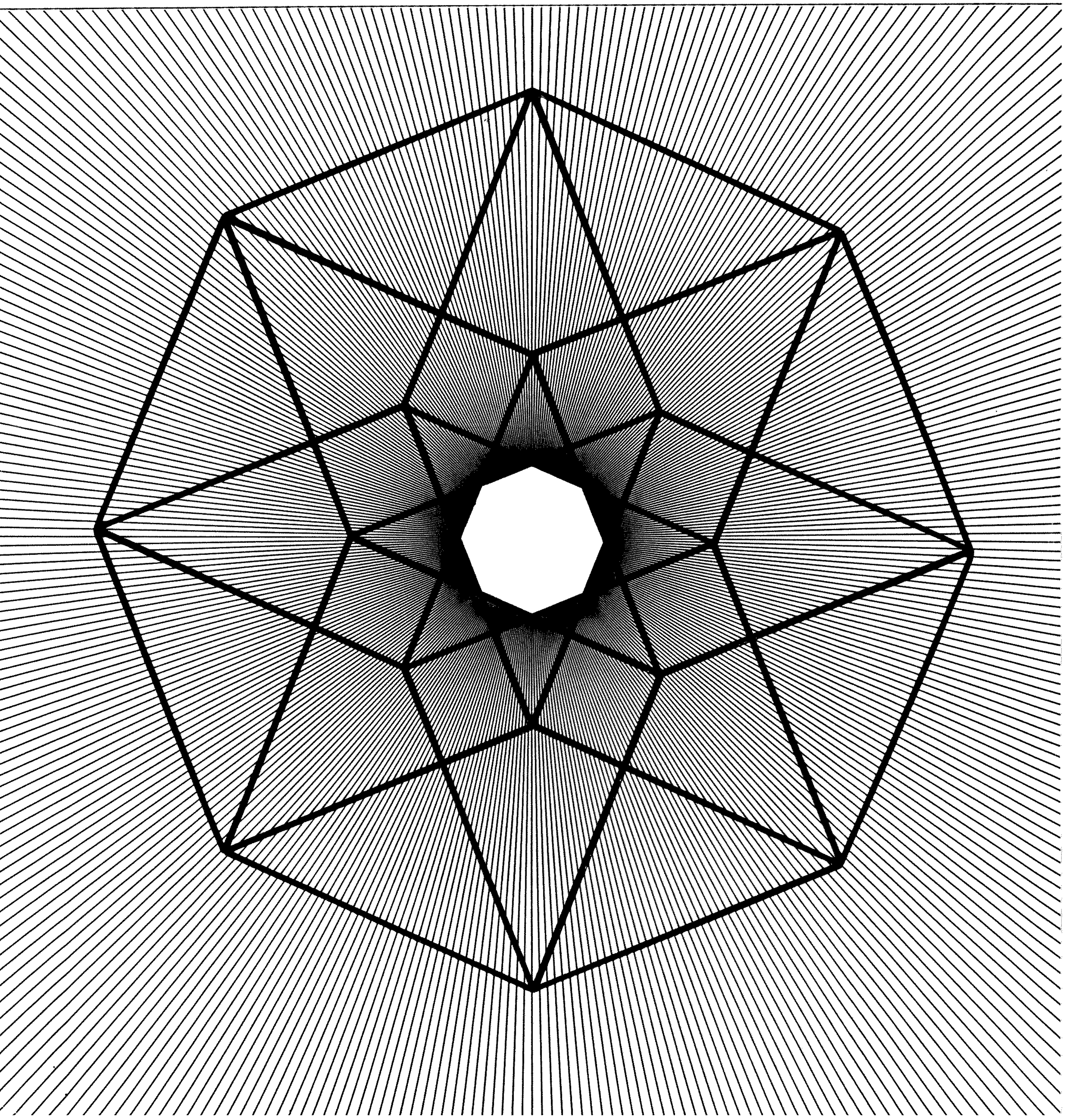
L'OUVERT

N°37 DECEMBRE 1984 JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG



NOTRE COUVERTURE :

Projection orthogonale sur un plan, de l'hypercube de $\mathbb{R}^4$. Le graphe des arêtes de ce polyèdre étant eulérien, le lecteur doit pouvoir, muni d'un crayon, parcourir tout le dessin, sans relever son outil, ni passer plusieurs fois par la même arête. Voir la bande dessinée de M. Coornaert, en p. 16.

EDITORIAL

Le bulletin de l'A.P.M.E.P. a publié dans le numéro de septembre 84 un texte intitulé *"L'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement"*. Ce texte constitue un document d'orientation pour une réflexion à l'échelle internationale, dont une phase sera un symposium qui se tiendra à Strasbourg au printemps prochain.

C'est qu'en effet, nul n'est en mesure aujourd'hui, à soi seul, de dégager les conséquences de l'utilisation répandue de l'informatique (ordinateurs, mais aussi interconnexions et banques de données); de multiples contributions sont à envisager pour ce faire. Quoi qu'il en soit, à échéance plus ou moins rapprochée dans le monde selon les situations locales, un changement radical du métier de professeur de mathématiques est prévisible. En France, on peut sans doute se risquer à avancer un délai de moins de dix ans pour un tel changement. Si l'on veut imaginer l'ampleur des transformations, on peut consulter d'une part un manuel actuel de mathématiques avec ses exercices et, d'autre part, le manuel de référence d'un logiciel de calcul symbolique : on verra que près de 3/4 des exercices actuels sont à remettre en cause. Et ceci n'est qu'un aspect. Limitons-nous à un autre exemple : la correction fréquente de masses de copies d'élèves apparaîtra certainement comme une corvée désuète, lorsque la rédaction sur papier ne sera plus le but ultime de la quasi totalité des activités proposées aux élèves.

Mais toutes les transformations à venir ne pourront se faire sans un effort très important de la communauté éducative dans son ensemble. Quel prix sommes-nous prêts à payer ? Il me semble en tout cas que l'enjeu en vaut la peine, ne serait-ce qu'en raison de la perspective de voir s'améliorer sensiblement l'image de marque de la profession qui consiste à enseigner les mathématiques.

François PLUVINAGE

Note d'information: après l'ouverture, l'an dernier, d'un Centre Informatique et Enseignement dans l'académie de Strasbourg, cette année voit démarrer un Centre d'Appui. Lui aussi est accueilli dans les locaux de l'Institut Universitaire de Technologie, à Illkirch-Graffenstaden.

SOMMAIRE

L'OUVERT

ISSN 0290-0068

. Responsable de publication : J. Lefort

. Rédaction : G. Glaeser et E. Chaney

. Correspondance à adresser à :
Bibliothèque IREM
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

. Participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 60.- F (+ port si pas en Alsace)

. Disponible à la Bibliothèque de l'IREM.

LEIBNITZ AURAIT-IL PU DECOUVRIR LA RELATIVITE ?

(Deuxième partie)

Claude COMTE

Dans la première partie de cet article (Ouvert n° 36), le problème suivant a été résolu :

Quelles sont les formes possibles de l'énergie cinétique e(x), en fonction de la vitesse x, compatibles avec le principe d'équivalence des référentiels galiléens ?

Ce principe stipule, rappelons-le, que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens ; on passe d'un référentiel galiléen à un autre par un mouvement de translation à vitesse constante.

On a trouvé deux mécaniques possibles :

(α) $$e(x) = m\,\frac{\operatorname{ch} \gamma x - 1}{\gamma^2}\ ,$$

où γ est une constante arbitraire que l'on peut poser égale à 1 par convention

(β) $$e(x) = \frac{1}{2}\, m\, x^2\ :$$

c'est la solution de Leibnitz, englobée comme une limite singulière ($\gamma \to o$) dans la généralité de la solution (α).

Ainsi que le suggérait la conclusion de la première partie, ces deux mécaniques sont celles de Newton et Leibnitz (β) et celle d'Einstein (α).

La deuxième partie de cet article va être consacrée à examiner les "*mystères de la deuxième solution*" (α), celle que Leibnitz a omise dans sa dérivation de l'énergie cinétique. Au passage, on établira l'équivalence entre la masse et l'énergie, puis on s'interrogera sur la véritable signification du paramètre ***x***, considéré jusqu'ici comme la vitesse. A cette occasion, un point de vue nouveau sera apporté sur ce concept familier ; il permettra d'affranchir la vitesse, et de ce fait aussi l'énergie et l'impulsion de l'espace et du temps !

§ 1. LES "MYSTÈRES" DE LA DEUXIÈME SOLUTION

La raison de l'omission de la solution (α) par Leibnitz est la suivante : pour établir l'expression de l'énergie cinétique, en plus des invariances galiléennes qu'il applique sans les formuler explicitement, il a recours à une loi expérimentale de Galilée sur la chute des corps, selon laquelle la vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de chute. Alors que les invariances galiléennes sont suffisantes, comme nous l'avons démontré, le recours à cette loi restreint la généralité de la solution (α) à sa limite singulière (β). Il n'est pas très satisfaisant d'établir une théorie à partir d'un ensemble de principes comportant une loi quantitative tirée de l'observation et de la mesure ; en effet, en dépit de son élégance et de sa simplicité, cette loi comporte une incertitude expérimentale, et la théorie qui s'en déduit ne peut donc qu'être approximative.

Le recours aux principes d'invariance, lorsque cela suffit pour établir la théorie, constitue certainement un fondement plus solide ; en effet, ceux-ci sont de nature purement **qualitative** : ils expriment simplement l'existence de points de vue équivalents sur le monde des phénomènes physiques.

Imaginons que Leibnitz ait reconnu dans toute son ampleur le rôle que jouent les principes d'invariance dans le problème. Qu'aurait-il découvert en étudiant les particularités de la mécanique (α) ?

a) Equivalence de la masse et de l'énergie

Il s'agit d'abord d'interpréter correctement la grandeur $\varepsilon(x)$ introduite dans la première partie comme le rapport

$$(8) \qquad \varepsilon(y) = \frac{E_y(x)}{2e(x)} \; ,$$

où $E_y(x) = e(y+x) + e(y-x) - 2e(y)$ est, pour deux corps de masse unité et de vitesses $y+x$ et $y-x$, l'énergie cinétique associée à leur mouvement relatif ; dans le référentiel en translation uniforme à la vitesse y, cette quantité devient :

$$E_o(x) = e(x) + e(-x) = 2e(x).$$

Nous avons démontré que ce rapport ε n'est fonction que de la vitesse $\mathbf{y}$ (la vitesse du système des deux masses considéré comme un tout), qu'il est lié à l'énergie cinétique par la relation $\varepsilon(x) = \lambda e(x) + 1$, où λ est une constante universelle de valeur arbitraire ($\lambda = 0$ donne la mécanique newtonienne, tandis que dans le cas α on peut poser $\lambda = 1$ sans restriction de la généralité), et que la fonction $\varepsilon(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle

(10) $$\varepsilon(y+x) + \varepsilon(y-x) = 2\varepsilon(x).\varepsilon(y).$$

Rappelons encore que l'impulsion $p(x)$ n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction $\varepsilon(x)$. :

$$p(x) = \frac{d\ \varepsilon(x)}{dx} \quad (\text{avec } \lambda = 1).$$

Après ces rappels, considérons deux corps de masses m initialement au repos ; ils acquièrent les vitesses opposées x et $-x$ sous l'effet d'un système quelconque qui leur transfère l'énergie cinétique $E_o = 2m\ e(x)$ (figure 1).

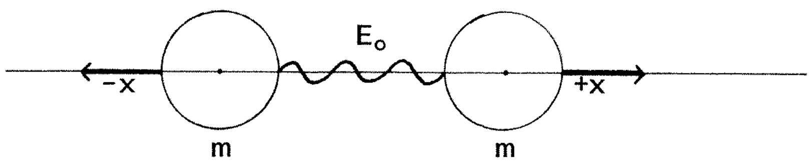


figure 1

Dans un référentiel en mouvement à la vitesse $-y$, les masses ont initialement la vitesse y, et l'énergie transférée lors de leur mise en mouvement relatif n'est autre que $E_y = mE_y(x)$. La variation de l'énergie transférée $E_y - E_o = E_o e(y)$ se présente exactement comme l'énergie cinétique d'une masse $\mu = E_o$. On vérifie aussi que lors du transfert d'énergie, l'impulsion totale du système des deux corps augmente dans le référentiel de vitesse $-y$, d'une quantité correspondant à la même masse $\mu = E_o$; en effet, dérivant l'équation fonctionnelle (9) par rapport à y, on obtient :

$$m.p(x+y) + m.p(-x+y) = 2m.p(y)\ \left[1 + e(x)\right] = 2m.p\ (y) + \mu.p(y).$$

Par conséquent, si un système absorbe (rayonne) de l'énergie en augmentant (diminuant) son mouvement interne, sa masse augmente (diminue) : $\Delta M = \Delta E$.

Il reste à régler le problème du zéro de l'énergie. Ce qui précède nous incite à étudier des processus à masses variables. Considérons deux systèmes S et s (figure 2) constitués chacun de deux masses identiques M et m respectivement.

Dans l'état initial, le mouvement interne de S est nul, tandis que les masses m ont les vitesses x et $-x$. On suppose qu'après une succession de collisions élastiques, on a deux nouveaux systèmes Σ et Σ' constitués chacun d'une masse M et d'une masse m au repos l'une par rapport à l'autre, de vitesses z et $-z$ respectivement.

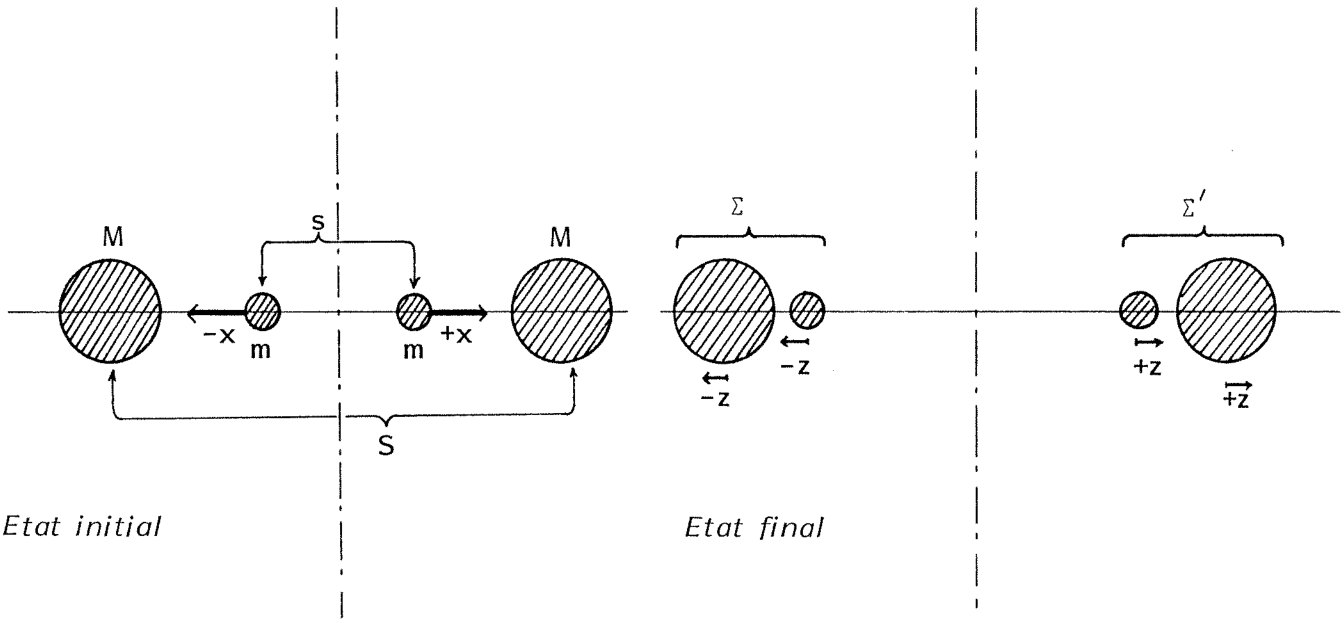


figure 2

Existe-t-il une notion d'énergie conservative dans la transmutation de S et s en Σ et Σ' ?

L'énergie conservée $f(z)$ doit satisfaire la relation :

$$2\,M\,f(o) + (2m + \mu)\,f(o) = 2\,(M + m)\,f(z)$$

où μ est l'énergie du mouvement interne de s dans l'état initial, égale à l'énergie cinétique de Σ et Σ' réunis dans l'état final :

$$\mu = 2m\,e(x) = 2(M + m)\,e(z).$$

Par substitution, on obtient donc

$$\frac{f(z)}{f(o)} = 1 + e(z)$$

et posant par convention $f(o) = 1$, il vient que

(14) $\quad f(z) \equiv \varepsilon\,(z)$

La fonction $\varepsilon(z)$ est donc la généralisation de la notion d'énergie conservée pour des processus mécaniques à masses variables. En particulier, un corps de masse M au repos à pour énergie $E = M.\varepsilon(o) = M$, susceptible d'être libérée au moins partiellement dans un processus de désintégration.

b) Existence d'objets ayant une masse nulle et une énergie finie.

Pour une particule de masse **m**, l'énergie et l'impulsion sont respectivement

$E = m.ch\ x$ et $P = m.sh\ x.$

Il est possible de faire tendre simultanément **m** vers zéro et **x** vers l'infini de telle sorte que **E** garde une valeur finie ; dans ces conditions, le rapport **P/E** tend vers l'unité.

Ainsi la propagation (instantanée !) d'objets de masse nulle est autorisée dans le cadre théorique de la 2e solution ($\lambda \neq 0$). Avec la 1ère solution ($\lambda = 0$), on n'a rien de tel.

Il est intéressant d'établir les lois de transformation de l'énergie et de l'impulsion de ces objets par changement de référentiel galiléen ; dans un référentiel en mouvement à la vitesse y dans la direction où l'objet se déplace, on a $P' = E'$ et

$$E' = \lim_{\substack{m \to 0 \\ x \to \infty}} m \frac{e^{x-y} + e^{-x+y}}{2} = e^{-y} \lim_{\substack{m \to 0 \\ x \to \infty}} \frac{m\, e^{x}}{2} = e^{-y} \lim_{\substack{m \to 0 \\ x \to \infty}} m\ ch\ x = e^{-y} E$$

et dans la direction opposée, on a évidemment $E' = e^{y} E$.

Si nous enfermons N "*photons*" d'énergie E_o dans une cavité aux parois réfléchissantes, de telle sorte qu'ils soient également répartis selon les directions avant et arrière, l'énergie captive est $N\ E_o$ dans le référentiel de la cavité, et dans un référentiel en mouvement à la vitesse **y**, elle sera :

$$E' = \frac{N}{2} E_o\ (e^{y} + e^{-y}) = N\ E_o\ ch\ y\ ;$$

autrement dit, la capture des "*photons*" augmente la masse de la cavité d'une quantité égale à leur énergie !

Cependant, nous allons dans un instant être contraints de revoir le caractère instantané de la propagation des objets de masse nulle ; en effet, **nous allons nous rendre compte qu'en dimension 3, x ne peut être la vitesse que dans le cadre de la première solution ($\lambda = 0$) !**

c) La variable x est-elle la vitesse ?

L'analyse de l'expérience décrite au § 1 (Ouvert n° 36) reste valable point par point, nous l'avons déjà dit, si les mouvements des corps ont lieu selon les trois dimensions de l'espace ; dans ce cas, on aboutit donc aux mêmes équations fonctionnelles (9), (10) et (11), dans lesquelles les variables **x** et **y** sont remplacées par des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Essayons de résoudre ces équations fonctionnelles :

i) $\lambda = 0$: la solution leibnitzienne $e(\|\vec{x}\|) = \frac{x^2}{2}$ vérifie bien l'équation (11) ; on a en effet :

$$\frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

La solution de Leibnitz est donc compatible avec l'addition vectorielle des vitesses en mécanique newtonienne.

ii) $\lambda \neq 0$: il faut résoudre l'équation fonctionnelle (10). L'analyse effectuée à une dimension mène à la solution $\varepsilon(\|\vec{x}\|) = \mathrm{ch}\,\|\vec{x}\|$.
Or, on s'aperçoit tout de suite que cette solution ne convient pas ; en effet, composant deux vitesses $\vec{x}$ et $\vec{y}$ perpendiculaires, on a :

$$\mathrm{ch}\,\|\vec{x}+\vec{y}\| = \mathrm{ch}\,\|\vec{x}-\vec{y}\| = \mathrm{ch}\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{ch}\,\|\vec{x}+\vec{y}\| + \mathrm{ch}\,\|\vec{x}-\vec{y}\| = 2\,\mathrm{ch}\sqrt{x^2+y^2} \neq 2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y.$$

Par conséquent, la deuxième solution ($\lambda \neq 0$) est incompatible avec l'addition vectorielle des vitesses, qui, rappelons-le, découle du principe d'existence de propagations instantanées en physique newtonienne.

Nous sommes donc placés devant l'alternative suivante : soit nous conservons le principe d'existence de propagations instantanées, et dans ce cas nous sommes obligés de poser $\lambda = 0$, soit nous renonçons à ce principe et dans ce cas la solution $\lambda \neq 0$ est seule autorisée. Nous devons alors résoudre un nouveau problème : **comment se composent deux vitesses de directions quelconques** ? Nous l'examinerons au § 3.

Renoncer au principe d'existence de propagations instantanées revient évidemment à admettre qu'il existe une limite supérieure **c** des vitesses de propagation... et cette vitesse limite est nécessairement, d'après le principe d'équivalence, indépendante du référentiel ! Le cas newtonien singulier s'obtient alors simplement en faisant tendre la vitesse limite **c** vers l'infini.

La détermination de la vitesse limite c est dans ces conditions un problème expérimental. Si Leibnitz était allé jusqu'au bout, l'expérience de Michelson et Morley effectuée environ deux siècles plus tard aurait servi à établir, aux erreurs expérimentales près, que la vitesse de la lumière est cette vitesse limite supérieure des propagations.

Revenons à l'étude des mouvements à une dimension. Si les vitesses s'additionnaient comme nous l'avons écrit jusqu'ici, elles pourraient devenir par composition itérée aussi grandes que l'on veut : il existe N entier tel que $N x > c$.

Pour sauver la cohérence de la théorie, nous sommes donc obligés d'**admettre que x n'est pas la vitesse v**, mais que celle-ci est une fonction de x : $v = h(x)$; et nous devons, avant de déterminer la fonction universelle $h(x)$, démontrer l'existence d'un paramètre additif de vitesse x, tel que la composition de deux vitesses $u = h(x)$ et $v = h(y)$ soit de la forme $u * v = h(x + y)$; éclaircir le sens physique de ce paramètre, et dire comment on effectue sa mesure.

§ 2. EXISTENCE D'UN PARAMÈTRE ADDITIF DE VITESSE : LA RAPIDITÉ

Dans le cas unidimensionnel, on peut remarquer qu'il existe de toute manière un paramètre de vitesse x naturellement additif, que nous conviendrons d'appeler "*rapidité*" pour le distinguer de la vitesse v elle-même. Pour le découvrir, considérons un véhicule en mouvement libre dont la propulsion depuis l'état de repos a été assurée par la répétition n fois du même mécanisme, qui peut être quelconque, pourvu qu'il se répète identiquement du point de vue du véhicule, c'est-à-dire dans le référentiel galiléen où il apparaît au repos. On peut se représenter, par exemple, une fusée qui brûlerait tout son combustible pour acquérir la vitesse supplémentaire v_1 , et serait ravitaillée en vol n fois. Le principe d'équivalence permet d'affirmer que la fusée acquiert chaque fois la même vitesse supplémentaire v_1 .

La loi de composition des vitesses est la même dans tous les référentiels galiléens en vertu de ce même principe ; la vitesse v_n acquise grâce à n ravitaillements est donc $v_n = v_1 * v_1 * v_1 * \dots * v_1$ (n fois), expression dans laquelle on peut omettre les parenthèses, puisque, par définition, on obtient la même vitesse finale v_n en composant dans un ordre quelconque tous les v_{n_i} tels que $\sum_i n_i = n$: la composition des vitesses est une loi associative et commutative **à une dimension** *.

---

* ; c'est une loi de groupe par suite des invariances galiléennes.

Par conséquent, le paramètre additif **x** que nous cherchons n'est rien d'autre, à un facteur multiplicatif près, que le nombre **n** ; **la rapidité est donc proportionnelle au nombre d'applications d'un mécanisme identique de propulsion : cette grandeur est mesurable par simple comptage.** Cette propriété la distingue nettement de la vitesse ; en effet, **la mesure de la rapidité x peut ainsi être effectuée indépendamment de toute mesure de distance et de durée, et il en est aussitôt de même de l'énergie $\varepsilon(x)$ et de l'impulsion $p(x)$.**

Remarque :

La définition de la rapidité est étendue des valeurs entières aux valeurs rationnelles en faisant l'hypothèse que toute vitesse **v** peut être atteinte en partant de l'état de repos, par composition itérée d'une même vitesse **u** plus petite.

Ainsi, nous sommes assurés de l'existence d'une fonction $h(x)$ définie pour les valeurs rationnelles de la variable, telle que si $u = h(x)$ et $v = h(y)$, l'on ait $u * v = h(x + y)$. Lorsque la fonction $h(x)$ est continue, notre conclusion est vraie pour toutes les valeurs réelles aussi.

Nous retrouvons ainsi par un "*procédé de physicien*" un théorème établi à l'aide de mathématiques élaborées dans l'étude générale des groupes de Lie : il existe un paramètre additif pour tout groupe continu à un paramètre, différentiable et simplement connexe.

§ 3. LOI DE COMPOSITION DES VITESSES, ET NOTION DE VITESSE DYNAMIQUE

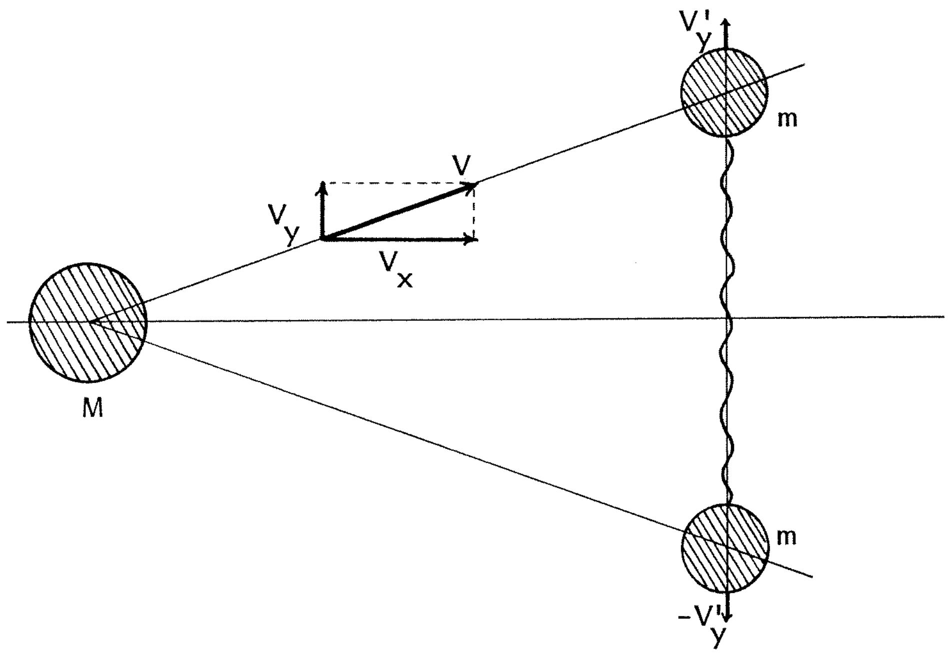
Nous avons établi dans la première partie (Ouvert n° 36, p. 11), que l'impulsion est, en valeur absolue, la dérivée de l'énergie par rapport à la vitesse. Les considérations précédentes, et le passage en dimension 3 conduisent à formuler ce résultat différemment : l'impulsion est, en valeur absolue, égale à la dérivée de l'énergie **par rapport à la rapidité**, dans la direction du mouvement :

$$p(z) = \frac{d\,\varepsilon(z)}{dz} .$$

En trois dimensions, l'impulsion **p** devient un vecteur, dont les trois composantes sont des grandeurs conservées. Nous allons établir la loi de composition des vitesses et déterminer la fonction inconnue $h(z)$ à partir de la condition suivante : la vitesse $\vec{v}$ et l'impulsion $\vec{p}$ sont sont des vecteurs colinéaires.

Considérons l'expérience suivante (figure 3) : une particule de masse M se désintègre en deux fragments identiques de masse **m** telle que $\mu = M - 2m > 0$. Dans le référentiel où la particule est initialement au repos (C), les deux fragments se déplacent dans une direction perpendiculaire à la trajectoire de la particule dans le référentiel du laboratoire (L).

figure 3



Soient $v_x = h(x)$ et $v_y = h(y)$ les composantes de la vitesse d'un fragment et $v = h(z)$ le module de cette vitesse, mesurés dans le référentiel du laboratoire. La conservation de l'énergie s'écrit dans ce référentiel :

$$M\ \varepsilon(x) = 2\ m\,\varepsilon\ (z)$$

La composante P_x de l'impulsion d'un fragment dans la direction horizontale est donnée par la relation de conservation :

$$M\ p(x) = 2\ P_x$$

Le quotient des deux précédentes relations donne l'expression suivante :

$$P_x = m\,\frac{p(x)}{\varepsilon(x)}\ .\ \varepsilon\ (z)$$

La composante verticale P_y de l'impulsion d'un fragment doit prendre la même forme à cause de l'**isotropie** de l'espace :

$$P_y = m\,\frac{p(y)}{\varepsilon(y)}\ .\ \varepsilon\ (z)$$

Le module **P** de l'impulsion d'un fragment peut être écrit sous une forme analogue :

$$P = m\ p(z) = m\,\frac{p(z)}{\varepsilon\ (z)}\quad \varepsilon\ (z).$$

Comme la géométrie est euclidienne dans un référentiel galiléen, on a les relations :

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 \quad \text{et} \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2.$$

Par conséquent, les relations :

$$\frac{p^2}{\varepsilon^2}(z) = \frac{p^2}{\varepsilon^2}(x) + \frac{p^2}{\varepsilon^2}(y) \text{ et } h^2(z) = h^2(x) + h^2(y)$$

doivent être compatibles quelles que soient les rapidités x et y. Posant $a = h^2(x)$, $b = h^2(y)$, on doit avoir :

$$\frac{p^2}{\varepsilon^2}(a+b) = \frac{p^2}{\varepsilon^2}(a) + \frac{p^2}{\varepsilon^2}(b)$$

quels que soient a et b. Cette condition ne peut être satisfaite que si les fonctions $\frac{p^2}{\varepsilon^2}(z)$ et $h^2(z)$ sont proportionnelles, et finalement, nous obtenons

(15) $$h(z) = c\,\frac{p(z)}{\varepsilon(z)} \quad \text{et} \quad \vec{V} = c\,\frac{\vec{p}}{\varepsilon}.$$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas substitué à p et ε leurs expressions déterminées par le principe d'équivalence ; il est important de remarquer que la formule (15) découle seulement de l'isotropie de l'espace. Si maintenant, nous effectuons la substitution, nous aboutissons à :

(16) $$v = h(z) = c\,\frac{p(z)}{\varepsilon(z)} = c \operatorname{th} z$$

et à la loi de composition des vitesses colinéaires :

$$v_1 * v_2 = c \operatorname{th}(x_1 + x_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$$

et on voit que c est la vitesse limité des propagations matérielles, invariante par changement de référentiel galiléen.

Remarque :

Rien n'empêche de considérer la relation (15), écrite sous la forme $\vec{V} = c\,\frac{\vec{p}}{\varepsilon}$ comme une **définition de la vitesse**, en fonction de l'énergie et de l'impulsion, grandeurs qui, nous l'avons vu, peuvent être mesurées indépendamment de toute mesure de distance et de durée. C'est là une conception nouvelle et inédite de la vitesse. Nous proposons d'appeler cette quantité **vitesse dynamique**, pour la distinguer de la conception habituelle de la vitesse définie comme le rapport de la distance parcourue au temps de parcours, que nous conviendrons d'appeler **vitesse cinématique**.

L'égalité des vitesses dynamique et cinématique découle de l'isotropie de l'espace et du caractère euclidien de la géométrie.

§ 4. CONCLUSION

Rassemblons nos résultats. En multipliant les formules obtenues par des constantes, on arrive aux formules usuelles de la mécanique relativiste :

$$v = c \text{ th } x,\ E = Mc^2 \text{ ch } x = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\ ,\ P = M\,c \text{ sh } x = \frac{Mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On peut aussi écrire la transformation de Lorentz pour l'énergie-impulsion. Passant à un référentiel en mouvement avec la rapidité $-y$, la rapidité d'une particule est augmentée de y, son énergie et son impulsion deviennent, en utilisant les formules d'addition hyperboliques :

$$\begin{aligned} E' &= M\,c^2 \text{ ch}(x + y) = E \text{ ch } y + cP \text{ sh } y \\ P' &= M\,c \text{ sh}(x + y) = \frac{1}{c} E \text{ sh } y + P \text{ ch } y \end{aligned} \tag{17}$$

qui sont les mêmes que les formules de la transformation de Lorentz de l'espace-temps : il suffit de remplacer l'énergie E par le temps t, l'impulsion P par la coordonnée spatiale r.

Le lecteur remarquera la concision des formules lorsqu'on introduit, au lieu de la vitesse v, la rapidité x. Cette simplification n'est pas l'effet d'un heureux hasard, mais a des raisons physiques très profondes. En effet, nous avons constaté que dans une remise en ordre logique de la théorie, qui ne coïncide pas avec celui de sa découverte, le concept de rapidité s'introduit **avant** celui de vitesse.

La rapidité est un nombre sans dimension ; c'est "*l'angle*" de la transformation de Lorentz. La mesure de cette grandeur s'effectue indépendamment de toute mesure d'espace-temps*; comme nous l'avons vu, il suffit de savoir **compter** le nombre n d'applications identiques d'un même mécanisme de propulsion. Il s'ensuit aussitôt que la mesure de l'énergie et de l'impulsion doit également pouvoir être effectuée indépendamment de toute mesure d'espace-temps. Nous aboutissons ainsi à la conclusion originale que **la dynamique (théorie des intéractions dynamiques : collisions-désintégrations, etc...) jouit d'une certaine autonomie par rapport à la cinématique (description des mouvements des corps dans l'espace).**

Nous avons ainsi réalisé le projet d'établir directement les lois de la dynamique relativiste, laissant provisoirement de côté l'étude des propriétés de l'espace-temps (dans un prochain article, nous aborderons l'espace-temps avec un regard nouveau, à la lumière de ce que nous avons appris par l'étude de la dynamique).

* Une autre définition de la rapidité, en termes d'espace et de temps est donnée par J.M. LEVY-LEBLOND et J.P. PROVOST dans Am. J. Phys. 47, 1045 (1979) et 48, 345 (1980).

Le souhait que ce projet se réalise a été exprimé ainsi par J.-M. Levy-Leblond :

"S'il faut tirer une leçon de la pratique actuelle de la physique relativiste, c'est l'importance primordiale des concepts d'énergie et d'impulsion. C'est la dynamique relativiste, bien plus que la cinématique correspondante, qui sont à la base de la plupart des applications de la théorie : accélérateurs de particules, collisions à haute énergie, etc... Afin de pouvoir utiliser cette abondante matière comme base ou exemples dans notre enseignement de la théorie de la relativité, il serait de la plus grande utilisé de disposer d'une approche directe de la dynamique relativiste, d'où les propriétés de l'espace-temps seraient ensuite déduites..." (référence 6).

Ajoutons qu'à côté de cet aspect pédagogique, il y a encore d'autres avantages d'un point de vue fondamental :

i) Si l'on se propose de trouver les lois qui régissent un processus de collision ou de désintégration survenant **en un point et à un instant donnés**, il n'est nullement nécessaire de faire intervenir toutes les invariances galiléennes. Relisant cet article, on constate en effet que l'homogénéité de l'espace et l'uniformité du temps ne sont mises en oeuvre à aucun moment. Par conséquent, les lois que nous avons trouvées restent valables dans la situation où toutes les invariances galiléennes sont réalisées sauf les deux dernières ; dans ce cas, on pourrait avoir une variation spatiale et temporelle des constantes qui s'introduisent dans ces lois (cette question sera approfondie dans un prochain article). Cette situation, qui constitue une généralisation très naturelle, est en fait **la plus réaliste** que l'on puisse imaginer : à cause de l'existence des champs de gravitation dans la nature, on peut tout au plus réaliser un référentiel galiléen **localement** ; par exemple en se plaçant à l'intérieur d'un vaisseau spatial en mouvement libre dans le champ de gravitation, on élimine localement l'influence de ce champ. La prise de conscience de cette circonstance est l'un des facteurs qui ont incité Einstein à créer la théorie de la Relativité générale (référence 7). L'approche directe de la dynamique relativiste a donc l'avantage de nous placer dès le départ dans la situation générale.

ii) Une abondante littérature a été consacrée ces dernières années, à l'étude des tachyons, particules qui se déplaceraient à une vitesse supérieure à la

Réf. 6. J.M. LEVY-LEBLOND : What is so "special" about relativity ? (International Colloquim on Group-Theoretical Methods in Physics, Nijmegen, June 1975, Springer Editor)

Réf. 7. EINSTEIN et INFELD : L'évolution des idées en Physique.

vitesse de la lumière. Cependant, du point de vue de la dynamique relativiste, l'illusion de leur existence possible s'effondre immédiatement. En effet, pour que l'existence de ces particules soit tangible, il faut qu'elles puissent interagir avec les objets de notre monde. Elles doivent obéir aux lois de conservation qui régissent toutes les interactions ; dès lors, leur rapidité x est nécessairement un nombre réel situé entre zéro et l'infini, et leur vitesse $v = c \text{ th } x$ ne peut jamais dépasser la vitesse maximale des propagations c !

iii) La dynamique relativiste apparaît comme la solution du problème suivant :

"Quelle est la forme la plus générale d'une mécanique compatible avec les invariances galiléennes ?"

Cette forme est unique au choix d'une constante universelle près, la vitesse maximale c des propagations, qui doit être mesurée expérimentalement.

Ainsi les invariances galiléennes, qui expriment l'existence de points de vue équivalents sur le monde des phénomènes physiques, **suffisent** pour déterminer les lois fondamentales de la mécanique. On peut dire qu'il existe un groupe implicitement défini par l'énoncé des invariances galiléennes, et que nous n'avons rien fait de plus que de mettre au jour sa forme mathématique explicite, le groupe de Lorentz, défini comme l'ensemble des transformations de la forme (17).

Il est remarquable qu'une description précise des objets qui interagissent n'est nullement requise pour établir les lois de la mécanique ; ces objets peuvent être quelconques (corps macroscopiques, particules élémentaires, solitons, etc...)

Il apparaît ainsi nettement que la relativité n'est pas avant tout une théorie de l'espace-temps, comme on le croit communément, ni même une théorie sur la structure de la matière, mais **une théorie des invariances fondamentales.**

EPILOGUE

Le lecteur l'aura compris : la référence à Leibnitz est un jeu de l'esprit dépourvu de prétention historique, destiné à stimuler l'intérêt. On a fait jouer à Leibnitz le rôle d'un esprit lucide, frappé par l'importance d'une idée simple et résolu à en examiner les conséquences : on ne peut énoncer une loi de la nature sans énoncer aussi les conditions dans lesquelles elle s'applique (les variations autorisées des conditions expérimentales correspondent en fait aux *"invariances galiléennes"* dans le cas des lois de la mécanique). La prise de conscience du rôle que jouent les invariances en physique a nécéssité une longue maturation ; elle a fait un bond en avant lors du développement de la mécanique quantique ; et cet article montre qu'on n'est pas encore au bout du chemin !

ERRARE MAGISTERUM EST ?

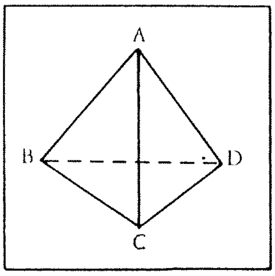
G. GLAESER

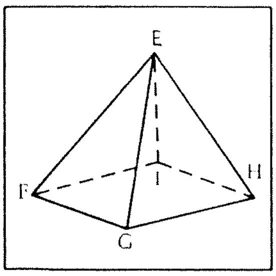
La revue allemande Mathematik Lehren (n° 5, août 1984), publie l'information suivante :

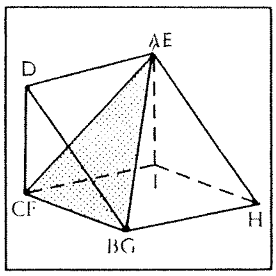
Au cours d'un examen à choix multiples, proposé en Floride, plus de 15000 copies auraient été incorrectement notées.

Voici l'énoncé de la question litigieuse :

"On considère deux pyramides dont toutes les arêtes ont la même longueur a. L'une est un tétraèdre régulier, l'autre une pyramide régulière à base carrée.
On recolle les deux pyramides selon une de leurs faces latérales en forme de triangle équilatéral"







On obtient ainsi un polyèdre dont on demande le nombre de faces.

Les correcteurs ont collé un zéro à toutes celles et tous ceux qui n'ont pas répondu 7.

Un candidat de 17 ans, Daniel LOWEN, originaire de Coca Beach, a protesté. Partagez-vous son indignation ? Pourquoi ?

PROJET DE VIDEO-CLIP SUR L'HYPERCUBE

Michel COORNAERT

1

à suivre →

Ces 73 dessins, réalisés à l'aide d'un micro-ordinateur Canon X-07 équipé d'un traceur X-710, sont extraits d'un scénario de vidéo-clip sur l'Hypercube.

L'hypercube est le polyèdre ayant pour sommets les 16 points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ dans l'espace euclidien R^4. Il possède 32 arêtes, 24 faces (des carrés) et 8 hyper-faces (des cubes). Le graphe des arêtes de l'hypercube a la propriété remarquable d'être eulérien : on peut le parcourir d'une façon continue sans repasser deux fois par la même arête. Cette propriété a été exploitée dans le programme de tracé.

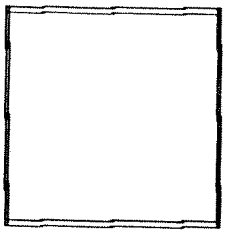
Pour déformer l'hypercube, on lui applique une famille continue (R_t) d'éléments de SO(4) avec $R_0 = \mathrm{Id}$. Les images sont obtenues par projection orthogonale sur le plan x0y.

Notez la symétrie octogonale obtenue dans l'image n° 37. Le dessin fait apparaître un octogone régulier à l'intérieur duquel se trouve un octagramme (ce qui s'obtient en joignant de trois en trois les sommets d'un octogone régulier), ainsi que huit carrés s'appuyant chacun sur l'un des côtés de l'octogone et l'un des côtés de l'octogramme. Cette figure se trouve par exemple dans le livre de H.S.M. COXETER : *"An introduction to geometry"*, p. 401.

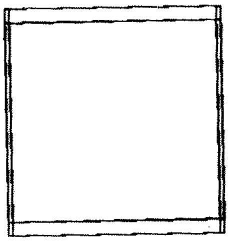
Le vidéo-clip (en cours de réalisation) sera accompagné, en son quadriphonique de la célèbre composition des quatre ex-Beatles : "*Across the Four-dimensional Universe*".

En attendant, l'Ouvert vous propose de découper avec soin les 73 dessins puis de les agrafer après les avoir empilés dans le bon ordre. En les faisant alors défiler le plus régulièrement possible, vous verrez s'animer l'Hypercube.

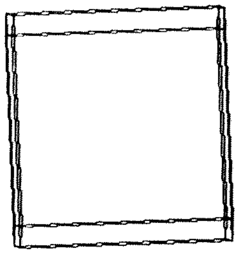
2



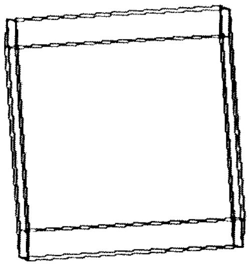
3



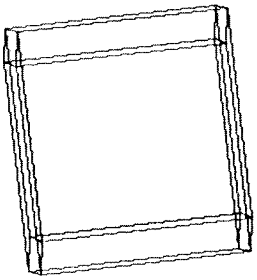
4



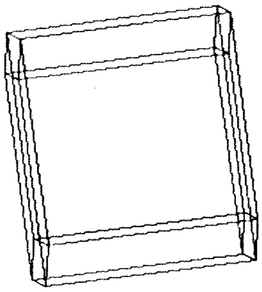
5



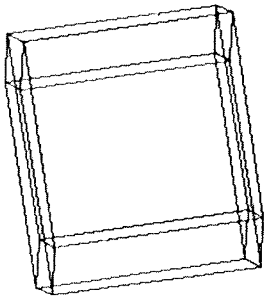
6



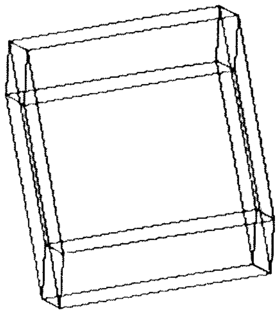
7



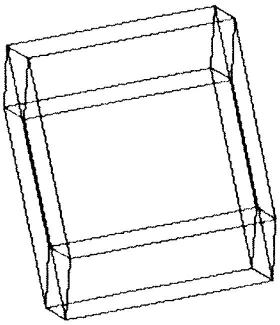
8



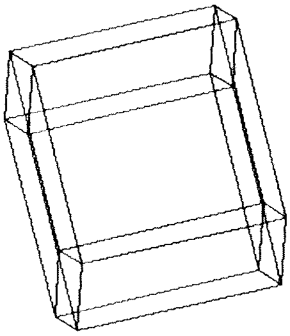
9



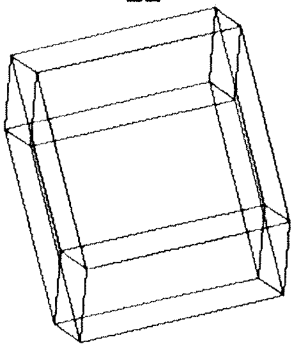
10



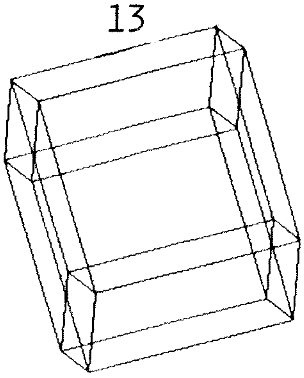
11



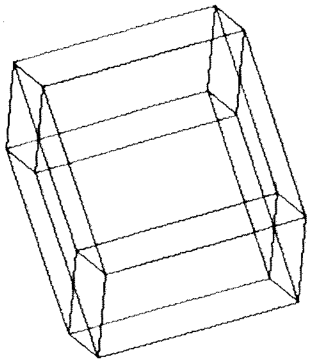
12



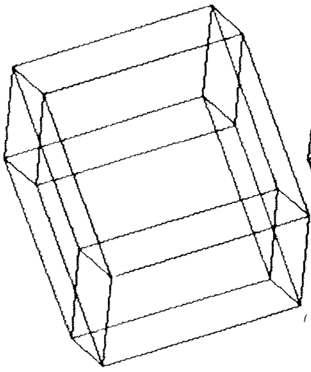
13



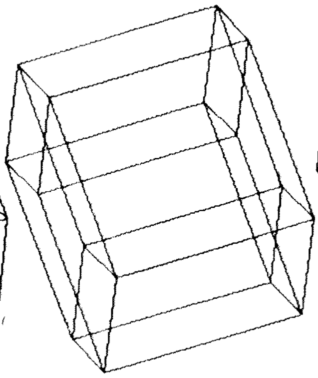
14



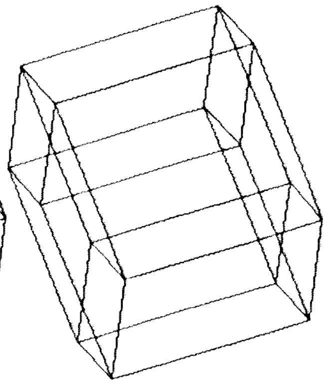
15



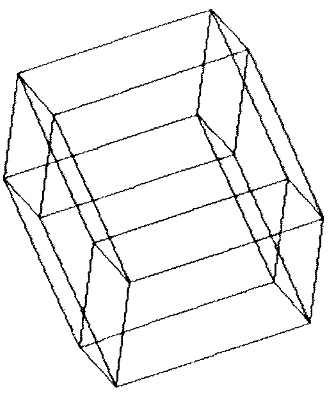
16



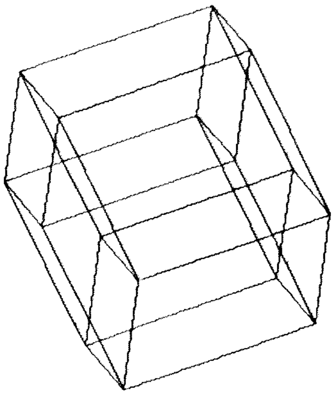
17



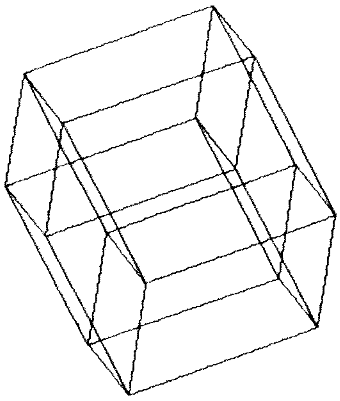
18



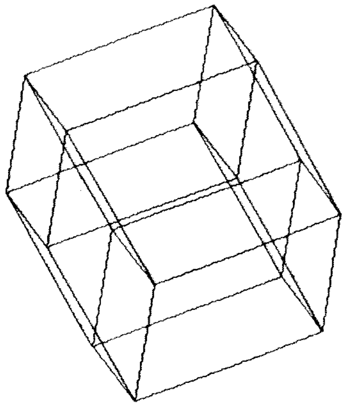
19



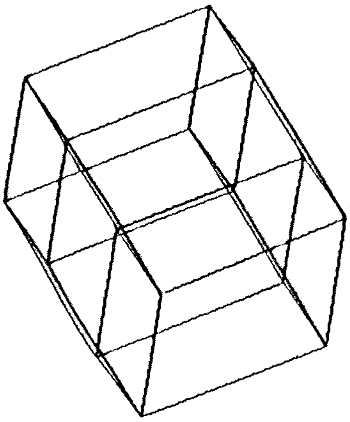
20



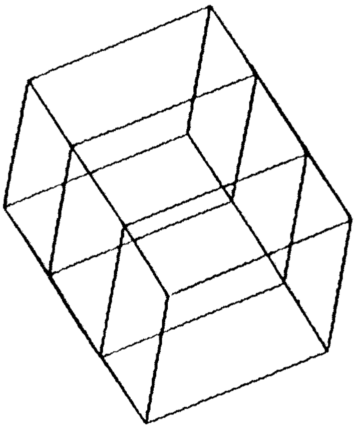
21



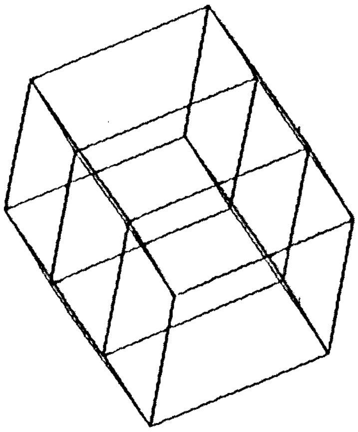
22



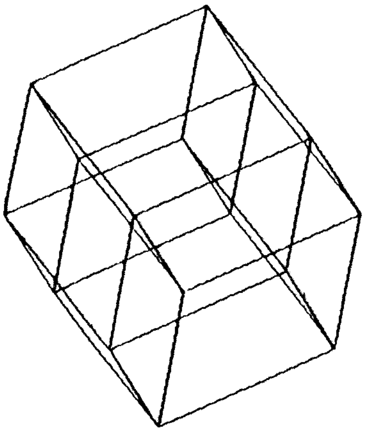
23



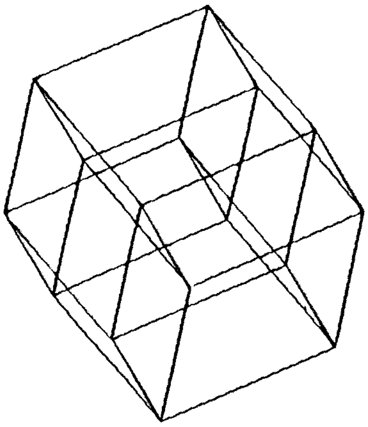
24



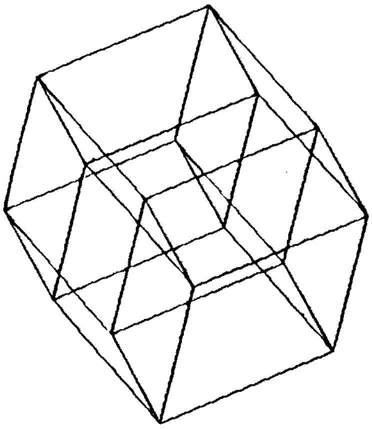
25



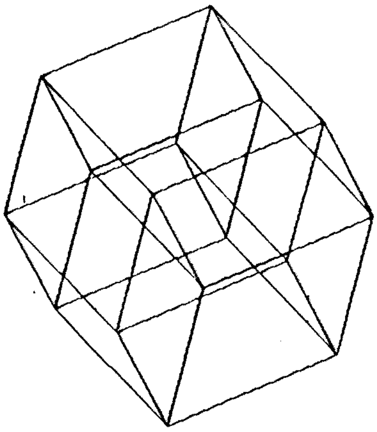
26



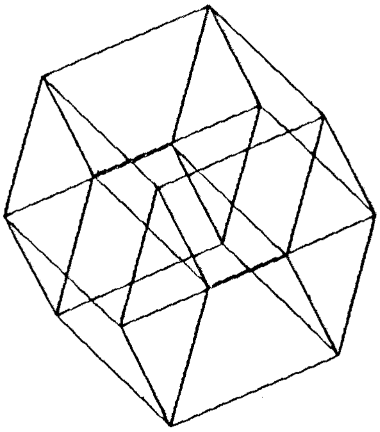
27



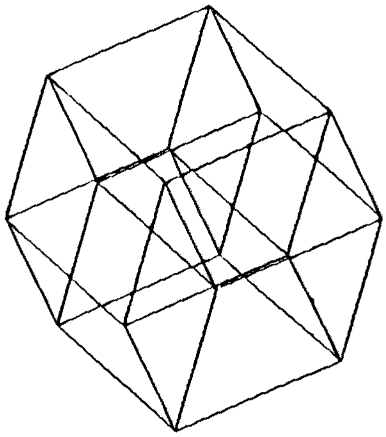
28



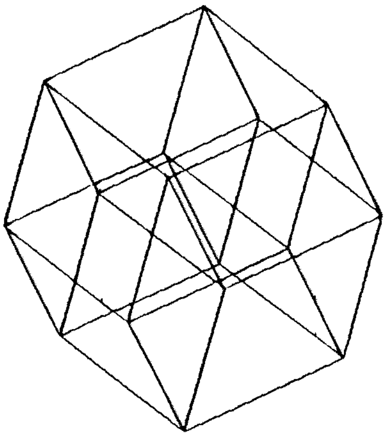
29



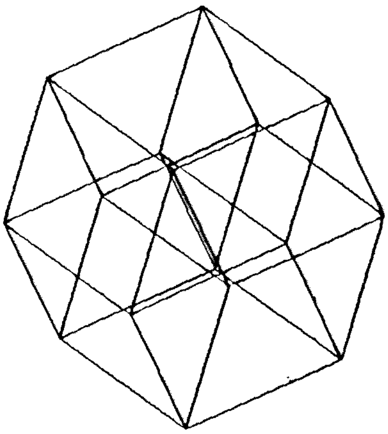
30



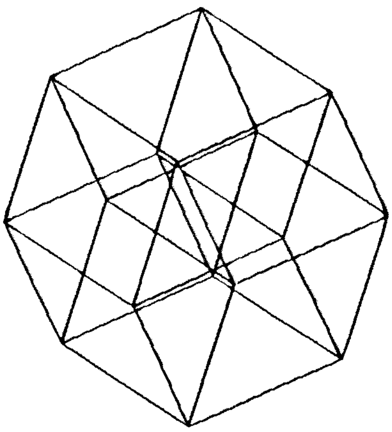
31



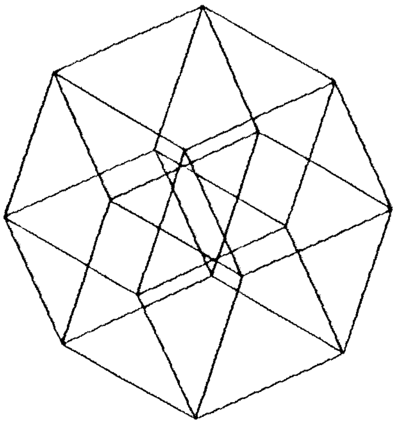
32



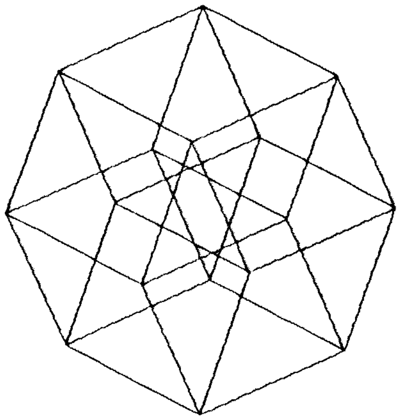
33



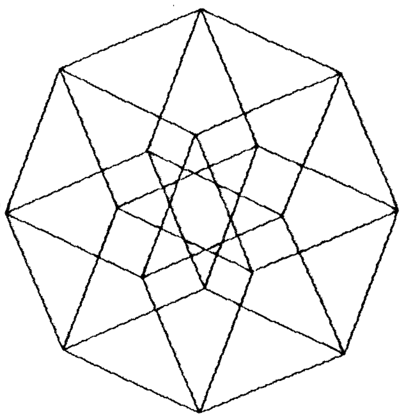
34



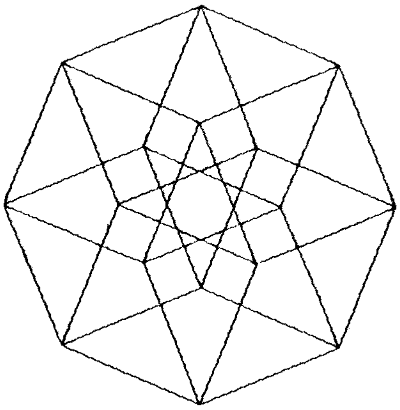
35



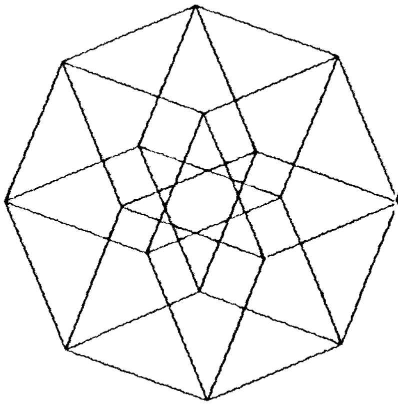
36



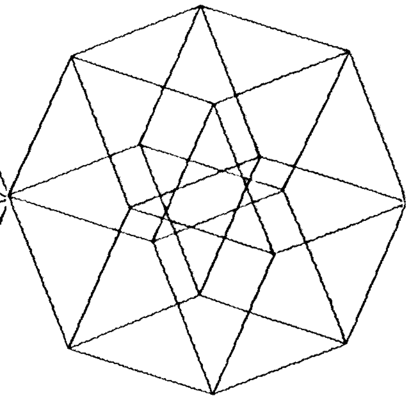
37



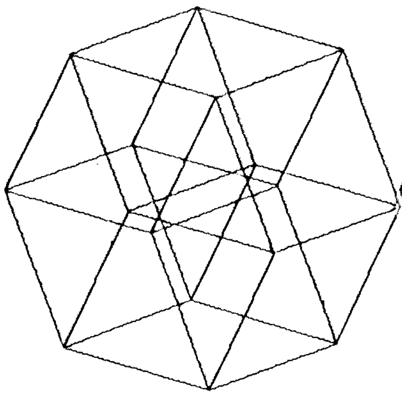
38



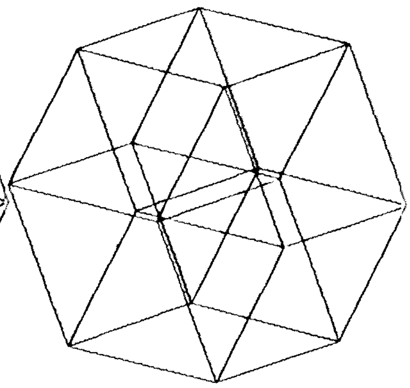
39



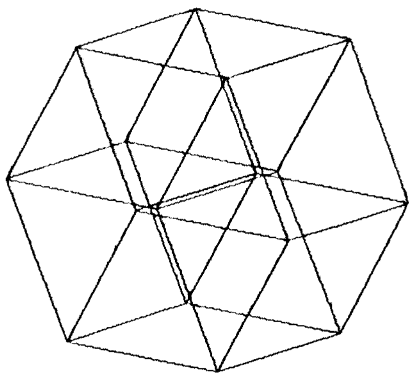
40



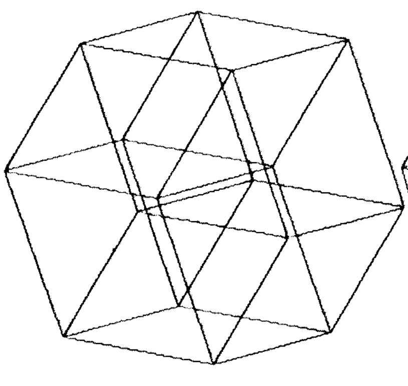
41



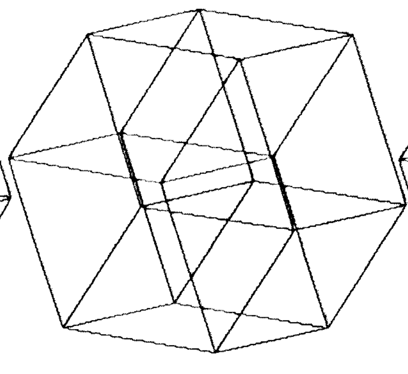
42



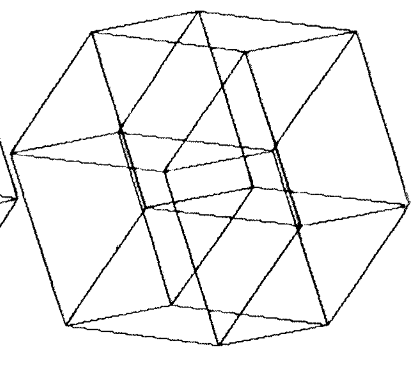
43



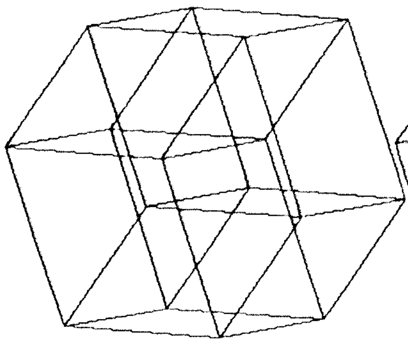
44



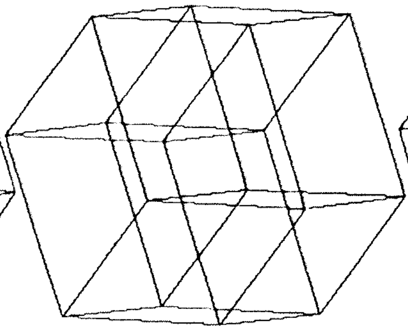
45



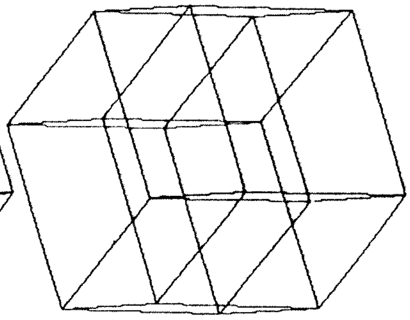
46



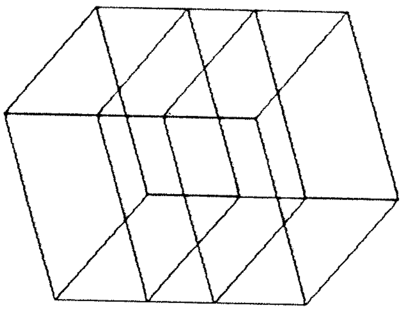
47



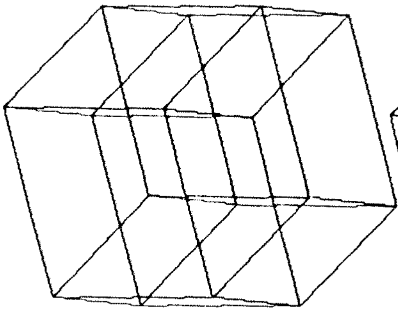
48



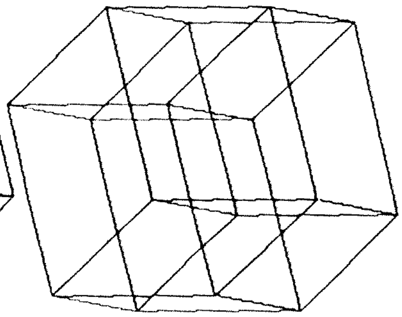
49



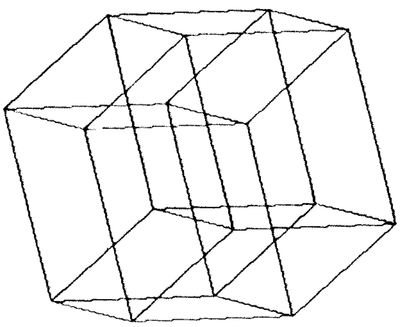
50



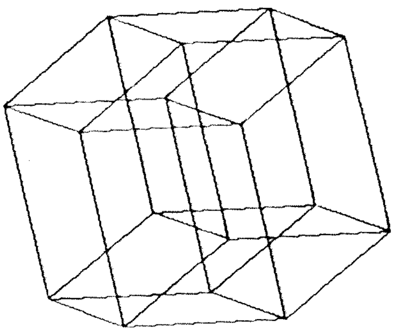
51



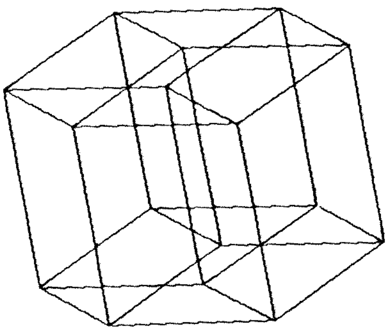
52



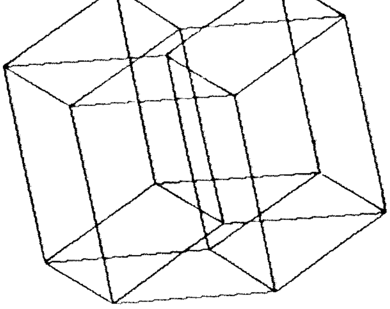
53



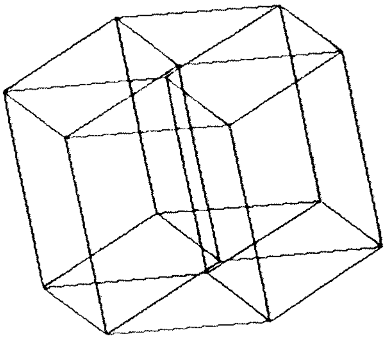
54



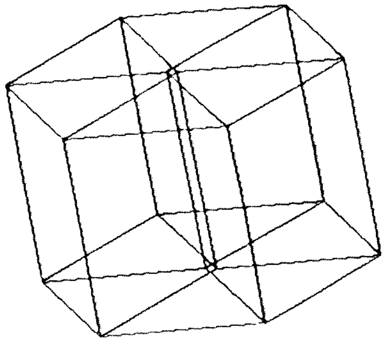
55



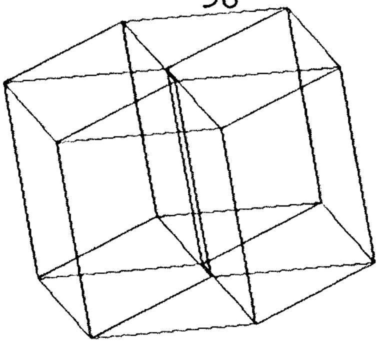
56



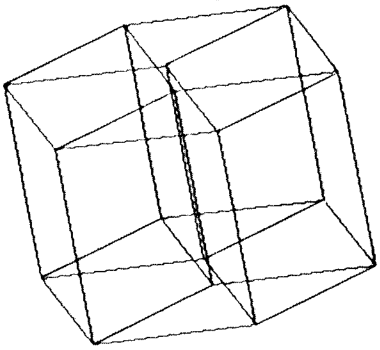
57



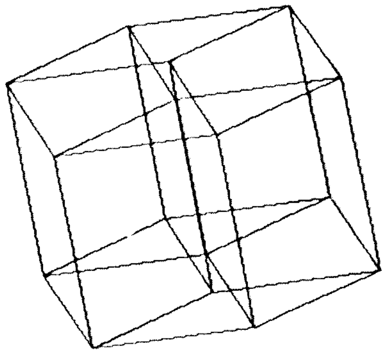
58



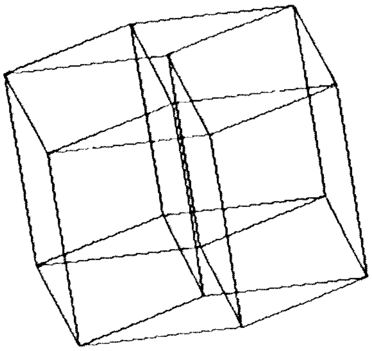
59



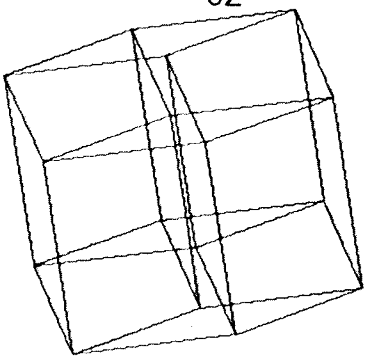
60



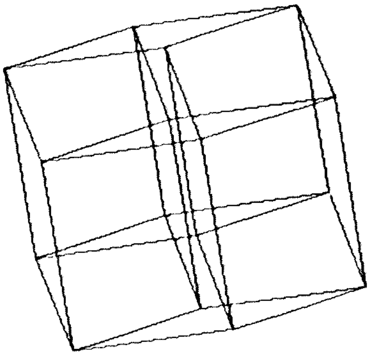
61



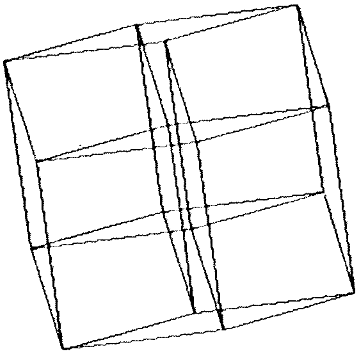
62



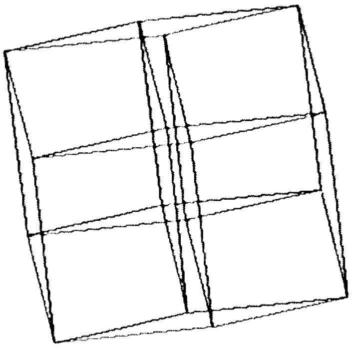
63



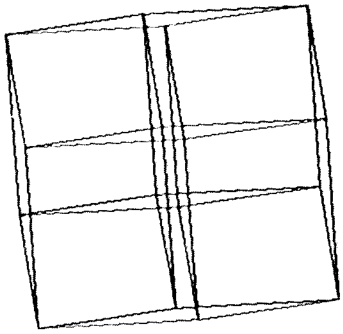
64



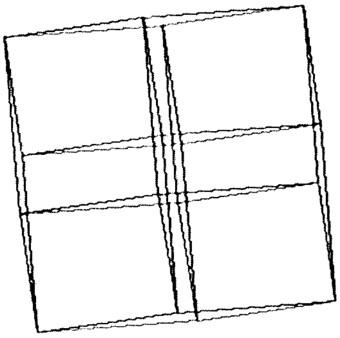
65



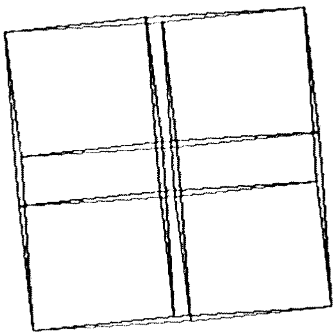
66



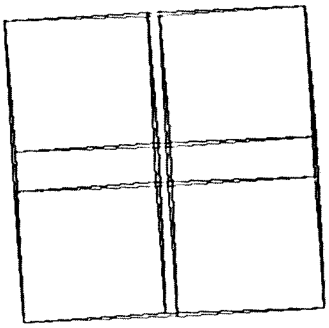
67



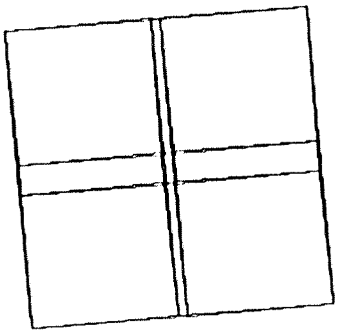
68



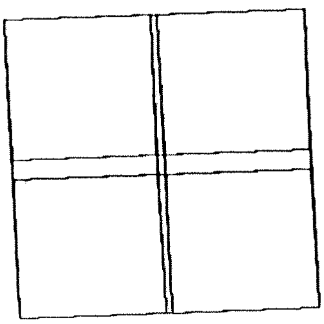
69



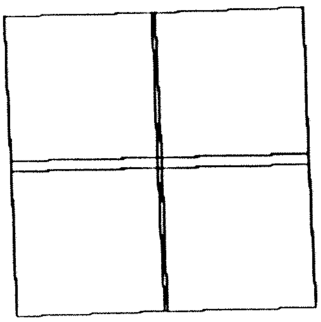
70



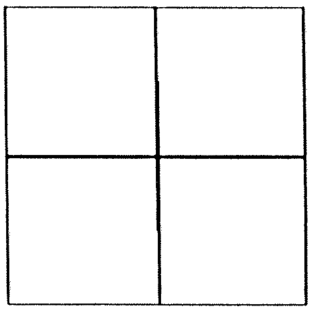
71



72



73



SUR LE PROBLEME DES TREIZE BOULES

E. EHRHART

En 1952, Van der Waerden et Schütte ont démontré (dix pages dans les Mathematische Annalen) qu'on ne peut entourer une boule de 13 boules de sa taille qui la touchent *. Le problème était ouvert depuis Newton, mais naturellement on savait alors déjà qu'on peut le faire avec 12 boules.

Nous allons retrouver *"naïvement"* la solution *"régulière"* pour 12 boules et montrer élémentairement l'existence d'une infinité d'autres solutions irrégulières. Le tout sans calcul.

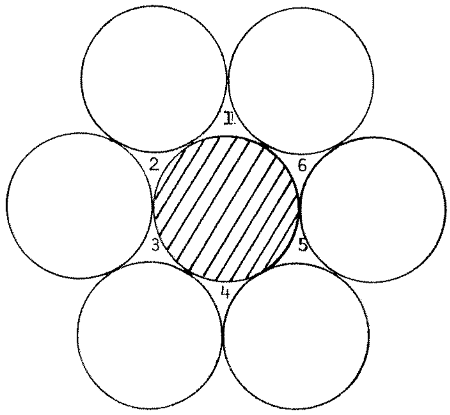
Dans la suite il sera sous-entendu que toutes les boules intervenantes ont même rayon r. Pour réaliser matériellement l'entourage régulier, on peut prendre des billes, que l'on maintient sur un support par une goutte de colle et par une ceinture scotch.

I. Entourage rigide

Posons sur un plan horizontal une boule et six boules qui la touchent. On formera ainsi six trous 1, 2, 3, 4, 5, 6. Plaçons ensuite trois boules sur les trous 1, 3, 5. On montre facilement que chacune d'elles touche les deux autres. Imaginons maintenant qu'on appuie sur les trous 4, 6, 2 un triplet de boules symétrique du précédent par rapport au centre de la boule centrale. On aura bien alors 12 boules touchant la treizième.

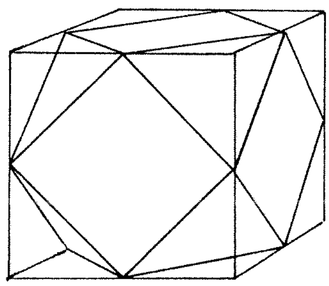
---

* Voir la couverture de l'Ouvert n° 36 (Sept. 84) et l'article d'E. Chaney : *"Comment ranger des balles de Ping-Pong"*, p. 32.



Leurs centres sont les sommets d'un polyèdre semi-régulier, dont les faces sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux et dont les 24 arêtes sont égales à 2r.

Ce polyèdre est donc le **cube tronqué**, dont la figure ci-dessous montre les arêtes apparentes. Ses sommets sont les milieux des arêtes du cube (c). (C'est le fameux cuboctaèdre d'Archimède, familier aux cristallographes.)

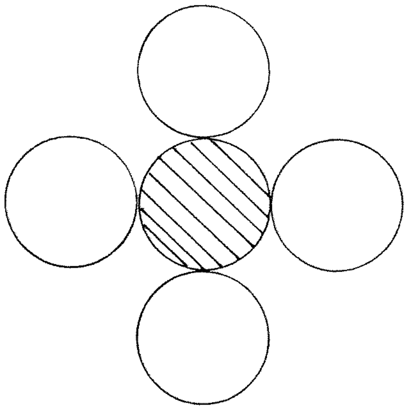


Remarques :

1) En adjoignant de même à tout cube du réseau de base (c) ses treize sphères, on voit qu'on obtient un **empilement régulier de sphères**, dont chacune est tangente à ses 12 voisines.

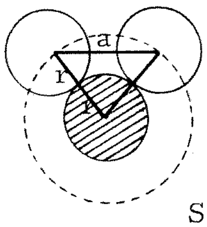
2) En appuyant le triplet inférieur de boules sur les mêmes trous que le triplet supérieur, on obtient un **second entourage rigide.**

3) Si dans la figure ci-dessous (4 boules en croix touchant la centrale) on appuie dans les interstices 4 boules en haut et 4 boules en bas, on obtient aussi un entourage rigide convenable de 12 boules. **Il est identique à l'entourage régulier** vu plus haut. Ceci s'observe aisément sur le cuboctaèdre d'Archimède, où apparaissent les symétries d'ordre 4 et celles d'ordre 6.



II. Entourage déformable

On sait que l'arête a d'un icosaèdre régulier (12 sommets, 20 faces triangulaires, 30 arêtes) est plus longue que le rayon 2r de sa sphère circonscrite (S).



Les 12 boules de rayon r centrées en ses sommets constituent donc un entourage convenable de la boule centrale. Les boules périphériques étant disjointes, on obtient encore un entourage convenable en déplaçant légèrement leurs centres sur (S). **Il existe donc une infinité d'entourages irréguliers convenables.** Ils dépendent de $12 \times 2 = 24$ paramètres !

Remarques :

1) Pour la réalisation matérielle on prendra cette fois des balles de ping-pong. On marquera sur l'une d'elles les sommets d'un icosaèdre régulier inscrit, et on collera aux marques les 12 balles périphériques.

2) Nous avons montré qu'il existe un entourage déformable convenable constitué par deux couronnes de 5 boules, plus une boule de part et d'autre. **Mais il entre dans la famille précédente.**

Sur l'empilement aléatoire.

Il y a une vingtaine d'années, on a fait à Strasbourg, au laboratoire de Mécanique des Fluides, l'expérience suivante :

On remplit un gros tuyau d'un grand nombre de billes de verre égales, que l'on tasse par secousses rythmiques. En répétant l'expérience plusieurs fois dans les mêmes conditions (même nombre de billes), on constate :

1) le niveau de l'empilement est remarquablement stable ;

2) la vitesse d'écoulement d'eau à travers l'empilement varie de manière appréciable d'une expérience à l'autre.

Conclusion (prévisible ?) : **Dans un empilement aléatoire de sphères égales leur disposition varie, malgré une densité sensiblement constante .**

Rappelons que les densités approchées des empilements aléatoire et régulier sont respectivement 0,63 et 0,74 et que, curieusement, la question de l'empilement le plus dense reste ouverte.

NUMERATION EN BASE TROIS PRIME

Hommage à Charles CROS (1842-1888)

J. LEFORT

§ 1. INTRODUCTION

La préparation d'un cours relève souvent du hasard. Je cherchais des textes plus ou moins historiques pour étoffer l'option d'arithmétique de Terminale A2. J'avais certes trouvé bien des documents chez G. Ifrah ou chez G. Guitel (*) sur les notions de numération et de base. J'en avais trouvé d'autres dans des revues d'assyriologie et d'égyptologie. Et puis un jour, à propos d'une discussion sur la couleur et les techniques de reconstitutions de la couleur, on me signale que Ch. CROS, dès 1869 avait donné un procédé de photographie en couleur utilisant trois objectifs munis de filtres colorés différents. Par curiosité je me reporte aux oeuvres complètes (**) de ce poète et scientifique dont le français moyen ne connaît que "*le hareng saur*" (sec, sec, sec !) et le prix Ch. CROS récompensant les meilleurs disques. Je tombe alors sur de véritables bijoux :

Je laisserai à plus compétent que moi le soin de disserter sur "*le coffret de Santal*" publié en 1873 ou "*le fleuve*" en 1874 dont les alexandrins annoncent déjà le surréalisme.

Je dirai deux mots sur le **"paléophone"** très précisément décrit dans une communication à l'académie des sciences. Avec quelques mois d'avance, ce n'est autre que le **phonographe** d'Edison. Illustration parfaite de "*Les français ont des idées mais*

(*) G. Ifrah : "*Histoire universelle des chiffres*" - Seghers
G. Guitel : "*Histoire comparée des numérations écrites*" - Flammarion
(**) Collection "*La Pléïade*"

ne savent pas les utiliser", Charles CROS lègue son invention à l'humanité. Plus malin, Edison la fera breveter. Reconnaissons toutefois que les deux hommes firent leur découverte de façon indépendante.

§ 2. UNE NOUVELLE NUMÉRATION

J'en viens au sujet de cet article. C'est dans "*Sur les moyens de communication avec les planètes*" qu'on trouve le passage suivant :

" § 3. Je dois dire tout d'abord, - et la suite de l'étude justifie cet avis, - que la première notion à échanger est celle d'une **numération.**
Or, les premiers signaux doivent être tels qu'ils aient un caractère en quelque sorte **vivant**, *et qu'ils expriment la loi de la numération dont on se servira ultérieurement.*
La discussion du système de numération à employer, exigeant des notions mathématiques tout à fait spéciales, ne peut entrer dans ce mémoire que je m'efforce de rendre abordable à tous. Il suffira de dire que ce système doit être le plus simple possible au début, quitte à le changer ensuite. Le système usuel, à neuf chiffres significatifs plus le zéro, sera rejeté à cause de sa complication ; ses chiffres élémentaires ont une valeur trop forte - ce qui rend trop forte aussi la somme des chiffres d'un nombre donné - et l'emploi tout conventionnel du zéro est difficile à deviner.
Il faut se servir de très peu de signes élémentaires, et en utiliser tous les arrangements possibles dans l'ordre de génération de ces arrangements.
Les chiffres élémentaires seront : l'éclair simple, l'éclair double, triple, etc.

§ 4. Si l'on se borne à trois signes élémentaires, voici l'ordre des apparitions tel qu'il devra être dans les premiers signaux ; les apparitions sont représentées par des points dont les intervalles sont proportionnels aux durées des disparitions :

. .. .
.. . . *etc, etc.*

L'étude la plus sommaire de cette série révèle sa loi. C'est une suite de groupes différents composés de un, de deux, de trois termes élémentaires et ainsi de suite ; et ces termes élémentaires sont de trois espèces seulement : l'éclair simple, l'éclair double, l'éclair triple. Ils se substituent les uns aux autres dans tel terme des groupes consécutifs, suivant leur ordre de grandeur. Ce système peut se continuer indéfiniment, et servir de cette manière à repré-

senter la série des nombres naturels. Les propriétés, d'ailleurs fort intéressantes, de cette numération si simple, et celles des numérations analogues doivent être l'objet d'une étude particulière.
Pour que le doute ne puisse pas naître, il conviendra de produire après la suite des groupes représentatifs, la suite des nombres représentés - ces nombres étant exprimés chacun par autant d'éclairs simples qu'il contient d'unités. Enfin on y joindra quelques exemples, tels qu'un nombre assez grand exprimé en éclairs successifs, suivi de sa représentation dans le système adopté.

§ 5. L'exemple des premiers signaux donnés ci-dessus, est construit d'après une numération à **trois** *éléments. Je n'ai pas voulu insinuer par là que ce système fût le préférable. Peut-être la numération à* **deux** *éléments est-elle plus avantageuse. C'est encore une question à discuter d'une manière rigoureuse. Les conclusions de cette étude tendront probablement à l'emploi d'une numération basée sur peu de signes élémentaires."*

Je tenais un excellent texte à proposer aux élèves de Terminale A2. Que de questions soulevées en peu de lignes :

. Le rôle du zéro.
. La notion de base de numération.
. Avantages et inconvénients des petites et grandes bases.
. Lecture de la suite de points ; comment la prolonger ? Est-ce une numération de base trois ? Pourquoi ?
. Comment construire, sur le même principe une numération à deux ou quatre ... éléments ?

Il n'est pas question de faire ici une étude exhaustive de ce texte. Je voudrais seulement étudier plus en détail ce curieux système de numération et aller plus loin qu'on ne peut le faire avec une classe de T A2.

Reconnaissons tout d'abord, que la suite de points telle qu'elle est présentée dans l'ouvrage de la Pléiade est peu claire. Puisqu'il s'agit d'une numération à trois éléments, utilisons les symboles 1, 2 et 3. Ils nous sont beaucoup plus parlants et notre propos n'est plus de communiquer avec d'éventuels extra-terrestres !
On obtient alors la suite :

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32...

qu'on prolonge facilement en

33, 111, 112, 113, 121...

Cela ressemble furieusement à une numération en base trois, et pourtant il n'y a pas de zéro. Une numération de base trois utilisant les symboles 0, 1 et 2 s'écrirait :

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22...

Pour mieux juger, comparons les numérations nombre pour nombre.

en base dix	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
en base trois	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	120	...
Ch. CROS	1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33	111	112	113	...

Les deux numérations concordent tant qu'on n'utilise pas le 0 (ou le 3). Charles CROS n'a pas besoin de 0 et c'est le 3, autrement dit la base, qui joue le rôle du zéro.

Il est clair que l'on a affaire à une numération de position : tout chiffre voit sa valeur multipliée par 3 (par la base) quand il est décalé d'un rang vers la gauche. Par exemple :

$$113 = 1 \,.\, 3^2 + 1 \,.\, 3 + 3 = 9 + 3 + 3 = 15.$$

Je propose donc de baptiser la numération de Charles CROS, **numération en base trois prime**. Le lecteur inventera sans peine les numérations en base deux prime, dix prime (avec les dix symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et X), etc...

§ 3. CHANGEMENT DE BASE

L'exemple précédent montre le passage de la base trois prime à la base dix habituelle. Cette méthode se généralise sans difficulté pour le passage de la base b' à la base dix. Comme on sait passer de la base dix à la base b (par division) montrons qu'il est facile de passer de la base b à la base d'. Prenons l'exemple de b = 3.

On remplacera 10 (en base trois) n'importe où dans le nombre par 3. Plus généralement, on cherchera à supprimer les "0" en baissant d'une unité le nombre restant à gauche par troncature et en mettant un 3 à la place du zéro.

Exemple : 1 0 2 0 1 0 0 2 2 0 **1 0**

On commence par la droite 1 0 → 0 3, d'où

1 0 2 0 1 0 0 2 **2 0 0** 3

On prend 2 0 0 , le dernier 0 est remplacé par 3 et 2 0 est baissé d'une unité : 1 2, d'où

1 0 **2 0 0** 2 3 2 1 2 3 3

On continue pour obtenir successivement :

1 0 **2 0 0** 2 3 2 1 2 3 3

1 0 1 2 3 2 3 2 1 2 3 3

3 1 2 3 2 3 2 1 2 3 3

§ 4. OPÉRATIONS EN BASE TROIS PRIME

• Pour l'addition et la multiplication, aucune difficulté en utilisant les tables de pythagore suivantes :

+	1	2	3
1	2	3	11
2	3	11	12
3	11	12	13

x	1	2	3
1	1	2	3
2	2	11	13
3	3	13	23

• Pour la soustraction, il faut faire un peu plus attention car la base trois prime n'autorise que les opérations dans $\mathbb{N}^*$. On modifiera donc légèrement son habitude de pensée quand, dans les soustractions partielles, les chiffres sont égaux :

Exemple :
$$\begin{array}{r} 323 \\ -\ 113 \\ \hline 133 \end{array}$$
on dira 3 ôté de 13 reste 3 et on retient 1
1 et 1 = 2 ôté de 12 reste 3 et on retient 1
1 et 1 = 2 ôté de 3 reste 1.

On remarquera que si les chiffres les plus à gauche sont identiques, on n'en tient pas compte.

exemple :
$$\begin{array}{r} 13223 \\ -\ 13113 \\ \hline 33 \end{array}$$
le 3e chiffre devient identique avec la retenue.

• La division enfin, reste une opération délicate car les quotients partiels ne doivent pas laisser apparaître de zéro. Je propose la méthode suivante qui a le tort de ne pas être véritablement intrinsèque. Peut-être qu'un lecteur en trouvera une qui le soit?

Exemple : 2 3 3 3 2 3 2 2 1 3	3 1
2 3 3	3 . 1 . 2 . . 2
3 2	3 . 1 . 1 3 . 2
3 1	3 . 1 . 1 2 3 2
1 3 2	3 . . 3 1 2 3 2
1 3 2	2 3 . 3 1 2 3 2
2 1 3	$\boxed{2\ 2\ 3\ 3\ 1\ 2\ 3\ 2}$ = quotient
1 3 2	
reste = $\boxed{1\ 1}$	

La division s'effectue normalement en laissant une place vide à chaque fois que le quotient partiel serait nul. (On a reporté les produits partiels à l'allemande.) Puis on transforme le quotient comme dans le passage de la base trois à la base trois prime.

• On peut s'intéresser aux critères de divisibilité. On retrouve des énoncés tout à fait analogues à ceux que l'on connaît. Par exemple en base b' un nombre est divisible par b - 1 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par b - 1. La seule différence notoire est qu'en base b' un nombre est divisible par b^n si et seulement si il se termine par b^n.

Exemple : En base trois prime les puissances successives de 3 sont
3, 23, 223 ..., 22... 23, ...
Donc : 1 2 3 3 **2 2 3** est divisible par 3^3 = 223.

§ 5. ECRITURE DES NOMBRES À VIRGULE

L'absence du zéro va entraîner quelques modifications pour l'écriture des nombres à virgule. Aucune difficulté pour comprendre

23, 12332 ou ,3132

cette dernière notation, de type anglo-saxon, nous étant imposée pour éviter l'emploi du zéro.

Une difficulté semble apparaître pour écrire une puissance négative de la base. L'écriture [0,0001] semble impossible mais le recours à la notation scientifique nous donne

1 . E - 11 ou 1×3^{-11} (en base trois prime).

N'a-t-on pas reculé pour mieux sauter ? Existe-t-il une manière simple d'écrire $12 + 1 \times 3^{-11}$? On remarque alors que 1 = , 3 = , 23 = , 223 =...=, 22 ...23 et par conséquent $12 + 1 \times 3^{-11}$ = 11, 2223 + 1×3^{-11}

= 11, 2231

Ces quelques recherches font surgir deux problèmes :

1°) Il n'y a pas unicité de l'écriture d'un nombre à virgule. C'est un problème voisin de celui qu'on rencontre avec la notation habituelle, en base dix :

1 = 1,0 = 1,00 = 1,000 = ... = 0,999...9...

On trouve de même en base trois prime :

1 = ,3 = ,23 = ,223 = ... = ,222...2...

Il n'y a unicité que si on s'interdit de terminer par la base, ici par un 3. On peut toujours le faire en supprimant ce 3 et en augmentant d'une unité le nombre qui apparaît en faisant alors abstraction de la virgule. On peut être amené à effectuer plusieurs fois cette opération :

2,233 = 2,31 2,2123 = 2,213 = 2,22.

2°) La comparaison de deux nombres est délicate. Il n'est pas évident que : 11,2231 > 12.

Pour comparer deux nombres à virgule, il faut qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule. On comparera donc :

11,2231 et 11,2223

pour lesquels l'inégalité est évidente.

Cette difficulté n'est pas plus grande qu'en base dix. Les professeurs de collèges savent que les élèves buttent sur la comparaison de 2,21 et 2,3 puisque 3 est plus petit que 21.

§ 6. CONCLUSIONS

On connaît les difficultés et péripéties historiques qui ont conduit à l'adoption du zéro. On sait qu'initialement il a surtout servi à noter l'absence de boule dans une colonne du boulier, avant de devenir également opérateur. Or, il y a essentiellement deux types de boulier * pour une numération décimale : ceux qui comportent neuf boules par colonne et ceux qui en comportent dix. Le premier type conduit

(*) Je mets à part les bouliers chinois et japonais qui utilisent la décomposition de dix en facteurs premiers : $10 = 5 \times 2$.

naturellement à la numération en base dix. Le deuxième type aurait pu conduire à une numération en base dix prime puisqu'un tel boulier permet d'éviter des colonnes vides entre deux colonnes occupées, donc d'éviter l'emploi du zéro. Cela n'a pas eu lieu et je ne connais pas d'exemple historique d'une base dix prime ou de son esquisse.

Ce qu'il faut retenir est qu'il est faux de dire que seule l'invention du zéro opérateur a permis le développement d'une numération de position. Cette invention suffit mais elle n'est pas nécessaire. On peut en effet imaginer que les différents tabous qui ont gravité, et qui gravitent encore, autour de la notion de zéro (le texte de Ch. CROS en fait foi) aient pris suffisamment d'ampleur pour imposer une civilisation dont la numération serait en base dix prime. Seul, zéro n'aurait pu être noté. On peut toujours écrire et cela a été fait :

$2 - 2 =$ pour $2 - 2 = 0$

$3 >$ pour $3 > 0$

et si éventuellement un symbole est nécessaire on peut inventer l'écriture **T**, 3 (en base trois prime) en s'inspirant de l'ancienne notation des logarithmes des nombres inférieurs à 1.

Tous les livres d'arithmétique énoncent le théorème d'unicité de la décomposition d'un nombre entier dans une base donnée. Il serait bon de modifier le théorème de la façon suivante :

Théorème : $b \geqslant 2$ étant un entier donné (*), alors tout entier non nul x peut s'écrire de deux façons exactement sous la forme :

$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 b + a_o$,

la première où les $a_i \in \{0, 1, 2 \ldots b-1\}$ et $a_n \neq 0$

la seconde où les $a_i \in \{1, 2 \ldots\ldots b\}$.

Finalement, les certitudes les mieux établies, même en mathématiques, sont sujettes à révision.

(*) On peut même prendre $b < 0$, voir le cas $b = -2$ dans les Bulletin n° 262 et n° 271 de l'A.P.M.E.P. Je n'ai pas testé l'existence d'une numération en base moins deux prime.

DE L'ENTRÉE EN 4° AU BACCALAURÉAT C,

LES CRUS 84 DANS L'ACADEMIE

Obligeamment transmis par M. Silvestre, Inspecteur Pédagogique Régional, les textes des différents examens d'appel qui se sont déroulés dans l'académie, sont reproduits ci-après.

D'autre part, la moyenne en mathématiques au Bac. C ayant été de 7/20 dans l'académie, nous publions une analyse de son énoncé, due à Michel de COINTET.

§ 1. APPEL EN FIN DE 5°. ADMISSION EN 4° (1 H. COEFF. 2)

I. Calculez :

$- 3,5 - 1,5 =$

$- 17,3 + 0,6 =$

$(-4)^3 =$

$- 11,2 \times 5 =$

$- 6 \times (-3) + 9 \times (-2) - (-6) \times 6 =$

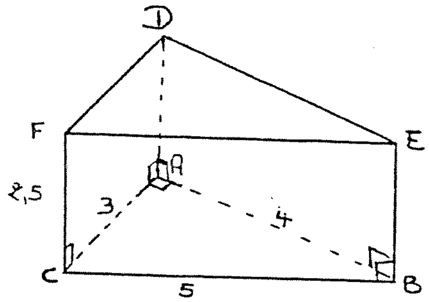
$3 (a - 4 + a^2) - 5 (3 - a^2 + 2 a) =$

II. Calculez de deux façons :

$- 15,2 - (17,3 - 15,2 + 3,7) + (-6,3 - 2,7) =$

$(10 - 6) \times 2 - 6 \times (27 - 9) =$

III.



1) Que pouvez-vous dire des arêtes
   . [AB] et [DE] ?
   . [AB] et [FC] ?

2) Que pouvez-vous dire de l'arête [BC] et du plan (EFD) ?

3) Que pouvez-vous dire des plans (ABED) et (ACFD) ?

4) Donnez le nom de ce solide.

5) Les dimensions du solide sont données en cm sur la figure. Calculez le volume de ce solide en cm^3 puis en dm^3.

IV. 1) A l'aide de la règle et du compas, tracez un triangle ABC connaissant la longueur des côtés (en cm)
AB = 6   BC = 7   AC = 8

2) Placez le point D pour que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

3) Comment s'appelle un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur ?

V. 1) Décomposez 315 et 168 en produit de facteurs premiers

2) Citez au moins 6 diviseurs de 315

3) Trouvez le PPCM et le PGCD de 315 et 168

4) Complétez en effectuant des divisions euclidiennes

165 = 24 x ... + ...

168 = 24 x ... + ...

171 = 24 x ... + ...

L'un des 3 nombres 165, 168 et 171 est-il multiple de 24 ?
Expliquez pourquoi.

§ 2. APPEL EN FIN DE 3°. ADMISSION EN 2° (2 H. COEFF. 4)

Exercice I :

Soit trois applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 4(x^2 - 4)$$
$$g(x) = 9(x + 2)^2$$
$$h(x) = (x - 2)^2$$

a) Calculer $f(\sqrt{2})$, $g(0{,}05)$, $g(-\frac{5}{3})$, $h(2 - 3\sqrt{2})$.

b) Calculer $g(\sqrt{5}) - h(\sqrt{5})$; donner le résultat sous la forme $a\sqrt{5} + b$ où a et b sont des entiers relatifs.

c) Factoriser $g(x) - h(x)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$$g(x) = h(x)$$
$$f(x) = g(x)$$

Exercice II :

Un libraire a vendu 77 livres, les uns à 13 F, les autres à 19 F, pour une somme de 1 211 F.

Combien y a-t-il de livres de chaque sorte ?

Exercice III :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $(x'x)$ l'axe des abscisses et $(y'y)$ l'axe des ordonnées.

1) Construire les droites (D) et (Δ) représentant respectivement les fonctions affines f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -2x + 3$$

2) On pose

$(D) \cap (x'x) = \{A\}$ | $(\Delta) \cap (x'x) = \{C\}$ | $(\Delta) \cap (D) = \{H\}$
$(D) \cap (y'y) = \{B\}$ | $(\Delta) \cap (y'y) = \{E\}$

Calculer les coordonnées des points A, B, C, E, H.

3) Prouver que les droites (BC) et (AE) sont perpendiculaires.

4) La parallèle menée par A à (Δ) coupe $(y'y)$ en F. Former une équation pour la droite (AF) et calculer les coordonnées de F.

5) Calculer les distances BE, BF, BH, BA et vérifier que $\frac{BH}{BA} = \frac{BE}{BF}$

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

§ 3. APPEL EN FIN DE 2°. ADMISSION EN 1ÈRE (2 H.)

* Les candidats à l'entrée en Première S devaient traiter les problèmes 1 et 2.

* Les candidats à l'entrée en Première A_1 ou B devaient traiter les problèmes 1 et 3.

* Les candidats à l'entrée en Première A_2, A_3 ou G devaient traiter les problèmes 3 et 4.

PROBLEME n° 1 Candidats à l'entrée en Première A_1, B ou S

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x+1}$$

et on désigne par (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1°) a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) La courbe (C) a-t-elle des points communs avec la droite d'équation $x = -1$, avec la droite des abscisses, avec la droite des ordonnées ? Si oui, calculer les coordonnées de ces points.

2°) Etudier les variations de f sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$

Construire dans un même repère la courbe (C) et la droite d'équation $x = -1$

3°) On désigne par d la droite d'équation $y = 1 - x$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) et d.

Construire d sur le même graphique que (C).

4°) a) Calculer la différence $f(x) - (1 - x)$

b) Démontrer que pour tout réel appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

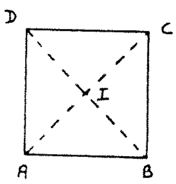
$$0 \leqslant f(x) - (1 - x) \leqslant 2x^2$$

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-14} près de :

$$\frac{1}{1{,}00000005} \quad \text{et de} \quad \frac{1}{0{,}99999996}$$

PROBLEME n° 2 Candidats à l'entrée en Première S

Soit ABCD un carré de côté 1 et soit I le point d'intersection de ses diagonales (I est le centre du carré)



1°) On désigne respectivement par S_A, S_B, S_C et S_D les symétries centrales de centres A, B, C et D et on note :

$$A' = S_A(I) \quad , \quad B' = S_B(I) \quad , \quad C' = S_C(I) \quad , \quad D' = S_D(I)$$

Démontrer que : $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{C'D'} = 2\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{D'A'} = 2\overrightarrow{DA}$

En déduire que A'B'C'D' est un carré. Quel en est le centre ?

2°) On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

a) Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D et I dans ce repère?

b) Soit E l'image de I par la translation de vecteur $2\overrightarrow{DA}$ et soit F l'image de I par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$

Calculer les coordonnées de E et de F.

c) Soit G et H les images respectives de E et F par la symétrie de centre I. Calculer les coordonnées des points G et H.

d) Démontrer que EFGH est un carré dont on calculera la longueur du côté.

3°) On utilise le polygone AEBFCGDH pour former, en pliant le long des côtés du carré ABCD, une pyramide à base carrée. Calculer la hauteur de la pyramide obtenue.

PROBLEME n° 3 Candidats à l'entrée en Premières A_1, A_2, A_3, B, G.

1°) Résoudre dans R^2 le système d'équations : $\begin{cases} 3x + y - 24 = 0 \\ x + y - 20 = 0 \end{cases}$

2°) Représenter dans un même repère les droites (d_1) et (d_2) d'équations :

(d_1) $3x + y - 24 = 0$ (d_2) $x + y - 20 = 0$

Donner une interprétation géométrique du résultat de la première question.

3°) Une entreprise produit deux types de pièces, dont la fabrication nécessite le passage successif dans deux ateliers, ceci dans un ordre indifférent.

Les durées de passage (en heures) dans chaque atelier sont données dans le tableau ci-contre :

	Atelier 1	Atelier 2
pièces de type 1	3	1
pièces de type 2	1	1

Dans l'atelier 1 on peut disposer de 24 heures, dans l'atelier 2 de 20 heures. En désignant par x le nombre de pièces de type 1 et par y le nombre de pièces de type 2, montrer que la production (x,y) est réalisable si :

$3x + y \leqslant 24$ et $x + y \leqslant 20$

En représentant chaque production (x,y) par le point de coordonnées (x,y) dans un repère bien choisi, mettre en évidence l'ensemble des points du plan correspondant à des productions réalisables.

4°) la vente d'une pièce de type 1 rapporte 200 F de bénéfice, celle d'une pièce de type 2 rapporte 100 F.

Construire les points représentant une production (x,y) rapportant un bénéfice B dans les cas suivants :

a) B = 800 F b) B = 1600 F c) B = 2200 F

Quelle est la production qui assure à l'entreprise un bénéfice maximal ?

PROBLEME n° 4 Candidats à l'entrée en Premières A_2, A_3, G.

Une enquête auprès des 800 élèves d'un lycée a permis d'établir le tableau ci-dessous :

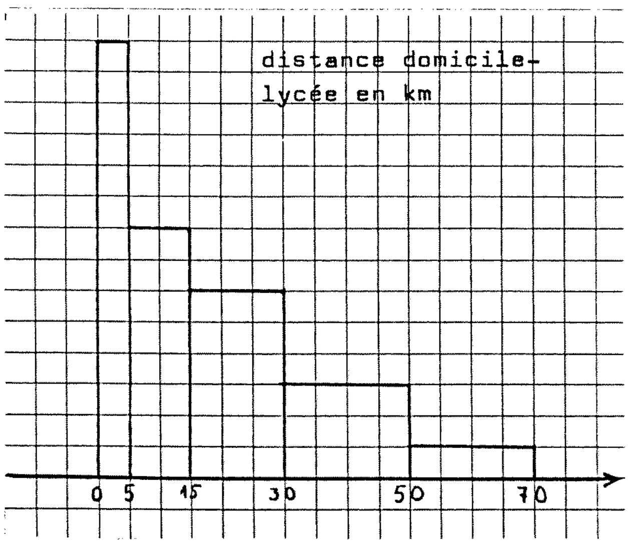
	EXTERNES	DEMI-PENSIONNAIRES	INTERNES	TOTAUX
FILLES	180		120	450
GARÇONS		130		
TOTAUX			180	800

1°) Reproduire et compléter ce tableau

2°) Etablir un tableau analogue dans lequel figureront les pourcentages par rapport à l'ensemble des élèves.

Au cours de la même enquête, les réponses à la question :"Quelle est la distance de votre domicile au lycée ?" ont permis la construction d'un graphique dans lequel les aires des rectangles sont proportionnelles aux nombres d'élèves.

3°) Reproduire et compléter le tableau à l'aide du graphique.



d : distance domicile - lycée (en km)	nombre d'élèves
$0 < d \leqslant 5$	
$5 < d \leqslant 15$	
$15 < d \leqslant 30$	
$30 < d \leqslant 50$	
$50 < d \leqslant 70$	50
	800

4°) Les 200 élèves pour lesquels la distance domicile-lycée est la plus importante vont bénéficier d'une prime de transport. Quelle est la distance domicile-lycée à partir de laquelle on bénéficie de cette prime ?

§ 4. L'ÉNONCÉ DU BAC C (proposé par Besançon)

EXERCICE I (4 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O\ \vec{i}\ \vec{j})$, on appelle disque unité l'ensemble : $D = \{M \in P\ /\ OM \leqslant 1\}$. On appelle distance d'un point M à D, et on note d(M,D), la plus petite des distances de M aux points de D.

1) Démontrer que si M est extérieur au disque, alors $d(M,D) = MM_0$, où M_0 est l'intersection du cercle unité avec le segment $[O,M]$.

2) En déduire que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors :

$$d(M,D) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

3) Soit Δ la droite d'équation $y = -2$. Chercher l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(M,D) = 2\ d(M,\Delta)$$

Représenter D, Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

EXERCICE II (4 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_0^1 e^{tx^2}dt$$

1) Calculer F(x) pour $x \neq 0$ et F(0). Démontrer que F est continue en 0.

2) Ecrire un développement limité à l'ordre 2 de e^x au voisinage de 0. En déduire un développement limité à l'ordre 2 de F(x) au voisinage de 0. Démontrer alors que : $F'(0) = 0$

3) Démontrer que : si $0 \leqslant x \leqslant x'$ alors $F(x) \leqslant F(x')$

et que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

4) Donner, en tenant compte des résultats précédents, l'allure du graphe de F.

PROBLEME (12 points)

Soient $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan, et $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre O, d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$, de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

A - 1) Définir $\mathcal{S}$ analytiquement. M étant un point du plan, on pose $M' = \mathcal{S}(M)$, $M'' = \mathcal{S} \circ \mathcal{S}(M)$.

2) Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{OM''} + \overrightarrow{OM'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

C - Soit σ l'application linéaire associée à $\mathcal{S}$. On se donne un point mobile $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$, de vecteurs vitesse et accélération $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$, tel que $\vec{V}(t) = \sigma(\overrightarrow{OM(t)})$ $\forall t$. On suppose que $M(0)$ a pour coordonnées $(1,0)$.

1) Exprimer $x'(t)$ et $y'(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$.
Montrer que $\vec{\Gamma}(t) = \sigma(\vec{V}(t))$, $\forall t$.

2) Montrer que $\sigma o \sigma(\vec{v}) + \sigma(\vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{v} = \vec{0}$ pour tout vecteur $\vec{v}$ (utiliser A - 2)).
En déduire que $\vec{\Gamma}(t) + \vec{V}(t) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM(t)} = \vec{0}$ $\forall t$.

3) Montrer que les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ vérifient l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2} f = 0$

4) Résoudre l'équation différentielle $f'' + f' + \frac{1}{2} f = 0$.
Calculer $\vec{V}(0)$. Calculer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

5) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^a x(t)dt = 2\,x'(0) + 2\,x(0) - 2\,x'(a) - 2\,x(a)$ (utiliser C - 3))
Calculer $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \int_0^a x(t)dt$. Calculer de même $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \int_0^a y(t)dt$.

Les parties B et C sont indépendantes.

B - On appelle M_o le point de coordonnées $(1,0)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = \mathcal{S}(M_n)$. On appelle (x_n, y_n) les coordonnées de M_n.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n = 0$ et $y_{n+2} + y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n = 0$
(Utiliser A - 2)).

2) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation $u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=o}^{n} u_k = -\frac{2}{5} u_{n+2} - \frac{4}{5} u_{n+1} + \frac{2}{5} u_1 + \frac{4}{5} u_o$.

3) Caractériser géométriquement la composée de n similitudes égales à $\mathcal{S}$.
En déduire l'expression de OM_n en fonction de n.
Etudier $\displaystyle\lim_{n \to \infty} OM_n$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} x_n$, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} y_n$.

4) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=o}^{n} x_k$ et $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=o}^{n} y_k$.

I. OBSERVATIONS GENERALES SUR LE TEXTE

Dans le premier exercice, les deux premières questions sont mal posées : ce ne peut être que deux phrases successives d'une même question car la formule demandée en 2) n'est vraie que sous les hypothèses de 1) !
Dans la question 4) du second exercice, on demande *"l'allure du graphe de F"*, terme qui manque de précision, pour une épreuve de bac. C.
Dans le problème, le signe *" $\forall$ t"* est employé plusieurs fois comme signe dactylographique remplaçant désavantageusement *"pour toute valeur de t"*. Le symbole *" $\forall\ n \in \mathbb{N}$"* est placé tantôt en début, tantôt en fin de proposition.
Dans la partie C, $\vec{V}(t)$ désigne un secteur-vitesse et $\vec{v}$ un vecteur quelconque du plan ; des notations aussi voisines sont source de confusion.
Signalons l'emploi du signe " ∞" au lieu de " $+\infty$ ".
L'expression *"définir analytiquement"* employée au début du problème n'a pas de signification universelle : s'agit-il de relation sur les affixes ou de relations sur les coordonnées ? Il serait plus simple de le préciser.

II. PREMIER EXERCICE

A. La question 1) est pour l'ensemble des élèves une évidence au même titre que ce qui peut constituer les prémisses d'une démonstration : les élèves ne sont, en outre, pas du tout formés à une démarche axiomatique.
B. L'exercice est un exercice de géométrie qui ne permet pas une évaluation des capacités des élèves en la matière : la seule question où l'élève est incité à répondre géométriquement n'est pas significative et la solution analytique suggérée ensuite conduit à un exercice technique de calcul algébrique.
C. Difficultés :
   1) Démontrer ce qui paraît évident ; et à partir de quelles prémisses ?
   2) Résoudre une équation comportant radical et valeur absolue conduisant à deux branches d'hyperboles distinctes ; sans oublier de mentionner qu'aucun point intérieur au disque ne peut être élément de l'ensemble demandé, pour utiliser la question précédente. C'est d'une difficulté technique excessive...

III. SECOND EXERCICE

A. La définition de la fonction F comme fonction d'une variable qui est le paramètre d'une intégrale définie est déroutante. On aurait dû au moins donner le résultat pour permettre au candidat de faire les autres questions ! La question 4) suggère une interprétation géométrique de "$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$" (sinon pourquoi le calcul de cette limite ?) qui n'est pas au programme ! Les instructions concernant les sujets de baccalauréat auraient dû conduire à préférer un tracé soigné de la courbe représentative de F sur un intervalle donné, à la démonstration de "$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$".

B. L'exercice ne permet pas une évaluation des capacités des élèves qui n'ont jamais rencontré d'intégrales avec paramètre (autre que la borne supérieure). Il permet, par contre, une bonne évaluation de la compréhension du développement limité d'ordre 2 ainsi que du maniement des inégalités.

C. Difficultés : distinguer paramètre et variable d'intégration dans le calcul d'une intégrale, comparer deux intégrales définies.

IV. PROBLEME

A. L'objectif n'est pas indiqué en début d'énoncé.
Le concept d'application linéaire associée ici à une similitude, n'est PLUS AU PROGRAMME ; il est de plus inutile ici, et ne fait que compliquer. Il eût été bien plus simple de définir $\vec{V}(t)$ par : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{OM}'(t)$ et de supprimer les deux premières questions de C.

B. Le problème porte sur les similitudes, les suites, la cinématique, les équations différentielles et le calcul intégral.
La réponse à plusieurs questions consiste simplement à dire qu'une égalité vectorielle - la même tout au long du problème - se traduit par deux égalités sur les coordonnées ; c'est un peu mince ! Il y a en réalité cinq questions qui nécessitent connaissances ou savoir-faire : A) 1) ; B) 2) ; B) 3) ; C) 4) ; C) 5).
Les autres sont des questions de remplissage. Il eût été plus instructif de faire faire des figures !

C. Il n'y a pas de difficulté mathématique pour un élève connaissant son cours. Les indications (utiliser A - 2) sont inutiles tant elles sont évidentes !

V. APPRECIATION GLOBALE

. Le sujet touche à plusieurs parties du programme dont une nouvelle (équations différentielles).

. Il y a DEUX QUESTIONS HORS PROGRAMME : l'interprétation graphique de "$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$" et le concept d'application linéaire associée qui conditionne la partie C du problème !

. Les difficultés mathématiques vont en décroissant ! L'exercice 1 (et d'abord la question 1) est plus difficile que l'exercice 2, lesquels sont plus difficiles que le problème : les exercices demandent davantage de savoir-faire que le problème qui est une suite d'applications directes du cours. Ainsi les rôles des exercices et du problème sont inversés. Tout cela est bien déroutant pour bon nombre de candidats !

. Ajoutons que la moyenne des candidats de l'Académie a été de 7 sur 20 !

M. de COINTET