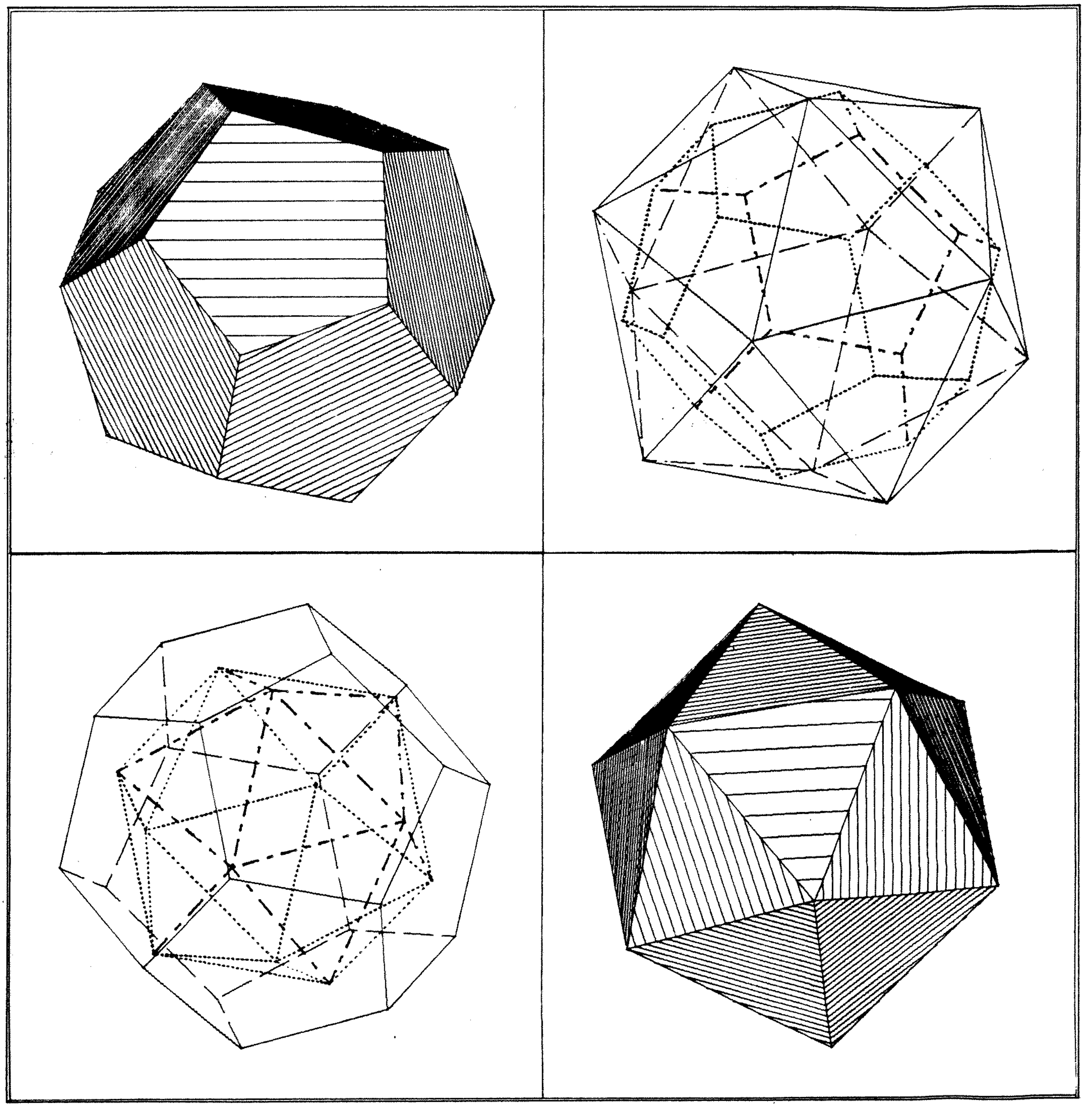
l'ouvert n°32

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE
STRASBOURG - SEPT. 83 - ISSN 0290-0068



NOTRE COUVERTURE : DODECAÈDRE ET ICOSAÈDRE

Les plus beaux des polyèdres réguliers sont duaux l'un de l'autre, ce que la transposition de leurs nombres respectifs de faces et de sommets met en évidence. Le présenter sur un dessin n'est pas si facile, sauf si l'on a à sa disposition un micro-ordinateur, une table traçante, et si l'on possède quelque virtuosité dans le maniement du premier !
Voir article p. 8.

EDITORIAL

Bonne fin d'année !

D'accord, l'année scolaire vient seulement de commencer, et l'évocation de son achèvement peut paraître provocatrice.
Trois justifications me paraissent avouables :
1. Cet éditorial est daté du 5 juillet... Pour son auteur, le début de l'année scolaire 83-84 est encore bien abstrait.
2. Les propos échangés en salle des professeurs ou dans les cours de récréation portent plutôt sur les "*grandes vacances*" que sur l'année scolaire.
3. La fin d'année scolaire influe grandement sur son déroulement, modulo un nombre entier d'années. Ce n'est pas un paradoxe : cette année 83-84 est celle des nouveaux programmes de mathématique en Terminale et par conséquent inaugurera de nouveaux sujets au baccalauréat. Or, chacun d'entre nous sait bien que l'étude des énoncés proposés conditionne, non seulement les objectifs que se fixent les professeurs chargés des classes de Terminale, mais aussi, par rétroaction, ceux des classes précédentes.
Tant que l'institution bachique (il n'y a là aucune référence à Bacchus...) restera vaillante, il sera impossible de contourner cet effet pervers, dont l'origine remonte à Napoléon.
Espérons que les sujets qui seront retenus cette année n'iront pas dans le sens des "*mathématiques frileuses*" dénoncées par les auteurs d'un manuel de Terminale.
On est cependant en droit d'éprouver quelques inquiétudes à ce propos : certains manuels de Terminale proposent déjà en fin de chapitre des problèmes de type "*bac 84*". Quelle prémonition !
Mais qui élabore les sujets du bac ? Des commissions de professeurs de l'enseignement public, soucieux de tester les connaissances et les aptitudes des élèves, conformément aux programmes, ou les équipes recrutées par les éditeurs pour rédiger les manuels ?
Réponse dans dix mois.

E. CHANEY

SOMMAIRE

L'OUVERT

. **responsable de publication : J. Lefort**
. **rédaction : G. Glaeser et E. Chaney**
. **correspondance à adresser à :**
IREM de Strasbourg
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
. **participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 60.- F**
. **disponible à la Bibliothèque de l'IREM**

UN NOUVEAU MANUEL RÉVÉLÉ PAR L'OUVERT !

Les nouveaux programmes reviennent - enfin ! - à une conception plus raisonnable des notions mathématiques fondamentales.
Notons à ce propos que si les modes passent, les valeurs sûres (nombre, valeur absolue, fonction, limite, continuité, trigonométrie, etc...) restent.
Un important éditeur parisien, que nous désignerons par le sigle A.C. pour respecter son désir momentané d'anonymat, nous a fait parvenir les épreuves typographiques d'extraits du manuel qu'il compte prochainement mettre sur le marché.
L'OUVERT, qui ne sert à cette occasion d'autres intérêts que ceux de la Science, tient à faire profiter ses lecteurs de cette avant-première.

Les limites apprivoisées

Sur ce sujet tant controversé, les auteurs du manuel de A.C. ne mâchent pas leurs mots :

109. Définitions. — I. On dit qu'une fonction y, de la variable x, a pour *limite* b, lorsque x *tend* vers a, si, à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x - a| < \alpha \quad ,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y - b| < \varepsilon,$$

sauf, peut-être, pour $x = a$.

Exemples. — D'après cette définition, on dit que y a pour limite *zéro*, quand x tend vers a, si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif α tel que l'inégalité

$$|x - a| < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$|y| < \varepsilon.$$

Ainsi, toute puissance positive de x a pour limite zéro, quand x tend vers zéro; ce qu'on exprime plus brièvement en disant que *toute puissance positive de* x *tend vers zéro en même temps que* x.

Soit, en effet, x^n une puissance positive de x ($n > 0$); si on a

$$| x | < \varepsilon^{\frac{1}{n}}$$

on aura, évidemment,

$$| x^n | < \varepsilon.$$

Le nombre α est donc, ici, égal à $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. — La définition précédente n'est, au fond, qu'une façon d'exprimer, sous une forme *précise*, le fait suivant : on peut donner à la variable x des valeurs assez voisines de la valeur a pour que les valeurs correspondantes de y diffèrent d'aussi peu qu'on le voudra de la valeur b (puisqu'on peut choisir ε aussi petit qu'on le voudra).

Lorsqu'une quantité y a pour limite b, elle finit par être supérieure à tout nombre fixe inférieur à b et par être inférieure à tout nombre fixe supérieur à b ; car elle finit par être comprise entre $b + \varepsilon$ et $b - \varepsilon$, ε pouvant être aussi petit qu'on le veut.

II. On dit qu'une fonction y, de la variable x, *croît indéfiniment*, quand x *tend* vers a, si, à tout nombre positif A (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$| x - a | < \alpha,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$| y | > A,$$

sauf, peut-être, pour $x = a$.

Lorsqu'une quantité y croît indéfiniment, son inverse $\frac{1}{y}$ tend vers zéro et *vice versa*.

Exemple. — *Toute puissance négative de* x *croît indéfiniment quand* x *tend vers zéro.*

Soit x^{-n} une puissance négative de x ($n > 0$).

Si on a

$$| x | < \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}},$$

on aura

$$| x^n | < \frac{1}{A}$$

et, par suite (n° 22, *Th. III*),

$$| x^{-n} | > A.$$

Le nombre α, qui correspond à A, est donc, ici, $A^{-\frac{1}{n}}$.

Remarque. — La définition précédente exprime, sous une forme précise, le fait suivant : en donnant à x des valeurs suffisamment voisines de a, les valeurs absolues des valeurs correspondantes de y deviennent aussi grandes qu'on le voudra, c'est-à-dire, surpassent tout nombre positif A choisi à l'avance.

Lorsqu'une quantité y croît indéfiniment, elle peut le faire de deux façons : soit en étant *positive* et on dit, alors, qu'elle *croît indéfiniment par valeurs positives* ; soit en étant négative et on dit, alors, qu'elle *croît indéfiniment par valeurs négatives*.

III. On dit que la fonction y, de la variable x, a pour *limite* b, quand x *croît indéfiniment*, lorsqu'à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra) on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x| > A,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y - b| < \varepsilon .$$

EXEMPLE. — *Lorsque* x *croît indéfiniment, une puissance négative quelconque de* x *tend vers zéro.*

Soit x^{-n} $(n > 0)$ une puissance négative de x.

Pour que l'on ait

$$|x^{-n}| < \varepsilon,$$

il suffit que l'on ait

$$|x| > \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}}.$$

Le nombre A, qui correspond à ε, est donc $\varepsilon^{-\frac{1}{n}}$.

Remarque. — Au fond, la définition précédente exprime que l'on peut donner à x des valeurs suffisamment grandes en valeur absolue pour que y diffère de b d'aussi peu qu'on le voudra.

IV. On dit que la fonction y, de la variable x, *croît indéfiniment, en même temps que* x, lorsqu'à tout nombre positif P, donné à l'avance (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif A tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité

$$|x| > A,$$

les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité

$$|y| > P.$$

EXEMPLE. — *Toute puissance positive de* x *croît indéfiniment, en même temps que* x.

Soit, en effet, x^n une puissance positive de x ; si on a

$$|x| > P^{\frac{1}{n}}.$$

on aura :

$$|x^n| > P.$$

Le nombre A, qui correspond au nombre P, est donc, ici, $P^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. — Cette dernière définition exprime, sous une forme rigoureuse, le fait suivant : on peut donner à x des valeurs assez grandes pour que y prenne des valeurs aussi grandes qu'on le voudra, en valeur absolue.

Pour désigner les signes de x et y, lorsqu'ils croissent indéfiniment, on emploie, comme nous l'avons déjà indiqué, les signes abréviatifs $-\infty$ et $+\infty$ (n° 64). Ainsi, pour dire que, lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives, y croît indéfiniment par valeurs négatives on dit, d'une façon abrégée, que, pour $x = +\infty$, on a $y = -\infty$. Mais il faut bien se garder de donner à ces signes $+\infty$ et $-\infty$ d'autre signification que celle que nous venons de leur donner. Ces signes ne représentent *aucune grandeur numérique*, car il n'y a pas de nombre plus grand ou plus petit que tous les autres .

110. Théorème. — *Lorsque deux fonctions, d'une même variable* x, *sont égales pour toutes les valeurs de* x, *sauf peut être pour la valeur*

$x = a$, *si l'une d'elles a une limite, quand* x *tend vers* a, *l'autre en a une qui est la même.*

Soient, en effet, deux fonctions y et z, de x, égales pour toutes les valeurs de x, sauf peut-être pour $x = a$.

Dire que y a pour limite b, quand x tend vers a, c'est, par définition, dire qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre α tel que l'inégalité

$$| x - a | < \alpha$$

entraîne l'inégalité

$$| y - b | < \varepsilon,$$

sauf peut-être pour $x = a$. Or, comme on a toujours

$$z = y,$$

sauf peut-être pour $x = a$, on aura, pour les mêmes valeurs de x,

$$| z - b | < \varepsilon$$

et, par suite, z a pour limite b.

Application. — Ce théorème important nous permet de préciser la notion de la *vraie valeur* d'une fraction *indéterminée*, notion que nous avions déjà indiquée (n° 53).

Lorsqu'une fraction se présente sous une forme indéterminée, pour $x = a$, on appelle *vraie valeur* de cette fraction *la limite vers laquelle elle tend*, lorsque x tend vers a (si cette limite existe).

Cette nouvelle définition de la vraie valeur paraît, au premier abord, différer de celle que nous avions donnée plus haut (n° 53); mais le théorème précédent montre que les deux définitions coïncident. En effet, si on peut trouver une seconde fraction qui soit égale à la fraction proposée pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = a$, et si cette seconde fraction a une limite, quand x tend vers a, il en sera de même de la première. Or, cette seconde fraction n'est plus indéterminée pour $x = a$, et, si elle est *continue* (Voir plus loin, n° 114), elle aura pour limite, lorsque x tend vers a, précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$. Cette valeur est donc bien, d'après notre nouvelle définition, la *vraie valeur* de la fraction proposée.

La continuité par les accroissements

114. Définition. — On dit qu'une fonction d'une variable x est *continue*, pour $x = a$, si :

1° Elle a une valeur bien déterminée pour $x = a$;

2° Elle a pour *limite*, lorsque x tend vers a, précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$.

Par exemple, la fonction $\sqrt{x}$ est une fonction continue de x, pour toute valeur *positive* a de x; car, pour $x = a$, elle a une valeur bien déterminée $\sqrt{a}$ et, lorsque x tend vers a, $\sqrt{x}$ a pour limite $\sqrt{a}$ (n° 111, *Th.* VI), qui est précisément la valeur qu'elle prend pour $x = a$.

Tous les théorèmes sur les limites, que nous avons établis au n° 111, ont leur correspondant dans les fonctions continues. Nous ferons seulement la démonstration pour le premier théorème, et nous nous contenterons d'énoncer les autres dont les démonstrations sont identiques.

(...)

115. Définitions. — Lorsqu'une quantité variable passe d'une valeur à une autre, on dit qu'elle a subi un *accroissement* égal à l'excès de la valeur finale sur la valeur initiale. Ainsi, si la variable x passe de la valeur a à la valeur a', on dit qu'elle a reçu *l'accroissement* $a'-a$. Soit h, l'accroissement, on aura, par définition,

$$a'-a=h$$

ou

$$a'=a+h.$$

La valeur finale est égale à la valeur initiale augmentée de l'accroissement.

Soit y une fonction de la variable x et soient b et b' les deux valeurs de y, lorsqu'on donne à x, respectivement, les valeurs a et a'. La variable x ayant reçu l'accroissement $a'-a$, la fonction y aura subi l'accroissement $b'-b$ qu'on appelle *l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement* $a'-a$ *de la variable.*

Remarquons, de suite, qu'un accroissement peut être positif ou négatif.

(. . .)

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de la variable* x *soit continue, pour* $x=a$, *est que, si on donne à la variable* x *un accroissement* h, *à partir de la valeur* a, *l'accroissement, correspondant,* k *de la fonction tende vers zéro en même temps que* h.

Cette proposition est une conséquence directe de la définition de la continuité (n° 114). En effet, soit b la valeur de la fonction y, pour $x=a$. Dire que la fonction est continue, c'est dire que y a pour limite b quand x tend vers a et, par conséquent, que $y-b$, c'est-à-dire k, tend vers zéro, quand $x-a$, c'est-à-dire h, tend vers zéro. D'ailleurs, réciproquement, si $k=y-b$ tend vers zéro en même temps que $h=x-a$, y a pour limite b quand x tend vers a et la fonction est *continue*.

L'énoncé de ce théorème peut donc servir de définition de la continuité, définition qui, au fond, ne diffère pas de celle que nous avons donnée en premier lieu.

Cette nouvelle manière d'envisager la continuité nous montre mieux comment une fonction continue se comporte. Puisque k tend vers zéro en même temps que h, on peut prendre h assez petit pour que k soit aussi petit qu'on le voudra, en valeur absolue. En d'autres termes, lorsqu'une fonction est continue, pour $x=a$, on peut faire varier x, à partir de a, assez peu pour que la fonction ait varié d'aussi peu qu'on le voudra. Une fonction continue varie donc par degrés insensibles et ne peut pas sauter brusquement d'une valeur à une autre.

Une fonction peut être *discontinue*, pour une certaine valeur de la variable, ou bien parce qu'elle n'a pas une valeur bien déterminée, pour cette valeur de la variable, ou bien parce que, pour cette valeur, elle passe brusquement d'une valeur à une autre.

EXEMPLES. — La fonction $\frac{1}{x}$ est continue pour toutes les valeurs de x, sauf pour $x = 0$. Pour cette valeur elle est discontinue, car elle n'a pas une valeur bien déterminée. Quand x passe, en croissant, par la valeur zéro, $\frac{1}{x}$, d'abord infiniment grand et négatif, devient, ensuite, infiniment grand et positif; on dit que, quand x passe par la valeur zéro, $\frac{1}{x}$ passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, pour indiquer que $\frac{1}{x}$ est d'abord négatif et ensuite positif.

Voici encore un exemple intéressant de fonction présentant des discontinuités : Désignons par y la *partie entière* de x. y est évidemment une fonction de x, puisqu'à chaque valeur de x correspond une valeur pour y. Faisons croître x à partir de zéro. Quand x croit de 0 à 1, sa partie entière est 0, on a donc, sans cesse, $y = 0$; x continuant à croître de 1 à 2, sa partie entière est 1 et on a $y = 1$; quand x est compris entre 2 et 3, on a $y = 2$, etc...

On voit que quand x passe par la valeur 1, la valeur de y saute brusquement de 0 à 1; quand x passe par la valeur 2, la valeur de y saute de 1 à 2, etc... D'une manière générale, chaque fois que x passe par une valeur entière, y subit un accroissement brusque d'une unité. Cette fonction y est donc discontinue pour toute valeur *entière* de la variable x.

Des exercices signés par des auteurs réputés !

18. Vérifier les identités suivantes :

$$4\left[(ac' - ca')^2 - (bc' - cb')(ab' - ba')\right] \equiv (2ac' + 2ca' - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c');$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 \equiv$$
$$(a\beta - b\alpha + c\delta - d\gamma)^2 + (a\gamma - c\alpha + d\beta - b\delta)^2 + (a\delta - d\alpha + b\gamma - c\beta)^2 \;;$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) - (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)^2 \equiv$$
$$(a\beta - b\alpha)^2 + (c\delta - d\gamma)^2 + (a\gamma - c\alpha)^2 + (d\beta - b\delta)^2 + (a\delta - d\alpha)^2 + (b\gamma - c\beta)^2$$

(LAGRANGE).

21. Démontrer que l'on a l'identité

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 + u^3$$

lorsqu'on prend, soit :

$$\begin{aligned}
x &= (f^2 + 3g^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
y &= -(f^2 + 3g^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
z &= -(f'^2 + 3g'^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f^2 + 3g^2),\\
u &= (f'^2 + 3g'^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f^2 + 3g^2)
\end{aligned}$$

(EULER).

soit encore :

$$\begin{aligned}
x &= (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,\\
y &= -(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b,\\
z &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,\\
u &= -(a^2 + 3b^2)(a - 3b) + 1.
\end{aligned}$$

(BINET).

25. Effectuer les produits

$$(1 + ax)(1 + a^2x)$$
$$(1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)$$

plus généralement, effectuer le produit

$$(1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)\ldots(1 + a^mx)$$

et ordonner ce produit suivant les puissances croissantes de x. Donner l'expression générale du coefficient de x^p dans ce développement. Que deviennent ces coefficients quand a tend vers 1 ? En conclure le développement de

$$(1 + x)^m$$

suivant les puissances croissantes de x

(CAUCHY).

29. Prouver que

$$(x+y)^n - x^n - y^n$$

est divisible par

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2),$$

lorsque n est un multiple de 6 *moins* 1,
et est divisible par

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2,$$

lorsque l'entier n est un multiple de 6 *plus* 1

(CAUCHY).

45. Rendre entières les équations suivantes :

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0\,;$$
$$\sqrt[3]{A} + \sqrt{B} + C = 0\,;$$
$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} + \sqrt{E} = 0 \qquad \text{(DESCARTES)}\,;$$
$$\sqrt[m]{A} + \sqrt[3]{B} + C = 0\,.$$

De plus amples informations sur cet ouvrage sont fournies en p. 38 .

PLATONICIENS ET ARCHIMEDRES

ou : Représentation de polyèdres par des moyens informatiques (1)

N. VOGEL

Je tiens d'abord à dire à tous les patients ou impatients dessinateurs qui ont passé beaucoup de temps à représenter des polyèdres à la main : rassurez-vous, il en faut au moins autant pour arriver à les faire représenter par une table traçante !

Mais lorsque le travail de programmation sur ordinateur est achevé, il a de grands avantages sur le travail à la main : il permet de refaire les dessins autant de fois que l'on veut, à des échelles différentes, avec des projections ou des points de vue différents, avec plus ou moins de hachures, avec des lignes cachées, effacées ou pointillées...

L'ensemble des logiciels qui ont permis de représenter tous les polyèdres platoniciens et archimédiens à l'aide d'un système informatique constitué d'une table traçante HOUSTON reliée à un micro-ordinateur LOGABAX LX 515, se compose d'une dizaine de programmes LSE et d'environ vingt fichiers.

Voici quelques précisions sur la réalisation de ces programmes :

1) Quelles sont les données enregistrées pour permettre le dessin d'un polyèdre ?

Chaque polyèdre est décrit par trois matrices :

- Une matrice S (sommets) qui contient les trois coordonnées de chacun des sommets du polyèdre.

(1) Ceux qui souhaitent avoir d'autres dessins, des représentations plus variées et plus de précisions sur les programmes utilisés, trouveront cela dans une brochure IREM en préparation sur ce thème.

- Une matrice F (faces) dont chaque ligne décrit une face par la suite des numéros des sommets rencontrés lorsqu'on parcourt la face dans le sens positif, la face étant orientée par une normale dirigée vers l'extérieur du polyèdre (La ligne finit par 0 pour indiquer la fin de la face). (Le numéro d'un sommet est le numéro de la ligne de S où se trouvent ses coordonnées.)

- Une matrice A (arêtes) dont chaque ligne comporte quatre éléments : les deux premiers sont les numéros des sommets extrémités de l'arête, les deux autres les numéros des faces contenant cette arête. (En fait les matrices S et F suffiraient à décrire les polyèdres, mais la matrice A permet de gagner beaucoup de temps lors du dessin du polyèdre.)

Exemple du cube

S

0	0	0
1	0	0
1	1	0
0	1	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1
0	0	1

F

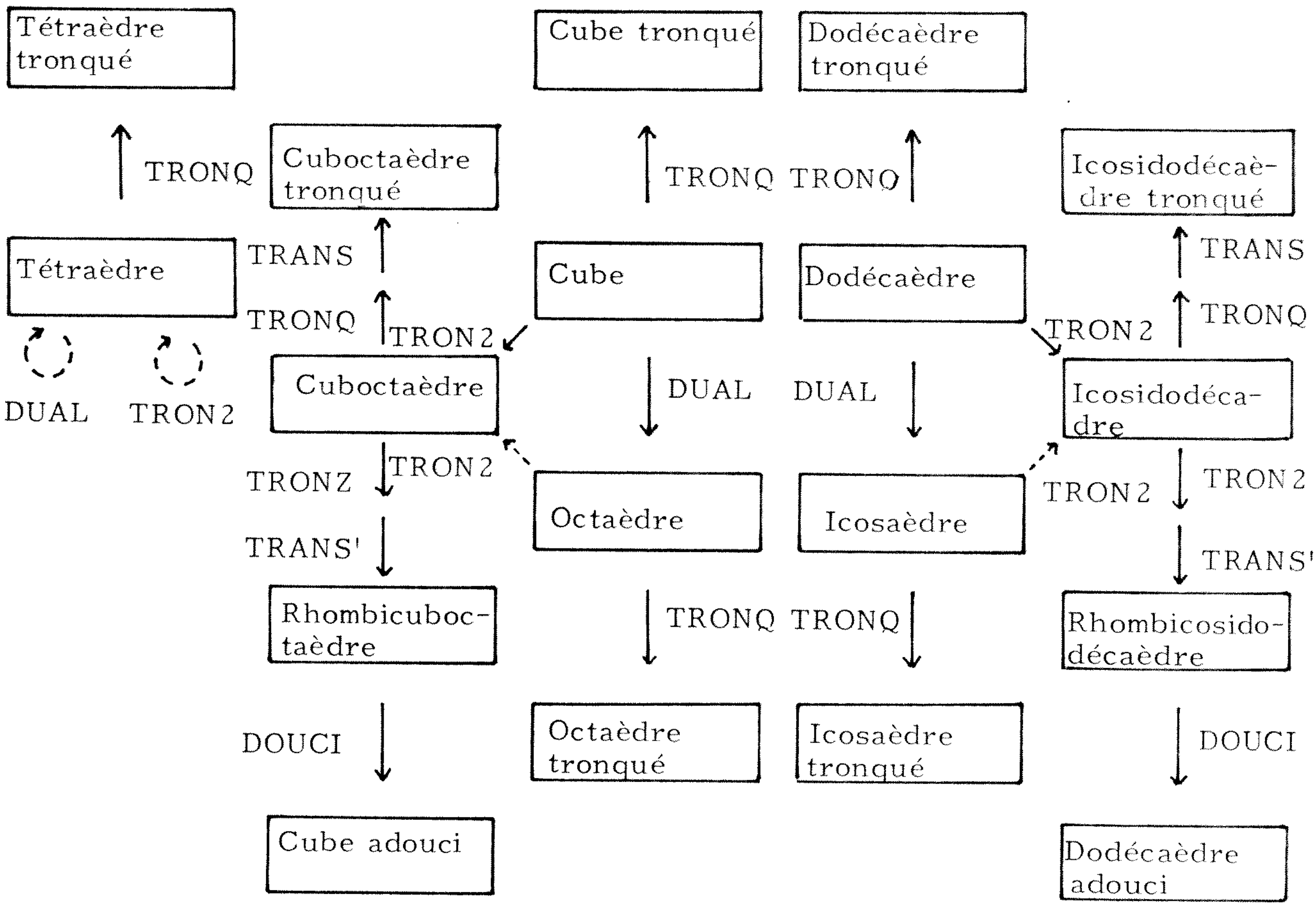
4	3	2	1	0
1	2	7	8	0
8	7	6	5	0
3	4	5	6	0
2	3	6	7	0
8	5	4	1	0

A

3	4	4	1
2	3	5	1
1	2	2	1
1	4	1	6
2	7	2	5
7	8	2	3
1	8	6	2
6	7	5	3
5	6	4	3
5	8	3	6
4	5	4	6
3	6	5	4

2) Comment construire toutes ces données ?

Seules les matrices S et F du cube et du tétraèdre et la matrice F du dodécaèdre ont été calculée à la main. Toutes les autres matrices ont été fabriquées à l'aide de sept programmes. Un premier programme permet de calculer A à partir de F, un deuxième programme calcule la matrice S du dodécaèdre, et ensuite on continue avec le schéma suivant : (les flèches indiquent les programmes utilisés).



Légende :

DUAL	*calcule les trois matrices du dual d'un polyèdre*
TRONQ	*calcule les matrices de la troncature d'un polyèdre*
TRON 2	*calcule les matrices du volume obtenu lorsqu'on coupe un polyèdre par des plans passant par les milieux des arêtes qui ont un sommet commun*
TRANS	*effectue des translations de certaines faces d'un polyèdre afin de le rendre régulier*
DOUCI	*découpe les faces carrées adjacentes à des triangles des "rhombi" en deux triangles et fait subir aux faces non triangulaires des vissages afin de rendre tous les triangles équilatéraux.*

L'ensemble des données ainsi créées représente 9628 nombres pour les 18 polyèdres réguliers et semi-réguliers !

3) Comment passer de ces données aux dessins ?

A l'aide d'un programme qui comporte les phases suivantes :

- Choix d'une rotation, calcul de la matrice de rotation, et calcul de la nouvelle matrice S.

- Recherche des arêtes visibles : pour cela, on calcule la normale orientée vers l'extérieur de chacune des faces du polyèdre. Le polyèdre étant projeté sur O $\vec{j}$ $\vec{k}$, une face est visible si et seulement si la composante sur i de sa normale est positive. Une arête est visible si et seulement si elle appartient a au moins une face visible (d'où l'intérêt de trouver rapidement les faces contenant chaque arête (voir 1)).

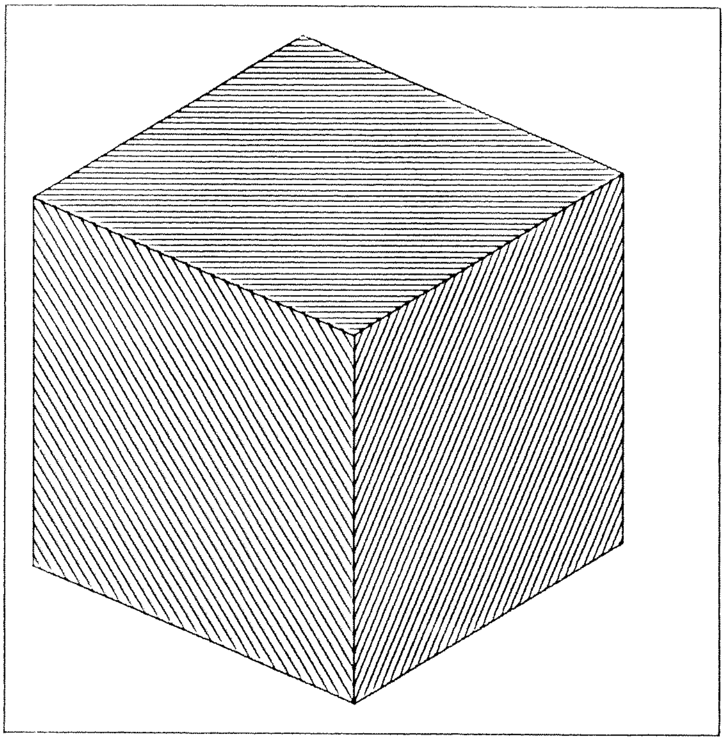
- Choix d'une échelle adaptée et dessin des projections des arêtes visibles en trait plein, éventuellement lignes pointillées pour les autres.

- Eventuellement, dessin de hachures (obtenues par intersections de plans équidistants parallèles à O $\vec{j}$ $\vec{k}$ avec le polyèdre).

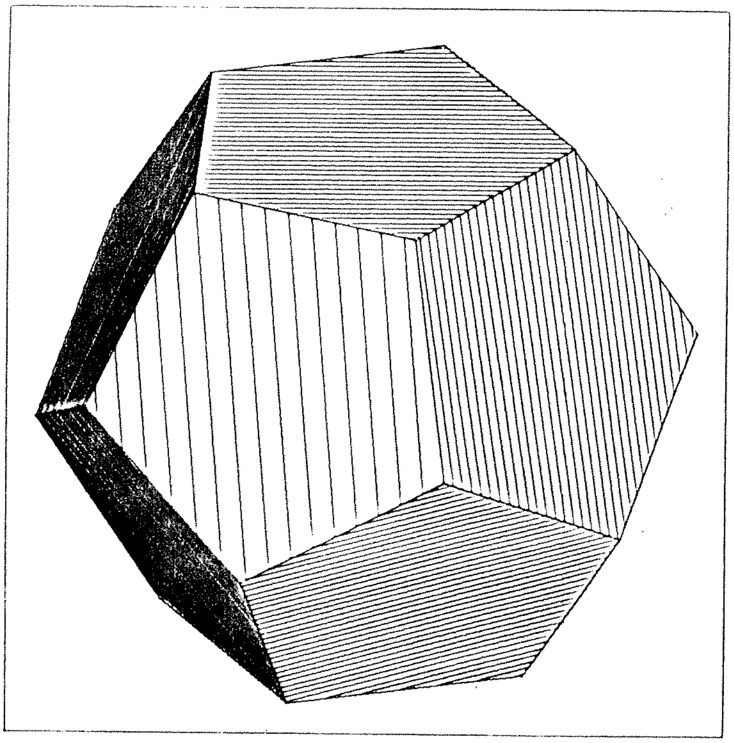
Et maintenant, que peut-on encore ajouter à ces logiciels ?

- J'attends LSE graphique et une console graphique pour faire bouger ces polyèdres (déplacements dans l'espace).

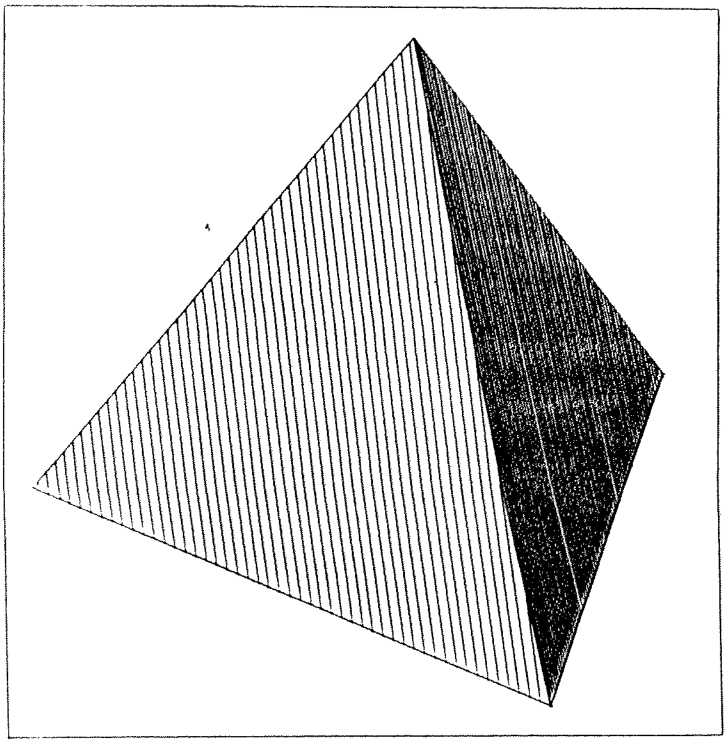
- Et bien sûr, il faudrait ajouter les polyèdres réguliers étoilés... Pour cela, je n'attends qu'une bonne dose de courage ... ou peut-être quelques idées que vous pourriez avoir sur le sujet (algorithme simple d'élimination des lignes cachées d'un polyèdre étoilé, par exemple).



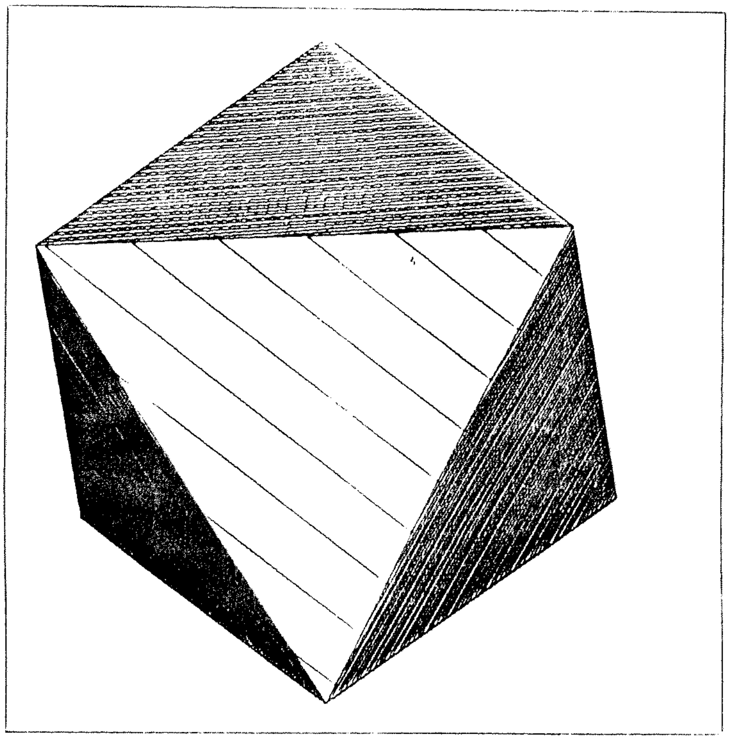
CUBE



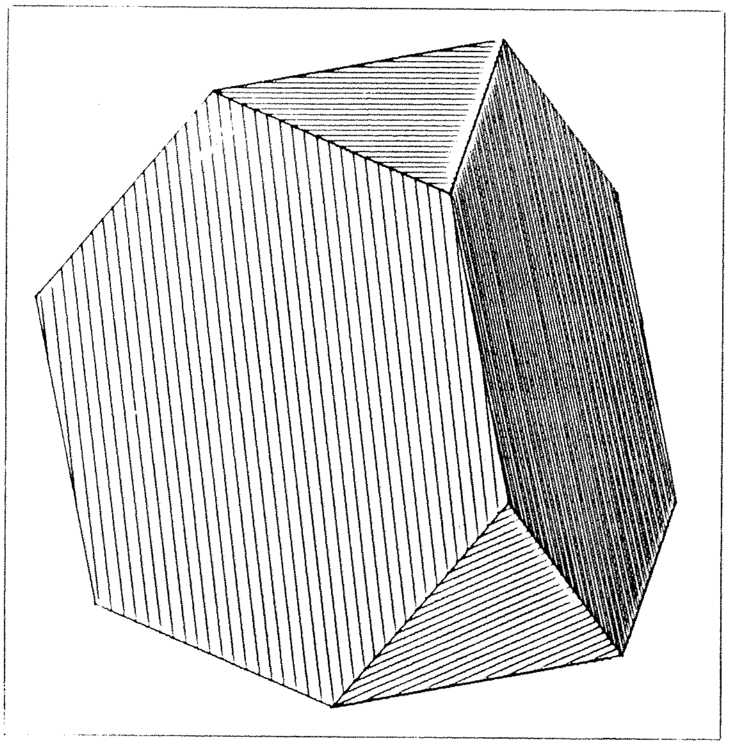
DODECAEDRE



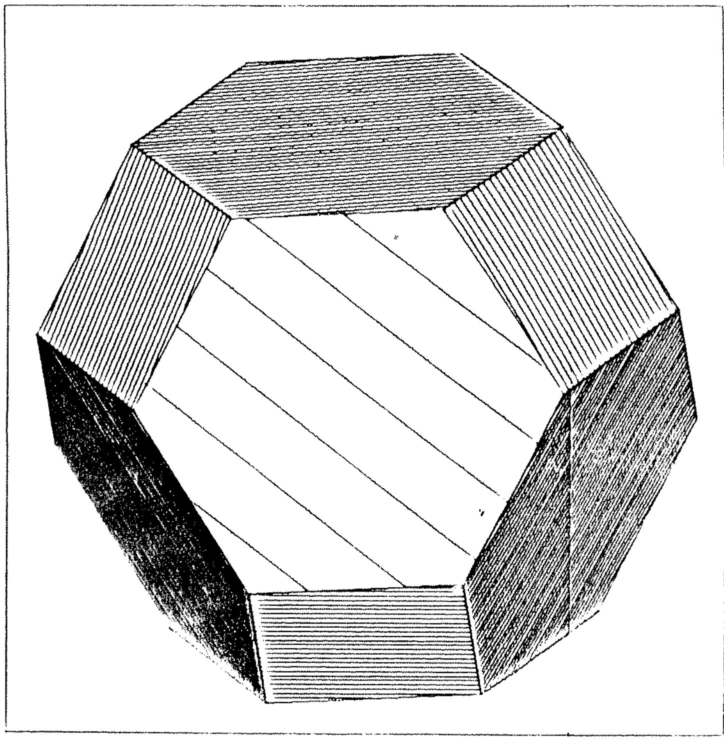
TETRAEDRE



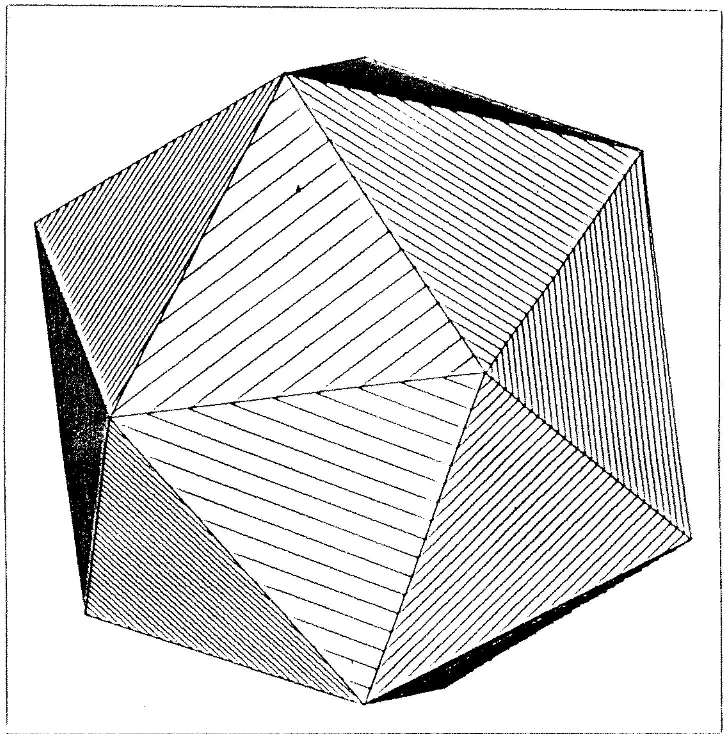
OCTAEDRE



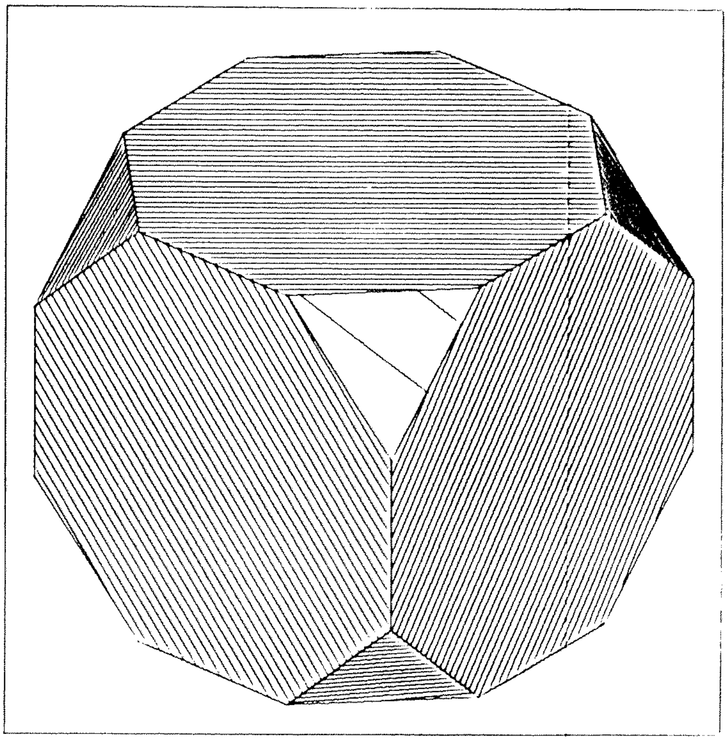
TETRAEDRE TRONQUE



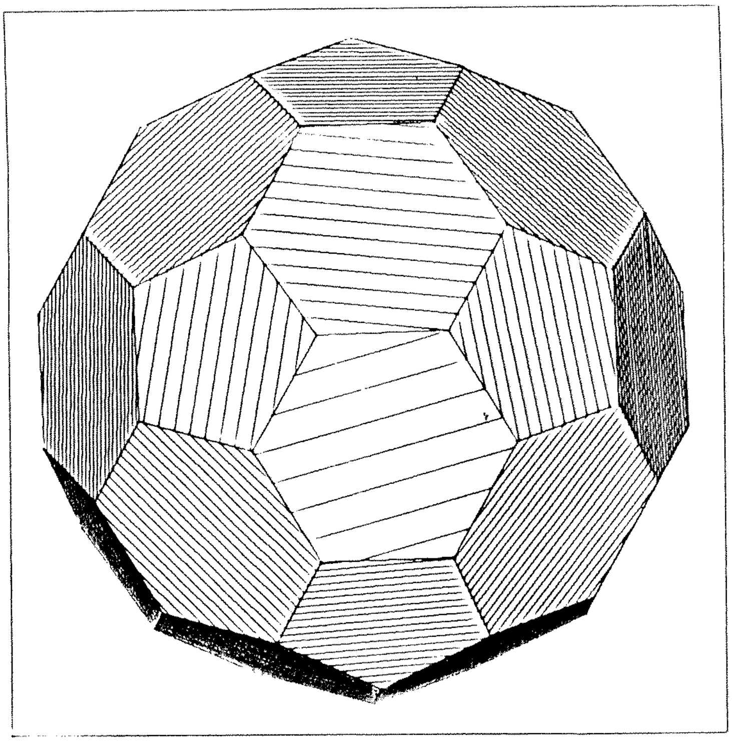
OCTAEDRE TRONQUE



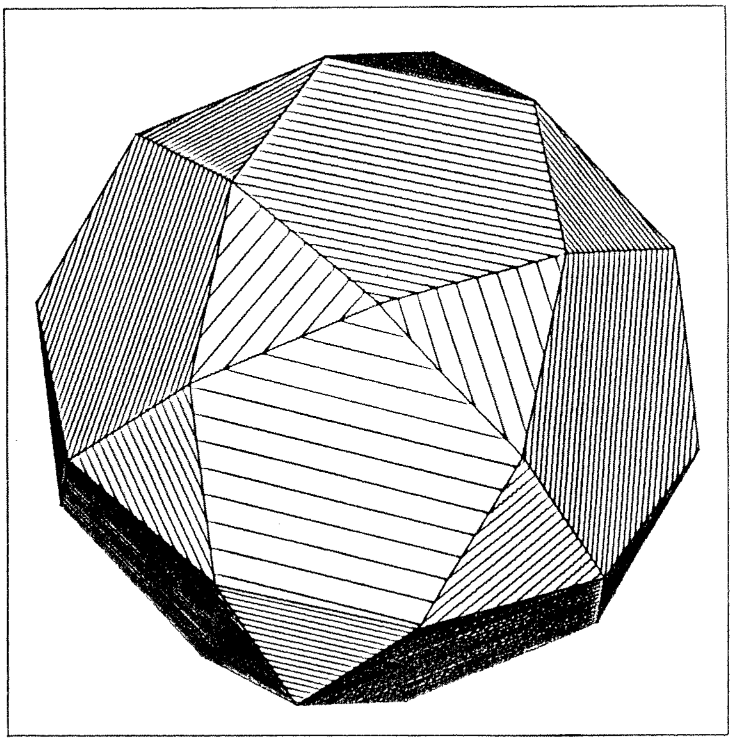
ICOSAEDRE



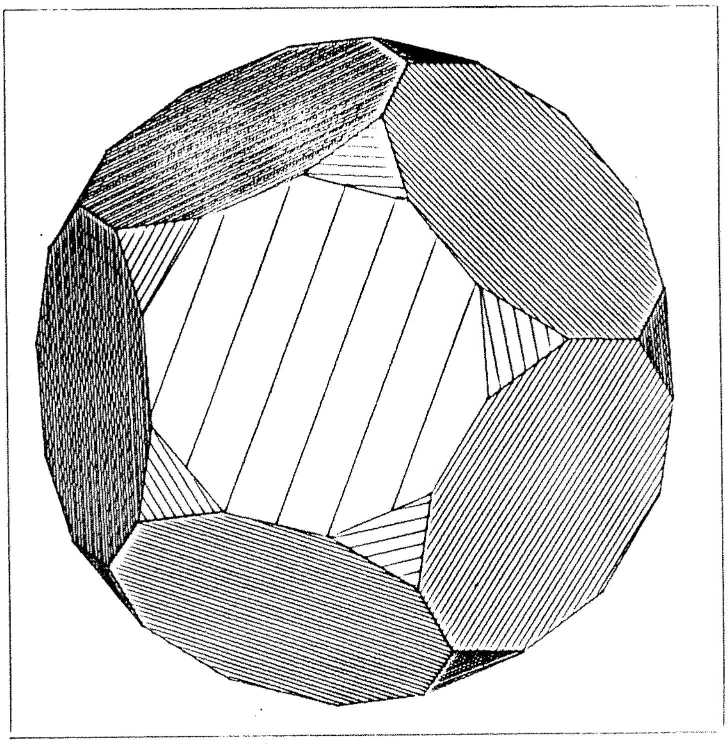
CUBE TRONQUE



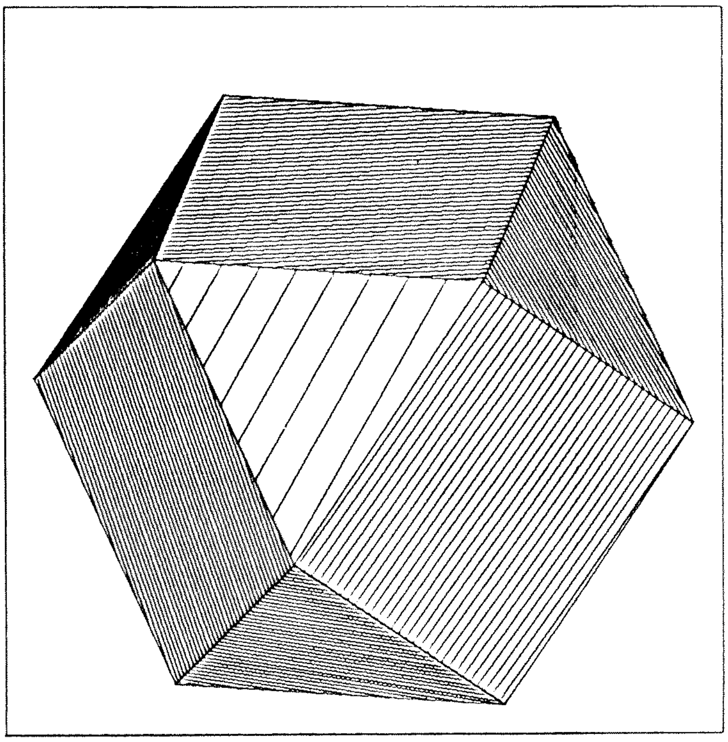
ICOSAEDRE TRONQUE



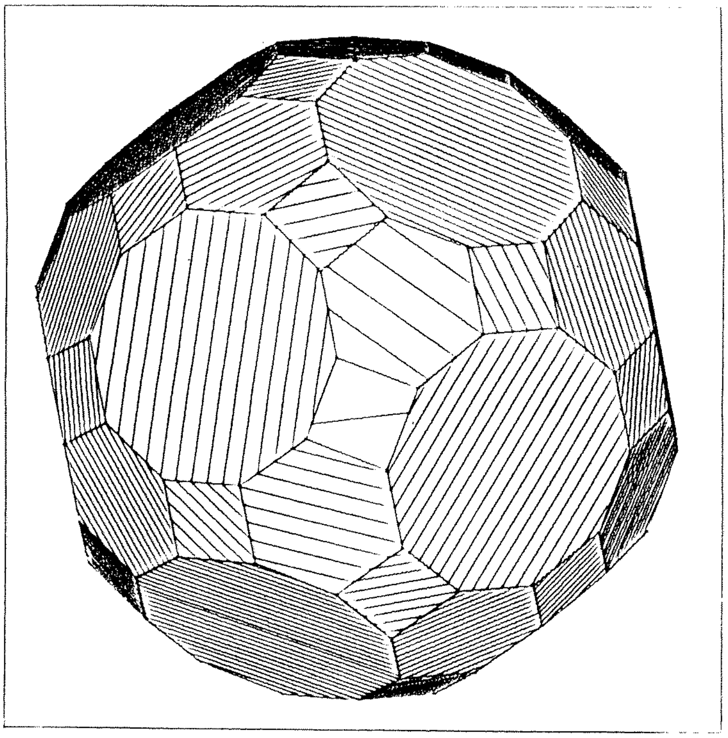
ICOSIDODECAEDRE



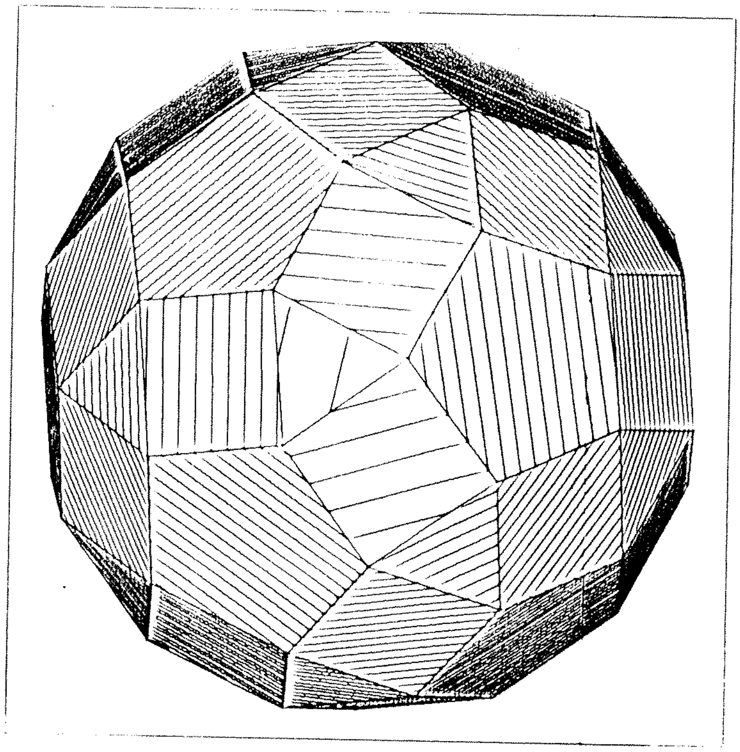
DODECAEDRE TRONQUE



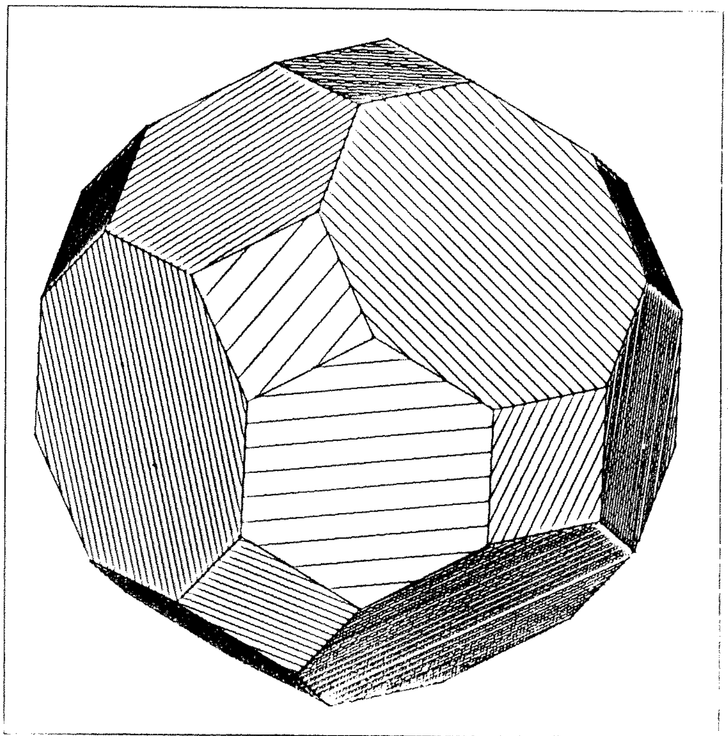
CUBOCTAEDRE



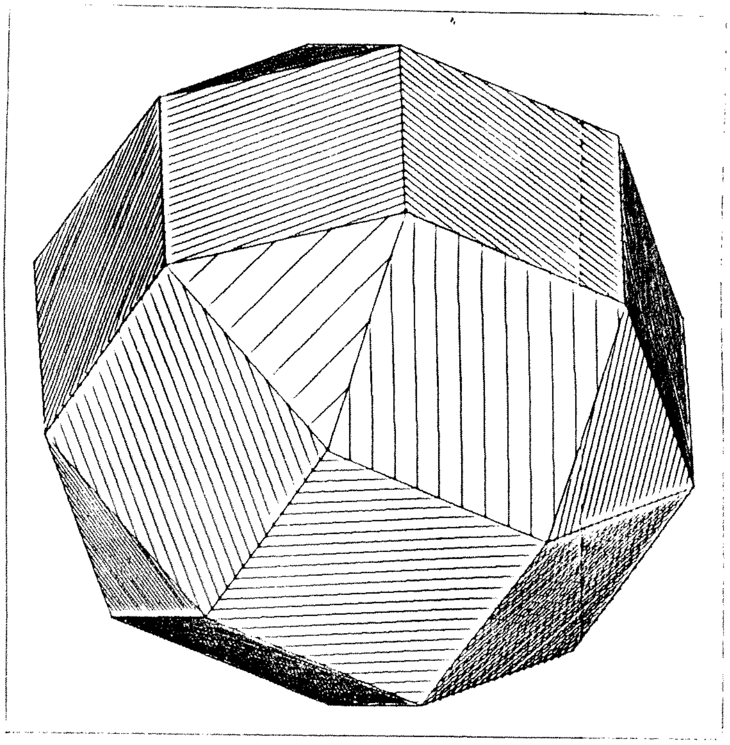
ICOSIDODECAEDRE TRONQUE



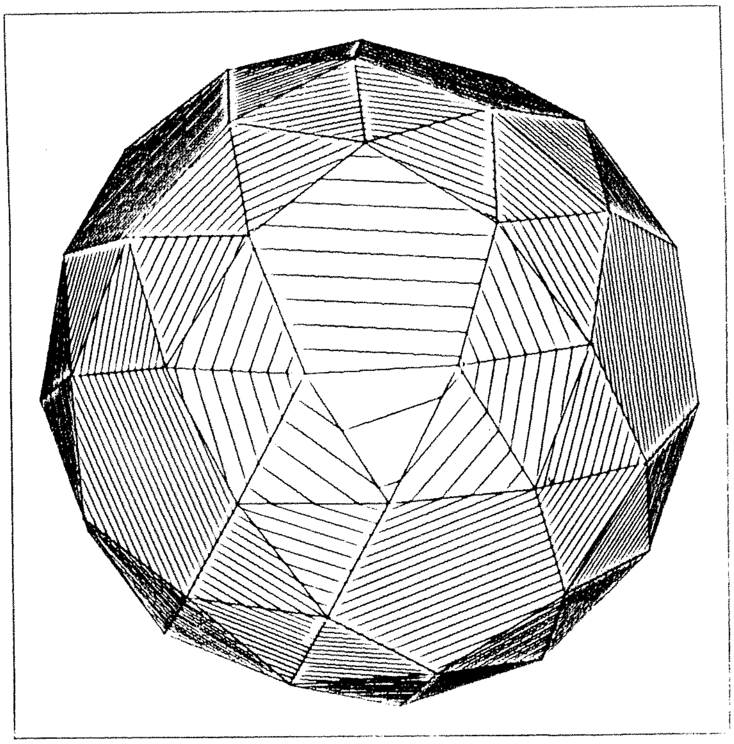
RHOMBICOSIDODECAEDRE



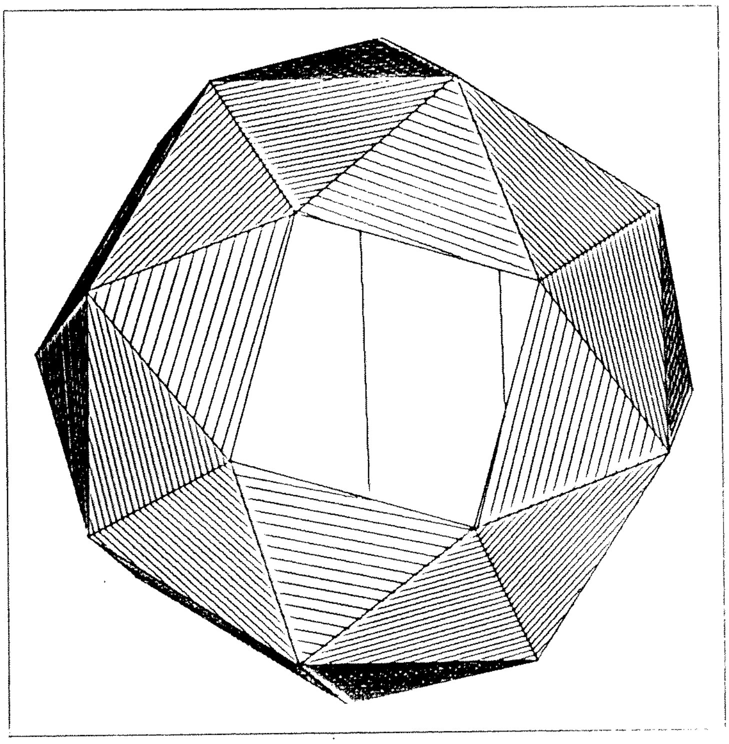
CUBOCTAEDRE TRONQUE



RHOMBICUBOCTAEDRE



DODECAEDRE ADOUCI



CUBE ADOUCI

EN RELISANT JULES VERNE...

G. GLAESER

Il y a des collègues qui s'imaginent naïvement que leurs élèves ne savent que ce qu'on leur dit en classe, aux rares moments où l'esprit est, par hasard, ouvert, attentif, intéressé.

En réalité, nos jeunes apprennent des tas de choses (vraies ou fausses) en dehors du milieu scolaire, en écoutant et en regardant, en discutant avec des copains ou des adultes, en jouant, en manipulant quelque objet fascinant ... et même parfois en lisant.

HERGE racontait qu'avant d'envoyer TINTIN sur la lune, il avait surpris les remarques d'un gamin fort renseigné sur l'absence d'atmosphère sur notre satellite. Il décida alors de se documenter plus sérieusement avant de composer ses B.D. pour ne pas décevoir la curiosité de ses jeunes lecteurs.

Comment ce genre de gosse s'était-il informé ? Sans doute en dehors de l'école : la lune ne figurait pas à ses programmes scolaires !!

Il est de la plus grande importance pour chaque maître de s'interroger sur toutes les sources de connaissance extra-scolaires, de manière à savoir les encourager. Parfois, il serait bon de rectifier, préciser, renforcer.

Je songeais à celà, récemment, en feuilletant une magnifique réédition des oeuvres de Jules VERNE. Et celà me ramenait à l'époque où j'avais huit à dix ans.

Un copain, fils de quincailler, avait reçu en prix d'excellence "Les enfants du Capitaine Grant" et me racontait avec passion "Les voyages extraordinaires" qu'une partie de la classe se mit à dévorer avec enthousiasme. Nous n'étions que des écoliers de la Communale, où dominaient les fils de manoeuvres et de clochards. Mais dans la cour de récréation, les squares et la rue, entre deux parties de billes, nous étions Phileas Fogg ou Michel Strogoff.

C'est pour mes neuf ans que l'on m'offrit "L'île mystérieuse" que je lus et relus plusieurs fois. Ainsi, lorsqu'en classe de 3ème le professeur de mathématiques m'enseigna les triangles semblables, je "connaissais" depuis six ou sept ans le passage reproduit plus loin. Vraisemblablement, je n'avais pas tout compris du premier coup et le langage était bien savant pour les lecteurs auxquels Jules VERNE s'adressait. Néanmoins, les similitudes n'arrivaient pas sur une table rase. D'autres camarades avaient sans doute eu l'occasion (à quinze ans) de voir agrandir des photographies, car c'était alors un hobby fort populaire.

Lit-on encore beaucoup Jules VERNE de nos jours ? En tout cas, la République n'offre plus ces prix, dorés sur tranche, dont les images persistent encore dans l'esprit des écoliers qui les reçurent.

Mais nos élèves apprennent certainement beaucoup de choses. Le pédagogue devrait avoir la curiosité de s'en enquérir, et savoir en profiter...

CHAPITRE QUATORZIÈME

La mesure de la muraille granitique ➛ Une application du théorème des triangles semblables ➛ La latitude de l'île ➛ Une excursion au nord ➛ Un banc d'huîtres ➛ Projets d'avenir ➛ Le passage du soleil au méridien ➛ Les coordonnées de l'île Lincoln.

Le lendemain, 16 avril, — dimanche de Pâques, — les colons sortaient des Cheminées au jour naissant, et procédaient au lavage de leur linge et au nettoyage de leurs vêtements. L'ingénieur comptait fabriquer du savon dès qu'il se serait procuré les matières premières nécessaires à la saponification, soude ou potasse, graisse ou huile. La question si importante du renouvellement de la garde-robe serait également traitée en temps et lieu. En tout cas, les habits dureraient bien six mois encore, car ils étaient solides et pouvaient résister aux fatigues des travaux manuels. Mais tout dépendrait de la situation de l'île par rapport aux terres habitées. C'est ce qui serait déterminé ce jour même, si le temps le permettait.

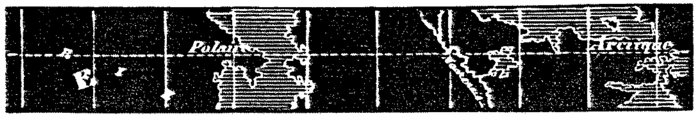
Or, le soleil, se levant sur un horizon pur, annonçait une journée magnifique, une de ces belles journées d'automne qui sont comme les derniers adieux de la saison chaude.

Il s'agissait donc de compléter les éléments des observations de la veille, en mesurant la hauteur du plateau de Grande-Vue au-dessus du niveau de la mer.

« Ne vous faut-il pas un instrument analogue à celui qui vous a servi hier ? demanda Harbert à l'ingénieur.

— Non, mon enfant, répondit celui-ci, nous allons procéder autrement, et d'une manière à peu près aussi précise. »

Harbert, aimant à s'instruire de toutes choses, suivit



l'ingénieur, qui s'écarta du pied de la muraille de granit, en descendant jusqu'au bord de la grève. Pendant ce temps, Pencroff, Nab et le reporter s'occupaient de divers travaux.

Cyrus Smith s'était muni d'une sorte de perche droite, longue d'une douzaine de pieds, qu'il avait mesurée aussi exactement que possible, en la comparant à sa propre taille, dont il connaissait la hauteur à une ligne près. Harbert portait un fil à plomb que lui avait remis Cyrus Smith, c'est-à-dire une simple pierre fixée au bout d'une fibre flexible.

Arrivé à une vingtaine de pieds de la lisière de la grève, et à cinq cents pieds environ de la muraille de granit, qui se dressait perpendiculairement, Cyrus Smith enfonça la perche de deux pieds dans le sable, et, en la calant avec soin, il parvint, au moyen du fil à plomb, à la dresser perpendiculairement au plan de l'horizon.

Cela fait, il se recula de la distance nécessaire pour que, étant couché sur le sable, le rayon visuel, parti de son œil, effleurât à la fois et l'extrémité de la perche et la crête de la muraille. Puis il marqua soigneusement ce point avec un piquet.

Alors, s'adressant à Harbert :

« Tu connais les premiers principes de la géométrie? lui demanda-t-il.

— Un peu, monsieur Cyrus, répondit Harbert, qui ne voulait pas trop s'avancer.

— Tu te rappelles bien quelles sont les propriétés de deux triangles semblables?

— Oui, répondit Harbert. Leurs côtés homologues sont proportionnels.

— Eh bien, mon enfant, je viens de construire deux triangles semblables, tous deux rectangles : le premier, le plus petit, a pour côtés la perche perpendiculaire, la distance qui sépare le piquet du bas de la perche, et mon rayon visuel pour hypoténuse; le second a pour côtés la muraille perpendiculaire, dont il s'agit de mesurer la hauteur, la distance qui sépare le piquet du bas de cette muraille, et mon rayon visuel formant également son hypoténuse, — qui se trouve être la prolongation de celle du premier triangle.

— Ah! monsieur Cyrus, j'ai compris! s'écria Harbert. De même que la distance du piquet à la perche est proportionnelle à la distance du piquet à la base de la muraille, de même la hauteur de la perche est proportionnelle à la hauteur de cette muraille.

— C'est cela même, Harbert, répondit l'ingénieur, et quand nous aurons mesuré les deux premières distances, connaissant la hauteur de la perche, nous n'aurons plus qu'un calcul de proportion à faire, ce qui nous donnera la hauteur de la muraille et nous évitera la peine de la mesurer directement. »

Les deux distances horizontales furent relevées, au moyen même de la perche, dont la longueur au-dessus du sable était exactement de dix pieds.

La première distance était de quinze pieds entre le piquet et le point où la perche était enfoncée dans le sable.

La deuxième distance, entre le piquet et la base de la muraille, était de cinq cents pieds.

Ces mesures terminées, Cyrus Smith et le jeune garçon revinrent aux Cheminées.

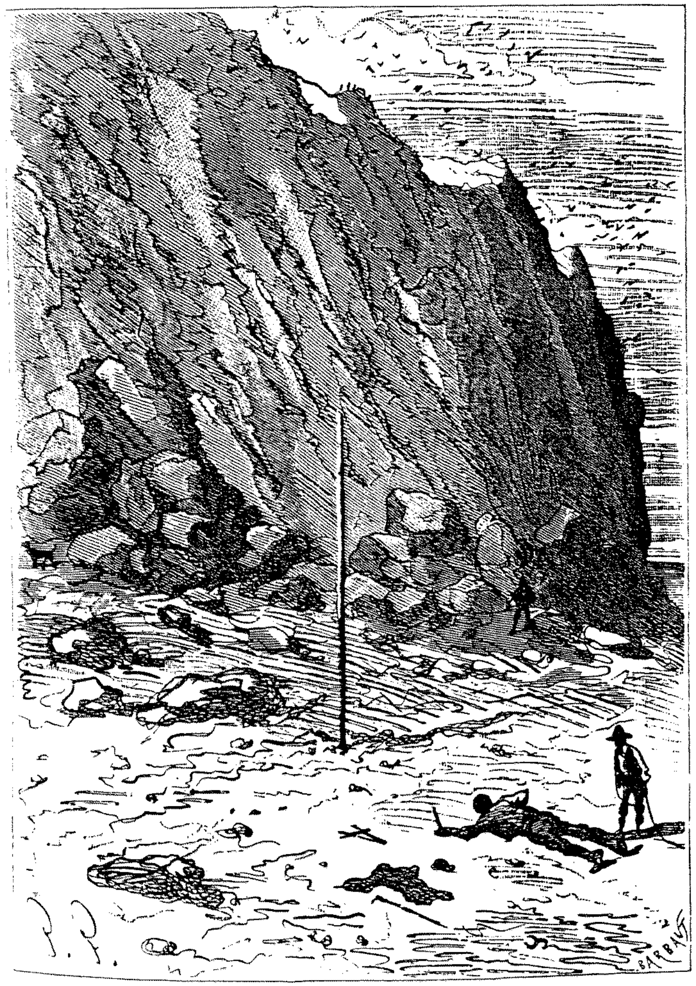
Là, l'ingénieur prit une pierre plate qu'il avait rapportée de ses précédentes excursions, sorte de schiste ardoisier, sur lequel il était facile de tracer des chiffres au moyen d'une coquille aiguë. Il établit donc la proportion suivante :

$$15 : 500 :: 10 : x$$
$$500 \times 10 = 5\,000$$
$$\frac{5\,000}{15} = 333{,}33.$$

D'où il fut établi que la muraille de granit mesurait trois cent trente-trois pieds de hauteur [1].

Cyrus Smith reprit alors l'instrument qu'il avait fabriqué la veille et dont les deux planchettes, par leur écartement,

1. Il s'agit du pied anglais, qui vaut 30 centimètres.



Étant couché sur le sable...

lui donnaient la distance angulaire de l'étoile alpha à l'horizon. Il mesura très exactement l'ouverture de cet angle sur une circonférence qu'il divisa en trois cent soixante parties égales. Or, cet angle était de dix degrés. Dès lors la distance angulaire totale entre le pôle et l'horizon, en y ajoutant les vingt-sept degrés qui séparent alpha du pôle antarctique, et en réduisant au niveau de la mer la hauteur du plateau sur lequel l'observation avait été faite, se trouva être de trente-sept degrés. Cyrus Smith en conclut donc que l'île Lincoln était située sur le trente-septième degré de latitude australe, ou en tenant compte, vu l'imperfection de ses opérations, d'un écart de cinq degrés, qu'elle devait être située entre le trente-cinquième et le quarantième parallèle.

Restait à obtenir la longitude, pour compléter les coordonnées de l'île. C'est ce que l'ingénieur tenterait de déterminer le jour même, à midi, c'est-à-dire au moment où le soleil passerait au méridien.

Texte et illustrations reproduits avec l'aimable autorisation de l'éditeur Jean de Bonnot.

LE TEST DE CLOSURE TESTE EN CLASSE

A. GAGATSIS et E. CHANEY

L'article qui suit a été rédigé en commun par A. GAGATSIS, chercheur en didactique à l'Université de Strasbourg et E. CHANEY, professeur au lycée Schweizer de Mulhouse. Le lecteur distinguera sans peine les apports de l'un et de l'autre.

Etait-ce le souvenir des jeux dans les magazines avec la solution à lire à l'envers ? l'idée de confronter les thèses d'un chercheur avec ma réalité de "praticien" ? le désir secret de voir de savantes constructions théoriques et de minutieuses vérifications s'écrouler au contact brutal d'une classe ordinaire ?

Peu importe. La lecture et l'étude de l'article d'A. GAGATSIS (1) me donna l'envie d'expérimenter le **test de closure** dans une classe de Seconde, coopérative et intéressée (mais au niveau plutôt faible) sur un texte "scolaire". Pour plusieurs raisons qu'il expose ci-dessous, le chercheur, qui avait travaillé sur l'utilisation du test pour des textes mathématiques -C'est le sujet de sa thèse de 3ème cycle- était disposé à conseiller et interpréter cette expérimentation.

Dans l'OUVERT N°30, nous avons en effet présenté le **test de closure** et une expérience en classe de Première. Ses résultats montraient que l'on peut appliquer ce test à des textes mathématiques, mais quelques questions restaient posées :

1) Les textes proposés, portant sur la logique, étaient plutôt de nature littéraire. Les professeurs peuvent-ils utiliser le test avec les textes qu'ils utilisent couramment ?

2) Les textes étaient relativement longs : 500 mots à peu près. La procédure convient-elle avec des textes courts ?

3) A quelles tâches didactiques précises le test peut-il contribuer ?

4) Le test de closure est-il mieux "vécu" par les élèves que l'indispensable contrôle classique ?

5) Enfin s'il est possible pour un professeur de construire en quelques minutes un test de closure, le temps de correction peut-il être minimisé par une procédure adaptée ?

§1. Les deux textes choisis.

La classe travaillait depuis deux mois sur le programme de géométrie : constructions affines, vecteurs, barycentre... L'étude de quelques transforma-

(1) "Ont-ils compris ?" OUVERT N°30, p 17.

tions du plan était envisagée depuis deux ou trois semaines. Les deux textes reproduits aux pages 31 et 32 (texte A et texte B) correspondaient donc en gros au programme traité, sous forme de rappels avec commentaires.
Trois différences apparaîssent entre ces textes et ceux de l'expérience décrite dans le N°30.

- Ils sont relativement courts : 250 mots et symboles contre 500.
- Ils correspondent à un usage scolaire, lié au programme, alors que les précédents portaient sur la logique.
- Ils sont proprement mathématiques.

D'autre part ils sont de même nature, de même longueur et concernent tous deux la géométrie plane.
Il faut cependant les distinguer : les objets et les propriétés géométriques du texte A sont connus depuis longtemps et son vocabulaire est familier aux élèves. Les propriétés énoncées dans le texte B sont plus nouvelles et le vocabulaire moins familier. En particulier son dernier paragraphe, qui donne une définition des applications affines, n'a pas été traité en cours, ni même évoqué en travaux dirigés.
Il était donc raisonnable de considérer le texte B comme plus difficile, pour les élèves de cette classe. D'où la question :
Le test de closure mettra-t-il en évidence cette différence entre les deux textes ?

§2. La construction des tests et l'expérience en classe

Sur chaque texte, nous avons construit un test en supprimant un mot sur cinq.
Pour que chacun comporte le même nombre de trous (51), l'un des trous du texte B n'a pas été réalisé.
On trouvera aux pages 31 et 32 , face aux textes originaux, la copie de la feuille qui fût distribuée aux élèves, en dimension réduite.

Pour bénéficier de l'effet de surprise, je n'avais pas prévenu les élèves. Me voyant arriver avec des feuilles polycopiées à la main, ils se sont cru condamnés à l'horrible *"contrôle-surprise"*; certains cherchèrent une copie blanche dans leur classeur, d'autres s'apprêtaient à argumenter... Le test fut présenté comme contribution à un travail de recherche effectué à l'IREM. Effet immédiat : les conversations cessèrent et l'attention se stabilisa à un haut niveau. Je pris mon temps pour exposer le principe du test : les trous n'ont pas été choisis pour devenir des pièges, mais par un procédé mécanique. Les symboles sont considérés comme mots...A la correction, je me suis aperçu que je n'avais pas été clair sur le statut de l'apostrophe (texte B, 3e paragraphe). Je recommandai de lire tout le texte, plusieurs fois si nécessaire, avant de chercher à combler les trous.

Deux points méritent d'être signalés :

- Ne sachant pas, à priori, comment les élèves travailleraient, je leur ai accordé le reste de l'heure (environ 40 minutes)pour répondre au test. Ce fut trop long. Certains avaient fini bien avant tandis que d'autres se sont crus obligés, vers la fin, de surcharger leur feuille de corrections. Dans une autre expérience non mentionnée ici, la même classe disposa de 25 mn, et celà fut bien suffisant, pour ce texte, et à ce niveau.

- Pour diviser la classe en deux groupes homogènes, je distinguai dans chaque rangée de tables le côté Est du côté Ouest. En établissant des moyennes de chaque groupe, nous avons eu la surprise de les voir de niveau bien différents. Le groupe le plus faible était côté Est. Celui de la fenêtre...

D'une façon générale, les élèves ont pris ce travail très à coeur. Je les avais prévenus que la *"pompe"* fausserait les résultats de l'expérience. Il semble qu'elle ait été très limitée, sinon nulle.
Reste à savoir si cette procédure, employée régulièrement et sans référence extra-scolaire, bénéficierait des mêmes conditions de sérieux et d'attention !

§3 **La répartition des trous**

Les mots ou symboles supprimés dans chaque texte auraient du être répartis en trois catégories (*"informationnels", " langue", "mathématiques")* si nous avions adopté les règles détaillées dans l'article du N°30.

Cependant la distinction des trous mathématiques pose deux problèmes :

- Elle complique la correction des copies, allonge les calculs à effectuer, et rend plus délicate l'interprétation des résultats.
- Plusieurs des symboles mathématiques pouvaient être considérés comme *"informationnels"*, puisqu'ils sont liés au contenu mathématique des textes. Ces textes ne présentent pas de parties mathématiques bien différenciées du reste. Pourquoi alors distinguer certains mots pour la seule raison qu'ils sont désignés par un symbole ?

  L'écriture symbolique ne sert qu'à désigner un objet, par une notation utilisant lettre, signe ou une combinaison des deux. Ce code coexiste dans le texte mathématique avec cet autre code qu'est la langue naturelle.

  Pour en rester aux textes proposés, il existe cependant au moins une différence entre la langue naturelle et l'écriture symbolique :

Celle-ci ne permet pas le renvoi à d'autres éléments du discours, comme le font les déterminants à l'intérieur d'un discours en langue naturelle, par "effet de contexte". Le renvoi à un symbole se fait uniquement par son éventuelle répétition. C'est aussi le cas dans la langue naturelle pour les noms propres.

Ainsi, dans les textes proposés -sinon dans d'autres- une deuxième occurence de $\vec{V}$, $\vec{U}$, D, A etc... évite d'alourdir le texte par l'emploi de *"ce vecteur"*, *"cette droite"*, *"ce point"* etc...
Dans quelle catégorie fallait-il donc ranger les trous "mathématiques" ?
Certains d'entre eux seraient peut-être à placer parmi les trous "langue". Mais en l' absence de test mathématique fondant rigoureusement cette distinction, nous avons préféré les compter parmi les trous "informationnels", attribution qui ne fait aucun doute pour la plupart d'entre eux.

Les 51 trous de chaque texte se répartissent alors ainsi :

	informationnel	langue
texte A	27	24
texte B	28	23

§3. Une procédure de correction rapide

Un professeur ne dispose pas souvent du temps qu'un chercheur peut sacrifier à la correction et à l'étude des résultats d'un test. Le temps de correction ne doit certainement pas excéder celui du contrôle d'une demi-heure.
Pour celà, nous avons travaillé de la façon suivante :

- superposition d'une feuille de calque à un exemplaire de la feuille distribuée aux élèves, dont les trous sont remplis par le correcteur.
- tracé d'un large rectangle sur le calque pour repérer la position exacte de chaque trou "informationnel". (un autre calque sera nécessaire pour les trous "langue ").
- Notation sous chaque rectangle du mot manquant *(voir Fig. 1)*.
- En superposant ce calque à chaque élève, on repère immédiatement les trous correctement remplis, dont on compte le nombre.
- Les scores obtenus ont été rapportés sur une feuille de type "programmeur". N'importe quelle feuille quadrillée aurait fait l'affaire. On obtient aussi verticalement les scores par trous, et horizontalement les scores par élèves.

Il ne reste plus qu'à calculer les pourcentages de réussite aux scores "langue", "informationnel" et globaux (le test de closure proprement dit). Les calculs d'écarts-type, ou de coefficients de corrélation n'ont d'intérêt que pour discuter de la fiabilité du test.

§4 Les résultats

TABLEAU 1 : scores du texte A

élèves	informationnel		Langue		closure (global)		moyenne du trimestre
1	17/27=	63%	21/24=	88%	38/51	75%	11
2	16/27	59%	21/24	88%	37/51	73%	6
3	19/27	70%	20/24	83%	39/51	76%	4
4	16/27	59%	22/24	92%	38/51	75%	6
5	21/27	78%	19/24%	79%	40/51	78%	10
6	22/27	81%	20/24	83%	42/51	82%	11
7	15/27	56%	18/24	75%	33/51	65%	4
8	21/27	78%	20/24	83%	41/51	80%	7
9	18/27	67%	22/24	92%	40/51	78%	10
10	19/27	70%	24/24	100%	43/51	84%	8
11	22/27	81%	21/24	88%	43/51	84%	10
12	23/27	85%	21/24	88%	44/51	86%	16
13	21/27	78%	18/24	75%	39/51	76%	6
14	20/27	74%	19/24	79%	39/51	76%	8
15	20/27	74%	21/24	88%	41/51	80%	7
	$\overline{m}$ = 71,53 σ = 9,07		$\overline{m}$ = 85,40 σ = 6,81		$\overline{m}$ = 77,87 σ = 5,24		$\overline{m}$ = 8,27 σ = 3,15

coefficients de corrélation :

. informationnel - langue : 14%

. informationnel - notes : 57%

. langue - notes : 27%

. closure - notes : 67%

TABLEAU 2 : scores du texte B

élèves	informationnel		langue		closure (global)		moyenne du 2e trimestre
1	23/28	82%	19/23	82%	42/51	82%	18
2	16/28	57%	19/23	83%	35/51	69%	13
3	21/28	43%	18/23	78%	30/51	53%	8
4	21/28	75%	19/23	83%	40/51	78%	10
5	18/28	64%	18/23	78%	36/51	71%	11
6	19/28	68%	17/23	74%	36/51	71%	9
7	18/28	64%	19/23	83%	37/51	73%	8
8	18/28	64%	20/23	87%	38/51	75%	18
9	15/28	50%	1823	78%	32/51	63%	6
10	16/28	57%	16/23	70%	32/51	63%	11
11	7/28	46%	16/23	70%	29/51	57%	9
12	13/28	46%	16/23	70%	29/51	57%	9
13	22/28	79%	21/23	91%	43/51	84%	14
14	16/28	57%	18/23	78%	34/51	67%	8
15	21/28	75%	19/23	83%	40/51	78%	9
	m = 60,40 σ = 15,22		m = 79,27 σ = 6,32		m = 69,00 σ = 10,39		m = 10,53 σ = 3,76

coefficients de corrélation :

. informationnel - langue : 69%

. informationnel - notes : 59%

. langue - notes : 57%

. closure - notes : 63%

§ 5. Ce qui distingue les deux textes.

• Comme prévu, le texte B se révèle plus difficile que le texte A : les scores informationnels diffèrent de 11% et les scores globaux de 9%, ce qui fournit une nette distinction. Par contre les scores "langue ", qui ne diffèrent que de 6%, sont plus proches. Celà tient peut-être au fait que dans les trous "langue" du texte B, on trouve des mots à forte signification mathématique : *invariant, aucun, unique, tout*.

• Une autre particularité distingue les deux textes : l'écart-type pour le score informationnel du texte B est plus élevé que son homologue du texte A : 15,2 contre 9. Autrement dit le texte B établit une discrimination plus nette des élèves entre eux. Ce qui s'accorde bien avec le fait que les élèves connaissaient mieux le texte A

Il faut cependant noter que cette différence entre les deux textes n'apparaît plus dans les écarts-type des scores langue.

• Une troisième constatation oppose les deux textes : la corrélation entre les scores informationnel et langue est presque nulle pour le texte A, et assez élevée pour le texte B. L'explication de cette différence est à chercher dans les deux raisons déjà avancées : familiarité du texte A, contenu mathématique des trous "langue" du texte B.

Ainsi le test distingue nettement les deux textes. Ils sont pourtant de même nature, de même longueur, usant du même type de vocabulaire, et rédigés par le même professeur.

On est en présence d'une situation où le **contenu** est un facteur décisif de compréhension : même un lecteur expérimenté peut ne pas comprendre le contenu d'un texte portant sur un sujet qui lui est étranger. Le vocabulaire et la structure peuvent être simples, l'absence de familiarité avec des concepts spécifiques entrave la compréhension.

§ 6. Le test de closure et les notes des élèves.

Pour juger la validité du test de closure, on compare ses résultats avec ceux des meilleurs tests classiques de compréhension, par un calcul de corrélation. Nous ne l'avons pas fait, dans cette expérience. (On trouvera dans (4) une telle validation)

Les notes du trimestre - quatre contrôles de géométrie- nous ont parus susceptibles de fournir une aussi bonne classification.

Or, les corrélations entre les notes et les scores informationnel ou "langue" sont relativement élevés. Nous pensons même qu'elles seraient plus élevées avec un plus grand nombre d'élèves, les cas marginaux pesant alors moins fortement.

Ces cas existent. Pour réussir au test, il faut une bonne compréhension, mais la réciproque n'est pas toujours vraie : les élèves (2) et (8), confrontés au texte B, n'ont pas réussi alors qu'ils avaient fait la preuve de leur bonne compréhension. D'autre part, on ne peut complètement exclure toute possibilité de "pompe".

En éliminant les élèves (1), (3),(8), (13) pour le texte A et (2),(8),(14), (15) pour le texte B, on parvient en effet aux coefficients de corrélation suivants (auxquels il n'est possible d'accorder qu'une valeur indicative, et non plus statistique) :

	texte A	texte B
notes - informationnel	84%	79%
notes - langue	13%	50%
notes - closure	78%	75%

Pour les scores "informationnel" et "closure", on obtient des coefficients très élevés.

Faut-il en conclure que le test de closure fournit un **instrument universel** de mesure de la compréhension ?
Sans aller jusque là, ces corrélations montrent qu'il mesure nettement plus que l'entendement de courtes portions de messages.

§ 7. **Quelques erreurs des élèves**

texte A :

- Aucun élève n'a rempli correctement le trou *équipollence*, le reflexe étant, après "classe" de penser "équivalence".
- Dans les phrases qui suivent, le mot *bipoint* est supprimé deux fois. Un seul élève les a rétabli tous les deux.
- Enfin le dermier paragraphe est instructif. Les élèves avaient affaire à :

$$M \ (\ldots D \ldots) \Longleftrightarrow \det\,(\overrightarrow{\ldots A \ldots M},\ \vec{U}) = \ldots O \ldots$$

"*D*" et "*A*" ont été trouvés par 93% et 87% des élèves, mais 7/15 (47%) n'ont pas trouvé "0".

Texte B :

- Dans la première phrase, le "trou" *application* n'a été correctement rempli que par 6 élèves sur 15.
- Dans la phrase :
Une .... *homothétie* de centre O (...) .... *possède* la même propriété.

Le trou *homothétie* a été trouvé par 7 élèves. Aucun n'a rétabli *possède.*

- Dans la phrase portant sur la symétrie centrale, le mot *unique* a été trouvé par 8 élèves.
- Dans la phrase :

  La symétrie de centre ....*O*.... est une homothétie (...) de rapport ....-.... 1

  Deux élèves seulement ont retrouvé le signe moins. Les homothéties de rapport négatif ne sont pas bien comprises.
- La phrase portant sur la conservation de l'alignement exprime une caractérisation des transformations affines inconnue des élèves.

  Cinq élèves ont cependant retrouvé le mot *alignés.* Six ont rétabli le mot *affine* dans l'avant dernière phrase.

§8 Conclusions

Sous la forme courante, le test de closure ne porte que sur le score global. Mais un professeur de mathématique peut-il affirmer qu'un élève a compris un texte, sous prétexte qu'il aurait correctement rempli des trous comme *le, un, car, de* etc ? L'expérience qui vient d'être relatée justifie en partie la réticence évoquée ci-dessus. En effet, les scores globaux diffèrent de 9% d'un texte à l'autre. Alors que les scores informationnels diffèrent de 11% et les scores "langue" de 6%. En confondant ces *deux dimensions* le score global atténue l'inégalité de difficulté de reconstitution des deux textes.

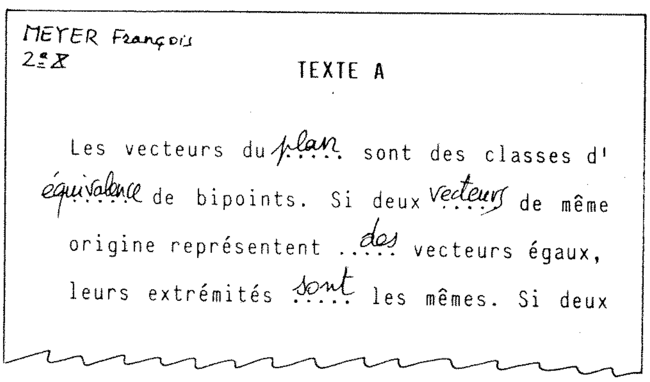
La distinction des deux scores permet d'envisager l'utilisation du test de closure à des fins didactiques : l'obtention d'un bon résultat au score informationnel a certainement plus de rapport avec un apprentissage réussi qu'un score global élevé(*). L'ayant ainsi affiné, on peut envisager d'utiliser le test de closure comme *instrument didactique de tous les jours :*

- Un professeur désire reprendre le programme de géométrie après avoir fait de l'analyse pendant deux mois. Les élèves ont-ils un souvenir assez vivace des notions géométriques étudiées auparavant ? Un test de closure portant sur le chapitre à venir, et utilisant les notions que le professeur espère connues, donnera une idée de la réponse : le score informationnel et l'étude des erreurs des élèves permettra de savoir si les prérequis du chapitre sont là ou non.

(*) Ce point de vue mérite d'être nuancé : les expériences faites dans des classes de collège indiquent que le score global reflète un certain degré de compréhension.

- Une notion nouvelle a-t-elle été assimilée ? Le test de closure peut apporter une réponse complémentaire à la réussite- ou à l'échec- aux indispensables exercices de contrôle. Ces derniers, outre la compréhension de la notion nouvelle, demandent de pouvoir résoudre, en temps limité, le problème spécifique de l'exercice. Or pour nombre d'élèves, l'angoisse de la note provoquée par le contrôle inhibe les capacités de recherche. L'expérience indique que le test de closure est "mieux vécu" par les élèves : se livrer- même avec le plus grand sérieux- au jeu consistant à remplir des trous est probablement moins angoissant que de sécher sur un énoncé.

Pour toutes ces raisons, le test de closure nous paraît susceptible de rendre d'appréciables services dans la pratique de l'enseignement. Même si son utilisation peut demander de remettre en cause quelques idées reçues, et de longues habitudes.



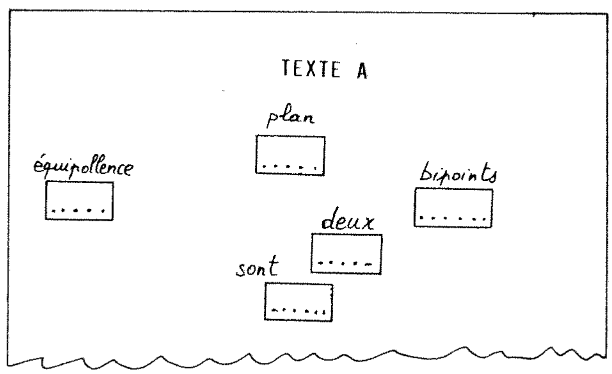


Fig. 1 *copie d'élève* *grille de correction*

TEXTE A

Les vecteurs du plan sont des classes d'équipollence de bipoints. Si deux bipoints de même origine représentent deux vecteurs égaux, leurs extrémités sont les mêmes. Si deux bipoints de même origine représentent deux vecteurs opposés, leurs extrémités sont symétriques par rapport à leur origine.

Le vecteur nul est représenté par tout bipoint dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les bipoints qui les représentent sont portés par des droites parallèles. Par conséquent le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{U} = k\,\vec{V}$ ou $\vec{V} = k\,\vec{U}$.

Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant calculé dans une base quelconque est nul. Le calcul du déterminant de deux vecteurs est un test permettant de savoir s'ils sont colinéaires ou au contraire indépendants.

Les équations paramétriques d'une droite (D) définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{U}$ s'obtiennent en écrivant :

$M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k.\vec{U}$; le paramètre k étant la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AM}$, l'unité et l'orientation étant définies par le vecteur $\vec{U}$.

Une équation cartésienne d'une droite (D) définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{U}$ s'obtient en écrivant :

$M \in (D) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{U}) = 0.$

TEXTE A

Les vecteurs du ..... sont des classes d' ..... de bipoints. Si deux ..... de même origine représentent ..... vecteurs égaux, leurs extrémités ..... les mêmes. Si deux ..... de même origine représentent ..... vecteurs opposés, leurs extrémités ..... symétriques par rapport à ..... origine.

Le vecteur nul ..... représenté par tout bipoint ..... l'origine et l'..... sont confondues.

Deux vecteurs ..... colinéaires si et seulement ..... les bipoints qui les ..... sont portés par des ..... parallèles. Par conséquent le ..... nul est colinéaire à ..... autre vecteur.

Deux vecteurs ..... et $\vec{V}$ sont colinéaires ..... et seulement si il ..... un nombre réel k ..... que $\vec{U} = k$ ..... ou $\vec{V} = k$ ..... .

Deux vecteurs $\vec{U}$ et ..... sont colinéaires si et ..... si leur déterminant calculé ..... une base quelconque est ..... . Le calcul du déterminant ..... deux vecteurs est un ..... permettant de savoir s'..... sont colinéaires ou au ....., indépendants

Les équations paramétriques ..... une droite (D..... définie par un ..... A et un vecteur ..... $\vec{U}$ s'obtiennent en .....:

$M \in$ (D ..... $\overrightarrow{AM}$ = ... $\vec{U}$; le paramètre k ..... la mesure algébrique du ..... $\overrightarrow{AM}$, l'unité ..... l'orientation étant définies ..... le vecteur U.

Une .....cartésienne d'une droite ..... D) définie par ..... point A et un ..... directeur $\vec{U}$ s'obtient ..... écrivant :

$M \in$ (.....) $\Leftrightarrow$ det($\overrightarrow{.....M}$, $\vec{U}$) = ...

TEXTE B

Une transformation F du plan affine P est une application bijective de P sur lui-même.

Si D et Δ sont deux droites sécantes, la projection sur D parallèlement à Δ n'est pas une transformation : tout point A de D admet pour antécédents les points de la droite passant par A et parallèle à Δ.

Un point est "fixe" ou "invariant" par F s'il est égal à son image par F. Un ensemble de points E est dit "globalement invariant" si l'ensemble des images de ses points est E lui-même. La translation $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ n'admet aucun point invariant, sauf si $\vec{u} = \vec{0}$. Dans ce cas, $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ est l'identité. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, toute droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est globalement invariante par $\mathcal{T}_{\vec{u}}$, bien qu'aucun de ses points ne soit fixe. Une symétrie S_o de centre o, a pour unique point fixe son centre. Mais toute droite passant par o est globalement invariante. Une homothétie de centre o et de rapport différent de 1 possède la même propriété. D'ailleurs la symétrie de centre o est une homothétie de centre o et de rapport − 1.

Une transformation F est dite "affine" si elle conserve l'alignement :

(A,B,C, distincts et alignés) $\Longrightarrow$ (F(A), F(B), F(C) alignés).

Les translations, les symétries et les homothéties sont affines. L'ensemble des points invariants d'une transformation affine est soit un point, soit une droite, soit le plan tout entier.

TEXTE B

Une transformation F du ..... affine P est une ..... bijective de P sur ..... même.

Si D et ..... sont deux droites sécantes, ... projection sur D parallèlement..... Δ n'est pas ..... transformation : tout point A ..... D admet pour antécédents ..... points de la droite ..... par A et parallèle à ..... .

Un point est ..... ou "invariant" par F ..... il est égal à ..... image par F. Un ..... de points E est ..... "globalement invariant" si l' ..... des images de ses ..... est E lui-même. ..... translation $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ de vecteur ..... n'admet aucun point ..... , sauf si $\vec{u}$ = ... Dans ce cas, $\mathcal{T}_{\vec{u}}$ ..... l'identité. Si $\vec{u}$ ..... $\vec{0}$, toute droite de ..... directeur $\vec{u}$ est globalement ..... par $\mathcal{T}_{\vec{u}}$, bien qu' ..... de ses points ne ..... fixe. Une symétrie S_o ..... centre o, a pour ..... point fixe son centre. Mais toute droite passant par ..... est globalement invariante. Une ..... de centre o et ..... rapport différents de 1 ..... la même propriété. D' ..... la symétrie de centre ..... est une homothétie de ..... o et de rapport ..... 1.

Une transformation F ..... dite "affine" si elle ..... l'alignement :

(A, ..., C, distincts et alignés .... $\Longrightarrow$(F(.....), F(B ....., F(C) .....)

Les translations, les ..... et les homothéties sont ..... . L'ensemble des points ..... d'une transformation affine ..... soit un point, soit ..... droite, soit le plan ..... entier.

BIBLIOGRAPHIE

1) BOYCE (M.W.).- **Some comments of the use of the cloze for classroom mathematics materials.**- *in School Science and Mathematics*, 1978, pp 9-12.

2) GAGATSIS (A).- **Test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques.**-Strasbourg, IREM, 1980.-

3) GAGATSIS (A).- **Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques.**- Thèse de 3e cycle.- Strasbourg, IRMA, nov. 1982.-

4) GAGATSIS (A).- Ont-ils compris ?.- **Ouvert n°30.-**

5) GAGATSIS (A).- Questions soulevées par le test de closure.- à paraître dans **Revue Française de Pédagogie,** 1983.-

6) HENRY (G).- **Comment mesurer la lisibilité.**- Paris, F. Nathan, 1975.-

7) HATER (M.A.) et KANG (R.B.).- **The cloze procedure as a measure of the reading comprehensibility and difficulty of mathematical English.**- Purdue University, 1969 (doc. ronéotypé).-

8) KANER (R), BYRNE (M), HATER(M).- **Helping children read mathematics.**- American book compagny, 1974.-

9) LABORDE (C).- **Langue naturelle et écriture symbolique.**-Thèse de docteur es science.- Grenoble, 1982.-

10) LANDSHEERE (G. de).- **Le test de closure.**- Bruxelles, Labor, 1973.-

UNE SUITE REMARQUABLE

E. EHRHART

Depuis l'Antiquité le problème des nombres parfaits n'a cessé d'intriguer les mathématiciens. Ce problème, posé par Euclide et partiellement résolu par Euler, nous a conduit à étudier la suite

$$U_n = \frac{\sigma n}{n}$$

(σ_n désigne traditionnellement la somme des diviseurs de n). Elle étonne par l'infinité de ses oscillations capricieuses et son extrême lenteur à atteindre de grandes valeurs, lenteur comparable à celle de lln.

I VARIATIONS ET LIMITES

Descartes nota que $\sigma_{nm} = \sigma_n \sigma_m$, si n et m sont premiers entre eux ; sinon on montre sans peine que $\sigma_{nm} < \sigma_n \sigma_m$. D'où immédiatement :

THEOREME 1. **Si n et m sont premiers entre eux, $U_{nm} = U_n U_m$; sinon $U_{nm} < U_n U_m$.**

Voici, au demi-centième près, les premières valeurs de U_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
U_n	1	1,5	1,33	1,75	1,2	2	1,14	1,88	1,44	1,8	1,09	2,33	1,08	1,71	1,6	1,94

Il est clair que $U_n \geqslant 1$ et que, p désignant un nombre premier, **la suite U_p est décroissante et tend vers 1,** car $U_p = 1 + \frac{1}{p}$. On constate une certaine régularité initiale : **le sens de variation de U_n change à tout n < 62.**

Les premières valeurs de U(k!), approchées pour k > 5, sont :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	- -	13	- -	20 - - 30
U(k!)	1	1,5	2	2,5	3	3,36	3,84	3,95	4,08	4,22	- -	4,99	- -	5,71- - 6,26

Généralement n < k! entraîne U_n < U(k!). Mais pas toujours ; ainsi 30240 < 8!, et pourtant U(30240) = 4 (valeur signalée par Descartes) dépasse U(8!) ≅ 3,95.

THEOREME 2. **La suite U(k!) est croissante et tend vers l'infini.**

1) **U(k!) croît.** Si $a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots c^{\gamma}$ est la décomposition en facteurs premiers de $(k-1)!$

$$\sigma\left[(k-1)!\right] = (1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha})(1+b+b^2+\ldots+b^{\beta})\ldots(1+c+c^2+\ldots+c^{\gamma}).$$

Si k est premier

$$U(k!) = U\left[(k-1)!\right]\, U_k > U\left[(k-1)!\right].$$

Sinon, tout facteur de la décomposition de k est tiré de la liste a, b, ... c. Si $a^{\alpha'}$ est ce facteur, il multiplie $U\left[(k-1)!\right]$ par :

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha+\alpha'}}{(1+a+a^2+\ldots+a^{\alpha})a^{\alpha'}} = \frac{a^{\alpha+\alpha'+1}-1}{(a^{\alpha+1}-1)a^{\alpha'}} = \frac{a^{\alpha+\alpha'+1}-1}{a^{\alpha+\alpha'+1}-a^{\alpha'}} > 1$$

2) **U(k!) tend vers l'infini.** Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ les nombres premiers jusqu'à p_r. Alors

$$U(p_r!) > \left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_r}\right)$$

et

$$\ln U(p_r!) > \ln\left(1+\frac{1}{p_1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{p_2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{p_r}\right) = \Sigma\frac{1}{p_i} - \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{3}\Sigma\frac{1}{p_i^3}\ldots$$

les sommations se faisant de i = 1 à i = r. On sait que $\Sigma\frac{1}{p_i} \to \infty$ avec r tandis que les autres sommes, en ordre décroissant, convergent. Donc $U(p!) \to \infty$ avec p et par suite aussi U(k!) avec k, puisque U(k!) est croissant.

THEOREME 3. **La suite $U(A^k)$ est croissante et tend vers un nombre fini, quel que soit l'entier donné A.**

Si, décomposé en facteurs premiers, $A = a^{\alpha}\, b^{\beta} \ldots c^{\gamma}$, alors

$$\sigma(A^k) = \frac{(a^{\alpha k+1}-1)(b^{\beta k+1}-1)\ldots(c^{\gamma k+1}-1)}{(a-1)(b-1)\ldots(c-1)}$$

Donc

$$U(A^k) = \frac{\left(a-\frac{1}{a^{\alpha k}}\right)\left(b-\frac{1}{b^{\beta k}}\right)\ldots\left(c-\frac{1}{c^{\gamma k}}\right)}{(a-1)(b-1)\ldots(c-1)}$$

croît et tend vers $\frac{ab\ldots c}{(a-1)(b-1)\ldots(c-1)}$.

Exemple : la suite $U(10^k)$ croît et tend vers $\frac{2.5}{1.4} = 2,5$.

THEOREME 4. **Pour tout nombre premier p, $U(p^k) < 2$ quel que soit k.**

Car $U(p^k)$ croît avec k et tend vers $\frac{p}{p-1} \leqslant 2$.

Exemple : la suite $U(2^k) = 2 - \frac{1}{2^k}$ croît et tend vers 2.

THEOREME 5. **Quel que soit l'entier donné k, si le nombre premier p croît, alors $U(p^k)$ décroît et tend vers 1.**

Car $$U(p^k) = \frac{p^k+p^{k-1}+\ldots + p+1}{p^k} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^k}$$

II NOMBRES PARFAITS ET U_n ENTIERS

DEFINITION : On appelle **nombre parfait** un entier n égal à la somme de ses parties aliquotes, donc tel que $U_n = 2$.

Exemple : $6 = 1 + 2 + 3$ est un nombre parfait et $U_6 = \frac{1+2+3+6}{6} = 2$.

Euclide savait que tout entier de la forme $2^k(2^{k+1}-1)$ est parfait, si $2^{k+1}-1$ est un nombre premier et $k \geqslant 1$. Mais Euler montra :

THEOREME 6. **Les entiers d'Euclide sont les seuls nombres parfaits pairs.**

Voici, courte et élégante, la démonstration de cette proposition par Dickson [1] :
Soit $2^k q$ un nombre parfait, où q est impair et $k \geqslant 1$. Alors

$$U(2^k q) = \frac{(2^{k+1}-1)s}{2^k q} = 2$$

s étant la somme des diviseurs de q. On en tire

$$s = q + \frac{q}{2^{k+1}-1} .$$

Par suite $\frac{q}{2^{k+1}-1} = 1$ (car sinon les termes q, $\frac{q}{2^{k+1}-1}$, 1 figureraient dans la somme s), et alors q est premier, puisque $s = q + 1$.

Y a-t-il des nombres parfaits impairs ? Nul ne le sait. Cette question millénaire est une des plus énigmatiques qui soient. On a comparé sa difficulté à celle de la transcendance de π (avant la démonstration historique de Lindemann) ou celle du problème ouvert de Fermat. On sait que si un tel entier existait, **il aurait au moins 200 chiffres** [2] . Nous avons montré que **pour n impair U_n prend aussi souvent que l'on veut des valeurs aussi proches de 2 que l'on désire.**

Alors que $U_1 = 1$, $U_6 = 2$, $U_{120} = 3$, $U_{30240} = 4$, le plus petit n connu pour $U_n = 6$ dépasse 10^{28}. Quant aux 5 nombres n connus pour $U_n = 8$, ils sont immenses, le plus petit étant de l'ordre de 10^{140} [2] .

Descartes et Fermat, entre autres, cherchaient assidûment des valeurs de n qui rendent U_n entier. **A part 1 et 6, toutes les valeurs trouvées actuellement sont multiples de 4.** D'où notre supposition :

CONJECTURE. A part 1, aucun n impair ne rend U_n entier.

RÉSUMÉ

N'est-elle pas curieuse, cette suite rationnelle U_n, qui prend sporadiquement des valeurs entières, qui, sauf au début, oscille irrégulièrement - probablement entre 1 et 6 pour $n < 10^{17}$ * - et qui contient à la fois une suite $U(p_k)$ décroissante et tendant vers 1, une suite constante $U(E_k) = 2$, E_k étant le k-ième entier d'Euclide, des suites $U(A^k)$ croissantes tendant vers des nombres finis et deux suites $U(k!)$ et $U(p_1p_2...p_k)$ croissantes et tendant vers l'infini ?

Avec U_n on voit un exemple d'étude d'une suite instable.

* L'exemple extrême est sans doute

$$n = 2^{12}.3^6.5.7.11.13.17.19.23.29.31 \cong 0,998.10^{17}$$

avec $U_n \cong 5,999$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] L. Dickson, Amer. Math. Monthly, 18, 109 (1911).

[2] R. Guy, Unsolved problems in number theory, Vol. 1, pp 25-29, Springer, New York - Berlin (1981).

UN NOUVEAU MANUEL (SUITE DE LA PAGE 1)

Le lecteur aura vite compris que le soi-disant "*nouveau*" manuel date quelque peu. Les définitions des limites et de la continuité n'ont pas beaucoup vieilli (si ce n'est la désignation de l'image de s par f par la lettre y - mais pourquoi pas !-et l'utilisation d'un "*filtre*" différent pour la limite en un point) et pourtant le manuel date de 1902. En voici la page de garde (*) :

Leçons

d'Algèbre

élémentaire

PAR

C. Bourlet

Docteur ès sciences mathématiques, Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Deuxième édition revue et complétée.

PARIS

Librairie Armand Colin

5, rue de Mézières, 5

1902

Tous droits réservés.

(*) Cet ouvrage ainsi que quelques autres précieux documents ont été offerts à la Bibliothèque de l'IREM par notre collègue Roger ISS.

L'ouvrage fait partie du "*Cours complet de mathématiques élémentaires*" publié sous la direction de Darboux. On remarquera que les notions de base de l'Analyse sont classées dans le volume d'"*Algèbre élémentaire*".

Un mot de l'auteur. Carlo BOURLET, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée St Louis, enseignait également à l'Ecole des Beaux-Arts. Sa thèse de doctorat portait sur certains types d'équations différentielles, mais c'est dans un domaine inattendu que ce professeur de Taupe obtint son meilleur succès de librairie : conseiller technique au Touring-Club de France, il s'interessait de près au cyclisme et publia en 1895 un "*Traité des bicycles et bicyclettes*", réédité avec des corrections en 1898. Le sujet a certainement été approfondi depuis l'époque où C. Bourlet s'estime le premier à avoir tenu compte de la résistance de l'air dans ses calculs. L'OUVERT vous tend la perche et reviendra probablement sur ce sujet. Cependant, deux résultats apparemment paradoxaux méritent d'être signalés :
* Lorsque le vent souffle derrière le cycliste, mais latéralement, il introduirait une résistance supérieure à celle de l'air calme, lorsque l'angle qu'il fait avec la trajectoire dépasse une certaine valeur.
* Dans une course à départ arrêté, il existe pour un coureur, une machine et une distance données, une vitesse optimale minimisant le temps de parcours. Le calcul de cette vitesse optimale se fait en cherchant le minimum de $t(v_1)$ dans la relation :

$$t(v_1) = \frac{2D\left[T - kPd - \frac{1}{2} hSv_1^2 d\right] + Mv_1^2 d}{2v_1\left[T - kPd - \frac{1}{2} hSv_1^2 d\right]}$$

De quoi faire méditer les nostalgiques du Vel d'Hiv !

C. Bourlet fut également une grande figure de l'A.P.M.

Pour en revenir au livre de Math.Elem, son esprit résolument moderne reste frappant. Les lecteurs de l'OUVERT se souviennent peut-être de la copie de l'élève BERGSON au Concours général de 1876 (*). Il devait, en particulier, trouver l'aire de la section maximale d'un cube par un plan perpendiculaire à l'une de ses diagonales. Le candidat obtint des formules du second degré et

(*) OUVERT n° 24, p. 1.

en chercha le maximum par diverses méthodes, mais sans utiliser la dérivation. Or, dans son ouvrage, C. BOURLET annonce avoir "*résolument abandonné, pour l'étude de la variation des fonctions, la méthode élémentaire*" et avoir "*adopté celle des* **dérivées**". Il ajoute : "*Au premier abord, ceci peut paraître une hardiesse*"...

En conclusion, voici la présentation de l'ensemble des entiers, négatifs ou positifs, proposée en appendice :

On peut définir les nombres négatifs de la façon suivante, due à M. Weierstrass .

Soient A et B deux nombres arithmétiques. On appelle nombre algébrique l'ensemble de ces deux nombres pris dans un certain ordre : par exemple, A le premier, B le second. Représentons le nombre algébrique ainsi défini par le symbole

$$(A, B).$$

Cette nouvelle classe de nombres sera parfaitement définie si on définit l'égalité, l'addition et le produit de deux de ces nombres.

1° On aura, par définition,

$$(A, B) = (A', B')$$

si

$$A + B' = A' + B.$$

On remarquera que ceci entraîne

$$(1, 1) = (0, 0)$$

et qu'il y a une infinité de couples de nombres arithmétiques définissant le *même* nombre algébrique.

2° Par définition on aura, aussi,

$$(A, B) + (A', B') = (A + A', B + B')$$

et

$$(A, B) \times (A', B') = (AA' + BB', AB' + BA').$$

De ces définitions résulteront les définitions de la différence et du quotient de deux nombres algébriques. On vérifiera que les opérations ainsi définies jouissent des mêmes propriétés que les opérations arithmétiques. On verra, ensuite, que, sans introduire de contradiction, on pourra faire la convention

$$(A, 0) = A.$$

Tout nombre algébrique (A, B) s'écrira, alors,

$$(A, B) = (A, 0) + (0, B) = A + (0, B).$$

Les seuls nombres nouveaux à introduire seront les nombres de la forme

$$(0, A)$$

et, par la nouvelle convention de désigner le nombre (0, A) par le symbole — A, on sera ramené à la notation ordinaire des nombres négatifs.

En 1902, dans un manuel de Terminale...

FAISONS UN TOUR A LA BIBLIOTHEQUE DE L'I.R.E.M.

Pendant les vacances, la bibliothèque de l'IREM s'est considérablement agrandie afin de mieux vous accueillir.

Vous y trouverez, outre les brochures des différents IREM, des ouvrages concernant :

- la philosophie et la pédagogie générale, des réflexions sur l'éducation et l'école, la psychologie,
- la didactique, l'heuristique,
- la numération, l'algèbre, la géométrie et l'analyse,
- les mathématiques appliquées,
- des recueils d'exercices,
- la maternelle et le primaire,
- l'histoire des mathématiques, des dictionnaires et des bibliographies,
- des jeux, matériels divers (calculatrices électroniques), des divertissements mathématiques,
- les calculettes, micro-ordinateurs et ordinateurs,
- des compte-rendus de colloques, de séminaires, enquêtes, rapports,
- des thèses,
- les brochures de l'A.P.M. (également en vente),
- l'astronomie,
- des manuels de la 6e à la Terminale (récents et plus anciens).

Sont également à votre disposition un grand nombre de revues très variées.

Les horaires d'ouverture sont les suivants :

- de $8^{h}30$ à 12^{h} et de 14^{h} à 17^{h}
  du lundi après-midi au vendredi soir.

C'est avec plaisir que nous vous accueillerons et que nous répondrons à vos questions.

Les bibliothécaires.

INFORMATION

UNE EXPOSITION SCIENTIFIQUE

A STRASBOURG

EN 1984

Du 28 avril au 6 mai 1984, à la foire de printemps à Strasbourg, 1200 m² seront réservés à une exposition scientifique patronnée par l'Association pour les musées des sciences de Strasbourg. Astronomie, Géologie, Mécanique des fluides, Chimie ... et bien sûr mathématiques seront proposés aux visiteurs.

De plus amples informations vous seront données ultérieurement, mais retenez dès à présent ces dates.