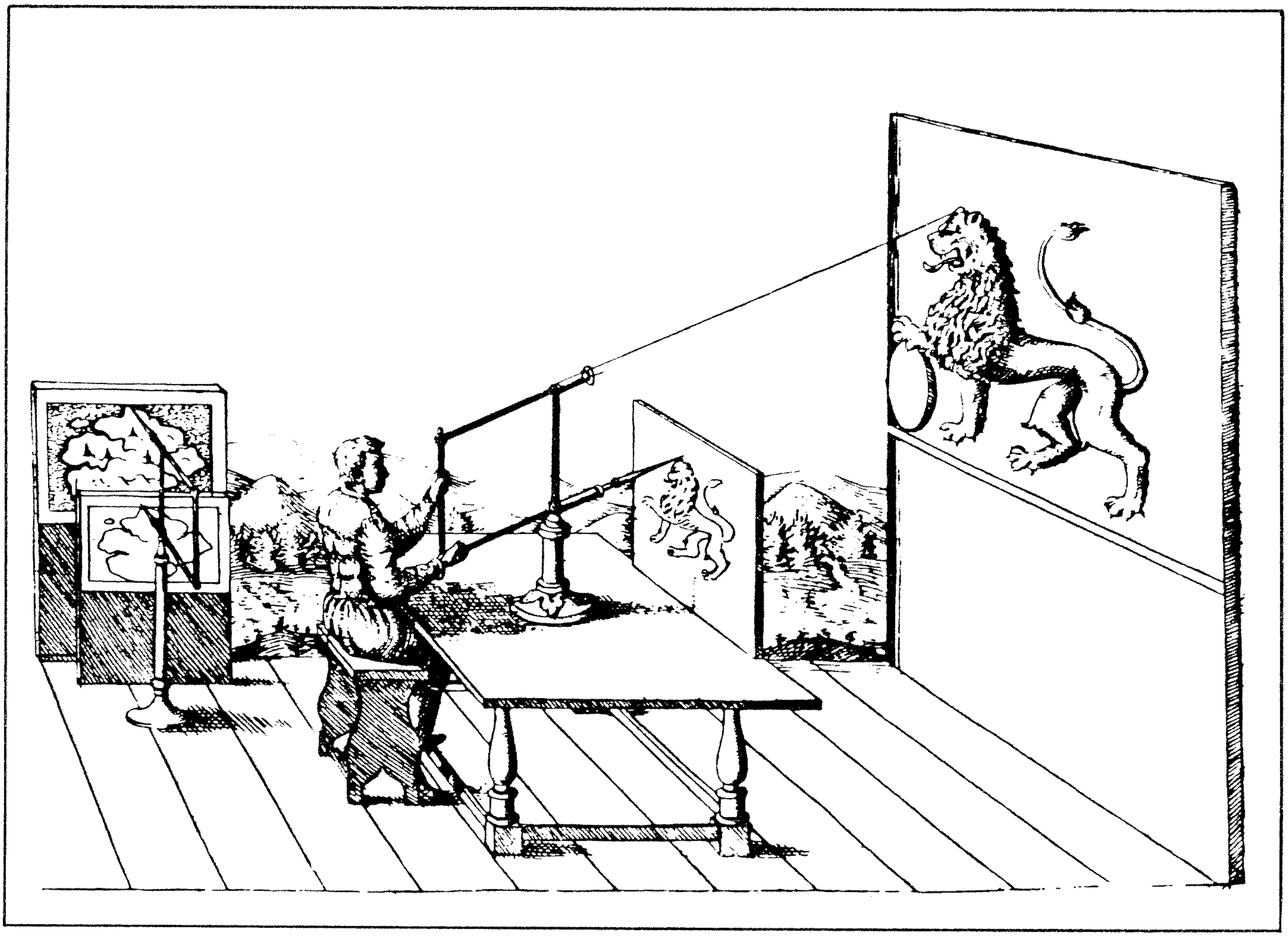
l'ouvert n°33

ORGANE D'INFORMATION ET D'ECHANGE DE LA
REGIONALE APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE
STRASBOURG - DEC . 83 - ISSN 0290-0068



NOTRE COUVERTURE

"Nouveau et récent instrument géométrique, par lequel tout ce qui se présente à la vue peut promptement et exactement être décrit et dépeint selon la mesure qu'on voudra."

Pour plus de précisions sur cet instrument révolutionnaire, voir l'article de la page 19.

EDITORIAL

Pour cette fin d'année 83, offrons-nous un rapide survol arrière de l'Ouvert nouvelle formule. Un peu de réflexivité ne peut pas faire de mal.

N°	date de parution	nombre d'articles	nombre d'articles rédigés à l'extérieur de l'IREM
23	Fev. 81	6	1
24	Mai 81	7	1
25	Nov. 81	8	2
26	Fev. 82	9	1
27	Juin 82	9	1
28	Oct. 82	8	0
29	Déc. 82	6	3
30	Mars 83	7	0
31	Juin 83	6	1
32	Sept. 83	6	1
33	Déc. 83	6	2

Quelques constatations :

1) La périodicité de l'OUVERT ne renvoie toujours pas à un phénomène périodique. Une certaine stabilisation apparaît néanmoins.

2) L'année 82 a vu paraître des OUVERT très chargés : huit à neuf articles, plus de 50 pages parfois. Un pavé peut être ouvert, bien sûr, mais l'OUVERT ne doit pas se transformer en pavé. L'année 83 paraît plus raisonnable.

3) Les contributions extérieures à l'IREM - c'est-à-dire les vôtres, honorables lecteurs - sont essentielles à la bonne santé du journal. Quatre par an, est-ce suffisant ?

Pour conclure, vive le cru 84 de l'OUVERT...

SOMMAIRE

L'OUVERT

. responsable de publication : J. Lefort

. rédaction : G. Glaeser et E. Chaney

. correspondance à adresser à :

Bibliothèque IREM

10, rue du Général Zimmer

67084 STRASBOURG CEDEX

. participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 60.- F (+ port)

. disponible à la Bibliothèque de l'IREM.

REPORTAGE AUX OLYMPIADES

G. GLAESER

C'est à Paris cette année, que se sont déroulées du 1er au 12 juillet les 24 ème Olympiades Internationales de Mathématiques.

J'y ai participé, à titre de coordinateur de la correction d'un des six problèmes proposés. Et c'est ainsi que j'ai baigné pendant quelques jours dans l'atmosphère jeune, studieuse, cosmopolite ... et malheureusement caniculaire qui caractérisait ces joutes intellectuelles.
J'en ai profité pour jouer le correspondant d'une prestigieuse publication, l'OUVERT, et j'ai été enquêter auprès de mes collègues et des candidats à propos des péripéties de la résolution de quelques problèmes posés.

Voici le problème n°4 :

Soit E l'ensemble réunion des trois côtés (sommets compris) d'un triangle équilatéral. Montrer que pour toute partition de E, ($E_1 \cup E_2 = E$ $E_1 \cap E_2 = \Phi$) l'une au moins des deux classes contient les sommets d'un triangle rectangle.

Je demande aux lecteurs de le chercher, car je le commenterai dans le prochain numéro, et la solution prend plus de sel lorsqu'on y a travaillé soi-même.

Aujourd'hui je parlerai surtout du problème n°6 :

Soient a,b,c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$(1) \qquad a^2b\,(a-b) + b^2c\,(b-c) + c^2a\,(c-a) \geqslant 0$$

IL Y A UN TRUC !

Lorsqu'on m'a montré cet énoncé (je n'ai pas participé à sa sélection), je ne suis pas parvenu à le résoudre. Et en lisant la solution proposée par les organisateurs, j'ai trouvé que c'était "injuste". En effet, la démonstration s'appuyait sur un "truc" que les candidats pouvaient connaître ou ignorer.

La difficulté de la question provient de ce que l'inégalité (1) est **conditionnelle.** Il s'agit de la démontrer, non pour un triplet (a,b,c) quelconque, mais pour un triplet soumis aux inégalités du triangle

(2) $\quad 0 \leqslant a \leqslant b + c \qquad 0 \leqslant b \leqslant c + a \qquad 0 \leqslant c \leqslant a + b$

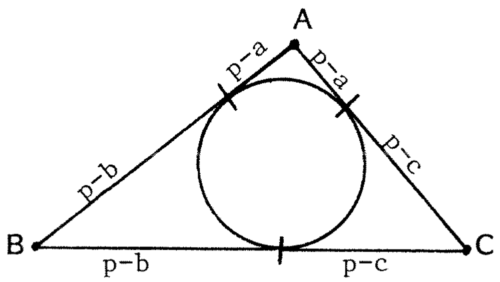
Le "truc" consiste à faire le changement de variable (3) ci-dessous, pour se ramener à une inégalité inconditionnelle.

Lemme Une condition nécessaire et suffisante pour que a,b,c,soient mesures des côtés d'un triangle est qu'il existe trois réels positifs x,y,z tels que :

$$(3) \qquad \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$$

C'est suffisant, puisqu'évidemment (3) (2)

C'est nécessaire comme le montre la figure bien connue :



où p désigne le demi-périmètre du triangle.

Il suffit de poser $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$, pour satisfaire à (3).

Dans ces conditions, un nombre non négligeable de candidats qui avaient déjà utilisé ce "truc" effectua le changement de variable (3). Il y avait alors plusieurs façons de conclure, en utilisant convenablement l'inégalité de Cauchy-Schwartz, par exemple.

D' autres solutions correctes furent obtenues, sans utilisation de ce truc, en constatant que l'inégalité (1) n'est pas symétrique (bien qu'invariante par permutation circulaire). On pouvait donc

distinguer les deux cas $a \geqslant b \geqslant c$ et $a \geqslant c \geqslant b$.
L'une des deux est plus facile que l'autre, car elle ne requiert même pas l'utilisation de (2).

Cependant le jury a décerné un prix spécial à deux candidats qui ont fournit une solution très courte, et très brillante, sans utilisation du truc. J'ai interviewé ces lauréats.

LES PRESTIDIGITATEURS

L'un deux Bernard LEEB (R.F.A.) m'a envoyé une lettre en me racontant comment il avait trouvé.

Ce jeune homme connaissait le "truc" précédent, et il l'a utilisé. En présence de l'inégalité inconditionnelle en x, y, z, il a procédé à diverses transformations algébriques simples, et est parvenu sans peine à la démonstration.

C'est alors qu'il a pensé que les transformations effectuées sur x, y, z, pouvaient se retraduire en a, b, c, grâce à :

$$(3\text{bis}) \qquad \begin{cases} 2x = b + c \\ 2y = c + a \\ 2z = a + b \end{cases}$$

Ainsi, après la version, il a fait un thème. Et dégageant sa solution de toutes les scories d'un aller-retour inutile, il a produit sur sa copie la solution de quelques lignes que devait trouver aussi l'autre lauréat.

Le jury s'est frotté les yeux en voyant cette solution tomber du ciel !

Le récit du lauréat Schmutzler (R.D.A) m'a fait comprendre comment on peut résoudre ce problème en un quart d'heure (avec encore quelques minutes pour vérifier et pour rédiger) sans faire de changement de variables.

Voici ce remarquable cheminement de pensée.
Le polynôme $P(a,b,c) = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a)$ est homogène du quatrième degré. Malheureusement, en contemplant (1), on ne voit pas immédiatement pourquoi P est positif, sous les conditions (2).

Le candidat cherche donc à inventer un polynôme Q tel que $P(a,b,c) \equiv Q(a,b,c)$ sous une forme où la réponse crève les yeux.

Il songe alors, (et c'est tout à fait raisonnable) à des termes tels que $(a + b - c)(a + c - b) \cdot$ (un carré parfait) qu'il reproduira par permutation circulaire.

Comme P s'annule pour $a = b = c$, il est naturel de songer à l'un ou l'autre des termes suivants $(a+b-c)\ (a+c-b)\ (c-a)^2$ ou $(a+b-c)\ (a+c-b)(b-a)^2$ Schmutzler a eu de la chance : le premier terme essayé était le bon (sinon, il aurait encore perdu quelques minutes pour essayer l'autre).

Voici sa solution, courte mais bonne (identique à celle de B. Leeb).

On a l'identité suivante, immédiate à vérifier :

$$2\ a^2b\ (a-b) + b^2c\ (b-c) + c^2a\ (c-a) =$$

$$(a+b-c)\ (a+c-b)\ (c-a)^2 + (b+c-a)\ (b+a-c)(a-b)^2+(c+a-b)(c+b-a)(b-c)^2$$

On constate que le second membre est positif, dès que les inégalités du triangle (2) sont vérifiées.

On remarquera que les solutions des deux lauréats, ne sont identiques qu'en apparence. D'ailleurs, on s'est d'abord demandé si des érudits n'avaient pas souvenir d'une identité analogue à celle qu'ils parachutaient ainsi dans leur solution elliptique. Non! Schmutzler a reconstitué celà sans effort apparent. Elémentaire, Mr Watson.

SUITES A TOUT FAIRE

B. BOOG

Les suites arithmétiques sont des fonctions affines ; les suites géométriques des fonctions exponentielles. Inversant le parallèle, à quelles suites peuvent bien correspondre les polynômes de degré $\geqslant 2$? Suites polynômiales pourrait-on dire, en les voyant déjà sous la forme :

$$n \mapsto a_0 + a_1 n + \ldots + a_k n^k.$$

Diverses raisons font que la base canonique des polynômes se prête mal à l'étude et l'utilisation de ces suites. Les coefficients binômiaux sont bien mieux adaptés. Ce point de vue de généralisation des suites arithmétiques est développé dans l'article qui suit. Notre collègue Bernard BOOG est parti "d'une idée découverte dans un lexique allemand du siècle dernier (Meyer's Lexikon, Arithmetische Reihen, Polygonalzehlen und Polyedralzahlen)".

L'OUVERT

1. Définition

On appelle suite arithmétique généralisée de base (ou de pivot) (α, β, γ, δ, ..., λ) où α, β, γ, δ, .. λ sont p nombres (réels par exemple) donnés, de raison d et d'ordre p, la suite :

$$n \geqslant 1 \; ; \; u_n = \alpha + C_{n-1}^{1} \beta + C_{n-1}^{2} \gamma + C_{n-1}^{3} \delta + \ldots + C_{n-1}^{p-1} \lambda + C_{n-1}^{p} d$$

en convenant que $C_x^y = 0$ si $y > x$.

Exemples

. $p = 0$: suite constante, $u_n = \alpha$

. $p = 1$: suite arithmétique : $u_n = \alpha + C_{n-1}^{1} d = \alpha + (n-1)d$

. $p = 2$: suite d'ordre 2 : $u_n = \alpha + C_{n-1}^{1} \beta + C_{n-1}^{2} d$

soit : $u_n = \alpha + (n-1)\beta + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} d$

si $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $d = 2$, on obtient les termes :

1, 4, 9, 16, 25, 36,...

. $p = 3$: suite d'ordre 3, $u_n = \alpha + C_{n-1}^{1}\beta + C_{n-1}^{2} \psi + C_{n-1}^{3} d$

si $\alpha = 1$, $\beta = 7$, $\gamma = 12$, $d = 6$, on obtient :

1, 8, 27, 64, 125,...

2. Une propriété caractéristique

Les suites d'ordre p forment un sous-espace de dimension p + 1 de l'espace des suites numériques. En d'autres termes :

Toute suite d'ordre p est déterminée par la donnée de p nombres (α, β, γ, ..., λ) et de raison d.

Inversement, la donnée de (p+1) nombres A,B,C,...,L détermine une suite d'ordre p ; en effet, α, β, ..., λ, d sont solutions du système :

$$\begin{aligned}
u_1 &= A = \alpha \\
u_2 &= B = \alpha + \beta \\
u_3 &= C = \alpha + C_2^1\beta + C_2^2\ \gamma \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_p &= \quad = \alpha + C_{p-1}^1\ \beta + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{p-1}^{p-1}\ \lambda \\
u_{p+1} &= L = \alpha + C_p^1\beta + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_p^{p-1}\ \lambda + C_p^p d
\end{aligned}$$

Or ce système est triangulaire et de déterminant 1.

Du même coup, on a prouvé que les fonctions polynômiales

$n \mapsto C_{n-1}^0 = 1$; $n \mapsto C_{n-1}^1$; ..... ; $n \mapsto C_{n-1}^p$ sont indépendantes.

Elles forment une base de l'espace des suites d'ordre p.

3. Quelques conséquences

1. Toute suite finie de k termes (géométrique par exemple) fournit les k premiers termes d'une suite arithmétique d'ordre k-1.
2. A partir d'une suite d'ordre p, on peut former p suites arithmétiques d'ordre (p-1), (p-2),... 2, 1, 0 en formant la suite des différences des termes consécutifs de la suite donnée puis en itérant ce procédé.

   Exemple : p = 5, α = 1, β = 1, γ = 2, δ = 3, ε = 4, d = 5

suite initiale :	1	2	5	13	33	81	187
suite d'ordre 4	1	3	8	20	48	106	
suite d'ordre 3	2	5	12	28	58		
suite d'ordre 2	3	7	16	30			
suite d'ordre 1	4	9	14				
suite d'ordre 0	5	5					

En effet, soient u_n et u_{n+1}, 2 termes consécutifs de la suite d'ordre p, alors :

$$u_{n+1} - u_n = \beta + C_{n-1}^1\ \gamma + \ldots + C_{n-1}^{p-2}\ \lambda + C_{n-1}^{p-1}d = V_n$$

et V_n est le terme général d'une suite d'ordre (p-1).

De même $V_{n+1} - V_n = W_n$ est le terme général d'une suite d'ordre (p-2),...

3. Toute suite d'ordre p permet de construire une suite d'ordre (p+1) par le seul choix du 1er terme.

4. Les termes consécutifs d'une suite d'ordre p sont liés entre eux par les relations :

si p = 1 $\quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$

si p = 2 $\quad u_{n-1} - 3u_n + 3u_{n+1} - u_{n+2} = 0$

si p = 3 $\quad u_{n-1} - 4u_n + 6u_{n+1} - 4u_{n+2} + u_{n+3} = 0$

. . . . .

à l'ordre p $\quad u_{n-1} - C^1_{p+1}u_n + C^2_{p+1}u_{n+1} - C^3_{p+1}u_{n+2} + \dots + (-1)^k C^k_{p+1}u_{n+k-1} = 0$

4. Formule sommatoire des termes d'une suite d'ordre p

La somme des k premiers termes d'une suite définie comme dans le § 1 se calcule ainsi :

$$S = C^1_k\,\alpha + C^2_k\,\beta + C^3_k\,\psi + C^4_k\,\delta + \dots + C^p_k\,\lambda + C^{p+1}_k\,d.$$

En effet, il est aisé de montrer que $\underbrace{C^p_p + C^p_{p+1} + \dots + C^p_{j-1}}_{j-p \text{ termes}} = C^{p+1}_j$ si $j \geqslant p+1$

5. Applications des sommes de puissance aux "filets" de points

1) SUITE DES PUISSANCES ENTIERES DES ENTIERS NATURELS

Ces suites s'obtiennent comme suites arithmétiques généralisées :

Suite des carrés des entiers : $n^2 = 1 + 3C^1_{n-1} + 2C^2_{n-1}$

Suite des cubes : $n^3 = 1 + 7C^1_{n-1} + 12C^2_{n-1} + 6C^4_{n-1}$

Suite des puissances quatrièmes : $n^4 = 1 + 15C^1_{n-1} + 50C^2_{n-1} + 60C^3_{n-1} + 24C^4_{n-1}$

et, de façon générale : la suite des puissances $p^{\text{ième}}$ ($p \in \mathbb{N}$) des entiers naturels forme une suite arithmétique d'ordre p.

En effet, les p+1 fonctions :

$$n \mapsto C^0_{n-1} \;;\; n \mapsto C^1_{n-1} \;;\; \dots\dots \;;\; n \mapsto C^p_{n-1}$$

sont indépendantes, et de degré $\leqslant$ p. Elles forment donc une base de l'espace des fonctions polynômiales de degré $\leqslant$ p, qui est bien de dimension p+1. Ce qui assure l'existence et l'unicité de $a_o, a_1, \dots, a_p$, d tels que :

$$n^p = a_o + a_1\,C^1_{n-1} + a_2\,C^2_{n-2} + \dots + a_{p-1}\,C^{p-1}_{n-1} + C^p_{n-1}d\,.$$

Pour n = 1 et n = 2, on obtient en particulier : $a_0 = 1$ et $a_1 = 2^p - 1$.

En cherchant le terme en n^p dans le deuxième membre, on a : d = p!

Pratiquement, il est plus aisé d'écrire dans l'ordre les puissances $p^{\text{ième}}$ des $(p+1)$ premiers entiers et de construire les suites des différences des termes consécutifs jusqu'à l'ordre 0.

Ainsi pour $p = 4$, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 \\
& 15 & & 65 & & 175 & & 369 & \\
& & 50 & & 110 & & 194 & & \\
& & & 60 & & 84 & & & \\
& & & & 24 & & & &
\end{array}$$

Les premiers termes des suites obtenues déterminent les paramètres de la base et la raison d. de la suite cherchée (propriété générale).

La formule sommatoire des termes d'une suite d'ordre p permet d'obtenir les formules donnant la somme des carrés, des cubes des k premiers entiers :

$$\sum_{n=1}^{n=k} n^2 = C_k^1 + 3C_k^2 + 2C_k^3 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n=k} n^3 = C_k^1 + 7C_k^2 + 12C_k^3 + 6C_k^4 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

de même on obtient :

$$\sum_{n=1}^{n=k} n^4 = \frac{k}{30}\ (k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)$$

2) PROBLEMES DE DENOMBREMENT

1) Construction d'un "filet" de points dans le plan

On considère dans le plan affine euclidien un triangle équilatéral (A,B,C) de côté 1.

L'homothétie $\mathcal{H}_k(A,k)$, $k \in \mathbb{N}$, transforme ce triangle en un triangle (A,B_k,C_k), réduit au point A pour $k = 0$ et coïncidant avec (A,B,C) pour $k = 1$.

Pour $k \geqslant 2$, on détermine sur $[B_kC_k]$ les points $I_{(k,i)}$ où $i \in \{1,2,\ldots,k-1\}$, formant avec B_k et C_k une subdivision régulière de pas égal à 1.

On forme ainsi un "filet" de points, quand k varie dans $\mathbb{N}$, dont le cardinal est le terme général d'une suite arithmétique d'ordre 2 défini par

$u_n = 1 + 2C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2$ où $n = k+1$.

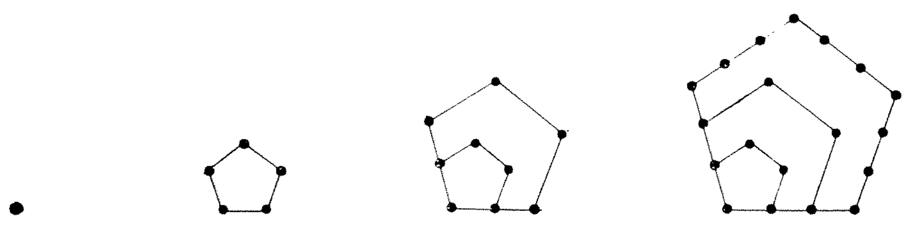
En effet, chaque nouvelle construction introduit (k+1) nouveaux points (pour k = 0, on obtient A, pour k = 1 les points B et C).
La suite des différences formées à partir de (u_n) est donc la suite des entiers naturels d'où le résultat.

nombres triangulaires

k=0	k=1	k=2	k=3
$u_1 = 1$	$u_2 = 3$	$u_3 = 6$	$u_4 = 10$

De façon générale, le procédé précédent permet, à partir d'un polygone convexe régulier de sommets $A, A_1, A_2, \ldots, Aq$, de construire un "filet" de points dont le cardinal est le terme général d'une suite arithmétique d'ordre 2 définie par $u_n = 1 + qC^1_{n-1} + (q-1)C^2_{n-1}$.
En effet, chaque nouvelle construction introduit $(q-1)k + 1$ nouveaux points (pour k=1, le polygone).
La suite des différences formées à partir de (u_n) est la suite des cardinaux des nouvelles pièces du "filet". Elle est définie par $v_n = (q-1)n + 2-q$ (ici $n = k+1$), la suite d'ordre 0 est la suite constante $\omega_n = q-1$.
Exemple : q = 4, pentagone régulier convexe ; $u_n = 1 + 4C^1_{o-1} = 3C^2_{n-1}$

nombres pentagonaux



k=0	k=1	k=2	k=3
$u_1 = 1$	$u_2 = 5$	$u_3 = 12$	$u_4 = 22$

En considérant un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre A de rayon 1, on peut construire, par le même procédé un réseau régulier de points équidistants dont le cardinal est le terme général de la suite d'ordre 2 définie par $u_n = 1 + 6C^1_{n-1} + 6C^2_{n-1}$.

2) Construction d'un "filet" de points dans l'espace

On considère dans l'espace affine euclidien de dimension 3 un polyèdre régulier d'arête égale à 1.

En fixant un sommet A de ce polyèdre et un entier $k \neq 0$, l'homothétie $\mathcal{H}_k(A,k)$ transforme ce polyèdre en un polyèdre semblable si $k \geqslant 2$ et en lui-même pour $k = 1$.

En appliquant le procédé précédent à ces polyèdres, on détermine un réseau de points dont le cardinal est alors le terme général d'une suite arithmétique d'ordre 3.

Ainsi pour

le tétraèdre : $u_n = 1 + 3C^1_{n-1} + 3C^2_{n-1} + C^3_{n-1}$

l'hexaèdre : $u_n = 1 + 7C^1_{n-1} + 12C^2_{n-1} + 6C^3_{n-1}$

l'octaèdre : $u_n = 1 + 5C^1_{n-1} + 8C^2_{n-1} + 4C^3_{n-1}$

le dodécaèdre : $u_n = 1 + 19C^1_{n-1} + 45C^2_{n-1} + 27C^3_{n-1}$

l'icosaèdre : $u_n = 1 + 11C^1_{n-1} + 25C^2_{n-1} + 15C^3_{n-1}$

Faisons le raisonnement dans le cas du dodécaèdre.

Le dodécaèdre est un polyèdre régulier ayant 20 sommets, 30 arêtes, 12 faces qui sont des pentagones réguliers. De chaque sommet sont issues 3 arêtes. Soit (D_k), $k \geqslant 2$, l'image du dodécaèdre (D_1) donné par $\mathcal{H}_k(A,k)$, où A est un sommet fixe de (D_1). L'ensemble de ces dodécaèdres ont en commun, le sommet A, seul sommet commun, les plans des 3 faces qui se coupent en A et les 3 droites supports des arêtes contenant A, intersections 2 à 2 de ces plans. Soit (P) un des plancs communs.

Dans le plan (P) on obtient alors un "filet" de points déterminé à partir du pentagone, face de (D_1) dans (P) et identique à celui défini dans l'exemple précédent. Le pentagone de (D_k) dans le plan (P) contient de ce fait à son intérieur $u_{n-1} - [2(n-1)-1]$ points, soit :

$$1 + 4C^1_{n-2} + 3C^2_{n-2} - (2n-3) = \frac{(n-2)(3n-5)}{2} \text{ points.}$$

Déterminant dans chaque face de (D_k) un "filet" de points identiques, et partageant chaque arête de (D_k) au moyen de (n-2) points, formant avec les extrémités de l'arête, une subdivison régulière de module 1, la construction de (D_k) introduit $(k = n-1)$:

$$v_{n-1} = 19 + 27(n-2) + \frac{9(n-2)(3n-5)}{2}$$

nouveaux points ; les points communs à (D_k) et (D_{k-1}), situés dans les plans (P) n'étant pas pris en compte. La suite (v_n) ainsi définie, est la suite des différences formée à partir de (u_n) où u_n représente le nombre de points de (D_k).

On obtient donc la suite (u_n) :

$$1,\ 20,\ 84,\ 220,\ 455,\ 816,\ 816+v_6,\ u_7+v_7,\ \ldots$$

La suite (u_n) est donc déterminée par les premiers termes des suites obtenues à partir des différences des termes consécutifs jusqu'à l'ordre 0, il en résulte :

$$u_n = 1 + 19C^1_{n-1} + 45C^2_{n-1} + 27C^3_{n-1}.$$

Notons que les suites des différences des termes consécutifs sont définies par :

$$v_n = 19 + 27(n-1) + \frac{9(n-1)(3n-2)}{2},\ n \geqslant 1$$

$$w_n = 27 + 9(3n-4)\ ,\ n \geqslant 2$$

$$t_n = 27\ \forall\, n \geqslant 3.$$

Elles déterminent les éléments de la base et la raison d = 27.

__Note de l'Ouvert__

La raison pour laquelle les coefficients binômiaux se prêtent mieux à l'étude de ces suites arithmétiques généralisées et des suites obtenues par différence, apparaît plus clairement sous un éclairage d'Algèbre linéaire :

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur un corps $\mathbb{K}$, de degré $\leqslant n$ et Δ l'opérateur différence ainsi défini :

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x).$$

Comme $d^\circ \Delta P \leqslant n-1$, $d^\circ \Delta^2 P \leqslant n-2$ ... on constate que $d^\circ \Delta^n P = 0$ et donc que $\Delta^{n+1} = 0$. Autrement dit, Δ est nilpotent d'ordre n+1. On sait qu'il existe alors une base de E où la matrice de Δ est un bloc de Jordan :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Cette base est précisément constituée des coefficients binômiaux C^k_n $(0 \leqslant k \leqslant n)$ où l'on substitue X à n. En effet, soit :

$$C_k(X) = X(X-1)\ldots(X-k+1)/k!$$

L'identité de Pascal ($C^k_{n+1} = C^k_n + C^{k-1}_n$) s'écrit alors : $\Delta C_k = C_{k-1}$ ce qui définit la matrice de Δ dans la base des polynômes C_k.

On peut consulter à ce sujet l'article de J. SAMSON et R. SEROUL dans l'Ouvert n° 30.

COURBES EPAISSES

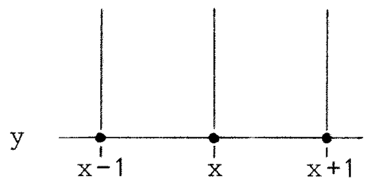
ou : des apports réciproques informatique-mathématique à propos de la construction des courbes définies par F(x,y) = 0

E. MEYER

Depuis l'utilisation du premier micro LX500 éducation nationale, où je dessinais des représentations graphiques de fonctions numériques à l'aide de grosses étoiles (!) une question me revenait régulièrement à l'esprit : faire un programme permettant de construire des courbes définies par l'utilisation en implicite : $F(x,y) = 0$. (Problème bien différent de $y = f(x)$ où il suffit de tabuler, calculer, dessiner.) Deux idées ont guidé mon travail sur des micro-ordinateurs sans table traçante, dont l'écran de visualisation a une définition point par point, mettons de l'ordre de 200 × 300 points.

I) F(x,y) = ax + by + c partage le plan en deux régions dont la frontière commune est la "courbe" d'équation F(x,y) = 0

Cette propriété est-elle encore vraie pour une fonction F plus compliquée ? Non, bien sûr ! Et pourtant, dans de très nombreux cas, cela se généralise bien. Le point de vue théorique reste à régler mais j'ai le sentiment qu'en éliminant des cas comme $F(x,y) = \{G(x,y)\}^2$ et en n'insistant pas près des points multiples, on règle de nombreuses constructions par le procédé suivant :



Si $F(x-1,y) \times F(x+1,y) < 0$ alors on considère sur l'écran, que le point (x,y) appartient à la courbe. (Il faudrait en fait faire intervenir une échelle et distinguer (x,y) des coordonnées sur l'écran.) On peut d'ailleurs améliorer ce procédé, au moins par un balayage vertical ($F(x,y-1) \times F(x,y+1) < 0$), voire même par des balayages en diagonales. Théoriquement, ce procédé n'est pas infaillible : il peut éliminer des portions de courbe, mais c'est surtout d'un point de vue pratique que j'ai été énormément déçu : le temps de réalisation d'une courbe classique est de l'ordre de la demi-heure ! Inacceptable à l'ère de l'informatique. Le nombre de "calculs" à faire est de l'ordre de 2 × 200 × 300 = 120000 (et j'ai d'ailleurs gagné très peu de temps en passant une partie du programme en assembleur ; il faut peut-être tripatouiller la gestion de l'écran...).

II) $\{F(x,y) = 0\}$ est inclus dans $\{|F(x,y)| < \varepsilon\}$

C'est la deuxième idée, évidente celle-là. Je me suis dis que pour une fonction F donnée, en trouvant la bonne valeur de ε (par tâtonnement) j'obtiendrai une belle courbe. Seconde déception : la bonne valeur de ε n'existe pas ! Il faudrait changer la valeur de ε suivant l'endroit de la courbe. (Voir par exemple les dessins obtenus pour l'hyperbole $xy-1 = 0$.)

Seraient-ce mes souvenirs de gradient ? Toujours est-il que l'idée m'est venue de remplacer $F(x,y)$ par $\dfrac{|F(x,y)|}{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}}$. Et alors, ε existe.

(théoriciens : qu'en pensez-vous ?)

Mais quel est l'intérêt de ce procédé ? Il y a toujours de très nombreux calculs à faire, rendus plus complexes encore par la présence de $\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}$. L'intérêt est le suivant : je fait un premier balayage de l'écran avec une certaine valeur de ε, en ne testant qu'un point sur cent par exemple (en faisant varier les coordonnées des points de l'écran de 10 en 10). Puis, je teste point par point (avec une autre valeur de ε) mais seulement la zone de l'écran signalée par le premier passage. Il est également possible d'utiliser la première méthode dans cette zone nettement réduite par rapport à l'écran tout entier.

III) Les différents dessins

C.N. : courbe "normale", obtenue soit par la méthode I ($F(x,y) \times F(x',y') < 0$) soit par la méthode II $\left(\dfrac{|F(x,y)|}{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}} < \varepsilon \right)$ appliquée à la zone réduite.

C.E.N. : courbe à épaisseur "naturelle", obtenue par $|F(x,y)| < \varepsilon$

C.E.R. : courbe à épaisseur "régulière", obtenue par $\dfrac{|F(x,y)|}{\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x})^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2}} < \varepsilon$

(sans intérêt ici pour ε trop grand ou trop petit).

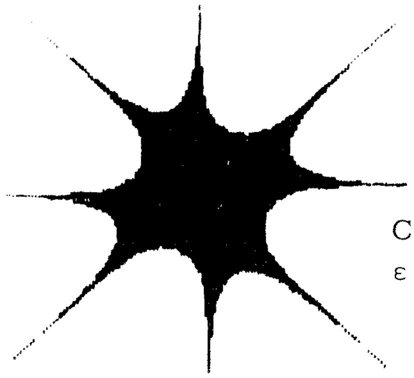
Conclusion partielle :

1°) l'informatique fait réfléchir

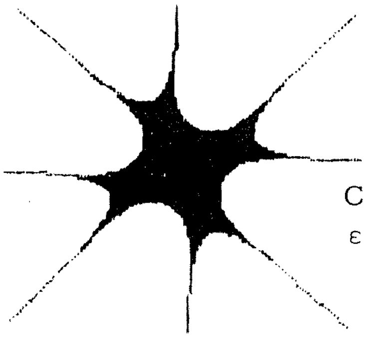
2°) les mathématiques, parfois, sont belles.

Croix de Malte

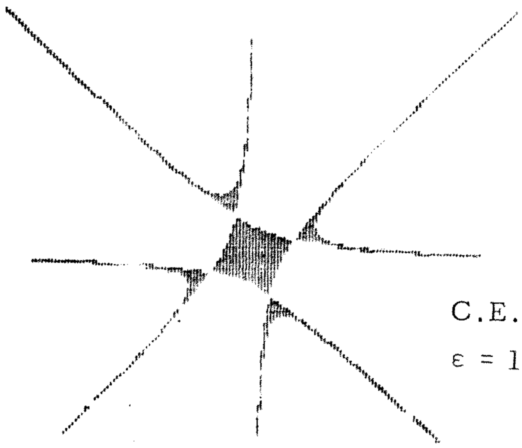
$xy(x^2-y^2)-x^2-y^2 = 0$



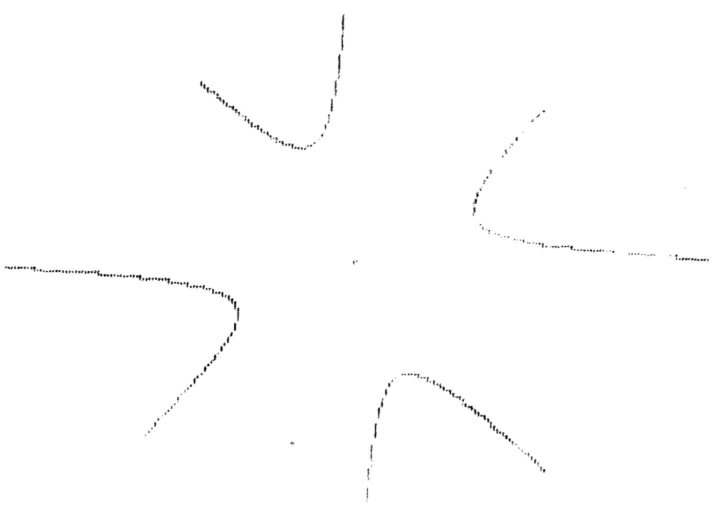
C.E.N.
$\varepsilon = 10$

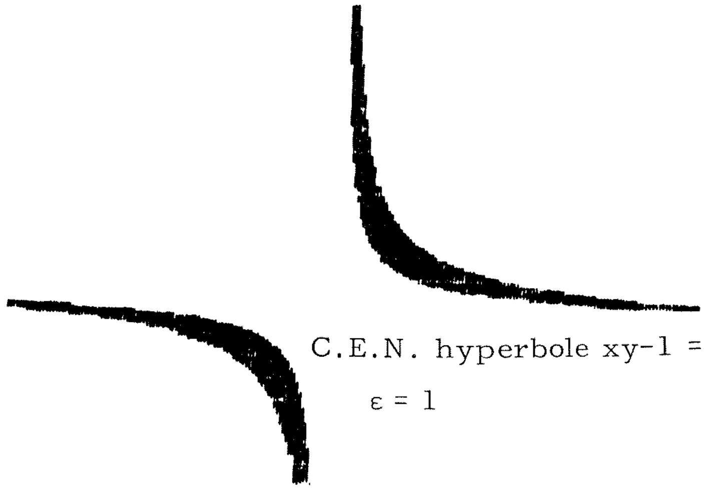


C.E.N.
$\varepsilon = 3$



C.E.N.
$\varepsilon = 1$



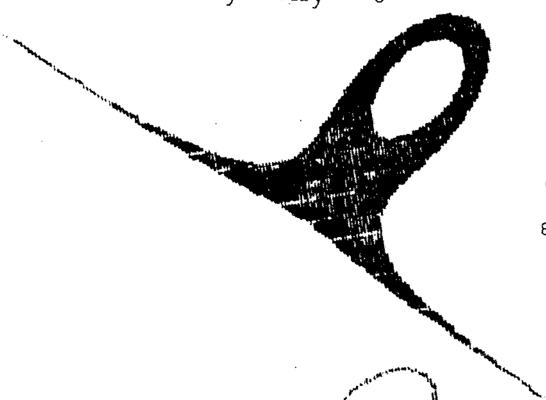


C.E.N. hyperbole $xy-1 = 0$

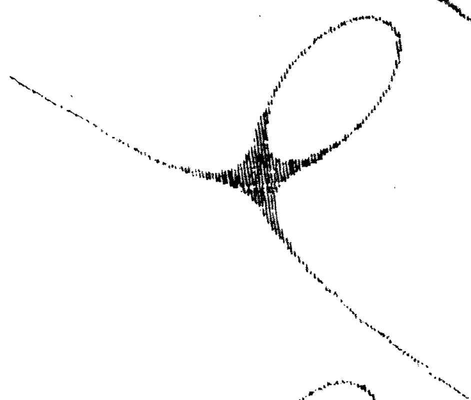
$\varepsilon = 1$

Folium de Descartes

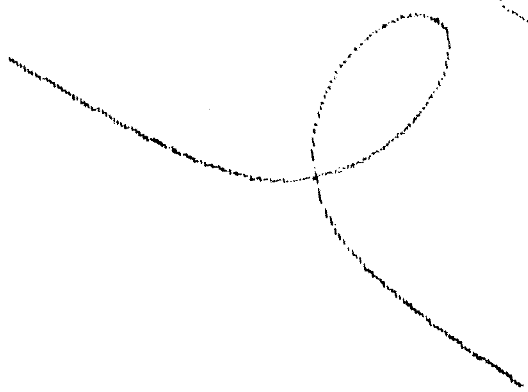
$x^3+y^3-3xy = 0$



C.E.N.
$\varepsilon = 0,5$

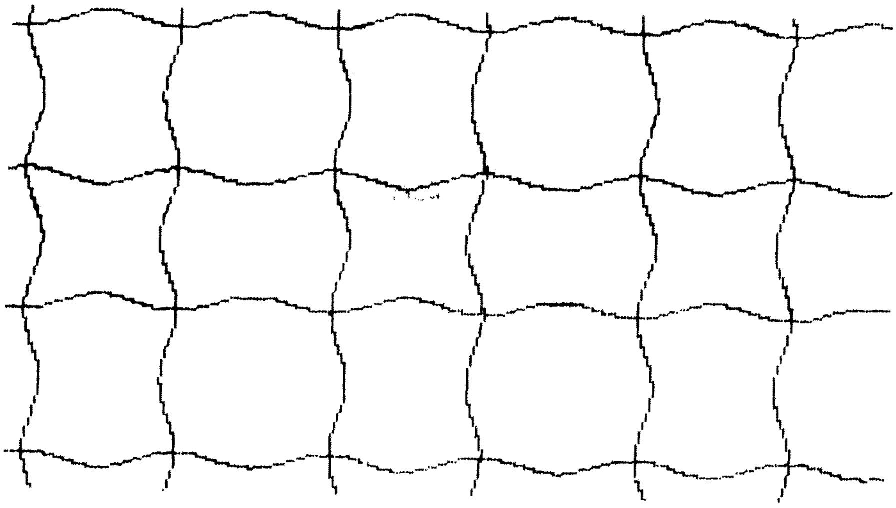


C.E.N.
$\varepsilon = 0,1$



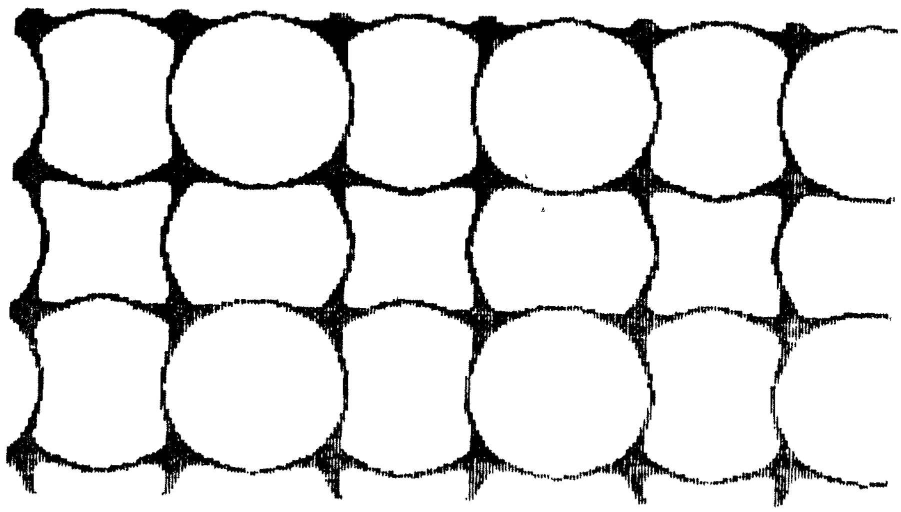
C.N.

C.N.



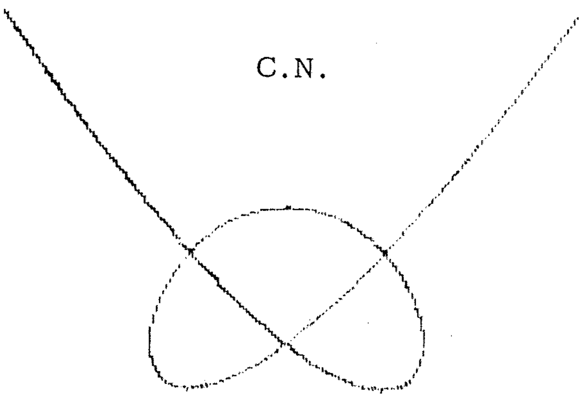
C.E.N.

$\varepsilon = 0,25$



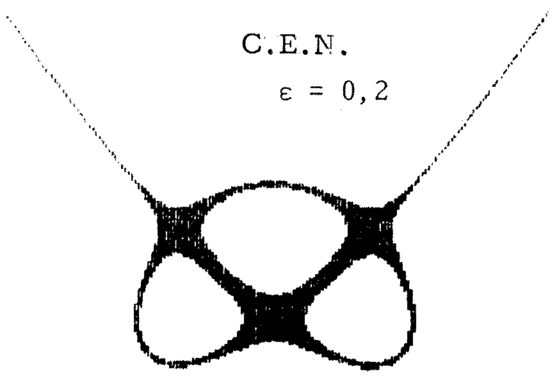
$\sin^3 x + \sin^3 y - 3\sin x \sin y = 0$

C.N.



C.E.N.

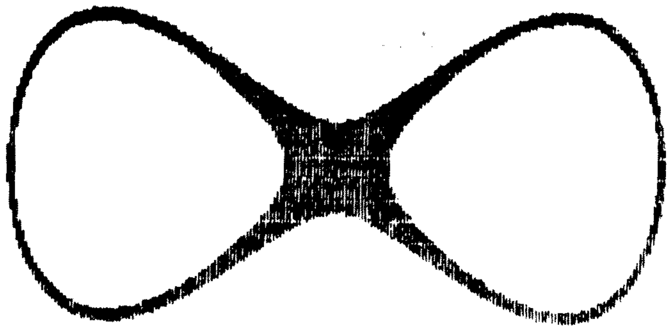
$\varepsilon = 0,2$



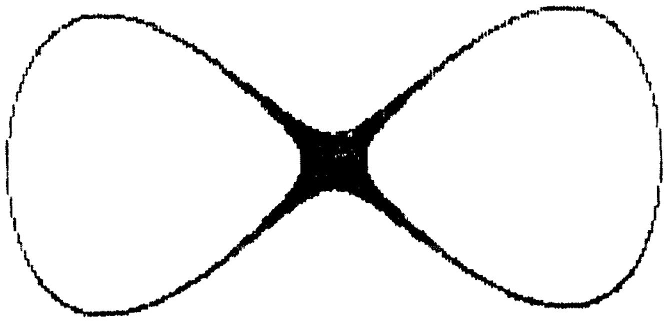
noeud $(x-1)^2 - y^2(3+2y) = 0$

Lemniscate $x^4 - x^2 + y^2 = 0$

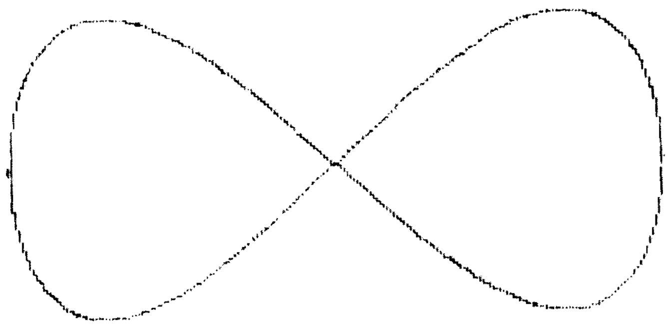
C.E.N.
$\varepsilon = 0,01$



C.E.N.
$\varepsilon = 0,025$



C.N.



DEVINETTE :

Quel collègue déclamait-il, du haut de son estrade :

La circonférence est fière
D'être égale à $2 \pi R$,
Et le cercle est tout joyeux
D'être égal à πR^2.

Ou encore :

Le volume de la sphère
Quoi que l'on puisse faire
Est égal à $\frac{4}{3} \pi R^3$
(soupir)
La sphère fut-elle de bois...

Tout lecteur qui découvrira le nom de ce poète aura gagné un abonnement d'un an pour une personne de son choix. Réponse dans le N° 34.

LE

PREMIER LIVRE DES

Inſtruments mathematiques mechaniques

DE I. ERRARD DE BAR-LE-DVC,

A TRES ILLVSTRE PRINCE MONSEIGNEVR,
LE DVC DE CALABRE, LORRAINE,
Bar, Gueldres, &c.

Imprimé à NANCY, par Ian-Ianſon, Imprimeur de ſon
ALTESSE.
M. D. LXXXIIII.

AVEC PRIVILEGE.

MILITAIRES, MATHEMATICIENS, MEME COMBAT ?

Eric CHANEY

On dit que la victoire des Etats-Unis dans le Pacifique, durant la 2e guerre mondiale, doit beaucoup aux calculs d'optimisation de Von Neumann et à sa théorie des jeux. Il faut bien reconnaître qu'en celà le XXe siècle n'innove pas. Sans vouloir remonter aux exploits militaires que l'on attribue à Archimède, les exemples de Jean Errard, auteur du "Premier livre des instruments mathématiques", et de ses contemporains, plongés dans la guerre de Cent ans, sont impressionnants.

Jean ERRARD, né à Bar le Duc en 1554, est de cette lignée des grands ingénieurs de la Renaissance, que l'ombre de Léonard de Vinci laisse souvent méconnue. Le XVIe siècle abonde en guerres, locales ou européennes, religieuses et/ou de conquête. L'artillerie est très prisée et sa technique progresse de bataille en bataille. Conjointement, l'art de la fortification et les techniques de déplacement rapide de pondéreux doivent suivre... On pouvait consacrer plusieurs siècles à l'élévation d'une cathédrale, mais il fallait pouvoir faire d'une ville une place-forte en quelques mois ! Les ingénieurs militaires sont donc fort recherchés.

C'est en cette qualité que Errard entre en 1575 au service de Charles III, duc de Lorraine, après s'être formé aux mathématiques et aux techniques de fortification en Italie puis à Heidelberg. Il explique d'ailleurs dans sa dédicace au duc que le "Livre des instruments mathématiques" est le résultat de son oisiveté : le duc de Lorraine ne le fait pas assez travailler !

Acquis à la Réforme, Errard quitte son maître lorsque celui-ci engage les persécutions contre les protestants, et passe au service du duc de Bouillon, allié de la France. L'ingénieur n'est plus au chomâge : il doit rapidement fortifier la ville de Jametz, menacée par les armées lorraines et contribue à sa défense. Le siège de la ville dure un an.

Une fois enlevée, son château résiste encore six mois... La réputation de Errard est alors assurée : Henri IV, dont les coffres sonnaient trop creux pour payer les services de tels spécialistes, lui accorde le droit de battre monnaie. Très apprécié, il fortifie de nombreuses places, se voit anoblit en 1599, et meurt quelques mois après l'assassinat du Vert Galant.

Mais où sont les mathématiques dans ces bruits de batailles, dira-t-on ? N'y a-t-il pas confusion entre ingénieur et mathématicien ? Errard mérite les deux titres : il publie en 1594 un traité de Géométrie, qui influença les manuels pendant longtemps. Quatre ans plus tard, il fait imprimer les six premiers livres d'Euclide qu'il a lui même traduits en français et commentés. Son cas est loin d'être exceptionnel :

TARTAGLIA (1506-1557) fut probablement le premier mathématicien à élaborer la solution générale de l'équation du troisième degré. Il l'aurait communiquée sous le sceau du secret à Jérôme CARDAN qui, violant son serment, la publia en 1545.

Mais il fut également le premier à appliquer les mathématiques à l'artillerie !

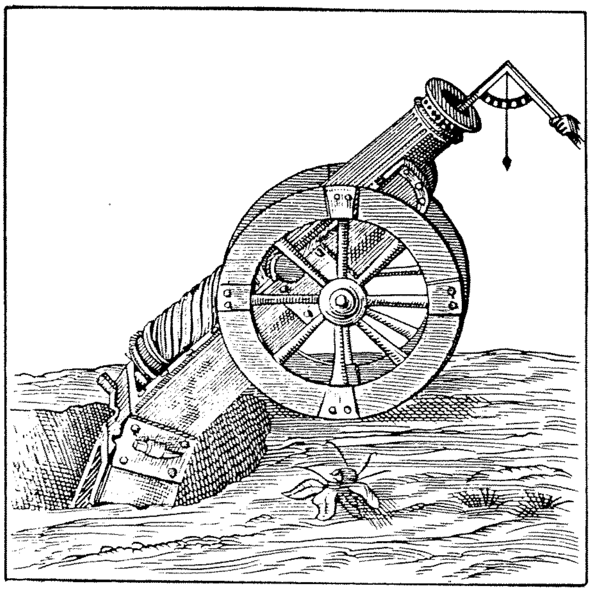


Fig 1 : extrait de "Il Primo Libro delli Qvesiti, et Inventioni diverse". Venise 1546

Son traité d'Arithmétique, surtout à usage commercial, le rendit plus célèbre que ses travaux sur les équations ou ses commentaires d'Euclide et d'Archimède !

BOMBELLI, né en 1530, travailla aussi sur les équations du 3e et du 4e degré. Il s'assura de la réalité des trois racines de l'équation cubique, même si leur calcul fait intervenir des "imaginaires".

Mais il était aussi ingénieur au service de l'évêque de Melfi.

François VIETE (1540-1603) imposa l'usage systématique des lettres en Algèbre. En "linéarisant" $\sin(n\theta)$, il s'interessa à des équations de degré quelconque. Il donna plusieurs "produits infinis" égaux à π, usa des techniques algébriques en Géométrie...

Mais il était également conseiller privé du roi et chargé de coder et décoder les messages diplomatiques. Bref, de faire du décryptage. Or, on sait que la diplomatie est le prolongement de la guerre...

Léonard DIGGS (mort en 1571) et son fils Thomas (mort en 1595) publièrent des traités de géométrie appliquée, aux noms hellenisants : Tectonicon, Pantometria. Mais leur plus célèbre ouvrage se nomme Stratioticos !

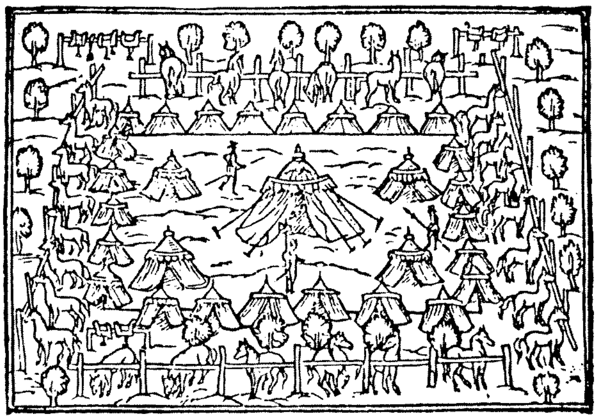


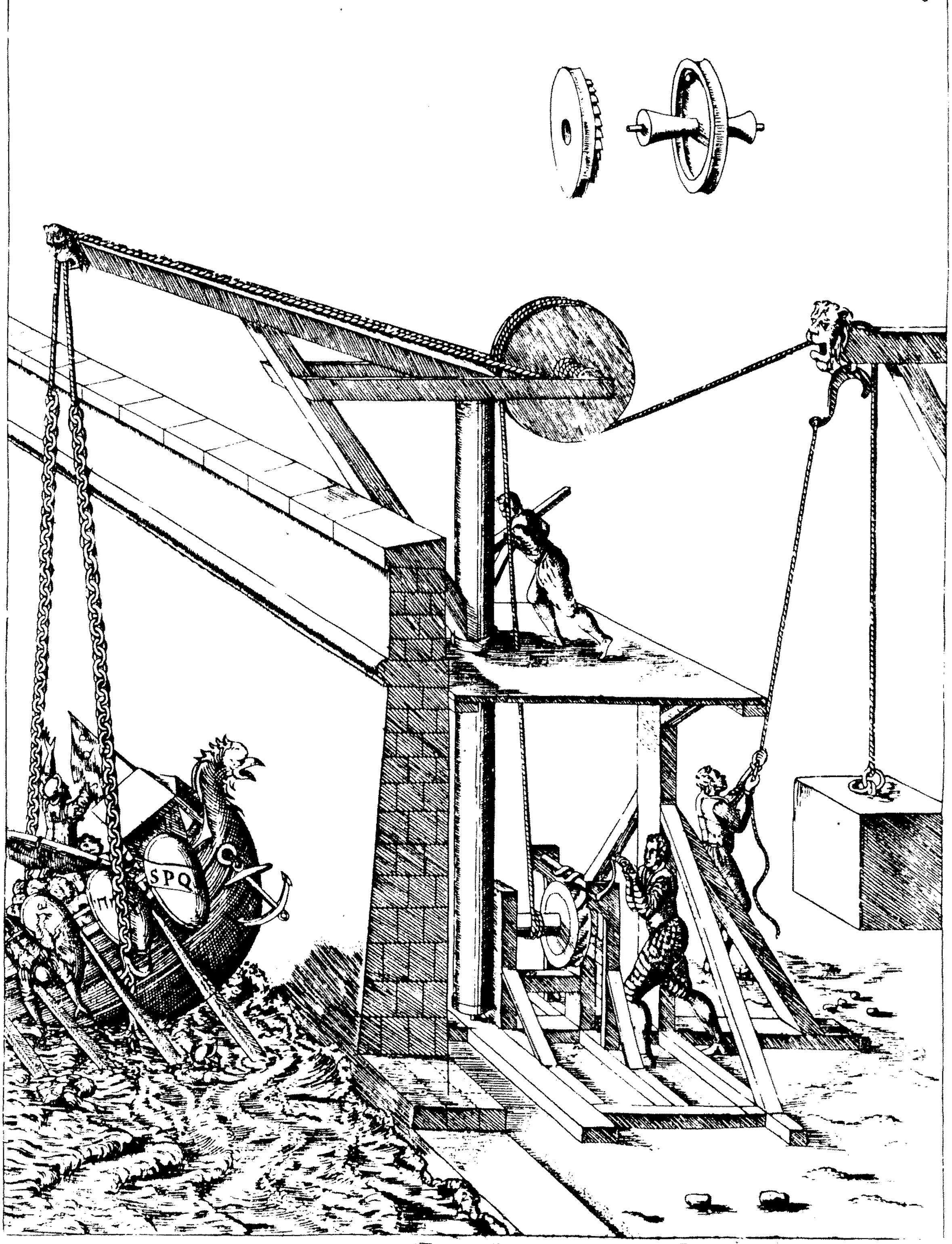
Fig 2 : extrait de "Arithmeticall Militare Treatise, named Stratioticos". Londres 1572

Pour finir cette brève liste, citons Albert DURER (1471-1528), dont la célébrité ne vient évidemment pas des mathématiques. Il travailla pourtant sur les courbes algébriques, la construction de l'heptagone régulier et publia des traités de géométrie. Mais aussi un traité de fortification militaire ! (1)

Les planches qui suivent sont extraites du "Premier livre des instruments mathématiques méchaniques", édité en 1584 par Ian-Ianfon, imprimeur de son Altesse le duc de Lorraine, et réédité en Fac-similé par Berger-Levrault en 1979, avec une introduction fort bien documentée d'Albert France-Lanord, conservateur du Musée du Fer à Nancy.
Les physiciens apprécieront la planche 27, qui présente une roue à mouvement perpétuel, dont l'artifice est dévoilé par la symétrisation que présente Errard en croquis.

(1) "Etliche vinderricht zu befestigung der Stett, Schloss und Flecken" Nuremberg 1527.

ALIVD MACHINAMENTV̄. NON DISSIMILE EI QVO IPSE ARCHIMEDES HOSTIVM NAVIGIA IN ALTVM EVECTA FACILE DEMERGEBAT. 8

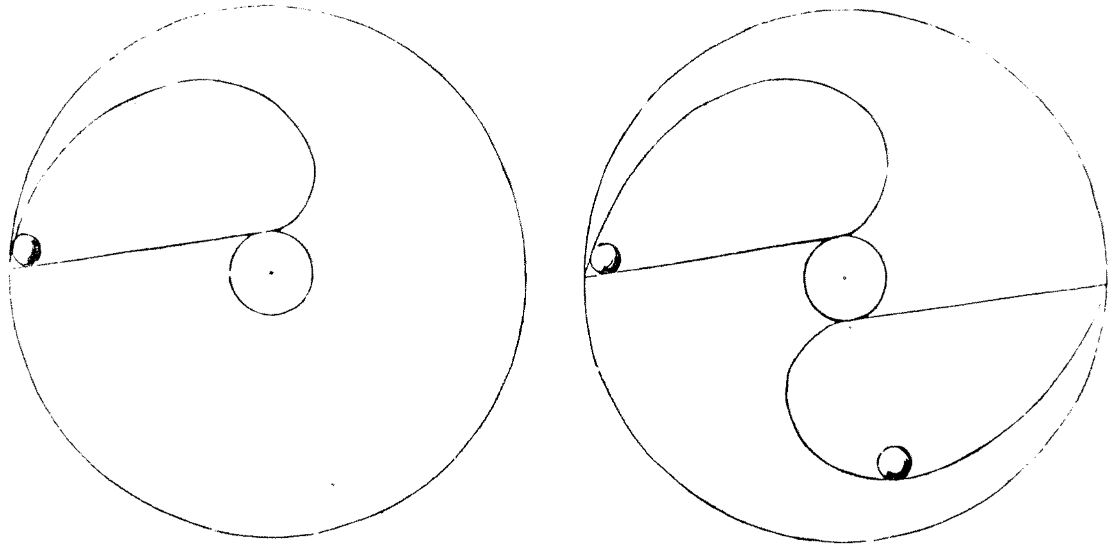


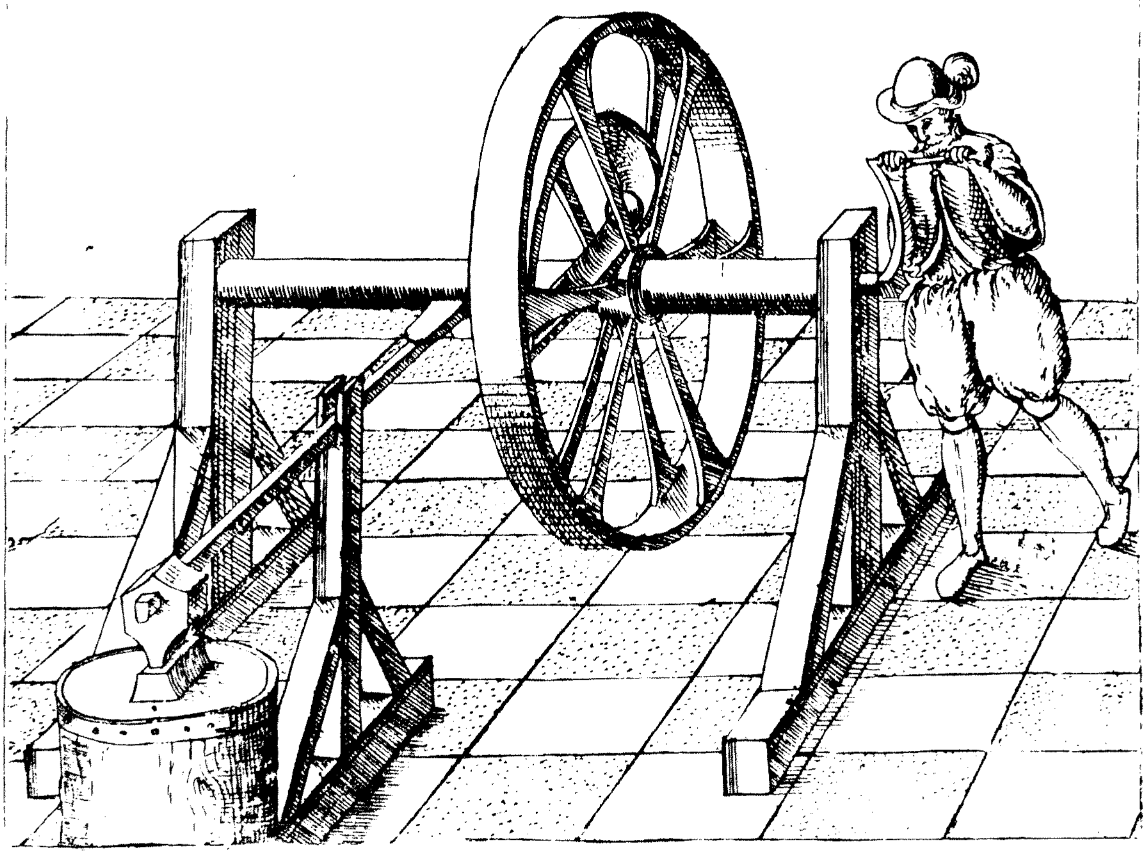
8 Aultre façon de machine non diſſemblable a celle par laquelle le meſme Archimedes enleuoit & relaſchoit en la mer les galleres & vaiſſeaux de ſes ennemis.

En ceſte machine deux choſes viennẽt à conſiderer, ſçauoir la roüe d'enhault, qui eſt double, & faicte en ſorte que le mouuement ſoudain de l'vne ne peult empeſcher le mouuement de l'aultre, en apres le pois qui eſt laſché ſoudainement pour faire que les chaines eſtant iectees de coſté & d'aultre de la galere la puiſſent incontinant acrocher fermement affin que puis apres elle ſoit enleuee par le triſpaſt qui eſt au deſſoubz.

Quant aux aultres machines belliques inuentées par Archimedes, nous n'en mettõs rien en ce petit œuure par ce quelles meritent biẽ vn gros & grãd volume.

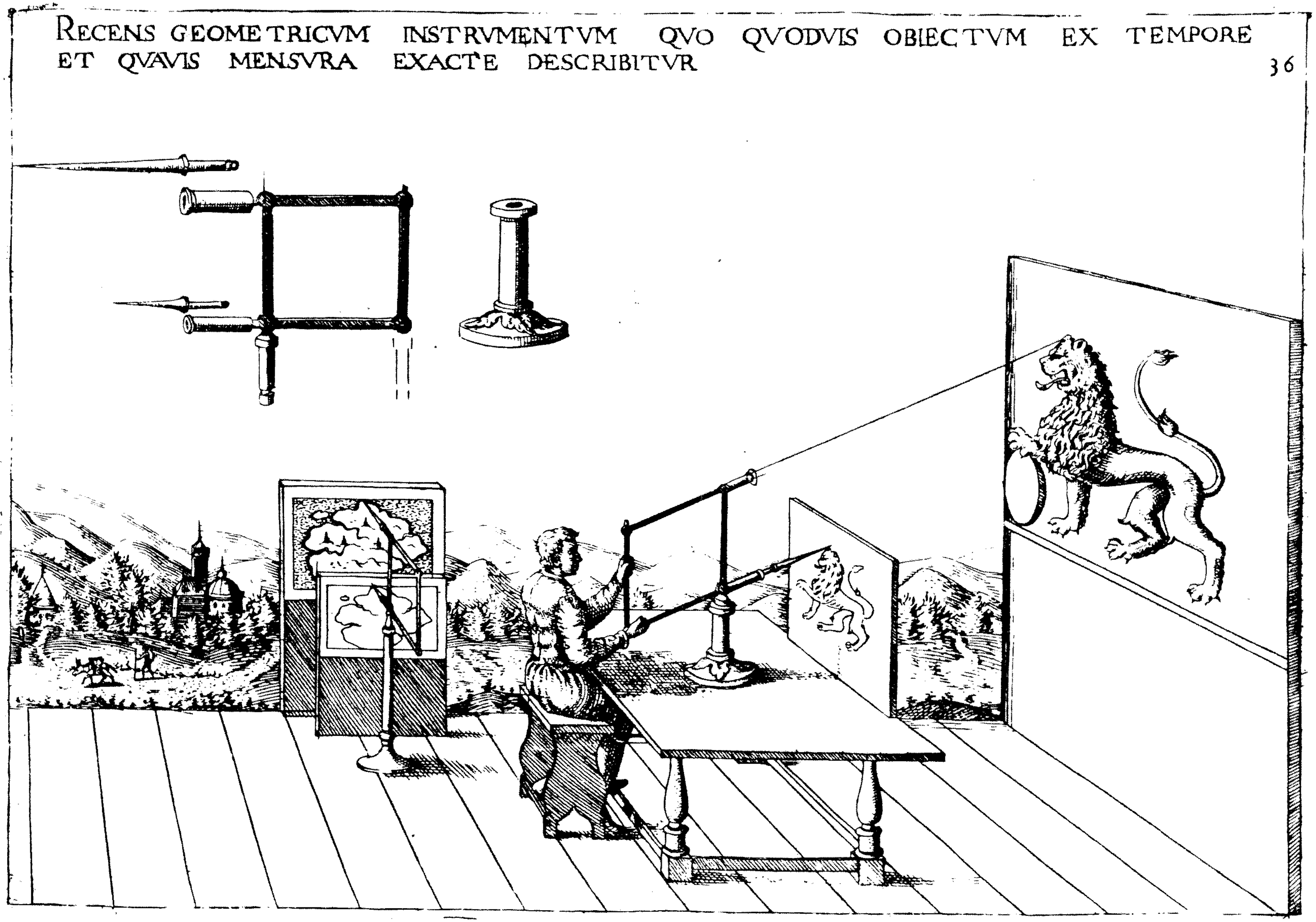
ROTÆ. ARTIFICIVM, QVO CERTO IPSIVS REVOLVTIONIS TEMPORE PONDVS AD CENTRVM APPROPINQVAT, ALIO VERO ITA RECEDIT, VT INGENS TVDES SVPER INCVDE MINIMO LABORE DIMOVEATVR.





27 Artifice de certaine roüe en la reuolution de la quelle & en vng certain temps vn pois aproche du centre d'icelle & en vng autre se retire vers la circonference en sorte que lors on s'en peult facillement ayder pour leuer quelques gros marteaux de forge pour frapper sur les enclumes.

I'ay mis ceste inuention en auant, non tant pour seruir à ce ou elle est accommodé que pour monstrer l'erreur de ceulx qui pensent par telz contrepois auoir troune ou trouuer le mouuement continuel, car par icelle on peut veoir que deux pois en vne mesme roüe, faicte de ceste sorte viendront en fin a égalle distance du centre d'icelle, soit que l'vn soit au dessus, & l'autre au dessoubz, & par ainsi seront en égalle pesanteur, par les teoremes d'Archimedes en son liure de æque ponderantibus.



36 Aultre nouueau & recent instrument geometrique, par lequel tout ce qui se presente a la veüe peut promptement & exactement estre d'escript & d'espeinct selon la mesure que l'on vouldra.

LE TETRAKAIDECAEDRE EN CLASSE DE SECONDE

B. RIEHL

1) Construction du solide

Les élèves construisent, chez eux, le tétrakaïdécaèdre sachant que

1) il possède 6 faces carrées et 8 faces hexagonales,
2) une face carrée ne doit "toucher" aucune autre face carrée,
3) la longueur commune aux côtés des carrés et aux côtés des hexagones est de 5 cm.

La durée de cette réalisation a été de une à deux heures suivant les élèves.

2) Projections orthogonales

Propriétés utilisées pour ces constructions :

A,B,C,D sont 4 points de l'espace,

A',B',C',D' sont leurs projections orthogonales respectives sur le plan P,

si $AB \parallel P$ alors $A'B' = AB$,

si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$,

si $AB \perp P$ alors $A' = B'$.

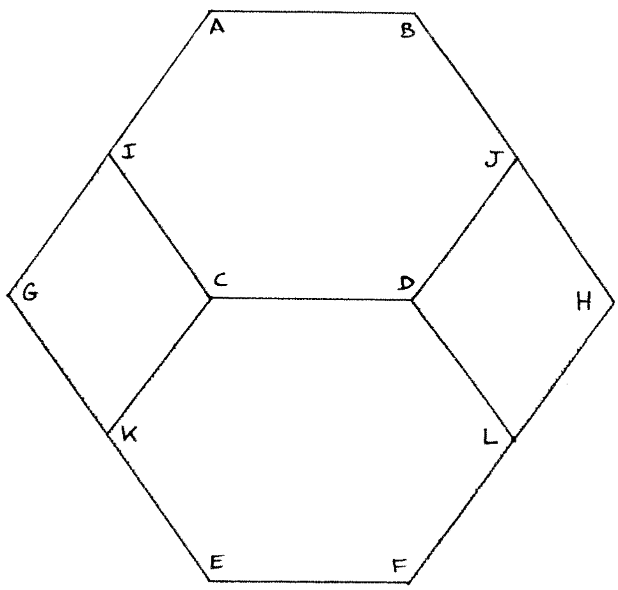


Fig 1

Tétrakaïdécaèdre posé sur une face carrée et vu de face

Les propriétés permettent d'établir que :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$; AB = CD = EF = 5 cm,

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KL}$; IJ = KL = 10 cm,

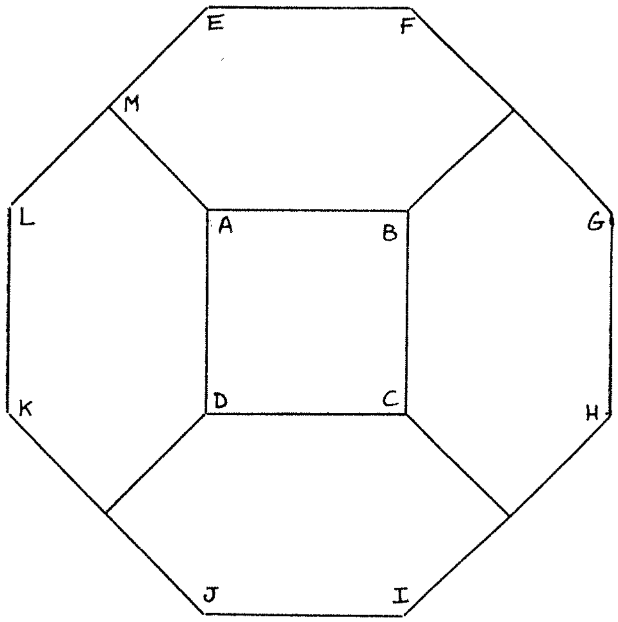
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IG}$,

GH = 15 cm.

Pour la distance AE, dont vous verrons plus loin qu'elle est 10 $\sqrt{2}$ cm, les élèves prennent la moyenne des mesures effectuées sur les solides qu'ils ont construits.

Fig 2

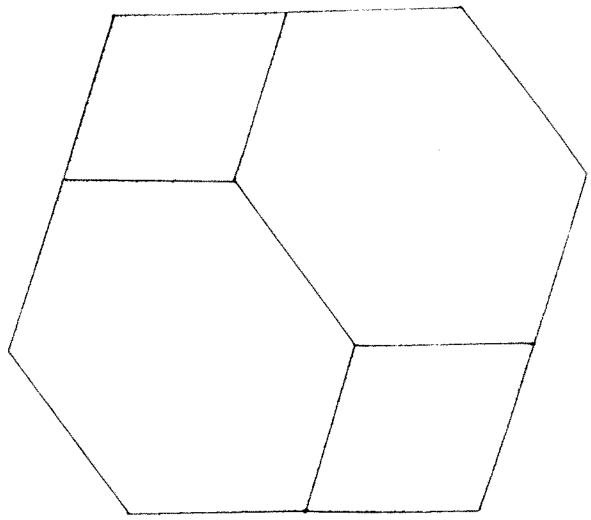
Tétrakaïdécaèdre posé sur une face carrée et vu de dessus



ABCD, ABFE, BCHG , CDJI, DALK sont des carrés de côté 5 cm, M est le milieu de LE.

Fig 3

Tétrakaïdécaèdre posé sur une face hexagonale



Construction très facile à l'aide de la figure 1, mais seulement 20 % des élèves ont vu, sans aide extérieure, le rapport entre la figure 3 et la figure 1.

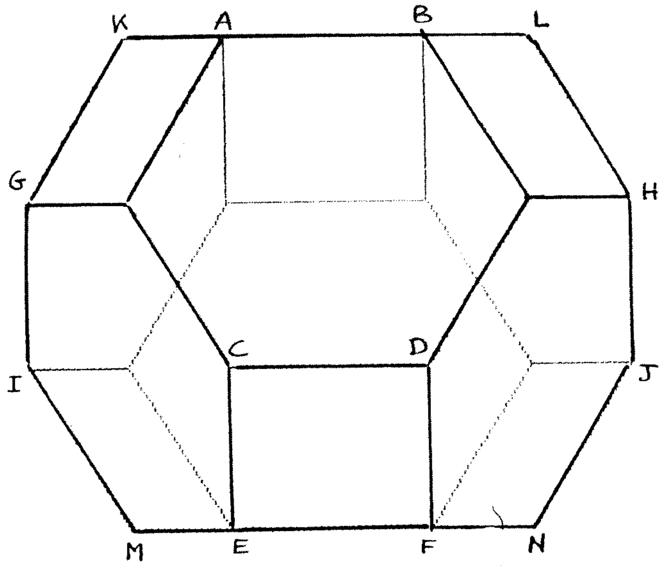


Fig 4
Tétrakaïdécaèdre posé sur une face hexagonale

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$; AB = CD = EF = 5 cm,
$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IJ}$; GH = IJ = 15 cm,
KL = MN = 10 cm ; KA = BL = ME = FN = 2,5 cm,
KM = 12 cm.

Dans ce dessin intervient pour la première fois le problème des arêtes cachées.

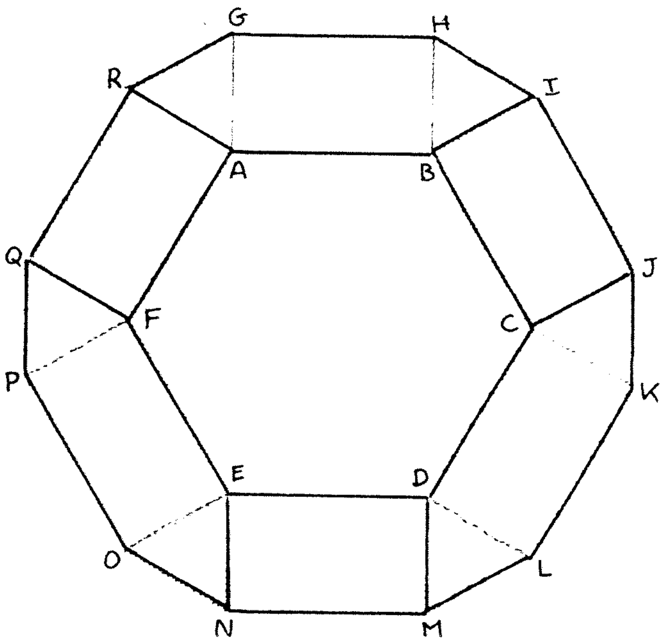
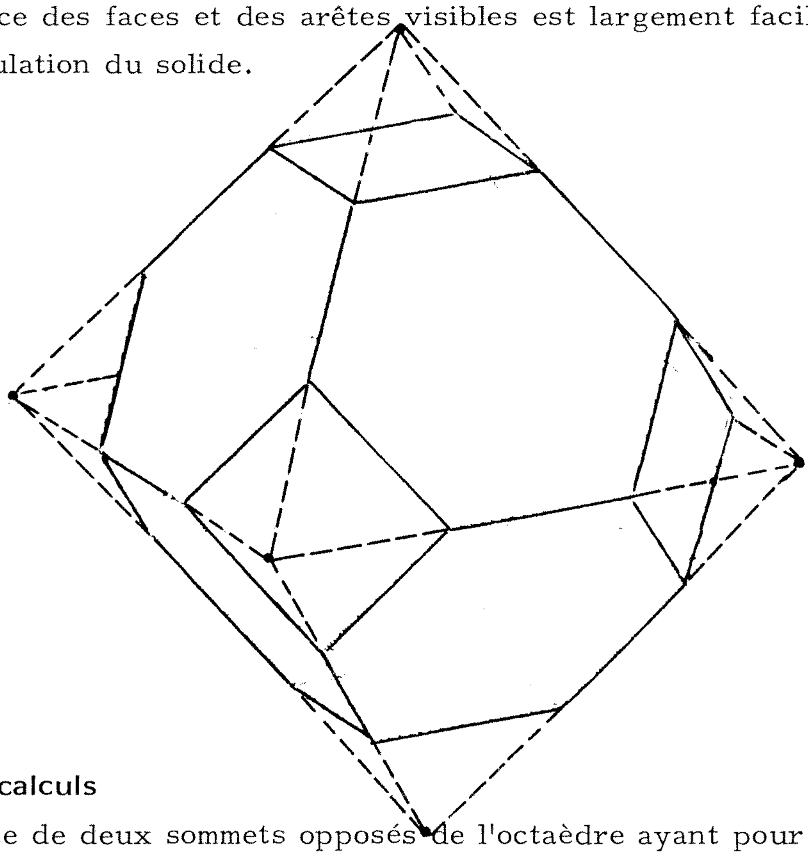


Fig 5
Tétrakaïdécaèdre posé sur une face hexagonale et vu de dessus

AB = BC = CD = DE = EF = FA = GH = IJ = KL = MN = OP = QR = 5 cm,
GL = 15 cm ; ... RI = 10 cm ; ...

3) Perspective cavalière

Il est temps maintenant de révéler que le tétrakaïdécaèdre n'est autre que l'**OCTAEDRE TRONQUE**. Il s'agit donc d'abord de dessiner l'octaèdre puis de diviser chaque arête en trois segments de même longueur. La reconnaissance des faces et des arêtes visibles est largement facilitée par la manipulation du solide.



4) Quelques calculs

1) La distance de deux sommets opposés de l'octaèdre ayant pour arête 15 cm est $15\sqrt{2}$ cm.
   Donc la distance de deux faces carrées parallèles de l'octaèdre tronqué ayant pour arête 5 cm est $10\sqrt{2}$ cm.
2) Avec une arête de 5 cm,
   l'aire de l'octaèdre tronqué est $(300\sqrt{3} + 150)$ cm^2
   le volume de l'octaèdre tronqué est $1000\sqrt{2}$ cm^3
3) L'octaèdre tronqué permet de **paver l'espace.**
   De plus, parmi les polyèdres réguliers ou semi-réguliers permettant de paver l'espace, l'octaèdre tronqué est celui dont **le rapport surface/volume est le plus faible.**
   Avec une arête de 5 cm, ce rapport est environ 0,4735.
   A titre de comparaison,
   pour un cube de même volume ce rapport est environ 0,5346,
   pour une sphère de même volume ce rapport est environ 0,4309. (*)

N.B. : Les figures construites par l'ordinateur ont été réalisées à l'aide d'un programme conçu par B. Altschuh.

(*) Note de l'OUVERT :

1) Le rapport surface/volume a la dimension de l'inverse d'une longueur et se prête mal à la mesure de l'économie de matière nécessaire à la construction d'une cellule. On utilise en général le rapport $\psi = \frac{S^3}{V^2}$ *qui est sans dimension.*

On obtient alors :

ψ *(cube)* $= 6^3$

ψ *(prisme hexagonal)* $= 6^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

ψ *(nid d'abeille)* $= 6^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

ψ *(tétrakaïdécaèdre)* $= 6^3 \cdot \frac{37 + 30\sqrt{3}}{128} \cong 6^3 \cdot 0,695$

ψ *(sphère)* $= 3^3$.

2) Que l'octaèdre tronqué réalise le miminum indiqué dépend sans doute de la définition que l'on adopte pour les polyèdres semi-réguliers. On conjecture cependant qu'une version déformée de ce solide nommée "tétrakaïdécaèdre de Lord Kelvin", à faces gauches, réalise le minimum du rapport ψ *dans la famille des pavages à symétrie cubique. Consulter à ce sujet "Pavés et Bulles" de Françoise PECAUT, brochure APMEP n° 23.*

LES NOMBRES REMARQUABLES

Par François Le Lyonnais

Hermann 1983

Tous les nombres sont remarquables sinon le plus petit (positif) de ceux qui ne le seraient pas, de par cette propriété, deviendraient remarquables... paradoxe qui n'a pas empêché l'auteur de retenir 446 "nombres" qui se partagent quelques 700 propriétés.

Parmi ces nombres, on notera 4 complexes et 9 infinis, tous les autres sont réels positifs (et le plus souvent entiers) et classés dans l'ordre de 0 à $10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}$. Il faut remarquer 49 plus petit entier n'apparaissant pas dans ce livre et 13^{bis}, hommage à R. Queneau !

Le lecteur au fil des pages apprendra beaucoup sur le champ mathématique : propriétés curieuses, théorèmes amusants, ou au contraire indications sur des résultats difficiles et des théories en plein développement. Tout le monde y trouvera son compte, car on n'est pas obligé de tout lire. Je recommande cependant la lecture du prélude (introduit par J. S. Bach, VIe concerto brandebourgeois !) qui montre qu'on peut être mathématicien à l'âge de 7 ans.

J. LEFORT

BORDS

Par Raymond QUENEAU

Hermann 1963

La descendance de Raymond Queneau est diverse, de Georges PEREC à François LE LYONNAIS... Quoi d'étonnant pour un encyclopédiste ? En 1963, le maître d'oeuvre de l'Encyclopédie de la Pléïade réunissait quelques articles consacrés aux mathématiques et Hermann les éditait dans sa collection "L'esprit et la main", en s'assurant le concours de Georges MATHIEU pour l'illustration. Ce livre mérite toujours de figurer dans la bibliothèque des esprits curieux. Témoignage sur l'enthousiasme que pouvait susciter BOURBAKI au début des années 60 ; découverte en l'inconnu Grainville (1706-1805) d'un précurseur de Poe, subtiles variations sur Fourier et Engels, ..., la matière ne manque pas.

Et l'anecdote sur Hardy et Ramanujan devisant sur les numéros des taxis est citée, dans un article sur les conjectures fausses en théorie des nombres.

E. CHANEY

Ces deux livres sont à la bibliothèque de l'IREM.

A LA BIBLIOTHEQUE DE L'I.R.E.M.

A toutes fins utiles, nous vous rappelons que vous y trouverez les différentes brochures de l'A.P.M., parmi lesquelles les dernières parues :

- Mots VI - Grandeur - mesure 23 F
- Obstacles et déblocages en mathématiques 45 F
- Evariste Galois 45 F
- Elem-Math VII 25 F

Quelques ouvrages parmi beaucoup d'autres arrivés depuis la rentrée :

. T. HATT - Liberté 81 - Droits de l'homme, banque de données et micro-ordinateur au lycée - IREM de Strasbourg 1983

. R. BIEHLER - Explorative Datenanalyse - Eine Untersuchung aus der Perspektive einer Deskriptiv-Empirische Wissenschafttheorie - Bielefeld - Institut für Didaktik der Mathematik 1982

. M. POSNER - Chronometric explorations of mind - London - J. Wiley 1978

. F. CAJORI - William Oughtred - A great seventeenth century teacher - London - The open court publ. co. 1916

. F. CAJORI - A history of mathematical notations - Vol. II : notations mainly in higher mathematics - London - The open court publ. co. 1952

. E. LEMERY - Pour une mathématique populaire - Libres recherches d'adolescents au collège - Pédagogie Freinet - Casterman 1983

. P. OLERON - Les activités intellectuelles - P.U.F. 1972

. L. LARSON - Problem-solving through problems - Berlin - Springer 1983

. E. GOURSAT - Cours d'analyse mathématique - 3 tomes - G. Villars 1942

. J.L. OVAERT et J.L. VERLEY - Léonard Epistémon - Analyse - Vol. 1 - Exercices et problèmes - Classes préparatoires + 1er cycle universitaire - Cédic/Nathan 1983

. J. KEPLER - 4e centenaire de sa naissance - Société Astronomique de France 1973

. Colloquium on statistical methods in astronomy - Abstracts - 12-16 septembre 1983 - Strasbourg - Paris Agence Spatiale Européenne 1983

. Propositions 6 - Une isométrie de l'espace à basse, moyenne et haute altitude + Propositions 7 - Activités géométriques pour écoles professionnelles et autres - Louvain la Neuve - Groupe Enseignement Mathématique 1982

. des nouveaux manuels de Terminale programme 1983

. des brochures des IREM.

. le Bulletin Inter-IREM n° 22 : Catalogue des publications des IREM (avec index des mots-clés - index par niveaux - index par spécialités) - Disponible gratuitement dans la mesure des stocks

. le Bulletin Inter-IREM n° 23 : Enseignement de la géométrie - Perspectives - Disponible gratuitement dans la mesure des stocks.