l'ouvert n°31

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM
DE STRASBOURG -JUIN 83- ISSN 290.0068

NOTRE COUVERTURE : LÉONHARD EULER (1707-1783)

Le portrait du grand mathématicien Bâlois auquel l'OUVERT consacre un dossier fut réalisé en 1753 par le peintre Emanuel HANDMANN. Il est exposé au Kunst Museum de la ville de Bâle.
C'est au talent de Francine LEFORT que nous devons cette interprétation du tableau original, réalisée à l'encre deChine pour l'OUVERT.

EDITORIAL

Comme sa couverture le laisse prévoir, l'OUVERT consacre le dossier de son N°3 au mathématicien EULER, mort en septembre 1783, il y a presque deux cent ans. Ceux qui pensent encore (il y en a !) que $x \to e^{ix}$ est une fonction "moderne" seront heureux d'apprendre que la modernité date d'Euler. Plus sérieusement, la lecture de ses travaux sur les séries divergentes *(lire en page 15 pourquoi 1+2+4+8+ ... = -1)* force à reconnaitre que l'art de calculer d'Euler est en un certain sens profondément moderne : ses résultats pour le moins hardis deviennent très raisonnables si l'on y voit des séries formelles, et non des séries numériques !

****

Ne pouvant pas s'empêcher de jouer les rabat-joie, l'Ouvert a pensé à ceux qui $\left\{\begin{array}{l}\text{mettront à profit}\\ \text{gacheront (*)}\end{array}\right\}$ une partie de leurs vacances à préparer les nouveaux programmes de Terminale. Quelques *bonnes feuilles* du livre de Terminale de l'IREM sont publiées en page 38.

Nous sommes allés fouiller dans les programmes, anciens et nouveaux, pour y voir apparaître peu à peu l'Algèbre Linéaire. C'est fort instructif ! Les premiers livres classiques traitant de ce domaine *(Modern Algebra de Van der Waerden* par exemple) datent d'avant-guerre, mais le terme même a attendu 1983 pour figurer dans nos programmes !

Une anecdote à ce propos : après la guerre, un jeune normalien tire le papier *"déterminants"* pour sa leçon d'Algèbre à l'Agregation. Il parla de formes multinéaires alternées. L'Inspecteur général qui présidait son jury expliqua plus tard avoir fouillé le soir même une bibliothèque pour savoir de quels oiseaux il s'agissait. Pourtant, le nom de Weierstrass, qui inventa ce mode d'exposition, ne devait pas lui être étranger !

Ceci n'est peut-être pas sans lien avec celà.

****

L'OUVERT souhaite de bonnes vacances à ses lecteurs. Ceux qui ne se déplacent pas sans leur guitare ne devront pas oublier de photocopier la page 27. Et si celà vous tourne la tête, dites-vous qu'à deux, c'est plus agréable ...

(*) biffer la mention inutile

SOMMAIRE

L'OUVERT

. responsable de publication : J. Lefort
. rédaction : G. Glaeser et E. Chaney
. correspondance à adresser à :
IREM de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
. participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 60.- F
. disponible à la Bibliothèque de l'IREM

LEONHARD EULER (Bâle 15 avril 1707 - S^t Petersbourg 18 septembre 1783)

A quoi peut servir une biographie d'un mathématicien ? Qu'importe de savoir qu'Euler aimait beaucoup les enfants au point de travailler avec un ou deux sur les genoux ! Cela n'ajoute ni ne retire un iota à son oeuvre mathématique. Et pourtant, depuis Cléopatre dont on sait que le nez a changé la face du monde, il est connu que l'histoire dans toutes ses composantes dépend d'infimes événements.

D'un autre côté, je ne crois pas qu'on puisse isoler des formules mathématiques de leur contexte historique et certains résultats qui nous paraissent d'une évidence rare dans les théories abstraites dont nous avons l'habitude depuis un demi-siècle, reprennent toute leur profondeur quand on les replace dans l'évolution des notions mathématiques et dans le climat d'une époque.

Enfin, la connaissance en elle même, d'où qu'elle vienne est toujours utile, ou du moins le croyons nous actuellement.

On dit souvent qu'Euler voyait dans sa fameuse formule : $e^{i\pi} + 1 = 0$, une preuve de l'existence de Dieu. Certes, cette formule est magnifique, rassemblant sous une forme condensée des constantes fondamentales de l'analyse. (Au passage notons que c'est à Euler qu'on doit les notations e et π.) En fait Euler n'avait pas besoin de formules pour croire en Dieu. Fils d'un pasteur qui avait été élève de Jacques Bernoulli, il étudia la théologie en même temps que les mathématiques et ces dernières sous l'autorité de son père et de Jean Bernoulli. Euler est donc un chrétien calviniste fervent, quoique discret. C'est pourquoi alors qu'il était établi définitivement à S^t Petersbourg depuis sept ans, il manifesta beaucoup d'irritation quand Diderot, en 1773, en visite à la cour de Catherine II essaya de convertir tout le monde à l'athéïsme. Sur les conseils de l'impératrice, on avisa le philosophe, qui n'était que mathématicien amateur, qu'Euler possédait une preuve algébrique de l'existence de Dieu ! Diderot ne vit pas le piège et fut bien incapable de répondre quoi que ce soit quand Euler finit sa "démonstration" par quelque chose comme : "$e^{i\pi} + 1 = 0$ donc Dieu existe ; Q.D.E.".

Le peu de goût pour les paroles et surtout la discrétion d'Euler restent mémorables ; était-ce de la prudence ou un caractère naturel ? Ces deux aspects durent coexister. Son expérience personnelle, lors de son premier séjour à S^{t} Pétersbourg (de 1727 à 1740) d'où il était revenu complètement écoeuré par les pratiques sanglantes des luttes politiques pour le pouvoir, n'a certainement pas amoindri son côté taciturne. En tout cas, il resta conscient de la précieuse utilité d'une telle qualité : lors de son séjour à Berlin entre 1741 et 1766, époque où il fut chargé par Frédéric II d'organiser l'académie des sciences, la Reine douairière le prit en amitié malgré son attitude fruste qui contrastait avec les manières des courtisans de la cour du Roi de Prusse. Et un jour que la Reine se plaignait d'avoir si peu de réponses de sa part, elle s'attira cette remarque : "Madame, j'arrive d'un pays où, si vous parlez, on vous pend". Ceci en dit long sur les moeurs de la Sainte Russie.

Même plus tard, sous le règne de la grande Catherine (d'origine prussienne) qui passait pour libérale parce qu'amie des philosophes, il ne faut pas oublier la répression méthodique en 1774 de la révolte de Pougatchev, répression qui dépassa en horreur les atrocités de ce qui fut une des dernières guerres de paysans d'Europe. Les régimes changent, mais non les méthodes de gouvernement.

On comprend mieux, dès lors, le refuge salutaire que procurait à Euler la recherche mathématique. Auteur prolifique, l'édition de ses oeuvres complètes commencée en 1911 est enfin achevée pour le bicentenaire de sa mort. Elle comprend environ 80 gros volumes in-quarto, 30 de ceux-ci sont consacrés aux mathématiques, 32 à la mécanique et à l'astronomie, 12 à la physique et quelques uns à sa correspondance. Parmi ces derniers, citons "Lettres à une princesse l'Allemagne", (il s'agit de la princesse Anhalt-Dessau, nièce de Frédéric) qui devinrent très populaires et traduites en sept langues furent considérées comme un modèle de vulgarisation scientifique.

La puissance de travail d'Euler était telle que l'on peut affirmer qu'elle occasionna plusieurs congestions cérébrales qui ont fini par lui faire perdre complétement la vue. Dès 1738 il perdait l'usage de l'oeil droit puis l'oeil gauche en 1766 en raison d'une cataracte qui opérée en 1771 lui permit de retrouver pour quelques temps une vision faible. Malgré les douleurs (l'anesthésie n'existait pas) sa joie fut grande, mais une infection supprima tout espoir et il resta aveugle définitivement. Heureusement, sa prodigieuse mémoire et son habileté au calcul mental lui permirent de continuer son oeuvre. Il avait pris l'habitude d'écrire les formules en grand sur des ardoises et il dictait les explications à l'un ou l'autre de ses fils - en particulier Albert - qui faisaient ainsi office de secrétaire. Mais c'était Euler lui-même qui exécutait tous les calculs (algébriques ou numériques) de tête. Calculer 15 décimales exactes d'une série numérique lentement convergente ne l'effrayait pas ; et c'est aveugle qu'il établit la meilleure théorie (pour son temps) du mouvement de la Lune !

Bibliographie : - Articles d'encyclopédies
- Les grands mathématiciens (Bell - édition Payot)

EULER L'A DIT !

E. CHANEY

Certains noms occupent plus de place que d'autres dans les index des livres mathématiques. Si l'on met hors concours les dynasties, comme celle des Bernouilli, Leonard Euler n'est pas mal placé. Ses oeuvres, dont l'édition complète commença en 1911 et s'achève actuellement, remplissent à elles seules une confortable bibliothèque.

C'est dire qu'il ne faut chercher dans la liste des *"inventions dues à Euler"* qui va suivre aucune prétention à l'exhaustivité. Je récuse également par avance tout procès en paternité. La constante d'Euler s'appelait jadis constante de Mascheroni... Le nom d'Euler peut bien se trouver associé à un résultat qui ne lui est pas dû, et réciproquement. Et même si aucun autre mathématicien ne revendique -pour donner un exemple- les équations du Calcul des Variations, rien n'interdit de penser qu'elles figuraient dans les brouillons d'un de ses contemporains, moins connu, voir inconnu.

Il reste que le nom d'Euler reste attaché à une foule de domaines où le savant Bâlois se montra exceptionnellement fécond et inventif.

*****

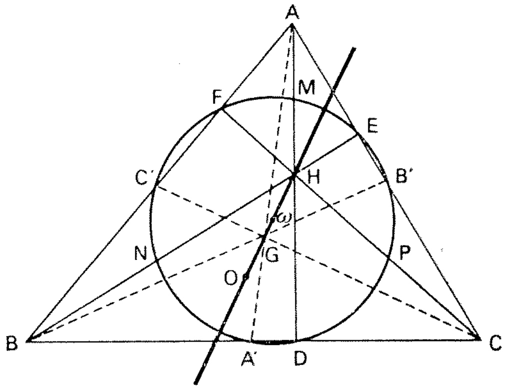
En Géométrie élémentaire, Euler a prouvé l'existence du centre de la similitude plane donnée par couples d'homologues. La géométrie métrique, élémentaire ou non, lui doit :

* **La droite d'Euler** d'un triangle ABC.
Elle joint l'orthocentre H, le barycentre G, le centre du cercle circonscrit O, et celui du cercle d'Euler ω.

* **Le cercle d'Euler**
Centré au milieu du segment OH, il visite les pieds des hauteurs, des médianes, les milieux des segments AH et C^{ie}. En tout neuf points

remarquables [1] auxquels la postérité a rajouté 34 compagnons plus ou moins remarquables.

Fig 1



* **La relation d'Euler**

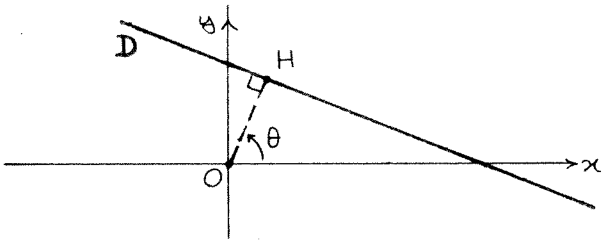
Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle, r celui du cercle inscrit et d la distance entre ces cercles, on a : $d^2 = R^2 - 2rR$

* **L'équation normale d'une droite**

Dans un plan euclidien orienté, l'équation d'une droite D peut s'écrire :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta)$$

Fig 2



où $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH}) = \theta$

et $P(\theta) = \overline{OH}$

Remarquons à ce sujet que si Descartes a utilisé des relations numériques pour passer de l'Algèbre à la Géométrie, c'est sans doute Euler qui a standardisé l'usage des axes de coordonnées.

* **La Formule des rayons de courbure**

En coupant une surface Σ par des plans normaux passant par un point fixe M de Σ, on obtient une famille de courbes planes passant par M. Chacune possède en ce point un rayon de courbure. Ces rayons sont en général compris entre deux valeurs extremales R_1 et R_2 correspondant aux plans normaux P_1 et P_2.

(1) Voir le livre I.R.E.M. de Seconde, pp. 310 et 311.

Si R est le rayon correspondant à la section par P, la formule d'Euler affirme que :

$$1/R = \frac{\cos^2\phi}{R_1} + \frac{\sin^2\phi}{R_2} \qquad \text{où } \phi \text{ est l'angle entre P et } P_1.$$

*****

En topologie, outre le problême des ponts de Koenigsberg dont il montra l'impossibilité et celui de la marche sur l'échiquier, Euler établit indépendamment de Descartes que :

$$S + F - A = 2$$

pour un polyèdre convexe dont S, F, A sont respectivement les nombres de sommets, de faces et d'arêtes (2).

Cette formule admet de nombreuses généralisations. Son premier membre fournit un invariant topologique pour une surface Σ : si S, F et A sont encore les nombres de sommets, de faces et d'arêtes d'une représentation cellulaire d'un graphe connexe dessiné sur Σ, $C = S + F - A$ ne dépend que de Σ, et pas de la représentation cellulaire. Dans le cas d'une surface homéomorphe à une sphère, ou à un plan, C vaut 2. On l'appelle Constante d'Euler-Poincaré.

* * * * *

En Théorie des nombres, Euler s'attaqua comme tous les grands de son époque au "*théorème de l'Algèbre*" (ainsi énoncé aujourd'hui : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos) et ouvrit la voie à Lagrange et Gauss qui le prouvèrent complètement.

Reprenant les travaux de Pierre Fermat, il définit la fonction indicatrice qui porte son nom :

---

(2) On trouvera dans le livre I.R.E.M. de Seconde, pp. 350-351, une démonstration élémentaire de cette formule, qui peut être ainsi agrémentée :
Une fois le polyèdre triangulé et mis à plat, imaginer que les arêtes sont les digues d'un polder entouré par la mer. En ôtant certaines arêtes, la mer inonde une alvéole, matérialisant ainsi la disparition d'une face.
Consulter également l'ouvrage de LAKATOS "*Proof and refutation*" (The logic of mathematical discovery, Cambridge University Press, 1976 - A votre disposition à la bibliothèque de l'I.R.E.M.) à propos de la genèse de cette formule.

*** L'indicatrice d'Euler**

Si n est un entier > 1, $\phi(n)$ est le nombre d'entiers premiers avec n, et inférieurs à n. C'est aussi le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, ou encore le nombre d'éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

Euler prouva que :

$\phi(n) = n(1 - 1/_a) \ldots (1 - 1/_k)$ où a, ..., k sont les nombres premiers figurant dans la décomposition de n.

Une généralisation d'un théorème de Fermat est alors :

Si n > 1 et a sont premiers entre eux, alors :

$$a^{\phi(n)} \equiv 1\ [n] \ .$$

Le théorème de Fermat se restreignait au cas où n est premier (on a alors $\phi\ (n) = n - 1$).

*** L'identité d'Euler**, à propos de la fonction ζ, tant étudiée par Riemann:

Si s > 1, $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \quad \ldots$

(produit étendu à tous les nombres premiers)

Cette identité est à la base de l'étude de la fonction de Riemann, se prolonge comme elle à $\mathbb{C}$, et permet d'entrevoir pourquoi ζ est intimement liée à la répartition des nombres premiers.

* * * * *

En Analyse, Euler s'intéressa à tout, des intégrales multiples à l'accélération de la convergence d'une série... On lui doit :

*** La Constante d'Euler**

Définie comme la limite γ de la suite $\gamma_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n - \ln(n)$, elle intervient fréquemment dans le calcul intégral et l'étude des fonctions dites spéciales. Euler en donna une valeur approchée à 10^{-32} près dans ses oeuvres, où, curieusement, les 18e, 19e et 20e chiffres après la virgule sont faux (voir infra). Ce n'est pas en partant de la définition ci-dessus qu'il fit son calcul (la suite converge très lentement), mais plutôt en accélérant la convergence de la série harmonique ou en utilisant la formule sommatoire ci-après.

On ignore tout de γ: est-ce un nombre rationnel ?

* **La formule sommatoire d'Euler - Mac Laurin**

Pour des fonctions suffisamment dérivables, cette formule permet l'évaluation de certaines intégrales, de certaines sommes finies, ou d'en obtenir des développements asymptotiques.

Sous sa forme moderne :

$$\int_a^b f(t)\,.\,dt = \frac{b-a}{2}\cdot\left[f(a)+f(b)\right] - \frac{B_1}{2!}(b-a)^2\cdot\left[f'(b)-f'(a)\right] + \frac{B_2}{4!}(b-a)^4\cdot\left[f'''(b)-f'''(a)\right] + \dots + R_n$$

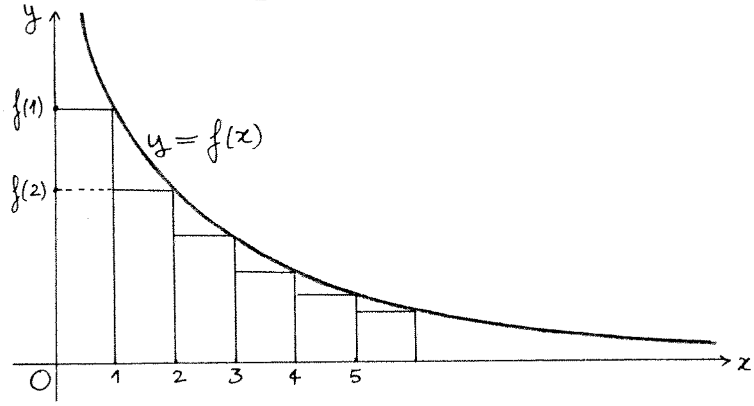
avec $R_n = \frac{(-1)^{n+1}\,B_{n+1}}{(2n+2)!}\cdot(b-a)^{2n+3}\cdot f^{2n+2}(c) \qquad (c\in\,]a,b[\,)$

les B_k sont les nombres de Bernouilli.

Le problème originel traité par Euler était celui du calcul de :
$f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ où n est entier.

La comparaison entre cette somme et $\int_1^n f(t)\,.\,dt$, suggérée par la Fig.3, est devenue classique.
On la doit à Euler.

Fig. 3



* **Les fonctions Eulériennes**

1) $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,.\,e^{-t}\,.dt$ prolonge $(x-1)!$ lorsque $x > 0$ n'est plus entier. Cette fonction se prolonge au plan complexe en une fonction méromorphe par, entre autres formules ... d'Euler :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\,.\,e^{\gamma.z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right).e^{-\frac{z}{n}}$$

γ étant la constante d'Euler

On a d'ailleurs $\Gamma'(1) = -\gamma$

Euler prouva que :

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,.\,\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi}\,.\,\sin(\pi z)$$

Il fut également le premier à utiliser systématiquement l'exponentielle complexe, après avoir résolu le problème du logarithme complexe, et les formules :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

portent encore son nom.

2) $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, . \, dt$ (pour $x > 0$ et $y > 0$)

On doit à Euler le passage entre fonction Gamma et fonction Bêta :

$B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x) \, . \, \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. Il généralise : $C^{q}_{p+q} = \dfrac{(p+q)!}{p! \; q!}$

Ces fonctions lui permirent le calcul de nombreuses intégrales de fonctions dont la primitive n'est pas *"simple"*.

* L'équation d'Euler en Calcul des Variations

La recherche de la brachistochrone avait fait l'objet l'objet d'un concours entre mathématiciens. Euler s'y intéressa très tôt et obtint une méthode générale pour résoudre ce genre de problème, dits du Calcul des Variations, où l'inconnue est une courbe qui maximise (ou minimise) certains paramètres.

Soit $F : (x,y,y') \mapsto F(x,y,y')$ de classe C^2 sur $[a,b] \times R^2$

On cherche $y = f(x)$ définie sur $[a,b]$ telle que :

$\begin{cases} f(a) = \alpha \; ; \quad f(b) = \beta \\ \int_a^b F(x,y,y').dx \text{ soit extremale} \end{cases}$ (cette intégrale peut représenter un temps de parcours, une longueur de courbe...)

Une condition nécessaire sur f est alors que :

$$\frac{\partial F}{\partial y} (x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y} (x, f(x), f'(x)) \right] = 0$$

Elle est due à Euler, qui fixa également les notations $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

*****

Mentionnons encore les angles d'Euler

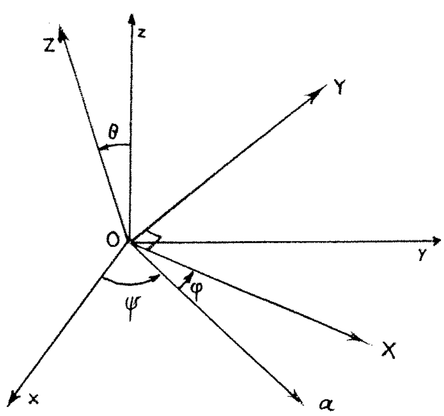


Fig. 4

qu'il introduisit dans ses travaux de mécanique et d'astronomie ; et le problème des 36 officiers : il s'agissait de répartir sur un tableau carré 36 militaires de six grades différents et répartis dans six régiments différents, de façon que chaque ligne du tableau fasse intervenir tous les régiments et tous les grades. Il s'agissait tout simplement de construire un carré greco-latin d'ordre 6, ce qui est impossible. A ce sujet, les conjectures d'Euler ne se sont pas avérées (voir OUVERT n° 26, couverture et article p. 49).

*****

Nous publions dans les pages suivantes deux extraits des oeuvres complètes d'Euler

* *le premier est extrait d'une étude de* $\int \frac{dz}{\ln(z)}$ *et mentionne la constante d'Euler*
* *le second du calcul de* $\int \frac{(x^{\alpha} \pm x^{\beta})dx}{\ln(x)}$
* *le troisième est la lettre du 6 mai 1760, adressée à V.A., princesse d'Allemagne et tente de répondre à la question : "Pourquoi une belle musique excite-t-elle le plaisir ?"*

On remarquera que l'éditeur à poussé la conscience professionnelle jusqu'à insérer des notes en latin dans le texte latin, et en français dans le texte français.

Sed ex demonstratione EULERI in *Calculo differentiali*, Parte posteriori, Cap. VI[1]) est

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=ln+\frac{1}{2n}-\frac{\mathfrak{A}}{2n^2}+\frac{\mathfrak{B}}{4n^4}-\frac{\mathfrak{C}}{6n^6}+\frac{\mathfrak{D}}{8n^8}-\cdots$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\cdots,$$

ubi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. sunt numeri BERNOULLIANI. In casu autem $n=\infty$ est

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=ln+\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\cdots$$

Erit ergo

$$\int\frac{e^x dx}{x}=A-ln-\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{A}}{2}+\frac{\mathfrak{B}}{4}-\frac{\mathfrak{C}}{6}+\frac{\mathfrak{D}}{8}-\cdots+l-x$$

seu ob $ln=l-x$

$$\int\frac{e^x dx}{x}=A-\frac{1}{2}-\frac{\mathfrak{A}}{2}+\frac{\mathfrak{B}}{4}-\frac{\mathfrak{C}}{6}+\frac{\mathfrak{D}}{8}-\text{etc.}$$

Quod integrale cum in casu ipso $x=-n=-\infty$ debeat annihilari, erit tandem

$$A=\frac{1}{2}+\frac{\mathfrak{A}}{2}-\frac{\mathfrak{B}}{4}+\frac{\mathfrak{C}}{6}-\frac{\mathfrak{D}}{8}+\text{etc.}=0{,}577215\,664901\,5325,$$

ut EULERUS invenit loco citato. Eadem EULERI methodo actu collectis centum terminis seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ etc. invenimus esse

$$A=0{,}577215\,664901\,532860\,618112\,090082\,39.$$[2])

---

1) L. EULERI *Institutiones calculi differentialis*, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 339. L. S.

2) Huius valoris figurae vicesima, vicesima prima, vicesima secunda erroneae sunt atque figura ultima unitate augenda est. Verus valor usque ad figuram vicesimam alteram invenitur in I. SOLDNERI opusculo *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante*, Munic 1809, p. 13. C. F. GAUSS (vide *Disquisitiones generales circa seriem* etc., art. 31, 1812, *C. F. GAUSS Werke*, III, p. 154, cf. ibidem p. 201, 202) discrepantiam a vero valore apud MASCHERONIUM indicavit et ipse calculum ad figuram vicesimam tertiam perduxit. Adhortante GAUSSIO accuratiorem valorem invenit F. B. G. NICOLAI, scilicet 0,577215 664901 532860 606512 090082 402431 0421. Postea J. C. ADAMS computavit numerum A usque ad figuram ducentesimam sexagesimam tertiam, Proceedings of the Royal Society of London 27 (1878), p. 88. L. S.

Extrait 1

Si in aequatione (b) sumatur $n=1$, habebitur

$$\text{(c)}\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{dx\,\sin.lx}{lx} &= \frac{\pi}{4}+lx+\frac{2(lx)^2}{2\cdot 2}+\frac{2(lx)^3}{2\cdot 3\cdot 3}-\frac{4(lx)^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 5}-\frac{8(lx)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 6}\\ &\quad -\frac{8(lx)^7}{2\cdot 3\cdots 7\cdot 7}+\frac{16(lx)^9}{2\cdot 3\cdots 9\cdot 9}+\frac{32(lx)^{10}}{2\cdot 3\cdots 10\cdot 10}+\cdots,\end{aligned}\right.$$

ubi desunt omnes potentiae divisibiles per 4.

Si post integrationem fiat $x=1$, erit

$$\int\frac{dx\,\sin.lx}{lx}=\frac{\pi}{4}.$$

Series superiores (a), (b) et (c) inserviunt ad habendum proxime valorem integralis, quando termini convergunt; si vero divergant, facto ut supra $x^{\alpha+1}=z$, $x^{\beta+1}=y$ ac proinde $\int\frac{(x^\alpha-x^\beta)\,dx}{lx}=\int\frac{dz}{lz}-\int\frac{dy}{ly}$ habebuntur aliae series convergentes substituendae ex aequatione (10) Adnotationis I ad hoc Caput IV pag. 10[1]); erit nempe

$$\text{(d)}\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{(x^\alpha-x^\beta)\,dx}{lx} &= z\Big(\frac{1}{lz}+\frac{1}{(lz)^2}+2\frac{1}{(lz)^3}+2\cdot 3\frac{1}{(lz)^4}+\cdots+2\cdot 3\cdot 4\cdots(m-1)\frac{1}{(lz)^m}\Big)\\ &\quad +A-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{m}\\ &\quad +l\pm lz\\ &\quad +\frac{lz}{m+1}+\frac{(lz)^2}{2(m+1)(m+2)}+\frac{(lz)^3}{3(m+1)(m+2)(m+3)}+\text{etc.}\\ &\quad -\frac{m}{lz}-\frac{(m-1)m}{2(lz)^2}-\frac{(m-2)(m-1)m}{3(lz)^3}-\text{etc.}\\ &\quad -y\Big(\frac{1}{ly}+\frac{1}{(ly)^2}+2\frac{1}{(ly)^3}+2\cdot 3\frac{1}{(ly)^4}+\cdots+2\cdot 3\cdot 4\cdots(\mu-1)\frac{1}{(ly)^\mu}\Big)\\ &\quad -A+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{\mu}\\ &\quad -l\pm ly\\ &\quad -\frac{ly}{\mu+1}-\frac{(ly)^2}{2(\mu+1)(\mu+2)}-\frac{(ly)^3}{3(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}-\text{etc.}\\ &\quad +\frac{\mu}{ly}+\frac{(\mu-1)\mu}{2(ly)^2}+\frac{(\mu-2)(\mu-1)\mu}{3(ly)^3}+\text{etc.},\end{aligned}\right.$$

Extrait 2

LETTRE VIII

C'est une question aussi importante que curieuse, pourquoi une belle musique excite en nous le sentiment du plaisir? Les savans sont bien partagés là-dessus. Il y en a qui prétendent, que c'est une pure bizarrerie, et que le plaisir que cause la musique, n'est fondé sur aucune raison, vu que la même musique peut être goûtée par quelques uns, et déplaire à d'autres. Mais bien loin que la question en soit décidée par là, la question en devient plutôt plus compliquée; car on veut savoir la raison pourquoi la même piece de musique peut produire de si différens effets, puisqu'il faut convenir que rien n'arrive sans raison. D'autres disent que le plaisir qu'on sent en entendant une belle musique, consiste dans la perception de l'ordre qui y regne. Ce sentiment paroit d'abord assez bien fondé et mérite d'être examiné plus soigneusement. La musique renferme deux especes d'objets où quelque ordre trouve lieu. L'un se rapporte à la différence des tons, en tant qu'ils sont hauts ou bas, aigus ou graves; et V. A. se souviendra que cette différence est contenue dans le nombre de vibrations que chaque ton rend en même tems. Cette différence qui se trouve entre la vîtesse des vibrations de tous les tons, est ce qui est nommé proprement l'harmonie. Donc en entendant une musique, lorsqu'on comprend les rapports ou les proportions que les vibrations de tous les tons tiennent entr'eux, c'est la production de l'harmonie. Ainsi deux tons qui different d'une octave, excitent le sentiment de la proportion de 1 à 2, une quinte la proportion de 2 à 3 et une tierce majeure, la proportion de 4 à 5. On comprend donc l'ordre qui se trouve dans quelque harmonie, quand on connoit toutes les proportions qui regnent entre les tons dont l'harmonie est composée; et c'est le jugement des oreilles qui conduit à cette connoissance. Ce jugement étant plus ou moins fin, il est clair pour quoi la même harmonie est apperçue par l'un, et point du tout par l'autre, sur tout quand les proportions entre les tons sont exprimées par des nombres un peu grands. Mais la musique renferme, outre l'harmonie, encore un autre objet susceptible d'ordre, qui est la mesure, par laquelle on assigne à chaque ton une certaine durée: et la perception de la mesure consiste dans la connoissance de la durée de tous les tons, et des proportions qui en naissent, comme si un ton dure deux fois, trois fois, ou quatre fois plus qu'un autre. Le tambour et la timbale nous fournissent une musique, où la seule mesure a lieu puisque tous les tons sont égaux entr'eux, et là il n'y a point d'harmonie; comme il y a aussi une musique, où la seule harmonie a lieu, à l'exclusion de la mesure. Une telle musique est le choral, où tous les tons sont d'une même durée: or une musique parfaite contient et l'harmonie et la mesure. Maintenant, qui entend une musique, et qui comprend, par le jugement de ses oreilles, toutes les proportions sur lesquelles tant l'harmonie que la mesure, est fondée, il est certain qu'il a la plus parfaite connoissance de cette musique qui soit possible; pendant qu'un autre qui n'apperçoit ces proportions qu'en partie, ou point du tout, n'y comprend rien, ou en a une connoissance imparfaite. Mais le plaisir sur lequel roule notre question est encore bien différent de cette connoissance, dont je viens de parler, quoiqu'on puisse soutenir hardiment qu'une musique ne sauroit produire du plaisir, à moins qu'on n'en ait une connoissance. Car la seule connoissance de toutes les proportions qui regnent dans une musique, tant à l'égard de l'harmonie que de la mesure, ne suffit pas encore pour exciter le sentiment du plaisir; il y faut quelque chose de plus, que personne n'a pas encore développé. Pour se convaincre que la seule perception de toutes les proportions d'une musique n'est pas suffisante, on n'a qu'à considérer une musique fort simple, qui ne marche que par des octaves, où la perception des proportions est certainement la plus aisée; cependant il s'en faut beaucoup que cette musique cause du plaisir, quoiqu'on en ait la plus parfaite connoissance. On dit donc que le plaisir demande une connoissance qui ne soit pas trop facile, mais qui exige quelque peine; il faut pour ainsi dire, que cette connoissance nous coute quelque chose. Mais à mon avis cela ne suffit pas encore. Une dissonance, dont la proportion consiste en de plus grands nombres, est plus difficile à être comprise, cependant une suite de dissonances mises sans choix et sans dessein ne plaira pas. Il faut donc que le compositeur ait suivi, dans la composition, un certain plan ou dessein qu'il ait exécuté par des proportions réelles et perceptibles; et alors lorsqu'un connoisseur entend cette piece, et qu'outre les proportions il en comprend le plan et le dessein même que le compositeur a eu en vue, il sentira cette satisfaction qui est ce plaisir dont une belle musique frappe les oreilles intelligentes. Ce plaisir vient donc de ce qu'on devine pour ainsi dire les vues et les sentimens du compositeur, dont l'exécution, entant qu'on la juge heureuse, remplit l'esprit d'une agréable satisfaction. C'est à peu près une semblable satisfaction qu'on ressent en voyant une belle Pantomine, où on peut deviner par les gestes et les actions, les sentimens et les discours qui en sont représentés, et qui exécutent outre cela un beau dessein. Cette énigme du Ramoneur[1]) qui a tant plu à V. A. me fournit aussi une belle instance. Dès qu'on en devine le sens, et qu'on reconnoit, qu'il est parfaitement exprimé dans la proposition de l'énigme, on en ressent un grand plaisir; au lieu que les énigmes plattes et mal dirigées n'en causent aucun. Voilà, à mon avis, les vrais principes, sur lesquels sont fondés tous les jugemens sur la beauté des pieces de musique; mais ce n'est que l'avis d'un homme, qui n'en entend rien du tout, et qui par conséquent doit être honteux d'avoir osé entretenir V. A. sur ce sujet.

le 6 de May 1760

1) Voici le texte de cette énigme, dont l'auteur est Antoine Houdar de la Motte (1672–1731):

J'ai vu, j'en suis témoin croyable,
Un jeune enfant, armé d'un fer vainqueur,
Le bandeau sur les yeux, tenter l'assaut d'un cœur,
Aussi peu sensible, qu'aimable.
Bientôt après, le front élevé dans les airs,
L'enfant, tout fier de sa victoire,
D'une voix triomphante en célébrait la gloire.
Et semblait pour témoin vouloir tout l'univers.
Quel est donc cet enfant, dont j'admirai l'audace?
Ce n'était pas l'Amour. Cela vous embarasse.

A. S.

LES SERIES DIVERGENTES CHEZ EULER

J. LEFORT

Tout lecteur sait calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison x. Par exemple de la façon suivante :

soit : $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

alors : $xS_n = x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}$

et par soustraction membre à membre

$$(1 - x)S_n = 1 - x^{n+1}$$

ce qui donne $S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ pourvu que x soit différent de 1. De plus, pour $x < 1$ il est facile de voir que la suite de terme général S_n converge vers $\frac{1}{1 - x}$.

Imaginons (1) maintenant un élève qui ne connaît rien à la théorie des séries et qui se propose de calculer la somme infinie :

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n + \ldots$$

en utilisant une méthode voisine. Il remarque que 2S vaut S-1 ce qui conduit à S = -1 ! Que dira son professeur ? Manque de rigueur ? Manipulation indue de l'infini ? N'a pas appris son cours ? N'a rien compris aux maths ? Idiot ? Génial ? Personnellement je trouve un tel élève très astucieux, mais que de difficultés pour lui faire comprendre ce qui se passe, car, contrairement à ce qu'on peut penser, il n'y a pas obligatoirement une erreur !

*****

Nul ne déniera à Euler le titre de calculateur génial. Euler n'a pourtant jamais hésité à faire de tels calculs. On trouve par exemple dans son article "*De seriebus divergentibus*" (Opera omnia, tome XIV, série 1, p. 585 et suivante) les écritures :

(1) L'imagination n'a pas besoin d'être beaucoup sollicitée. Je connais plusieurs collègues qui ont vécu ce genre de situation.

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots\ldots = -1$$

$$1 + 3 + 9 + 27 + \ldots\ldots = -\frac{1}{2}$$

dont la justification repose sur la méthode imaginée ci-dessus. Certes, Euler lui même trouve bizarre d'obtenir un résultat négatif comme somme de termes tous positifs. Il justifie ce résultat, ou tout au moins essaye de le justifier sans trop y croire, par la remarque suivante :

la fonction $-\frac{1}{x}$ est croissante, or pour des valeurs entières de la variable on trouve la suite :

$$\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3} \ldots$$

ce qui tend à prouver que les nombres négatifs sont plus grands que les positifs, de l'autre côté de l'infini. Les topologistes pourront disserter à loisir sur cette philosophie.

Dans la pratique, Euler n'avait pas besoin de cette justification. Il avait confiance dans son résultat dans la mesure où différentes méthodes le conduisaient à la même valeur.

Avec un recul de deux siècles, il est relativement facile de justifier - dans ce cas au moins - les calculs d'Euler. C'est ce qu'on appelle le prolongement analytique d'une fonction, et que l'on peut exprimer schématiquement sous la forme suivante :

* si f est définie sur F
* si g est définie sur G
* si les restrictions de f et g à $F \cap G$ sont égales
* si f et g sont des fonctions "pas trop biscornues"
* si $F \cap G$ est "suffisament grand"

alors on peut affirmer que f et g sont les restrictions à F et G d'une fonction h définie sur $F \cap G$.

Il n'est pas question ici de définir plus en détail les expressions "*pas trop biscornues*" et "*suffisament grand*". En appliquant ce résultat aux fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $F = R - \{1\}$ et $g(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ pour $G = \;\; -1, +1$ on justifie tout à fait le calcul imaginé par Euler.

D'autre part, les mathématiciens ont eu largement besoin de manipuler les séries. Ils se sont donc rendu compte qu'il n'y a aucune raison de se limiter à un seul type de convergence. Donnons ici l'exemple classique de la sommabilité au sens de Cesaro :

Soit $$Sn = \sum_{0}^{n} u_i$$
on pose, s'il existe, $S = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=o}^{n} S_i$.

Il est alors facile de voir que si Sn admet une limite au sens habituel quand n tend vers l'infini, S existe et que c'est cette limite. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple : $u_i = (-1)^n$. Les S_i valent alternativement 1 et 0 et n'admettent donc pas de limite à l'infini ; mais S existe et vaut 1/2. A posteriori, il ne semble pas complètement idiot de poser :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2},$$

c'est en quelque sorte la valeur moyenne. En pratique il existe de très nombreuses méthodes de sommation et on pourra à ce propos consulter le livre de Hardy : "*Divergent Series*". Euler se contentait de calculer. Il n'avait nul besoin de Cesaro, Hölder et compagnie pour obtenir des résultats ; pour l'exemple précédent il identifiait

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ avec } \frac{1}{1 - x}$$

et il faisait $x = -1$.

Mais Euler ne s'arrêtait pas en si bon chemin ; il maniait les infinis avec dextérité, n'hésitant pas à intégrer ou dériver les séries termes à termes, à les multiplier entre elles comme des polynômes, donc sans justification si ce n'est d'obtenir (presque) toujours le même résultat par différentes méthodes, toutes aussi scabreuses.

Prenons un autre exemple :

$$(1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots)(1 - 1 + 1 - 1 + 1\ldots) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

d'après les remarques précédentes. Mais si on développe le premier nombre, on trouve, moyennant une astuce d'écriture :

$$\begin{array}{l} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \\ \quad - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \\ \qquad\quad + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots \\ \qquad\qquad - 1 + 1 \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

soit $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots\ldots\ldots\ldots$

D'où le résultat $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots = \frac{1}{4}$.

Et si vous avez des doutes sur ce résultat, considérons avec Euler cette autre méthode :

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots\ldots$$

est la dérivée de

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 \ldots\ldots$$

qu'il identifie avec $1 - \frac{1}{1+x}$ dont la dérivée vaut justement $\frac{1}{(1+x)^2}$ qui pour $x = 1$ redonne bien :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots\ldots = \frac{1}{4}.$$

Si décidément vous êtes trop cartésien (ou trop bourbakien) pour accepter ce genre de preuve vous pourrez appliquer deux fois de suite la méthode de Cesaro pour retrouver 1/4. Mais notre propos n'est pas de justifier systématiquement les calculs d'Euler.

Il semble qu'Euler ait été une vraie locomotive. Une fois lancé, rien ne semblait pouvoir l'arrêter. Il tournait et retournait ses calculs dans tous les sens. A partir de :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

il cherche à évaluer séparément

$$I = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

$$\text{et } P = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots$$

or : $\quad 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots = 2\ (1 + 2 + 3 + 4 \ldots)$

$\qquad\qquad = 2\ (1 + 3 + 5 + \ldots) + (2 + 4 + 6 + 8 \ldots)$

d'où : $\quad P = 2(I + P)$

or : $\quad I - P = \frac{1}{4}$

ce qui le conduit à $I = \frac{1}{12}$, $P = -\frac{1}{6}$ et surtout :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots = -\frac{1}{12}$$

Par le calcul de cette somme, Euler mettait en route une succession de recherches qui n'ont pas encore toutes abouti puisqu'il s'agissait du premier pas sur la fonction ζ de Riemann dont on sait qu'elle est au centre de tous les travaux sur les nombres premiers. Voyons de plus près ce qu'Euler a trouvé à ce propos :

Une définition possible de la fonction ζ est :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ce qui n'a de sens - pour nous - que si $s > 1$. Evidemment Euler donna à s des valeurs quelconques et en particulier négative puisque pour $s = -1$ on trouve

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

Ce qui est admirable c'est que la fonction ζ s'étend assez facilement aux valeurs complexes quelconques (sauf 1 et 0) et que $\zeta(-1)$ vaut justement $-\frac{1}{12}$

Dans l'article : "*Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques*" (Opera omnia X, p. 70 et suivantes), Euler étudie la quantité :

$$\frac{1 - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots\ldots}{1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{4^{m+1}} + \ldots} \quad \text{pour } m \quad N^*$$

qu'il trouve égal à 0 pour m pair et à

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \frac{m!\ (2^{m+1}-1)}{(2^m-1)\ \pi^{m+1}} \quad \text{pour } m \text{ impair.}$$

Connaissant Euler, il se devait de voir ce qui se passe pour m non entier. Il commence par se dire que si on pose

$A(m) =$

$A(m) = \dfrac{m!\ (2^{m+1} - 1)}{2^m - 1)\ \pi^{m+1}}$ alors l'expression cherchée vaut successivement

	$A(1)$	0	$-A(3)$	0	$A(5)$	0
pour m =	1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5	, 6 ...

et que par conséquent on peut réécrire le coefficient de A(m) sous la forme $-\cos\frac{(m+1)\ \pi}{2}$. Par ailleurs en remplaçant m! par $\Gamma(m+1)$, il trouve finalement :

$$\frac{1 - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots\ldots}{1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{4^{m+1}} + \ldots\ldots} = -\cos\frac{(m+1)\ \pi}{2} \quad \frac{\Gamma\ (m+1)(2^{m+1} - 1)}{(2^m - 1)\ \pi^{m+1}}$$

Il vérifie sa conjecture en faisant m = 0 (par un calcul à la limite) puis $m = \frac{1}{2}$ et $m = \frac{3}{2}$ en calculant une valeur approchée du premier membre. Cette conjecture qui est à très peu près la fameuse équation fonctionnelle de la fonction ζ sera démontrée rigoureusement par Riemann. Pour plus de détail, je ne peux qu'inviter le lecteur à se reporter au texte même d'Euler (texte qui est en français). Il pourra y admirer les prouesses calculatoires de ce prodigieux mathématicien.

*****

Dans sa soif de calcul, Euler aborda dans le même esprit les produits infinis, ce qui lui permit de découvrir bien d'autres résultats. Voyons rapidement comment il évalua la limite de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$:

Il connaît le développement en série entière de sin x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

d'où $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

mais $\frac{\sin x}{x}$ s'annule pour $x = \pm k\pi$, $k \neq 0$, "donc" $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2})$

en généralisant la formule de factorisation des polynômes. Mais si on développe le deuxième membre il vient :

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2}\right) + \frac{x^4}{\pi^4} \cdot \sum_{k \neq 1} \left(\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{1^2}\right) - \dots$$

et par identification, il trouve :

$$\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\Pi^2}{6}$$

ainsi que d'autres formules analogues.

Ne nous attardons pas sur ce genre de calcul, nous pourrions ainsi passer en revue l'oeuvre entière d'Euler, et revenons aux calculs des séries divergentes avec un excellent exemple.

*****

Dans "*De seriebus Divergentibus*" (déjà cité), Euler s'attaque au calcul de la série

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \dots\dots$$

série sacrément divergente, qu'il qualifie d'hypergéométrique (on comprend pourquoi) et qu'il attribue à Wallis (mais les historiens se demandent bien pourquoi ?).

Euler va "*calculer*" le résultat de quatre façons et comme les quatre valeurs approchées obtenues seront suffisamment voisines il conclura à la justesse des méthodes employées et à la justesse du résultat !

Sans entrer dans les détails regardons rapidement le principe de ces méthodes :

1ère méthode :

Soit $S = a - b + c - d + e - f \,.....$ où a, b, c ... sont tous positifs et considérons le tableau des *"différences finies"*

	Δ_1	Δ_2	Δ_3	
a				
	b-a			
b		c-2b+a		
	c-b		d-3c+3b-a	.....
c		d-2c+b	⋮	
	d-c			
d		e-2d+c		
	e-d			
e		f-2e+d		
	f-e	⋮		
f	⋮			
⋮				

Posons $\alpha = b - a$; $\beta = c - 2b + a$; $\gamma = d - 3c + 3b - a$; .....

On peut vérifier que S se réécrit :

$$S = \frac{a}{2} - \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{8} - \frac{\gamma}{16} + \frac{\delta}{32} \,.....$$

Euler va appliquer cette méthode à la série hypergéométrique qu'il écrira

$$S = 2! - 3! + 4! - \,..... \text{ puis } \frac{S}{2} = \frac{2!}{2} - \frac{3!}{2} + \frac{4!}{2} \,...$$

après simplification des deux premiers termes. Il trouve

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \,.....$$

il calcule suffisamment loin pour itérer plusieurs fois sa méthode.

A chaque étape il va appliquer un résultat classique sur les séries alternées (ce qu'est la série hypergéométrique) convergentes (ce qu'elle n'est pas), à savoir que la somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives. Il trouvera donc d'abord

$$\partial < S < 1$$

puis en itérant il arrive à :

$$5/16 < S < 7/8$$

et enfin

$$S \cong 0,580.$$

Il est à remarquer que cette méthode ne permettra jamais d'aboutir à une série convergente en partant de la série hypergéométrique, mais redonne bien $\frac{1}{4}$ pour $1 - 2 + 3 - 4 + 5 \,...$

2ème méthode :

Soit $S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ et considérons le tableau des différences finies :

	Δ^1	Δ^2	Δ^3
a_1	$a_2 - a_1$		
a_2		$a_3 - 2a_2 + a_1$	
	$a_3 - a_2$		$a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$
a_3		$a_4 - 2a_3 + a_2$	
	$a_4 - a_3$		
a_4			

Par définition on aura $\Delta a_1 = a_2 - a_1$

$\Delta^2 a_1 = a_3 - 2a_2 + a_1$ etc...

alors :

formule (F) $a_{i+k} = a_i + k\Delta a_i + \dfrac{k(k-1)}{2} \Delta^2 a_i + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 a_i + \dots$

Cette formule n'est évidemment "*valable*" que pour k entier positif ou nul. L'idée d'Euler est d'appliquer cette formule pour k négatif !

Il considère la suite

$P_1 = 1$; $P_{n+1} = n\, P_n + 1$

construite spécialement pour que $\Delta^i P_i = i!$ En faisant dans la formule (F) $i = 1$ et $k = n-1$ il vient :

$$P_n = 1 + (n-1)+(n-1)(n-2)+(n-1)(n-2)(n-3)+ \dots$$

où il y a un nombre fini de termes puis en faisant $n = 0$

$$P_0 = 1 - 1 + 2! - 3! + 4! \dots$$

où il y a un nombre infini de termes. Pour évaluer P_0 qui apparaît ainsi comme le zéro$^{\text{ième}}$ terme d'une suite il va utiliser la même formule (F) et la même méthode pour $a_n = \dfrac{1}{P_n}$ et $a_n = \log_{10} P_n$ ce qui lui permettra de trouver :

$\dfrac{1}{P_0} = 1{,}651740$ donc $P_0 \cong 0{,}60542$

$\log_{10} P_0 = 1{,}7779089$ donc $P_0 \cong 0{,}59966$

valeurs qui corroborent celle trouvée par la première méthode. Euler a décidement de la chance car les conditions nécessaires au bon fonctionnement de cette méthode sont assez restrictives.

3ème méthode :

Euler considère la série entière

$$S(x) = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \ldots$$

et il veut évaluer S(1). Bien sûr, le rayon de convergence de cette série est nul, mais que lui importe. Or par dérivation il remarque que

$$S'(x) + \frac{S(x)}{x^2} = \frac{1}{x}$$

équation différentielle facile à résoudre et qui le conduit à :

$$S(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \int_0^{e^{1-1/x}} \frac{dv}{1-\ln v}$$

D'où les expressions possibles de S(1) obtenues par divers changement de variable :

$$S(1) = e \int_0^1 \frac{e^{-1/t}}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{dv}{1-\ln v} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{1+s}\, ds$$

Il calculera les deux premières intégrales par la méthode des trapèzes, obtenant respectivement 0,59637255 et 0,58734359 avec une subdivision en 10 intervalles, puis il développera en puissance de 1-v la quantité $\frac{1}{1-\ln v}$ qu'il intégrera terme à terme ce qui lui donne :

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \ldots = S(1) = 1 - 1/2 + 1/6 - 1/12 + 1/30 \ldots$$

d'où une nouvelle évaluation de la série de Wallis :

$$S(1) \cong 0,59940472\ldots$$

4ème méthode :

En essayant de développer en fractions continues généralisées

$$\frac{S(x)}{x} = 1 - x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + \ldots$$

il trouve l'expression sympathique :

$$S(x) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{2x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{3x}{1 + \cfrac{4x}{1 + \ldots\ldots}}}}}}}}$$

Il lui suffit ensuite de faire x = 1 et d'arrêter le développement à un ordre quelconque, tout le problème étant d'essayer d'évaluer le reste. A ce propos on notera l'ingéniosité d'Euler qui transforme, majore, minore, fait des hypothèses simplificatrices pour arriver à évaluer le reste comme solution d'une équation du 3ème degré. Après moult calculs il obtient

$$\frac{S(1)}{1} \cong 0,5963473621372\ldots \text{ (*)}$$

*****

Il n'est pas question ici de discuter de la "*validité*" des calculs d'Euler. Le lecteur intéressé se reportera à l'article "*Euler Subdues a very obstreperous series*" de E.J. Barbeau paru dans l'American Mathematical Monthly de mai 1979. Il s'agit plutôt de voir l'excellente habilité d'Euler à faire des calculs et à les vérifier. Dans le fond, Euler ne fait qu'essayer d'appliquer les recettes qui marchent bien pour les polynômes au cas des séries entières. Avec le recul du temps il est facile de voir ce qui va et ne va pas. Mais n'oublions pas qu'Euler ne connaissait pas encore tous les du zoo mathématique, ceux que l'on exhibe aux étudiants quand justement ils font un raisonnement d'un des types vus ci-dessus. Essayons d'être un peu honnête vis à vis d'eux ; bien sûr expliquons leur que le raisonnement est faux mais félicitons les quand même d'avoir eu une si bonne idée. Pensons à Apéry (voir l'Ouvert n° 21, p. 14 et suivantes).

Il est une autre leçon qu'Euler nous donne à travers ses travaux : A l'heure de l'informatique nous pouvons méditer sur sa puissance de calcul : Que donnerait un nouvel Euler avec un simple micro-ordinateur entre les mains ? A ceux qui rechignent de calculer sous prétexte qu'il y a des machines, il est bon de montrer que la machine ne remplace pas le cerveau mais permet d'en décupler les capacités.

(*) Dans l'ouvrage déjà cité p. 26 et suivantes, Hardy démontre que $1 - 1! + 2! - 3! + \ldots = -e\left(\gamma - 1 + \frac{1}{2.2!} - \frac{1}{3.3!} + \ldots\right)$ où γ est la constante d'Euler ce qui conduit à la valeur

0,596347362318... pour la série hypergéométrique.

Pour terminer et pour ramener le lecteur au présent montrons comment un raisonnement à la Euler peut capoter :
Nous avons vu que $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = S = \frac{1}{2}$
en identifiant S avec f(1) où $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1-x}$
mais rien n'interdit d'identifier S avec g(1) où

$$g(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 \quad \ldots$$

$$= (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)(1 - x^2)$$

$$= \frac{1 - x^2}{1 - x^3} = \frac{1 + x}{1 + x + x^2}$$

or ici g(1) vaut 2/3. On peut d'ailleurs s'amuser à obtenir n'importe quel rationnel donné à l'avance. Euler, à qui ce genre de réflexion avait été faite avait fait remarquer que g(1) est plutôt associé à :

$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 \ldots$$

Mais il faut avoir du génie pour pouvoir comprendre intuitivement ce genre de subtilité et les méthodes rigoureuses sont les bienvenues pour ceux qui n'ont que des compétences.

COURRIER

UN PALINDROME MUSICAL

Notre collègue de l'APM, Mme LAMBINET, frappée par la couverture du N°30 de l'OUVERT et par les symétries mode Lefort (1), nous a fait parvenir la copie d'une partition de MOZART, peût-être transcrite pour la guitare.

Son intitulé la destine à deux guitares, et pourtant il n'y a qu'une portée !

Retournez la page de votre OUVERT et vous comprendrez : la partition peut se lire à l'endroit comme à l'envers. Plus fort que " NEWMaN " !

"Mes garçons, ajoute notre lectrice, l'ont déjà joué, partition à l'horizontale entre les deux guitaristes assis face à face".

A regarder les premières mesures, on a l'impression d'avoir affaire à un véritable palindrome musical : entre la guitare 1 et la guitare 2, il y a exactement un octave de différence. Les notes sont les mêmes !

Si toute la partition obéissait à la même règle, on pourrait saluer l'exploit technique, mais son intérêt musical resterait bien limité : deux instruments jouent une mélodie à l'unisson. C'est effectivement le cas pour les trois premières mesures. A la quatrième, première exception : la guitare 1 se tait et un accord résonne à la deuxième . A la cinquième l'écart n'est plus d'un octave, mais d'une tierce. A la sixième, noires et croches sont permutées. A la septième, c'est une quarte d'écart. A la huitième, un décalage des mélodies s'introduit...

Ce sont les exceptions qui font apprécier les règles ! Il y a peut-être là plus qu'une boutade.

Les symétries, ou plutôt les régularités, sont présentes dans bien des règles de composition de la musique classique et il serait bien ambitieux d'en vouloir dresser la liste.

Signalons un autre exploit lié aux symétries, et dont l'intérêt proprement musical est exceptionnel : ce sont deux versions de la Fugue à quatre voix n°16, extraite de l'Art de la Fugue de J.S. BACH (voir page le début de ces deux partitions).

Entre les versions rectus et inversus, le compositeur a permuté les voix extrêmes, ainsi que les voix moyennes, et dans chacune d'elles, la mélodie a également subi une *"symétrie horizontale""*. Et tout celà fonctionne admirablement ! Il est difficile de ne pas rester rêveur.

(1) "La symétrie n'est plus ce qu'elle était" OUVERT N°30, p39.

Drei Scherzduette für zwei Gitarren

W.A. Mozart (1756-1791)
Herausgegeben von Siegfried Behrend

Gitarre 1

I Allegro (♩ = 152)

I Allegro (♩ = 152)

Gitarre 2

Herausgegeben von Siegfried Behrend
W.A. Mozart (1756-1791)

Drei Scherzduette für zwei Gitarren

CONTRAPUNCTUS XVI

Fuga a 4 voci

RECTUS

...

CONTRAPUNCTUS XVI

Fuga a 4 voci

INVERSUS

...

ESPACE VECTORIEL ?
CONNAIS PAS !

A la rentrée 83, la grande majorité des élèves entrant en Terminale devraient ignorer le terme "espace vectoriel". Les ex-élèves de Première S en auront entendu la définition, *"en vue de faciliter la communication"*, mais leurs professeurs, mis en garde par le programme, n'en auront fait aucune étude générale.

Certains lèveront les yeux au ciel en pensant au bon temps où les axiomes d'espace vectoriel s'annonaient en Quatrième. D'autres prendront un air entendu en songeant au bon vieux temps où l'on ignorait superbement l'Algèbre Linéaire (*)... Et une fois les états d'âme passés, il faudra se mettre au travail.

Or la façon d'aborder l'Algèbre Linéaire, le moment de l'introduire, ont considérablement changé avec les nouveaux programmes de mathématique. L'entrée en scène tardive des espaces vectoriels est à rapprocher de la réserve des textes officiels à propos du terme "vecteurs". Un tableau comparatif des anciens et nouveaux programmes, portant seulement sur l'Algèbre Linéaire, permettra de mieux saisir l'ampleur du changement :

(*) Il faut noter que le terme "Algèbre Linéaire" fait seulement son apparition dans les programmes 83.

ANCIENS PROGRAMMES

. **Classe de quatrième**

Programme :

Equipollence de bipoints. C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.
Direction d'un vecteur non nul.
Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.
Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repères du plan ; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère.
Exercices de calcul vectoriel ; médianes d'un triangle.

Commentaires :

Vecteur
La classe d'équivalence du bipoint (A,B) s'appelle un vecteur du plan (on disait autrefois un vecteur libre) ; elle se note $\overrightarrow{AB}$; donc la notation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}$ signifie que le bipoint (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{V}$, la notation $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PQ}$ signifie que les bipoints (A,B) et (P,Q) sont équipollents.
Addition des vecteurs
Etant donné un vecteur $\overrightarrow{V}$, si à tout point M on associe le point M', tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$, on définit une application bijective du plan sur lui-même, dite translation du vecteur $\overrightarrow{V}$.

...

(suivent les divers axiomes d'espace vectoriel, obtenus comme propriétés de l'ensemble des vecteurs du plan)

NOUVEAUX PROGRAMMES

. **Classe de quatrième**

Programme :

Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs.

Commentaire :

(...) les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves (...)

ANCIENS PROGRAMMES	NOUVEAUX PROGRAMMES
Décomposition d'un vecteur, coordonnées On appelle base de l'ensemble des vecteurs tout couple $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ de vecteurs de directions différentes. Tout vecteur $\vec{V}$ est, d'une manière et d'une seule, combinaison linéaire de $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$...	
. Classe de Troisième rien	**. Classe de Troisième** *Programme :* Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Equations d'une droite dans un repère. *(commentaire commun avec la 4°)*
. Classe de Seconde C *Programme* Définition des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, de leurs sous-espaces vectoriels, de la dépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Bases et dimension, coordonnées d'un vecteur dans une base : définition et exemples ; l'espace des "vecteurs du plan" a une infinité de bases qui ont toutes deux éléments. (L'existence générale et la non-unicité des bases, la notion de dimension seront admises : aucune démonstration générale ne sera faite à ce sujet.) L'intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Applications linéaires. Définition, exemples (homothéties, projections...). Isomorphismes d'un espace vectoriel sur un autre : une base à p éléments d'un espace vectoriel E détermine un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^p$.	**. Classe de Seconde** *Programme* Fréquentation directe des figures ; Familiarité avec le calcul dans un repère ; Ecriture vectorielle. A propos du théorème de Thalès, on soulignera l'aspect suivant qui est l'un des plus importants : dans une projection parallèle d'un axe du plan sur un autre, l'abscisse se transforme par une application affine. Homothétie ; formules analytiques de la translation, de l'homothétie. Barycentre de deux points pondérés, d'un système de points (jusqu'à quatre).

ANCIENS PROGRAMMES	NOUVEAUX PROGRAMMES

Sur des exemples, image et noyau d'une application linéaire.
Equations linéaires : système de deux équations linéaires à deux inconnues.
Commentaires : ils sont abondants et détaillés. On y trouve en particulier :
- La première phrase de ce paragraphe, "introduction à la locution "espace vectoriel"", le début de la troisième, "combinaison linéaire de vecteurs du plan" - alors que l'expression "plan vectoriel" n'apparaît qu'ensuite -, suggèrent une démarche progressive s'appuyant sur les résultats des paragraphes précédents. Le professeur sera donc amené à reprendre et à compléter les faits connus du plan et à les traduire en langage d'espace vectoriel ; ainsi, deux vecteurs du plan sont linéairement dépendants s'ils appartiennent à une même droite vectorielle, en particulier si l'un d'eux est nul.

On arrive ainsi à l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = \lambda \vec{u} + \mu\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs donnés linéairement indépendants, λ et μ parcourant R ; c'est un "espace vectoriel de dimension 2", que le programme appelle plan vectoriel. Dans un plan vectoriel, tout système de trois vecteurs ou plus est nécessairement formé de vecteurs linéairement dépendants.

Une base d'un tel plan est formée de deux vecteurs (i,j) linéairement indépendants ; sous son aspect géométrique, il est clair qu'un plan vectoriel possède une infinité de bases. Certains professeurs préféreront peut-être donner plus tôt les axiomes définissant la structure d'un plan vectoriel et démontrer par un raisonnement algébrique que tout système de deux vecteurs linéairement indépendants d'un plan vectoriel en est une base.

. Classe de Première C

Programme :

1° Espaces vectoriels sur R ; définition et exemples (révision).
Sous-espace vectoriel. Vecteurs linéairement dépendants, indépendants. Base.
2° Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée ; coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel.
Condition de dépendance de deux vecteurs.

Commentaires : ils sont également abondants, fort détaillés, et d'un style bien typé :

Espaces vectoriels.
En Seconde, le programme a prévu une initiation prudente, progressive à la définition d'un espace vectoriel sur R ; en Première, la notion est désormais acquise et les définitions prévues seront données ici sous leur forme générale bien que leur exploitation ultérieure (IV, V et classe Terminale) ne concerne que des espaces vectoriels et affines de dimension $n \leqq 3$.

(...)

Dépendance et indépendance linéaires.
Soit une application de l'intervalle $I = [1, r]$ de $\mathbb{N}$ dans E, donnant $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots \overrightarrow{v_r})$:
si elle est injective, $\mathcal{F}$ est une "partie finie" ordonnée de E.

(...)

. Classe de Première S

Programme : (géométrie plane)

Le professeur procèdera à un rappel rapide (sans démonstration) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle.
Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme ; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espace vectoriel que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan (§ V), de l'espace (§ VI).
L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points.
a) Colinéarité de deux vecteurs ; vecteurs directeurs d'une droite.
Bases ; repères.

ANCIENS PROGRAMMES

Les notions conjointes de base et de dimension d'un espace vectoriel sont fondamentales ; leur exposition demande un grand soin et l'on peut la diriger, par exemple, de proche en proche, comme il suit : on montrera qu'il existe des espaces vectoriels ayant une base à 1, 2, 3 éléments.

(...)

Extension.

Un raisonnement par récurrence vient d'être amorcé, et le programme ne demande pas de l'achever, qui permet de démontrer que si un espace vectoriel a une base de n éléments :

- toute autre base a aussi n éléments ;
- toute partie libre a au plus n éléments ; si elle en a n, c'est une base ;
- toute partie génératrice a au moins n éléments ; si elle en a n, c'est une base.

Pour $n > 3$, seul le premier résultat doit être connu des élèves, car il justifie la notion de dimension.

(...)

. Classe de Terminale C :

Programme :

1. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels supplémentaires. Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F : image et noyau. Addition et composition des applications linéaires. Groupe linéaire. Homothéties vectorielles.

NOUVEAUX PROGRAMMES

Commentaires.

L'essentiel est l'étude des configurations classiques du plan et des effets des transformations sur ces figures ; le calcul vectoriel est un outil puissant et en particulier le théorème de la médiane peut intervenir de façon très utile dans le plan comme dans l'espace. Dans l'espace la nouveauté est le calcul vectoriel. La notion de vecteur est déjà familière à l'élève dans le plan. Sa bonne compréhension dans l'espace repose sur une claire connaissance, dès le début de l'année, des propriétés d'incidence.

. Classe de Terminale C :

Programme :

Les définitions d'un espace vectoriel et d'une application linéaire ont été vues en Première, on les complètera par celle d'un sous-espece vectoriel. Il s'agit de mettre ces notions en oeuvre sur des exemples variés d'espaces de dimension finie, en s'appuyant sur l'étude du modèle fondamental $\mathbb{R}^n$; dans les exercices et problèmes l'entier n sera numériquement fixé (de façon raisonnable).

. **Classe de Terminale C**

Programme (suite) :

a) Opérations dans $\mathbb{R}^n$, base canonique :

Etude des combinaisons linéaires d'une famille de p éléments de $\mathbb{R}^n$; cette étude conduit à dégager :

La notion de sous-espace vectoriel engendré ;

La représentation, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'une famille finie par une matrice ;

La détermination d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par les images des éléments de la base canique de $\mathbb{R}^p$, et par conséquent par la matrice de ces images dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On remarquera que la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Les matrices n'ayant ici qu'un rôle représentatif, il est exclu de développer le calcul matriciel : somme et produit de matrices sont hors du programme.

b) Interprétations d'un système linéaire de n équations à p inconnues :

Recherche des décompositions d'un vecteur ;

Recherche des antécédents de ce vecteur dans une application linéaire.

Dans $\mathbb{R}^n$: familles finies génératrices, familles finies liées, libres ; bases.

c) Opérations élémentaires $L_i \to L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$ sur les lignes d'une matrice.

Méthode du pivot de Gauss (recherche d'une forme triangulaire de la matrice) ; sa mise en oeuvre pour déterminer si une famille finie de vecteurs est une base, est libre, est génératrice.

Cette étude permet d'obtenir les résultats fondamentaux suivants :

Toute base de $\mathbb{R}^n$ a exactement n éléments ;

Toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ a au plus n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments ;

Toute famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ a au moins n éléments, et c'est une base si et seulement si elle a n éléments ;

Théorème de la base incomplète.

d) Exemples numériques de résolution d'un système d'équations linéaires par opérations élémentaires sur les lignes.

e) Espaces vectoriels de dimension finie :

Bases. Isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$ d'un espace vectoriel muni d'une base comprenant n vecteurs. Dimension.

Un endomorphisme injectif (resp. surjectif) d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif.

Sous-espace vectoriels supplémentaires ; projections, symétries.

. Classe de Terminale C

Commentaire

Les programmes des classes précédentes, par l'étude des vecteurs tant géométrique qu'analytique, et par celle des systèmes d'équations linéaires, préparent à l'algèbre linéaire, qui constitue en Terminale un objectif spécifique.

Il est nécessaire de se garder, à ce stade, d'un exposé trop formel et de trop grandes ambitions intrinsèques : car il s'agit, avant tout, de faciliter une attaque efficace de problèmes numériques ou géométriques.

L'introduction des opérations élémentaires est dans la ligne des méthodes déjà préconissées en Seconde. Elle a un double objectif : définir des moyens de démonstration pour une théorie brève de la dimension : mais aussi assurer, pour le traitement pratique des systèmes numériques, des méthodes algorithmiques particulièrement efficaces.

> La méthode de pivot s'introduit aisément à la faveur d'interprétations de diverses natures, mais qui toutes se relient à l'écriture vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_p\vec{a}_p = \vec{b}$, dans R^n, d'une équation linéaire à p inconnues. On imaginera par exemple que les vecteurs seraient mieux représentés dans une base où on pourrait faire, pour certains d'entre eux, l'économie d'une coordonnée ; on est ainsi amené à des modifications élémentaires de la base, reposant sur un déplacement de termes : tel vecteur qui s'écrit $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} + t\vec{l}$ peut aussi s'écrire : $x(\vec{i} - \lambda\vec{j}) + (y + \lambda x)\ j + z\vec{k} + \vec{tl}$, et, si x n'est pas nul, le choix de λ permettra d'anuler la seconde coordonnée ; il est aisé de s'assurer que si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{l})$ est une base, $(\vec{i} - \lambda\vec{j},\vec{j},\vec{k},\vec{l})$ en est une autre.

En ce qui concerne l'extension aux espaces vectoriels munis d'une base des notions de familles liées, libres, génératrices et de celle de dimension, il est inutile de reprendre toute la théorie faite dans $\mathbb{R}_n$; l'essentiel est de faire comprendre aux élèves, à propos de ces questions figurent au programme mais aussi grâce aux exemples traités en problème, comment la donnée d'une base permet de se ramener au cas de $\mathbb{R}^n$; on n'envisagera que des situations conduisant à un espace de dimension finie.

L'article portant sur le pivot de Gauss qui va suivre a été rédigé par l'un des professeurs membre du groupe Géométrie que l'I.R.E.M. de Strasbourg a constitué pour la rédaction des manuels de Terminale (*). Il prend en compte l'évolution des programmes sur les points suivants :

1) Il donne une méthode systématique, algorithmique, de résolution des systèmes d'équations affines.

2) Il relie deux façons bien différentes d'envisager un sous-espace vectoriel de R^n : d'un côté l'objet construit en soumettant les vecteurs d'une famille données aux opérations de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De l'autre, l'objet constitué par les vecteurs du noyau d'une application linéaire. Ces deux objets sont des sous-espaces vectoriels, l'un engendré par une famille de vecteurs, l'autre défini par un système d'équations linéaires.

3) Il donne accès aux théorêmes de la dimension finie.

Certains lecteurs ont probablement déjà connaissance de cet article, diffusé après les journées pédagogiques consacrées aux programmes de Terminale. Nous avons cependant estimé qu'en raison de son intérêt à la fois pratique et théorique, il devait figurer dans l'Ouvert, qui est lu par bien d'autres collègues.

L'OUVERT

(*) Au cas où cette publication serait comprise comme une publicité pour le dit manuel, François Pluvinage, directeur de l'I.R.E.M., tient à préciser que les droits d'auteur des ouvrages portant le label I.R.E.M. ne reviennent qu'à l'I.R.E.M. Ils contribuent donc en particulier ... à la parution de l'Ouvert.

RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DU PIVOT DE GAUSS

§ 1. MATRICE COMPLETE D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \quad - x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

La matrice complète (S) du système est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

La matrice complète (S) du système de p équations linéaires à n inconnues $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \dots + a_{pn}\, x_n = b_p \end{cases}$$

est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} \cdots\cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

C'est une matrice à p lignes et n + 1 colonnes

§ 2. SYSTEME LINEAIRE EN ECHELONS

Exemple :

$$\begin{cases} 2\boxed{x_1} + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad \boxed{x_3} + 2x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 3\boxed{x_4} = 1 \end{cases} \qquad (S) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 \end{array}\right)$$

Définitions : On appelle **matrice en échelons** une matrice telle que :
1) si une ligne a son premier coefficient non nul dans la colonne de numéro k, alors les coefficients de la ligne suivante jusqu'à la colonne k comprise sont tous nuls.
2) si une ligne a tous ses coefficients nuls, il en est de même des lignes suivantes.

Les premiers coefficients non nuls des lignes d'une matrice en échelons sont appelés **coefficients principaux** de la matrice.

Un système d'équations linéaires est dit en échelons si sa matrice complète est en échelons. Une **inconnue** est dite **principale** si l'un de ses coefficients est principal. Une inconnue non principale est dite **secondaire.**

Méthode : On résout les équations successivement en partant de la dernière. On exprime les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Application à l'exemple précédent :
Les inconnues principales sont encadrées dans le système. Les coefficients principaux sont encadrés dans la matrice.
L'ensemble des solutions du système est formé des vecteurs :

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 \text{ est réel.}$$

§ 3. EQUIVALENCE DE SYSTEMES. OPERATIONS ELEMENTAIRES

Définition : Deux systèmes d'équations linéaires à n inconnues sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition : On appelle **opération élémentaire** sur un système S chacune des règles suivantes :
1) choisir deux entiers i et j avec $1 \leqq i < j \leqq p$ et échanger les lignes L_i et L_j de S.
2) choisir deux entiers i et j distincts (compris entre 1 et p) et remplacer la ligne L_i de S par $L'_i = L_i + \lambda L_j$ où λ est un nombre réel.

Théorème : Soit S un système d'équations linéaires. Le système S' obtenu en effectuant une opération élémentaire sur la matrice complète de S est équivalent à S.

Conclusion : Pour résoudre un système d'équations linéaires, nous allons le transformer en un système en échelons, que nous savons résoudre. La méthode utilisée pour cette transformation est celle du pivot de Gauss.

§ 4. LA METHODE DU PIVOT

Proposition : Soit (S) une matrice dont la première colonne n'est pas nulle. Par une succession d'opérations élémentaires, la matrice (S) peut être transformée en une matrice (S') dont la première colonne a tous ses coefficients nuls, sauf le premier.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Puis on itère le procédé pour obtenir une matrice en échelons.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients encadrés s'appellent les **pivots**.

§ 5. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Méthode : Soit S un système de p équations linéaires à n inconnues. Résoudre S par la méthode du pivot, c'est :

1) Ecrire la matrice complète (S) du système et la transformer en une matrice (S') en échelons, par la méthode du pivot.

2) Résoudre le système en échelons dont la matrice complète est (S').

Exemple : Soit le système S :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 = 1 \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$(S) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

D'après l'exemple précédent, le système S est équivalent au système S' :

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \quad \boxed{x_2} - x_3 + x_4 = -3 \\ \quad\quad 2\boxed{x_3} - 4x_4 = 12 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système S est formé des vecteurs :

$$X = \begin{pmatrix} -8 \\ 3+x_4 \\ 6+2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_4 \text{ est réel}$$

SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbb{R}^n$

Nous allons montrer comment il est possible d'exploiter la méthode du pivot dans des problèmes d'algèbre linéaire.

Nous envisageons deux types de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$:

1) ceux qui sont obtenus comme solutions d'un système homogène de p équations linéaires à n inconnues ; les équations du système sont appelées **équations du sous-espace.**

2) ceux qui sont obtenus comme combinaisons linéaires de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ces k vecteurs engendrent le sous-espace.

Nous nous proposons de résoudre les deux problèmes suivants :

1) étant donné un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ défini par un système homogène d'équations linéaires, déterminer une famille génératrice de V.

2) étant donné un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ engendré par une famille de vecteurs, déterminer un système d'équations de V.

§ 1. DES EQUATIONS AUX GENERATEURS

On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^5$ défini par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Nous utilisons la méthode du pivot pour transformer ce système homogène d'équations linéaires en un système homogène en échelons :

$$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -4\boxed{x_2} - 7x_3 + x_4 = 0 \\ -3\boxed{x_4} - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble V est constitué des vecteurs de la forme :

$$X = x_3 \begin{pmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 A_3 + x_5 A_5$$

$$\text{où} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -5/4 \\ -7/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A_3 est la solution du système définie par : $x_3 = 1$ et $x_5 = 0$

A_5 est la solution du système définie par : $x_3 = 0$ et $x_5 = 1$

A_3 et A_5 engendrent V.

Définition : Soit (S) la matrice d'un système homogène S d'équations linéaires, en échelons, non déterminé (S admet d'autres solutions que le vecteur nul). Soit x_i une inconnue secondaire de S. On appelle **solution fondamentale** de S associée à x_i la solution déterminée en donnant à x_i la valeur 1 et la valeur 0 aux autres inconnues secondaires de S.

Théorème : Soit S un système homogène en échelons. Le sous-espace vectoriel de ses solutions est engendré par la famille des solutions fondamentales de S ; il y a autant de solutions fondamentales que d'inconnues secondaires.

Remarque : Si S est un système homogène en échelons déterminé, le sous-espace vectoriel de ses solutions est réduit au vecteur nul.

Conclusion : Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ des solutions d'un système homogène S d'équations linéaires. Pour chercher une famille génératrice de V on applique la procédure suivante :

1) On transforme S en un système équivalent S' en échelons.
2) Si S' est déterminé, V est réduit au vecteur nul.
   Si S' est non déterminé, on calcule ses solutions fondamentales ; elles engendrent V.

§ 2. DES GENERATEURS AUX EQUATIONS

Définition : Soit $A_1, \ldots, A_k$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $(A_1, \ldots, A_k)$ la matrice à n lignes et k colonnes obtenue en écrivant les vecteurs-colonnes $A_1, \ldots, A_k$ successivement. On l'appelle **matrice de la famille.**

Remarque : L'égalité $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k = B$, où les λ_i sont des nombres réels signifie que le vecteur de coordonnées $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ est solution du système d'équations linéaires de matrice complète $(A_1, A_2, \ldots, A_k, B)$.

Exemple : Considérons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ noté V engendré par

les vecteurs $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et

cherchons un système homogène S à quatre inconnues, dont V soit l'ensemble des solutions.

Un vecteur X de $\mathbb{R}^4$ de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 appartient à V si et seulement si on peut déterminer des nombres λ_1 et λ_2 tels que $X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$. Ceci signifie que le système d'équations (A_1, A_2, X) admet une solution.

Nous cherchons les relations que doivent vérifier x_1, x_2, x_3, x_4 pour que

le système $\begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ 2 & -2 & x_4 \end{pmatrix}$ soit compatible.

Utilisons la méthode du pivot.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \\ 2 & -2 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & \boxed{-5} & x_2-2x_1 \\ 0 & 4 & x_3+x_1 \\ 0 & -8 & x_4-2x_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -5 & x_2-2x_1 \\ 0 & 0 & -3/5x_1 + 4/5x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 6/5x_1 - 8/5x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

Le système précédent est équivalent au système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x_1 \\ \quad -5\lambda_2 = x_2 - 2x_1 \\ \quad 0 = -3/5x_1 + 4/5x_2 + x_3 \\ \quad 0 = 6/5x_1 - 8/5x_2 + x_4 \end{cases}$$

Ce système est compatible si et seulement si les coordonnées du vecteur X vérifient :

$$\begin{cases} 0 = -3/5x_1 + 4/5x_2 + x_3 \\ 0 = 6/5x_1 - 8/5x_2 + x_4 \end{cases}$$

Ce système de deux équations à quatre inconnues définit V.

<u>Conclusion</u> : Soit $A_1, \ldots, A_k$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit V le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par ces k vecteurs. Pour obtenir un système d'équations de V, on cherche les **conditions de compatibilité** du système de matrice complète $(A_1, A_2, \ldots, A_k, X)$.

BASES - DIMENSION

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment le point de vue choisi de la méthode du pivot conduit naturellement à la notion de dimension.

§ 1. DEPENDANCE LINEAIRE

Théorème :

1) La famille $A_1, \ldots, A_k$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **liée** si et seulement si la relation $x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = 0$ est vérifiée pour des nombres $x_1, \ldots, x_k$ non tous nuls ; en d'autres termes si le système homogène $(A_1, \ldots, A_k)$ a une solution non nulle.

2) La famille $A_1, \ldots, A_k$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **libre** si et seulement si la relation $x_1A_1 + \ldots + x_kA_k = 0$ n'est vérifiée que pour $x_1 = \ldots = x_k = 0$; en d'autres termes si le système homogène de matrice $(A_1, \ldots, A_k)$ est déterminé.

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^4$ la famille de quatre vecteurs :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour voir si cette famille est libre, résolvons le système homogène de matrice (A_1, A_2, A_3, A_4).

Ce système est en échelons d'inconnues principales x_1, x_2, x_3 d'inconnue secondaire x_4.

Il admet une seule **solution fondamentale** obtenue en donnant à x_4 la valeur 1.

On obtient :

$$-2A_1 + A_2 + A_4 = 0$$

Le système est lié.

Règle : Soit $A_1, \ldots, A_k$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et V le sous-espace vectoriel qu'elle engendre. On peut toujours en extraire une famille libre engendrant V ; pour cela :

1) on transforme la matrice $A = (A_1 \ldots A_k)$ en une matrice B en échelons et l'on note les numéros des colonnes de B qui contiennent **les coefficients principaux.**

2) les colonnes de A portant ces numéros constituent une famille **libre** engendrant V.

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^4$ la famille de quatre vecteurs ayant pour matrice :

$$A = (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformons cette matrice en une matrice B en échelons.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & \boxed{1} \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Les vecteurs B_1, B_2, B_3, B_4 vérifient la relation de dépendance

$5B_1 - 3B_2 + B_3 = 0$ (obtenue en donnant à x_3 la valeur 1)

Les vecteurs B_1, B_2, B_4 sont linéairement indépendants ; il en est de même des vecteurs A_1, A_2, A_4 qui constituent une famille libre engendrant V.

Définition : On appelle base d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ toute famille libre engendrant V.

§ 2. DIMENSION

Thèorème fondamental : Si deux familles libres dans $\mathbb{R}^n$ engendrent le même sous-espace vectoriel, elles ont le même nombre d'éléments.

Pour démontrer ce thèorème fondamental de la dimension, on utilise le thèorème suivant et son corollaire.

Thèoréme : Soit $A_1, \dots, A_k$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $B_1, \dots, B_p$ une famille de vecteurs appartenant au sous-espace $V = \langle A_1, \dots, A_k \rangle$ engendré par la famille $A_1, \dots, A_k$. Si $p > k$ la famille $B_1, \dots, B_p$ est liée.

Dans la démonstration de ce théorème, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires homogène de k équations à p inconnues, lorsqu'on cherche une relation de dépendance entre les vecteurs $B_1, \dots, B_p$.

Corollaire : Soient $A_1, \dots, A_k$ et $B_1, \dots, B_p$ deux familles libres dans $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$\langle B_1, \dots, B_p \rangle \subset \langle A_1, \dots, A_k \rangle$$

Alors on a nécessairement $p \leq k$.

Théorème : Soit $A_1, \dots, A_n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Chacune des conditions suivantes est suffisante pour affirmer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^n$:

1) La famille $A_1, \dots, A_n$ est libre.
2) La famille $A_1, \dots, A_n$ engendre $\mathbb{R}^n$.
3) La méthode du pivot transforme la matrice $A = (A_1, \dots, A_n)$ en une matrice en échelons sans zéro sur la diagonale principale.