier appelé le grand dodécaèdre étoilé $5^{\frac{5}{2}}$ est composé de douze pentagones (non étoilés) se coupant mutuellement et où chaque face pentagonale supporte une étoile à cinq branches en relief .

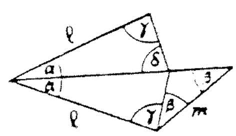
Méthode de construction: les parties visibles sont des triangles isocèles tous identiques d'angle au sommet 108°. Il faut soixante triangles. Il est facile de construire un patron pour les étoiles à cinq branches.



Le second solide trouvé par Poinsot est encore plus surprenant. Il est constitué de vingt triangles équilatéraux se coupant mutuellement. Les faces triangulaires se réunissent selon trente arêtes en souze sommets. Ce solide s'appelle le grand icosaèdre étoilé 3^5.



Méthode de construction : il faut soixante pièces du type :



LA FACE CACHEE DES POLYEDRES

Eric CHANEY

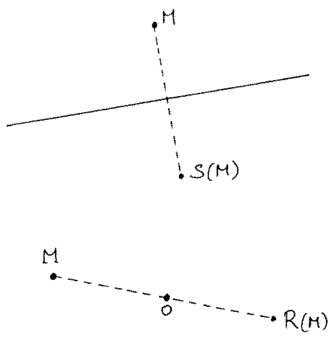


Fig 1 :
$\{Id, S\} \cong \{Id, R\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

L'abondance des symétries observées sur les polyèdres réguliers, les "solides platoniciens", est probablement à l'origine de la valeur esthétique que leurs accordent aussi bien les mystiques que les négociants en diamant.

Or qui dit symétrie - au sens commun - dit groupe. Les plus simples d'entre elles engendrent aussitôt le groupe à deux éléments (Fig 1).

L'association entre symétries - mieux vaudrait dire régularités - et groupes rendra moins étonnant le résultat suivant :

Convenons d'appeler SO(3) le groupe des rotations (*).
Nous dirons qu'un sous groupe de SO(3) stabilise une partie de $\mathbb{R}^3$ si ses transformations la laissent globalement fixe.
Alors :

Tout sous-groupe fini de SO(3) stabilise soit un polygone régulier de $\mathbb{R}^2$, soit l'un des cinq polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$(**).

Dans ce qui suit, nous commencerons par décrire les groupes associés aux polygones réguliers, aux polyèdres réguliers, puis nous indiquerons les raisons structurelles qui font que leur liste épuise les sous-groupes finis de SO(3).

Il s'agit de transformations vectorielles, mais le langage affine en facilitera la description.

1. Les groupes associés aux polygones réguliers

Un polygone régulier à n côtés peut se stabiliser de deux façons différentes, selon qu'opèrent sur lui des transformations planes ou de l'espace.

(*) transformations orthogonales de déterminant +1. O(n) désigne le groupe des transformations orthogonales de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. SO(n) son sous-groupe des transformations de déterminant + 1.

(**) ce résultat était, en substance, acquis par Hamilton en 1856.

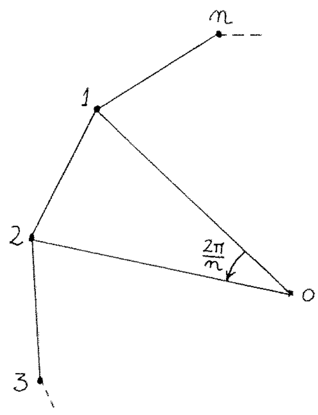


Fig 2 :

• Les transformations orthogonales planes sont les rotations planes Id, R, ..., R^{n-1} où R est la rotation d'angle $2\pi/n$, et les symétries par rapport aux droites O1, O2, ..., On (Fig 2). Les premières, qui sont directes (éléments de SO(2)) forment un groupe cyclique d'ordre n, et l'ensemble de ces transformations le groupe diédral D_n, d'ordre 2n, réalisé ici comme sous-groupe de O(2) et non pas de SO(2) (les symétries sont de déterminant -1).

Un groupe est dit diédral d'ordre 2n s'il possède deux générateurs vérifiant les relations suivantes :

$$a^n = 1 \; ; \; b^2 = 1 \; ; \; a\,b\,a\,b = 1$$

R joue ici le rôle de a et, par exemple, la symétrie par rapport à O1 celui de b (*).

(*) connaître des générateurs d'un groupe et les relations entre ces éléments est un moyen pratique d'identifier un groupe. Il sera à nouveau utilisé ici.

• Un point de vue spatial permet de retrouver la même structure de groupe en se servant uniquement de rotations, autour de droites bien choisies :

Appelons à nouveau R la rotation d'axe vertical . Id = R°, R, R^2 ... R^{n-1} stabilisent le polygone et forment un sous-groupe cyclique d'ordre n (Fig 3).

Soient R_1, R_2, ..., R_n les rotations d'angle π autour des droites O1, O2, ... , On. Elles ont même effet que les symétries planes envisagées ci-dessus, et l'on a à nouveau :

$$R^n = Id \; ; \; R_1^{\,2} = Id \; ; \; RR_1RR_1 = Id$$

autrement dit, R et R_1 engendrent à nouveau le groupe diédral D_n, réalisé comme sous-groupe de SO(3) (**).

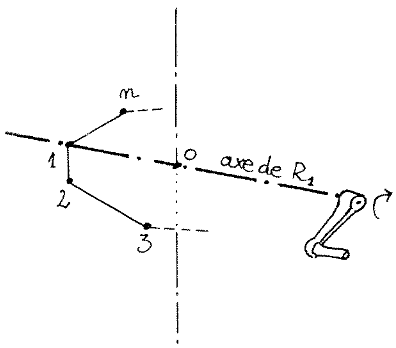


Fig 3 :

(**) en cristallographie, on ne se limite pas aux rotations : on considère le groupe D_{nh} engendré par D_n et la symétrie par rapport à O. Le groupe obtenu est d'ordre 4n, mais c'est un sous-groupe de O(3), pas de SO(3).

2. Le groupe du tétraèdre et ses générateurs

Introduisons les rotations suivantes :

• S a pour axe la hauteur abaissée du sommet 1 sur la face 234 et pour angle $2\pi/3$. Ainsi, par S :

1	2	3	4
↧	↧	↧	↧
1	3	4	2

• P a pour axe la droite joignant les milieux des arêtes 12 et 34, et pour angle π. Ainsi, par P :

1	2	3	4
↧	↧	↧	↧
2	1	4	3

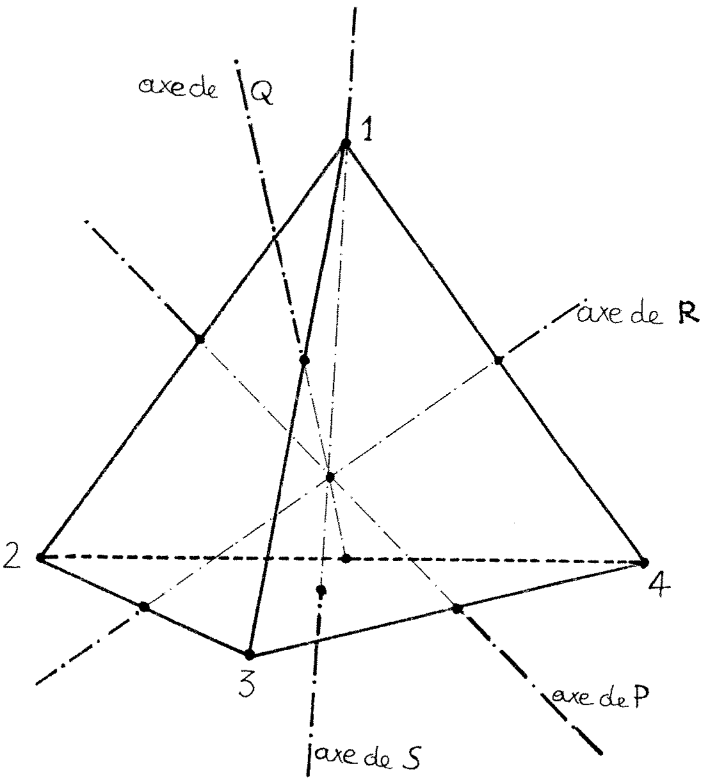


Fig 4 : S et P suffisent à engendrer le groupe du tétraèdre, où il est amusant de chercher des racines carrées.

A elles seules, ces deux rotations engendrent toutes celles qui stabilisent le tétraèdre. Soit par exemple X la rotation autour de la hauteur abaissée de 4 sur 123, d'angle $4\pi/3$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

On peut vérifier (*) que X = S . P.

(*) par un produit de matrices pour les baroudeurs du calcul, en vérifiant les effets de X et de RP sur les sommets pour les partisans du moindre effort.

Un autre exemple : soit Y la rotation autour de la hauteur abaissée de 4, comme pour X, mais d'angle $2\pi/3$. En quelque sorte, $Y = \sqrt{X}$... Mais comme $Y^3 = X^3 = Id$, on a :

$$Y^2 = X \Longleftrightarrow Y^4 = XY^2 \Longleftrightarrow Y = X^2 \text{ soit } Y = SPSP.$$

Pour obtenir les relations entre P et S, qui ne sont pas évidentes a priori, introduisont la conjuguée de P par S, soit Q :

$$Q = SPS^{-1} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}$$

Q est la rotation d'angle π autour de la droite des milieux de 13 et de 24. Ainsi, P et Q sont d'ordre deux et la conjuguée de Q par S est PQ :

$$S^3 = P^2 = Q^2 = Id \ ; \ PQ = QP \ ; \ SPS^{-1} = Q \ ; \ SQS^{-1} = PQ.$$

*(*) ou au groupe alterné A_4, si on le considère comme sous-groupe de S_4, groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$*

Les relations entre les générateurs R et P qui présentent le groupe du tétraèdre sont, par conséquent :

$$S^3 = P^2 = Id \; ; \; PSPS^{-1} = SPS^{-1}P \; ; \; SPS^{-1} = S^{-1}PSP$$

Tout groupe à deux générateurs vérifiant ces relations est isomorphe au groupe tétraèdral (*). Il est alors d'ordre 12.
Il possède un sous-groupe distingué d'ordre 4 que la géométrie rend évident : PQ est la troisième rotation d'angle π, autour de la droite joignant les milieux de 23 et 14, qu'on notera R. Deux rotations prises parmi P, Q, R sont conjuguées par rapport à une rotation autour d'une hauteur, comme le sont P et Q par S. Ainsi {Id,P,Q,R} est distingué dans le groupe du tétraèdre : A_4 n'est pas simple !

3. Le groupe du cube et ses générateurs

Fig 5 : Le cube avec un axe de rotation d'ordre 4, et un autre d'ordre 3. Ces deux rotations engendrent le groupe. L'octaèdre inscrit, dual du cube, peut également s'obtenir comme intersection des plans tangents à la sphère du cube, en ses sommets. Il est alors exinscrit au cube.

Fig 6 : Si l'axe 17 est normal à la feuille, la symétrie d'ordre 3 apparaît clairement.

Les rotations du cube sont familières aux amateurs du Rubik's Cube, mais ici n'interviennent que celles qui permutent les sommets. On ne les retrouve dans le groupe du R.Cube que sous la forme de groupe quotient, l'équivalence consistant à identifier deux transformations du R.Cube qui opèrent de la même façon sur les sommets, sans tenir compte de l'orientation des petits cubes sommets.
Comme pour le tétraèdre, deux rotations suffisent à engendrer le groupe tout entier :

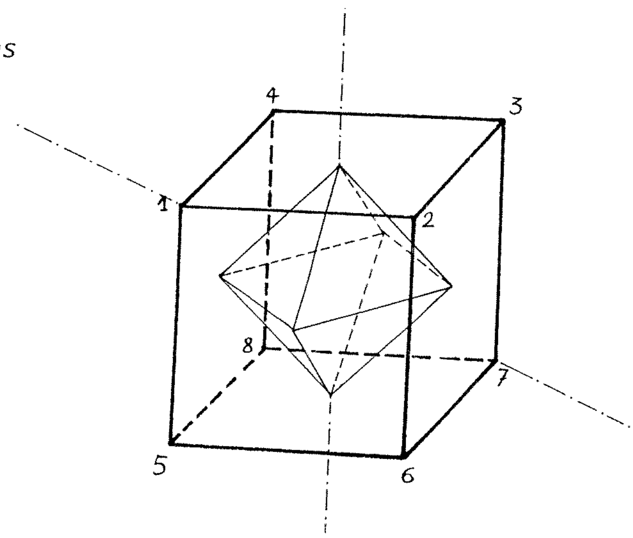


Fig 5

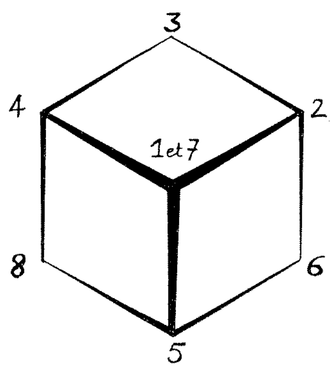


Fig 6

• Soit X d'axe la droite joignant les centres de 1234 et 5678, d'angle $\pi/2$:

$$X : \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{array} \qquad \text{On a : } X^4 = \mathrm{Id}$$

• Soit Y d'axe 17, d'angle $2\pi/3$. Que cette rotation d'ordre 3 laisse le cube invariant ne saute pas aux yeux dans la classique perspective cavalière du cube. En plaçant l'oeil dans l'axe 17, la symétrie d'ordre 3 ...le crève.

$$Y : \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 8 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 \end{array} \qquad \text{On a } Y^3 = \mathrm{Id}$$

Introduisont également :

• $P = X^2$, d'angle π.

• Q, conjuguée de P par Y : $Q = YPY^{-1}$. Q est d'angle π autour de la droite joignant les centres des faces 1485 et 2376.

P et Q commutent et PQ est d'angle π autour de la droite joignant 1265 et 4378. Les rotations sont analogues à celles observées pour le tétraèdre :

$$PQ = QP \text{ et } YQY^{-1} = PQ$$

En revenant aux générateurs X et Y, on obtient la liste de relations :

$$X^4 = Y^3 = 1 \qquad X^2YX^2Y^{-1} = YX^2Y^{-1}X^2 \qquad Y^2X^2Y^{-1} = X^2YX^2$$

(P et Q commutent) (PQ est conjuguée de Q par Y)

Tout groupe à deux générateurs vérifiant ces relations est isomorphe au groupe du cube, dit hexaèdral ou encore octaèdral car il stabilise également l'octaèdre inscrit dans le cube. Il est alors isomorphe à S_4, groupe des permutations de 4 objets et est d'ordre 24 (*).

(*) L'isomorphisme est le suivant : chaque rotation du cube est caractérisée par son action sur une paire de sommets opposés, autrement dit une diagonale. Chaque rotation est ainsi associée à une permutation de l'ensemble des diagonales.

X, P, Y et leurs homologues engendrent des groupes cycliques d'ordre 4, 2, 3 dont la liste correspond exactement à celle des symétries du cube. Par exemple, il n'existe que 3 sous-groupes cycliques d'ordre 3 puisqu'il n'existe que trois rotations d'angle $2\pi/3$, d'axes 17, 46, 35.

Soit Z la rotation d'axe 35 et d'angle $2\pi/3$. Vérifions qu'on peut la fabriquer à partir de X et Y. En composant Y (ou Y^2) par PQ à gauche, nous obtenons une rotation d'ordre 3 (Y et Y^2 le sont), et d'axe 28 ou 35. Un rapide test indique que :

$Z = Y^2PQ$. En revenant à X, on obtient :

$Z = Y^2Y^2X^2Y^{-2}$ soit : $Z = YX^2Y$.

Le groupe hexaèdral est isomorphe à S_4, comme nous l'avons dit plus haut. L'image géométrique permet de décrire la structure de S_4. Les sous-groupes cycliques d'ordre 2,3,4 ont déjà été signalés. Ils ne peuvent pas être distingués, puisqu'ils sont échangés par conjugaison. D'autre part, les relations :

$$Y^3 = P^2 = Q^2 = Id \quad , \quad PQ = QP \quad ,$$
$$YPY^{-1} = Q \quad , \quad YQY^{-1} = PQ$$

sont identiques aux relations entre S, P, Q (Y joue ici le rôle de S) observées dans le groupe tétraèdral. Le sous-groupe d'ordre 12 engendré par Y, P, Q est donc isomorphe à ce dernier et, par conséquent à A_4. L'efficacité de la présentation d'un groupe par générateurs et relations est ici patente.

Que le groupe tétraèdral se retrouve dans le groupe du cube est en fait une évidence géométrique :

Fig 7 : les deux tétraèdres inscrits dans le cube. Symétriques par rapport au centre, ils possèdent les mêmes axes de rotations et sont stabilisés par le même groupe.

Fig 8 : le solide formé de deux tétraèdres est semi régulier non convexe, mais ses faces sont des triangles équilatéraux isométriques.

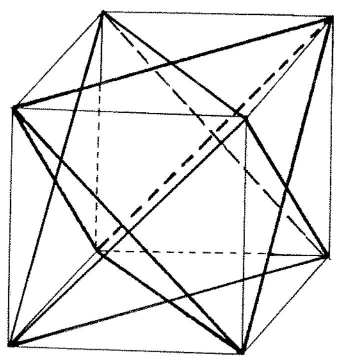


Fig 7

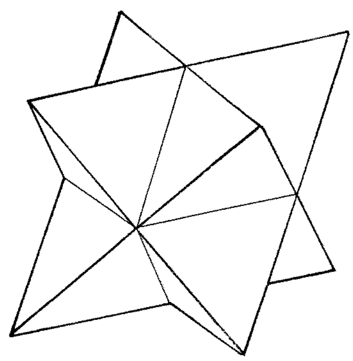


Fig 8

Les sommets 1368 et 2457 forment deux tétraèdres réguliers dont les axes de symétrie sont communs et pris parmi ceux du cube. Comme ce sont les seuls, le groupe tetraèdral est le seul sous-groupe d'ordre 12 du groupe hexaèdral. Tout sous-groupe qui lui serait conjugué devrait avoir également 12 éléments. Le sous-groupe tetraèdral est donc son propre conjugué. Autrement dit, il est distingué, ce qui correspond à un résultat général des groupes de permutation :

$$A_n \triangleleft S_n$$

4. Le groupe de l'icosaèdre

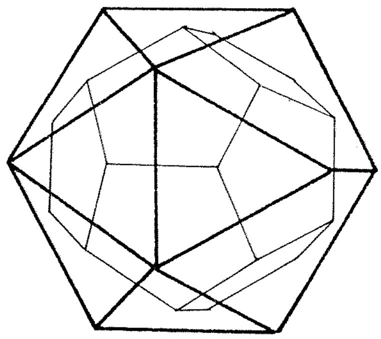


Fig 9 : le dodecaèdre régulier et son dual, l'icosaèdre, stabilisés par le même groupe de rotations.

Dual du dodecaèdre, l'icosaèdre est stabilisé par un groupe de rotations d'ordre 60 dont nous ne détaillerons pas la structure. Il est isomorphe à A_5, sous-groupe alterné de S_5.
Outre l'identité, ses éléments sont :

- 24 rotations d'ordre 5, réparties en 6 sous-groupes d'ordre 5 correspondants aux 10 axes joignant les paires de sommets diamètralement opposés.
- 20 rotations d'ordre 3, réparties en 10 sous-groupes d'ordre 3 correspondants aux 10 axes joignant les centres de faces opposées.
- 15 rotations d'ordre 2, d'axes joignant les milieux d'arêtes opposées.

Si P est une rotation d'ordre 5, Q d'ordre 3 et R d'ordre 2, P, Q, R engendrent le groupe de l'icosaèdre et sont liés par les relations :

$$P^5 = Q^3 = R^2 = QRP = I$$

Il résulte de ces relations que $P = R^{-1}Q^{-1}$, ce qui permet de ramener le nombre de générateurs à 2, comme pour les groupes étudiés précedemment.

Quelques précisions seront utiles à qui veut approfondir l'étude du groupe icosaèdral (*) :

(*) voir bibliographie : J.M. Arnaudiès.

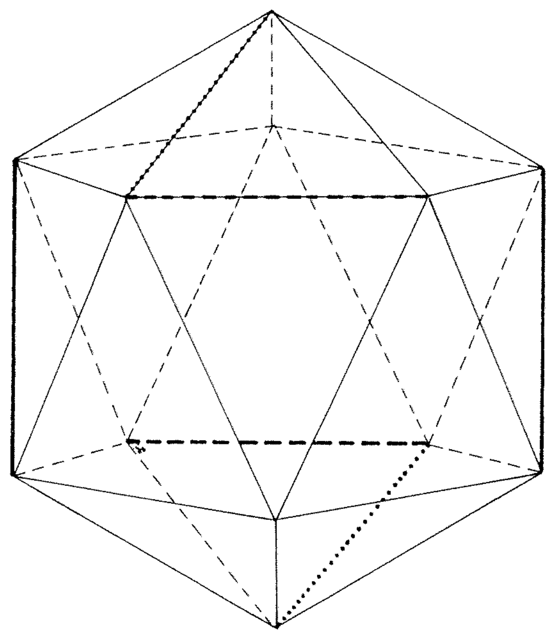
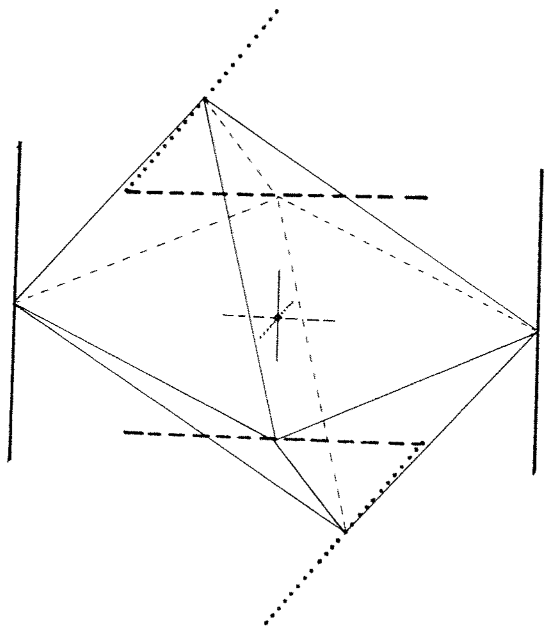


Fig 10 : l'isocaèdre et un système d'arêtes formant trièdre droit. Il y a cinq tels trièdres et les rotations du groupe les permutent par des permutations paires de S_5.

Fig 11 : le système d'arêtes α. Les milieux des arêtes forment un octaèdre, mais le groupe qui stabilise α est tetraèdral.



. Soit α l'ensemble des trois couples d'arêtes dont les directions forment un trièdre tri-rectangle (voir fig. 10 & 11). Les milieux de ces six arêtes forment un octaèdre, mais le groupe qui les stabilise, notons-le G_α, est tétraèdral. C'est un sous-groupe du groupe icosaèdral.

. Les trente arêtes se répartissent en cinq familles de six arêtes analogues à α. Soient α , β , ψ, ϕ, ε ces familles. Tous isomorphes à A_4, les groupes G_α , G_β , G_ψ , G_ϕ , G_ε sont conjugués deux à deux par les rotations d'ordre 5.

. Le groupe des isométries (déplacements et antidéplacements) de l'icosaèdre est isomorphe à S_5. Les familles α , β , ψ , ϕ , ε permettent de concrétiser l'isomorphisme : chaque isométrie de l'icosaèdre est caractérisée par son action sur l'ensemble α , β , ψ , ϕ , ε et peut ainsi être associée bijectivement à une permutation des 5 lettres.

Notons enfin que le groupe des rotations de l'icosaèdre est simple : ses seuls sous-groupes distingués sont {Id} et lui-même. Le vérifier sur l'icosaèdre l'est moins (simple) puisqu'il faut s'assurer qu'aucun des sous-groupes n'est invariant par conjugaison.
Il s'agit en fait d'un résultat général mis à jour par Galois à propos de l'équation générale de degré n : pour $n \geq 5$, le groupe alterné A_n est simple. Nous avons vu à propos du tétraèdre que ce n'est pas le cas de A_4.

5. Les sous-groupes finis de SO(3)

Précisons le résultat annoncé au début de cet article :

Tout sous-groupe fini de SO(3), ≠ {Id}, est soit :
. cyclique ou diédral (stabilisant un polygone plan)
. tetraèdral (stabilisant un tétraèdre)
. octaèdral (stabilisant un cube ou un octaèdre)
. icosaèdral (stabilisant un dodecaèdre ou un icosaèdre)

La preuve de ce résultat, dont nous ne donnerons que l'ossature, se fait en deux étapes : obtention de "l'équation aux classes" qui lie divers entiers caractéristiques du sous-groupe, dont son ordre, puis discussion de cette équation.

1 L'équation aux classes

Soit G un sous-groupe fini de SO(3), d'ordre $N > 1$. Si $Id \neq g \in G$, g est une rotation d'angle θ_g autour d'un axe qui coupe la sphère unité S^2 en deux points, pôles de la rotation dont ce sont les seuls points fixes sur S^2.
Notons p_g et p'_g ces deux points et $Pg = \{p_g, p'_g\}$.
Nous dirons que deux points x et y de S^2 sont équivalents si $g(x) = y$ pour une certaine rotation $g \in G$. Il s'agit bien d'une équivalence sur S^2, dont seule **la restriction à l'ensemble (fini) des pôles des rotations ≠ Id de G nous intéresse.**
Soient $C_1, \dots, C_q$ les classes d'équivalence de cet ensemble et, p étant un pôle, G_p le sous-groupe d'isotropie de p, formé des rotations de G qui le laissent fixe. Alors $G_p = \{Id\} \cup \{g \in G - \{Id\}$ tels que $p \in P_g\}$. p appartient à l'une des classes, disons C_i. Les éléments de C_i peuvent s'écrire :

$g_1(p), g_2(p) \dots, g_{r_i}(p)$ où $g_1 = Id$ et les g_i forment un système de représentants des sous-groupes conjugués de G_p dans G : les $G_{g_i(p)} = g_i G_p g_i^{-1}$. Tous ces sous-groupes ont le même ordre, soit n_i. On a donc :

$n_i \cdot r_i = N$ (le quotient de l'ordre d'un groupe par celui d'un de ses sous-groupes est le nombre de classes à gauche modulo ce sous-groupe).

En résumé :

- G a n - 1 éléments $\neq$ Id.
- chacun de ces éléments a deux pôles.
- le nombre d'éléments de G qui laissent fixe $p \in C_i$ est $n_i = N/r_i$.

D'où :

$$\underbrace{2(N-1)}_{\text{nombre de pôles}} = \sum_{i=1}^{i=q} \underbrace{r_i}_{\text{nombre de points de } C_i} \cdot \underbrace{(n_i - 1)}_{\text{nombre de pôles d'éléments} \neq \text{Id laissant fixe } p \in C_i}$$

L'équation aux classes proprement dite s'obtient en divisant par $N = n_i r_i$:

$$\boxed{2\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \sum_{i=1}^{i=q} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)}$$

(2) Discussion de l'équation

Comme $N \geqq 2$, le premier nombre est < 2. Comme $2 \leqq n_i \leqq N$, q ne peut valoir que 2 ou 3 (*). Les seules solutions sont donc :

i) $q = 2$, $n_1 = n_2 = N$

ii) $q = 3$, $2 = n_1 \leqq n_2 \leqq 3$, $n_2 \leqq n_3$ en détail :

a) $n_1 = n_2 = 2$, $N = 2n_3 \geqq 4$

b) $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 3$, $N = 12$

c) $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $N = 24$

d) $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $N = 60$.

(*) En effet :

$$2 \leqq n_i \leqq N \Longrightarrow 1 - \frac{1}{2} \leqq 1 - \frac{1}{n_i} \leqq 1 - \frac{1}{N} \Longrightarrow \frac{q}{2} \leqq \sum_1^q \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leqq q\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

L'inégalité de droite donne : $2 \leqq q$ et celle de gauche $q < 4$.

Etudions ces différents cas :

• $q = 2$. Toutes les rotations de $G - \{Id\}$ ont la même paire de pôles. Soit θ $(O < \theta < 2\pi)$ le plus petit des angles des rotations $\neq Id$ de G, avec $\theta = \theta_g$. g est d'ordre fini m, ce qui entraîne $\theta = 2\pi/m$. Si $h \in G - \{Id\}$, choisissons un entier $a > O$ tel que :

$a\theta \leq \theta_h < (a+1)\theta$. Soit $k = hg^{-a}$ qui appartient à G. Alors $O \leq \theta_k < \theta$, ce qui prouve que $\theta_k = O$ et $k = Id$. D'où : $h = g^a$.
Ainsi $m = N$ et G est un groupe cyclique d'ordre N, stabilisant un N . polygone.

• $q = 3$, $n_1 = n_2 = 2$, $N = 2n_3 \geq 4$. Soit $p \in C_3$. Comme ci-dessus, G_p est cyclique d'ordre $N/2$, formé des rotations stabilisant un n_3 polygone. Etant d'indice deux, G_p est distingué dans G qui stabilise dont le même polygone. D'après le § 1, G est inclus dans le groupe dièdral Dn_3. Mais $|G| = 2n_3$ d'où $G \cong Dn_3$.

• $q = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 3$, $N = 12$. Soient $C_2 = \{p_1, \ldots, p_4\}$ et $C_3 = \{q_1, \ldots, q_4\}$ où les p_i et q_i sont antipodaux sur S^2. G est inclus dans le groupe qui stabilise le tétraèdre C_2. G étant d'ordre 12, C_2 et son symétrique C_3 sont réguliers, et G est le groupe tétraèdral. ($G \cong A_4$).

• $q = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $N = 24$. C_3 est constitué de $24/4 = 6$ pôles répartis en trois paires sur un octaèdre. L'ordre de G étant précisément 24, celui-ci est régulier, et G est le groupe octaèdral. ($G \cong S_4$).

• $q = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, $N = 60$. Un argument analogue sur C_2, qui est constitué de 20 pôles indique que ceux-ci forment un icosaèdre régulier et que G est son groupe. ($G \cong A_5$).

Encore un mot à propos de l'icosaèdre : avec le dodecaèdre, ce sont les plus beaux des polyèdres, selon des avis très divers. Or ce sont les seuls dont le groupe est simple. Hasard ? Je suis tenté d'établir un lien : si l'on accepte que la beauté des polyèdres tient à leur étonnante régularité, les plus beaux doivent être les plus réguliers. Or tétraèdre, cube et octaèdre changent considérablement d'aspect lorsqu'on les tourne : le cube passe du carré à l'hexagone... alors que dodecaèdre et icosaèdre restent identiques à eux-mêmes : aucun des sous-groupes de leurs groupes (que notre oeil enregistre comme régularités) n'a de statut privilégié.

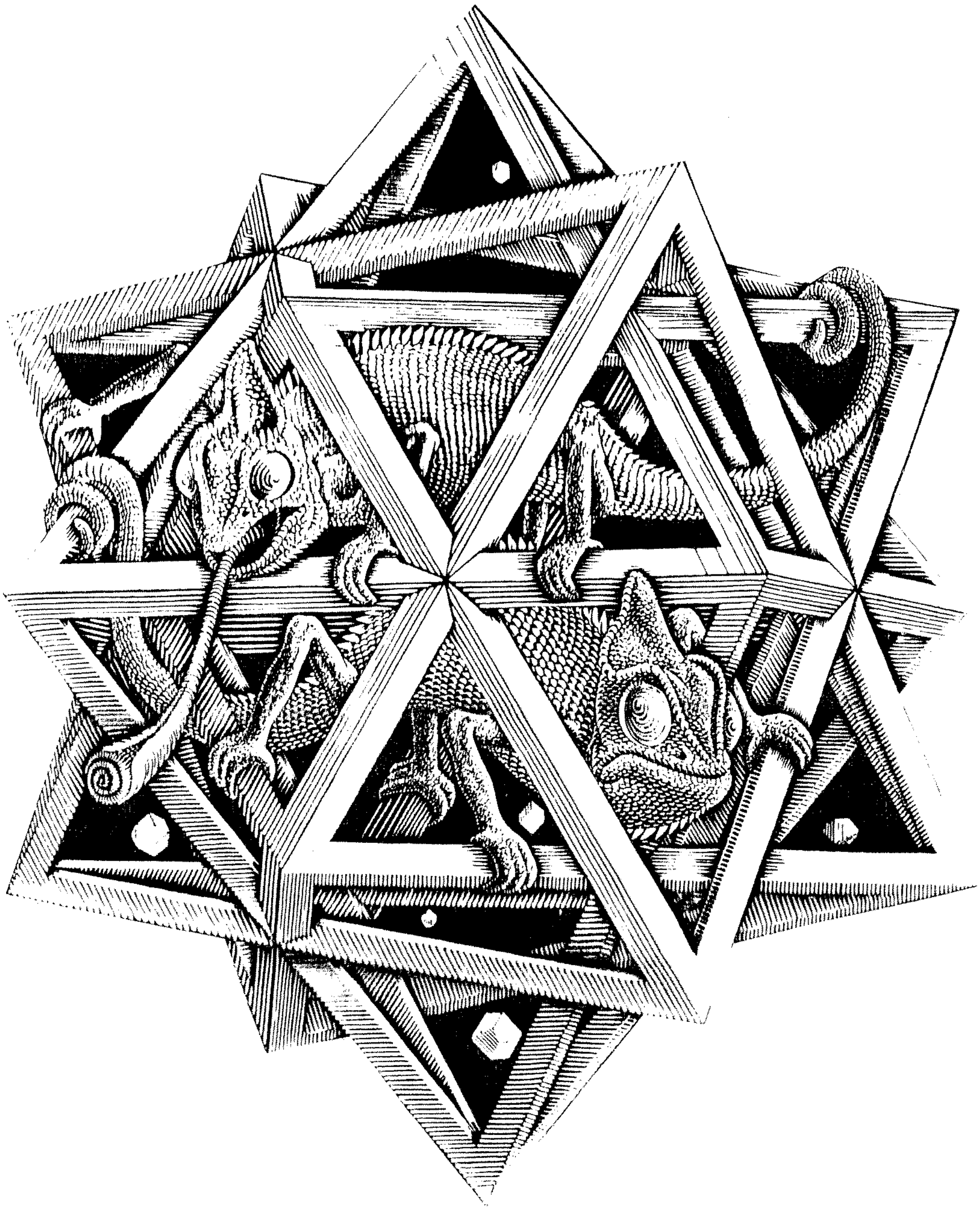
Bibliographie :

. Hermann WEYL : Symmetry (traduit sous le titre "Symétrie et mathématique moderne" chez Flammarion. 1964. Disponible à la bibliothèque de l'IREM)

. Joseph WOLF : Spaces of constant curvature

. A. BOUVIER et D. RICHARD : Groupes (Hermann)

. J.M. ARNAUDIES : Les cinq polyèdres réguliers et leurs groupes (C.D.U.)



ETOILES gravure sur bois de M.C. Escher (1948)

COURRIER

SPECIALISES OU NON ?

Nous avons reçu de Monsieur Jean-Paul FISCHER la lettre suivante, à propos du débat "Femmes et Mathématiques". Nous publierons la réponse du Dr Scherpereel, mis en cause par notre correspondant, dans un prochain numéro :

"Comme y invite la préface du n° 27 de l'Ouvert, je donne ci-après mon opinion sur la formule "dossier" :

1) Dans ce premier dossier, un personnage "étranger" à l'IREM a, apparemment, été invité à réagir. Se pose donc le problème du choix des intervenants "étrangers" : pourquoi, par exemple, avoir choisi un neuro-chirurgien plutôt qu'un neuro-psychologue ?

2) S'il n'y a qu'un intervenant "étranger", comme dans ce dossier, il doit offrir des garanties de neutralité. En effet, on sait bien que dans toutes les disciplines il existe des points de vue antagonistes. Ainsi, en neuro-psychologie, les localisateurs s'opposent aux anti-localisateurs (voir par exemple Hécaen et Lanteri-Laura, 1977). Et la lecture de l'article de B. Scherpereel me conduit à l'hypothèse * que celui-ci expose essentiellement des thèses du courant globaliste : ce courant était populaire du temps de Lashley, Goldstein,... mais plus récemment Hécaen et Lanteri-Laura (1977, p. 246) ont écrit qu'il n'en reste "que quelques notions, empiriquement fondées, inaptes, sans doute, à construire un modèle général,...".

3) Dans une revue de l'APMEP et de l'IREM il faudrait particulièrement veiller à la qualité des raisonnements. Là encore, ceux de B. Scherpereel ne m'ont pas convaincu :

* En annexe, je formule un certain nombre de questions que l'on peut se poser à propos de l'article de B. Scherpereel. L'hypothèse que j'exprime ici est celle qui me semble la plus simple pour fournir un ensemble cohérent de réponses à ces questions.

- d'abord, son raisonnement du type "il n'y a pas de preuves, donc la proposition est fantaisiste" est faux. On peut, par exemple, lui opposer la conclusion, juste et prudente, de Teszner et al. (1972, p. 448) : "Il est possible qu'un certain nombre de cerveaux relativement symétriques, se montreraient asymétriques avec une méthode plus précise" ;

- ensuite, lorsqu'il examine les "preuves" de la latéralisation préférentielle selon le sexe, il rejette celles de nature historique ou sociologique et dit que la neurophysiologie ne nous revèle rien. Mais a-t-il examiné toutes les preuves ? Je n'en suis pas sûr, car les principaux travaux sur le sujet me semblent être de nature neuro-psychologique, avec des techniques du type présentation dans les champs visuels droit ou gauche, audition dichotique, test de Wada, etc... et, précisément, aucune allusion n'est faite à la neuro-psychologie en général, ou à ces techniques en particulier.

Conclusion : Je pense que ce dossier particulier n'est pas bon (car mal "équilibré"). Mais m'efforçant de raisonner correctement, je n'en déduis pas pour autant que la formule "dossier" est mauvaise en général : je pense simplement avoir montré qu'elle peut présenter des risques.

Annexe : Questions que l'on peut se poser à propos de l'article de B. Scherpereel

1. Beaucoup d'auteurs ont parlé, et continuent à parler, de spécialisation hémisphérique : Pourquoi alors B. Scherpereel consacre-t-il 2 ou 3 lignes de son très court article à essayer de nous expliquer que les hémisphères ne sont en fait pas spécialisés, mais traitent de façon différente et complémentaire une même information ? De plus, la complémentarité n'est-elle pas incompatible avec l'idée de compétition introduite par la suite ?

2. B. Scherpereel écrit que "la séparation des tâches entre les deux hémisphères n'existe pas", et G. Lazorthès (1982, p. 87) que "En réalité, plusieurs fonctions, et parmi les plus spécialisées, appartiennent exclusivement à l'un ou à l'autre des deux hémisphères". Qui croire ?

3. B. Scherpereel se refère aux études de sujets split-brain pour montrer la coopération ou la compétition entre hémisphères. Mais ne peut-on pas aussi, comme le fait par exemple Bertelson (1982, p. 189), se référer à ces mêmes études pour montrer que l'un des hémisphères peut avoir le monopole d'une fonction ?

4. Selon Levy (1974, p. 137), 99,67 % des droitiers ont l'hémisphère gauche dominant pour le langage, alors que les non-droitiers ne sont que 56 % à être dans ce cas (et 44 % à avoir un hémisphère droit dominant pour le langage). Est-ce là à peine une nuance comme l'écrit B. Scherpereel (même si l'organisation des représentations des autres fonctions ne s'écartait pas du type habituel de latéralisation chez le droitier : cf. Hécaen, 1979, p. 135) ?

5. B. Scherpereel dit qu'il n'existe pas de base anatomique sérieuse à la latéralisation, et, par une remarque ironique, jette le discrédit sur nombre de travaux qui l'ont mise en évidence : Que reproche-t-il aux études de Geschwind et Levitsky (1968), Teszner et al. (1972), Witelson et Pallie (1973), Wada et al. (1975) ou Chi et al. (1977) * ?

6. B. Scherpereel pense qu'il est chimérique actuellement de vouloir dissocier un hémisphère masculin d'un hémisphère féminin. Mais Heschl (1878), il y a plus d'un siècle, n'avait-il pas déjà décrit une formation en coude entre le gyrus antérieur (transverse) temporal et le gyrus supérieur temporal se présentant plus communément sur le côté gauche et chez les hommes ? Et Wada et al. (1975), plus récemment, n'ont-ils pas observé une prédominance d'un large planum droit chez les femmes adultes ?

* Une analyse synthétique des différents travaux sur le sujet a été faite par Marshall (1980, p. 108 et suivantes). Citons, à titre d'exemple et parce qu'il est le seul à être en français, la conclusion (p. 448) de l'article de Teszner et al. : La concordance de nos résultats avec ceux de Geschwind et Levitsky, de Wada et des auteurs classiques, dans des lots de populations très variés, incitent fermement à considérer l'existence d'une asymétrie structurale au niveau des aires du langage en faveur de l'hémisphère dominant pour cette fonction.

Références :

Bertelson P. Lateral differences in normal man and lateralization of brain function. International Journal of Psychology, 17, 1982, 173-210.

Chi J.G. ; Dooling E.C. ; Gilles F.H. Left-Right Asymmetries of the Temporal Speech Areas of the Human Fetus. Archives of Neurology, 34, 1977, 346-348.

Geschwind N. ; Levitsky W. Human Brain : Left-Right Asymmetries in Temporal Speech Region. Science, 161, 1968, 186-187.

Hécaen H. Commentaires de l'article Les spécialisations du cerveau humain (par N. Geschwind). Pour la Science, n° 25, novembre 1979, page 135.

Hécaen H. ; Lanteri-Laura G. Evolution des connaissances et des doctrines sur les localisations cérébrales. Desclée de Brouwer, 1977.

Heschl R.L. Ueber die vorderer quere Schläfenwindung des menschlichen Grosshirns. Braumuller : Vienna, 1878. Rapporté dans Galaburda A.M. ; Le May M. ; Kemper T.L. ; Geschwind N. Right-Left asymmetries in the Brain. Science, 199, 1978, 852-856.

Lazorthès G. Le cerveau et l'esprit. Flammarion, Paris, 1982.

Levy J. Psychobiological implications of Bilateral Asymmetry. In Dimond S.J. ; Beaumont J.G. (eds). Hemisphere Function in the Human Brain. Wiley : New-York, 1974, 121-183.

Marshall J.C. On the Biology of Language Acquisition. In Biological Studies of Mental Processes (ed. : Caplan D.), MIT Press : Cambridge, 1980, 106-148.

Teszner D. ; Tzavaras A. ; Gruner J. ; Hécaen H. L'asymétrie droite-gauche du planum temporale : à propos de l'étude anatomique de 100 cerveaux. Revue Neurologique, 126, 1972, 444-449.

Wada J.A. ; Clarke R. ; Hamm A. Cerebral Hemispheric Asymmetry in Humans. Archives of Neurology, 32, 1975, 239-246.

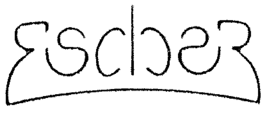
Witelson S.F. ; Pallie W. Left hemisphere specialization for language in the newborn Brain, 96, 1973, 641- 646."

LA SYMETRIE N'EST PLUS CE QU'ELLE ETAIT !

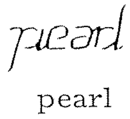
Tout le monde connaît les palindromes, mots ou textes dont les lettres prises en sens inverse redonnent la même chose ; exemple : "radar" ; "elu par cette crapule". Georges Perec en écrivit un de plus de cinq mille lettres en 1969 (*) qui commence par "Trace l'inégal palindrome. Neige . Bagatelle, ..." et finit par "... Haridelle, ta gabegie ne mord ni la plage ni l'écart." en étant passé par : "... Saluts : angiome. T'es si crâneur ! Rue . Narcisse ! Temoignas-tu !...".

On peut maintenant utiliser le fait que certaines lettres retournées en donnent d'autres (de même que le "6" retourné est un "9". Par exemple le "u" et le "n" s'échangent, ainsi que le "d" et le "p", le "b" et le "q" ; le "s", le "o" et le "i" sont leurs propres symétriques (avec un peu de bonne volonté) ; sans trop de déformations on peut faire correspondre "m" et "w" ainsi que "e" et "a". Le lecteur pourra faire le même travail avec les majuscules. Ces propriétés sont utilisées pour la marque de vêtements "NEWMAN", mais on peut trouver bien d'autres exemples comme "suissesses" qui se transforme en "assassins". Une étude analogue peut être faite à propos des symétries axiales, verticales ou horizontales, des lettres ou symboles.

Le mathématicien Scott Kim a porté cette recherche à son sommet en caligraphiant des mots quelconques, en général les noms et prénoms de ses amis et connaissances de façon à ce qu'ils se lisent aussi bien à l'endroit qu'à l'envers ou bien dans un miroir. Exemples :



escher

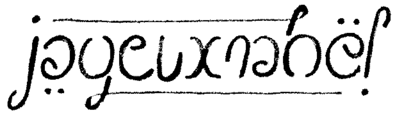


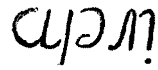
pearl

(*) OULIPO : La littérature potentielle. Collection "idées" chez Gallimard 1973.

On remarque, bien évidemment, qu'il ne s'agit pas de caractères d'imprimerie !

A la façon de Scott Kim je vous propose de décorer vos cartes de Noël d'un :



dont je fais cadeau à tous les membres de l'  par l'intermédiaire de l'  .

Vous pouvez bien sûr améliorer vos cartes de voeux à l'aide d'un dessin tel que celui de la couverture, dessin que j'ai copié, sans vergogne, dans les oeuvres de Gustave Verbeek (*). Ce dessinateur est né à Nagasaki de parents belges en 1867, il a étudié à Paris et a émigré vers 1900 aux U.S.A. où à la suite d'une erreur de transcription son nom passe de Verbeck à Verbeek. C'est dans le supplément dominical du "Herald" que de 1903 à 1905 il va publier au total 64 demi-pages de six images qui en réalité sont douze puisque chaque planche après avoir été lue dans le sens habituel doit être retournée pour avoir la suite de l'histoire ; la sixième image est en même temps la septième et la première est aussi la dernière. Cette série s'intitule bien normalement "upside-down" et il est dommage que Scott Kim n'ait pu lui fournir la graphie

puisqu'il est né une vingtaine d'années après la mort en 1937 à New-York de G. Verbeek.

(*) "Dessus-Dessous" par Gustave Verbeek édité par Pierre Horay.

Pour en finir avec ces curieuses symétries, signalons (mais je ne retrouve plus la référence) qu'il a été enregistré une bande magnétique qui s'écoute aussi bien à l'endroit qu'à l'envers grâce à un choix judicieux des sonorités. De même Mozart a, paraît-il, écrit une partition pour deux violons qui doit être jouée par deux violonistes se faisant face, la partition étant au centre. Un grand merci à celui ou à ceux qui me trouveront les références exactes.

JEAN LEFORT

INFORMATION

PREPARATION PAR CORRESPONDANCE DE LA LICENCE DE MATHEMATIQUES

Le Laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon assure un enseignement par correspondance de la licence de Mathématiques.

Cet enseignement est réservé aux étudiants qui sont dans l'impossibilité de suivre les cours.

Le diplôme requis est le DEUG A. Une dispense peut être accordée après examen.

Des renseignements plus détaillés peuvent être obtenus en écrivant à l'adresse suivante :

Enseignement par correspondance
Mathématiques
Faculté des Sciences et des Techniques
25030 BESANCON Cedex