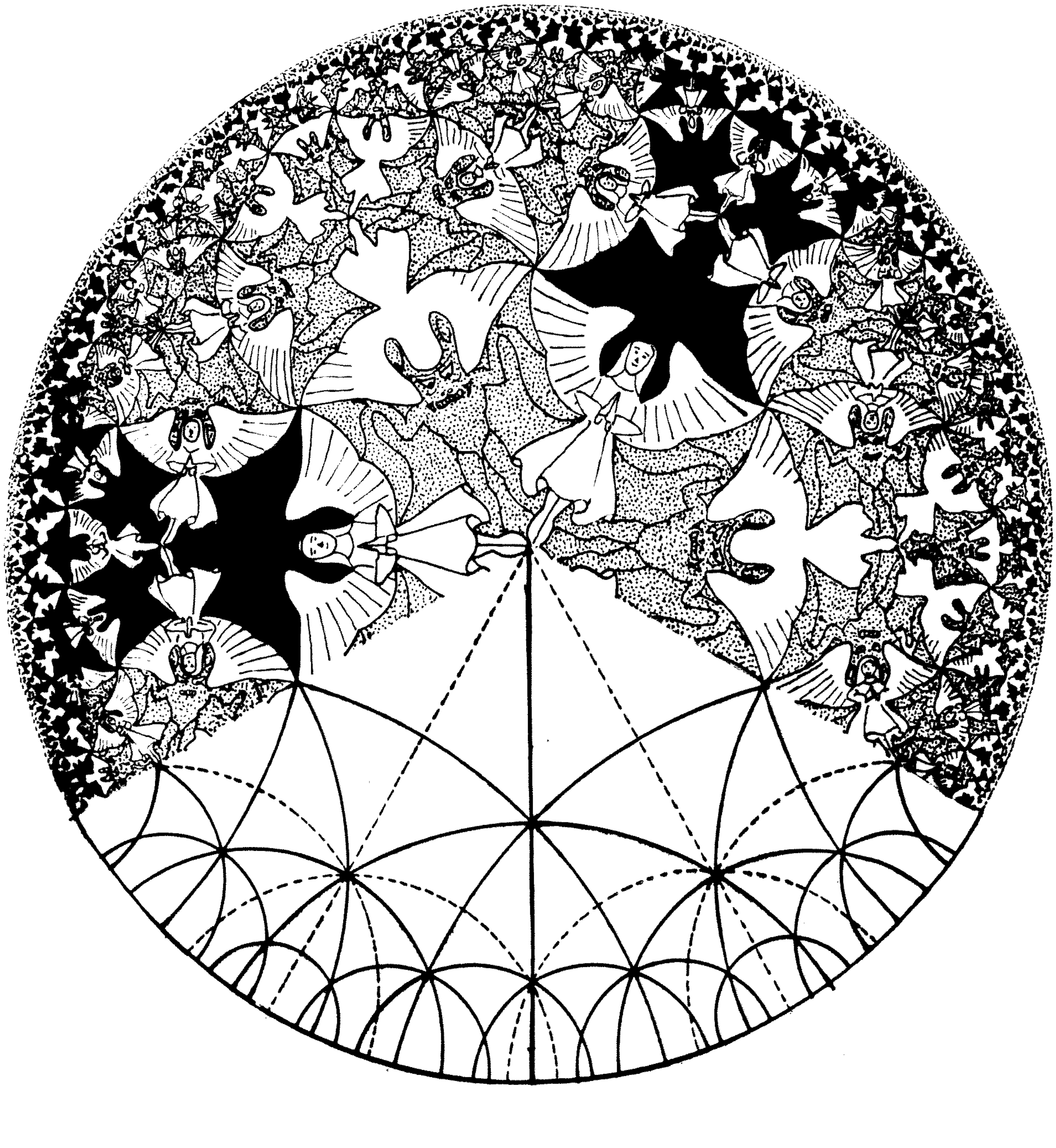
l'ouvert n°30

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L' IREM
DE STRASBOURG - MARS 83- ISSN 0290.0068



NOTRE COUVERTURE : D'après ESCHER : "Limite circulaire IV" 1960.

Pavage d'un plan hyperbolique par des anges et des diables. On peut considérer que le pavé est formé de la réunion d'un ange et d'un diable, mais on peut aussi supposer que chaque figure "s'inscrit" dans un triangle isocèle d'angles 60° - 45° - 45° (partie inférieure de la couverture). Les hauteurs relatives aux bases de certains de ces triangles ont été tracées en pointillés (voir article p. 44).

EDITORIAL

Comment savoir si les efforts déployés pour faire comprendre à des élèves une notion nouvelle ont été fructueux ? Les mêmes élèves ont-ils le niveau requis, franchi les seuils nécessaires, pour s'attaquer à un nouveau chapitre ?

Les moyens classiques de réponse ne manquent pas, fondés essentiellement sur l'aptitude des élèves à résoudre certains exercices. Cependant, réussite ou échec restent à interpréter, ce qu'autorise l'expérience accumulée au contact des élèves et des programmes.

Dans ces deux circonstances, le degré de compréhension d'un texte de difficulté bien dosée fournirait également une réponse significative, à condition de pouvoir le mesurer. A.GAGATSIS en fournit la possibilité, en page 17. Le procédé ressemble à un jeu de magazine à prétention littéraire, mais c'est un véritable instrument de mesure scientifique, et d'emploi simple.

*

Développer et ordonner un produit de polynômes. Tel est le genre de tâche qui semble au dessus des possibilités d'une calculatrice programmable, à première réflexion. Pourtant les techniques algorithmiques comme le polynôme d'interpolation de Lagrange, ne manquent pas.

J.SAMSON et R.SEROUL se sont penchés sur le problême et présentent en page 28 des algorithmes permettant de traiter les polynômes à une ou deux indéterminées, par un emploi judicieux de diverses bases dans l'espace des polynômes formels. Ce travail devrait contribuer à lever la forte inhibition qui règne parmi nous à propos des machines programmables. En se plaçant à un niveau plus élémentaire, pourquoi ne pas proposer en Seconde des énoncés du genre : "*Faire un programme pour développer* $P(X).(aX+b)$ *où P est de degré* ≤ 4." Plus facile à faire à la main et donc peu motivant, dira-t-on. Mais combien d'élèves de 2° développeraient-ils $(2X-3)^5$ sans se tromper ?

*

Au cours des journées pédagogiques organisées par Monsieur Sylvestre, les "*nouvelles limites*" ont suscité bien des discussions. La note que notre Inspecteur pédagogique nous a destinée justifie avec précision les modifications apportées. Dans quelle mesure concernent-elles nos élèves ? Question plus délicate, qui a poussé E. MEYER à tremper sa plume dans le vitriol. Il souhaite provoquer les lecteurs de l'OUVERT.

Ce dernier souhaite qu'il y parvienne !

S O M M A I R E

L'OUVERT

. responsable de publication : J. Lefort
. rédaction : G. Glaeser et E. Chaney
. correspondance à adresser à :
IREM de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
. participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 60.- F
. disponible à la Bibliothèque de l'IREM

L'APPREHENSION DES SITUATIONS PROBABILISTES CHEZ DES ELEVES DE 12 A 14 ANS

G. GLAESER

Tel est le titre d'une thèse de 3e cycle, soutenue à Strasbourg en juin 1982, par le chercheur mexicain Jésus ALARCON, dit "Papini".

Deux raisons, au moins, nous incitent à nous intéresser à ce travail :

D'abord le **thème** même abordé dans cette recherche concerne l'enseignant et le didacticien.

Cette thèse explore les idées (justes ou fausses) que de jeunes élèves peuvent avoir acquises à propos de certains phénomènes de hasard bien **avant d'avoir commencé à étudier les probabilités** en classe.

Lorsqu'on commence à leur enseigner cette question, ils ne sont certainement pas des "tables rases" : depuis l'enfance, chacun se familiarise avec des situations de pari, de tirage au sort, ou de décisions à prendre sous des conditions d'incertitude. L'enseignant ne peut fonder une pédagogie efficace que sur une connaissance des idées préconçues de ses élèves, qu'il cherchera à combattre ou à renforcer.

L'élaboration du concept de probabilité est beaucoup plus délicate que ne l'imaginent ceux qui en ont déjà assimilé les notions de base. L'humanité a eu beaucoup de mal à maîtriser les phénomènes de hasard, et à venir à bout des préjugés magiques qui y sont attachés. L'histoire du calcul des probabilités a connu des débuts difficiles, jalonnés par les noms de CARDAN, PASCAL, FERMAT, d'ALEMBERT, LAPLACE, KOLMOGOROFF etc... Cette science est longtemps restée le domaine privilégié des paradoxes et des conclusions erronées. Et il est raisonnable de penser que bien des difficultés qui ont jadis arrêté les plus grands savants, doivent encore gêner nos élèves.

En second lieu, ALARCON effectue son exploration en mettant en jeu une **méthodologie expérimentale** exemplaire. Il évite de formuler des conclusions qui ne résultent pas de faits bien établis. Il prévoit les objections raisonnables qui pourraient être faites, et il prend, à l'avance, des précautions expérimentales qui lui permettent de réfuter ces objections.

A mon avis, cette thèse constitue **le modèle actuel** de ce qui nous permet aujourd'hui d'affirmer que la didactique des mathématiques est devenue une science.

Je puis me permettre d'affirmer cela en toute modestie : il est vrai que cette thèse a été préparée sous la direction des didacticiens strasbourgeois. Mais ALARCON a mené cette recherche "**contre**" notre équipe : le candidat se montrait constamment plus exigeant et plus subtil que nous. Notre rôle s'est surtout borné à lui porter la contradiction. Mais, en fin de compte, c'est surtout "Papini" qui nous a influencé !

UN CONFLIT DE LOGIQUES

L'enseignement élémentaire des probabilités commence généralement par la description de situations de tirages avec remise, effectués sur des urnes contenant p boules blanches et q boules noires.

On postule alors, plus ou moins explicitement que :
toutes les réponses aux questions qui se posent dans ce contexte ne dépendent que de la proportion $p/(p+q)$, et non du nombre total $p+q$ des boules.

Or Alarcon a bien établi que ce postulat est loin de paraître évident au débutant ! Plus précisément, lorsque cette conviction commence à s'établir, elle reste encore **instable** : une légère modification dans la formulation des questions suffit à la faire chanceler (comme on le verra à propos d'une modalité de l'expérience de la fig. 2).

Un résultat étonne particulièrement : la persistance de stratégies de réponses qui ne se fondent pas sur la seule prise en compte du rapport $p/(p+q)$ se manifeste particulièrement chez des élèves considérés comme plus avancés que la moyenne de leurs camarades.

En fait, le début de l'apprentissage des probabilités fait apparaître un **conflit de logiques.**

Exemple : Au cours d'une partie de pile ou face, on peut parier pile. Mais si, d'aventure c'est face qui sort on n'y voit pas un scandale intellectuel.

Par contre, si l'on pose sur les touches d'une calculatrice l'addition 12+7, et si le résultat affiché est 15 on sait bien qu'il y a là un fait anormal.

Du point de vue ensembliste, il est parfaitement concevable que l'on reçoivent, au cours d'une partie de bridge, un jeu de 13 piques. Mais du point de vue probabiliste, cela tient du prodige ou de la supercherie.

Alarcon met en évidence une opposition entre les attitudes **compatibilistes** et les attitudes **probabilistes**. Les élèves qui adoptent les premières se refusent à choisir entre des alternatives "possibles", même si l'une est franchement plus probable qu'une autre. Ceux qui adoptent les secondes, s'intéressent à des rapports, et considèrent qu'un évenement dont la probabilité est très faible est "impossible". (Par exemple, ce sont ceux qui répondent "plutôt le sac 2" ou "forcément le sac 2" à la question de la fig. 4.)

L'EXPERIENCE

La recherche d'Alarcon a commencé par une **pré-expérience** où il a observé une quarantaine d'enfants d'âges divers, en entretien individuel. Il leur a présenté une trentaine de questions en les adaptant éventuellement d'un entretien à l'autre.

A la suite de ce travail, il a réalisé un questionnaire présenté à 6 classes de 5e et 6 classes de 4e tirées au hasard, dans le département du Bas-Rhin (soit 300 élèves environ).

Le questionnaire se présentait sous trois variantes (modalités) qui différaient par leur formulation ou par l'ordre de présentation des questions.

Voici par exemple, une des questions typiques à laquelle l'attitude compatibiliste permettait de répondre.

1. *Alain a pris l'un des deux sacs ci-dessous, et sans jamais regarder dans le sac...*

   Alain a tiré une boule : la boule sortie était BLANCHE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

   Alain a tiré une 2e fois : il a sorti une boule BLANCHE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

   Alain a tiré une 3e fois : il a sorti une boule NOIRE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

   Alain a tiré une 4e fois : il a sorti une boule BLANCHE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

   Alain a tiré une 5e fois : il a sorti une boule NOIRE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

   Alain a tiré une 6e fois : il a sorti une boule NOIRE puis il a remis la boule dans le sac et il a mélangé.

Quel sac Alain a-t-il pris ? Mettez une croix dans la case de votre choix.

SAC 1 SAC2

Fig 1

☐	☐	☐	☐	☐
forcément le sac 1	*plutôt le sac 1*	*pas de raison de préférer l'un des sacs*	*plutôt le sac 2*	*forcément le sac 2*

Mais considérons maintenant deux questions faisant intervenir les sacs ci-dessous :

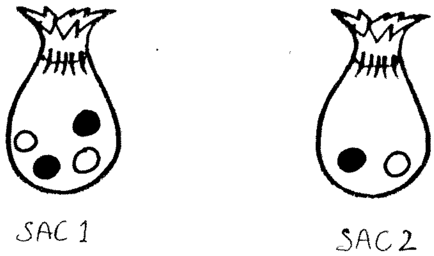


Fig 2

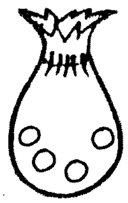
Supposons que l'on indique un tirage (avec remise) effectué dans l'un de ces sacs, et que l'on demande d'indiquer ce sac. Pour un probabiliste moyennement averti, il est inutile de prendre connaissance du tirage : les sacs sont **équivalents**, et par conséquent il n'y a aucune raison pour que ce soit plutôt l'un des sacs que l'autre.

Or l'expérience nous fournit le résultat suivant : si le tirage indiqué se réduit à une seule boule blanche, 98 % des élèves de 4e et 76 % de ceux de 5e fournissent la réponse correcte. Mais ces pourcentages tombent respectivement à 65 % et 52 % lorsque le tirage indiqué est de 4 boules blanches et 2 boules noires ! Tout se passe comme si des élèves croyaient qu'il est plus façile de tirer 4 boules blanches du sac 1 que du sac 2. C'est là, le **phénomène d'instabilité** signalé plus haut. Mais ce n'est là qu'un résultat local de cette thèse. En fait, le questionnaire harcèle les élèves interrogés par des questions en apparence analogues, mais faisant appel en réalité à des stratégies diverses.

Si le tirage comporte plus de boules blanches que noires, on peut préférer le seul sac qui contient plus de boules blanches que noires, sans faire appel aux proportions.

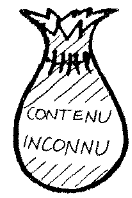
D'autres renseignements sont obtenus, grâce à des questions où le contenu de l'un des sacs est inconnu. Par exemple :

> *Edith a pris l'un des deux sacs ci-dessous, ensuite elle a tiré une boule sans regarder dans le sac ; la boule sortie était BLANCHE.*
>
> *Puis elle a remis la boule dans le même sac.*



SAC 1

FFVFV 10+13
FFVVV 16+14
FFVVF 7+0



SAC 2

Fig 3

Voici cinq affirmations : lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ? Mettre une croix dans la case correspondante.

Il est sûr que Edith a pris le SAC 1. vrai ☐ faux ☐

Il est impossibles que Edith ait pris le SAC 1. vrai ☐ faux ☐

Il n'est pas sûr que Edith ait pris le SAC 1. vrai ☐ faux ☐

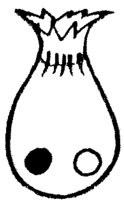
Il est plus probable que Edith a pris le SAC 1. vrai ☐ faux ☐

Il est tout aussi probable que Edith a pris le SAC 1 que le SAC 2. vrai ☐ faux ☐

ou encore :

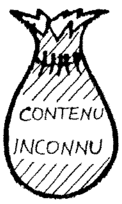
Le résultat des tirages a été : 6 NOIRES.

Quel sac Gérard a-t-il pris ? Mettez une croix dans la case de votre choix.



SAC 1

Nombre non négligeable de choix du sac "connu" en 4e.



SAC 2

Fig 4

	☐ forcément le sac 1	☐ plutôt le sac 1	☐ pas de raison de préférer l'un des sacs	☐ plutôt le sac 2	☐ forcément le sac 2
4e		11	18	19	7
5e		4	18	19	5

La méthode d'Alarcon évite de tirer des conséquence d'une **réponse particulière** à une **question isolée.** Au contraire, il met en évidence des comportements cohérents sur l'ensemble du questionnaire.

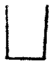
Et la formulation des questions permet d'aboutir à des conclusions très finies.

PROBABILITES ET CALCUL DES FRACTIONS

Voyons maintenant comment Alarcon refute une opinion fort répandue, parmi les enseignants et chez de nombreux chercheurs en pédagogie.

Il semble plausible que l'apprentissage des probabilités requiert une bonne maîtrise du calcul des fractions, et l'on affirme souvent que c'est là le seul prérequis exigé. Pour discuter ce point, Alarcon a présenté, au début de chacune des trois modalités, des questions inspirées du célèbre test du jus d'orange, de Gerald Noelting.

Catherine va préparer de la boisson au goût d'orange.

Au dessous de chaque carafe sont indiquées les quantités de jus d'orange et d'eau que Catherine va mélanger pour préparer la boisson :  *= 1 verre de jus d'orange ;*  *= 1 verre d'eau.*

Mettez une croix là où le mélange aura le plus fort goût d'orange.

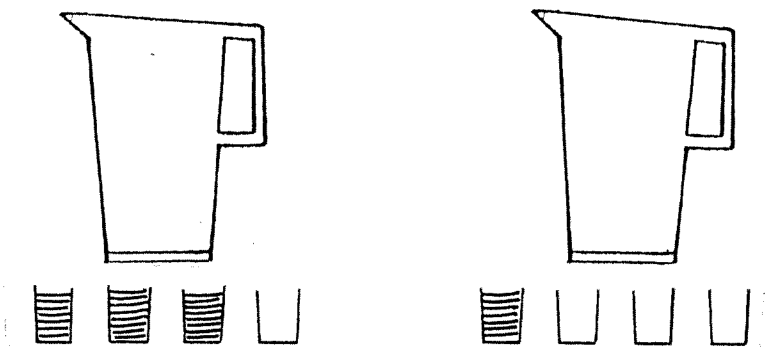


Fig 5

(une case "même goût" est également proposée)

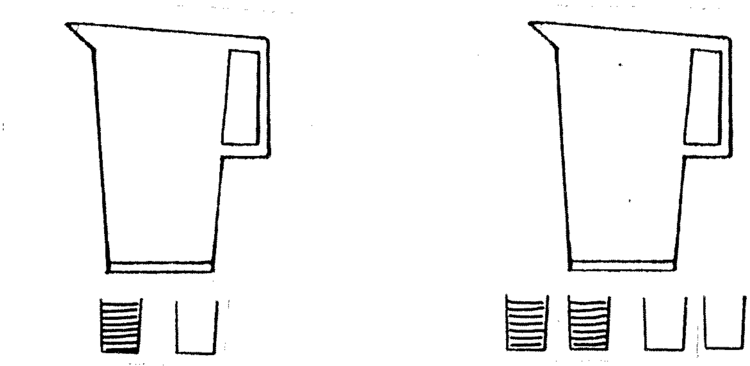


Fig 6

Pour permettre des comparaisons, l'expérimentateur a choisi les mêmes nombres p et q de verres de concentré d'orange et d'eau que de boules blanches et noires dans les sacs. Il apparaît que l'expérience à la Noelting est massivement réussie, alors que l'on observe beaucoup d'échecs significatifs aux épreuves de tirage aléatoire. L'expérience apporte une réfutation expérimentale convaincante de l'assertion selon laquelle une maîtrise du calcul des fractions suffit à comprendre le calcul des probabilités élémentaires.

Bien mieux, l'épreuve suivante est l'une de celles qui comporte une proportion d'échecs forte et inattendue, alors que les items portant sur des sacs de même composition, sont bien réussis dans l'ensemble.

Fig 7

		même goût dans les deux carafes	
4e	11	0	49
5e	19	0	27

SAC 1 SAC 2

Fig 8

	forcément le sac 1	plutôt le sac 1	pas de raison de préférer l'un des sacs	plutôt le sac 2	forcément le sac 2
4e	10	29	16	1	0
5e	10	18	9	8	0

L'EVOLUTION AVEC L'AGE

En règle générale, on constate un progrès des performances lorsqu'on passe des élèves de 5e en 4e. Mais Alarcon est trop exigeant pour conclure, lorsque les améliorations ne sont pas significatives (au sens statistique). Et, par ailleurs, il aurait fallu, dans ce cas faire intervenir les âges réels, sans s'en tenir uniquement à l'opposition 5e (environ 12-13 ans) et 4e (13-14 ans).

On se reportera en détail à la thèse pour connaître les cas où ce progrès est expérimentalement prouvé.

De toute façon, ce résultat heurte maintes idées reçues de la pédagogie officielle : une certaine **maturation** se constate, sur des points précis, entre 12 et 14 ans, à propos de notions qui **ne font l'objet d'aucun enseignement scolaire.**

Quoi qu'il en soit, ce compte-rendu sommaire de la thèse d'Alarcon est beaucoup trop rapide pour livrer toute la richesse de cette investigation.

A tous ceux qui désirent se faire une opinion solide, à propos des possibilités offertes par la méthode expérimentale, en matière d'enseignement, on ne peut que conseiller une lecture attentive de la thèse de Jésus ALARCON.

PREHISTOIRE DES PROBABILITES (*)

Sección Matemática Educativa del
Instituto Politécnico Nacional, de México

UN DÉCALAGE HISTORIQUE ÉTONNANT

Beaucoup d'auteurs sont d'accord pour situer la naissance des Probabilités, comme **discipline mathématique**, à la publication de "*Ars Conjectandi*" de J. Bernoulli, en 1713. En effet, c'est là que fut démontré pour la première fois un théorème de cette théorie : la "*loi des grands nombres*".

On rencontre aussi souvent l'idée que l'origine des Probabilités se trouve dans les problèmes liés aux jeux de hasard, vers le milieu du XVIIe siècle, au moment où ces problèmes firent l'objet d'une analyse mathématique systématique.

Sachant par ailleurs qu'aussi bien les jeux de hasard que d'autres situations et domaines d'études reliés aux probabilités étaient connus depuis la lointaine antiquité, nous pourrions nous interroger sur les raisons de ce décalage.

Le fait est que des problèmes qui contribuèrent fortement à la gestation et au développement des Probabilités surgirent au cours de traitements numériques de données et de résultats d'observation dans diverses sciences, ainsi que pour les besoins des compagnies d'assurance.

Dans l'antiquité, les premières données statistiques furent collectées lors des recensements. A plusieurs occasions, les dirigeants égyptiens, grecs et romains entreprirent de dénombrer la population, les productions agricoles, les impôts, etc.

En 1086, Guillaume le Conquérant effectua une étude économique complète et fit dresser des fichiers contenant les résultats du recensement général du pays, dans le but de mettre au point un système d'imposition. Et dans l'Europe du Moyen-Age, on fit des inventaires détaillés de la production agricole des principales seigneuries.

(*) Article traduit par F. Pluvinage

En 1268 et 1296, on organisa à Venise le recensement de la population et des logements, ainsi que la collecte de données sur les activités commerciales. A partir de 1421 on publia dans plusieurs centres d'affaires d'Italie des annuaires contenant ce type d'informations.

A Londres, au cours du XIIe siècle, on publia régulièrement des tableaux concernant la mortalité, et on conserva les registres de baptêmes, mariages et funérailles. Les tableaux de données furent introduits en période d'épidémies et leur contenu fut progressivement modifié de même que leur présentation : à partir de 1629, on trouve l'indication du sexe sur les registres de baptêmes et de funérailles ; depuis 1693, on indique la cause du décès, ce qui constitue une des premières et plus importantes additions d'information ; d'abord, on ne prit en compte que deux causes possibles : maladie ou accident ; plus tard, le nombre de causes indiquées s'accrut substanciellement.

Certaines notions sont issues de ce matériel statistique, comme la probabilité de mourir dans un laps de temps donné, la probabilité de dépasser un certain âge, etc.

Au XIVe siècle, les premières compagnies d'assurance maritime furent fondées en Italie et en Hollande. Ces compagnies procédèrent à des calculs de probabilités, puisqu'à des risques plus élevés correspondaient des primes supérieures.

Comment se fait-il que l'accumulation de tout ce matériau n'ait pas pu accélérer la naissance de la Théorie des Probabilités ?

DES OBSTACLES EN TRAVERS DES PROBABILITÉS ?

L'historien Kendall suggère quatre raisons susceptibles d'avoir fait obstacle à un développement du calcul des probabilités plus précoce :

a) la superstition des joueurs,
b) des barrières religieuses ou morales mises en travers de l'idée de hasard,
c) l'absence d'une notion d'évènements fortuits,
d) l'absence d'analyse combinatoire.

Si l'on examine la première raison possible selon Kendall, on peut y voir un obstacle à l'objectivité de l'observation des résultats issus d'un jeu de hasard, et, puisque l'on suppose souvent que les Probabilités viennent de l'étude de tels jeux, l'hypothèse paraît raisonnable. Mais une telle superstition aurait-elle pu avoir effet sur une période aussi longue ? Rappelons que, lors de fouilles archéologiques, on a trouvé des indices montrant que les jeux de hasard se pratiquaient déjà 5000 ans avant Jésus-Christ.

On utilisait des osselets, qui sont les os de l'astragale d'animaux. Les osselets ont une forme presque symétrique et sont susceptibles de tomber sur l'une de leur quatre faces. Expérimentalement, on a pu constater, avec les osselets d'un musée, que la fréquence d'obtention des diverses faces est assez stable. Un des jeux de la Grèce antique consistait à lancer quatre osselets ; pour les joueurs, il s'agissait d'obtenir que les quatre faces supérieures soient distinctes.

Les premiers dés connus ont été mis à jour à Tepe Gawra, au nord de l'Irak, et datent du troisième millénaire avant Jésus-Christ.

A Pompéi et à Kerch, on trouva de fines plaques carrées, dont les faces étaient marquées à la façon de dés ; elles datent des débuts de l'ère chrétienne.

Le jeu de cartes était également pratiqué dans divers pays depuis des époques reculées.

Les cartes actuelles apparurent en France au XIVe siècle et leur utilisation donna très vite lieu à des jeux d'argent.

Les dés, puis les cartes, servirent parfois à tirer au sort ainsi qu'à établir des prédictions.

Ainsi, depuis des temps éloignés, les jeux de hasard se répandirent de par le monde entier.

Qui plus est, on connaît des calculs, datant du dixième ou onzième siècle, pour déterminer le nombre de résultats possibles quand on lance plusieurs dés.

Ceci signifie qu'en dépit des superstitions, les jeux de ce type purent donner lieu à des études. De ce fait, l'absence d'analyse combinatoire indiquée en d) peut raisonnablement être envisagée comme responsable du retard en question, et l'on pourrait avancer comme argument que, jusqu'au début du développement et de l'utilisation du calcul différentiel et intégral, la combinatoire fut l'outil de base en calcul des probabilités.

Mais à nouveau surgit le doute: si nous remontons à l'époque des grecs, nous trouvons que les pythagoriciens disposaient déjà d'éléments de combinatoire ; par exemple, ils connaissaient déjà les nombres triangulaires : 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, et ils savaient que, plus généralement, $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + n$.

En Inde, 200 ans avant Jésus-Christ, on utilisait déjà ce que nous appelons aujourd'hui le triangle de Pascal, et on était également familiarisé avec l'identité

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Au XIIe siècle, on décrivait des méthodes pour calculer des nombres de permutations et de combinaisons ; et, au XIVe siècle, des chinois dressaient des tables de coefficients binomiaux. A la même époque également, des juifs entreprirent des recherches systématiques de problèmes combinatoires.

A tout cela, il convient d'ajouter les travaux de Michael Stifel (1486-1567) "*Arithmetica Integra*", Jérôme Cardan (1501-1576) et Niccolo Tartaglia (1499-1557) "*Tratato Generale di Numeri e Mesure*", entre autres précurseurs de la grande oeuvre "*Ars Combinatoria*" de Leibniz (1646-1716), qui apporte une contribution importante au développement de cette partie des mathématiques. (1)

Ainsi, nous dirions que ce qui a pu différer les Probabilités n'est pas l'absence d'analyse combinatoire, mais plutôt le défaut d'idées combinatoires.

NOUVELLE APPRÉHENSION DE LA RÉALITÉ

La question se pose par conséquent de savoir en quoi les quatre aspects suggérés par Kendall purent alors exercer une influence déterminante pour retarder l'apparition de cette théorie.

Nous pourrions avancer une présentation plus générale, en disant que l'obstacle a pu être l'attitude de principe devant les phénomènes du monde.

En ce sens, la Renaissance marque un pas important, avec l'accroissement des sciences naturelles et l'augmentation du rôle des observations et des expérimentations. Le problème de trouver des méthodes adéquates pour traiter les résultats d'observations et, en particulier, d'estimer les erreurs aléatoires qui les entachaient commença à revêtir de l'importance. A titre d'exemple, citons l'opinion de Thomas Hobbes (1588-1679) dont la thèse fut qu'il était impossible, par l'observation seule, de déterminer toutes les circonstances qui donnent lieu à un phénomène particulier, car elles sont en quantité illimitée.

L'évolution progressive des points de vue face aux phénomènes du monde résulte du fait que, chaque fois que les nécessités de la vie pratique requièrent de développer une nouvelle théorie ou l'une de ses parties, de nouvelles idées surgissent, des notations appropriées sont inventées, des superstitions sont surmontées et les barrières dressées devant le développement de cette science sont rompues.

Dans le cas qui nous intéresse, il fallait, en prélude à la théorie des probabilités, cette attitude différente face aux phénomènes du monde caractéristique de Galileo Galilei (1564-1642) en son temps. Effectivement, il en arriva à soupçonner le calcul des probabilités et à résoudre quelques problèmes auxquels d'autres mathématiciens s'étaient intéressés depuis longtemps. Galilée fut un des premiers chercheurs à poser dans ses écrits le problème des erreurs dans les mesures, et arriva à la conclusion qu'elles sont inévitables. Bien qu'il ne soit pas parvenu à résoudre quantitativement ou analytiquement la question, beaucoup de ses propositions et observations influencèrent le développement de ce problème.

Nous fixons la genèse de la Théorie des Probabilités à l'instant de la conjonction de certaines étapes dans l'évolution opératoire en arithmétique et algèbre, dans l'évolution des représentations et dans l'évolution de l'observation et de l'expérimentation.

Nous ajouterons que ce moment présente des caractéristiques sociales et économiques bien déterminées, lesquelles se reflètent, de l'une ou l'autre forme, dans la façon selon laquelle surgit la nouvelle théorie. Par exemple : à la période de l'écroulement du régime féodal et de l'apparition de la bourgeoisie, on commença à effectuer des investigations statistiques beaucoup plus étendues, quand le commerce et les transactions financières, en particulier ce qui concernait les opérations des actuaires, se furent développés ; c'est à la suite de cela en effet que se mirent en place de nouvelles institutions, que s'accrurent les entreprises manufacturées et, d'une façon générale, que l'on assista à une époque de croissance des villes.

Chez les privilégiés de cette société, les jeux de hasard occupaient une place importante. En jouant aux cartes et aux dés, on gagnait ou on perdait de l'or et des pierres précieuses, des palais et des domaines, des chevaux de race et des parures précieuses.

Ce fut le temps en lequel naquit la Théorie des Probabilités.

Ce qui précède peut expliquer l'attribution de cette émergence aux jeux de hasard.

En réalité, la majorité des premiers problèmes dans cette théorie furent associés aux jeux de hasard **dans la forme mais non dans l'essence.** La procédure même de résolution de certains problèmes posés y compris avant le XVe siècle nous indique qu'en réalité, les mathématiciens de ces époques qui s'intéressaient à eux **ne traitaient pas** d'une expérience **réelle** de jeu, mais de questions purement théoriques.

Les jeux de hasard furent utilisés comme bons **représentants** de nombreuses autres situations de caractère aléatoire auxquelles on s'intéressait. Ils jouèrent leur rôle dans le développement de la théorie des probabilités parce qu'ils se prêtent à une simplification raisonnable, à un format convenable et à une terminologie simple, avec l'aide desquels on peut décrire beaucoup de phénomènes et résoudre divers problèmes.

Aujourd'hui même, à des fins méthodologiques et didactiques, nous utilisons souvent la référence aux jeux pour une première présentation des probabilités, parce que dans un tel contexte il est très facile d'illustrer comment se calcule la probabilité de tel ou tel résultat.

De fait des jeux pratiques de hasard motivèrent des problèmes qui stimulèrent le développement de la théorie des probabilités. Mais nous soulignons que ce ne fut pas le stimulus décisif. Nous nous occupons de jeux de hasard lorsque, de plus, se présentent des problèmes analogues dans d'autres champs de l'activité humaine.

Quand bien même certains des domaines reliés à la Théorie des Probabilités étaient découverts depuis des époques lointaines, aucun des résultats donnés ensuite ne fut fondé, en quelque forme que ce soit, sur une loi. Ce ne fut que vers la moitié du XVIIe siècle que les fondations furent mises en place, lorsque les problèmes touchant cette théorie commencèrent à être le thème d'une analyse mathématique en quête de règles générales rigoureuses régissant leurs solutions.

BIBLIOGRAPHIE

- "A History of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace".
  I. Todhunter.
  Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1965.

- "Bueno, y qué... ?"
  Y. Jurguin
  Editorial MIR, Moscou, 1973.

- "Hasard ou Stratégie ? Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistiques".
  Arthur Engel, Tomas Varga et Willi Walser.
  Traduit et adapté par Alain Couton. Paris, O.C.D.L., 1976. (*)

- "Probability Theory. A Storical Sketch"
  L. E. Maistrov.
  Translated and edited by Samuel Kotz.
  Academic Press, New York and London, 1974.

(1) Signalons également la contribution de Pascal pour sa solution des deux problèmes posés par le chevalier de Méré et la correspondance qu'il échangea avec Fermat à ce sujet.

(*) Peut être consulté et emprunté à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

ONT-ILS COMPRIS ?

Athanassios GAGATSIS (*)

Les professeurs de mathématiques se plaignent que les élèves qui savent additionner, soustraire, multiplier et diviser sont incapables de résoudre les problèmes impliquant ces opérations. On admet parfois que cette incapacité est due au fait qu'ils ne savent pas lire correctement les énoncés en ce domaine. Les mathématiques ont non seulement une symbolisation qui leur est propre mais aussi une syntaxe bien particulière.

Or, il est possible pour les professeurs de construire en quelques minutes un test fiable concernant la compréhension de la lecture, sans recours aux analyses subjectives ni aux manipulations statistiques :
le test de "closure".

Cet article est destiné à montrer que ce test est applicable aux textes mathématiques et qu'il permet d'en mesurer la compréhension de la part des élèves, ou d'évaluer son degré de difficulté.

1. LE TEST : TROUER LE TEXTE

Le test de closure a été inventé par W.L. Taylor en 1953. Il le définit comme : "Un outil psychologique permettant de jauger le degré de correspondance totale entre les habitudes d'encodage d'émetteurs et les habitudes de décodage des récepteurs".

Ce test consiste à supprimer un mot sur cinq dans un texte. Les élèves doivent reconstituer le texte original. Il faut noter que seul le mot existant dans le texte original est considéré comme correct. Accepter les synonymes conduit rapidement à des divergences entre correcteurs et allonge considérablement le travail. Ce risque et ce surcroît ne sont même pas compensés par un avantage appréciable.

(*) Athanassios GAGATSIS a préparé une thèse de 3e cycle en didactique des mathématiques à Strasbourg. Il est assistant au département de mathématiques de Thessaloniki en Grèce.

Le score d'un élève est égal au pourcentage de trous convenablement remplis. L'indice de difficulté d'un texte est égal à la moyenne des scores obtenus par un échantillon représentatif d'une population donnée.

L'évaluation de la compréhension se fait en distinguant au moins deux scores : le *score "informationnel"* qui se rapporte à la compréhension du texte et le *score "langue"* qui se rapporte à la compétence du lecteur vis à vis de n'importe quel texte rédigé dans sa langue maternelle. Pour quelques textes mathématiques et quand le nombre des trous le permet, nous distinguons un troisième score : le *score "mathématique"*.

Le score "informationnel" est le pourcentage des trous substantifs, verbes (à l'exception des verbes "être" et "avoir"), attributs, symboles "objets" (2, n, e,...) et symboles "verbaux" (=, > V, F,...) correctement remplis.

Le score "mathématique" est le pourcentage des trous symboles relationnels (+, $\cup$, ...), symboles des variables, nombres en position d'adjectif et symboles fonctionnels non précisés (f, p, ...) correctement remplis.

Le score "langue" est le pourcentage de tous les autres trous correctement remplis (articles, conjonctions, prépositions, adjectifs épithètes, verbes auxiliaires, etc...).

Pour clarifier toutes ces considérations théoriques, prenons deux exemples. Il s'agit de parties de deux textes de logique.

2. EXEMPLES DE TESTS

TEXTE A (*)
PROPOSITIONS LOGIQUES

Une proposition composée consiste .... deux propositions simples jointes .... un connecteur. Si le .... est "et" la proposition .... est appelée une conjonction. .... proposition numérique "3 < .... et x < 8" .... une conjonction. En remplaçant .... mot "et" par le ....$\wedge$, elle s'écrit .... < x $\wedge$ x .... 8 ou 3 < .... < 8.

(*) On trouvera en appendice la liste ordonnée des mots ou symboles supprimés.

En logique .... lettre p représente la .... proposition simple et la .... q la seconde proposition .... de telle manière que .... $\wedge$ q représente une ....

Si le connecteur est .... la proposition composée est .... une disjonction. La proposition .... x > 5 ou .... = 5 est une .... En remplaçant le mot .... par le symbole $\vee$ .... s'écrit x > .... $\vee$ x = 5 .... x $\geqslant$ 5. En .... p $\vee$ q représente .... disjonction.

Une conjonction est .... si et seulement si .... deux propositions simples sont .... Si l'une ou .... autre proposition est fausse .... si les deux sont .... la conjonction est fausse.

.... disjonction est vraie si .... une ou l'autre .... propositions simples est vraie .... si les deux sont .... Si les deux propositions .... fausses, la disjonction est ....

Dans le score "informationnel" nous comptons les trous suivants : {connecteur, symbole, 3, >, lettre, conjonction, "ou", appelée, disjonction, "ou", 5, logique, vraie, vraies, fausses, vraies, fausse}.

Dans le score "mathématique" nous comptons les trous suivants : {x, x, p, x}.

Dans le score "langue" nous comptons les trous suivants : {en, par, composée, la, est, le, la, première, simple, numérique, elle, ou, une, les, l', ou, une, l', des, ou, sont}.

TEXTE B
L'USAGE DES VARIABLES

Outre les fonctions propositionnelles ...... y a d'autres .... contenant des variables qui .... notre attention, les fonctions .... fonctions désignatives ou descriptives. .... sont des expressions qui, ... qu'on y remplace .... variables par des constantes, ... des désignations ("descriptions") de .... Par exemple, l'expression : .... x + 1 est .... fonction descriptive parce que .... obtenons la description d' .... certain nombre (par exemple .... nombre 5) dès que .... remplaçons la variable "x" .... une constante logique quelconque (........ exemple "2").

Outre la .... de constantes aux variables .... existe un autre moyen .... obtenir des propositions en .... des fonctions propositionnelles. Considérons .... une des lois fondamentales .... l'arithmétique, la loi .... commutative de l'addition :

.... des nombres quelconques x .... y, x + y .... y + x.

Dans le score "informationnel" nous comptons les trous suivants : {expressions, méritent, dites, deviennent, choses, substitution, partant, dite, =, 2}.
Nous avons compté l'item "2" dans ce score parce que la nature et le nombre des trous ne permet pas la considération d'un score mathématique.

Dans le score "langue" nous comptons les trous suivants : {il, ce, dès, une, nous, un, le, nous, par, par, il, d', partant, l', de, pour, et}.

3. RÈGLES DE SUPPRESSION DES MOTS

En ce qui concerne la suppression des mots quelques règles simples doivent être respectées pour assurer l'uniformité des mesures.

1) En principe, on considère comme mot tout ensemble séparé des autres par des espaces blancs (U.N.E.S.C.O., 1972). Dans plusieurs recherches faites à Liège, dont les importants travaux de G. Henry et de G. de Landsheere, les formes élidées ont été traitées séparément : "l'équation" y est donc considéré comme deux mots. Cette convention simplifiée a d'ailleurs été adoptée dans le présent travail.
2) Deux mots unis par un trait d'union ne sont traités séparément que s'ils peuvent être utilisés isolément dans la langue. On traitera donc co-président comme un seul mot, mais bateau-mouche comme deux mots. Dans ce dernier cas, le trait d'union devra être maintenu dans le texte mutilé.
3) En principe, on considère comme "unité mathématique-symbolique" chaque signe qui apparaît dans le langage mathématique et qui n'est pas un mot, un signe de ponctuation ou un dessin, par exemple : $\sqrt{}$, 2, x, +, ^{3}, %, etc...

4) Un signe graphique dans lequel toutes les parties sont reliées est au plus une unité mathématique-symbolique, par exemple : X, 2, y, a, etc...
5) Un signe graphique dans lequel toutes les parties ne sont pas reliées est au moins une unité, par exemple : =, $\rangle$, sont chacun une unité mathématique-symbolique ; x^2, 35 sont chacun deux unités ; (α), 153 sont chacun trois unités, etc...
6) Les unités mathématique-symboliques sont ordonnées d'après leur prononciation généralement suivie, par exemple : $\frac{1}{5}$ est prononcé : un sur cinq ; par conséquent les unités ci-dessus sont ordonnées comme suit : 1, —, 5 ; dans l'expression $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ les unités sont ordonnées comme suit : x, =, -, b, +, -, $\sqrt{}$, b, ², -, 4, a, c, ————, 2, a, etc...

4. UNE EXPERIENCE EN CLASSE DE PREMIÈRE

Nous avons proposé aux élèves de première deux tests de closure portant sur les deux textes entiers dont nous avons présenté deux parties au paragraphe 2. Le tableau 1 montre comment la population expérimentale est partagée :

TABLEAU 1

Population expérimentale

	Propositions logiques	L'usage des variables	Total
1B	13	12	25
1C	17	17	34
1D	8	9	17
Total	38	38	76

Nous avons regroupé les résultats dans les tableaux qui suivent.

TABLEAU 2

Scores moyens (%)

Classe	Informationnel		Langue		Mathématique		Closure (global)	
	Texte A	Texte B	Texte A	Texte B	Texte A	Texte B	Texte A	Texte B
1eB	63	33	76	72	78	67	72	60
1eD	81	35	82	73	94	69	84	61
1eC	78	45	82	79	91	73	82	68
popul. totale	74	39	80	75	87	70	79	64

TABLEAU 3

Ecarts-types (%)

Classe	Informationnel		Langue		Mathématique		Closure (global)	
	Texte A	Texte B	Texte A	Texte B	Texte A	Texte B	Texte A	Texte B
1eB	12,80	9,94	8,02	5,23	16,25	14,07	10,34	6,78
1eD	7,39	5,74	2,71	4,59	3,54	12,87	2,88	4,74
1eC	6,18	11,80	5,68	5,23	5,66	11,47	3,26	6,87
popul. totale	11,69	11,32	6,64	6,05	12,01	12,59	8,14	7,45

En nous basant sur les tableaux 1 et 2, nous pouvons faire les constatations suivantes :

1) Les écarts-types qui correspondent aux scores "informationnel" sont toujours plus élevés que les écarts-types qui correspondent aux scores "langue" et "closure" (global). Ainsi le score "informationnel" fait une meilleure discrimination des élèves que le score langue et le score global au test de closure.

2) Nous observons une *"stabilité"* du score moyen "langue" par rapport au niveau scolaire ou par rapport au changement du texte. Au contraire, les scores "informationnel" varient sensiblement quand on passe d'une classe à l'autre ou d'un texte à l'autre. Ainsi le score "informationnel" distingue d'une part les classes et d'autre par les deux textes.

3) Le score "mathématique" discrimine assez bien les élèves, les classes et les textes. Néanmoins il faut noter que le nombre d'items "mathématiques" qui appartiennent aux deux textes examinés est petit de telle façon qu'on doit interpréter avec attention ce résultat.

5. A VOUS DE JOUER !

Exploité intensivement aux Etats-Unis depuis une trentaine d'années déjà, le test de closure n'a pas encore fait l'objet de recherches approfondies dans les pays de langue française.

Certes, la technique des textes mutilés est connue depuis longtemps, mais elle trouve ici une systématisation nouvelle pour pouvoir juger de la difficulté des textes ou de la compréhension de la lecture.

C'est pour cela que son application dans des populations françaises est souhaitable.

Les professeurs qui auraient envie d'essayer ce test dans leurs classes doivent suivre quelques consignes simples :

1) Il faut inviter les élèves à parcourir d'abord tout le texte mutilé, sans combler les lacunes. Ils acquièrent ainsi une connaissance globale du contenu.

2) Les textes sur lesquels on applique ce test doivent compter au moins 250 mots ou symboles. Les tests doivent donc contenir 50 trous au moins.

3) La règle de suppression des mots doit être la même pour tous les textes utilisés (voir § 3). Cela permet la comparaison entre les différents textes mathématiques.

4) La comparaison du degré de difficulté des textes se base sur le score "informationnel" que nous avons introduit. Pour un niveau scolaire bas (5e, 6e) les enseignants peuvent se contenter du score global du test de closure. Il faut d'ailleurs noter que les chercheurs et les professeurs Américains basent leur évaluation de la compréhension sur le score global.

5) L'espace typographique des lacunes doit être le même indépendamment du mot ou du symbole supprimé.

Ce test peut d'ailleurs être appliqué par les professeurs dans la plupart des textes rencontrés au cours de leur enseignement. Et puisque dans les exemples que nous avons traités dans le § 2, nous avons utilisé des textes de logique - rarement rencontrés dans l'enseignement secondaire- nous prenons un autre exemple :

TEXTE C

RESOLUTIONS GRAPHIQUES

Résoudre graphiquement l'équation .... (x) = ... équivaut à déterminer les .... des points d'intersection .... la courbe d'équation .... = f (x .... avec l'axe O .... De même, la résolution .... de l'équation f .... x) = g .... x) équivaut à .... détermination des abscisses des .... d'intersection des courbes .... équation y = f .... x) et y .... g(x).
.... résoudre graphiquement l'inéquation .... (x) > .... revient à déterminer les .... des points de la .... d'équation y = ... (x) situés .... dessus de l'axe .... x.

Un autre usage du test de closure comme *instrument de recherche* consiste à tester quelques mots mathématiques qui sont très importants pour la compréhension d'un texte. En effet, il arrive que dans un texte particulier, les mots les plus importants soient :

- des connecteurs logiques (si, alors, donc, ou, et, ...),
- des adverbes (uniformément, réciproquement,...),
- des adjectifs (semblables, équivalent, continu, ...).

Toute erreur sur ces mots dénote de la part du lecteur une incompréhension essentielle. Il est donc important de prendre en compte les réactions du lecteur face à ces mots. Dans ce cas là, on peut utiliser la *suppression sélective* au lieu de la procédure régulière (suppression de chaque 5e mot). Ainsi, le test de closure se prête à des utilisations pratiques précieuses pour l'enseignement, dès la classe de 6e.

<u>Liste des mots ou symboles supprimés</u>

TEXTE A :

en ; par ; connecteur ; composée ; la ; x ; est ; le ; symbole ; 3 ; $<$; x ; la ; première ; lettre ; simple ; p ; conjonction ;
"ou" ; appelée ; numérique ; x ; disjonction ; "ou" ; elle ; 5 ; ou ; logique ; une ;
vraie ; les ; vraies ; l' ; ou ; fausses ;
Une ; l' ; des ; ou ; vraies ; sont ; fausse.

TEXTE B :

il ; expressions ; méritent ; dites ; Ce ; dès ; deviennent ; choses ; 2 ; une ; nous ; un ; le ; nous ; par ; par ;
substitution ; il ; d' ; partant ; l' ; de ; dite ; pour ; et ; = .

TEXTE C :

f ; 0 ; abscisses ; de ; y ;) ; x ; graphique ; (; (; la ; points ; d' ; (; = ;
Enfin ; f ; 0 ; abscisses ; courbe ; f ; au ; 0.

BIBLIOGRAPHIE

1) DE LANDSHEERE G. "Le test de closure" Labor, Bruxelles, 1973

2) GAGATSIS A. "Test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques" I.R.E.M. de Strasbourg, 1980

3) GAGATSIS A. "Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques" Thèse de 3e cycle, novembre 1982, I.R.M.A. de Strasbourg

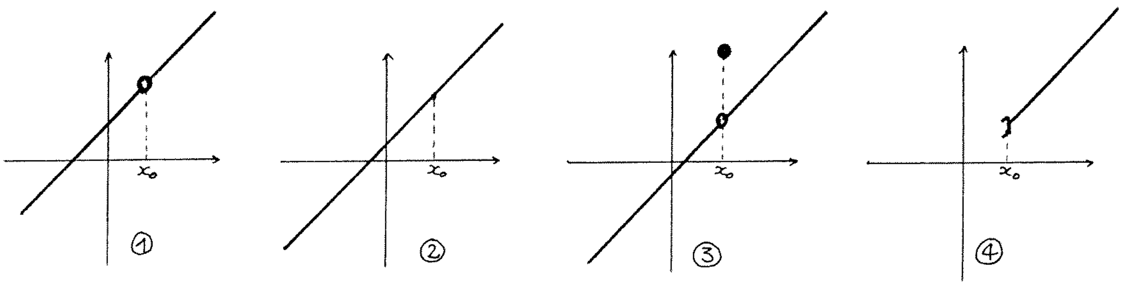
4) HENRY G. "Comment mesurer la lisibilité" Paris, F. Nathan, 1975, Collection "Education 2000".

Y' A DES LIMITES

Etienne MEYER

Cet article se veut polémique, provocateur, exagéré et exaspérant. La définition des limites dans l'enseignement secondaire français vient de changer, mais les professeurs de mathématiques, eux, ne changent pas... Toujours aussi pinailleurs, rigoristes, à la recherche des cas pathologiques et tératologiques. Oh, je vois ce que ça va donner, toutes ces mises en garde des élèves contre les cas singuliers, tous ces pièges ; on ne va parler que de ça et puis, plus tard, on donnera les bonnes vieilles recettes de recherche de limite et les trucs pour "lever les indéterminations" (Debout ! les damnés de nos écoles). Et dans tout ça, qu'auront appris les élèves ? Que les maths sont emmerdantes, que les profs de maths sont décidément des gens à part (des gens forts ! ils ont compris des choses tellement difficiles qu'on ne peut les expliquer...) et que les limites, c'est compliqué (ça, par contre, c'est juste : il en aura fallu du temps aux mathématiciens pour parvenir au début du XIXe siècle à une vague notion de limite).

Bon sang ! regardez donc où sont les difficultés ! où sont les erreurs ! $\frac{\to 0}{\to 0} = 1$; $(\to 0) \times (\to +\infty) = 0$; $(\to +\infty) - (\to +\infty) = 0$. (Ne dites pas que c'est écrit de façon incorrecte, je le sais. Mais je sais aussi que vous avez tous compris de quoi je veux parler. Et l'essentiel, c'est de se faire comprendre, non ?) Et bien avant ça, n'avez-vous jamais eu la réflexion suivante : *"mais, Monsieur, la limite n'est jamais égale à 1"* ? Croyez-vous que les questions suivantes vous permettent de comprendre quelque chose à la notion de limite ?



FOR I=1 TO 4 , ETUDIER LIM$_{x_0}$(F)

C'est vrai que les réponses à ces questions dépendent de la date à laquelle elles sont posées (avant ou après mai 81, oh pardon, septembre 82) et dépendent de la définition précise de f. C'est vrai aussi, que nous, enseignants, devont pouvoir répondre à ces questions. Celles-ci n'ont d'intérêt que pour tester la pertinence de la définition choisie par rapport aux objectifs à atteindre. Mais aller enquiquiner les élèves, qui ne veulent pas tous devenir prof de math, avec ces questions, avant qu'ils ne soient familiarisés avec la recherche de limites dans des cas non triviaux, c'est tout simplement débilitant, déssechant, répugnant. Et je serais à peine moins dur pour les questions du genre $\lim\limits_{x \to o} \frac{x^2}{x}$ et toutes celles qui s'y ramènent.

Bien plus formateur (passionnant ?) est la recherche des approximations successives de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de o (oui, les développements limités !) ou la recherche de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+3)\sqrt{x+3} - x\sqrt{x}\right]$ (attention, ça c'est désormais pour la terminale...)

Je crois savoir qu'une des raisons pour lesquelles la définition des limites a été changée (les limites, elles, n'ont pas changé) est l'espoir de diriger l'enseignement des maths vers un enseignement plus intelligent, moins truffé de trucs incompris. Eh bien, c'est raté, et en partie à cause de leur fameuse condition sur l'ensemble de définition ($E \cup \{o\}$...) : que de bêtises proférées à ce sujet, et voici que l'on parle de point adhérent, de point d'accumulation, d'application définie sur $\mathbb{Q}$, ...

Ceci dit, comme chacun de nous, si j'avais eu à faire les programmes, j'aurais fait autrement : j'aurais commencé par une notion de continuité globale, puis une définition des limites pour les cas où la question se pose ; une définition bien évidemment différente de celles des anciens programmes et bien différente de celle des nouveaux programmes, ; une définition bien à moi, géniale, qui éliminerait toutes les difficultés, et que les élèves comprendraient du premier coup.

E.M.,

professeur de mathématique

CALCULATRICES ET CALCUL LITTERAL

Jean SAMSON & Raymond SEROUL

0. INTRODUCTION

Je voudrais développer le polynôme

$$P(X) = (X+1)^4(3X^2-6X+7) + (9X^3-3X^2+12X-11)^2 - 5(X+31)^5.$$

Je dispose d'une calculatrice programmable : puis-je lui confier ce calcul ? Cette question, posée tout de go à une personne qui n'a pas réfléchi au problème amène en général la réponse suivante : "comment une calculatrice, qui ne peut manipuler que des nombres décimaux, pourrait-elle effectuer des calculs portant sur une entité abstraite telle un polynôme !".

Une première réflexion montre que cette objection n'est pas fondée. En effet, la notation aX^2+bX+c n'est qu'un moyen mnémotechnique (extraordinaire, il faut bien l'avouer) pour manipuler le triplet (a,b,c) selon certaines lois. Par conséquent, une calculatrice doit être capable de s'occuper de ce calcul. Reste à trouver une méthode.

Que peut donc faire une calculatrice ? Si je lui fournis un nombre réel x, elle peut calculer le nombre $P(x)$. La question devient donc : peut-on reconstituer le polynôme $P(X)$ à partir d'un nombre fini de ses valeurs ? La réponse est donnée par le théorème que voici.

1. LA THEORIE DU POLYNOME D'INTERPOLATION DE LAGRANGE

THEOREME 1. **Soient $x_0,x_1,\dots,x_n$ n+1 nombres distincts. Etant donnés $y_0,y_1,\dots,y_n$ quelconques, il existe un unique polynôme $L(X)$ de degré $\leqslant n$ qui satisfait les n+1 égalités $L(x_i) = y_i$.**

Cet unique polynôme porte le nom de polynôme d'interpolation de LAGRANGE.

DEMONSTRATION : Il y a unicité, car deux polynômes de degré $\leqslant n$ et qui coïncident en n+1 points distincts sont égaux. Prouvons maintenant l'existence. Posons

$$\omega(X) = (X-x_0)\dots(X-x_n),\ \omega_k(X) = \omega(X)/(X-x_k)\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Le polynôme $\omega_k(X)/\ \omega_k(x_k)$ est de degré n et vérifie les égalités $\frac{\omega_k(x_i)}{\omega_k(x_k)} = \delta_{ki}$. Par conséqu nt, le polynôme

$$(1)\qquad L(X) = \sum_{0}^{n} y_k\ \omega_k(X)/\ \omega_k(x_k)$$

répond à la question.

La première idée qui vient à l'esprit consiste à utiliser la formule (1) pour reconstituer le polynôme P(X) à partir de ses valeurs. L'inconvénient est que cette formule est très coûteuse du point de vue des calculs. Par bonheur, il existe une autre présentation du polynôme d'interpolation de LAGRANGE, présentation parfaitement adaptée aux calculs et qui est dûe à NEWTON. N'oublions pas qu'à cette époque les calculs se faisaient entièrement à la main ! Voici donc la version de NEWTON.

Soit P(X) un polynôme de degré n. Donnons-nous n+1 nombres **quelconques** $x_0,\ldots,x_n$. Si nous posons

$$P(x_0,X) = (\ P(X)-P(x_0)\ )/(X-x_0)$$

nous définissons un polynôme $P(x_0,X)$ de degré n-1 qui vérifie l'identité

$$P(X) = P(x_0) + P(x_0,X)(X-x_0).$$

Recommençons en posant

$$P(x_0,x_1,X) = P(x_0,x_1)\ /\ (X-x_1).$$

Cela définit un polynôme $P(x_0,x_1,X)$ de degré n-2 qui vérifie l'identité

$$P(X) = P(x_0) + P(x_0,x_1)(X-x_0) + P(x_0,x_1,X)(X-x_0)(X-x_1).$$

Nous pouvons continuer ainsi jusqu'au polynôme constant

$$P(x_0,\ldots,x_{n-1},X) = P(x_0,\ldots,x_{n-1},x_n)$$

et obtenir l'identité

$$(2)\qquad P(X) = \sum_{0}^{n} P(x_0,\ldots,x_k)\ C_k(X)$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$C_0(X) = 1,\ C_1(X) = X-x_0,\ldots,C_n(X) = (X-x_0)\ldots(X-x_{n-1}).$$

Les coordonnées $P(x_0,\ldots,x_k)$ du polynôme P(X) dans la base des $C_k(X)$ s'appellent les **différences divisées** du polynôme P(X). La question qui se pose maintenant est : peut-on trouver un algorithme qui permette de calculer ces différences divisées et qui soit plus économique que la détermination des polynômes $P(x_0,X),P(x_0,x_1,X)\ldots$

Si l'on suppose $x_0,\dots,x_n$ **deux à deux distincts**, la réponse est immédiate. En effet, la définition même des polynômes $P(x_0,\dots,x_k,X)$ montre que l'on a les égalités

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&P(x_0,x_k) = (P(x_k)-P(x_0))/(x_k-x_0) \qquad 1 \leqslant k \leqslant n\\
&P(x_0,x_1,x_k) = (P(x_0,x_k)-P(x_0,x_1))/(x_k-x_1) \qquad 2 \leqslant k \leqslant n\\
&\quad \text{et plus généralement}\\
&P(x_0,\dots,x_i,x_k)=(P(x_0,\dots,x_{i-1},x_k)-P(x_0,\dots,x_{i-1},x_i))/(x_k-x_i)\\
&\quad i < k \leqslant n.
\end{aligned}
$$

Lorsque les x_k ne sont pas tous distincts, les formules précédentes ne s'appliquent pas toujours. Aussi aurons-nous besoin des résultats que voici.

PROPOSITION 2. **Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$ et pour tout nombre réel x on a**

(4) $\quad P(x(k+1)) = p^{(k)}(x)/k!$

où l'on a posé pour simplifier $x(k+1) = (x,\dots,x)$ (k+1 fois).

DEMONSTRATION. Posons $A = (x_0,\dots,x_{k-1})$ et $x = x_k$. Par définition même, nous avons l'identité

$$P(A,X) = P(A,x) + P(A,x,X)(X-x).$$

Dérivons k fois par rapport à X. La formule de Leibniz montre que l'on a

$$P(A,X)^{(k)} = P(A,x,X)^{(k)}(X-x) + k\,P(A,x,X)^{(k-1)}.$$

(attention : ne pas confondre la dérivée k-ième de $P(A,X)$ avec le polynôme $P^{(k)}(A,X)$ obtenu à partir de $P^{(k)}(X)$). Cela nous donne la congruence

$$P(A,X)^{(k)} \equiv k\,P(A,x,X)^{(k-1)} \qquad \text{mod } X-x.$$

Nous avons donc

$$P(X)^{(k)} \equiv k\,P(x,X)^{(k-1)} \equiv k(k-1)\,P(x,x,X)^{(k-2)} \equiv \dots$$

d'où finalement la congruence

$$P(X)^{(k)} \equiv k!P(x(k+1)) \qquad \text{mod } X-x.$$

Il ne reste plus qu'à faire X=x pour obtenir le résultat désiré.

PROPOSITION 3. **Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$ et toute permutation s on a l'égalité**

(5) $\quad P(x_{s(o)},\dots,x_{s(n)}) = P(x_o,\dots,x_n).$

DEMONSTRATION. Il suffit de se borner au cas où s est l'une des transpositions $(0,1),(1,2),\ldots,(k-1,k)$. L'identité

$$P(x_{s(o)},\ldots,x_{s(k-1)},X) = P(x_0,\ldots,x_{k-1},X)$$

se démontre facilement par récurrence à partir de l'identité

$$P(A,x,y,X) = \left[(y-x)P(A,X)+X(P(A,x)-P(A,y))+x\,P(A,y)-y\,P(A,x)\right] / (y-x)(X-x)(X-y)$$

identité obtenue en appliquant deux fois de suite (3). Par conséquent, l'égalité (5) est vraie lorsque $s \neq (k-1,k)$. Si l'on a $s = (k-1,k)$, l'égalité (5) est une conséquence immédiate de (3).

COROLLAIRE 4. **Si l'on a $x \neq y$, on a (avec des notations évidentes) l'égalité**

(6) $\quad P(A,x,B,y,C) = \left[P(A,B,y,C) - P(A,x,B,C)\right] / (y-x).$

En effet, on a $P(A,x,B,y,C) = P(A,B,C,x,y)$. Il ne reste plus qu'à utiliser (5).

2. UN ALGORITHME POUR DÉVELOPPER UN POLYNÔME A UNE INDETERMINÉE

Soit $P(X)$ le polynôme à développer. Choisissons arbitrairement $n+1$ nombres distincts $x_0,\ldots,x_n$, où n désigne le degré de $P(X)$. En nous appuyant sur (2) et (3) nous obtenons l'algorithme suivant :

- première étape : calcul des $y_k = P(x_k)$
- deuxième étape : calcul des différences divisées $P(x_0,\ldots,x_k)$ $0 \leqslant k \leqslant n$, au moyen des égalités (3).
- troisième étape : on exprime dans la base canonique $1,X,\ldots,X^n$ le polynôme d'interpolation (2).

Précisons un peu ce que va être cette troisième étape. A la fin de la deuxième étape , le polynôme $P(X)$ est exprimé dans la base des $C_k(X)$. Nous allons successivement exprimer dans la base canonique les polynômes

$P_0 = P(x_o)C_o$, $P_1 = P_o + P(x_o,x_1)C_1,\ldots,$ $P_n = P_{n-1} + P(x_o,\ldots,x_n)C_n$.

Pour cela, supposons connus les coefficients des polynômes C_{k-1} et P_{k-1}, soit

$$C_{k-1} = \sum_0^n c_i\,X^i \quad \text{et} \quad P_{k-1} = \sum_0^n a_i X^i.$$

Puisque nous avons $C_k = C_{k-1}(X-x_{k-1})$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous aurons donc

$$C_k = -x_{k-1}c_o + \sum_1^n (c_{i-1}-c_i x_{k-1})X^i$$

$$P_k = \sum_0^n (a_i + P(x_0,\dots,x_k)c_i)\ X^i.$$

Algorithme pour développer un polynôme à une indéterminée.

Cet algorithme permet d'exprimer dans la base canonique un polynôme dont on connaît les valeurs en n+1 points. Il nécessite 4(n+1) mémoires $x_o,\dots,x_n, y_o,\dots y_n, c_o,\dots,c_n\ a_o,\dots,a_n$.

0) (initialisation) données : $n \geqslant 1$ et $x_o,\dots,x_n$ deux à deux distincts.

1) (calcul et mise en mémoire des $P(x_k)$)

faire $y_o = P(x_o), y_1=P(x_1),\dots,y_n = P(x_n)$.

2) (calcul des différences divisées selon (3). A la fin de ce numéro, on a $y_o = P(x_o), y_1 = P(x_o,x_1),\dots,y_n = P(x_0,\dots,x_n)$).

```
pour i = 1,...,n faire
|  pour j = i,...,n faire
|  |  y_j = (y_j-y_{i-1})/(x_j-x_{i-1})
|  refaire
refaire
```

3) (on connaît maintenant le polynôme P(X) dans la base des C_k. Pour $k = 0,\dots,n$ on exprime les polynômes C_k et P_k dans la base canonique)

(initialisation $P_o = P(x_o)$, $C_o = 1$)

faire $a_o = y_o,\ a_1 = 0,\ \dots,\ a_n = 0$

$c_o = 1\ ,\ c_1 = 0,\ \dots,\ c_n = 0$

(changement de base)

```
pour k = 1,...,n faire
|  pour i = n,...,1 (dans cet ordre !) faire
|  |  c_i = c_{i-1} - c_i x_{k-1}
|  |  a_i = a_i + y_k c_i
|  refaire
|  faire
|     c_o = -x_{k-1} c_o
|     a_o = a_o + y_k c_o
refaire
```

4) le polynôme P(X) est le polynôme $\sum_0^n a_i\ X^i$.

3. UN TRES JOLI THEORÊME

Si $y_o, \ldots, y_n$ sont des nombres arbitraires, les parties 2) et 3) de l'algorithme que nous venons de décrire déterminent un polynôme $P(X)$ tel que l'on ait $P(x_k) = y_k$. Si les x_k ainsi que les y_k sont des entiers, il n'est pas vrai que le polynôme $P(X)$ soit à coefficients entiers. Précisons cela. Faisons le choix

$$x_o = 0,\ x_1 = 1,\ \ldots,\ x_n = n.$$

Si nous posons

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$$

$$\Delta^2 P(X) = \Delta(\Delta P(X)) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$$

$$\ldots\ldots$$

une récurrence à l'aide de (6) montre facilement que l'on a

$$P(0,1,\ldots,k) = \Delta^k P(0) \,/\, k!.$$

L'identité (2) se réécrit donc

$$P(X) = P(0)+\Delta P(0)X/1! + \Delta^2 P(0)X(X-1)/2! +\ldots+ \Delta^n P(0)X(X-1)\ldots(X-n+1)/n!. \tag{7}$$

Cette identité va nous permettre de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 5. **On a l'inclusion $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ (c'est-à-dire P prend des valeurs entières sur les entiers) si et seulement si $P(0), \Delta P(0), \ldots, \Delta^n P(0)$ sont tous des entiers.**

La démonstration est immédiate à partir de (7) et des remarques suivantes :

- si P est à valeurs entieres, il en est de même des polynômes $\Delta P, \Delta^2 P, \ldots, \Delta^n P$.
- les polynômes $C_k(X)/k!$ prennent des valeurs entières sur les entiers (penser aux coefficients du binôme).

Remarque : on peut éviter de faire appel à la théorie du polynôme d'interpolation de LAGRANGE pour obtenir l'identité (7). Pour cela, on écrit le polynôme P dans la base des C_k, soit $P = d_o + d_1 C_1 + \ldots + d_n C_n$. Il est clair que l'on a $d_o = P(O)$. Ensuite, on remarque que pour $k \geqslant 1$, on a $\Delta C_k = C_{k-1}$. Par conséquent, on a $\Delta P = d_1 + d_2 C_1 + \ldots + d_n C_{n-1}$, d'où $d_1 = \Delta P(0)$, etc.

4. LA THEORIE DU POLYNOME D'INTERPOLATION DE HERMITE

Le problème de l'interpolation à la HERMITTE est le suivant. On se donne des nombres réels $x_0, \ldots, x_r$ deux à deux distincts ainsi que des entiers $m_o, \ldots, m_r$. Existe-t-il un polynôme $H(X)$, de degré $\leqslant n$, avec $n+1 = (m_o+1)+\ldots+(m_r+1)$, et tel que l'on ait les égalités

$$(8)\quad \begin{cases} H(x_o) = y_o^{(o)}\ ,\ H'(x_o) = y_o^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ H^{(m_o)}(x_o) = y_o^{(m_o)} \\ H(x_r) = y_r^{(o)}\ ,\ H'(x_r) = y_r^{(1)}\ ,\ \ldots\ ,\ H^{(m_o)}(x_r) = y_r^{(m_o)}. \end{cases}$$

étant entendu que les $y_i^{(j)}$ sont eux aussi donnés à l'avance.

THEOREME 6. **Il existe un polynôme H(X) et un seul qui soit de degré $\leqslant n$ et qui vérifie les égalités (8).**

DEMONSTRATION. Il y a unicité, car la différence entre deux solutions est divisible par $(X-x_o)^{m_o+1}(X-x_1)^{m_1+1}$. Prouvons alors l'existence d'une solution. Pour cela, considérons la famille de polynômes

$$\psi_k(X) = (X-x_o)^k(X-x_1)^{m_1+1}\ldots(X-x_r)^{m_r+1}.$$

Puisque $x_1,\ldots,x_r$ sont des zéros d'ordre de multiplicité $m_1+1,\ldots m_r+1$ du polynôme ψ_k il en résulte que l'on a $\psi_k^{(i)}(x_j) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $0 \leqslant i \leqslant m_j$.

D'autre part, nous avons

$$\psi_o(x_o) \neq 0$$
$$\psi_1(x_o) = 0,\ \psi_1'(x_o) \neq 0$$
$$\psi_k(x_o) = 0,\ \psi_k'(x_o) = 0,\ \ldots,\ \psi_k^{(k-1)}(x_o) = 0,\ \psi_k^{(k)}(x_o) \neq 0.$$

Il est donc possible de trouver des constantes $a_o,\ldots,a_{m_o}$ telles que le polynôme

$$H_o(X) = a_o\,\psi_o(X) + \ldots + a_{m_o}\,\psi_{m_o}(X)$$

satisfasse la première ligne des conditions (8).

On détermine ensuite de manière analogue des polynômes $H_1,\ldots,H_r$ qui satisfont les autres lignes des conditions (8). Il est alors clair que le polynôme

(9) $\quad H(X) = H_o(X) + \ldots + H_r(X)$

est une solution.

Cet unique polynôme porte le nom de polynôme d'interpolation de HERMITE.

Bien entendu, la formule (9) n'est qu'une formule théorique. Il est hors de question de l'utiliser dans un calcul pratique.

Montrons sur un exemple comment on peut procéder pour déterminer le polynôme $H(X)$ de manière économique.

Soit à déterminer le polynôme $H(X)$ de degré $\leqslant 7$ qui satisfait les conditions

$$\begin{cases} H(0) = 1 & H'(0) = 0 & H''(0) = 0 \\ H(1) = 2 & H'(1) = 7 & \\ H(2) = 129 & H'(2) = 448 & H''(2) = 1344 \end{cases}$$

En vertu de l'identité (2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} H(X) = H(0) &+ H(0,0)X + H(0,0,0)X^2 + H(0,0,0,1)X^3 \\ &+ H(0,0,0,1,1)X^3(X-1) + H(0,0,0,1,1,2)X^3(X-1)^2 \\ &+ H(0,0,0,1,1,2,2)X^3(X-1)^2(X-2) + H(0,0,0,1,1,2,2,2)X^3(X-1)^2(X-2)^2. \end{aligned}$$

Considérons le tableau suivant (où (0012) désigne $H(0,0,1,2)$) :

x	y	L=0	L=1	L=2	L=3	L=4	L=5
0	1	(0)=1	(0)=1	(0)=1	(0)=1	(0)=1	(0)=1
0	0	(00)=0	(00)=0	(00)=0	(00)=0	(00)=0	(00)=0
0	0	(000)=0	(000)=0	(000)=0	(000)=0	(000)=0	(000)=0
1	2	(1)=2	(01)=1	(001)=1	(0001)=1	(0001)=1	(0001)=1
1	7	(11)=7	(011)=6	(0011)=5	(00011)=4	(00011)=4	(00011)=4
2	129	(2)=129	(02)=64	(002)=32	(0002)=16	(00012)=15	(000112)=11
2	448	(22)=448	(022)=192	(0022)=80	(00022)=32	(000122)=17	(0001122)=6
2	1344	(222)=672	(0222)=240	(00222)=80	(000222)=24	(0001222)=7	(00011222)=1

Les deux premières colonnes de ce tableau sont les données (les x_k et les y_k).

La colonne L=0 s'obtient à partir des données en utilisant (4).

Pour passer de la colonne L=0 à la colonne L=1 on procède comme suit :

- on ne fait rien dans le bloc qui contient la flèche.
- le premier élément de chaque bloc se calcule à l'aide de (6), soit

  $H(0,1) = (H(1)-H(0))/(1-0) = (2-1)/(1-0) = 1$

  $H(0,2) = (H(2)-H(0))/(2-0) = (129-1)/(2-0) = 64.$
- une fois calculé le premier élément d'un bloc, les autres éléments de ce bloc se calcule par récurrence à partir du premier élément en utilisant toujours (6), ce qui donne

$H(0,1,1) = (H(1,1)-H(0,1))/(1-0) = (7-1)/(1-0) = 6$

$H(0,2,2) = (H(2,2)-H(0,2))/(2-0) = (44-64)/(2-0) = 192$

$H(0,2,2,2) = (H(2,2,2)-H(0,2,2))/(2-0) = (672-192)/(2-0) = 240.$

On passe de manière analogue aux colonnes suivantes. La colonne L=5 fournit les différences divisées requises. Le polynôme cherché est donc

$$H(X) = 1+1.X^3+4.X^3(X-1)+11.X^3(X-1)^2+6.X^3(X-1)^2(X-2) + 1.X^3(X-1)^2(X-2)^2 = 1 + X^7.$$

Algorithme pour déterminer le polynôme d'interpolation de HERMITE

Cet algorithme nécessite les mêmes mémoires que l'algorithme de la partie 2.

0) (initialisation) les données sont stockées dans les mémoires $x_o,\ldots x_n$ et $y_o,\ldots,y_n$ **dans l'ordre suivant**

$$x_o, \ldots, x_o \quad , \ldots, x_r \quad , \ldots , x_r$$
$$y_o^{(o)},\ldots, y^{(m_o)}/m_o! \ , \ldots , y_r^{(o)}, \ \ldots \ , y_r^{(m_r)}/m_r!$$

1) (calcul des différences divisées : à la fin de ce numéro, on a $y_o=H(x_o)$, $y_1 = H(x_o,x_o),\ldots,y_n = H(x_o,\ldots,x_r))$
(l'indice 1 correspond aux flèches dans le tableau, l'indice i pointe sucessivement sur le premier élément de chaque bloc)

```
pour l = 0, ..., n-1 faire
   faire i = l
   pour k = l+1, ..., n faire
   |  tant que x_k ≠ x_l faire
   |  |  si x_k ≠ x_i alors faire i = k fin si
   |  |  si k = i alors faire y_k = (y_k-y_l)/(x_k-x_l)
   |  |  |  sinon faire       y_k = (y_k-y_{k-1})/(x_k-x_l)
   |  |  fin si
   |  refaire
   refaire
```

2) (on connaît maintenant le polynôme H dans la base des C_k. On exprime les polynômes C_k et P_k dans la base canonique)
reprendre ici le numéro 3) de la partie 2

3) le polynôme H cherché est le polynôme $\sum_0^n a_i X^i$.

5. CAS D'UN POLYNOME A DEUX INDETERMINEES

Supposons maintenant que je veuille développer le polynôme

$$Q(X,Y) = (3X^3+5X^2Y-12XY^2-17Y^3)(X-4Y+9)(X+Y-1) \\ -(X^5-11X^3+Y^2)(X-8Y+3).$$

L'algorithme exposé dans la partie 2 se généralise aisément au cas de deux indéterminées.

Soit $Q(X,Y)$ un polynôme de degré n en X et de degré m en Y.
Donnons-nous

$x_o, \ldots, x_n$ deux à deux distincts

$y_o, \ldots, y_m$ deux à deux distincts.

Le théorème que voici est une conséquence immédiate du théorème 1.

THEOREME 7. **Etant donnée une famille z_{ij} $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$ de nombres réels, il existe un polynôme et un seul $Q(X,Y)$, de degré $\leqslant n$ en X et $\leqslant m$ en Y, vérifie les égalités $Q(x_i,y_j) = z_{ij}$.**

Montrons maintenant comment on détermine explicitement ce polynôme. En procèdant de manière analogue à la partie 1 nous pouvons définir des polynômes $Q(X;y_o,\ldots,y_j,Y)$ en travaillant dans l'anneau $\mathbb{R}[X][Y]$.
Ces polynômes permettent de démontrer l'identité

$$Q(X,Y) = \sum_1^m Q(X;y_o,\ldots,y_j)D_j(Y)$$

où l'on a posé

$$D_o(Y) = 1,\ D_1(Y) = Y-y_o,\ldots,\ D_m(Y) = (Y-y_o)(\ldots(Y-y_m).$$

La différence divisée $Q(X;y_o,\ldots,y_j)$ est un polynôme en X de degré $\leqslant$ n.
On peut donc considérer les différences divisées $Q(x_o,\ldots,x_i;y_o,\ldots,y_j)$ de ce polynôme, ce qui amène l'identité

$$Q(X;y_o,\ldots,y_j) = \sum_1^n Q(x_o,\ldots,x_i;y_o,\ldots,y_j)\ C_i(X).$$

En combinant entre elles les identités obtenues, nous obtenons l'identité

$$(10) \qquad Q(X,Y) = \sum_{i,j} Q(x_o,\ldots,x_i;y_o,\ldots,y_j)\ C_i(X)\ D_j(Y).$$

Remarquons que l'unicité de la décomposition de $Q(X,Y)$ dans la base des $C_i(X)D_j(Y)$ montre que l'on aurait pu échanger le rôle des variables X et Y sans changer le résultat final.

Pour développer le polynôme $Q(X,Y)$ nous procèderons comme suit :

- première étape : calcul des $z_{ij} = Q(x_i,y_j)$
- deuxième étape : calcul des différences divisées $Q(x_o,\ldots,x_i;$ $y_o,\ldots,y_j)$
- troisième étape : expression du polynôme obtenu en (10) dans la base canonique des X^iY^j.

La deuxième étape comportera deux passes :

- première passe : calcul des $Q(x_o,\dots,x_i;y_j)$
- deuxième passe : calcul des $Q(x_o,\dots,x_i;y_o,\dots,y_j)$.

Précisons aussi ce que sera la troisième étape.

Elle comportera elle aussi deux passes de calculs. Si nous posons

$$A_j(X) = Q(X;y_o,\dots,y_j) = \sum_i Q(x_o,\dots,x_i;y_o,\dots,y_j)\ C_i(X)$$

l'identité (10) s'écrit

$$Q(X,Y) = \sum_j A_j(X)\ D_j(Y).$$

La première passe consistera à décomposer chaque polynôme $A_j(X)$ dans dans la base canonique $1,\dots,X^n$. Dans ce but, nous exprimerons successivement les polynômmes

$$A_{o,j} = Q(x_o;y_o,\dots,y_j)\ C_o(X)$$

$$A_{1,j} = A_{o,j} + Q(x_o,x_1;y_o,\dots,y_j)\ C_1(X)$$

$$\vdots$$

$$A_{n,j} = A_{n-1,j} + Q(x_o,\dots,x_n;y_o,\dots,y_j)\ C_n(X) = A_j(X)$$

dans la base canonique. Si nous supposons connus les polynômes C_{k-1} et $A_{k-1,j}$ soit

$$C_{k-1} = \sum_o^n c_i\ X^i \text{ et } A_{k-1,j} = \sum_o^n a_{ij}\ X^i,$$

nous aurons alors

$$C_k = -x_{k-1}c_o + \sum_1^n c_{i-1}x_{k-1}\ X^i$$

$$A_{k,j} = \sum_o^n (a_{ij} + Q(x_o,\dots,x_k;y_o,\dots,y_j)c_i)\ X^i.$$

A la fin de cette première passe, les polynômes $A_j(X)$ sont exprimés dans la base canonique. La deuxième passe consistera alors à exprimer les polynômes $D_j(Y)$ et $A_j(X)D_j(Y)$ dans la base canonique des X^iY^j. Pour cela, nous nous occuperons successivement des polynômes

$$B_o(X,Y) = A_o(X)$$

$$B_1(X,Y) = B_o(X,Y) + A_1(X)D_1(Y)$$

$$\vdots$$

$$B_m(X,Y) = B_{m-1}(X,Y) + A_m(X)D_m(Y).$$

Supposons déterminés les polynômes D_{k-1} et B_{k-1}, soit

$$D_{k-1} = \sum_o^m d_j\ Y^j.$$

Nous aurons alors

$$D_k = -y_{k-1}d_o + \sum_1^m (d_{j-1}-d_jy_{k-1})\ Y^j.$$

Pour déterminer le polynôme B_k, il nous suffira donc d'ajouter au polynôme B_{k-1} les polynômes

$$-A_k y_{k-1} d_o \ , \ A_k(d_o - d_1)\ Y, \ \ldots, \ A_k(d_{m-1} - d_m y_{m-1})\ Y^m .$$

Algorithme pour développer un polynôme à deux indéterminées

Cet algorithme nécessite $2 + 2\left[(n+1)+(m+1)+(n+1)(M+1)\right]$ mémoires qui sont n, m,

$x_o, \ldots, x_n,\ y_o, \ldots, y_m,\ c_o, \ldots, c_n,\ d_o, \ldots, d_m,\ z_{i,j},\ a_{ij} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$

$0 \leqslant j \leqslant m.$

0) (initialisation) données : $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $x_o, \ldots, x_n$ à deux distincts
$y_o, \ldots, y_m$ à deux distincts.

1) (calcul et mise en mémoire des $Q(x_i, y_j)$)
   faire $Z_{i,j} = Q(x_i, y_j) \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \quad 0 \leqslant j \leqslant m.$

2) (calcul des différences divisées des $z_{i,j}$)
   (première passe : à la fin de cette passe, on a $z_{i,j} = Q(x_o, \ldots, x_i; y_j)$)

```
pour j = 0,..., m faire
|  pour i = 1,...,n faire
|  |  pour k = i,...,n faire
|  |  |  z[k,j] = (z[k,j]-z[i-1,j])/(x[k]-x[i-1])
|  |  refaire
|  refaire
refaire
```

(deuxième passe : à la fin de cette passe, on a $z_{i,j} = Q(x_o, \ldots, x_i; y_o, \ldots, y_j)$)

```
pour i = 0,...,n faire
|  pour j = 1,...,m faire
|  |  pour k = j,...,m faire
|  |  |  z[i,k] = (z[i,k] - z[i,j-1]) / (y[k] - y[j-1])
|  |  refaire
|  refaire
refaire
```

3) (on connaît maintenant le polynôme Q dans la base des $C_i D_j$)
   (première passe)
   (initialisation : $C_o = 1$, $A_{o,j} = Q(x_o; y_o, \ldots, y_j) C_o$)
   faire $c_o = 1$, $c_1 = 0, \ldots, c_n = 0$
   $a_{o,o} = z_{o,o},\ a_{o,1} = z_{o,1}, \ldots, a_{o,m} = z_{o,m}$
   $a_{i,j} = 0 \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad 0 \leqslant j \leqslant m$
   (on exprime les polynômes C_i et $A_{i,j}$ dans la base des X^i)

```
pour i = 1,...,n faire
|  pour k = n,...,1 (dans cet ordre!) faire
|  |  c_k = c_{k-1} - x_{i-1} c_k
|  |  pour j = 0,...,m faire
|  |  |  a_{k,j} = a_{k,j} + z_{i,j} c_k
|  |  refaire
|  refaire
|  faire c_o = -x_{i-1} c_o
|  pour j = 0,...,m faire
|  |  a_{o,j} = a_{o,j} + z_{i,j} c_o
|  refaire
refaire
```

(deuxième passe)

(initialisation : $D_o = 1$)

```
faire d_o = 1, d_1 = 0,...,d_m = 0
```

(on exprime les polynômes D_j dans la base des Y^j)

```
pour j = 1,...,m faire
|  pour k = m,...,1 (dans cet ordre!) faire
|  |  d_k = d_{k-1} - y_{j-1} d_k
|  refaire
|  faire d_o = -y_{j-1} d_o
|  pour k = 0,..., j-1 faire
|  |  pour i = 0,...,n faire
|  |  |  a_{i,k} = a_{i,k} + a_{i,j} d_k
|  |  refaire
|  refaire
refaire
```

4) le polynôme cherché est le polynôme $Q = \sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j$.

6. QUELQUES REMARQUES POUR TERMINER

Voici quelques remarques qui peuvent être utiles lors de l'implémentation des algorithmes qui ont été décrits ici.

1) Supposons le polynôme $P(X)$ de la partie 2 à coefficients entiers. Si nous prenons soin de choisir pour $x_o,\dots,x_n$ des entiers, il est immédiat que les polynômes $P(x_o,X)$, $P(x_o,x_1,X)$,... sont eux aussi à coefficients entiers. Par conséquent, les différences divisées sont elles aussi des entiers. Si, au cours de ses calculs, notre calculatrice ne rencontre pas d'entier trop grand

qui l'oblige à passer en notation "scientifique" (et par là à perdre les derniers chiffres de cet entier), le résultat affiché sera exact. Même conclusion en ce qui concerne le polynôme $Q(X,Y)$ de la partie 5 (pourvu, évidemment, que $y_o, \ldots, y_m$ soient des entiers).

2) Pour que notre calculatrice manipule les entiers les plus petits possibles, il est bon de choisir

$$x_o = -[n/2]\ ,\ x_1 = -[n/2]+1, \ldots, x_n = -[n/2]+n$$

$$y_o = -[m/2]\ ,\ y_1 = -[m/2]+1, \ldots, y_m = -[m/2]+m.$$

Avec un SHARP PC 1211 ou 1500, on arrive ainsi à développer un polynôme à une indéterminée de degré 7 à 8, pourvu que les coefficients soient de taille raisonnable. Par contre, le polynôme $P(X) = X^{12}$ donne à l'affichage $X^{12} + 2X$! (la publicité est gratuite). Pour se prémunir contre de tels résultats fantaisistes, il est bon de placer partout où cela est nécessaire des détecteurs d'overflow dans le programme.

3) Une astuce pour développer un polynôme à une indéterminée et de degré élevé. Supposons que je veuille développer le polynôme

$$P(X) = (X^3 - 3X^2 + 6X + 5)^4(2X^3 + 8X^2 + X - 15)$$

Je peux tout d'abord développer le polynôme

$$Q(X,Y) = (X^2Y - 3XY + 6X + 5)^2(XY^2 - 3XY + 6Y + 5)^2(2X^2Y + 8XY + X - 15)$$

l'idée étant de dédoubler les monômes et X de manière à obtenir un polynôme $Q(X,Y)$ dont les degrés en X et Y sont raisonnables. Une fois le polynôme $Q(X,Y)$ développé, il ne reste plus qu'à utiliser l'identité $P(X) = Q(X,X)$ pour obtenir le développement du polynôme $P(X)$. Toujours sur SHARP PC 1500 on arrive ainsi à développer des polynômes dont le degré va jusqu'à 14. Le prix à payer : il faut un module mémoire supplémentaire, car le programme correspondant nécessite entre 2K à 3K de mémoire.

Pour ceux que cela intéresse, voici les développements des divers polynômes :

- partie 0 :

$$P(X) = 84X^6 - 53X^5 - 549X^4 - 48\,316X^3 - 1\,489\,319X^2 - 23\,088\,267X - 143\,145\,627$$

- partie 5 :

$$Q(X,Y) = -X^6 + 35X^4 + 6X^3 - (8X^5 - 4X^4 - 9X^3 - 45X^2)Y - (39X^3 + 31X^2 - 107X + 3)Y^2 - (X^2 + 292X - 161)Y^3 + (99X - 221)Y^4 + 68Y^5$$

- partie 6 :

$$P(X) = 2X^{15} - 16X^{14} + 61X^{13} - 11X^{12} - 644X^{11} - 2\,558X^{10} - 2\,511X^9 - 6\,639X^8 + 27\,114X^7 - 19\,394X^6 - 27\,494X^5 + 67\,130X^4 + 37\,850X^3 - 50\,500X^2 - 44\,375X - 9\,375$$

COURRIER

"RENDEZ-NOUS NOS ONZE JOURS !"

L'article paru dans l'OUVERT 29, intitulé "En souvenir d'un collègue disparu" était consacré au Jésuite Christophorus CLAVIUS. Féru de "calendrologie", Jean Lefort s'est ému de la légèreté avec laquelle nous traitions le changement de calendrier. Après lecture de ses précisions, on ne peut s'empêcher d'éprouver une angoisse de potache, devant la question : En quelle année sommes nous ?

Vous parlez de **Clavius** à propos de la réforme du calendrier qui s'appelle grégorien. Clavius n'était pas seul : Peut-on aussi citer l'astronome italien Luigi Lilio dit Aloysius Lilius (il est évidemment plus facile de latiniser l'italien que l'allemand) ?

Mais cette lettre a surtout pour but de rectifier une erreur commune : Situer du 4 au 15 octobre 1582 la "transition" entre le calendrier julien et le calendrier grégorien. Ces dates ne sont valables que pour Rome, l'Espagne et le Portugal. En ce qui concerne la France le changement eu lieu du dimanche 9 au lundi 20 décembre 1582. Mais il s'agit de la France de Henri III, c'est-à-dire qu'elle ne contient pas l'Alsace, la Lorraine, la Franche Comté, la Savoie...

Pendant plus de trois siècles, les pays vont adopter petit à petit le nouveau calendrier :
- Aux Pays-Bas Catholiques entre le 14.12.1582 et Noël.
- Dans les états catholiques de Suisse et d'Allemagne en 1584. Sans doute l'Alsace en fait-elle partie. Des lecteurs plus férus que moi pourraient-ils retrouver les dates exactes ?
- En Pologne, l'adoption du calendrier nouveau style en 1586 produisit des émeutes en particulier à Riga.
- En Hongrie, la réforme eut lieu en 1587.
- Les états protestants d'Allemagne, de Suisse et des Pays-Bas s'alignèrent vers 1700 (pas tous à la même date, ce serait trop simple !).
- En Suède, le changement eu lieu en 1752.
- De même en Angleterre où des émeutes se produisirent au mois de septembre qui fut amputé de 11 jours.

Déjà l'année 1751 avait fini 3 mois plus tôt que d'habitude, le 31 décembre et non le 25 mars (Il faut être anglais pour finir l'année en cours de mois !). Les gens défilèrent aux cris de "Rendez-nous nos 3 mois" ; "Rendez-nous nos 11 jours".

- Au Japon, le calendrier grégorien fut adopté pour les actes officiels à partir de 1873.
- La Chine le fit en 1912.
- L'URSS passa directement d'un mercredi 1er février au jeudi 14 février.
- L'état roumain abandonna le calendrier julien en 1919.
- Les églises orthodoxes orientales s'alignèrent le 30.9.1923 qui fut suivi du 14.10.1923.
- La Turquie se rallia au nouveau calendrier en 1924.

La non simultanéïté de la réforme calendaire dans les diverses régions du globe rend souvent difficile la datation exacte d'un évènement.

On sait que les soviétiques fêtent la révolution d'octobre 1917 (julien) en novembre (grégorien). Il est moins connu que S^{te} Thérèse d'Avila est morte en Espagne dans la nuit du 4 au 15 octobre 1582. On ignore généralement que Cervantès et Shakespeare moururent tous les deux un 23 avril 1616 mais Cervantès dix jours avant Shakespeare puisque l'Espagne et l'Angleterre avaient alors des calendriers différents.

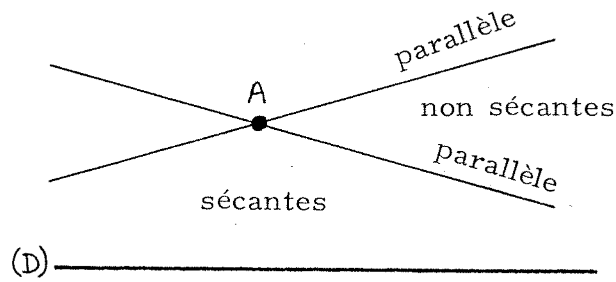
Je pense que ces quelques précisions intéresseront les lecteurs.

LA GEOMETRIE HYPERBOLIQUE PLANE

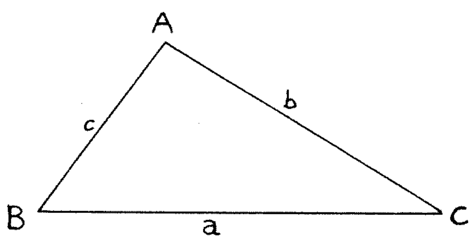
J. LEFORT

• On appelle géométrie hyperbolique une géométrie dans laquelle on a remplacé l'axiome d'Euclide par un autre axiome : l'existence de plusieurs droites passant par un point donné extérieur à une droite donnée et ne coupant pas celle-ci.

• Etant donné une droite (D) et un point A. Parmi toutes les droites passant par A, les sécantes à (D) et les non sécantes à (D) sont disposées comme sur la figure. On appelle parallèles les deux droites séparant ces deux ensembles, et ces deux droites ne sont pas sécantes. L'angle entre les deux parallèles à (D) passant par A s'appelle l'angle de parallélisme et dépend seulement de la distance de A à D. Il existe ainsi une unité naturelle de distance (de même que le radian est une unité naturelle de mesure d'angles).



• Dans un triangle du plan hyperbolique, la somme des angles A + B + C est toujours inférieure à π et la différence π - (A + B + C) est égale à la surface du triangle. Contrairement au cas euclidien, deux triangles qui ont les mêmes angles sont isométriques et on trouve des formules du type :



$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{sh } b \text{ sh } c \cos A$$

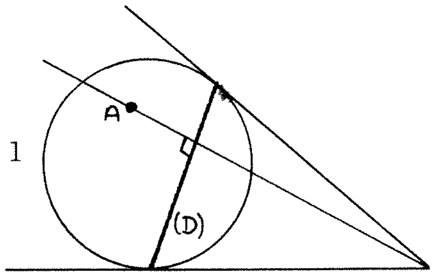
$$\cos A = \sin B \sin C \text{ ch } a - \cos B \cos C$$

$$\frac{\sin A}{\text{sh } a} = \frac{\sin B}{\text{sh } b} = \frac{\sin C}{\text{sh } c} .$$

Si a, b et c sont petits, les développements limités de ch x et sh x permettent de retrouver le cas euclidien qui apparaît ainsi comme un cas limite (tangent) de la géométrie hyperbolique, de la même façon que l'on peut supposer localement que la terre est plate. Les formules précédentes font comprendre le qualificatif "hyperbolique" qui est attaché à cette géométrie.

• Parmi les initiateurs de la géométrie hyperbolique il faut citer Saccheri (1667-1733) qui chercha vainement à démontrer par l'absurde le postulat d'Euclide. Les véritables fondateurs furent le hongrois J. Bolyai (1802-1860) et le russe N. Lobachevsky (1793-1856) qui travaillèrent indépendemment et publièrent leurs travaux en même temps. Leur démarche était purement axiomatique.
C'est à E. Beltrami (1835-1900) et H. Poincaré (1854-1912) que l'on doit les modèles de la géométrie hyperbolique. Pour le premier (fig. 1) c'est l'intérieur d'un disque, les droites y étant des cordes, la perpendicularité se construisant comme sur le dessin. Pour le second c'est également l'inté-

fig. 1



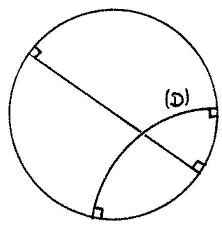


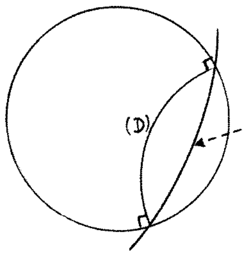
fig. 2

rieur d'un disque mais les droites y sont soit des arcs de cercle orthogonaux à la frontière du disque soit des diamètres (fig. 2). Ce modèle est conforme, c'est-à-dire qu'on peut y lire directement la valeur des angles. C'est ce modèle qui est utilisé sur la couverture de ce numéro.

• Dans le modèle de Poincaré les cercles sont effectivement des cercles s'ils sont intérieurs au disque. S'ils coupent la frontière du disque suivant des angles qui ne sont pas droits (cas des droites) il s'agit de courbes dont tous les points ont la propriété d'être à la même distance d'une droite (fig. 3). Dans ce modèle les distances ne sont pas conservées. Plus exactement on peut imaginer que la température en un point quelconque à la distance r du centre du disque de rayon R est proportionnel à $R^2 - r^2$ et que la dimension d'un objet est directement proportionnelle à sa température, température qu'il prend instantanément.
Cet univers qui nous apparaît borné ne l'est pas pour ses habitants puisqu'au fur et à mesure qu'ils s'éloignent du centre leurs pas deviennent plus petits. On comprend alors que la droite joignant deux points fasse un "détour" par le centre puisqu'on gagne du temps en y faisant des pas plus longs.

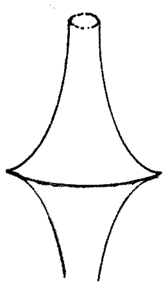
Evidemment, il ne s'agit pas d'un "détour" de la même façon que l'avion ne fait pas un détour quand il joint Naples à New York en s'approchant du pôle Nord.

fig. 3



la distance à D est constante sur ce "cercle"

• Il existe d'autres modèles de la géométrie hyperbolique qui s'obtiennent en étudiant la géométrie sur des surfaces particulières (comme la pseudo-sphère).



pseudo-sphère

Mais ce ne sont que des modèles partiels. Il est impossible d'obtenir un modèle global et isométrique du plan hyperbolique comme induit par la géométrie euclidienne sur une surface de $\mathbb{R}^3$. Pour s'en rendre compte, on peut s'amuser à coller des triangles équilatéraux ensemble de façon qu'il y en ait toujours 8 autour d'un sommet. On obtiendra une surface qui se replie indéfiniment dans $\mathbb{R}^3$. Dans l'interprétation hyperbolique les triangles en question n'ont plus que des angles de 45°.