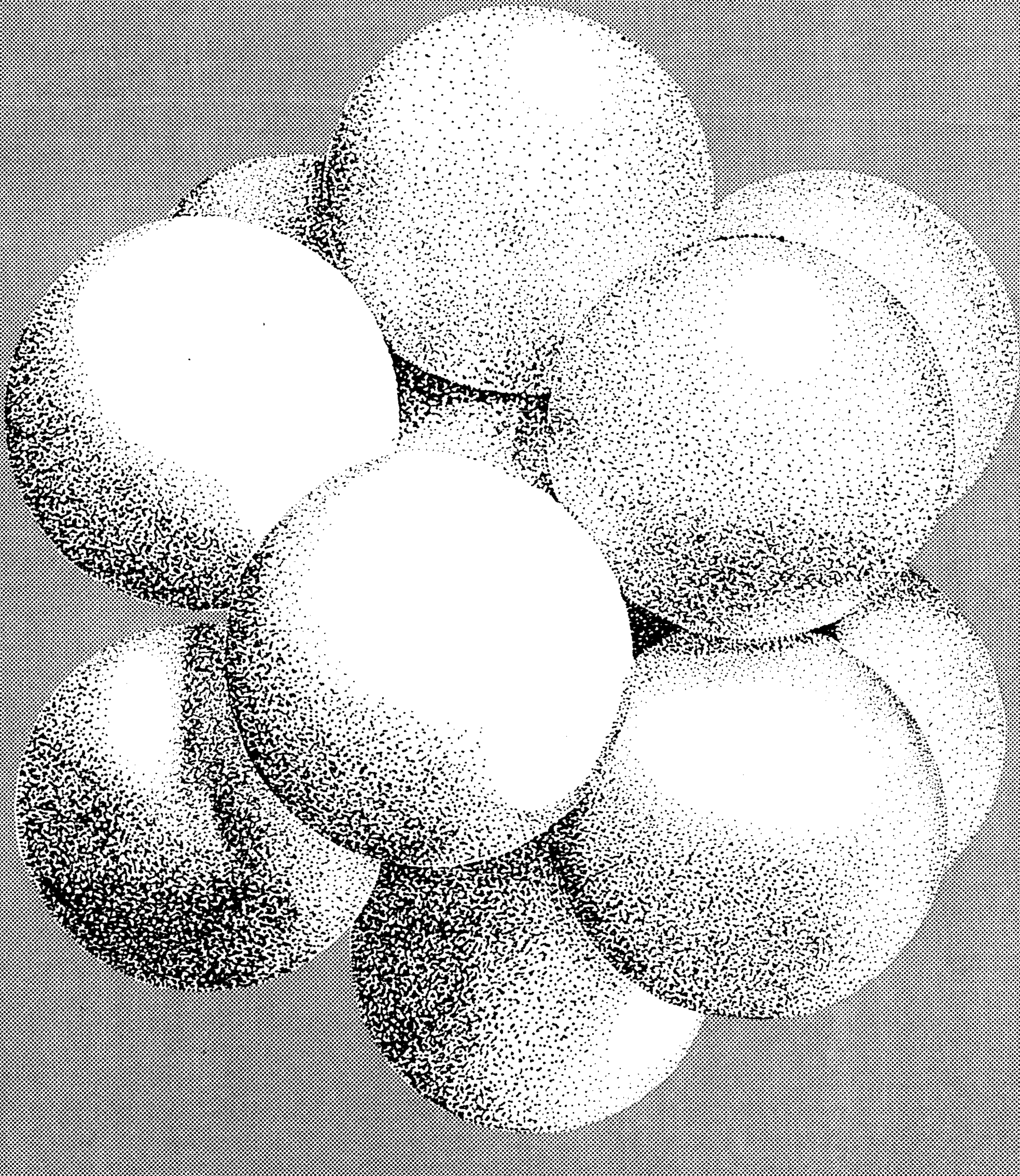
L'OUVERT

ISSN 0290-0068

N° 36 SEPTEMBRE 1984 JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG



NOTRE COUVERTURE

Par combien de sphères peut-on recouvrir une sphère donnée, toutes ayant le même rayon ? C'est le problème du "kissing number". Cette illustration montre qu'il est possible d'en placer 12, en formant un fragment de réseau cubique à faces centrées. Peut-on faire mieux ? Voir p. 32.

EDITORIAL

L'OUVERT souhaite ne jamais s'être montré indigne de son titre : aucune de ses parutions n'a comporté que des articles *"techniques"*, ou exclusivement *"professionnels"*. Ce N°36 contient pourtant une innovation dans le sens de l'ouverture : un physicien, Claude COMTE, a bien voulu présenter un exposé accessible aux non-spécialistes d'un problème qu'il aborda dans sa thèse de doctorat. A l'aide d'expériences mentales simples -une méthode chère à Einstein- il démontre que certains résultats fondamentaux de la physique peuvent être déduits avec un appareil mathématique limité, des principes de symétrie galiléens.
Pour nombre de nos élèves -et combien d'entre nous ?- les mathématiques se sont constituées à coté du réel, et sont condamnées à y rester. La lecture de cet article, qu'il nous faut publier en deux fois, devient alors une promenade de santé .

Il y a un an exactement, l'éditorial de l'OUVERT exprimait le voeu suivant, à propos des sujets du baccalauréat :
"Espérons que les sujets qui seront retenus cette année n'iront pas dans le sens des mathématiques frileuses (...)".
Je suis loin d'avoir pris connaissance des sujets de toutes les sections, proposés dans l'académie, et n'ait certainement pas assez étudié ceux que j'ai lus. Mais celui de la section A1 (voir p. 41) va bien dans le sens du voeu rappelé ci-dessus. Son problème met en scène un texte de L.Euler, et en propose une analyse critique. Comment les candidats ont-ils réagis ? Un grand nombre a certainement été tout à fait décontenancé. Mais si l'on veut que cette section littéraire avec bases scientifiques sérieuses soit autre chose qu'un paravent, et que les professeurs qui en ont la charge renoncent définitivement au bachottage, il faut souhaiter que l'imagination qu'ont montré les rédacteurs de ce sujet reste de mise.
Et aussi que le recrutement de la section soit à la hauteur de ses ambitions.

E.CHANEY

SOMMAIRE

Une occasion manquée dans l'histoire des sciences :

LEIBNITZ AURAIT-IL PU DECOUVRIR LA RELATIVITE ?

Claude COMTE (*)

INTRODUCTION

Il est communément admis que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière, fondé sur l'expérience de Michelson et Morley (1887), est essentiel pour établir la théorie de la relativité einsteinienne.

Cependant, nous allons montrer que la relativité aurait déjà pu être découverte par Leibnitz, à partir des connaissances que l'on avait à son époque, en approfondissant plus encore l'étude du problème qui constitue sa contribution majeure à la physique :

si l'on considère un système de corps soustraits à toute action extérieure et dont les interactions sont des collisions élastiques, existe-t-il des grandeurs qui se conservent au cours de ces interactions, et quelle est la forme de ces grandeurs ?

Les connaissances auxquelles nous faisons allusion sont résumées en un ensemble de principes rassemblés dans le paragraphe 2. Parmi ceux-ci figure un principe fortement suggéré, mais non explicitement formulé par Galilée, **le principe d'équivalence** : Galilée affirmait que les expériences de mécanique effectuées sur la terre ferme étaient identiquement reproductibles dans la cale d'un navire en mouvement uniforme sur une mer calme ; l'expérience de Galilée suggère l'identité des lois de la mécanique dans le référentiel fixe et dans le référentiel

---

(*) Laboratoire de Spectroscopie - 5, rue de l'Université à Strasbourg (Associé au C.N.R.S.)

et

Groupe de Recherche en Epistémologie et Histoire des Sciences et des Institutions Scientifiques (Equipe de Recherche C.N.R.S.) à Paris

en mouvement uniforme. Leibnitz avait certainement connaissance des travaux de Galilée ; il semble qu'il ait appliqué ce principe pour obtenir la conservation de la quantité de mouvement à partir de la conservation de l'énergie (voir une note de H. Poincaré, référence 3).

Le principe d'équivalence est d'une importante capitale, aussi bien dans l'étude du problème des lois de conservation en mécanique que pour la théorie de la relativité.

Depuis la création de cette théorie par Einstein en 1905, plusieurs chercheurs ont montré que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière était superflu (depuis Ignatowsky, Frank et Rothe (1911) référence 7, jusqu'à J.-M. Lévy-Leblond (1976), référence 5), et que **le principe d'équivalence, combiné avec les autres invariances galiléennes** (énoncées au paragraphe 2), **suffisait pour établir la théorie.**

Autrement dit, le principe d'équivalence mérite d'être vraiment pris au sérieux, et non seulement appelé à la rescousse dans une passe difficile, comme c'est le cas aussi bien chez Leibnitz que dans la dérivation habituelle de la transformation de Lorentz en relativité, car il est doué d'une extraordinaire fécondité.

Dans cet article, nous allons voir ce principe constamment en action pour établir les lois de la mécanique. Nous allons voir la théorie évoluer de la mécanique de Newton et Leibnitz à la mécanique einsteinienne, à la recherche de sa cohérence interne, et pour remédier progressivement à ses insuffisances. Partant de l'addition vectorielle des vitesses en mécanique newtonienne, nous allons être conduits à réviser cette loi. Cette manière d'accéder à la théorie de la relativité n'a pas seulement l'avantage de souligner d'une manière spectaculaire l'importance du principe d'équivalence, elle va également à l'encontre d'une idée bien reçue, selon laquelle la relativité serait avant tout une théorie de l'espace et du temps.

Nous ne nous préoccupons pas ici du problème d'existence de lois de conservation, pour ne pas surcharger l'article ; ce problème très important est traité en référence 6, et fera l'objet d'une prochaine publication.

Comme Descartes et Leibnitz, nous admettons qu'il existe des lois de conservation du type

(1) $$\sum_i m_i f(\vec{x}_i) = \sum_i m_i f(\vec{x}_i')$$

où m_i sont les masses des corps et $\vec{x}_i$, $\vec{x}_i'$ leurs vitesses dans l'état initial et dans l'état final respectivement. Le problème est de trouver la forme des fonctions $f(\vec{x})$.

Descartes croyait que dans un système de corps la **"quantité de mouvement"** définie par $\sum_i m_i \|\vec{x}_i\|$ se conserve (références 1, 3 et 4). Leibnitz a fait voir au contraire que ce n'est pas cette quantité qui se conserve, mais d'une part ce qu'il appelle la **"quantité d'action motrice"**, égale à la **"force vive"**, (c'est-à-dire l'énergie cinétique en termes modernes), et d'autre part la **"quantité de progrès"** $\vec{p} = m\vec{x}$ (appelée **impulsion** ou quantité de mouvement en termes modernes).

Leibnitz établit l'expression de l'énergie cinétique à partir d'une observation de Galilée sur la chute des corps (référence 2, Discours de Métaphysique, § 12) : lorsque la hauteur de chute est quadruple, la vitesse est double, et comme il faut autant d'énergie cinétique pour élever une masse de quatre livres à la hauteur d'une toise que pour élever une livre à quatre toises, il aboutit à la conservation de la quantité $\Sigma \frac{1}{2} mx^2$.

Il faut rendre homage à Leibnitz pour avoir formulé la loi de conservation de l'énergie aussi clairement que c'était possible à son époque. Cependant l'énergie cinétique est déterminée à partir d'une observation qui pouvait comporter une certaine erreur expérimentale. Le principe d'équivalence auquel il semble recourir pour déduire la conservation de l'impulsion de celle de l'énergie aurait sans doute constitué un fondement plus solide. Comme cette déduction est introuvable dans les écrits de Leibnitz (il y fait seulement allusion dans une lettre à Bernoulli du 28 janvier 1696), on peut lire ce qui suit comme un essai de reconstitution. Nous proposons une démarche qui ne fait appel qu'à des procédés élémentaires : nous décrivons une expérience de collisions, que nous analysons ensuite.

En bref, le problème est le suivant :

> **Quelles sont les formes possibles de l'énergie e(x) compatibles avec le principe d'équivalence ?**

§ 1. DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE

Soient deux paires de corps se mouvant selon la même ligne droite (figure 1). Dans l'état initial, les corps **P** et **P'** de masses égales **m** ont des vitesses opposées $\vec{x}$ et $-\vec{x}$ tandis que les corps **Q** et **Q'** de masses égales **M** sont au repos.

Réf. 1. G.W. LEIBNITZ La Monadologie (Librairie Delagrave)

Réf. 2. G.W. LEIBNITZ Discours de Métaphysique (Librairie Philosophique J. Vrin)

Réf. 3. H. POINCARE Note sur les principes de la Mécanique dans Descartes et dans Leibnitz (en appendice de la référence 1.)

Les quatre corps sont des agrégats de corpuscules constitués de la même matière et liés infiniment faiblement les uns aux autres.

On assiste à une succession de collisions élastiques dont le déroulement est le suivant :

Tout d'abord les corpuscules constituant P et Q d'une part, P' et Q' d'autre part entrent en collision. Sous l'effet du choc, les corps se désintègrent en une gerbe de corpuscules. Dans le détail, le processus de collision est très compliqué, à cause de la possibilité de collisions multiples entre les corpuscules, menant à toute une gamme de vitesses de sortie possibles pour ceux-ci.

On suppose que les collisions ont lieu de façon parfaitement symétrique à gauche et à droite du plan de symétrie $\mathcal{P}$. Les corpuscules issus de P et Q rencontrent ceux issus de P' et Q' sur ce plan et rebroussent chemin. Ils peuvent encore rencontrer d'autres corpuscules se dirigeant vers $\mathcal{P}$, revenir vers $\mathcal{P}$ où ils rebondissent, et ainsi de suite ...

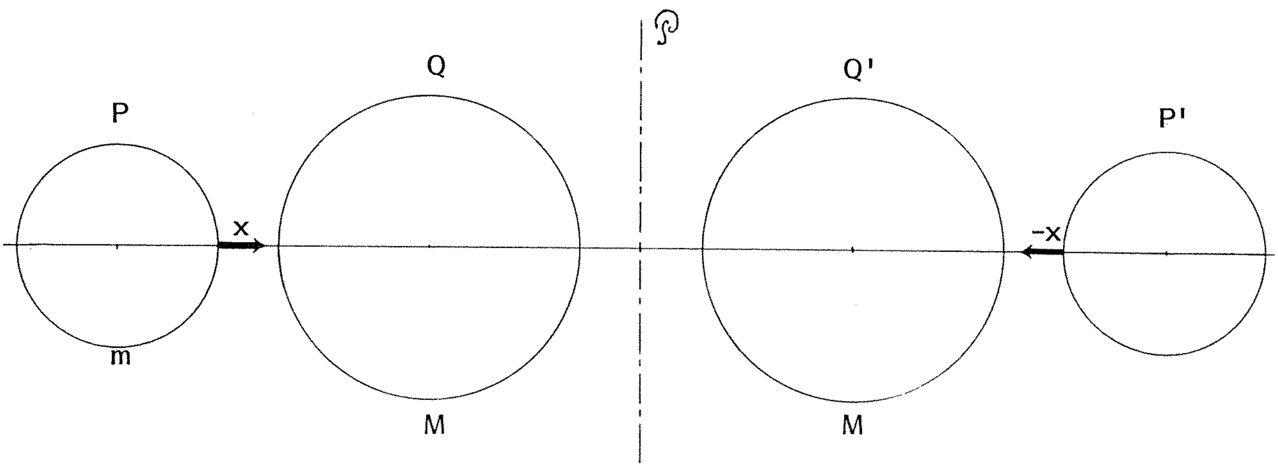


figure 1 : Expérience de "collisions symétriques"

Lorsque les collisions s'arrêtent, on a deux faisceaux de corpuscules qui partent symétriquement vers la droite et la gauche. Dans le faisceau qui part vers la droite, on distingue N petits agrégats de masses quelconques m_i, liées seulement par la condition $\sum_i m_i = M + m$ et de vitesses $\vec{z}_i$. Dans le faisceau partant vers

Réf. 4. G.W. LEIBNITZ Dynamica (Leibnitzens mathematische Schriften, Vol. VI)

Réf. 5. J.M. LEVY-LEBLOND One more derivation of the Lorentz transformation (American Journal of Physics, 44, 271 - 1976) la gauche, on a les mêmes masses avec les vitesses $-\vec{z}_i$. On suppose de plus que toutes les vitesses finales $\vec{z}_i$ sont colinéaires avec $\vec{x}$.

Dans l'expérience considérée, la relation de conservation (1) s'écrit :

$$(2) \qquad m \left[f(x) + f(-x)\right] + 2Mf(0) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[f(z_i) + f(-z_i)\right]$$

Vérifiée trivialement par toute fonction impaire, cette relation ne permet d'étudier que les fonctions conservatrices **paires**, telle l'énergie du système.

Pour terminer cette description, remarquons que le plan $\mathcal{P}$ peut être remplacé par une paroi de masse infinie, ce qui nous dispense de la délicate réalisation d'une symétrie parfaite entre les deux côtés de $\mathcal{P}$.

§ 2. LES HYPOTHÈSES NÉCESSAIRES POUR L'ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE SONT LES SUIVANTES :

a) les invariances galiléennes

On suppose que l'expérience est effectuée dans un référentiel idéal pour l'étude des lois de la mécanique, doué de propriétés d'invariance remarquables. L'existence possible de tels référentiels a été suggérée par Galilée. Les propriétés d'invariance des référentiels galiléens sont les suivantes (nous ne nous préoccupons pas ici du problème très intéressant de savoir si certaines des propriétés énoncées peuvent être déduites des autres) :

i) homogénéité de l'espace:
les lois de la mécanique ne changent pas si l'on fait subir une translation au laboratoire où on les établit expérimentalement ;

ii) isotropie de l'espace :
les lois de la mécanique ne changent pas si l'on fait subir une rotation au laboratoire ;

iii) géométrie :
la géométrie de l'espace est euclidienne dans un référentiel galiléen ;

iv) uniformité du temps :
les lois de la mécanique ne dépendent pas de la date à laquelle les expériences sont effectuées ;

v) principe d'inertie :
la vitesse d'un corps en mouvement libre est invariable en grandeur et en direction ;

vi) principe d'équivalence :

- le référentiel lié à un corps en mouvement libre est également un référentiel galiléen ;
- il n'existe aucune expérience effectuée à l'intérieur d'un référentiel galiléen qui permette de détecter son mouvement par rapport à un autre référentiel galiléen ;
- les lois de la mécanique ne subissent aucune variation par changement de référentiel galiléen.

b) loi de composition des vitesses

Considérons un corps en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{x}_1$ dans un référentiel galiléen R_1 . Ce référentiel est lui-même en mouvement uniforme à la vitesse $\vec{y}$ par rapport à un second référentiel galiléen R . La vitesse $\vec{x}$ du corps par rapport à R_2 est donnée par une loi de composition des vitesses $\vec{x}_1$ et $\vec{y}$.
Nous admettons **provisoirement** que cette loi de composition des vitesses est l'addition vectorielle

(3) $$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{y}.$$

Cette loi découle du caractère absolu du temps dans la physique newtonienne. La notion de temps absolu est fondée sur la possibilité de synchroniser les horloges de tous les observateurs quelle que soit leur situation dans l'univers. Newton a montré que si l'on admet la possibilité de **propagations instantanées** de messagers matériels ou d'information d'un point à un autre, alors la synchronisation des horloges peut être effectuée d'une manière parfaite, et on a la loi (3).

Inversement, la loi de composition (3) implique la possibilité de propagations instantanées. En effet, par composition itérée N fois d'une même vitesse $\vec{x}$, on peut obtenir une vitesse $N\vec{x}$ aussi grande que l'on veut.

(Remarquons qu'il ne faut pas confondre la composition vectorielle des vitesses (3) avec la décomposition d'une vitesse en composantes selon les axes d'un repère cartésien dans un certain référentiel.)

c) additivité et conservation de la masse

Dans les processus de collision élastiques que nous considérons, la structure interne des corps ne change pas. Nous admettons que la masse de chaque corps est invariable dans ces processus. En outre, nous admettons que la masse d'un système de corps libres **au repos les uns par rapport aux autres** est la somme des masses de ses constituants.

d) propriétés de l'énergie

Nous admettons ici les propriétés suivantes de l'énergie cinétique (ces propriétés peuvent être démontrées, voir la référence 6) :

i) l'énergie cinétique d'un corps libre ne dépend que du module de sa vitesse ;

ii) l'expression de l'énergie cinétique d'un corps de masse m est $me(x)$; elle est définie quelle que soit la vitesse x et de plus on a $e(0) = 0$ et $e(x) > 0$ lorsque $x \neq 0$;

iii) l'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques de ses parties.

Pour un système de corps de masses m_i et de vitesses x_i, l'énergie cinétique est $\sum_i m_i\, e(x_i)$. Pour une distribution de masse en fonction de la vitesse donnée par $dm = c(\vec{x})d^3x$ cette expression devient

$$(4) \qquad \iiint c(\vec{x})\, e(x)\, d^3x$$

et nous admettons que l'intégrale écrite a un sens quelle que soit la distribution $c(\vec{x})$, sous réserve que $\iiint c(\vec{x})\, d^3x$ converge. Cela revient à admettre que la fonction $e(x)$ est intégrale. . intégra

Nous verrons plus loin que cette hypothèse d'intégrabilité de l'énergie cinétique est d'une importance capitale pour la détermination de la forme de cette grandeur. En effet, la continuité et la dérivabilité à tout ordre de la fonction $e(x)$ pourront être déduites, alors qu'elles sont habituellement postulées

§ 3. ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE

L'analyse de l'expérience décrite au § 2 va nous permettre de découvrir la forme de la fonction d'énergie cinétique $e(x)$.

La conservation de l'énergie cinétique dans le référentiel où la description est faite s'écrit :

$$(5) \qquad m\, e(x) = \sum_i m_i\, e(z_i)$$

C'est la relation (2), compte tenu de la parité de $e(x)$, et de ce que $e(0) = 0$.

Rappelons que pour une vitesse initiale x donnée, les vitesses finales z_i et les masses m_i des corpuscules peuvent varier assez largement, sous réserve que la masse soit conservée :

(6) $$m + M = \sum_i m_i$$

Dans un second référentiel galiléen en mouvement à la vitesse $-y$ par rapport au précédent, toutes les vitesses sont augmentées de y et la conservation de l'énergie s'écrit :

$$m\left[e(x+y) + e(-x+y)\right] + 2Me(y) = \sum_i m_i \left[e(z_i + y) + e(-z_i + y)\right]$$

Nous venons d'appliquer le principe d'équivalence : la masse et la fonction d'énergie e(x) sont les mêmes dans le second référentiel galiléen.

On a avantage à réécrire cette relation sous la forme :

(7) $$m\, E_y(x) = \sum_i m_i\, E_y(z_i)$$

La quantité $E_y(x) = e(x+y) + e(-x+y) - 2e(y)$ s'interprète comme l'énergie du mouvement interne de deux corps de masse unité ; la relation (7) traduit simplement la conservation de l'énergie du mouvement interne de l'ensemble des corpuscules.

Supposons que les vitesses finales z_i prennent N valeurs données. Une telle gamme de vitesses finales pourra être réalisée avec différents choix des masses m_i : il est toujours possible de trouver N choix linéairement indépendants de l'ensemble des masses m_i, soit m_i^j où $j = 1$ à N, tels que les $e(z_i)$ soient solution unique du système d'équations linéaires à déterminant non nul :

$$m\, e(x) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} m_i^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(z_1) \\ e(z_2) \\ \vdots \\ e(z_N) \end{bmatrix}$$

Chacune des équations de ce système garantissant la conservation de l'énergie pour un certain choix des masses m_i.

Il apparaît que les $E_y(z_i)$ sont solution du système analogue :

Cas α) : en dérivant (10) deux fois par rapport à y, puis en annulant y, on passe à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\,\varepsilon(x)}{d\,x^2} = \gamma^2\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \left(\frac{d^2\varepsilon(x)}{d\,x^2}\right)(x=0)$$

Nous ne pouvons retenir que la solution paire et positive de cette équation :

(13) $\varepsilon(x) = \mathrm{ch}\,\gamma\,x$, $e(x) = \mathrm{ch}\,\gamma\,x - 1$

La solution (β) de Leibnitz apparaît comme un cas limite de cette dernière. En effet, si γ est infiniment petit, on a :

$$e(x) = \mathrm{ch}\,(\gamma x) - 1 \cong \gamma^2\,\frac{x^2}{2}$$

§ 5. DÉRIVATION DE L'IMPULSION, PAR DÉRIVATION !

Ayant établi la dérivabilité à tout ordre de l'énergie au paragraphe précédent, nous pouvons maintenant déduire l'expression de l'impulsion par différenciation. En effet, lorsque la relation de conservation $\sum_i m_i\, e(x_i) = \sum_i m_i\, e(x_i')$ est vérifiée dans un certain référentiel galiléen, dans le référentiel galiléen en mouvement uniforme à la vitesse infinitésimale $-\delta y$ par rapport au précédent, la relation de conservation $\sum_i m_i\, e(x_i + \delta y) = \sum_i m_i\, e(x_i' + \delta y)$ est nécessairement vérifiée aussi, et par différence nous obtenons au premier ordre par rapport à δy : $\sum_i m_i\, p(x_i) = \sum_i m_i\, p(x_i')$, où $p(x) = \frac{de}{dx} = \gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma\,x$, fonction impaire, n'est autre que l'impulsion. La répétition de l'argument ne fournit pas de nouvelle loi de conservation ; en effet, on a : $\frac{dp}{dx} = \gamma^2\,\varepsilon(x)$ dans le cas α, et $\frac{dp}{dx} = 1$ dans le cas β.

(Fin de la première partie)

Note de l'OUVERT :

Le lecteur l'aura déjà deviné, ces deux mécaniques sont celles de Newton (cas β)) et la mécanique relativiste (cas α)).
La deuxième partie de l'article de Claude COMTE (à paraître dans l'OUVERT N° 37) examinera "les mystères de la deuxième solution". Il faudra au passage obtenir la fameuse équivalence entre masse et énergie, puis s'interroger sur la véritable signification du paramètre x, considéré jusqu'ici comme une **vitesse**.
A cette occasion, un point de vue nouveau sera apporté sur ce concept familier.
Il permettra d'affranchir la vitesse de l'espace et du temps !

COLLÈGE DE MUNDOLSHEIM

CINQ ANS DE PEDAGOGIE DIFFERENCIEE

Quelques élus parmi les lecteurs de l'Ouvert ont peut-être appris la parution d'un "Bulletin de l'Académie de Strasbourg" traitant en particulier d'expériences pédagogiques. (*)

L'Ouvert se félicite de la présence de ce nouveau confrère, d'autant plus que, dans les n° 2 et 3 du dit bulletin, le compte-rendu d'une expérience menée depuis 1978, devrait intéresser tout particulièrement les professeurs de mathématiques, du premier comme du second cycle.

Pour cette raison, et également pour contribuer à faire sortir le Bulletin de sa relative clandestinité, nous publions ce bilan, avec l'autorisation de son rédacteur M. Houeix, principal du Collège de Mundolsheim.

En annexe, on verra comment un chapitre du programme de cinquième est traité de façon différenciée selon le groupe de niveau.

L'OUVERT

Les intertitres sont dus à l'Ouvert.
Le titre exact de l'article est :
ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES PAR GROUPES DE NIVEAU A PEDAGOGIE DIFFERENCIEE.

(*) Ce bulletin est envoyé en plusieurs exemplaires à chaque établissement de l'Académie. Il devrait donc être accessible à chaque professeur !

I. QUE FAIRE DE CLASSES HETEROGENES ?

Tout commence en septembre 1977 avec la mise en oeuvre de la réforme du système éducatif : ouverture du Collège à tous les élèves issus du CM 2 et constitution de divisions hétérogènes.

Très vite apparaît la difficulté d'ajuster la pratique pédagogique à des élèves aussi différents au niveau des acquis, des rythmes de travail et du stade de développement intellectuel.

Ainsi, Valérie (née en 1966) et Carole (née en 1969) entrées en septembre 1978 et élèves de la même division, obtiennent pour leur premier trimestre des moyennes générales respectives de 5,8 et de 18.

Les professeurs, mal préparés il est vrai à cette nouvelle situation, s'interrogent : "*pour qui faut-il faire cours*"? Pour les faibles au risque de ralentir et de décevoir les meilleurs ? Pour les meilleurs au risque d'accentuer encore les différences ? ... Avec, quelle que soit la solution retenue, une menace de détérioration rapide du climat de la classe.

Dans un premier temps le Chef d'Etablissement cherche dans les textes la réponse à cette question : soutien pour les uns, approfondissement pour les autres. Mais il se rend rapidement compte, comme les professeurs, que cette heure de soutien ou d'approfondissement n'a de sens que si les écarts constatés entre les élèves restent dans des limites acceptables. En effet, si l'heure de soutien peut permettre le "*rattrapage*" d'un élève qui, pour des raisons diverses, a passagèrement perdu pied, elle ne saurait être le moyen de combler des lacunes accumulées depuis le début de la scolarité.

Dès la fin du premier trimestre, des professeurs évoquent avec nostalgie les anciennes classes de fin d'études ou les plus récentes classes à programme allégé.

Dans le souci d'une utilisation plus "*rentable*" de l'heure de soutien, certains en font bénéficier, par tiers, tous les élèves de la division, ce qui n'est conforme ni à la lettre, ni à l'esprit des textes.

Dans le même temps, les parents des "*bons élèves*" très présents comme on sait dans les associations de parents et dans les différents conseils expriment leur inquiétude.

Les actions d'approfondissement, quant à elles, posent des problèmes :
- dans quel cadre doivent-elles se dérouler : à l'école ? à la maison ? avec ou sans surveillance ?
- à quel moment, le professeur pourra-t-il vérifier et corriger le travail fait ? etc...

Dans ce contexte fallait-il, à partir de septembre 1978, revenir aux classes de niveau ? Ce n'était :

- ni possible (respect des textes)
- ni souhaitable , les classes hétérogènes étant loin de ne présenter que des inconvénients (notamment sous l'angle de la socialisation de l'enfant).

Au terme de cette réflexion, l'idée de faire "*éclater*" les divisions en groupes de niveau, s'impose avec la force de la nécessité.

II. LES MODALITES DE L'EXPERIMENTATION

1. Pourquoi le choix des mathématiques ?

Il nous est apparu que c'est dans cette discipline que la disparité des élèves pose le plus de problèmes pédagogiques. Les professeurs de lettres admettant volontiers que dans le cadre de leurs 6 ou 7 heures d'enseignement, et compte tenu de la variété des situations pédagogiques (lecture expliquée - lecture suivie - expression orale, écrite - théâtre etc...) il leur était plus facile de pratiquer une pédagogie différenciée dans le cadre des classes hétérogènes.

Il faut rappeler également que dans le contexte alsacien l'enseignement de l'allemand se fait et de façon quasi institutionnelle par groupes de niveau.

2. Définition des objectifs

Les groupes de niveau ne devaient en aucun cas conduire à réintroduire de façon sournoise la sélection dans une discipline instrumentale dont le poids est particulièrement déterminant pour l'orientation.

Tous les élèves devaient traiter le même programme, la différence entre les groupes se situant au niveau de la démarche pédagogique du professeur.

Les passages d'élèves d'un groupe à l'autre, en fonction de leur évolution propre, devaient être possibles tout au long de l'année. D'où la nécessité pour les professeurs :
- de synchroniser leur progression
- d'harmonier la terminologie et la codification
- proposer périodiquement des devoirs communs à tous les groupes afin que les résultats aient valeur comparative.

Pour que tous ces objectifs soient atteints, il fallait nécessairement placer les élèves en difficulté dans des conditions d'apprentissage plus favorables :
- groupes à effectifs allégés
- horaire renforcé

et ceci dans la stricte limite des moyens horaires donnés à l'établissement, c'est-à-dire 4 heures par groupe de 24 élèves.

3. Structures mises en place :

Composition des groupes (par commodité de langage on parlera de groupe fort, moyen, faible).

- On regroupe les effectifs de trois ou quatre divisions de 24 élèves pour former 3 ou 4 groupes de niveau
- Le groupe "*fort*" comptera jusqu'à 30 élèves
- Le groupe "*moyen*" comptera jusqu'à 24 élèves
- Le groupe "*faible*" comptera jusqu'à 18 élèves.

Si les divisions excèdent 24 élèves, le crédit d'heures dégagé permettra (cf. la 4e partie du présent compte-rendu) de dédoubler le groupe faible (3 + 1).

Horaire :

- Les quatre premières années, chaque groupe a bénéficié d'au moins 4 h - professeur.
- Monsieur l'Inspecteur Pédagogique nous a fait remarquer que ce système favorisait encore le groupe des meilleurs même si celui-ci comptait davantage d'élèves.
- Depuis cette année, à moins que le crédit d'heures le permette, le groupe des meilleurs ne bénéficie que de 3 heures-professeur, l'heure d'approfondissement étant donnée sous forme de travail sur fiche avec auto-correction sous la surveillance d'un SE ou d'un professeur en sous service. Par contre, le groupe faible bénéficie de 5 h - professeur (3 + 1).
- L'heure de concertation des professeurs se situe le jeudi de 17 à 18 h (tous les quinze jours).

  La description de l'expérience pour l'année 1981-82 illustrera ce qui est dit ci-dessus. J'ajoute que depuis deux ans l'expérience se déroule dans le cadre de la recherche pédagogique déconcentrée et que chaque professeur bénéficie d'une demi-heure supplémentaire/année.
- En 1978-79, l'expérience s'est étendue aux 6e et 5e. En 1979-80, elle a été élargie aux classes de 4e. En 1980-81 et 1981-82, on s'est limité à nouveau aux 6e et 5e, Monsieur l'Inspecteur Pédagogique souhaitant qu'au niveau des 4e des solutions nouvelles soient cherchées notamment dans le cadre de la pédagogie différenciée pratiquée dans la classe hétérogène. Il est vrai qu'à partir de la 4e, compte tenu de l'orientation en fin de 5e et du choix des options, les divisions retrouvent une certaine homogénéité.

III. QUE PEUT-ON DIRE AU TERME DE 5 ANS D'EXPERIENCE ?

1. Les élèves des groupes faibles

En Mathématique :

Peu d'élèves faibles à leur entrée en 6e se hissent au niveau supérieur. Là encore, se pose le problème de ces élèves qui arrivent en 6e avec d'énormes lacunes. De ces élèves, les professeurs de mathématique font le tableau suivant :

Comportement en classe :

- Difficultés d'attention et de concentration ;
- nombreux oublis de matériel (instruments, cahiers) d'où des remises à jour problématiques ;
- au regard de la discipline, c'est variable : certains sont rêveurs, d'autres turbulents ou les deux en alternance ;
- manque de soin et écriture difficile à déchiffrer (par l'enfant lui-même).

Compréhension :

- énormes problèmes de langage
- d'où difficulté à comprendre le professeur, à s'exprimer oralement et surtout par écrit, et difficultés d'acquisition et de mémorisation d'un nouveau vocabulaire ;
- le professeur doit donc continuellement revenir sur des notions qui semblaient acquises ;
- tous les élèves n'ont évidemment pas les mêmes schèmes intellectuels. Le professeur doit s'adapter et déterminer les choses. Dans de telles conditions, 18 élèves, qui sont autant de cas particuliers, même avec une heure dédoublée c'est encore beaucoup et il est difficile de suivre le rythme de progression des autres groupes.

Niveau des connaissances

Lecture et écriture des nombres :

- nombres entiers : des difficultés dès qu'on aborde le million ;
- nombres décimaux : la notion n'est pas acquise (rôle de la virgule, ordre de grandeur, comparaison). En fin de 6e, un élève dira encore que $3{,}7500 > 3{,}75$ et aura du mal à situer ce nombre entre deux entiers.

Opérations :

- les mécanismes de l'addition, de la soustraction et de la multiplication des entiers sont en général acquis à l'entrée en 6e (exception faite des tables de multiplication). Des difficultés de disposition subsistaient dans les opérations sur les décimaux. La division (même de deux entiers) n'est pas du tout acquise.

- l'entraînement à l'évaluation des résultats n'aboutit pas à une amélioration de la justesse des calculs.

Géométrie :

- Beaucoup de maladresses dans l'utilisation des instruments : équerre, règle, compas. Exigence d'un vocabulaire précis incompatible avec les difficultés de mémoire et de rigueur.
- Notion de longueur, unités et conversions : à peu près comprises.
- Périmètre d'une figure géométrique : déjà des difficultés.
- Notion d'aire : non acquises. Confusion entre périmètre et aire.

Ainsi, en septembre 1978, 35 élèves issus de 6 divisions constituent deux groupes A (faibles)

- 14 de ces élèves sont d'âge normal,
- 16 ont un an de retard,
- 5 ont deux ans de retard.

Sur ces 35 élèves, 20 sont également très faibles en français. Ce qui veut dire que si le système des groupes de niveau était étendu aux trois disciplines instrumentales que sont le français, les mathématiques et la langue étrangère, ces élèves se retrouveraient toujours dans le groupe faible. Autant dire qu'ils constitueraient une classe de niveau (classe à soutien renforcé) si la création d'une telle classe nous était permise.

Les 15 autres élèves, tous d'âge normal, ont un niveau moyen en français, leurs lacunes dans cette discipline étant principalement d'ordre orthographique.

Que sont devenus ces 35 élèves ?

- 7 d'entre eux ont changé d'établissement, on ne peut dire quelle a été leur orientation
- 15 ont quitté le Collège après une décision d'orientation :
  - CAP
  - CPA
  - apprentissage ;
- 13 sont encore dans l'établissement :
  - 6 en classe de 3e (3 d'âge normal et 3 avec un an de retard).
    Le niveau de ces 6 élèves est resté très faible en math.
  - 2 en CPPN
  - 4 en 4e après avoir redoublé la 5e
  - 1 en classe de 5e après avoir redoublé et la classe de 6e et la classe de 5e.

Le fonctionnement du système pose des problèmes matériels qu'il n'est pas toujours facile de résoudre :

- L'harmonisation et la synchronisation des progressions n'est possible que si les professeurs absents sont remplacés.
- Mise en place de l'emploi du temps : simultanéité des cours pour les différents groupes et utilisation de salles suffisamment proches pour que l'adaptation d'un élève qui change de groupe soit plus facile.

Problème difficile de l'évaluation et de la notation :
La notation à l'intérieur d'un groupe est fonction du niveau d'ensemble de ce groupe. Le professeur aura raison de valoriser par une bonne note tout progrès réalisé par un élève du groupe faible même si cette note est sans rapport avec la performance d'ensemble.
Mais les passages d'un groupe à l'autre exigent des notes ayant valeur comparative : d'où les devoirs communs avec barême unique de notation.
En 1981-82 on a mis en place un système de fiches que l'élève tient lui-même et où il se situe lui-même par rapport aux objectifs fixés :
- notion solidement acquise,
- acquis incertain,
- notion insuffisamment maîtrisée.

2. Des raisons de poursuivre l'expérience

Les résultats obtenus dans les groupes moyens et forts sont tout à fait encourageants.
- Ces groupes présentent une plus grande homogénéité que le groupe faible.
- Le professeur a devant lui un auditoire auquel il peut tenir le même langage.
- La hiérarchie établie en mathématique se retrouve souvant mais pas nécessairement dans les autres disciplines. Ici la notion de groupe de niveau, prend tout son sens. Par exemple, Frédérique est excellente en composition française mais se trouve dans le groupe "*moyen*" en mathématique. Dans la même classe, Joëlle est dans le groupe "*fort*" en mathématique mais n'obtient que des résultats très moyens en français.
- Pour ces élèves, traiter le programme de 6e n'est pas une intenable gageure.

Si nous avons présenté un bilan plutôt décevant à propos du groupe faible (cf. § 1) il faut cependant dire que dans ce groupe la participation orale des élèves est meilleure que lorsque ces mêmes élèves se retrouvent au sein de classes hétérogènes. L'effectif réduit permet au professeur d'individualiser son enseignement et l'élève est conscient et satisfait de l'intérêt qu'on lui porte. Il sait aussi que dans ce groupe, il n'a pas en cas d'erreur, à craindre le regard des autres.

Enfin la concertation entre les professeurs qui depuis 5 ans forment véritablement une équipe est tout à fait positive dans la mesure où elle leur permet de comparer leur pratique pédagogique à celle de leurs collègues ce qui est toujours source d'amélioration.

IV. DONNEES RELATIVES A L'ANNEE 1981-1982

1. Constitution des groupes

Niveau sixième :

- Effectif total : 153 élèves
- Nombre de divisions : 6
  dont 1 division de 30 élèves (6C)
  et une division de 27 élèves (6E)
- Crédit d'heures pour division > 24 élèves : 9 h
- Heures dégagées pour l'enseignement des math. : 2 h
- Les sixièmes A, B, C forment 3 groupes
  . groupe 1 (faible) : 23 élèves :
    $\left.\begin{array}{l}\text{* 4 h / élèves}\\ \text{* 5 h / professeurs}\end{array}\right\}$ (3 + 1)
  . groupe 2 (moyen) : 25 élèves :
    * 4 h / élèves
    * 4 h / professeurs
  . groupe 3 (fort) : 30 élèves :
    * 4 h / élèves
    * 4 h / professeurs
- Les sixièmes D, E, F forment 3 groupes
  . groupe 1 : 21 élèves (3 h + 1)
  . groupe 2 : 24 élèves 4 h
  . groupe 3 : 30 élèves 4 h.

Niveau cinquième :

- Effectif total : 166 élèves
- Nombre de divisions : 7
- Crédit d'heures pour divisions > 24 élèves : 0
- Les cinquièmes A, B, C forment 3 groupes
  . groupe 1 : 21 élèves (3h + 1)
  . groupe 2 : 24 élèves 4 h
  . groupe 3 : 26 élèves 3 h. L'approfondissement se fait pendant la 4e heure sous forme de fiches avec auto-correction et sous le contrôle d'un professeur certifié de mathématique en sous-service.

- Les cinquièmes D, E, F, G forment les groupes
  . groupe 1 : 21 élèves (3 h + 1)
  . groupe 2 : 24 élèves 4 h
  . groupe 3 : 24 élèves 4 h
  . groupe 4 : 26 élèves 3 h. L'approfondissement se fait comme décrit ci-dessus, sous le contrôle d'un adjoint d'enseignement.

2. Les changements de groupes

Niveau sixième :

- Novembre 1981 : 1 changement
- Décembre 1981 : 12 changements
- Janvier 1982 : 2 changements
- Mars 1982 : 14 changements
- Mai 1982 : 2 changements.

Niveau cinquième

- Novembre 1981 : 4 changements
- Décembre 1981 : 14 changements
- Mars 1982 : 8 changements.

Le principal, R. HOUEIX

ANNEXE : LE CHAPITRE "PUISSANCES" EN 5e

A. GROUPE FAIBLE

I. Exercice d'introduction

1. Faire **dessiner** un carré dont les côtés mesurent 5 cm.
   . Rappel du calcul du périmètre de ce carré (5×4)
   . Calcul de l'**aire**. Le cm^2 étant l'unité, l'aire se calcule ainsi : $5 \times 5 = 25$.
   . Mêmes questions avec un carré dont les côtés mesurent 3 cm, 10 cm, etc...

2. Quelle est la **"formule"** du calcul de l'aire d'un carré ?

Appelons c la mesure d'un côté. Les élèves diront côté × côté. Peut-être l'un ou l'autre connaît l'expression "*côté au carré*". On écrit $c \times c = c^2$.

. **Utiliser** cette écriture pour l'aire des carrés vus précédemment :

$5 \times 5 = 5^2 = 25$ $\quad$ $3 \times 3 = 3^2$ $\quad$ $10 \times 10 = 10^2$.

. Trouver le rôle du nombre 2 placé en exposant. Insister sur le fait que ce n'est pas un facteur d'une multiplication.

. Faire répéter la phrase :

Il y a 2 facteurs 5 dans la multiplication
Il y a 2 facteurs 3 ...
Il y a 2 facteurs 10 ...

II. Du carré aux autres puissances

1. Par quelle expression pourrait-on remplacer le calcul $5 \times 5 \times 5$?
   Dire la phrase : Il y a 3 facteurs 5 dans cette multiplication.

. Arriver à faire écrire $5 \times 5 \times 5 = 5^3$, puis calculer.

. Quelques calculs. Avant d'effectuer, décrire le calcul (Il y a ... facteurs)

$4^2 =$ $\quad$ $(-2)^2 =$ $\quad$ $4^3 =$ $\quad$ $10^3 =$ $\quad$ $(-5)^3 =$

2. Varier les exposants

. Proposer les calculs et les faire décrire

5^6 $\quad$ 9^4

. Proposer des multiplications et faire trouver l'écriture puissance correspondante

$6 \times 6 \times 6 \times 6 =$ $\quad$ $(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) =$

etc...

III. Définition - Vocabulaire

1. $\boxed{5^6}$ est appelé **puissance** du nombre 5. 6 est l'**exposant.**

   L'écriture 5^6 remplace une multiplication dans laquelle il y a 6 facteurs égaux à 5.

   5^6 se lit 5 exposant 6.

2. Appliquer cette règle aux expressions suivantes :

   2^8 ; 14^3 etc...

3. Est-ce que l'expression 7^1 peut aussi remplacer une multiplication ?

   Dans ce cas nous dirons $7^1 = 7$.

IV. Exercices

Un peu de calcul littéral par l'intermédiaire de tableaux.

a	3a	a^3
2		
6		
(-5)		

Faire écrire les calculs en ligne en dessous du tableau (pour justifier les réponses).

B. GROUPE FORT

I. De l'addition à la multiplication

1. **Proposer** quelques calculs

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$

$5 + 5 + 5 =$

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$

. Faire trouver la particularité de ces calculs

. Rappeler le vocabulaire : terme, somme.

2. **Demander** aux élèves de trouver une autre opération (plus courte) qui a même réponse que chacune de ces additions :

$4 \times 5 =$ $5 \times 3 =$ $(-3) \times 4 =$

. Rappeler le vocabulaire : facteur, produit

3. **Observer** ces trois multiplications

Quel est le rôle de chacun des facteurs ?

$4 \times 5 =$ — $5 \times 3 =$ — $(-3) \times 4 =$

4 : nombre qui se répète dans l'addition

5 : nombre de termes de l'addition

mêmes remarques

4. **Généralisation**

Appelons a un nombre décimal, n est un entier naturel

$a + a + a + a = a \times 4$

$\underbrace{a + a + a \ldots + a}_{n \text{ termes}} = a \times n$

5. **Conclusion**

Une addition dans laquelle tous les termes sont égaux peut être remplacée par une multiplication.

II. De la multiplication au calcul des puissances

1. **Proposer** les calculs suivants :

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 =$ $\quad 5 \times 5 \times 5 =$ $\quad (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) =$

Retrouver les particularités de ces opérations.

2. **Demander** aux élèves s'ils ont des propositions à faire pour remplacer ces opérations par d'autres plus simples à écrire. Discuter les propositions.

3. L'opération qui remplace la multiplication s'écrira ainsi

$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = \boxed{4^5}$

$5 \times 5 \times 5 = \boxed{5^3}$

$(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = \boxed{(-3)^4}$

Observer chacune de ces expressions et expliquer le rôle de chacun des nombres qui y figurent.

$\boxed{4^5}$

5 : nombre de facteurs dans la multiplication

4 : nombre qui se répète dans la multiplication

4. **Vocabulaire**

. L'expression 4^5 est une puissance du nombre 4

5 est appelé l'exposant

5^3 est la puissance d'exposant 3 du nombre 5

$(-3)^4$ est la puissance d'exposant 4 du nombre (-3).

. Trouver d'autres exemples.

. Calculer $2^5 =$ $(-3)^2 =$ $11^3 =$

5. Généralisation

a est un nombre décimal $a \in \mathbb{D}$

n est un entier naturel supérieur à 1 $n \in \mathbb{N}$ et $n > 1$

$a \times a \times a \times a = a^4$

$$\underbrace{a \times a \ \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^n$$

III. Définition et cas particuliers

1. Formuler une **définition** d'une puissance d'un décimal.

$a \in \mathbb{D}$ et $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

. a^n est le produit de n facteurs tous égaux au nombre a.

. a^n est la puissance d'exposant n du nombre a.

2. Pourquoi la définition ne convient-elle pas dans le cas où **$n = 1$** ?

Faire essayer d'appliquer la définition.

On pose l'égalité suivante : $a^1 = a$.

Exemples : $12^1 = 12$ $3{,}5^1 = 3{,}5$ $(-36)^1 = -36$

3. Examiner le cas **$n = 0$.**

. Si a est différent de 0, nous **admettrons** que $a^0 = 1$

$9^0 = 1$

$(-3)^0 = 1$

$1034^0 = 1$

. Si $a = 0$ nous dirons que 0^0 ne désigne **aucun nombre.**

IV. Exercices (voir livre).

Insister sur la différence entre a^n et $a \times n$.

TIROIRS BOURRES EN TERMINALE D

Jean LEFORT

Une classe de Terminale D, très faible à mon goût : peu ou pas de motivation pour l'étude scolaire en général, passivité totale en classe...

Comme le rôle du professeur est justement de motiver ses élèves, j'essayais régulièrement de proposer des problèmes qui me semblaient intéressants ou qui semblaient pouvoir piquer leur curiosité. Je n'avais guère eu de succès sauf à propos des équations différentielles. Manque de flair pédagogique ?!

J'aborde le chapitre *"dénombrements"* du programme sous forme d'exercices très classiques puis en conclusion de l'étude des C_n^p je propose le problème suivant :

> **On dispose de n tiroirs, m objets. De combien de façons peut-on ranger ces m objets dans les n tiroirs sachant que chaque tiroir peut recevoir au plus p objets ?**

1) Pour forcer à la recherche cette classe qui baisse les bras trop facilement, je commence par demander ce que l'on entend par *"rangements différents"*. De la discussion que je porte à bout de bras on finit par dégager trois systèmes différents que je schématise par les graphiques ci-après :

*

abc	de		fg		h
bc		adf		eh	g

C'est le même rangement car il existe dans les deux cas un seul tiroir contenant 3 éléments, deux tiroirs comportant deux éléments...
Ni les tiroirs ni les objets ne sont différenciés.

*

1	2	3	4	5	6
abc	de		fg		h
adf	bc		eh		g

C'est le même rangement car dans un tiroir de numéro donné il y a dans les deux cas le même nombre d'éléments.
Les tiroirs sont différenciés mais pas les objets.

	1	2	3	4	5	6
*	abc	de		fg		h
	bac	ed		fg		h

C'est le même rangement car seul l'ordre des objets dans les tiroirs change. **Tiroirs et objets sont différenciés.**

Je propose de traiter le problème avec la deuxième définition (objets indifférenciés dans des tiroirs numérotés).

2) **On traite le cas p = 1.** Aucune difficulté, c'est une application directe du calcul des combinaisons. On trouve C_n^m .

3) **On traite le cas p = 2.** Il n'est pas question, dans un premier temps, de trouver une formule générale, et je le signale aux élèves en leur disant qu'il faut d'abord se contenter de remplir case par case le tableau ci-dessous:

m \ n	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					

a) Toutes les cases ne sont pas à remplir ; il y a impossibilité lorsque le nombre d'objets est trop grand : $m > pn$.
On hachure donc toutes les cases pour lesquelles $m > 2n$.

b) On remarque que si il y a exactement pn (ici 2n) objets, alors il faut *"bourrer"* tous les tiroirs et il n'y a évidemment qu'une solution possible.

c) On remplit ensuite le tableau par ligne. On trouve que
* pour m = 1 il y a n possibilités
* pour m = 2 il y a $C_n^1 + C_n^2$ possibilités
* pour m = 3 il y a $C_n^3 + 2C_n^2$ possibilités et enfin
* pour m = 4 il y a $C_n^4 + 3C_n^3 + C_n^2$ possibilités.

Il a fallu du temps pour mettre en évidence ces formules qui s'expliquent bien quand on cherche les diverses façons de regrouper m objets. Effectuons la démonstration pour m = 4.

On a : - soit la répartition 1 - 1 - 1 - 1 de C_n^4 façons
- soit la répartition 1 - 1 - 2 de C_n^3 façons mais le "2" peut être placé de 3 façons
- soit enfin la répartition 2 - 2 de C_n^2 façons. D'où le total.

En conclusion provisoire de cette étude, nous avons abouti au tableau de la page suivante.

m \ n	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3		2	7	16	30
4		1	6	19	45
5					
6			1		
7					
8				1	
9					
10					1

d) **Une première hypothèse**

Un élève fait remarquer qu'il semble apparaître une sorte de symétrie dans chaque colonne (au moins dans la 1ère, 2ème et 3ème) et que dans la 3ème colonne on attend un "3" dans la case encore vide. Et qu'on pourrait alors complèter entièrement la 4ème colonne en :

4 - 10 - 16 - 19 - 16 ? - 10 ? - 4 ? - 1.

On vérifie rapidement deux cas particuliers :

m = 5, n = 3 et m = 6, n = 4 qui satisfont bien à cette *"symétrie"*.

Je montre alors que la *"symétrie"* pourraît être plus forte si on ajoutait une ligne m = 0 qui évidemment ne contiendrait que des "1" ce qui est assez naturel (il n'y a qu'une façon d'avoir tous les tiroirs vides !).

e) **Une deuxième hypothèse**

m \ n	1	2	3	4	5	
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3		2	7	16	30	50
4		1	6	19	45	90
5			3	16*	51	
6			1	10	45*	
7				4*	30*	
8				1	15*	90*
9					5*	50*
10					1	21*
						6*
						1

dans ce tableau, les cases marquées * sont remplies en fonction de la 1ère hypothèse.

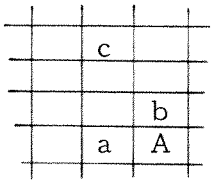
La première hypothèse est insuffisante pour remplir la case m = 5, n = 5.

Les élèves proposent différents nombres, tous multiples de 5 jusqu'à ce que l'un d'eux propose 51. Il a fait le calcul explicite.

Le tableau est alors complet pour n < 5 et je propose une recherche de remplissage systématique analogue à la construction du triangle de Pascal.

Différentes solutions sont proposées qui après quelques tests sont rejetées par la classe.

Enfin, un élève propose le schéma suivant :



$$A = a + b - c$$

On complète par des "0" les cases impossibles et la lère colonne commençant par trois "1".

Cette hypothèse, après quelques essais, remporte l'adhésion de tous les élèves.

4) Conclusion provisoire

A la fin de cette première séance, la classe a abouti à deux hypothèses. En notant N_n^m le nombre de façons de ranger m objets dans n tiroirs avec 2 objets au plus par tiroir, ces hypothèses s'écrivent :

$$N_n^m = N_n^{2n-m}$$

et

$$N_n^m = N_{n-1}^m + N_n^{m-1} - N_{m-3}^{n-1} \ .$$

Je propose aux élèves de rechercher une démonstration de ces deux propositions pour le cours suivant...

5) Un échec pédagogique

Au cours suivant, je constate un désintérêt total pour ce problème. Personne n'a rien cherché. Lassitude ? Peut-être, mais surtout personne ne ressent la nécessité d'une démonstration. Cela s'est déjà produit de nombreuses fois dans le cours et se reproduira encore. Ces élèves assimilent vérifications nombreuses et démonstrations, attitude que je ne peux admettre en terminale scientifique mais contre laquelle je suis bien désarmé.

J'hésite alors à leur parachuter une démonstration qui ne les intéresse manifestement pas. J'opte finalement pour une demi-mesure : je donne la démonstration de la première hypothèse ($N_n^m = N_n^{2n-m}$), démonstration que l'on trouvera ci-après et me contente d'annoncer que pour la 2ème hypothèse il est plus facile de démontrer que :

$$N_n^m = N_{n-1}^m + N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2} \ .$$

Il y a alors un regain d'intérêt de la part des élèves. J'entends même un *"comment se fait-il que je n'ai pas trouvé ça, c'est beaucoup plus simple"*. Mais cet intérêt disparaît dès que je propose la démonstration du passage de cette dernière formule à celle proposée au cours précédent. Seuls trois élèves se mettront au travail quand j'aurai écrit au tableau les deux lignes :

$$N_n^m = N_{n-1}^m + N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2}$$

$$N_n^{m-1} = N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2} + N_{n-1}^{m-3}$$

pour aboutir au résultat cherché.

Que fallait-il faire pour motiver ces élèves à la démonstration ?

6) **Compléments pour les collègues**

a) $\mathbf{N_n^m = N_n^{2n-m}}$. On peut toujours supposer que les m objets sont répartis dans les tiroirs de la façon suivante :

. 2k objets dans k tiroirs contenant chacun 2 objets

. l objets dans l tiroirs contenant chacun 1 objet.

On a donc m = 2k + l et il y a k + l tiroirs occupés et n - (k+l) vides.

Remplaçons alors le contenu de chaque tiroir par son complément à 2. On obtient alors :

. k tiroirs vides

. l tiroirs contenant chacun 1 objet

. n - (k+l) tiroirs contenant chacun 2 objets.

Au total il y a : $2[n - (k+l)] + l$ objets soit 2n - 2k - l ou encore 2n - m objets.

Il est clair que cette manoeuvre établit une bijection entre les rangements de m objets et ceux de 2n - m objets ce qui achève la démonstration.

Remarque : Cette méthode est tout à fait analogue à l'une de celle utilisée pour la démonstration de $C_n^m = C_n^{n-m}$ et se généralise au cas de p objets par tiroir en remplaçant le complément à 2 par le complément à p. On a donc avec une notation évidente :

$$N_{n,p}^m = N_{n,p}^{pn-m}$$

b) $\mathbf{N_n^m = N_{n-1}^m + N_{n-1}^{m-1} + N_{n-1}^{m-2}}$. Isolons un tiroir particulier. Trois cas se présentent :

. Il est vide et les m objets se répartissent dans les (n-1) tiroirs restants de N_{n-1}^m façons différentes.

. Il contient 1 objet et les (m-1) objets restants se répartissent dans les (n-1) autres tiroirs de N_{n-1}^{m-1} façons différentes.

. Il contient 2 objets et les (m-2) autres se répartissent dans les (n-1) tiroirs restants de N_{n-1}^{m-2} façons différentes.

Ces trois cas étant exclusifs, on a bien la relation indiquée.

Remarque : Un raisonnement analogue conduit dans le cas général avec p objets au plus par tiroir à :

$$N^m_{n,p} = N^m_{n-1,p} + N^{m-1}_{n-1,p} + N^{m-2}_{n-1,p} + \dots + N^{m-p}_{n-1,p} .$$

c) **Formule du trinôme.** Comment calculer $(x^2 + x + 1)^n$.
Chacun des n facteurs peut être assimilé à un tiroir et l'exposant du terme choisi dans ce facteur au nombre d'objet dans ce tiroir (2, 1 ou 0). Ainsi présenté on a :

$$(x^2 + x + 1)^n = \sum_{m=0}^{m=2n} N^m_n . x^m .$$

En donnant à x différentes valeurs numériques on obtient de nombreuses relations. Par exemple pour x = 1 on trouve :

$$\sum_{m=0}^{m=2n} N^m_n = 3^n .$$

Ou pour $x = i$ $(i^2 = -1)$ on trouve :

$$\sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m . N^{2m}_n + i . \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m . N^{2m+1}_n = i^n$$

ou pour x = j, etc...

Remarque : On généralise sans difficulté pour obtenir :

$$\left(\sum_{k=0}^{p} x^k \right)^n = \sum_{m=0}^{pn} (N^m_{n,p}) x^m .$$

d) **Quelques tableaux**

$p = 2$

m \ n	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3		2	7	16	30	50
4		1	6	19	45	90
5			3	16	51	126
6			1	10	45	141
7				4	30	126
8				1	15	90
9					5	50
10					1	21
11						6
12						1
13						

$p = 3$

m \ n	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	3	6	10	15	21
3	1	4	10	20	35	56
4		3	12	31	65	120
5		2	12	40	101	216
6		1	10	44	135	336
7			6	40	155	456
8			3	31	155	546
9			1	20	135	580
10				10	101	546
11				4	65	456
12				1	35	336
13					15	216
14					5	120
15					1	56
16						21

.....

De même que pour le triangle de Pascal, on peut trouver une infinité de relations à l'intérieur de ces tableaux ou entre ces tableaux. Voici quelques propositions :

. Pour $p = a$ et $p = b$, quelles sont les lignes identiques ?

. Existe-t-il une formule pour $N^m_{n,p}$ analogue à $C^m_n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$?

. Y a-t-il une relation simple entre $N^m_{n,p}$ et $N^m_{n,p'}$?

COMMENT RANGER DES BALLES DE PING PONG ?

Eric CHANEY (*)

La glace 9

Dans *"Cat's Cradle"*, (Le berceau du chat), Kurt Vonnegut Jr met en scène un savant un peu fou qu'un général américain vient consulter. Ce militaire en a assez de la boue, et voudrait que le savant aide l'armée U.S. à neutraliser cet ennemi insidieux. Trouvant l'idée amusante, le D^r Hoenikker lui explique qu'il suffirait de disposer d'un germe d'une eau qui gèlerait à, par exemple, 45°C. Et pour cela de **trouver une structure cristalline pour la glace, différente de sa structure usuelle.** Le savant se met alors à collectionner des photos d'empilement de vieux boulets de canon, visite les supermarchés pour observer les tas de pamplemousses etc... et finit par trouver la *"glace 9"*, condamnant ainsi le monde à périr gelé...

Fiction, bien sûr, science-fiction même, marquée par une réaction anti-scientiste qui n'est plus guère de mode aujourd'hui. Fiction donc, sauf sur un point capital : il est vrai qu'il y a encore beaucoup à apprendre sur les empilements de boulets de canon, d'oranges et autres sphères. Par exemple, nul ne savait en 1963 (date de parution du roman) si l'empilement *"naturel"* en quinconce est le meilleur possible. En 1984, la question est toujours ouverte !

Ces problèmes, et d'autres connexes, formaient le thème d'une conférence de M. François SIGRIST, de l'Université de Neuchâtel, donnée en mai 84 à l'Institut de mathématiques. L'article qui suit est issu des notes prises à cette séance fort excitante.

Il s'agit en premier lieu d'examiner la question suivante :

> **Comment faut-il s'y prendre pour mettre le plus possible de billes de roulement dans une boîte ?**

(*) D'après une conférence de M. François SIGRIST

En termes plus mathématiques :

(2) **Quelle est la densité maximale que l'on peut atteindre en "remplissant" l'espace avec des sphères de rayon donné ? Comment atteindre le maximum ?**

Remarquons tout de suite que, posé en dimension 3, ce problème peut l'être en dimension n, avec $n \geqslant 2$.

§ 1. REMPLIR-TASSER : L'EMPILEMENT ALÉATOIRE

C'est la solution adoptée pratiquement pour répondre à la question **(1)**. Le sens commun admet d'ailleurs que deux boîtes identiques, remplies à ras-bord de billes de roulement de même diamètre, en contiennent à peu près le même nombre.

Pour une fois, le dit sens commun ne se trompe pas : les physiciens ont constaté expérimentalement que la **densité** -c'est-à-dire **le rapport entre le volume occupé par les sphères et celui du contenant** - aléatoire ainsi obtenue est remarquablement stable, d'une expérience à l'autre, valant en gros $2/\pi$ ($\cong 0,63$).

Ce fait incite d'ailleurs à penser que la distribution des atomes (ou des molécules) dans un liquide, doit s'apparenter à l'empilement aléatoire. Prenons un corps dont la structure cristallinne à l'état solide est le réseau cubique à faces centrées, un métal comme le cuivre, par exemple. Il possède une densité ρ_1. Porté à sa température de fusion, ce métal a une densité ρ_2. Or le rapport mesuré ρ_2/ρ_1 vaut approximativement 63/74. 0,63, nous l'avons vu, c'est la densité aléatoire. Or, 0,74 ($\pi/\sqrt{18}$ pour être précis), c'est la densité de l'empilement des sphères dans un réseau cubique à faces centrées.

L'approximation est d'ailleurs bien meilleure dans des expériences faites sur les gaz rares, dont les atomes présentent une meilleure symétrie sphérique.

Malheureusement, la situation d'empilement aléatoire est rétive à la mathématisation. A défaut de produire un modèle fiable, les mathématiciens sont cependant parvenus à indiquer comment trouver une borne supérieure de la densité d'empilement des sphères, en dimension n.

§ 2. UNE MAJORATION THÉORIQUE

Le résultat suivant, dû à C.-A. ROGERS, date de 1958 :

Soit Δ_n le simplexe régulier d'arête 1 dans l'espace euclidien de dimension n. On place n+1 sphères centrées en ses sommets, de rayon 1/2. Soit σ_n le rapport du volume occupé dans Δ_n par ces sphères à celui de Δ_n.
La densité de tout empilement de sphères en dimension n est inférieure à σ_n.

Le cas n = 2

Le théorème de Rogers se visualise bien dans le plan (Fig. 1) où, de plus, cette borne supérieure est atteinte.

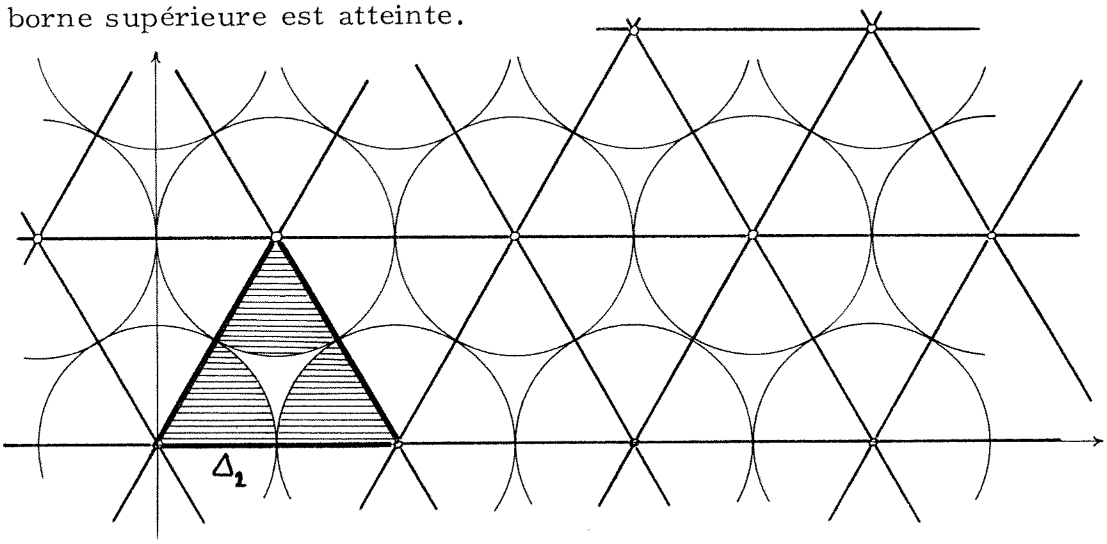


Fig. 1 : Le réseau hexagonal

Le simplexe régulier Δ_2 est ici le triangle équilatéral.

On calcule aisément que $\sigma_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cong 0,907$.

Comme cette disposition des disques unités correspond à un véritable *"empilement"*, les disques ne se chevauchant pas, on voit que le maximum est atteint.

Le cas n = 3 : mystère !

Tout d'abord, il n'est pas possible de remplir l'espace ordinaire avec des boules de rayon 1/2 disposées aux sommets de tétraèdres réguliers : on sait que les tétraèdres ne fournissent pas un pavage de l'espace. Mais rien n'empêche de calculer σ_3 :

$$\sigma_3 = \sqrt{2}\,(3 \arccos (1/3) - \pi) \cong 0,779.$$

Le meilleur empilement connu est celui obtenu en superposant en quinconce des plans de sphères disposées selon le réseau hexagonal. Celui utilisé sur les étals des marchands de fruits soucieux d'esthétique. Il est également possible de le réaliser en superposant d'une certaine façon des réseaux à mailles carrées. En un mot, c'est le réseau cubique à faces centrées déjà évoqué, (*) dont la densité vaut $\pi / 3 \sqrt{2} \cong 0,740$.

Entre 0,74 et σ_3 , il y a donc encore de la place pour répondre à **(2)**. Peut-on faire mieux que les marchands d'oranges ? Nul ne le sait ! Situation que le mathématicien John MILNOR n'hésite pas à qualifier de scandaleuse...

σ_n est d'ailleurs un nombre bien inconfortable : son calcul pour $n > 4$ est à peu près inextricable, et si σ_4 est connu exactement, c'est grâce à COXETER qui l'a trouvé dans les oeuvres d'un géomètre suisse du XIXe siècle, Ludwig SCHÄFLI. Un miracle, n'hésite pas à dire son compatriote François SIGRIST.

§ 3. EMPILEMENT RÉGULIERS ET ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

L'empilement aléatoire se formalise mal. Le maximum de Rogers semble bien difficile à atteindre. Reste à adopter une démarche plus constructive : tenter de ranger les sphères régulièrement, c'est-à-dire centrées sur les points d'un **réseau** (Fig. 2)

> **Dans R^n, toute base $(e_1 , \ldots , e_n)$ définit un réseau : l'ensemble des points à coordonnées entières dans cette base.**

(*) Les réseaux plans hexagonaux apparaissent mal sur le réseau cubique à faces centrées, vu classiquement. Ils sont en effet distribués sur des plans parallèles aux plans de symétrie des cubes, qui passent par un sommet et une diagonale d'une face qui ne contient pas ce sommet. Ces plans font apparaître des triangles équilatéraux dans le cube.

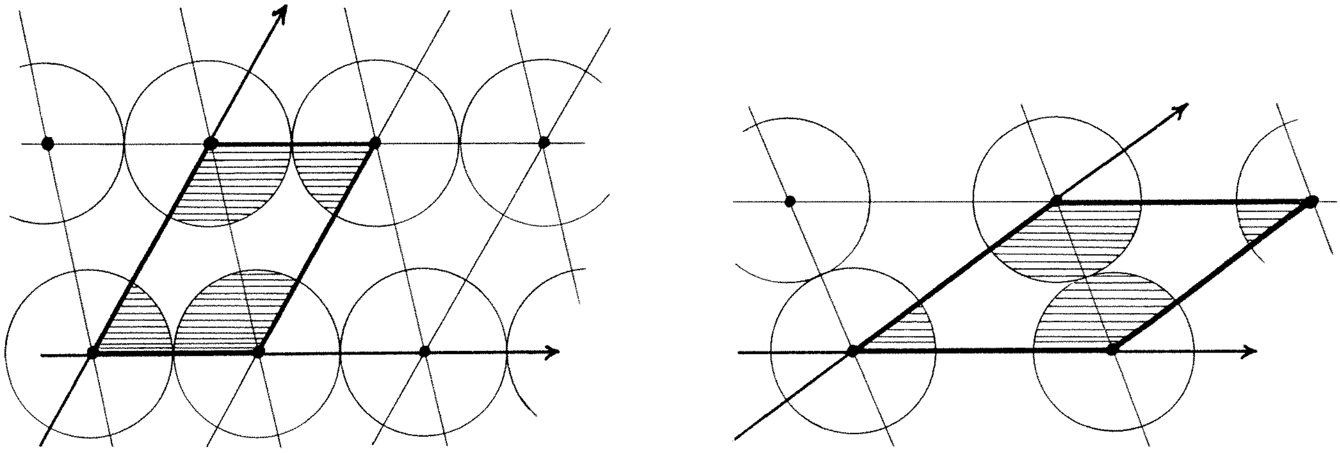


Fig. 2

Pour un réseau donné, la densité la plus grande est obtenue pour le plus grand rayon de sphères qui évite le chevauchement. C'est, en regardant bien, la moitié de la distance entre **0** et le point du réseau le plus proche. La densité est "*facile*" à mesurer, d'ailleurs, une fois que l'on a remarqué que les traces des sphères dans un domaine fondamental du réseau (en gras sur la Fig. 2) reconstituent une sphère complète.

En faisant varier le réseau, la densité varie aussi, toujours majorée par σ_n. Elle possède donc une borne supérieure.

HERMITE a montré que la densité maximale (sur l'ensemble des réseaux) est effectivement atteinte pour un certain réseau.

Entrons un peu dans le détail. Dans ce problème, on travaille dans l'espace **euclidien**, avec un réseau **variable**. Il est commode de le transformer en un problème dans $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire (une forme quadratique définie positive) **variable**. Ceci se fait très simplement :

Etant donné un réseau de base $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, on l'envoie sur $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ par l'application linéaire :

$$\mathbf{a}_i \mapsto \mathbf{e}_i$$

On transforme du même coup le produit scalaire de l'espace euclidien en une forme quadratique de matrice $A = [a_{ij}]$ où $a_{ij} = (\mathbf{a}_i \mid \mathbf{a}_j)$.

Ceci revient à transformer les réseaux de la figure 2 en réseaux à maille carrée, et l'empilement de disques en empilement d'ellipses.

Réciproquement, toute forme quadratique définie positive A provient d'un réseau, défini à une transformation orthogonale près. On l'obtient en *"redressant"* l'ellipsoïde de la forme quadratique en une sphère !

Ainsi, il y a correspondance bijective entre réseaux et classes de formes quadratiques définies positives.

Conservant le point de vue de l'espace $\mathbb{R}^n$, muni du réseau $\mathbb{Z}^n$, et d'une forme quadratique A variable, introduisons :

$$m(A) = \min (X^t A X), \text{ minimum pris sur } \mathbb{Z}^n - \{ 0 \}$$

Si l'on revient au réseau qui définit A, **m(A) est la distance entre 0 et le point le plus proche du réseau.**

Il est pratique d'introduire aussi :

$$\mu(A) = \frac{m(A)}{(\det A)^{1/n}}$$, invariant si on transforme A par homothétie ou transformation unimodulaire. La densité maximale d'empilement de sphères sur le réseau est alors :

$$\delta(A) = \frac{\omega_n}{2^n} \left[\mu(A)\right]$$, où ω_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Le résultat de Hermite peut maintenant s'exprimer sous sa forme originale :

Sur l'ensemble des formes quadratiques à n variables, $\mu(A)$ est borné, et atteint son maximum (noté γ_n).

La version géométrique - il existe un cristal permettant l'empilement régulier de sphères de densité maximale - est loin d'être évidente !

On se trouve donc avec un nouveau majorant pour la densité. σ_n , dont on ne sait pas s'il est atteint (sauf pour n=2) est un majorant pour tout empilement. γ_n ne l'est que pour les empilements réguliers, mais lui au moins, est atteint.

Les réseaux détiennent-ils le record de densité ? Encore une question ouverte ! Pour n=2, la réponse est oui. Pour n=3, beaucoup pensent que le réseau cubique à faces centrées est vainqueur toutes catégories.

Au delà, le mystère s'épaissit. Utilisant la théorie des codes, LEECH et SLOANE ont fabriqué en dimension 10 un empilement non distribué sur un réseau, plus dense que tous les empilements en réseau connus jusqu'à ce jour. Si l'on connaissait γ_n , il serait facile de jauger ce prétendant. Seulement voilà, on n'a pu calculer γ_n que pour $n \leqslant 8$...

On sait quand même, grâce à MINKOWSKI, que $\gamma_n < n$.

Application à une équation diophantienne :

L'équation $4181x^2 - 5168xy + 1597y^2 = 1$ possède une solution entière et les empilements de sphère le prouvent !

Son premier membre est une forme quadratique de déterminant +1.

De façon générale, soit $ax^2 + 2b\,xy + c\,y^2 = 1$ une équation à coefficients entiers telle que $ac - b^2 = 1$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la forme quadratique du premier membre. Comme $\det A = 1$, on a $\mu(A) = m(A)$.

Selon Minkowski, $\gamma_2 < 2$. Le minimum de A sur $\mathbb{Z}^2 - \{0\}$ est un entier < 2 ! Il vaut donc 1. Il est atteint pour un certain couple d'entiers (x,y). Voila !

§ 4. "THE KISSING NUMBER"

Convenons d'appeler *"baiser"* le chaste contact entre deux sphères. Le problème du *"kissing number"* se formule ainsi :

> **Combien de sphères de rayon donné peut-elle recevoir de baisers simultanés de la part de sphères de même rayon ?**

Autrement dit, combien peut-on coller de balles de ping-pong autour de l'une d'entre elles ?

Le réseau cubique à faces centrées, encore lui, fournit déjà un candidat : 12.

Mais en observant la réalisation de ce *"polybaiser"*, on a la nette impression qu'il reste de la place...

Le problème suscita une polémique dès la fin du XVIIe siècle : NEWTON pensait que 12 était le maximum, GREGORY soutenait que c'était 13.

Les notions introduites au § 1 permettent de constater que l'alternative est bien entre 12 et 13:

Imaginons la sphère centrale couverte par ses soeurs, et celles-ci entourées par la sphère tangente extérieure, de rayon choisi égal à 1. En disposant au centre de la figure une source ponctuelle de lumière, chaque *"sphère-soeur"* découpera sur l'enveloppe extérieure une calotte d'ombre d'aire facile à calculer : $\pi\ (2 - \sqrt{3})$. S'il y a N sphères couvrantes, l'aire d'ombre sera $N \cdot \pi\ (2 - \sqrt{3})$. D'où une première majoration :

$$N \cdot \pi\ (2 - \sqrt{3}) < 4\ \pi$$

Il suffit d'injecter l'idée de Rogers pour l'affiner : la densité maximale d'empilement est précisément le rapport entre l'aire de la zone ombrée et l'aire totale de la sphère extérieure. La somme des aires des calottes ne saurait donc excéder $4\ \pi \cdot \sigma_3$. D'où :

$$N < \frac{4\ \sigma_3}{2 - \sqrt{3}} \cong 13,4.$$

Plus que 13 candidates.

Mais il a fallu attendre 1953 pour départager les illustres savants : VAN DER WAERDEN et SCHÜTTE donnèrent raison à Newton : le *"kissing number"* en dimension 3 est bien 12.

On peut généraliser le problème en faisant varier le rayon de la sphère centrale, celui des sphères couvrantes restant constant. S'introduisent alors deux fonctions :

* R(N) : rayon minimum de la sphère couverte par N sphères de rayon 1.
* N(R) : nombre maximal de sphères de rayon 1 couvrant une sphère de rayon R.

Ces deux fonctions restent mal connues.

Une dernière curiosité : R(N) ne croît pas **strictement** avec N. En effet R(5) = R(6). En termes plus concrets :

En plaçant six sphères aux sommets d'un octaèdre régulier d'arête 1 de façon que trois sphères d'une même face soient tangentes, la sphère inscrite a pour rayon R(6). Imaginons cette dernière de rayon variable. En enlevant une sphère couvrante, on fait de la place. Il devrait donc être possible de dégonfler la sphère centrale. Or il n'en est rien !

NOTE : M. François Sigrist est l'un des trois lauréats du Concours lancé pour la partie mathématique du Musée de la Villette. Concours où notre ami Jean LEFORT a obtenu un accessit. C'est dire que M. Sigrist n'est pas de la variété "confinée en tour d'ivoire". Voici d'ailleurs ce qu'il écrivait dans "Mathematical Intelligence" Vol. 5 n° 3, en introduction à un article consacré aux empilements de sphères :

> *"Les faits de base dans la vie de tous les jours relèvent de la géométrie euclidienne, mais la familiarité avec la géométrie fait de moins en moins partie de ce qu'on pourrait appeler la culture de M. Tout-le-monde. Les mauvais jours, j'incrimine Bourbaki. Les autres, je pense que tous les mathématiciens portent une part de responsabilité. Combien de mes collègues mathématiciens ont une intuition correcte de la densité d'une sphère dans un cube ? (...) Combien savent que le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ commence par croître, puis décroît très vite avec n ? (...)"*

EULER AU BAC A_1 !

Proposé par l'Académie de Besançon, le sujet de mathématiques donné en Alsace pour la session 84 du baccalauréat de la nouvelle section A1 comportait deux exercices et le problème reproduit ci-dessous. Le premier exercice, de probabilité, proposait d'étudier les variations sur le thème de Molière *"Belle Marquise, vos beaux yeux..."*. Le second, de facture plus classique, faisait étudier une fonction du second degré et une fonction homographique. Tous deux étaient notés six points.

De façon plus générale, l'OUVERT serait heureux que les réflexions sur les sujets du bac 84 sortent des salles des professeurs, et publierait volontiers celles qui lui seraient transmises.

<u>P R O B L E M E</u> (8 points)

Résolution d'une équation : $x \in \mathbb{R}$ $a^x = b$, application.

L. Euler : "Introduction à l'analyse infinitésimale" chap. 6 tome 1 (Bachelier 1835).

111. L'uſage des logarithmes eſt particuliérement eſſentiel pour réſoudre les équations, dans leſquelles l'inconnue ſe trouve en expoſant. Si, par exemple, on arrive à l'équation $a^x = b$, d'où il faille tirer la valeur de l'inconnue x; on ne pourra y parvenir qu'en employant les logarithmes.

"L'usage des logarithmes est particulièrement essentiel pour résoudre des équations, dans lesquelles l'inconnue se trouve en exposant. Si, par exemple, on arrive à l'équation $a^x = b$, d'où il faille tirer la valeur de l'inconnue x ; on ne pourra y parvenir qu'en employant les logarithmes."

<u>QUESTION 1</u> : A quelles conditions, sur a et b, l'équation :

$x \in \mathbb{R}$ $a^x = b$, a-t-elle une et une seule solution ?

dans ce cas la résoudre.

<u>APPLICATION</u> :

E X E M P L E II.

Un particulier doit 400000 florins, dont il eſt convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent; il acquitte tous les ans 25000 florins; on demande après combien d'années ſa dette ſera entierement éteinte. Écrivons a pour la ſomme dûe 400000 fl. & b pour la ſomme 25000 fl. payée tous les ans; il devra donc au bout d'un an $\frac{105}{100}a - b$; au bout de deux ans $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$; au bout de trois ans $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \left(\frac{105}{100}\right) b - b$; & en mettant, pour abréger, n au lieu de $\frac{105}{100}$, il reſtera dû après un nombre x d'années $n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b \ldots\ldots - b$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. L

"Un particulier doit 400000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent ; il acquitte tous les ans 25000 florins ; on demande après combien d'années sa dette sera entièrement éteinte.
Ecrivons a pour la somme dûe 400000 fl. et b pour la somme 25000 fl. payée tous les ans ; il devra au bout d'un an :"

$$S_1 = \frac{105}{100} a - b$$

au bout de deux ans : $S_2 = (\frac{105}{100})^2 a - \frac{105}{100} b - b$;

au bout de trois ans : $S_3 = (\frac{105}{100})^3 a - (\frac{105}{100})^2 b - \frac{105}{100} b - b$;

et en mettant pour abréger n au lieu de $\frac{105}{100}$, il restera dû après un nombre x d'années :

$$S_x = n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - \ldots - n b - b$$

QUESTION 2 : Soit S_p la somme dûe au bout de p années, p étant un entier compris entre 1 et x (le nombre d'années au bout duquel la dette sera éteinte), montrer par récurrence sur p que :

$$S_p = n^p a - n^{p-1} b - n^{p-2} b - \ldots - n b - b$$

S2 DES QUANTITÉS EXPONENTIELLES

$= m^x a - b(1 + n + n^2 + \ldots\ldots + n^{x-1})$. Mais comme par la nature des progreſſions géométriques $1 + n + n^2 + \ldots\ldots + m^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$; après x années, il ſera dû $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1}$ fl., quaantité, qui égalée à zéro donnera cette équation $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$,

" $S_x = n^x a - b(1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1})$. Mais comme par la nature des progressions géométriques $1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$;
après x années, il sera dû $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1}$, quantité , qui égalée à zéro donnera cette équation $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$ ", ... *(progression = suite)*

QUESTION 3 : Justifier la formule $1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$.
Il y a manifestement une erreur d'impression, dans le texte ci-dessus.
Donner une expression correcte de la forme réduite de S_x .

QUESTION 4 : Résoudre l'équation $x \in \mathbb{N}$ $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$,
en se ramenant comme l'indique Euler à une équation dans R : $A^x = B$;
il est demandé de détailler les calculs et d'indiquer les moyens de calculs utilisés (tables, calculatrice).

QUESTION 5 : Voici la conclusion donnée par Euler : "donc x sera un peu moindre que 33 ; c'est à dire qu'au bout de 33 ans la dette sera non seulement acquittée, **mais** le créancier sera tenu de rendre :" 318,8 fl.
Justifier cette conclusion (on pourra calculer S_{33}).