
CATALOGUE
MATHEXPO
supplément à l'OUVERT n°35
ISSN 0290-0068
ça une bulle de savon

Au lecteur,

Si vous êtes entrain de lire ces lignes, c'est que la présentation des mathématiques vous intéresse. Peut être utilisez-vous professionnellement les mathématiques, mais peut être, tout simplement, avez-vous été intrigué par une présentation à laquelle vous ne vous attendiez pas. Dans vos souvenir, les maths. restaient une discipline abstraite et difficile. Si cette exposition et les pages qui suivent ont pu modifier votre point de vue, c'est que nous aurons tous atteint le but que nous nous étions fixé : "développer la culture mathématique et la culture scientifique". Nous pourrons alors continuer sur cette voie pour aborder bien d'autres chapitres des mathématiques, comme la topologie, les probabilités, le calcul différentiel et intégral.......

Nous vous souhaitons une bonne lecture.

Pour les organisateurs de
l'exposition mathématique :

Jean LEFORT

numération

BABYLONE

L'histoire de la mésopotamie à partir de 3300 avant notre ère, date de l'apparition de l'écriture, explique l'existence de deux systèmes de numération dont l'un dit "savant" eut une grande influence dans le monde scientifique.

- 3300 apparition de l'écriture
- 2700 l'écriture devient cunéïforme
- 2330 époque d'Agadé
- 2150 invasion Guti
  renouveau sumérien
- 2000 invasion des Amorites
- 1732 / - 1750 Hammurabi
- 1595 prise de Babylone par les Hittites

civilisation sumérienne (- 3300 à - 2150) : * 60 joue un rôle prépondérant dans le système de numération

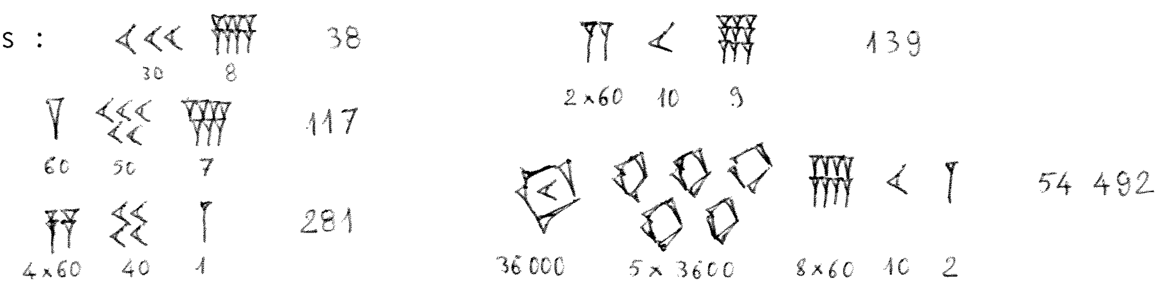
civilisation akkadienne (- 2330 à - 2000) : * introduction de 10 comme concurrent de 60 sous l'influence de la langue parlé : l'Akkadien

civiliaation assyro-babylonnienne (- 2000 à - 1595) : * une numération populaire de base 10 et une numération savante de base 60.

Ecriture des chiffres pendant la civilisation sumérienne

	1	10	60	600	36 00	36 000	216 000
chiffres archaïques							
chiffres cunéîformes							

Exemples :



Pour l'écriture des grands nombres, les sumériens répétaient autant de fois que nécessaire chaque symbole. Ils leur arrivaient cependant d'abréger certaines écritures en généralisant la notation multiplicative :

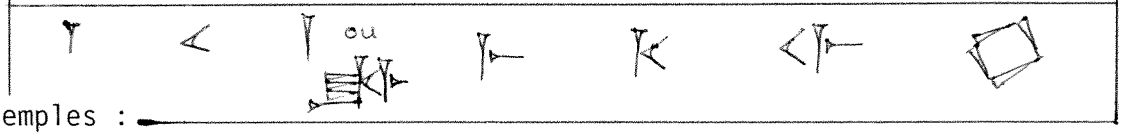
est composé de (3600) et de (10) que l'on multiplie. On trouve donc parfois :

au lieu de (72000) ...

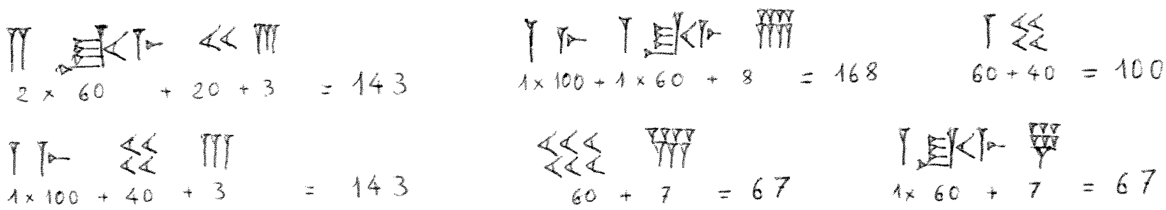
Ecriture des chiffres à l'époque akkadienne

A l'époque akkadienne de nouveaux symboles furent introduits. La régularité du système sumérien fut alors détruite :

1	10	60	100	600	1000	36000



Exemples :



Le symbole est simplement l'écriture en "toutes lettres" du mot "soixante". Il n'est utilisé que pour éviter la confusion entre (1) et (60). Petit à petit les symboles pour 600 ( ) et pour 3600 ( ) furent abandonnés et 60 ( ) ne resta que pour l'écriture de 70 ( ), 71 ( )..... 99 ( ), 60 lui-même s'écrivant régulièrement . Le système était redevenu régulier mais décimal. C'est <u>la numération populaire mésopotamienne</u>.

Parallèlement à cette numération populaire, se met en place une numération savante qui n'utilise que deux symboles : et . Le premier symbolise non seulement 1 et 60 mais aussi $60^2 = 3600$, 60^3 ... et même $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{3600}$ ...

Le second représente dix fois "l'unité" précédente : 10, 600,... $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{360}$..

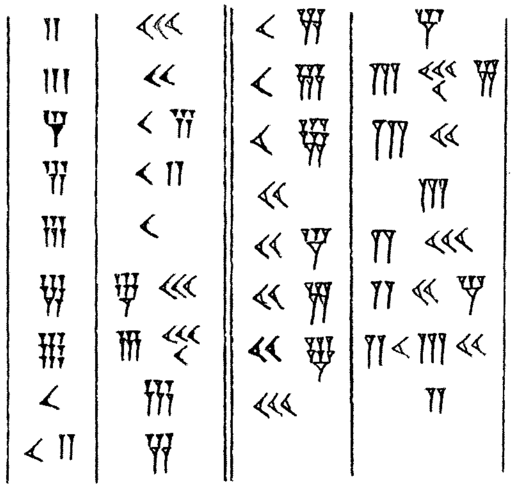
doit se lire $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000} \simeq 1,4142...$

Le savant babylonien devait toujours garder en tête l'ordre de grandeur d'un résultat, sinon il risquait de confondre 1 et 60 ... Pour les besoins du calcul, les babylonniens disposaient de tables numériques : tables de multiplication, de carrés, de cubes, d'inverses... Cette dernière permettait d'effectuer des divisions, puisque multiplier par $\frac{1}{x}$ c'est diviser par x.

Exemple : $\frac{15}{16}$

inverse de 16 : 3 ; 45 (3/60 + 45/36000)
multiplication de 3 par 15 : (45)
multiplication de 45 par 15 : (11 ; 15)
d'où

$$15/16 = (45) + (11 \; ; \; 15) = (56 \; ; \; 15)$$
$$= \left(\frac{56}{60} + \frac{15}{3600}\right)$$



Extrait d'une table d'inverse

Une remarque s'impose : dans les tables d'inverses on ne trouve que les nombres dont l'inverse s'exprime simplement dans la numération de base soixante. On ne trouve pas, entre autre, l'inverse de 7 : pour les babyloniens "7 ne divise pas". Nous dirions que "la division ne tombe pas juste". C'est pourquoi de nombreux problèmes d'arithmétiques portent sur la division par 7.

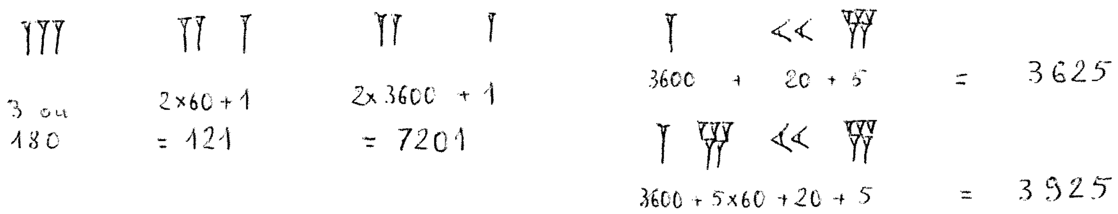
La tablette de Plimpton (1600 avant notre ère) prouve que les babyloniens résolvaient des problèmes du second degré du type : On donne la somme (ou la différence) d'un nombre et de son inverse ; trouver ce nombre (problème igi - igibi) . Cela leur permettait de construire des triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers.

« Un rectangle, longueur et largeur, j'ai multiplié et ainsi j'ai construit une surface.
Puis, j'ai ajouté à la surface ce dont la longueur excède la largeur : (cela donne) 3,3
Puis j'ai additionné la longueur et la largeur : (cela donne) 27.
Que sont la longueur, la largeur et la surface ?
27 (et) 3,3 ; les sommes,
15, la longueur,
3,0 la surface,
12, la largeur.
Toi, en opérant, ajoute 27, la somme de la longueur et de la largeur, à (3,3) : (cela donne) : 3,30; ajoutes 2 à 27 (cela donne) : 29. Tu diviseras en deux 29 (cela donne 14,30) - 14,30 fois 14,30 (font) 3,30,15.
De 3,30,15, tu soustrairas 3,30 : il reste 0°15'; 0°15' est le carré de 0°30'. Ajoute 30' au premier 14°30' : (cela donne) 15 (pour) la longueur. Tu retrancheras 30' du deuxième 14,30 : (cela donne) 14 (pour) la largeur -2, que tu as ajouté à 27 tu soustrairas de 14, la largeur : (cela donne) 12, la largeur définitive. Multiplie 15, la longueur et 12, la largeur : 15 fois 12 (donnent) 3,0 comme surface. De combien 15, la longueur, dépasse-t-elle 12, la largeur? Elle dépasse de 3. Additionne 3 à 3,0, la surface : le résultat est 3,3. »

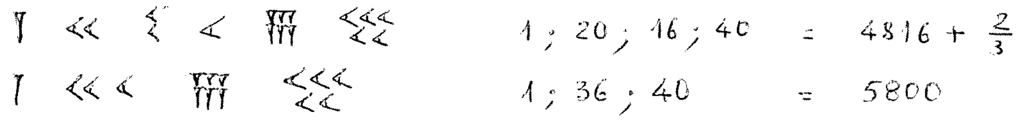
B. A.-L.

traduction du prisme mathématique (Louvre AO 8862)

La disposition des nombres en colonnes et l'aménagement de "blancs" suffisamment grands permettaient de se passer de l'emploi du zéro :



Au cas où une ambiguité subsistait, les scribes utilisaient un symbole de séparation : . Ce symbole ne joue pas le même rôle que notre "0" :



Le nombre "0" lui-même n'existait pas (on usait de périphrases).

GRECE

La numération acrophonique :

Elle est analogue dans son principe à la numération romaine, les symboles étant d'abord :

Ι 1 Γ 5 Δ 10 Η 100 Χ 1000 Μ 10000

où l'on reconnaît les initiales des mots : ΓΕΝΤΕ, cinq ; ΔΕΚΑ, dix HEKATON, cent ; ΧΙΛΙΟΙ ,mille ; ΜΥΡΙΟΙ , myriade.

La lettre Γ est une forme archaïque de Π. Ces symbole furent complétés, en utilisant une notation multiplicative, par :

𐅄 50 𐅅 500 𐅆 5000 𐅇 50000

Cette numération, très longtemps utilisée par le peuple, servit à noter les monnaies. Dans cet usage, les fractions de l'obole reçurent un symbole spécial, les multiples de l'obole se notèrent en modifiant légèrement les chiffres :

ΗΗΗ𐅄ΤΤΤ 353 talents ΗΔΔΓ 125 talents

Les unités monétaires étaient le talent valant 60 mines, la mine valant 100 drachmes, le drachme valant 6 oboles, l'obole (O) étant divisé en demi (c) quart(T) et huitième(X).

La numération alphabétique : l'alphabet grec classique possédait 24 lettres.

Αα alpha	Εε epsilon	Ιι iota	Νν nu	Ρρ rho	Φφ phi
Ββ bêta	Ζζ dzêta	Κκ kappa	Ξξ ksi	Σσ sigma	Χχ khi
Γγ gamma	Ηη êta	Λλ lambda	Οο omicron	Ττ tau	Ψψ psi
Δδ delta	Θθ thêta	Μμ mu	Ππ pi	Υυ upsilon	Ωω oméga

Si on veut associer à chaque lettre, dans l'ordre de l'alphabet, les valeurs 1, 2, 3......, 9, 10, 20, 30 ..., 90, 100, 200, ..., 900 il manque trois symboles qui furent empruntés soit à des formes archaïques, soit directement à l'alphabet phénicien dont on respectait à peu près l'ordre. Les grecs établirent donc la correspondance suivante :

Α	Β	Γ	Δ	Ε	F	Ζ	Η	Θ	Unités (F, ς est le digamma)
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Q	Dizaines (Q, α est le koppa)
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	α	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ	Centaines (ϡ ϡ est le sampi)
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	

Pour atteindre les milliers, les grecs reprenaient les premières lettres précédées d'un trait :

ΙΑ	ΙΒ	ΙΓ	ΙΔ	ΙΕ	ΙF	ΙΖ	ΙΗ	ΙΘ	Milliers
ʹα	ʹβ	ʹγ	ʹδ	ʹε	ʹς	ʹζ	ʹη	ʹθ	
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	

Curieusement, et contrairement à d'autres peuples, les grecs ne continuèrent pas la série. Le plus grand nombre qu'ils pouvaient écrire, était :

ΙΘϡQΘ ou ʹθϡαθ c'est-à-dire 9999.

Quand aucune confusion n'est à craindre, le signe du millier - le trait - est absent : ΙΔΩΛΖ ou ΔΩΛΖ 4837.

Les lettres majuscules furent seules employées jusqu'au 3ème siècle avant notre ère. Plus tard l'écriture cursive minuscule fut systématiquement utilisée ce qui évita la confusion entre ΙΑ (1000) et Ι Α (11). La lettre M fut alors réservée pour noter la myriade (10 000).

'ζροε Μ 'εωοε soit 7175 x 10000 + 5875 = 71755875

notation que l'on trouve chez Aristarque de Samos (310 - 230 avant notre ère). Et quand aucune confusion n'est à craindre :

δγοβ. 'ηϙζ 4372 x (10000) + 8097 = 43728037

que l'on rencontre chez Diophante d'Alexandrie vers 250 de notre ère. mais c'est à Appollonius de Perga (262-180 avant notre ère) que l'on doit le plus grand progrès :

Il distingue les <u>myriades premières</u> notées $\overset{\alpha}{M}$ et qui valent $10000 = 10^4$

les <u>myriades secondes</u> notées $\overset{\beta}{M}$ et qui valent $(10000)^2 = 10^8$

les <u>myriades troisièmes</u> notées $\overset{\gamma}{M}$ et qui valent $(10000)^3 = 10^{12}$

..... et ainsi de suite jusqu'aux

<u>myriades 999ème</u> notées $\overset{'\theta ϡ ϙ \theta}{M}$ et qui valent 10^{4x999}.

Cela permettait d'écrire un nombre aussi grand que $10^{4x10^4} - 1$ c'est-à-dire formé de quarante mille chiffre 9.(!). Malheureusement, l'écriture en est très lourde car $\overset{...}{M}$ se place avant la tranche concernée :

$\overset{\gamma}{M}$,ευξβ καὶ $\overset{\beta}{M}$,γχ καὶ $\overset{\alpha}{M}$,ϛυ

soit $(10000)^3 \times 5462 + (10000)^2 \times 36000 + (10000) \times 6400 = 5462360064000000$

le mot " καὶ ", conjonction qui peut se traduire par "plus", est ici inutile ; mais ce n'est pas toujours le cas ; on comparera :

$\overset{\gamma}{M}$,ευξβ καὶ	$\overset{\beta}{M}$,γχ καὶ	$\overset{\alpha}{M}$,ϛυνθ	
5462	3600	6459	0000

avec

$\overset{\gamma}{M}$,ευξβ καὶ	$\overset{\beta}{M}$,γχ καὶ	$\overset{\alpha}{M}$,ϛυ καὶ	νθ
5462	3600	6400	0059

Archimède, vers la même époque, perfectionna ce principe pour atteindre 10^{8x10^8}, mais les savants grecs restèrent fidèles à la notation d'Appollonius. Les astronomes, quant à eux, se contentèrent de traduire en numération alphabétique la numération cunéïforme babylonienne, le zéro étant noté σ ou $\overline{o}$:

$\overline{o}$ KH ΛE

$$0 \quad 28 \quad 35 \quad = 0 + \frac{28}{60} + \frac{35}{60^2} = 0^\circ 28'35''$$

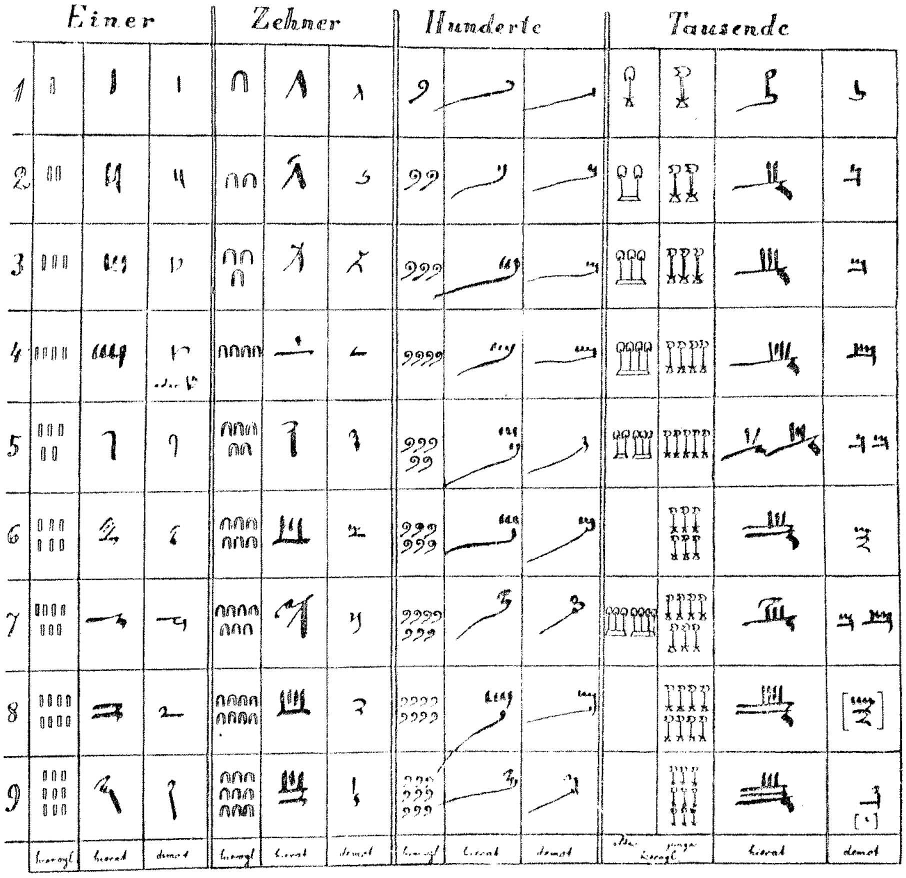
$\overline{o}$ IZ MΘ

$$0 \quad 17 \quad 49 \quad = 0 + \frac{17}{60} + \frac{49}{60^2} = 0^\circ 17'49''$$

EGYPTE

Les égyptiens utilisaient deux types d'écriture : l'écriture monumentale ou hiéroglyphes et l'écriture cursive ou hiératique. Cette dernière s'écrivait de droite à gauche alors que la première pouvait aussi s'écrire de gauche à droite, auquel cas tous les symboles étaient retournés.

Pour compter, ils utilisaient un signe différent pour chaque puissance de dix (un, dix, cent...) chaque signe étant répété de 1 à 9 fois selon les besoins.



Le tableau ci-contre donne dans chaque colonne la représentation en hiéroglyphes (à gauche) et en écriture hiératique (à droite) des multiples des puissances de dix. Ces signes était complétés par :

pour dix mille 

pour cent mille 

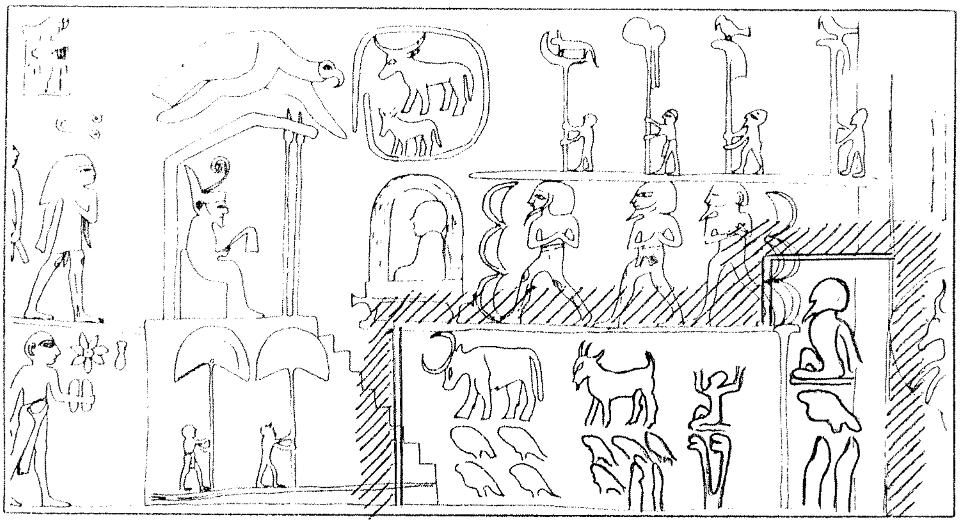
pour un million 

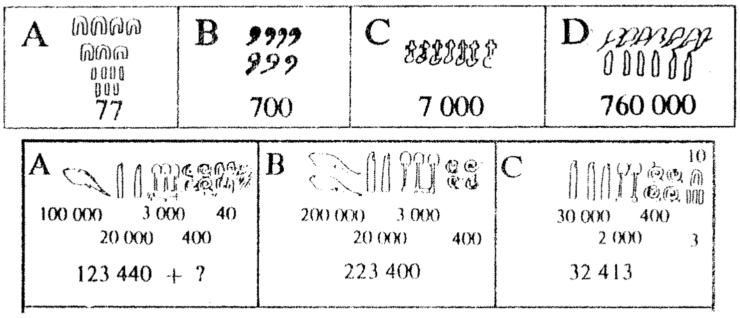
signes qui suivaient les mêmes règles de répétitions.

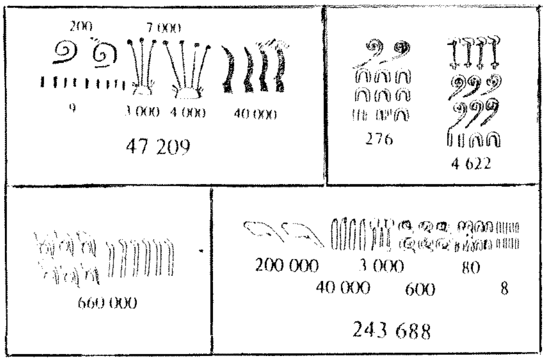
L'unité est donc symbolisé par un bâton, la dizaine par une anse, la centaine par une corde enroulée, le millier par la fleur de lotus, la myriade par un index, cent mille par un têtard et le million par un dieu.

Voici quelques exemples tirés de documents qui nous sont parvenus. Certains textes anciens ont une écriture archaïque.

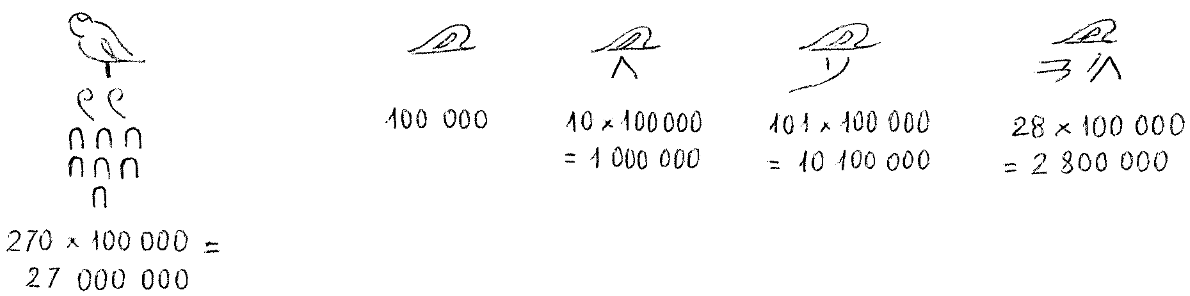
tête de massue de
(Hiérakonpolis)
400 000 bovidés
1422 000 chèvres
120 000 prisonniers



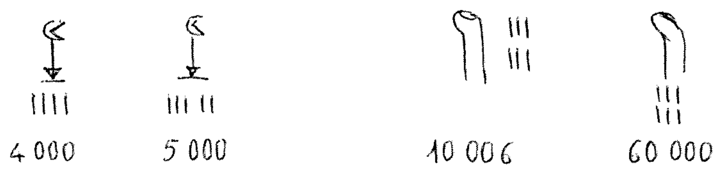




Au moyen empire (à partir de 1800 avant notre ère) le signe pour "un million" tomba en désuètude. Pour écrire les grands nombres les égyptiens eurent recourt à une technique multiplicative :



ceci impliqua une disposition rigoureuse pour éviter les confusions. Le symbole multiplicatif doit apparaître nettement au-dessus des autres. Cette technique d'abord réservée aux grands nombres fut peu à peu étendue aux nombres plus petits, sans être utilisée systématiquement puisque l'on trouve à la fois :

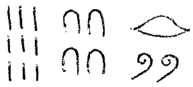


On peut remarquer que le principe multiplicatif est utilisé dans l'écriture hiératique, essentiellement à partir de 50 000.

LES FRACTIONS

Pour noter les fractions, les égyptiens se servaient du symbole de la bouche qui dans ce contexte signifiait "partie". Ils plaçaient ce symbole au-dessus du nombre ; si le nombre était trop long, on l'écrivait à la suite

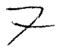
 signifie la "cinquième partie" c'est à dire $\frac{1}{5}$

 signifie "la 249e partie" c'est-à-dire $\frac{1}{249}$

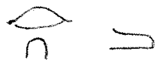
En hiératique, le symbole de la bouche était stylisé à l'aide d'un gros point, d'où les écritures :

1/8  1/49  1/196  1/25 

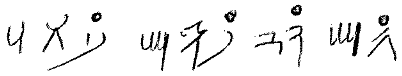
Cette méthode présentait les 4 exceptions suivantes

	Hiéroglyphe	Hiératique	
1/2			idée de moitié
1/3			
2/3			C'est-à-dire les 2 parties
1/4			

A l'exception de 2/3, on ne pouvait noter de cette façon que des fractions dont le numérateur est "1". Pour représenter une fraction comme 3/5, plutôt que de répéter trois fois de suite le symbole pour 1/5, les égyptiens préféraient décomposer 3/5 en somme de fractions toutes différentes ayant l'unité pour numérateur.

$5+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=5+\frac{5}{7}=\frac{40}{7}$ $\qquad$ $\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$

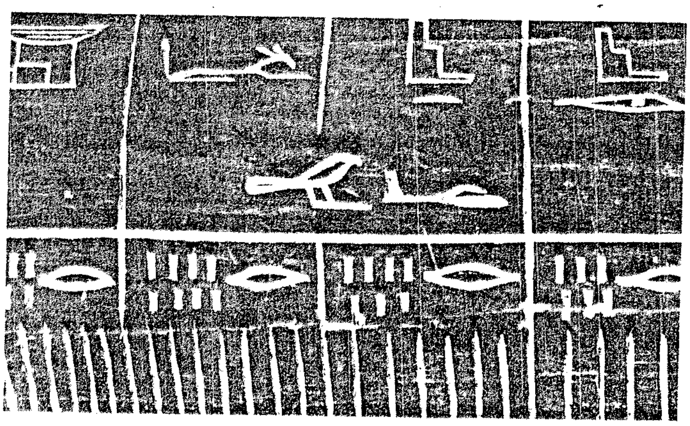
 $\frac{1}{232}+\frac{1}{174}+\frac{1}{58}+\frac{1}{24}=\frac{2}{29}$

Ce dernier exemple montre que les égyptiens n'utilisaient pas toujours la décomposition la plus simple puisque $\frac{2}{29}=\frac{1}{15}+\frac{1}{435}$.

Contrairement aux nombres entiers, l'addition des fractions présentait de grandes difficultés. Il fallait éviter de retrouver deux ou plusieurs fois la même fraction. D'où l'importance particulière de la duplication (c'est-à-dire de la multiplication par 2) qui joue un rôle capital dans les techniques égyptiennes de multiplications et de divisions des nombres. Pour résoudre ces problèmes, les égyptiens disposaient de tables numériques donnant la décomposition du double d'une fraction donnée. On comprend alors l'intérêt des décompositions ne faisant intervenir que des fractions de dénominateur pair (exemple de $\frac{2}{29}$ ci-dessus) ; il est facile d'en calculer le double.

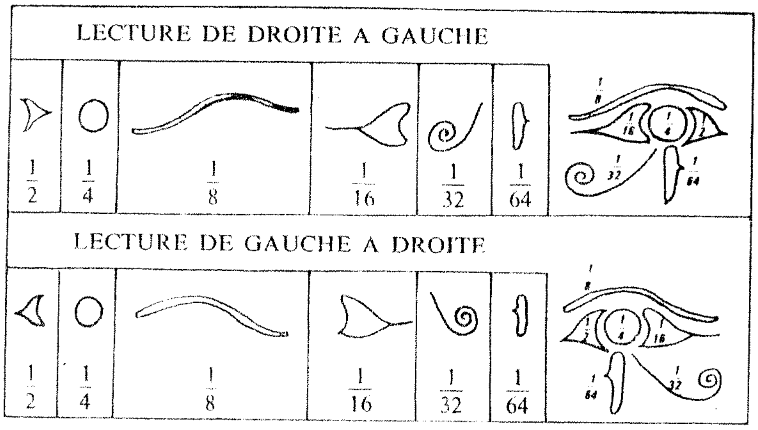
Les égyptiens utilisaient les fractions pour les unités de mesure :

- Pour les poids, il y avait le <u>deben</u> valant environ 91 grammes et le <u>kité</u> valant 1/10e de deben.
- Pour les longueurs il y avait la <u>coudée</u> royale valant environ 52,3 cm qui était divisée en 7 <u>palmes</u> ou 28 <u>doigts</u>. Chaque doigt était



divisé en fraction, du demi-doigt au seizième de doigt. La coudée de Maya reproduite partiellement ci-dessus, en donne un exemple. Chaque doigt est placé sous la protection d'un dieu.

- Pour les capacités, il y avait le "khar" divisé en 16 "héqat" (un héqat valant environ 4,6 litres). Le héqat était divisé selon les fractions 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 et 1/64. Ces fractions se rattachaient à l'oeil d'Horus, le dieu-faucon, oeil qui avait été dépecé en ces six morceaux par Seth (l'esprit du mal). Mais Thot, le dieu de la médecine et du calcul, recomposa par sa puissance l'oeil entier avec les 63/64.



LES TEXTES MATHEMATIQUES EGYPTIENS

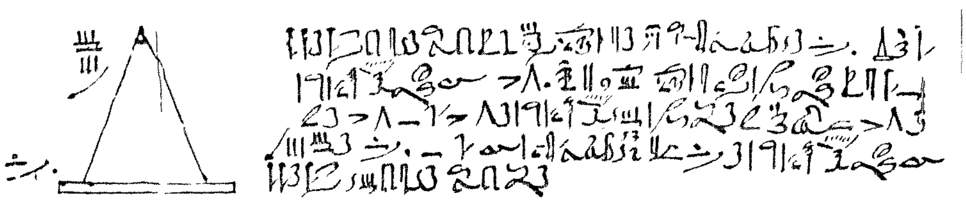
Nous ne possédons qu'un très petit nombre de textes mathématiques égyptiens. Le plus important est le célèbre papyrus de Rhind qui tire son nom d'Alexandre Henry Rhind, un homme de loi écossais, qui voyagea en Egypte au milieu du XIVe siècle, pour des raisons de santé. Il dirigea des fouilles dans la nécropole de Thèbes, et pendant son séjour il acheta de nombreux papyrus passant pour avoir été trouvés près du temple funéraire de Ramsès le Grand. Quand le papyrus mathématique fut acquis par Rhind, il était déjà séparé en deux parties. Une lacune d'environ 20 cm sépare ces deux parties. La première est longue de 2 mètres ; la seconde de 2,95 mètrès ; la largeur commune est de 32 cm.

Le titre du document établit qu'il a été écrit par le scribe Iahmès en l'an 33 de Aousserré Apophis, le grand souverain Hyksos de la XVIe dynastie (vers 1660 avant notre ère), étant copié sur un original écrit sous le règne du roi Amenemhat III de la XIIe dynastie (vers 1790 avant notre ère).

Le titre précise ensuite : "Règles pour étudier la nature et pour comprendre tout ce qui existe, chaque mystère, chaque secret" (!) Ce texte nous initie seulement à l'art de calculer et nous permet de résoudre les problèmes qui étaient ceux des administrateurs de l'Egypte ancienne.

La première section contient une table donnant la division de 2 par tous les nombres impairs de 3 à 101. Cette table était indispensable pour le calcul (addition, multiplication, division) avec des fractions égyptiennes. Les sections suivantes contiennent 84 problèmes arithmétiques : distribution de salaires, quantité de grains nécessaires à la production d'une quantité déterminée de pain ou de bière, calcul des volumes et des surfaces... On y trouve en particulier la méthode suivante pour le cercle : "L'aire du cercle de 9 coudées de diamètre est celle du carré de côté 8 coudées", ce qui donne à π la valeur aprochée 3,16...

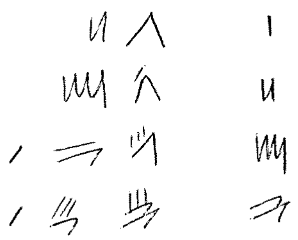
La graphie du texte hiératique est très lisible. On a utilisé de l'encre noire et de l'encre rouge, cette dernière étant employée pour les têtes de chapitre et pour mettre en valeur certains éléments dans la résolution des problèmes.



TECHNIQUES DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION

Soit à multiplier 15 par 3. Par duplications successives, on formera 15, 2 x 15, 4 x 15, 8 x 15 en adoptant la disposition :

/	15	1
	30	2
/	60	4
/	120	8



exemple du carré de 12.

Seules les opérations marquées d'un trait oblique devront être retenues ; on en fera la somme :

120 + 60 + 15 = 8 x 15 + 4 x 15 + 1 x 15 = (3 + 4 + 1) x 15 = 13 x 15 = 195

Pour des nombres plus importants, on utilise la simplicité de la multiplication par 10 qui s'obtient en décalant d'un rang tous les symboles. La même méthode s'appliquait pour des nombres fractionnaires en utilisant des tables :

$\left(1 + \frac{1}{9}\right) \times 8$

1	$1 + \frac{1}{9}$
2	$2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$
4	$4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$
8	$8 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right) \times 7 \quad = \left(1 + \frac{1}{9}\right) + \left(2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\right) + \left(4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right).$$
$$= 7 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}.$$
$$= 7 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18}.$$
$$= 7 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}.$$
$$= 7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}.$$

Pour la division on utilisait une procédure inverse. Soit par exemple à diviser 1120 par 80 (problème N° 69 du papyrus de Rhind). Le scribe précise "Additionne en commençant par 80 jusqu'à ce que tu trouves 1120". Pour les égyptiens, 1120 est le résultat (il est accompagné du hiéroglyphe qui est un rouleau scellé).

1120 ÷ 80	1	80	
	/ 10	800	or 800 + 320 = 1120
	2	160	donc le quotient est
	/ 4	320	10 + 4 = 14

Quand la division ne donne pas un nombre entier, la méthode est la même comme le montre les exemples suivants :

19 : 8	1	8
	/ 2	16
	$\frac{1}{2}$	4
	/ 1/4	2
	/ 1/8	1

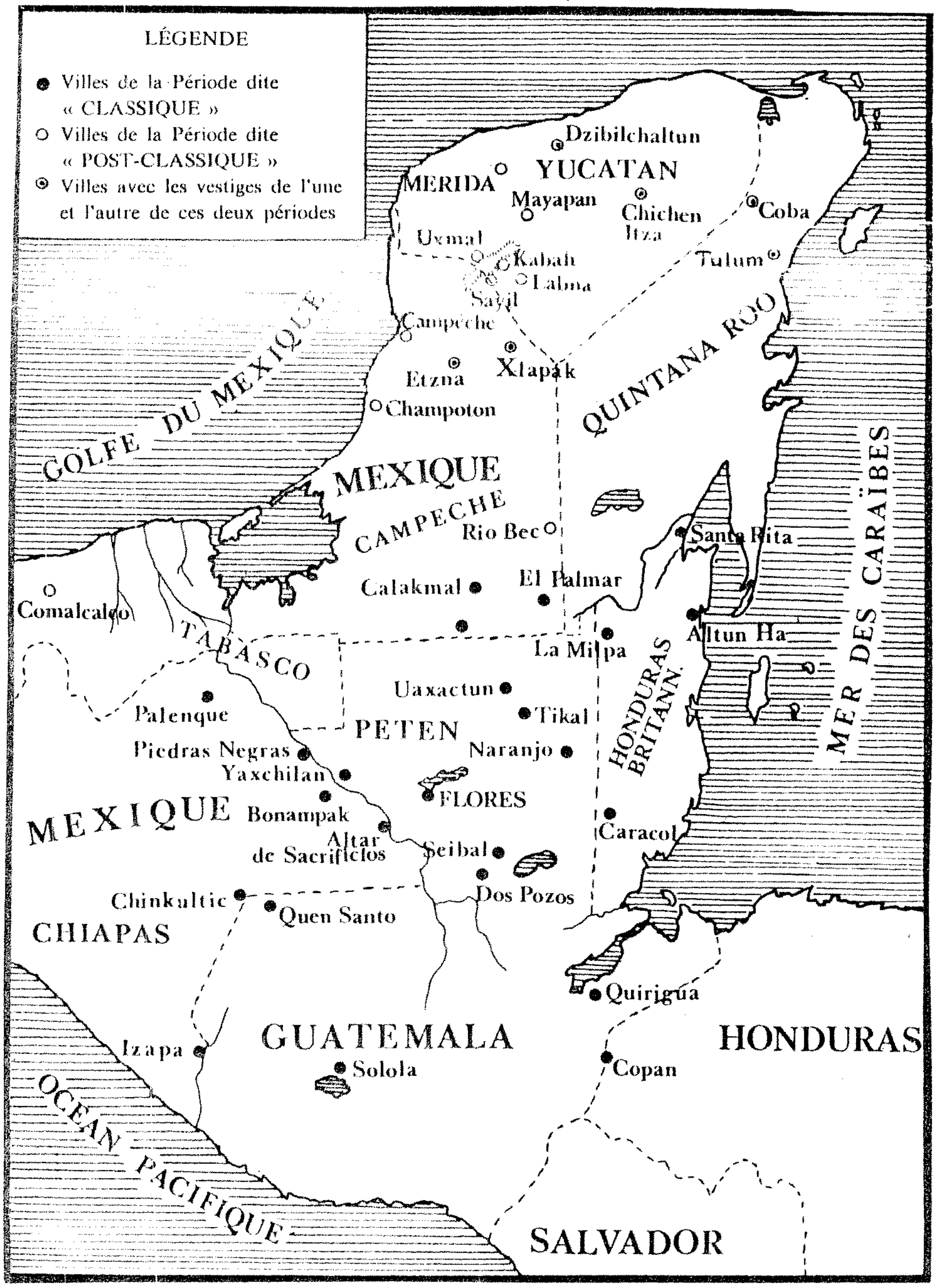
4 : 15	1	15
	1/10	$1+\frac{1}{2}$
	/ 1/5	3
	/ 1/15	1

7 : 9	1	9
	1/3	3
	/ 1/9	1
	/ 2/3	6

Donc $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ donc $\frac{4}{15} = \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ donc $\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$

M A Y A S

La civilisation maya débute aux alentours de l'an 300 de notre ère pour culminer au 9ème siècle. A partir du 10ème siècle les mayas subirent l'ascendant d'envahisseurs toltèques venus du nord de Mexico. La culture maya déclina lentement et malgré un renouveau au 13ème siècle, la civilisation maya avait totalement disparu à l'arrivée des espagnols, les principales villes ayant été envahies par la forêt tropicale.

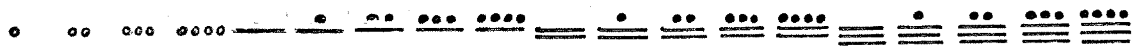


La numération maya peut être reconstituée à partir de l'étude des dialectes utilisés actuellement en Amérique centrale. Prenons l'exemple de la langue parlée dans le Yucatan.

1 : *hun*	11 : *buluc*
2 : *ca*	12 : *lahca* (*lahun* + *ca* = 10 + 2)
3 : *ox*	13 : *ox-lahun* (3 + 10)
4 : *can*	14 : *can-lahun* (4 + 10)
5 : *ho*	15 : *ho-lahun* (5 + 10)
6 : *uac*	16 : *uac-lahun* (6 + 10)
7 : *uuc*	17 : *uuc-lahun* (7 + 10)
8 : *uaxac*	18 : *uaxac-lahun* (8 + 10)
9 : *bolon*	19 : *bolon-lahun* (9 + 10)
10 : *lahun*	
20 : *hun kal*, « une vingtaine » *	
21 : *hun tu-kal*	mot à mot : un — (après le) — vingtième
22 : *ca tu-kal*	________ : deux — (après le) — vingtième
23 : *ox tu-kal*	________ : trois — (après le) — vingtième
24 : *can tu-kal*	________ : quatre — (après le) — vingtième
25 : *ho tu-kal*	________ : cinq — (après le) — vingtième
26 : *uac tu-kal*	________ : six — (après le) — vingtième
27 : *uuc tu-kal*	________ : sept — (après le) — vingtième
28 : *uaxac tu-kal*	________ : huit — (après le) — vingtième
29 : *bolon tu-kal*	________ : neuf — (après le) — vingtième
30 : *lahun ca kal*	________ : dix-deux-vingt
31 : *buluc tu-kal*	________ : onze — (après le) — vingtième
32 : *lahca tu-kal*	________ : douze — (après le) — vingtième
33 : *ox-lahun tu-kal*	________ : treize — (après le) — vingtième
34 : *can-lahun tu-kal*	________ : quatorze — (après le) — vingtième
35 : *holhu ca kal*	________ : quinze-deux-vingt
36 : *uac-lahun tu-kal*	________ : seize — (après le) — vingtième
37 : *uuc-lahun tu-kal*	________ : dix-sept — (après le) — vingtième
38 : *uaxac-lahun tu-kal*	________ : dix-huit — (après le) — vingtième
39 : *bolon-lahun tu-kal*	________ : dix-neuf — (après le) — vingtième
40 : *ca kal*, « deux vingtaines »	
41 : *hun tu-y-ox-kal*	mot à mot : un — troisième vingtaine
42 : *ca tu-y-ox-kal*	________ : deux — troisième vingtaine
43 : *ox tu-y-ox-kal*	________ : trois — troisième vingtaine
44 : *can tu-y-ox-kal*	________ : quatre — troisième vingtaine
....	....
58 : *uaxac-lahun tu-y-ox-kal*	________ : dix-huit — troisième vingtaine
59 : *bolon-lahun tu-y-ox-kal*	________ : dix-neuf — troisième vingtaine
60 : *ox kal*, «trois vingtaines »	
61 : *hun tu-y-can kal*	mot à mot : un — quatrième vingtaine
62 : *ca tu-y-can kal*	________ : deux — quatrième vingtaine
....	....
78 : *uaxac-lahun tu-y-can-kal*	________ : dix-huit — quatrième vingtaine
79 : *bolon-lahun tu-y-can-kal*	________ : dix-neuf — quatrième vingtaine
80 : *can kal*, « quatre vingtaines »	
81 : *hun tu-y-ho-kal*	mot à mot : un — cinquième vingtaine
82 : *ca tu-y-ho-kal*	________ : deux — cinquième vingtaine
....	....
98 : *uaxac-lahun tu-y-ho-kal*	________ : dix-huit — cinquième vingtaine
99 : *bolon-lahun tu-y-ho-kal*	________ : dix-neuf — cinquième vingtaine
100 : *ho kal*, « cinq vingtaines »	
....	
400 : *hun bak*, « une quatre-centaine » (20^2)	
8 000 : *hun pic*, « un huit-millier » (20^3)	
160 000 : *hun calab*, « un cent-soixante-millier » (20^4)	

On remarquera que pour les nombres à partir de 40 ainsi que pour les nombres 30 et 35 on commence par évaluer le nombre de vingtaines qu'il faudra entamer, comme si d'une façon très concrète, on alignait devant soi des hommes (chacun ayant 20 doigts) et que l'on comptât, par exemple, tous les doigts jusqu'au 13ème du 4ème homme (13 de la 4ème vingtaine soit 73 : ox - lahun tu-y-can kal).

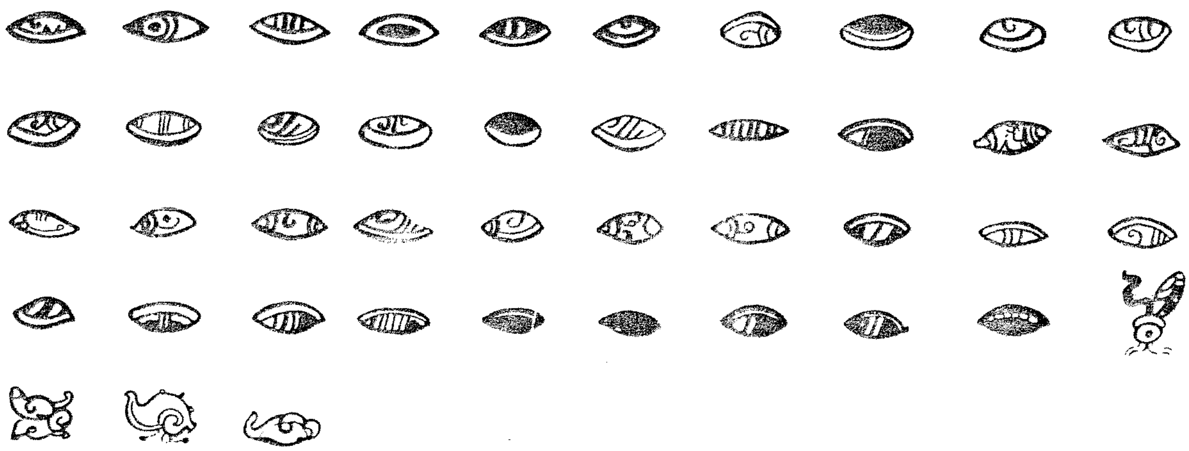
La numération orale est une numération de base 20 puisque ce nombre et ses puissances successives sont autant de paliers nécessitant un mot nouveau. 10 joue cependant un rôle particulier. Curieusement, ce rôle disparaît dans l'écriture des "chiffres" au profit de 5. Voici, en effet, l'écriture des nombres de 1 à 19 :



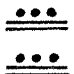
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

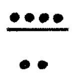
Eventuellement, pour faciliter "la mise en page" ces chiffres étaient tournés d'un quart de tour : 14 6 ....

De plus, les mayas utilisaient le zéro pour marquer l'absence d'unité d'un certain rang. Le "0" pouvait avoir les formes suivantes :



On pouvait croire que les mayas avaient développé un système de numération de position de base 20. On trouve effectivement :

 $\left.\begin{array}{c} 13 \times 20 \\ + \\ 13 \end{array}\right\} = 273$

 $\left.\begin{array}{c} 9 \times 20 \\ + \\ 2 \end{array}\right\} = 182$

 $\left.\begin{array}{c} 2 \times 20 \\ + \\ 0 \end{array}\right\} = 40$

Malgré la présence du "zéro" des confusions restaient possibles entre, par exemple :

6 et 20 + 5 } = 25

Cependant, aucun texte mentionnant une telle numération ne nous est parvenu, bien qu'il soit tentant de penser que pour l'usage quotidien et profane les mayas aient développé une numération de position où l'on aurait écrit, en accord avec la langue parlée :

8 x 400 + 0 x 20 + 12 = 3212

2 x 8000 + 6 x 400 + 9 x 20 + 3 = 18583

Au contraire, tous les textes connus qui contiennent des nombres sont relatifs au calendrier. Or pour compter le temps, les mayas regroupaient les jours de façon suivante :

1 kin = 1 jour ; 2 kin = 1 uinal = 20 jours (analogue du mois).
18 uinal = 1 tun = 360 jours (c'est l'année civile qui comportait en outre 5 jours néfastes : les Uayeb) ;
20 tun = 1 katun = 7200 jours.
20 katun = 1 baktun = 144000 jours ; 20 baktun = 1 pictun = 2880000 jours.

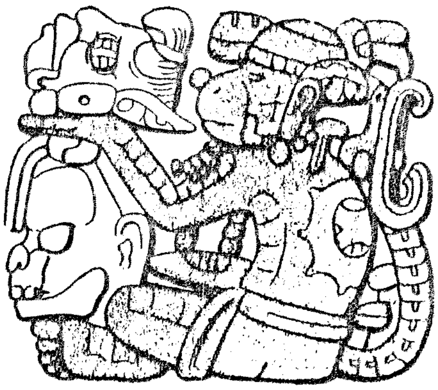
Si les années (tun) sont regroupées selon les puissances de 20 comme l'indique les préfixes : ka(l) = 20 ; bak = 20^2 ; pic = 20^3 ; c'est la journée qui est systématiquement utilisée pour évaluer les longues périodes :

4x360 +0x20 +16 } = 1456

2x360 +13x20 +1 } = 1001

2x7200 +0x360 +8 x 20 +0 } = 14560

a côté de cette écriture symbolique des nombres, les mayas utilisaient des "glyphes", en général en forme de têtes, et qui correspondaient à peu près à notre écriture en toutes lettres.



glyphe signifiant 16 jours

singe = kin = jour
tête de mort = 10
autre tête = 6

ROME

ORIGINE

Il s'agit sans doute d'encoches ou d'entailles faites dans un morceau de bois pour les comptes et décomptes.

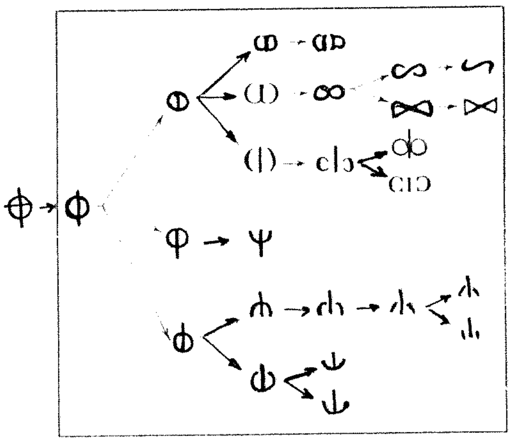
| pour 1 V pour 5 X pour 10 ↆ pour 50 ⋇ pour 100

Ces symboles se retrouvent chez les étrusques. Les trois premiers n'ont pas changé . Pour les deux autres, on a :

ↆ ↓ ⊥ ⊥ L ce dernier signe étant tardif

⋇)( ) ou C puis C sous l'influence de CENTVM

Pour noter les nombres plus grands, les romains introduisirent un signe pour mille, qui évolua de façons diverses et finit par se confondre avec M sous l'influence de MILE. Le signe pour 500 fut naturellement la moitié de celui pour mille.



Signes pour "mille"

signes pour "500"

DEVELOPPEMENT

L'écriture des nombres est additive, c'est-à-dire que l'on ajoute tous les symboles écrits. Les symboles correspondants aux nombres les plus grands sont placés à gauche :

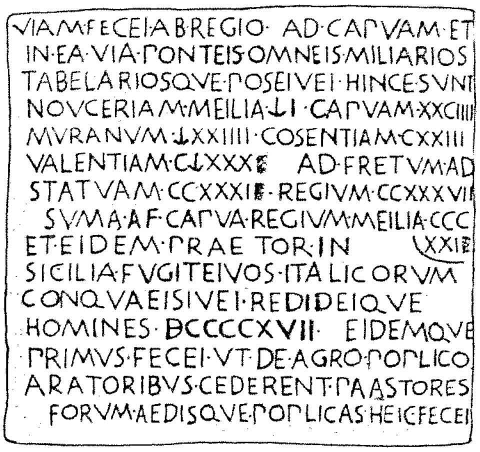
CIↃCIↃCIↃ IↃCCXVIII — 3718

DCCCC LXXXXVIIII — 999

Cet ordre est systématiquement utilisé dans les écritures soignées et dans tous les calculs. Ce n'est que faute de place que l'on recourt au principe soustractif : une inversion de l'ordre décroissant des symboles implique la soustraction des plus petits placés avant le plus grand :

LXXXIV	IM	XCIV	XXIIX	CMXLIV
84	999	94	28	944

Cette méthode ambigüe fut généralisée à l'époque chrétienne et sous le bas empire.


VIAMFECEIABREGIO AD CAPVAM ET
IN EA VIA PONTEIS OMNEIS MILIARIOS
TABELARIOSQVE POSEIVEI HINCE SVNT
NOVCERIAM MEILIA LI CAPVAM XXCIIII
MVRANVM LXXIIII COSENTIAM CXXIII
VALENTIAM CLXXX AD FRETVM AD
STATVAM CCXXXI REGIVM CCXXXVII
SVMA AF CAPVA REGIVM MEILIA CCC
ET EIDEM PRAETOR IN XXII
SICILIA FVGITEIVOS ITALICORVM
CONQVAEISIVEI REDIDEIQVE
HOMINES DCCCCXVII EIDEMQVE
PRIMVS FECEI VT DE AGRO POPLICO
ARATORIBVS CEDERENT PAASTORES
FORVM AEDISQVE POPLICAS HEIC FECEI

Un tel système de numération ne permettait pas de dépasser 5000, sauf à créer de nouveaux symboles ce que firent les romains en généralisant le principe que chaque symbole correspond alternativement au quintuple et au double du précédent. D'où l' invention :

((I))	pour 10000	(((I)))	pour 100000	et naturellement
I))	pour 5000	I)))	pour 50000.	

La numération parlée s'arrêtait à 100000 comme le rapporte Pline.

DECEM CENTVM MILLE	premier palier
DECEM MILIA CENTVM MILIA	deuxième palier
DECIES CENTENA MILIA CENTIES CENTENA MILIA	palier supérieur théorique

Pour noter les nombres plus grands, les romains encadrèrent les multiples de 100'000 ce qui rendit caduc (((I)))

|X| 1'000'000 |LX| 6'000'000 |CXXIII| ((I))((I))((I))((I)) I)) DCLXXVIII 12'345'678

Plus tard, dans un but de simplification les multiples de 1000 furent surlignés :

$\overline{XXX}$LIX 30'059 $\overline{MC}$ 1'100'000 |MCCXXXIIII|$\overline{LVI}$ DCCLXXXVIIII 123'456'789

Mais les confusions entre les deux principes, les erreurs des scribes et des copistes sont sources de mauvaises interprétations et même de fraudes

LA MONNAIE :

L'unité est le "sesterce" ou SESTERTIUS qui comme son nom l'indique (il manque un demi pour faire trois) vaut deux as et demi - d'où l'abréviation ~~HS~~ qui deviendra HS - un sesterce vaut un quart de "denier " ; six mille deniers valent un "talent".

1	sestertius	
10	decem sestertii	H S decem
10^2	centum sestertii	H S centum
10^3	mille sestertii ou sestertium	H S mille
10^4	decem sestertia	H S decem milia
10^5	centum sestertia	H S centum milia
10^6	decies sestertium	H S decies
10^7	centies sestertium	H S centies
10^8	milies sestertium	H S milies
10^9	decies milies sestertium	H S decies milies

Le tableau ci-dessus fait apparaître les subtilités grammaticales lors des comptes et calculs avec les sesterces. On voit se manifester de nouveau le palier pour 1000 et celui pour 100000.

L'écriture en chiffre est très délicate :

HS MC	1100 sesterces	
HS $\overline{\text{MC}}$	1100 x 100000 1100 x 1000	La règle varie suivant les époques (!)
HS $\overline{|\text{MC}|}$	1100 x 100000	
HS III·XII·DC	3 x 100000 + 12.100 + 600 = 312 600 sesterces	
HS XII·L·D	1 250 500 sesterces	

Cette dernière notation ne présente pas d'ambiguité si les trois tranches sont complètes ; sinon il faut préciser :

HS $\overline{\text{XXX}}$·LIX	30 059	HS $\overline{|\text{XVII}|}$ L	1700 050
HS $\overline{\text{XVII}}$·L	17 050	HS $\overline{|\text{XVII}|}$ $\overline{\text{L}}$	1750 000
HS $\overline{\text{XII}}$·DL	12 550	HS $\overline{|\text{XII}|}$DL	1200 550

On remarque que la tranche de droite contient des nombres inférieurs à mille et celle du milieu des nombres inférieurs à cent.

CHINE

La chine a une civilisation plusieurs fois millénaires, et les systèmes de numération ont largement évolué au cours des siècles. Si actuellement la numération de position avec des chiffres arabes est systématiquement utilisée dans les publications scientifiques, la numération traditionnelle est toujours bien vivante avec ses différentes variantes aux emplois bien précis.

Les chinois écrivent verticalement, mais la tendance actuelle est d'écrire les nombres horizontalement de gauche à droite. Voici les idéogrammes utilisés et leur signification.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10 000

Pour écrire : trois mille quatre cent soixante (six dizaines) huit

on aura : 三 千 四 百 六 十 八

La numération écrite chinoise est donc la traduction fidèle de la numération parlée dont le principe est analogue à la nôtre, mais avec une très grande régularité : on a "six-dix" et non pas "soixante" ; on a "un mille un cent" et non pas "mille cent..."

Selon le même système, il existe d'autres idéogrammes plus complexes, les "guĕn zí" ou chiffres officiels, qui sont utilisés dans la comptabilité et dans la finance et dont les altérations frauduleuses sont plus difficiles. Tous ces caractères admettent des écritures cursives de styles variés. Il existe de plus une forme cursive usitée dans le commerce et le calcul courant et qui présente des archaïsmes et témoigne d'une influence des fiches à calcul (voir plus loin).

〡	〢	〣	〤	〥	〦	〧	〨	〩	十	百	千
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000

万

10000

Pour écrire ou énoncer des grands nombres la méthode usuelle consiste à les décomposer en tranche de 10000.

四 萬 八 千 七 百 三 十 九 萬 六 百 二 十 九

$(4 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10 + 9) \,.\, 10^4 + 6 \times 10^2 + 2 \times 10 + 9 =$

487390629

C'est, on le voit, une méthode analogue à celle que nous utilisons dans la langue parlée, mais le palier a lieu à la myriade (10000) et non pas au milier (sept cent vingt huit mille trois cent trente sept). Pour les besoins scientifiques, essentiellement astronomiques, les savants chinois ont développé le système de numération en inventant d'autres mots, et les idéogrammes correspondants, pour les puissances successives de dix. Trois méthodes distinctes sont utilisées :

le <u>xià deng</u>, <u>le zhōng deng</u> et le <u>shàng deng</u> qui sont respectivement les degrés inférieurs, moyens et supérieurs.

		Système « xià deng » DEGRÉ INFÉRIEUR	Système « zhōng deng » DEGRÉ MOYEN	Système « shàng deng » DEGRÉ SUPÉRIEUR
萬	wàn	10^4	10^4	10^4
億	yì	10^5	10^8	10^8
兆	zhào	10^6	10^{12}	10^{16}
京	jing	10^7	10^{16}	10^{32}
垓	gai	10^8	10^{20}	10^{64} VALEURS THEORIQUES
補	bù	10^9	10^{24}	10^{128}
壤	ràng	10^{10}	10^{28}	10^{256}
溝	gou	10^{11}	10^{32}	10^{512}
澗	jián	10^{12}	10^{36}	10^{1024}
正	zheng	10^{13}	10^{40}	10^{2048}
載	zái	10^{14}	10^{44}	10^{4096}

五載三正一壤七垓二兆

$5 \times 10^{14} + 3 \times 10^{13} + 1 \times 10^{10} + 7 \times 10^8 + 2 \times 10^6$

degré inférieur

三百五十壤七千三百兆二十六億

$(3 \times 10^2 + 5 \times 10).10^{28} + (7 \times 10^3 + 3 \times 10^2).10^{12} + (2 \times 10 + 6).10^8$

degré moyen

三京五千三百一億二百七萬六千一百八十五兆三億一萬

$3 \times 10^{32} + \left[[5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1].10^8 + [2 \times 10^2 + 7].10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 8 \times 10 + 5 \right] 10^{16} + 3 \times 10^8 + 1 \times 10^4$

degré superieur

La confusion entre les trois degrés est facilement évitée en précisant à l'avance celui qui est utilisé. On comparera aux mots français suivants

milliard	billion	billiard	trillion.....	dans l'usage courant, synonymes de
billion	trillion	quatrillion	quintillion ...	dans les recommendations de l'AFNOR.
↓	↓	↓	↓	
10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	

En étendant cette méthode vers les puissances négatives de 10, les chinois surent très tôt, dès le 3ème siècle de notre ère écrire les nombres décimaux :

三	丈	一	尺	四	寸	一	分	五	厘	九	毫	二	秒	七	忽
3	unités	1	$\frac{1}{10}$	4	$\frac{1}{100}$	1	$\frac{1}{1000}$	5	10^{-4}	9	10^{-5}	2	10^{-6}	7	10^{-7}

est une valeur approchée de π calculée au 5ème siècle par le mathématicien Zu chong-zhi (430-501).

Dès le début de l'ère chrétienne, les chinois disposent d'une notation pour les fractions :

b 分 之 a signifie $\frac{a}{b}$

Cependant, sous l'influence étrangère, en particulier indienne, les chinois ont introduit le zéro (0) et la numération de position pour les besoins des calculs et pour la rédaction de tables numériques :

	TRADUCTION
三〇六九	3069
四五	45
一五三四五	15345
一二二七六	12276
一三八一〇五	138105

九四二〇二七九〇六〇

9 4 2 0 2 7 9 0 6 0

Exemple extrait du Ting chü Suan-fa (la méthode de calcul de Tingchü) publiée en 1355. Il s'agit de la technique de la multiplication de 3069 par 45.

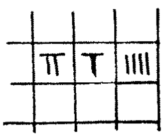
Exemple extrait d'une table de logarithme décimaux publiée en 1713. Il s'agit du logarithme de 8,7504.

Calculs scientifiques anciens

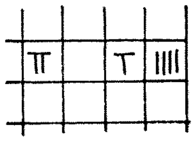
Pour les calculs, les chinois ont depuis très longtemps utilisé des baguettes de bambou qu'ils disposaient sur des tableaux ou abaques en forme de damier. Chaque case du damier correspondait à une certaine puissance de 10 (unités, dizaines, centaines...) et recevait le nombre de baguettes nécessaires pour figurer le nombre voulu. Pour éviter une accumulation illisible des baguettes, une baguette perpendiculaire aux autres et valant 5 simplifiait l'écriture, d'où les représentations suivantes :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

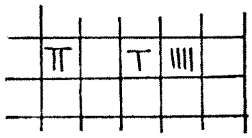
et les nombres étaient disposés sur l'abaque de la façon ci-dessous :



764



7064



70640

Mais très tôt, quand il s'est agit de représenter les nombres en dehors de l'abaque pour conserver la trace d'un calcul, le calculateur s'est heurté à un risque de confusion évidente entre, par exemple, I II (12) et III (3). D'où l'idée d'utiliser une deuxième représentation :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

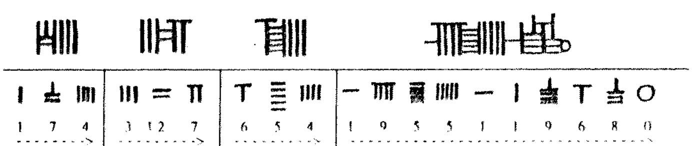
et de noter alternativement chaque chiffre à l'aide de l'une ou de l'autre série. C'est la notation suan zì qui est en usage depuis le 3ème siècle avant notre ère.

3 3   1 9 8 6 1 7   6 5 4   2 8   1 7 4

Dès qu'ils eurent connaissance du zéro, vers le 8ème siècle, les chinois l'introduisirent pour noter l'absence de marque dans une case de la table de calcul :

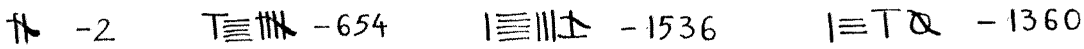
1 0   2 0   1 4 7 0 0 0   1 0 6 9 2 9   1 0 6 8 2 7 0

Dans un souci de concision, les chinois n'hésitaient pas à écrire les nombres en liant les chiffres les uns aux autres.



174   327   654   1 955 119 680

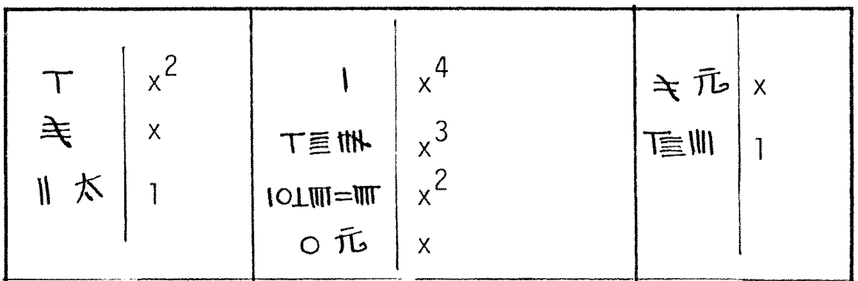
Les nombres négatifs apparaissent dès le 2ème siècle avant notre ère ; ils sont notés en barrant le dernier chiffre.



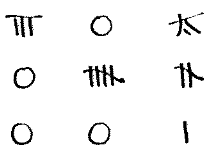
Avec l'apparition du zéro, les chinois purent noter les nombres décimaux, tout au moins ceux compris entre - 1 et + 1 selon la technique donnée par les exemples suivants :

0,21	0,75	0,00667208	-0,37

Au milieu du 13ème siècle, les mathématiciens Qin Jiu Zhao (chez les Yuans, au nord) et Li Ye (chez les Song au sud) introduisent le calcul des polynomes. On écrit les coefficients d'un polynôme à une variable dans l'ordre des puissances croissantes ou décroissantes, selon une colonne du tableau de calcul. Le symbole 元 désigne la variable et 太 la constante (centre de la terre).
Par une disposition savante selon deux directions, ce système est généralisé aux polynômes de plusieurs variables - jusqu'à 4 -.



$6x^2 - 3x + 2$	$x^4 - 654x^3 + 106929x^2$	$- 2x + 654$



sont les coefficients de :

y^2	y	1
xy^2	xy	x
x^2y^2	x^2y	x^2

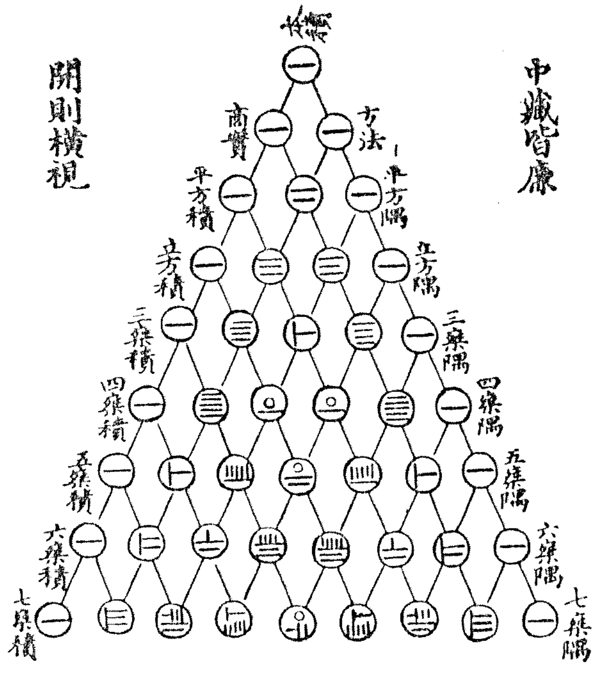
On a donc le polynôme $x^2 - 4xy + 8y^2 - 2x \quad (= 0)$

Exemples d'utilisation

1° Extrait du Tshé Yuan Hai Ching, ouvrage publié en 1248 par le mathématicien Li Yé. on relèvera dans cette page tous les nombres écrits selon l'un ou l'autre système et tous les polynômes

股減邊股餘[illegible]爲高弦以倍之得[illegible]爲黃廣弦也
內[illegible]減邊股得[illegible]爲其股復以邊股乘之得[illegible]於
上又以明弦自乘得二萬三千四百〇九爲分母以乘
上位得[illegible]爲帶分半徑寄左然後置黃廣弦以天
元乘之得下[illegible]復合以明弦除之不除寄爲母便以
此爲今徑又半之得下[illegible]爲半徑自之得[illegible]爲
同數與左相消得下式[illegible]三乘方得七十
二步即明勾也餘各依法入之合問
又法邊股內減[illegible]明弦復以邊股乘之復以明弦羃乘之
爲三乘方[illegible]廉從併與前同

2° On croit souvent que Blaise Pascal est le premier inventeur du tableau triangulaire qui porte son nom. Il n'en est rien comme le prouve le texte ci-dessous extrait du Ssu Yuan Yu Chien publié en 1303 par le mathématicien Chu Shih Chieh. (Les arabes connaissaient ce tableau depuis au moins le XIème siècle).



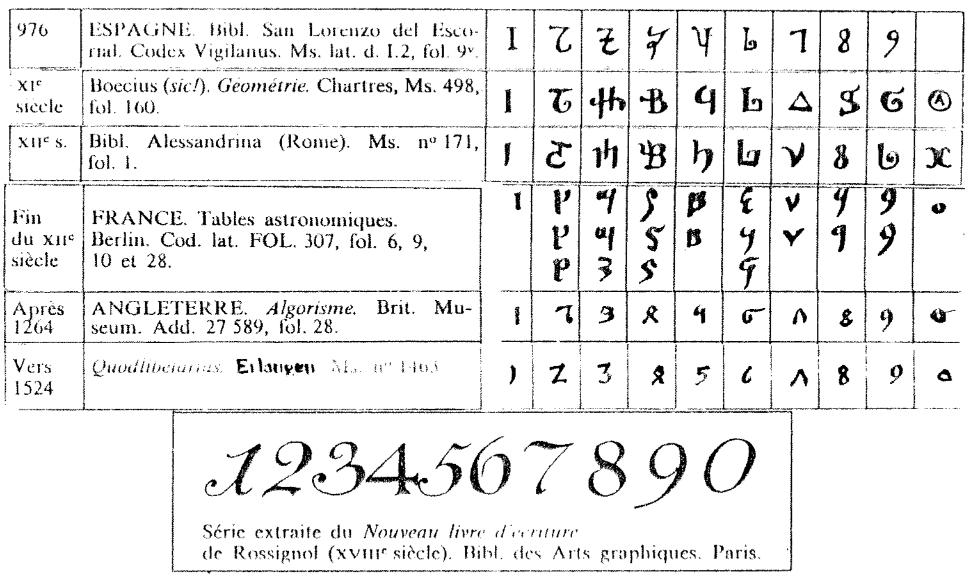
Chaque nombre du triangle de Pascal est la somme des deux nombres immédiatement supérieurs. Une ligne du tableau donne les coefficients du développement de $(a + b)^5 = 1\,a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + 1\,b^5$.

E U R O P E

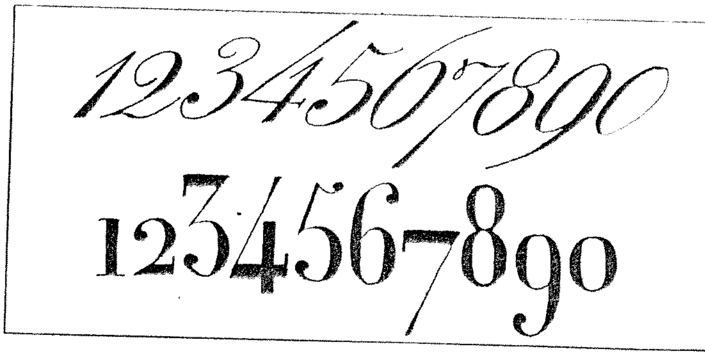
Malgré l'introduction de la numération arabe vers l'an mille, les chiffres romains furent encore, et pendant longtemps, employés dans les textes et les calculs. Différents auteurs cherchèrent avec plus ou moins de succès à améliorer le système latin.

1120	Adelard de Bath :	$\bar{c}$. $\overline{\text{lxiiij}}$. ccc . lj	164 351
		le j terminal remplace le i pour éviter des fraudes	
1125	Jordanus Nemorarius	II . DCCC . XIIII	2 814
1388	Paris	IIII xx et huit	88
		c'est plutôt une abréviation qu'un système	
1392	manuscrit espagnol	$\overset{M}{\text{IIII}}$ $\overset{C}{\text{IIII}}$ $\overset{X}{\text{VII}}$ III	4473
		intéressante notation multiplicative	
1568	Baker	Four Cli M, Two Cxxx IIII , million, sixe ClxxviiiM, fiue Clxvii .	
		451 234 678 567	

La première mention en Europe des chiffres arabes date de 976.
On trouvera ci-dessous quelques étapes de leur évolution.

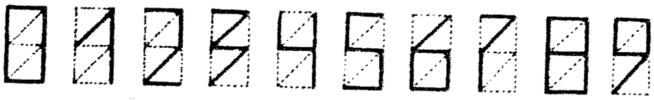


Série extraite du *Nouveau livre d'écriture* de Rossignol (XVIIIe siècle). Bibl. des Arts graphiques. Paris.

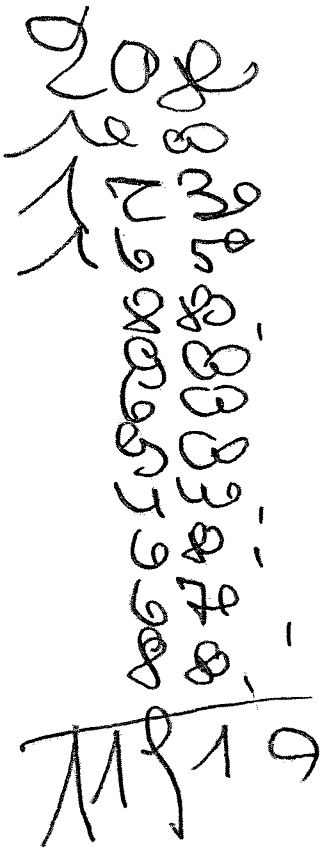


Séries extraites de la *Typologie ou description détaillée des caractères alphabétiques... à l'usage des sculpteurs, fondeurs, etc., et particulièrement destinée aux peintres en bâtiments* de Moreau Dammartin Paris 1850.

Внимание!
Обравец написания индексов:



(code postal d'URSS)



L'exemple ci-contre de chiffres manuscrits actuels montre bien la très grande variété des formes d'un style à l'autre, d'un individu à l'autre. Chacun pourra comparer avec sa propre écriture.

ORIGINE ET EVOLUTION DES CHIFFRES

Les chiffres que nous appelons arabes, ont pour origine première l'Inde. C'est l'invention du zéro au 6ème siècle de notre ère qui combinée avec une numération de position a permis une simplification géniale de l'écriture des nombres. Il suffit de dix chiffres pour écrire un nombre aussi grand que l'on veut. Voilà ce qui a fait le succès et permis l'expansion extraordinaire de ce système de numération.

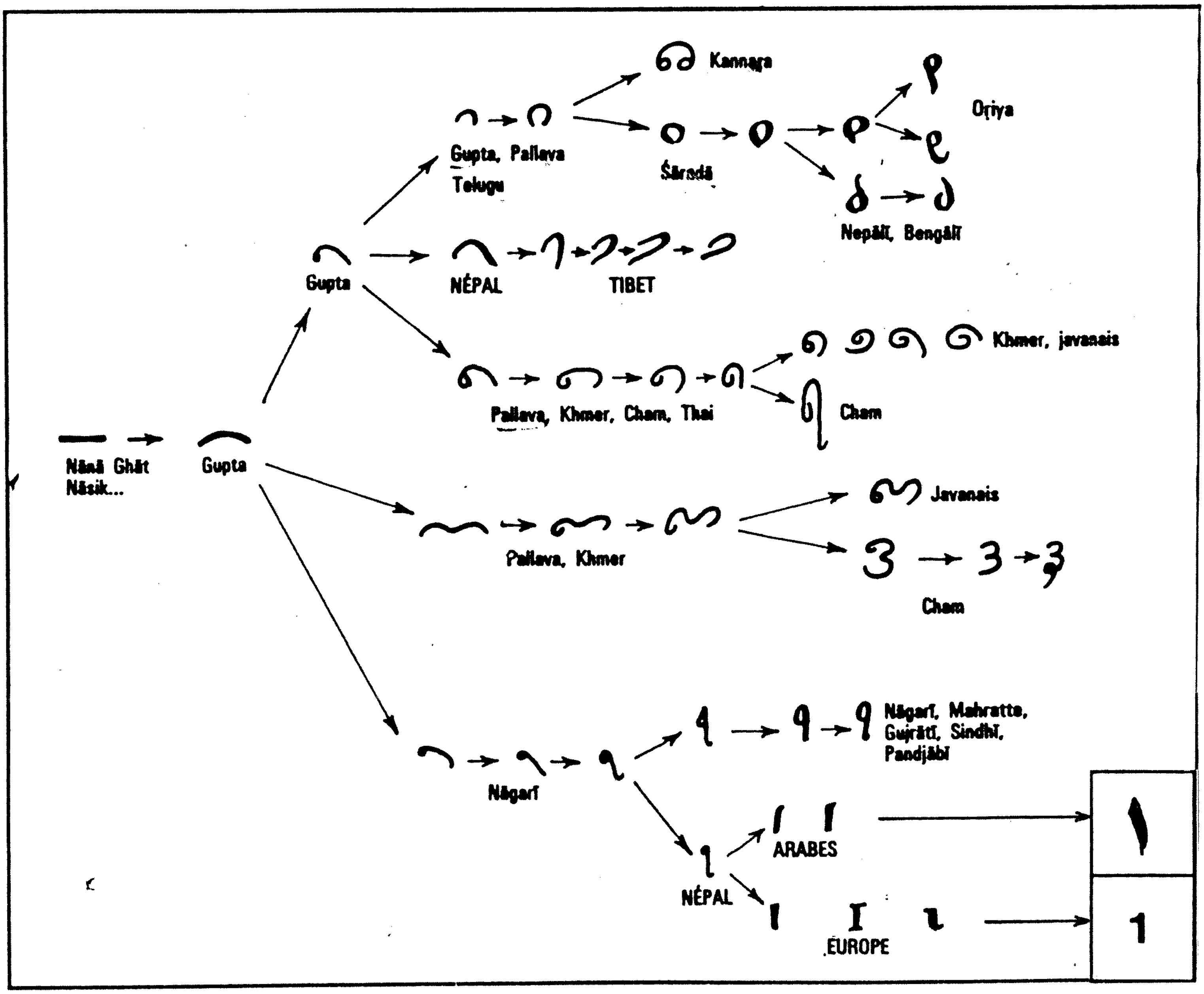
La première mention connue date de l'an 595 de notre ère et provient de Bharukaccha. Un siècle plus tard, cette même numération était utilisée par les khmers et les malais. Au huitième siècle, les chinois adoptent le principe du zéro en conservant leurs propres chiffres. C'est en 773 que les arabes eurent connaissance de la numération indienne par un voyageur qui offrit une table des sinus au calife de Bagdad Al-Mansur.

En passant d'un peuple à l'autre, les chiffres subirent diverses modifications dues à plusieurs raisons :

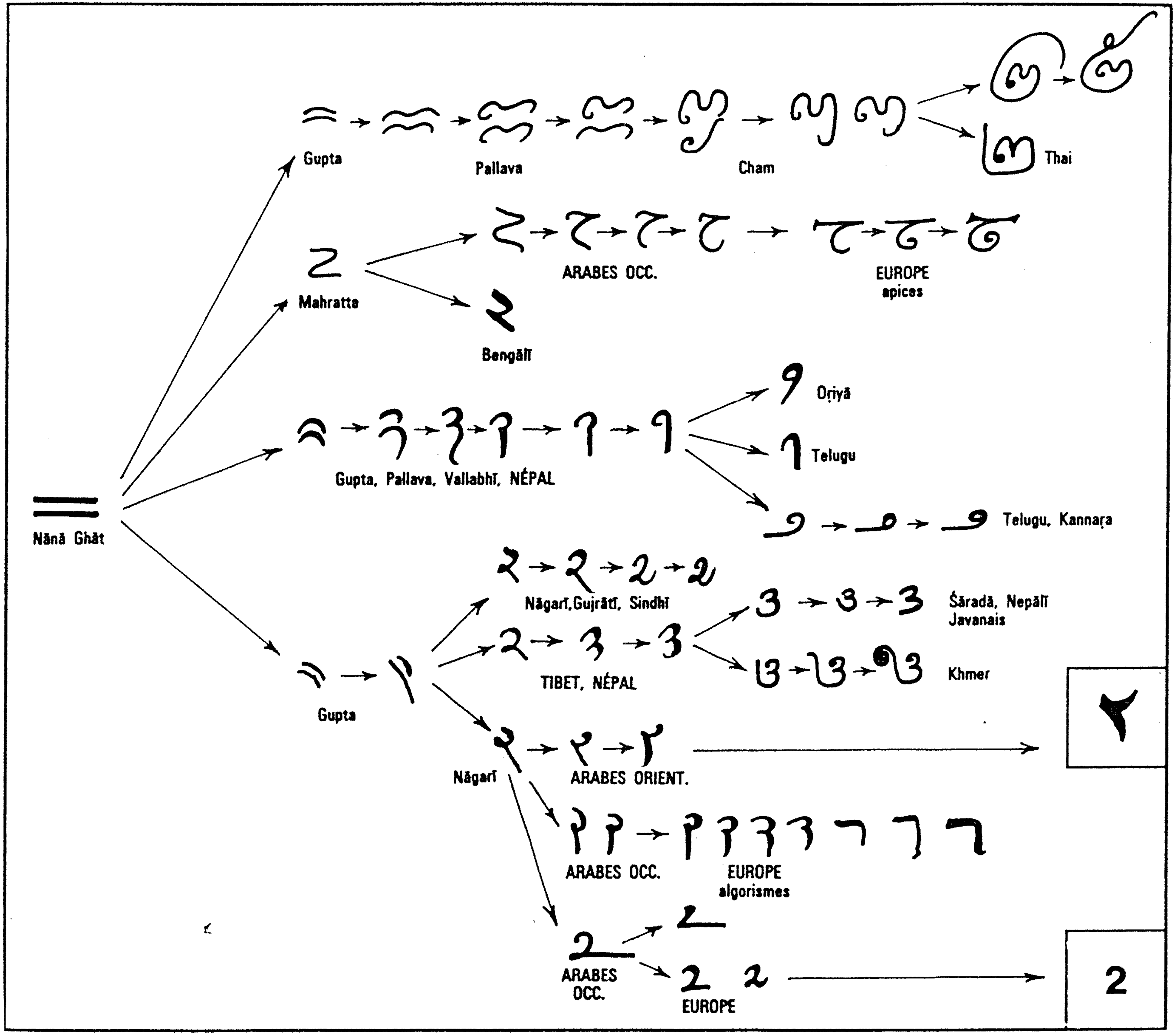
- Influence des symboles précédemment utilisés ; c'est le cas du "cinq" en arabe.
- Influence du sens de l'écriture ; cela retourne parfois les symboles.
- Influence du style de l'écriture ; cela entraîne l'apparition de boucles, queues, appendices qui prennent souvent plus d'importance que le signe lui-même
- Influence du support de l'écriture : pierres, argile, métal, parchemin...

En Europe, les apices sont des jetons sur lesquels sont écrits les chiffres et que l'on place sur des tableaux pour faciliter le calcul des opérations. De tels jetons sont facilement posés à l'envers. C'est le cas du "deux" par exemple.

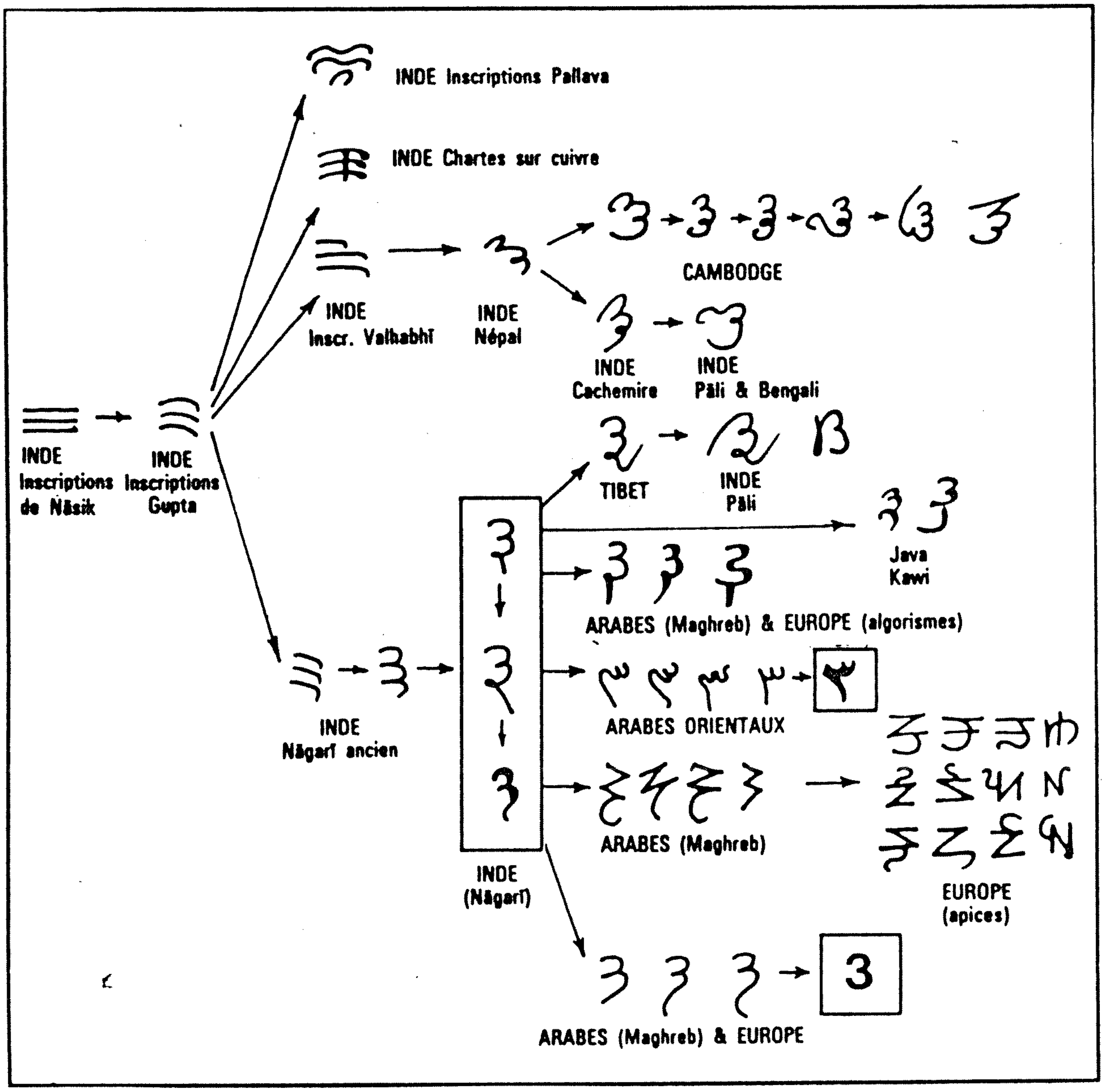
On a vu plus haut des exemples plus récents des modifications de la forme des chiffres. C'est au moine français Gerbert d'Aurillac qui s'initia aux mathématiques et à l'astronomie arabes en Espagne puis les enseigna à Reims avant de devenir Pape en 999 sous le nom de Sylvestre II que l'on doit l'introduction de la numération indo-arabe en Europe.



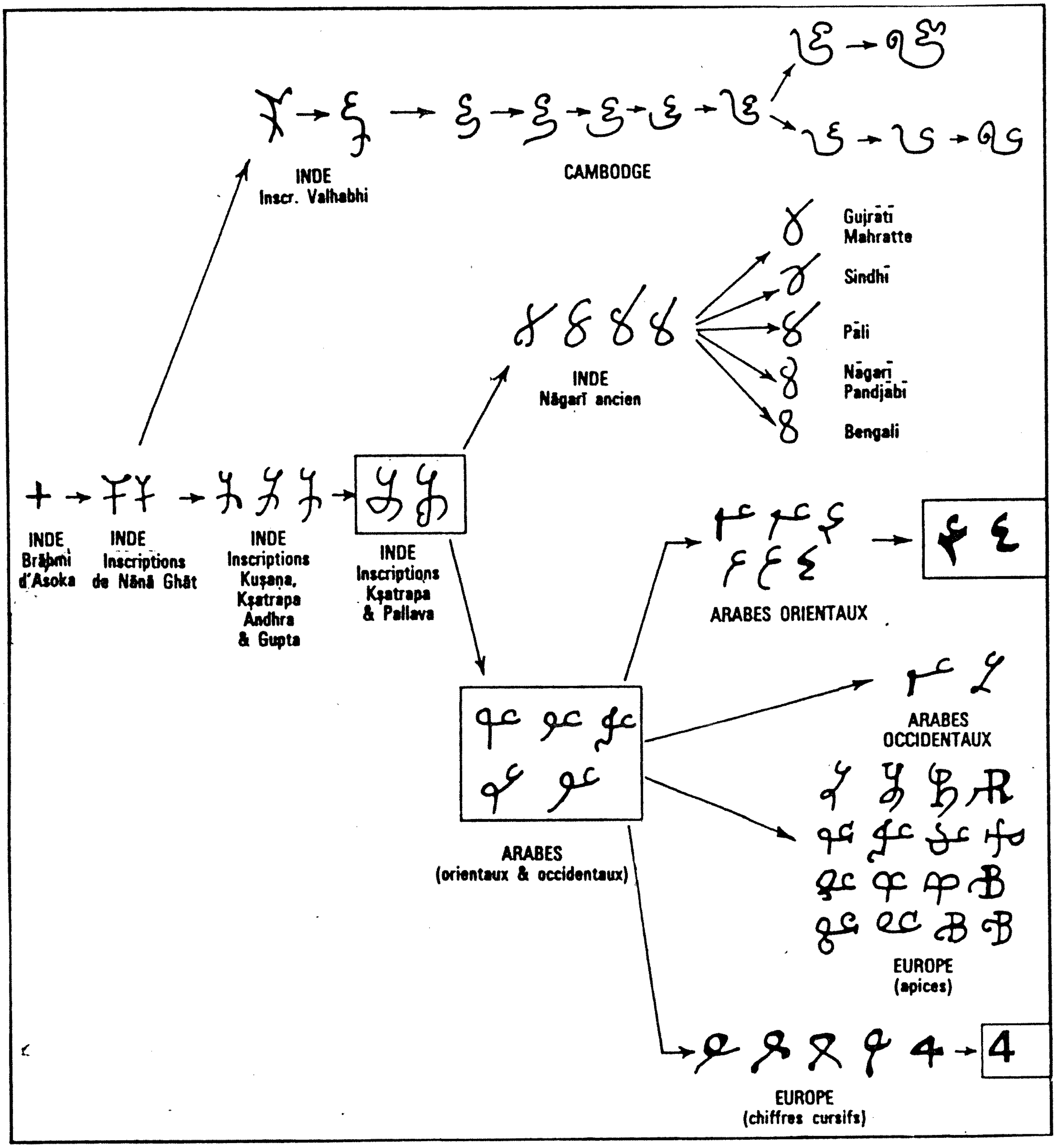
Origine et évolution du chiffre 1.



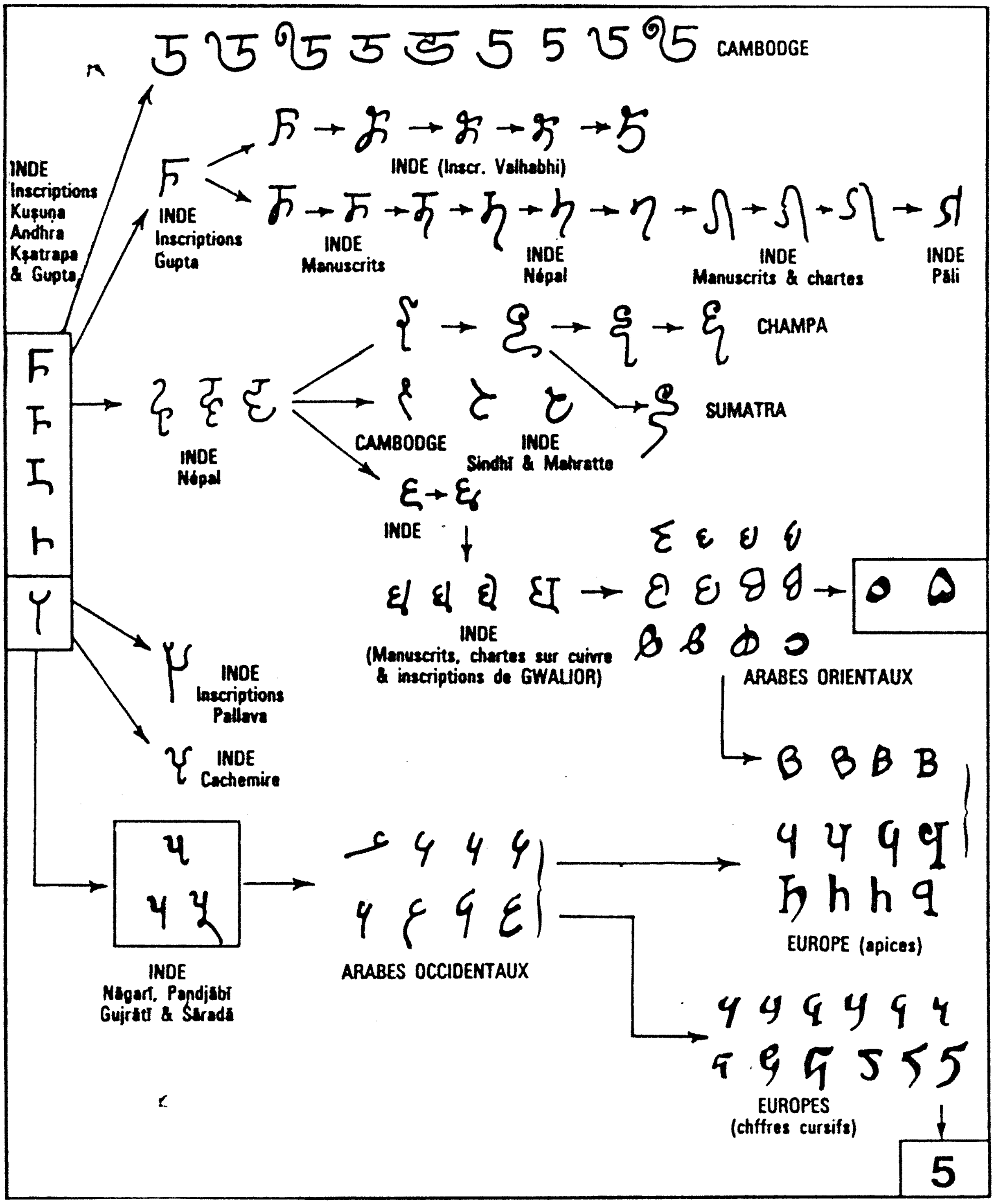
Origine et évolution du chiffre 2.



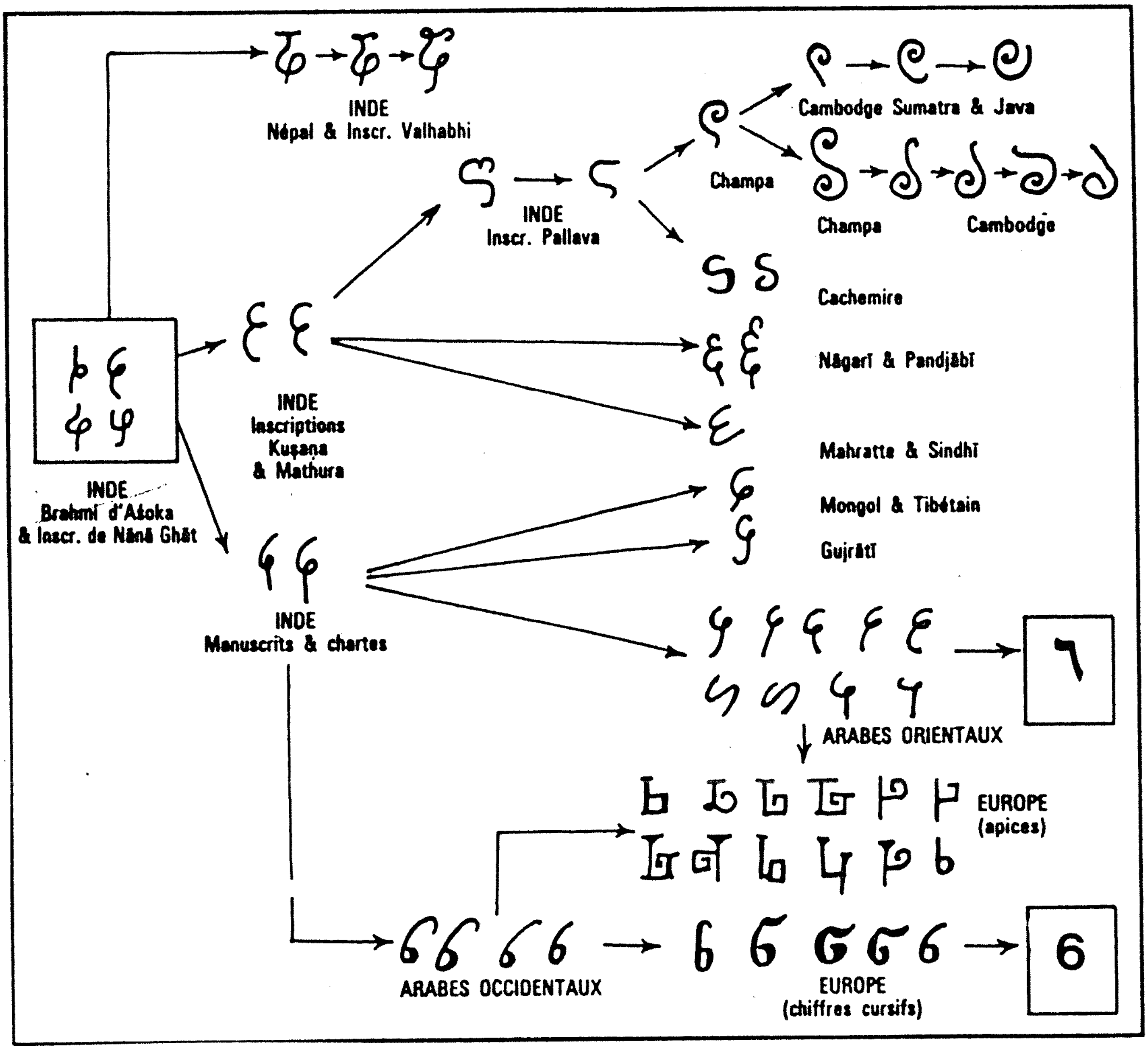
Origine et évolution
du chiffre 3.



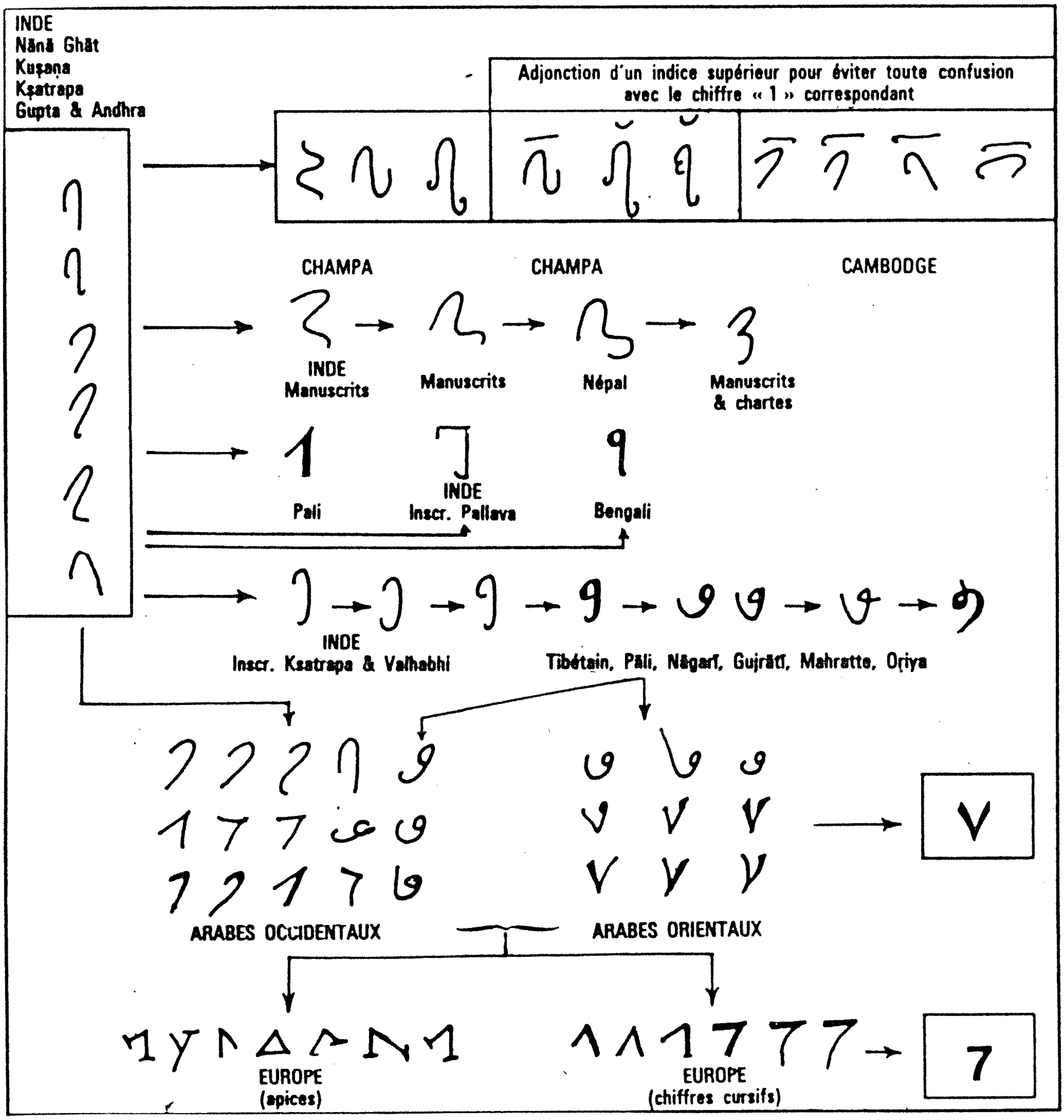
Origine et évolution du chiffre 4.



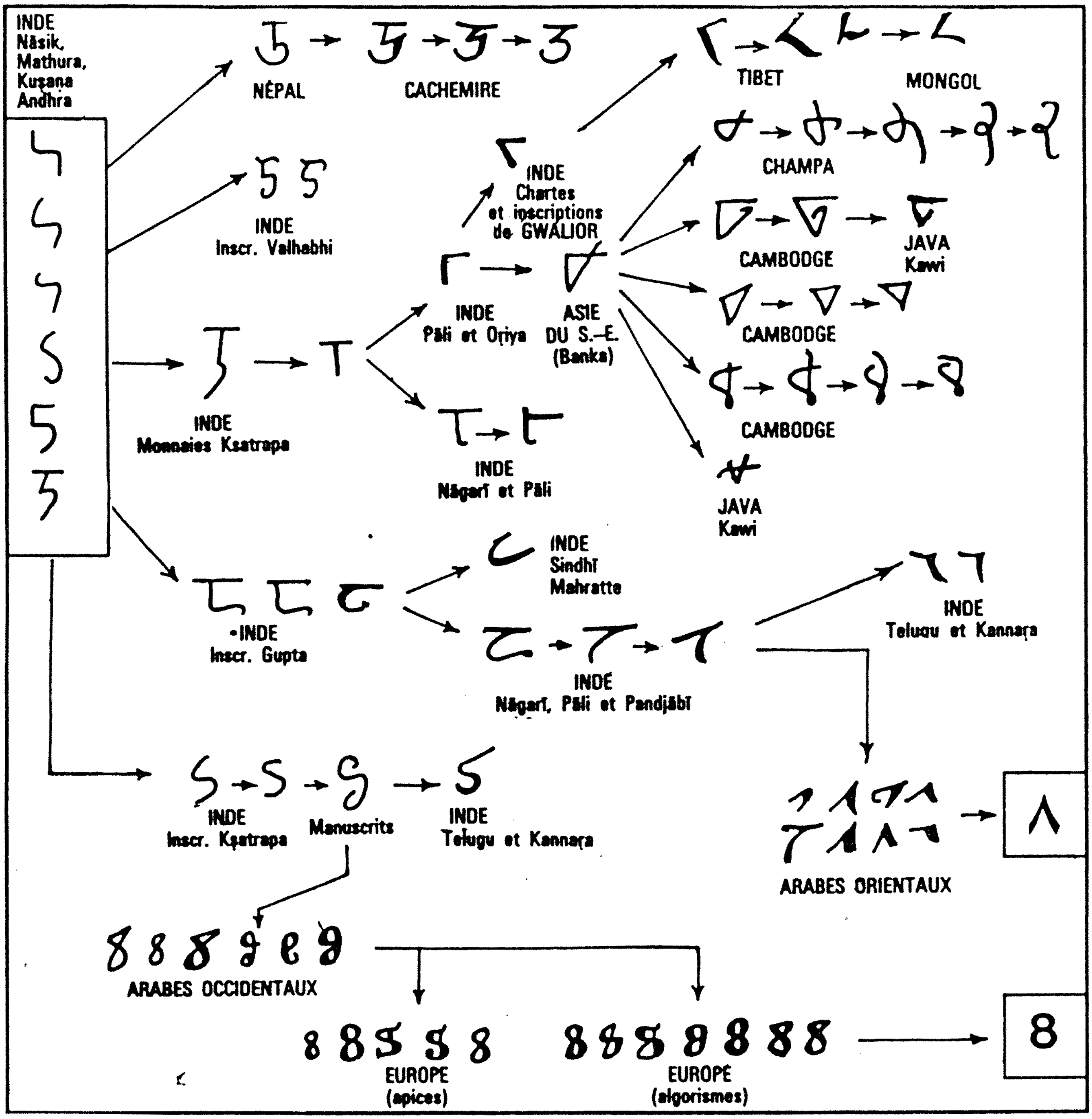
Origine et évolution du chiffre 5.



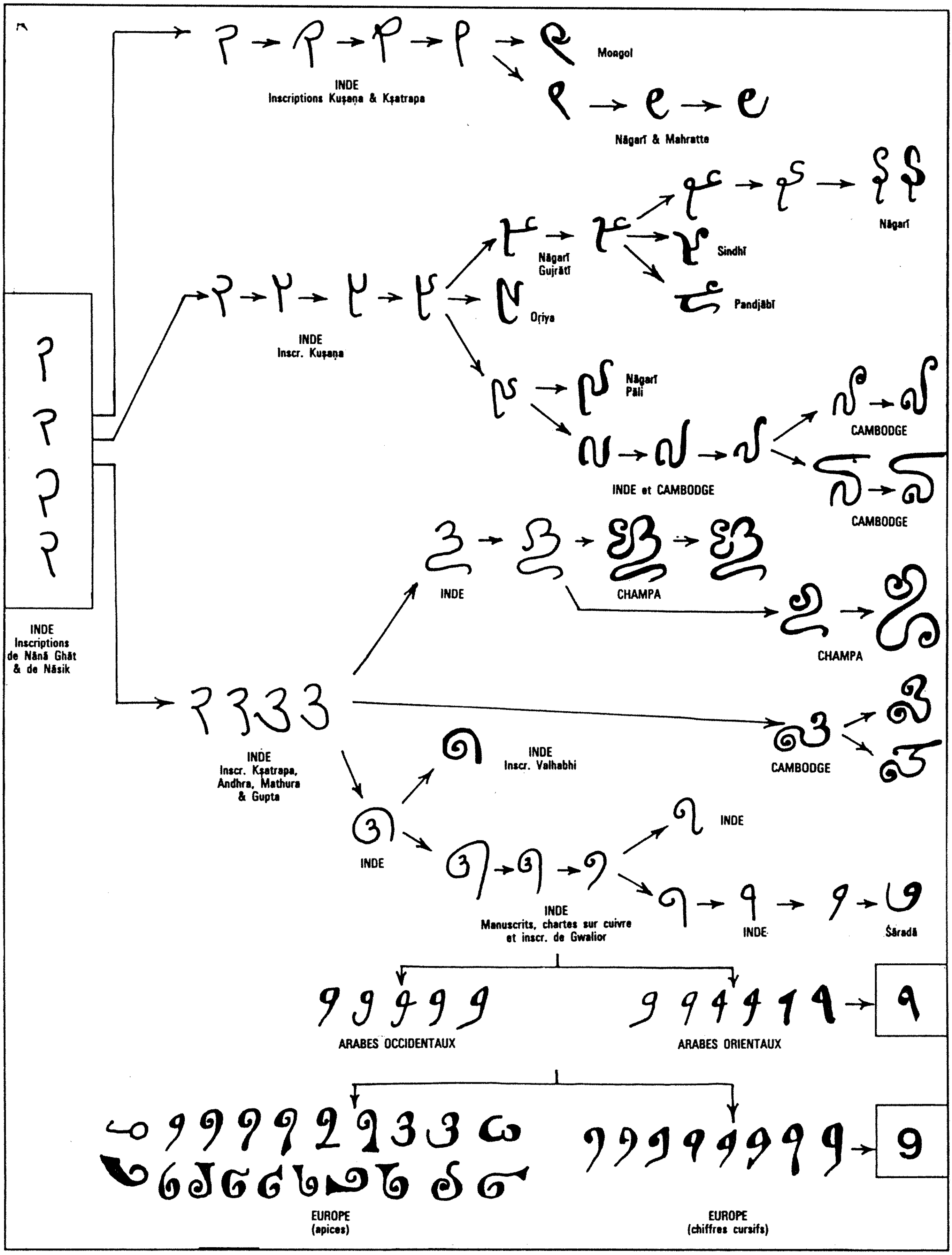
Origine et évolution du chiffre 6



Origine et évolution du chiffre 7.



Origine et évolution du chiffre 8.

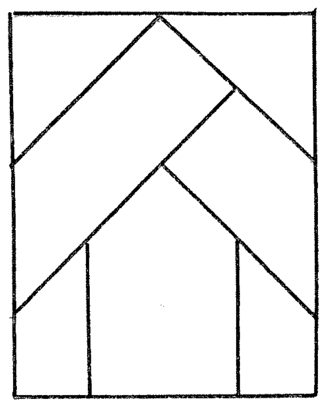


Origine et évolution du chiffre 9.

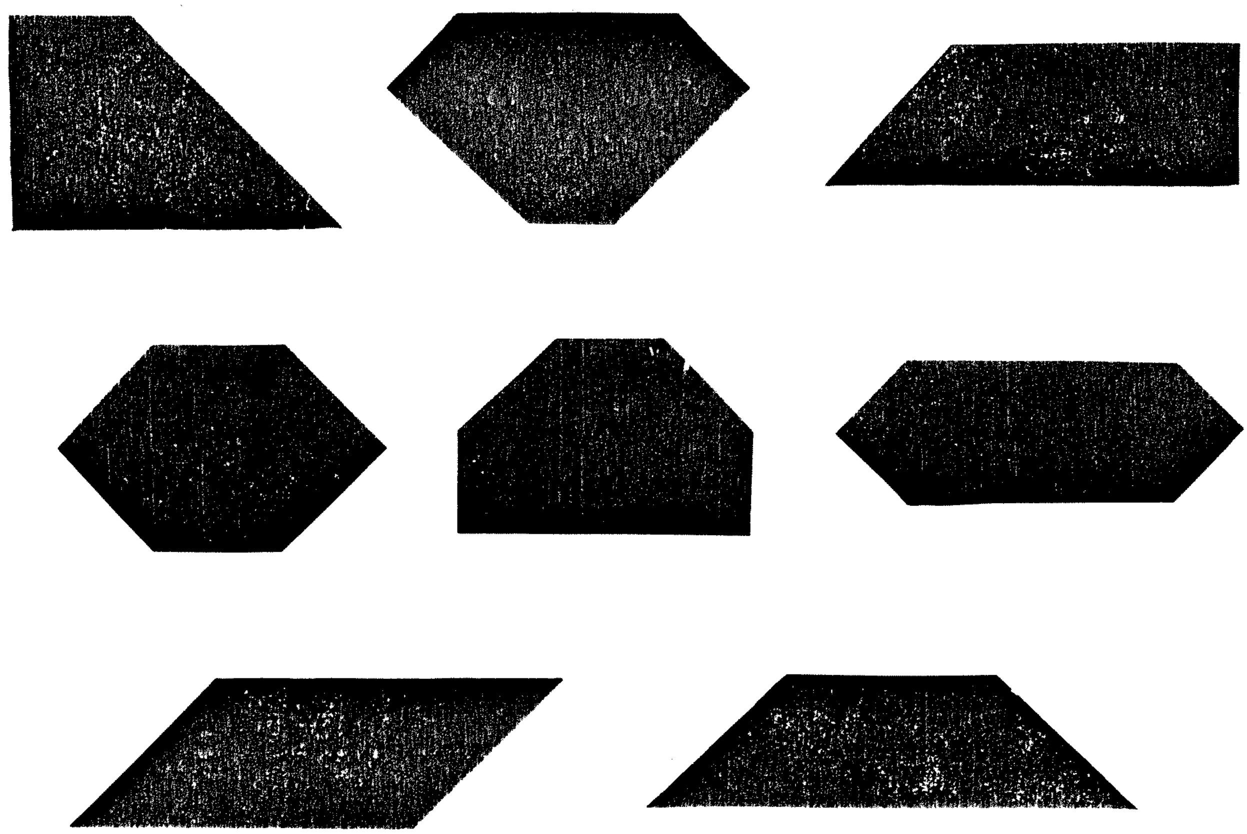
jeux

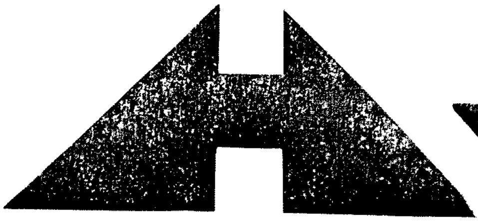
TANGRAM

Il est toujours possible de découper une figure géométrique polygonale de façon que les morceaux puissent se rassembler en une autre figure donnée à l'avance et de même surface. Ce résultat a été obtenu, en 1832 par le mathématicien hongrois W. Bolyai et amélioré en 1951 par les mathématiciens suisses, Hadwiger et Glur. Trouver un tel découpage simple, demande une certaine pratique. Le spécialiste actuel est le mathématicien amateur australien Lindgren.

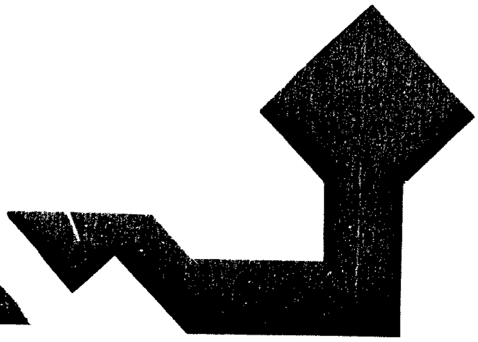


Un problème voisin est posé par les puzzles et en particulier par les tangrams dont il existe plusieurs variantes. Celle, que vous avez devant vous, est construite à partir d'un rectangle de proportions 5 sur 4 selon le découpage ci-contre. A l'aide des 7 pièces le composant, essayez de contruire les figures proposées ci-dessous.

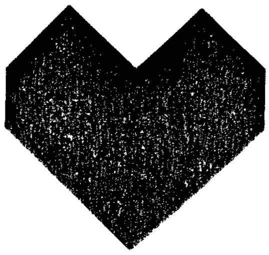




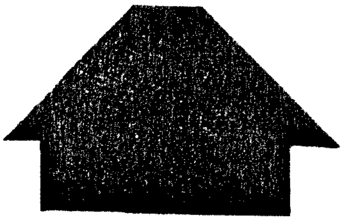
POUMONS



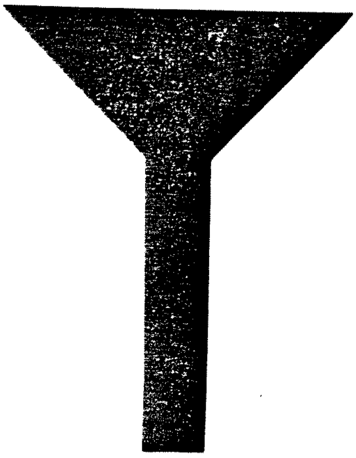
NAJA



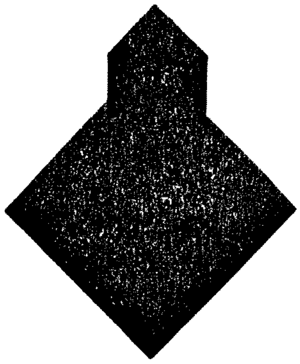
CŒUR



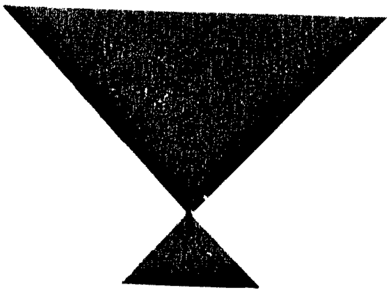
MAISON



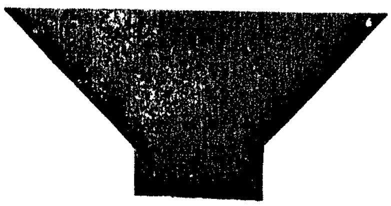
ENTONNOIR



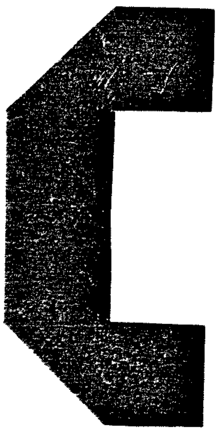
RAIE



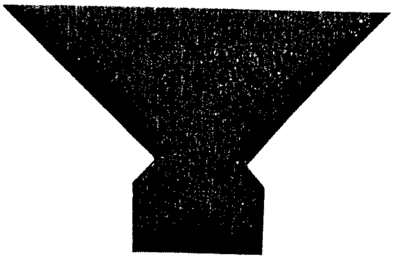
COUPE



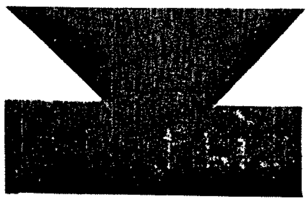
COUPE



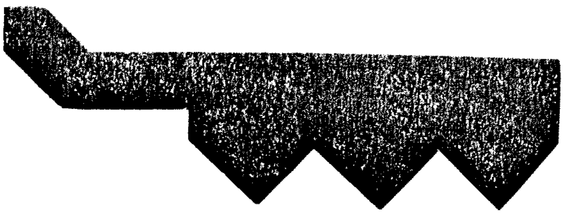
COMBINÉ
TÉLÉPHONIQUE



ENCLUME

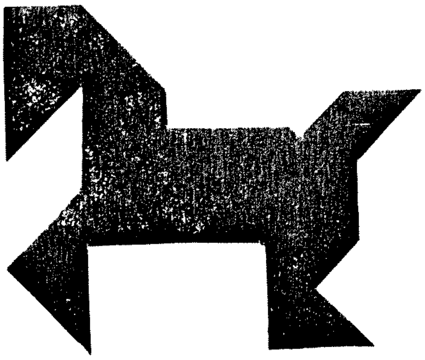


FILTRE À CAFÉ

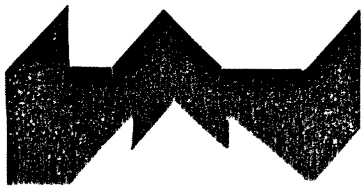


BROSSE

PAPILLON



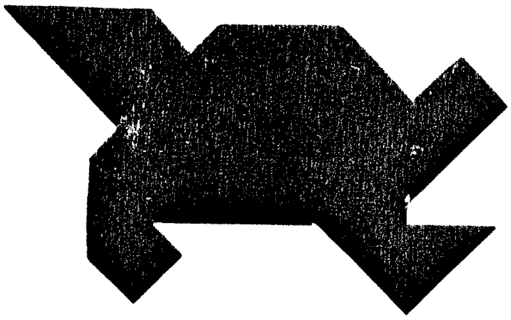
CHEVAL



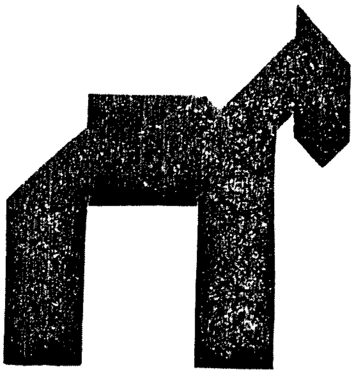
CHAUVE SOURIS

CRABE

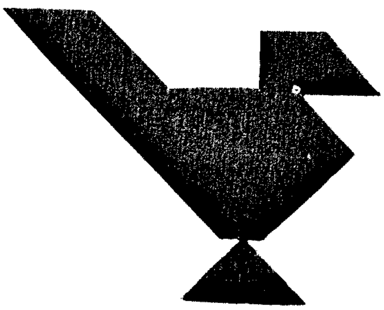
DROMADAIRE



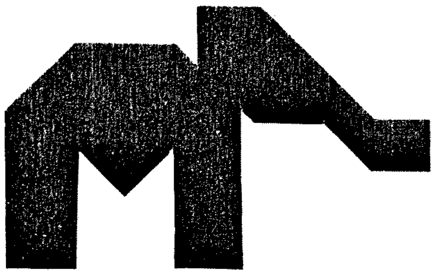
TORTUE



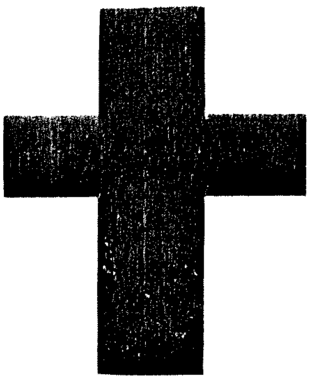
ÂNE

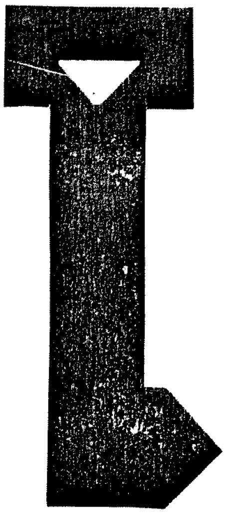


PIE

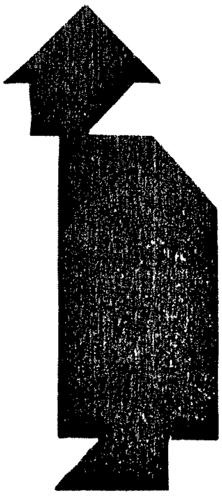


ÉLÉPHANT



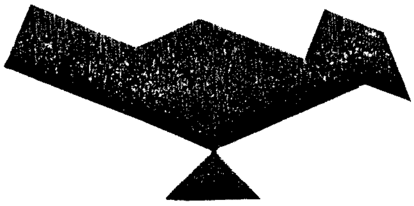


CLÉ

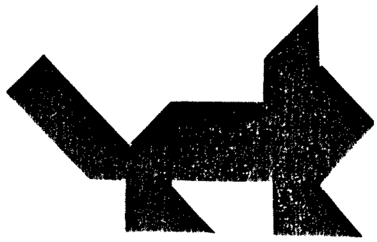


TONKINOIS

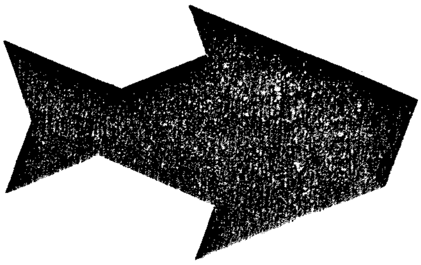
LIÈVRE



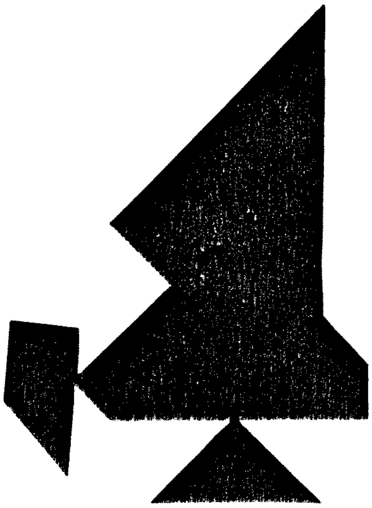
ROSSIGNOL



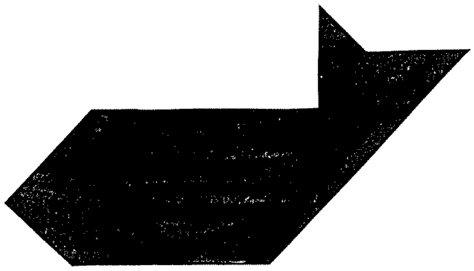
ÉCUREUIL



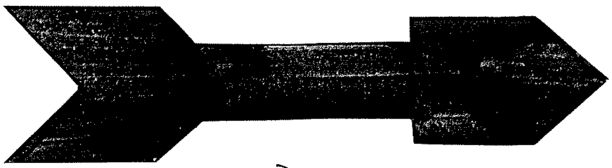
POISSON



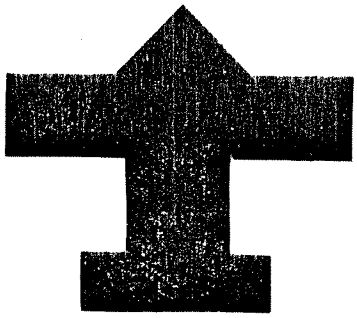
PIE



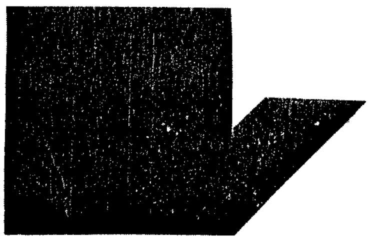
POISSON



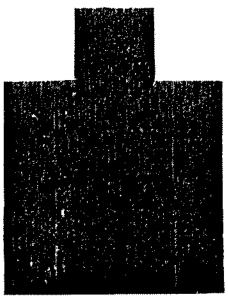
FLÈCHE



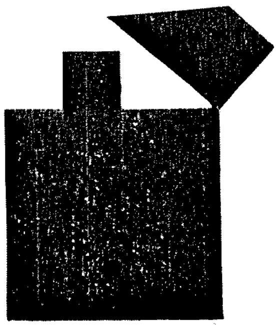
AVION



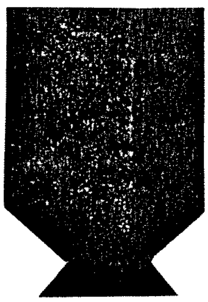
CAFETIÈRE



ENCRIER



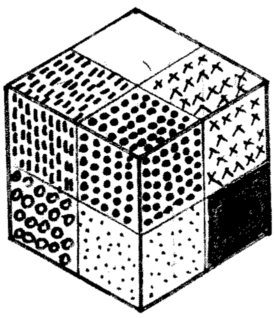
BRIQUET



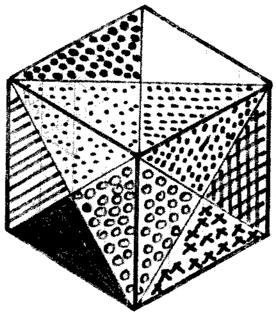
URNE

"CUBES HONGROIS"

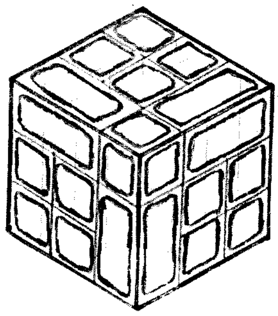
Connaissez-vous le cube hongrois ? Oui bien sûr ! En êtes-vous si sûr ?
Le nombre de pièges diaboliques que recelle ce jeu est immense.
A l'aide de colle ou de plastique adhésif, il vous est possible de créer votre propre casse-tête. En voici quatre exemples :



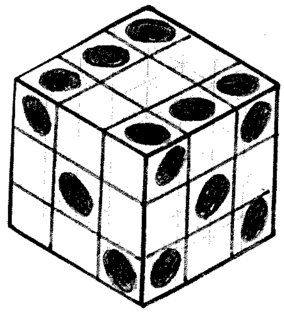
Un coloriage en 12 couleurs. Chaque arête est d'une couleur différente.



Un coloriage en 8 couleurs. Chaque sommet est d'une couleur différente.

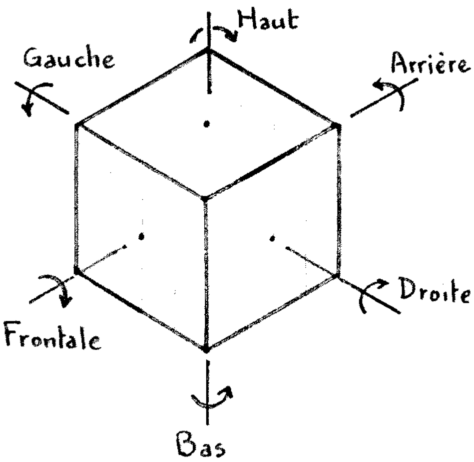


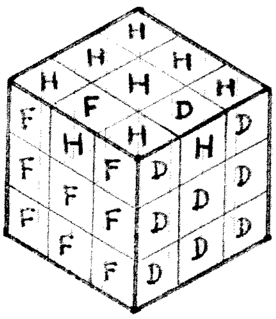
Un blocage de certains mouvements par collages de cubes élémentaires.



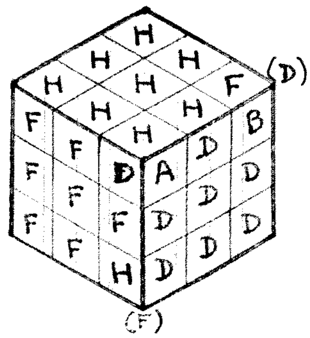
Un dé à jouer d'une nouvelle espèce.

Si vous ignorez tout des cubes hongrois, voici quelques indications :
On note A la rotation d'un quart de tour de la face Arrière dans le sens des aiguilles d'une montre (quand on regarde cette face arrière), même chose pour les autres faces, comme il est indiqué sur le dessin . On note A' , F' ... la rotation d'un quart de tour dans l'autre sens :



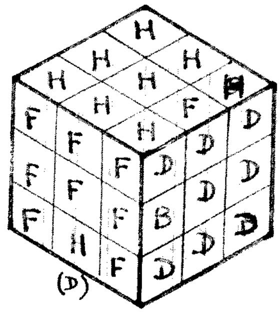


D'HHDDHD'H'DHHGFDFG'

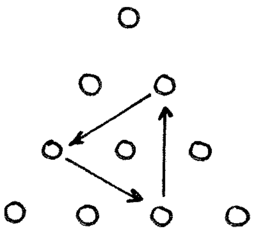
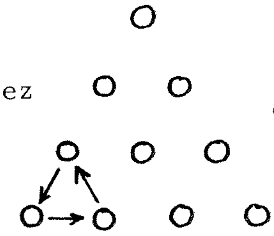
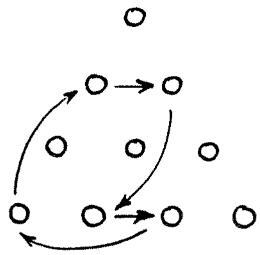


A'BAH'A'B'AH

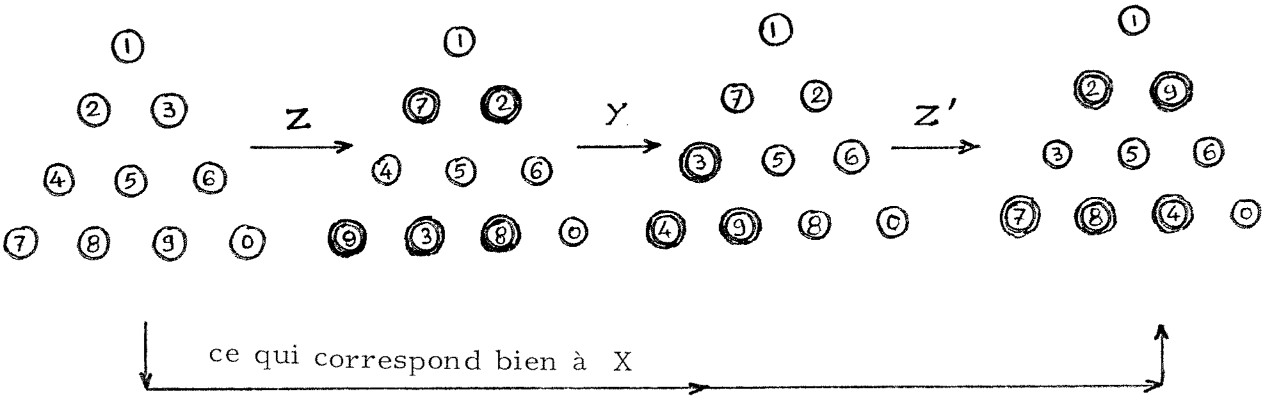
DHD'GF'D'FDG'H'



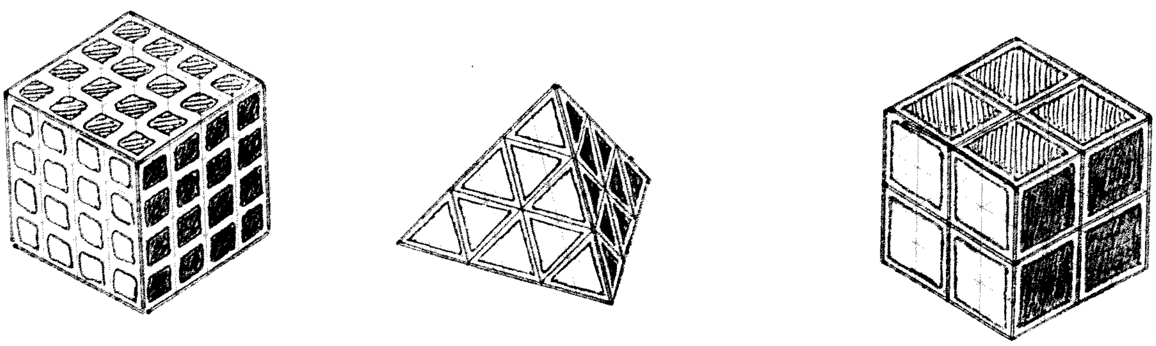
Voici ce que vous obtenez en effectuant dans l'ordre les mouvements indiqués à partir de la position initiale. Vous avez ainsi presque tous les renseignements pour rétablir un cube mélangé. Essayez en commençant par une face. N'oubliez pas, que si vous voulez faire

X :  et que vous sachiez faire Y :  et Z : 

alors, vous faites Z puis Y ; puis Z' le mouvement inverse de Z.
Celà équivaut à X puisque vous obtenez successivement :



Si maintenant, vous connaissez tout çà, amusez-vous avec ces autres "cubes" qui reposent sur le même principe.

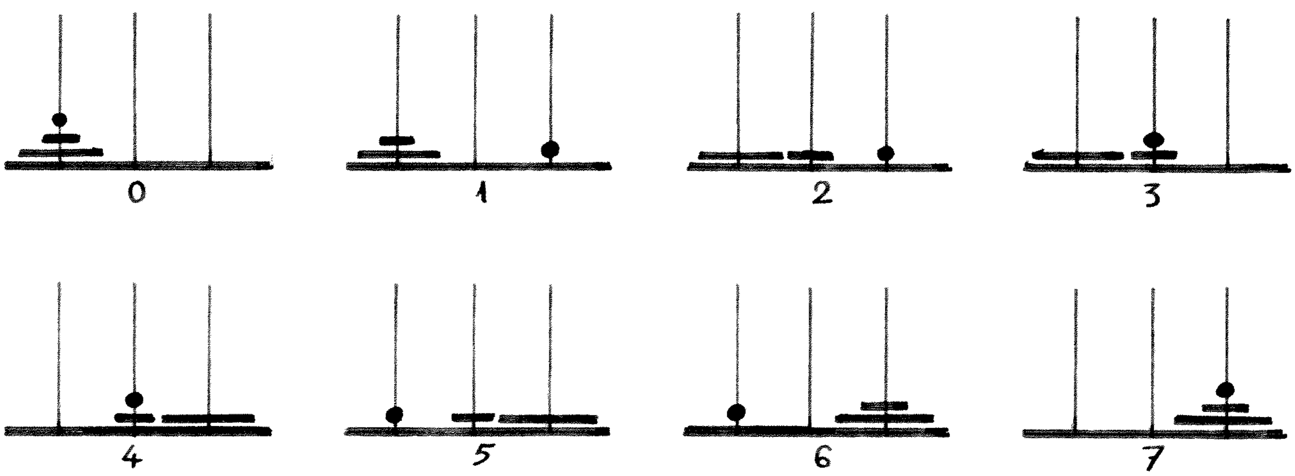


LA TOUR D'HANOI

La belle légende :

Le professeur N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li Sou Stian, raconte qu'il a vu dans le grand temple de Bénarès, au dessus du dôme, qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille.
Sur une des aiguilles, Dieu enfila, au commencement des siècles, soixante quatre disques d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, de plus en plus étroits jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée de Brahma. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième en ne déplaçant qu'un seul disque d'or à la fois et en veillant à ne jamais le poser sur un autre plus petit, selon les règles qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont et ce sera la fin du monde.

Que le visiteur se rassure, cette belle légende a été inventée par le mathématicien français E. Lucas, en 1883. Il était alors professeur au lycée St Louis, (on notera l'anagramme). De toute façon, même si cette prophétie était vraie, il faudrait près de six milliards de siècles, en comptant un déplacement par seconde, pour qu'arrive la fin du monde.



Ci-dessus sont indiqués les déplacements pour trois disques. Il en faut au moins sept. Vous disposez d'un jeu avec cinq disques. En respectant les règles :
ne déplacer qu'un disque à la fois, ne jamais poser un disque sur un plus petit, vous devez transporter la tour en trente et un déplacements.
D'une façon générale, il faut au moins $2^n - 1$ déplacements pour n disques.

LE TAQUIN

C'est vers 1870 que le **taquin** fut, dit-on, inventé aux Etats Unis d'Amérique par un sourd-muet qui se proposa, par hasard, de ranger dans une boîte des numéros qui s'y trouvaient déplacés, sans les en faire sortir.
Popularisé par Sam Loyd, le grand spécialiste de casse-tête mathématiques, ce jeu fit fureur dans les grandes villes d'Amérique du nord avant d'obtenir un très grand succès en Europe.

Dans sa forme initiale, le jeu se présente comme un carré de 16 cases sur lequel sont placés au hasard seize pions numérotés de 1 à 16.
On enlève un pion quelconque, ce qui fait apparaître une case vide et par des **glissements** des autres pions il faut ramener les numéros dans un ordre logique donné à l'avance.

13	5	7	16
11	10	2	14
6	4	9	8
12	1	15	3

On place les pions au hasard.

13	5	7	16
11		2	14
6	4	9	8
12	1	15	3

On enlève un pion quelconque (ici le10).

1	2	3	4
5	6	7	8
9		11	12
13	14	15	16

On glisse les pions dans un ordre logique.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

On replace le pion manquant.

On démontre qu'il y a exactement une chance sur deux de résoudre ce problème. Dans une forme plus élaborée, les pions ne peuvent pas être ôtés et seuls les numéros 1 à 15 apparaissent dans leur ordre logique. Sam Loyd avait promis une fortune à l'époque (1000 $) à quiconque réussirait à intervertir les numéros 14 et 15, ce qui est impossible puisque le nombre minimum d'éléments que l'on puisse permuter est de trois comme indiqué ci-dessous :

a	b	c
d		e
f	g	h

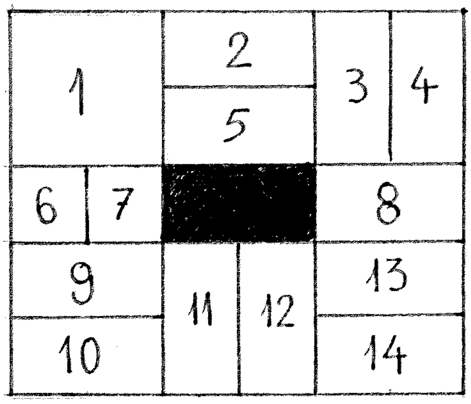
a	b	c
d	e	
f	g	h

a	b	c
d	e	h
f	g	

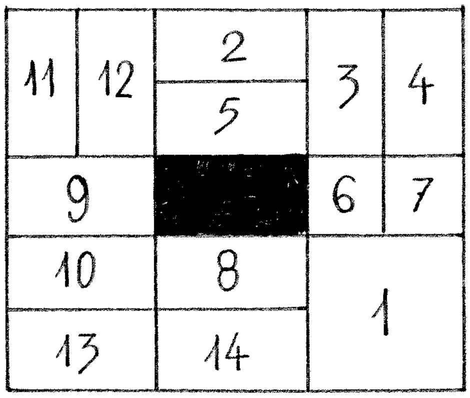
a	b	c
d	e	h
f		g

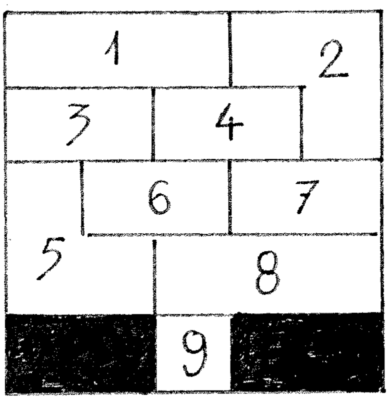
a	b	c
d		h
f	e	g

Le problème fut généralisé à des boîtes de dimension et de forme quelconques, puis à des pions de formes irrégulières. Vous avez à votre disposition différents modèles qu'il faut amener d'une position à l'autre, en utilisant seulement des glissements.

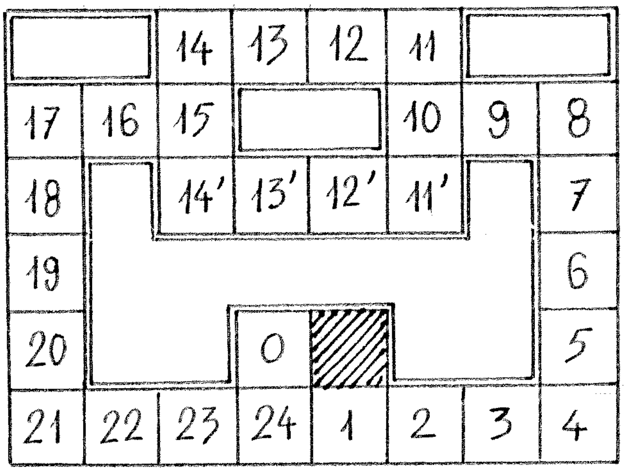


faire glisser la pièce n° 1 d'un coin à l'autre





réunissez les pièces n° 2 et 5 en l'un des quatre coins du jeu



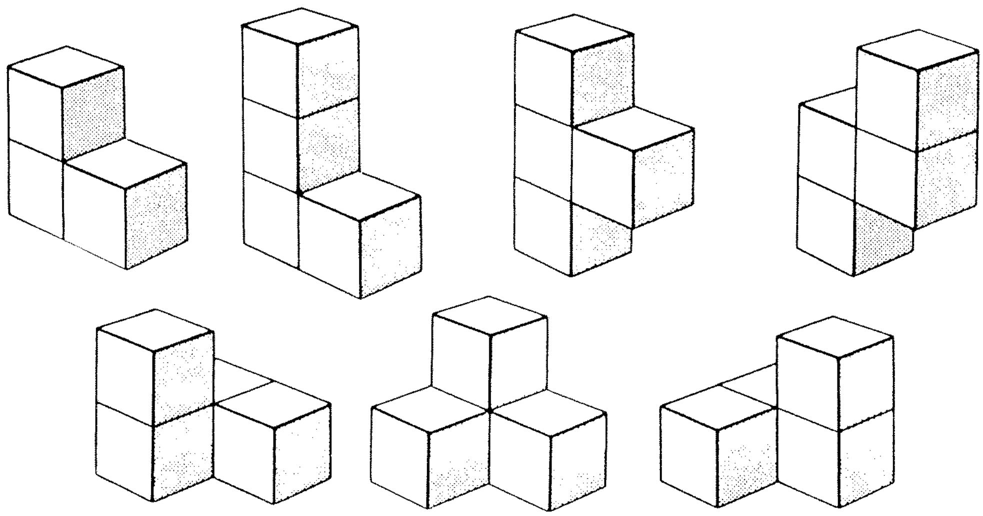
taquin continental : position initiale

Dans le taquin ordinaire, de même que dans le taquin continental, le nombre de positions imaginables est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x ... x (n-2) x (n-1) x n, où "n" est le nombre de pièces ; les scientifiques notent ce nombre "n!" et lisent "factorielle n". Pour le taquin de 15 pièces, ce nombre vaut 1 307 674 368 000. Exactement la moitié de ces positions imaginables sont accessibles par des glissements.

Pour les autres taquins, rien ne permet d'affirmer s'ils ont ou non une solution. Il faut essayer d'en trouver une pour connaître éventuellement la réponse.

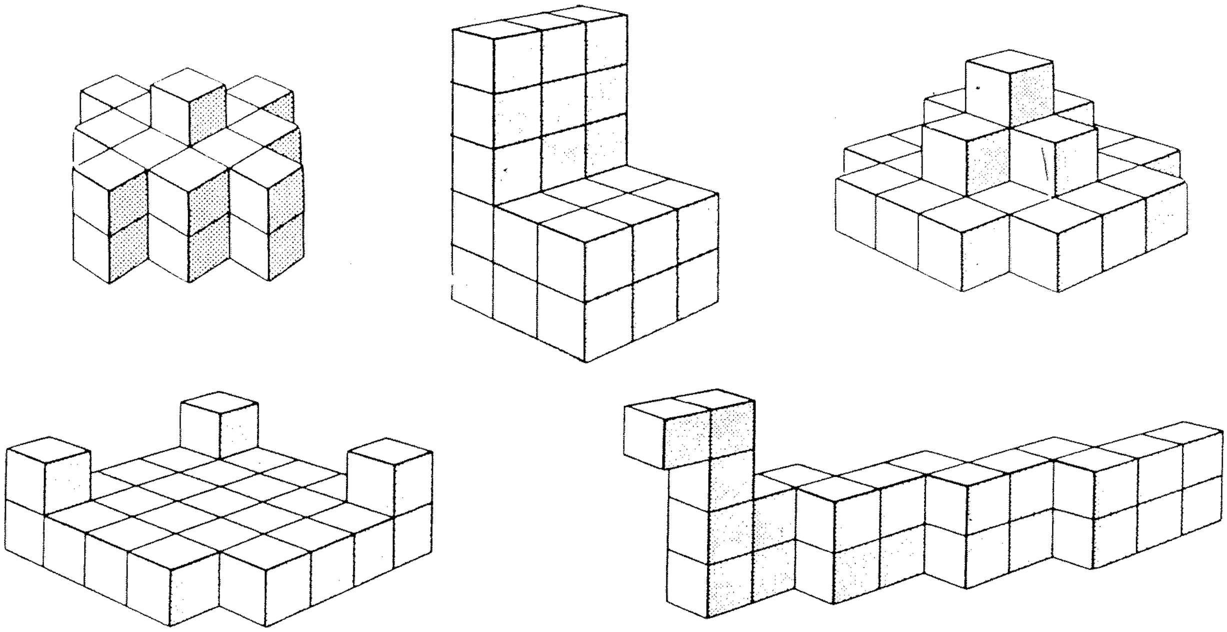
LES CUBES SOMA

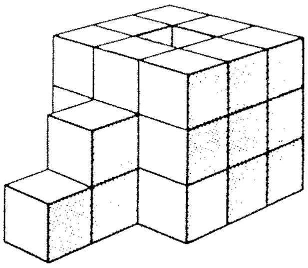
C'est à Piet Hein, plus connu au Danemark comme poète sous le pseudonyme de Kumbel, que l'on doit ce curieux puzzle : voici les 7 formes "irrégulières" que l'on peut réaliser avec 3 ou 4 petits cubes accolés par une face :

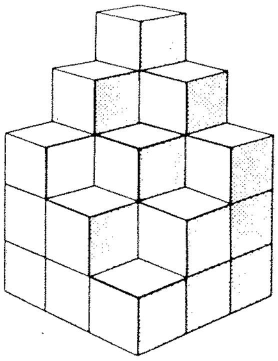


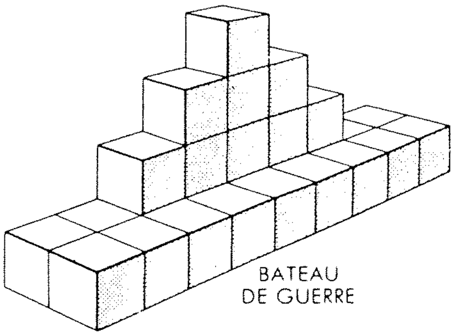
Ces 7 éléments peuvent être assemblés en un grand cube (de 3 x 3 x 3) ; mais on peut créer bien d'autres figures avec l'ensemble ou seulement une partie de ces éléments. Essayez de construire les modèles présentés ci-dessous, mais attention, deux d'entre eux sont impossibles ; saurez-vous expliquer pourquoi ?

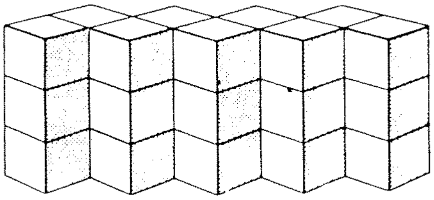
Quand vous serez devenu expert, inventez vos propres modèles ou bien, autre problème, comptez toutes les manières possibles de construire le grand cube...

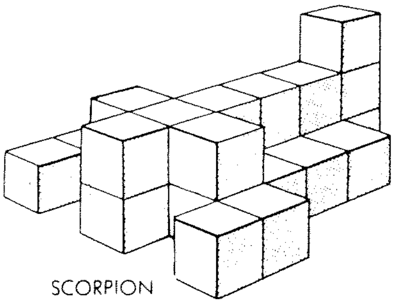


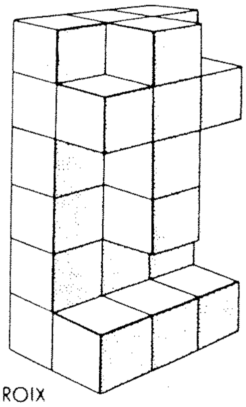

PUITS

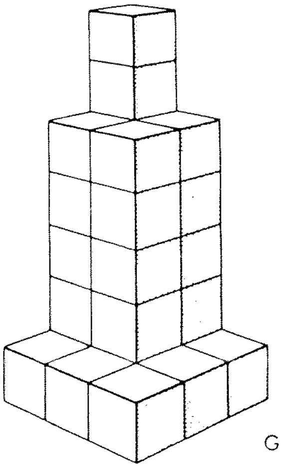

CRISTAL

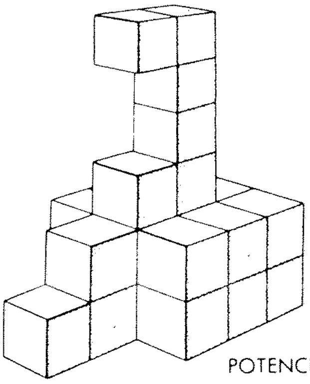

BATEAU
DE GUERRE

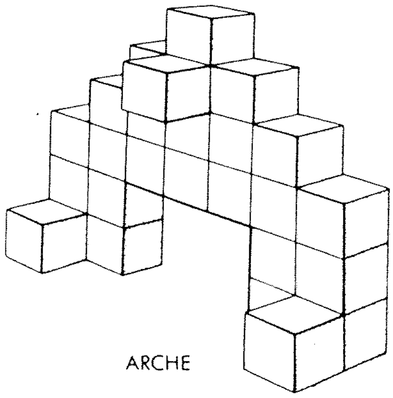

MUR

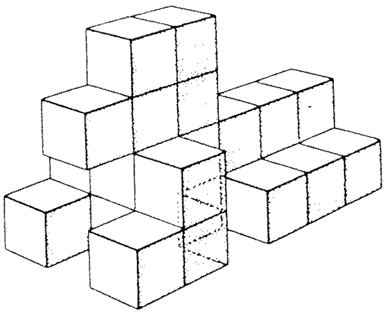

SCORPION

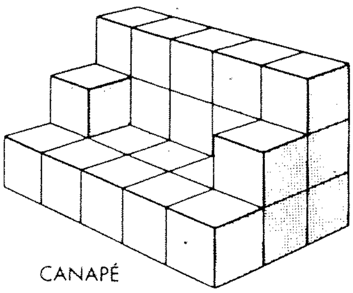

CROIX

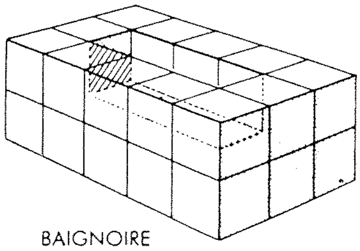

GRATTE-CIEL

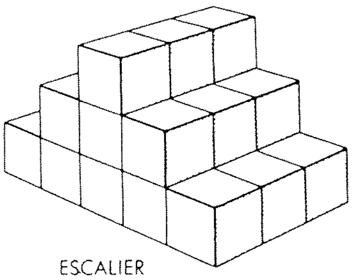

POTENCE

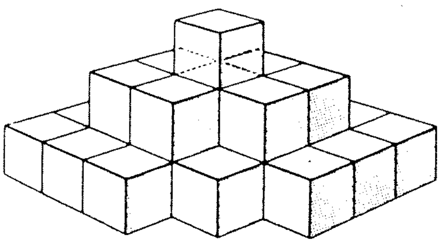

ARCHE

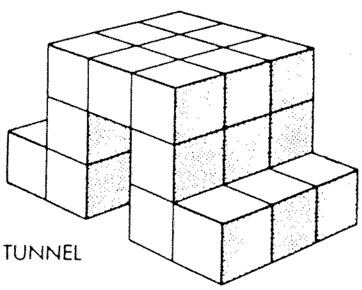

CHIEN


CANAPÉ

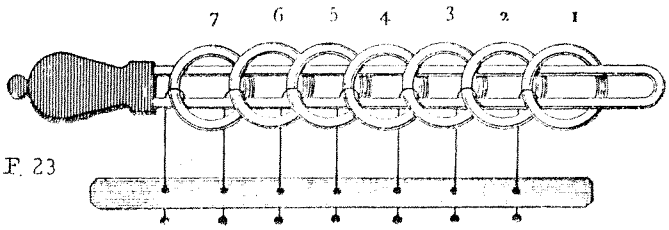

BAIGNOIRE


ESCALIER

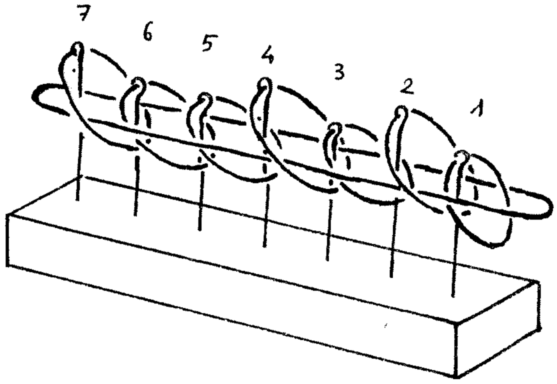

BATEAU A VAPEUR


TUNNEL

LE BAGUENAUDIER



F. 23



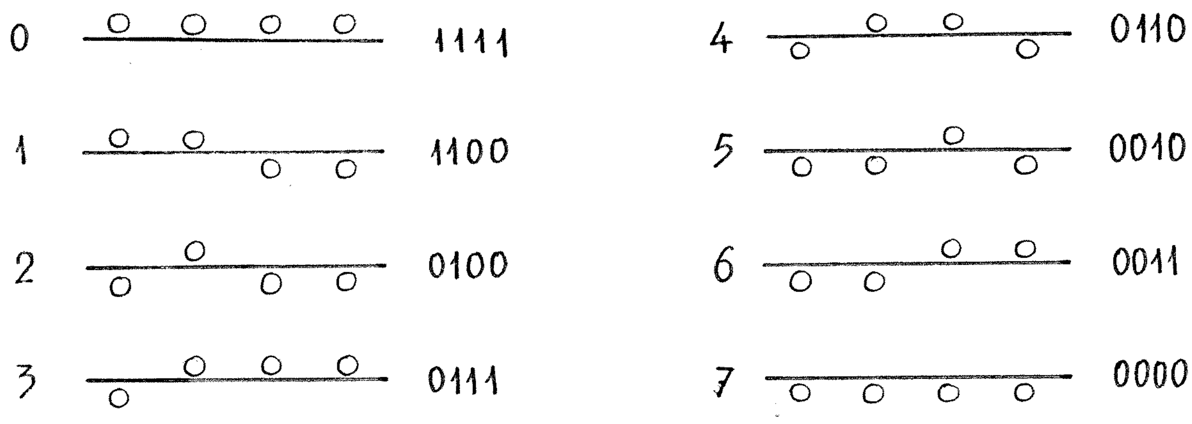
Le baguenaudier ou noeud de bagues est un jeu ancien, cité dès 1550 par le mathématicien Cardan ; cet objet était encore utilisé au XIXème siècle comme serrure de coffre dans les compagnies norvégiennes. Voici un baguenaudier monté. Le but du jeu est de démonter, c'est-à-dire de libérer la navette de l'ensemble des anneaux, ou bien au contraire de replacer la navette entre les anneaux.

Voici un baguenaudier en position intermédiaire. Les anneaux n°2, 4 et 7 sont montés (la navette les retient), les anneaux n°1, 3, 5, et 6 sont démontés (la navette ne les retient pas). Ici, les seuls mouvements possibles sont les modifications de la position des anneaux n°1 ou 3.

déplacement des anneaux : La position d'un anneau ne peut être changée que s'il s'agit de l'anneau n°1 ou si c'est l'anneau suivant le premier anneau monté. Exceptionnellement les anneaux n°1 et 2 peuvent être montés ou démontés simultanément. Quand on utilise cette possibilité on dit qu'on utilise la marche accélérée.

nombre d'anneaux du baguenaudier	3	4	5	6	7	8	n
nombre de mouvements en marche normale	5	10	21	42	85	170	$2^{n+1} / 3$
nombre de mouvements en marche accélérée	4	7	16	31	64	127	2 ou 2^{n-1} -1

Voici les 7 mouvements nécessaires en marche accélérée pour démonter un baguenaudier de 4 anneaux. Essayez de résoudre le problème du montage et du démontage du baguenaudier de 7 anneaux qui est à votre disposition.



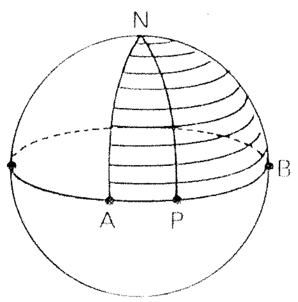
chacune des huit positions (numérotée de 0 à 7) est codée à l'aide de 0 et de 1. Un 1 correspond à un anneau monté et un 0 à un anneau démonté.

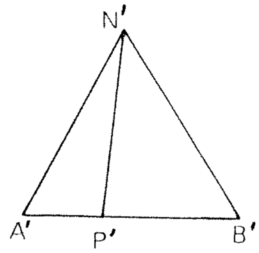
cartographie

CARTOGRAPHIE

La représentation de tout ou partie de la sphère terrestre sur une carte plane pose des problèmes délicats. Ces problèmes, quiconque a essayé d'applatir une pelure d'orange sur son assiette, les remarque immédiatement : des déchirures ou des déformations apparaissent.

Supposons que l'on désire faire une carte qui donne une idée fidèle des distances entre les points à la surface de la terre : les arcs de grands cercles (plus courts chemins sur la sphère) devront alors être représentés par des segments de droites (plus courts chemins sur le plan).





Essayons de cette façon de faire une carte du huitième de sphère ABN, (c'est le "triangle sphérique" coloré du dessin ci-dessus) où N est le pôle nord, NA et NB des quarts de méridien et AB un quart d'équateur.
Il devra être représenté dans le plan par un triangle équilatéral A'B'N' pour respecter l'égalité des longueurs des côtés. Cette représentation offre, entre autres, deux aspects choquants :

* Le quart de méridien NP a même longueur que NA ou NB ; sur la carte son image N'P' est plus courte que N'A' ou N'B'.

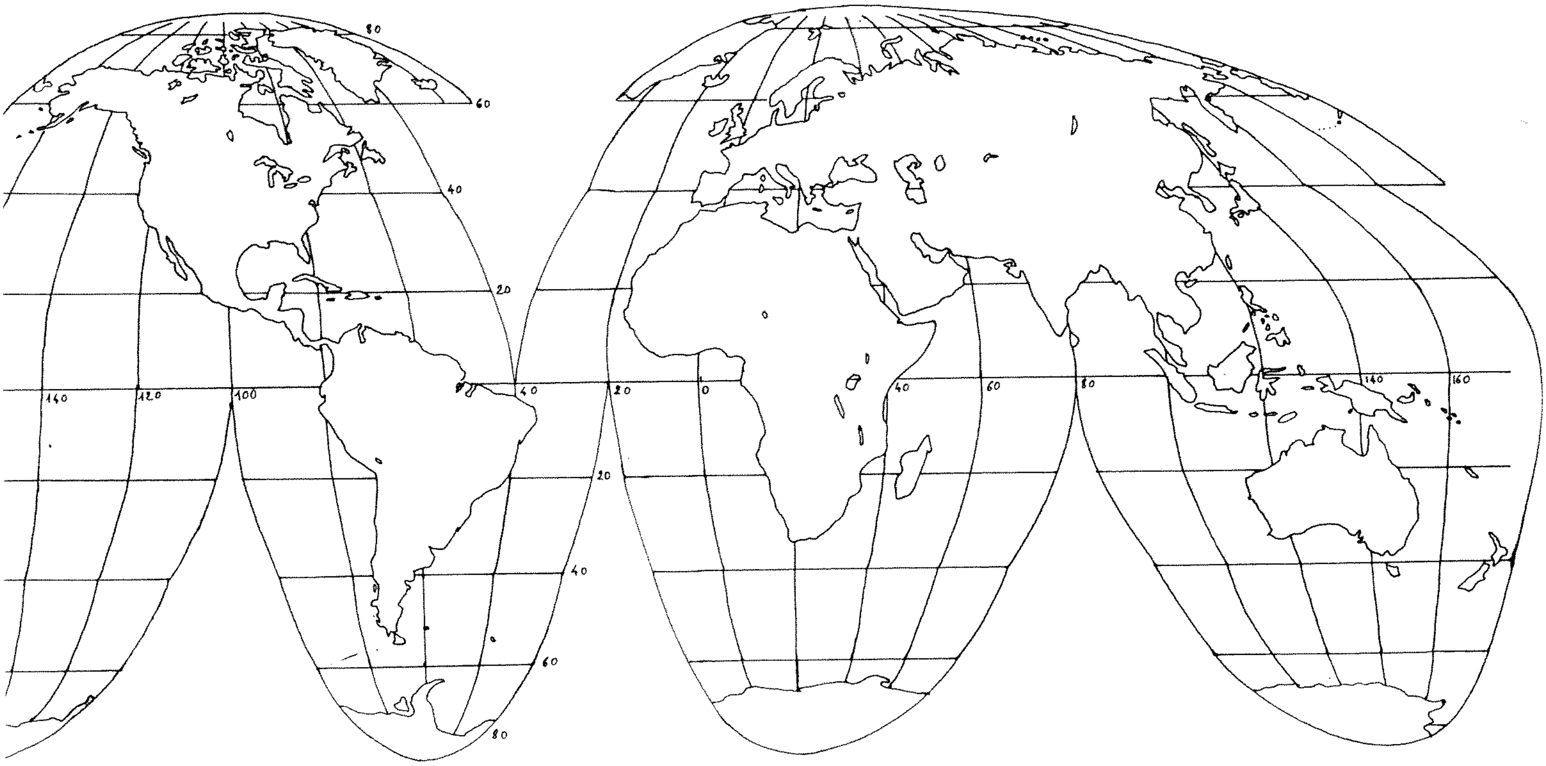
* Sur la sphère le "triangle ABN" a tous ses angles droits (90°) ; sur la carte, ils font 60°.

On peut classer les différentes cartes selon les proprietés qui sont conservées, par exemple :

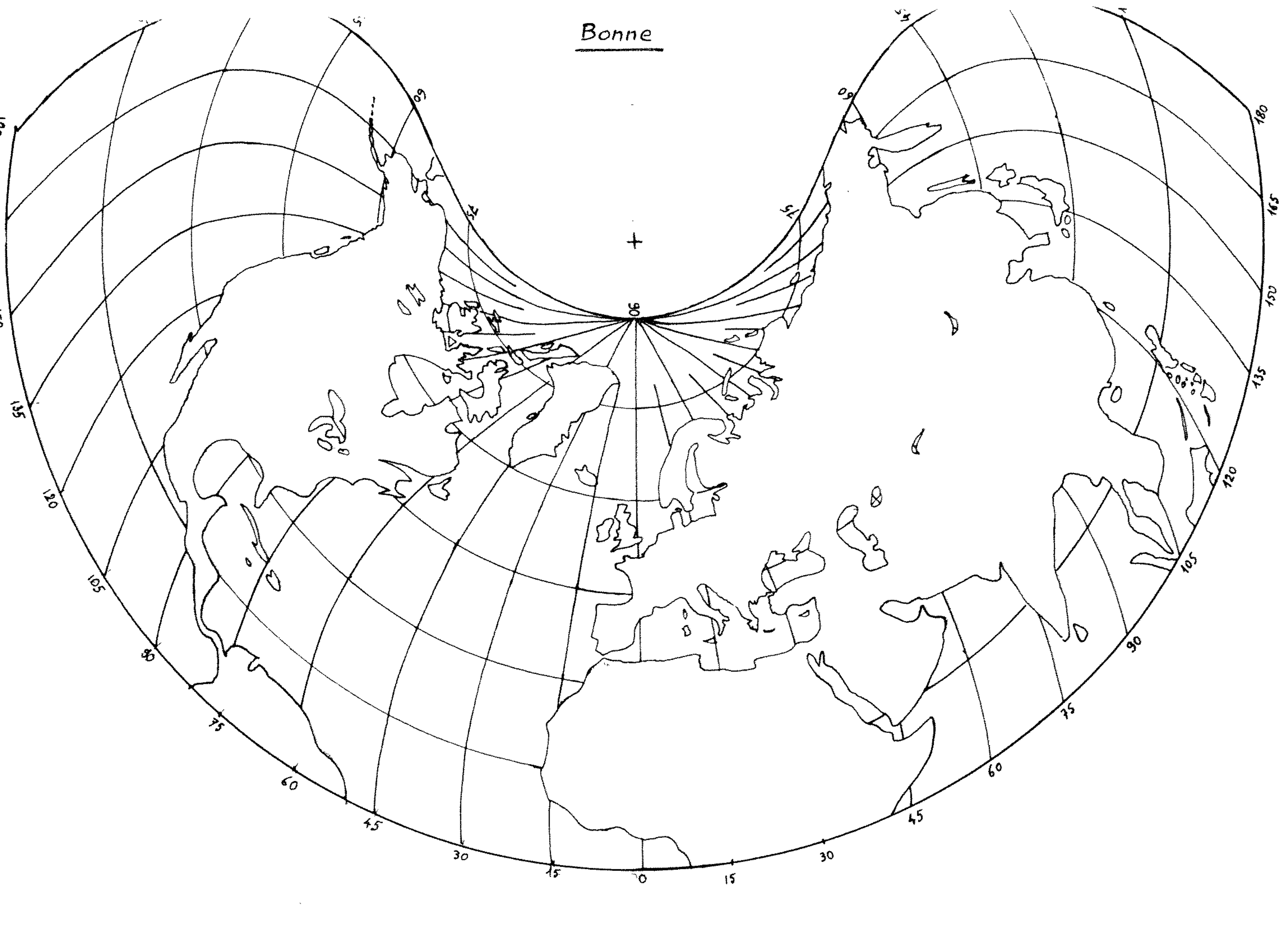
Les représentations conformes : il y a conservation des angles.

Les représentations équivalentes : il y a conservation du rapport des surfaces ;

HOMOLOSINE de GOODE



Bonne



mais il y a loin d'un carré 1×1 à un rectangle $10 \times \frac{1}{10}$.

Les représentations azimutales : il y a conservation de la direction à partir d'un point particulier.

Les représentations sphériques : les méridiens et les parallèles ont pour image des cercles (et parfois des droites).

On peut aussi classer les différentes cartes selon la méthode par laquelle elles ont été obtenues ; par exemple :

Les projections cylindriques : obtenues par développement d'un cylindre auxilliaire.

Les projections coniques : obtenues par développement d'un cône auxilliaire.

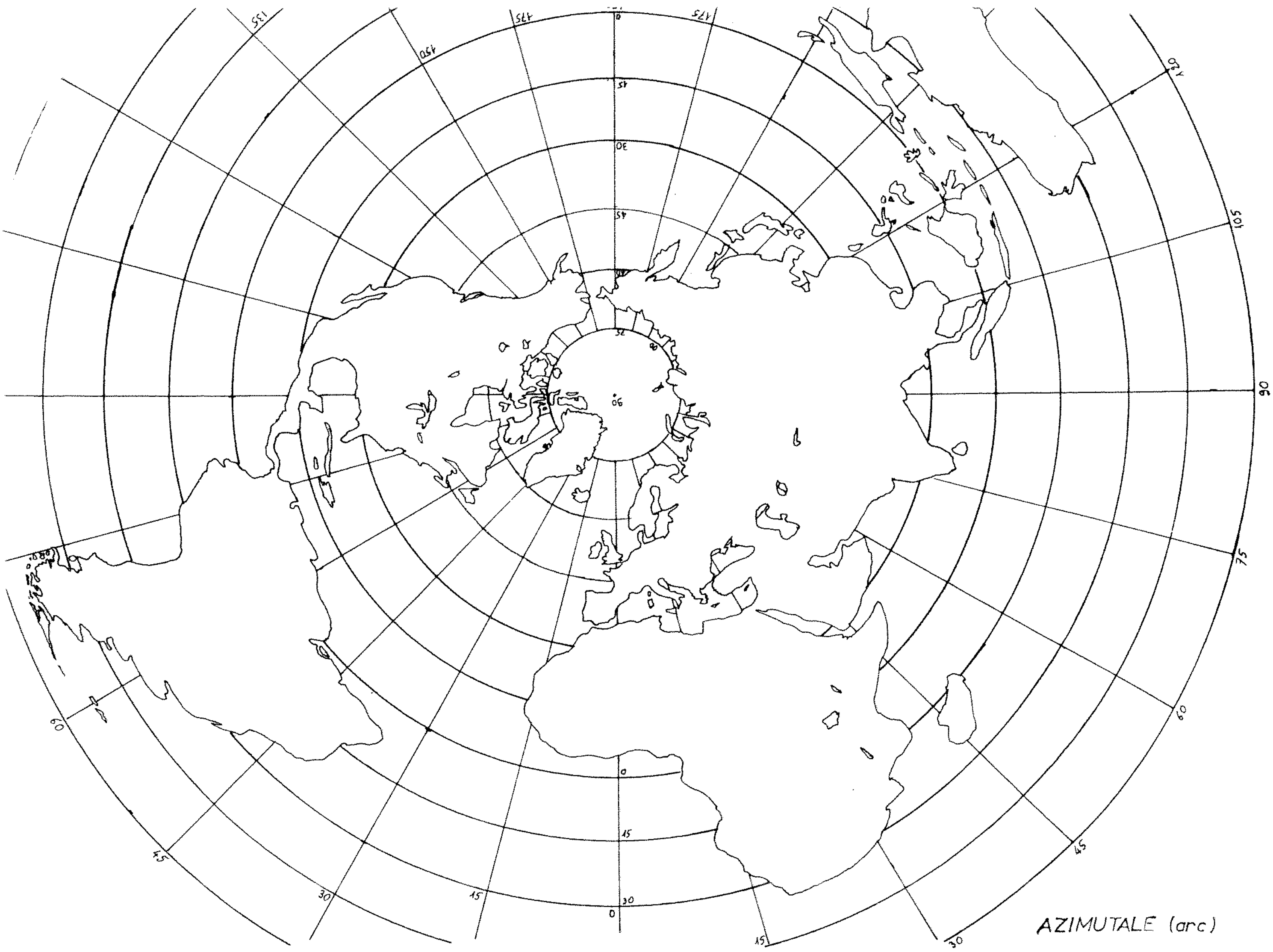
Les projections perspectives : obtenues par projection sur une surface plane ou non, à partir d'un point de vue.

Le chasseur d'ours

Partant un matin de son campement un chasseur fait 3 km vers le sud, puis 3 km vers l'est. A ce moment il voit un ours et le tue. Il lui reste à faire 3 km vers le nord pour regagner son campement. Quelle est la couleur de l'ours et pourquoi ? Comme on parle d'ours dans cette histoire, le campement ne peut être qu'au pôle nord. Sinon il pourrait se situer en une infinité d'endroits au voisinage du pôle sud. Sauriez-vous les trouver ?

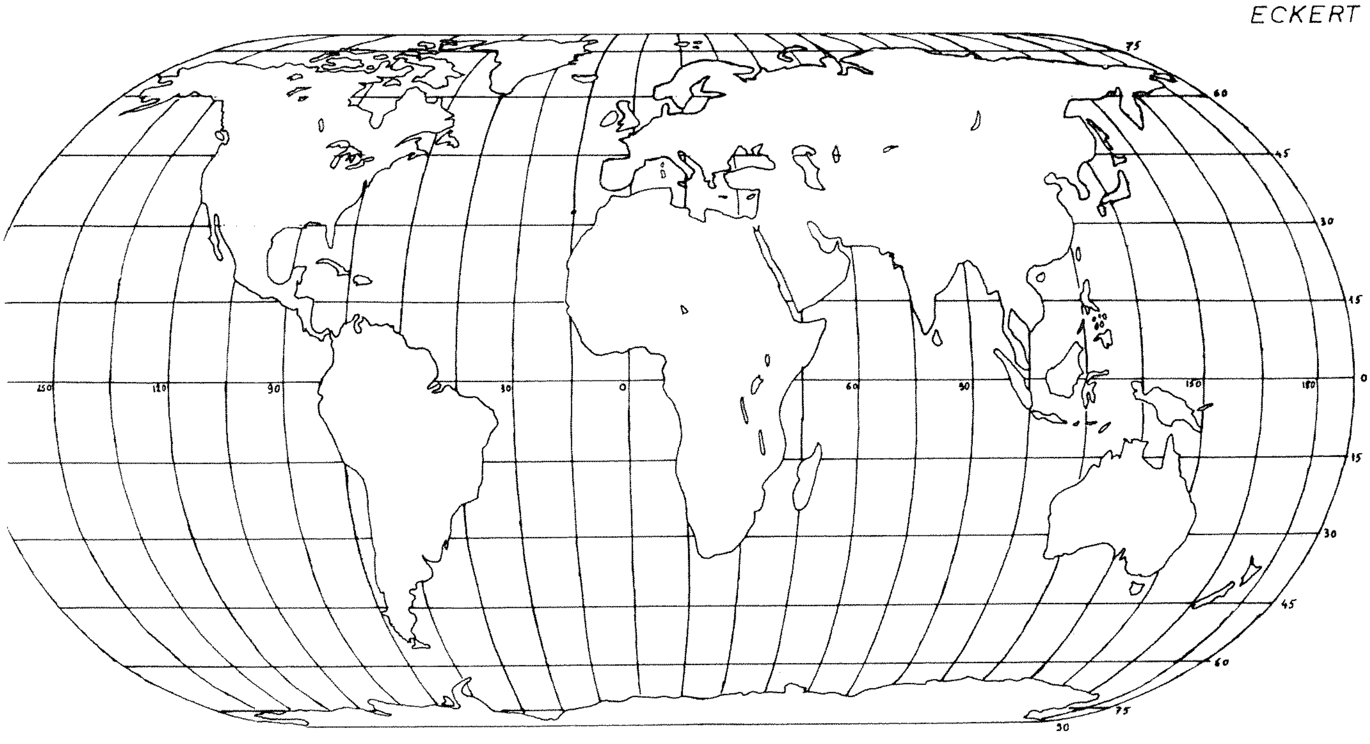
Quelques exemples de projections

Projection homolosine discontinue de Goode : On a raccordé le long de l'équateur les différentes parties obtenues en choisissant des méridiens origines distincts.
Les déformations sont moindres, mais il y a apparition de discontinuités.
On notera l'angle sur chaque méridien au niveau du 40ème parallèle. Il provient du fait que la méthode de calcul n'est pas la même de part et d'autre de ce parallèle.
C'est une projection équivalente.



AZIMUTALE (arc)

ECKERT



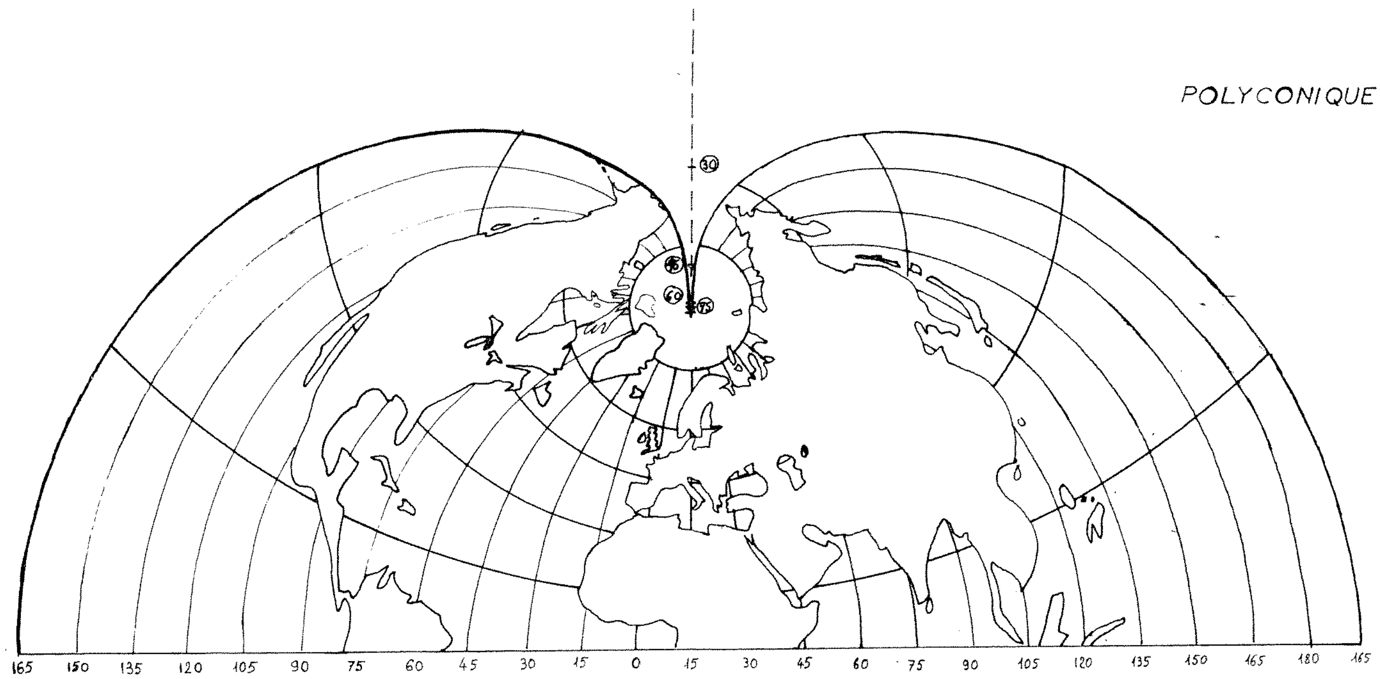
Projection de Bonne : projection conique équivalente qui fut utilisée par la carte de France au 1/80 000 dite d'Etat-Major.
L'échelle est respectée sur les parallèles et sur le méridien central.
On peut représenter la Terre entière mais avec de très fortes déformations.

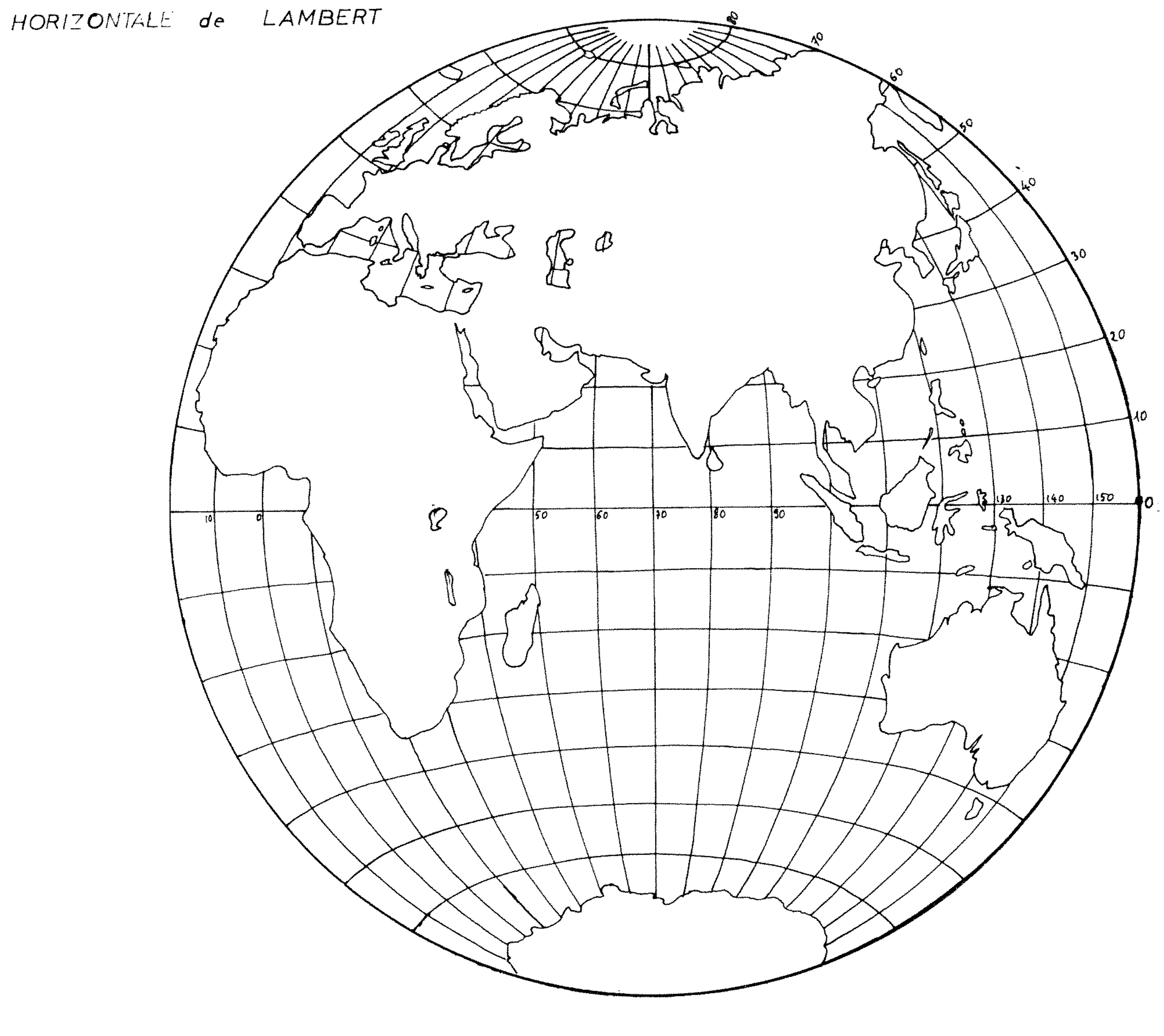
Projection azimutale par arcs, à partir du pôle nord. L'échelle est la même le long de tous les méridiens et l'angle que font les méridiens entre eux est conservé.
Les déformations deviennent très importantes dans l'émisphère sud.

Projection Eckert : Elle est équivalente.

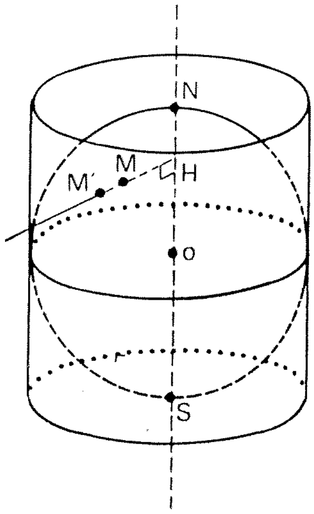
Projection polyconique. L'échelle est la même le long des parallèles et du méridien central. La carte est analogue dans l'hémisphère sud (même canevas pour les méridients et les parallèles).

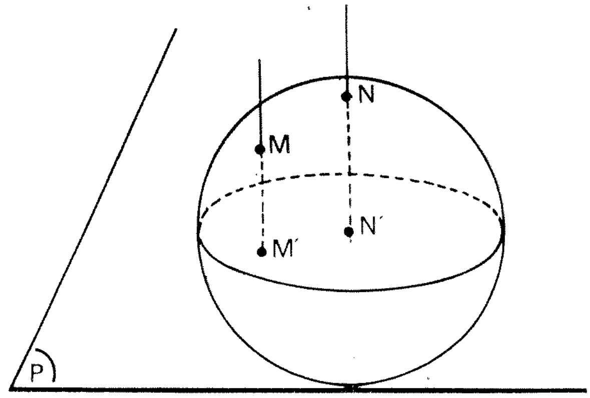
Projection azimutale de Lambert (ou projection **azimutale par cordes**). C'est une projection équivalente qui conserve l'angle des directions à partir du centre de la carte (ici le point de l'équateur de longitude 70° E). Cette projection peut s'étendre à la Terre toute entière, mais on préfère souvent accoler les cartes des deux hémisphères.


POLYCONIQUE
30
45
60
75
165 150 135 120 105 90 75 60 45 30 15 0 15 30 45 60 75 90 105 120 135 150 165 180 165


HORIZONTALE de LAMBERT
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10 0 50 60 70 80 90 130 140 150

LES PROJECTIONS ISOCYLINDRIQUE et ORTHOGONALE





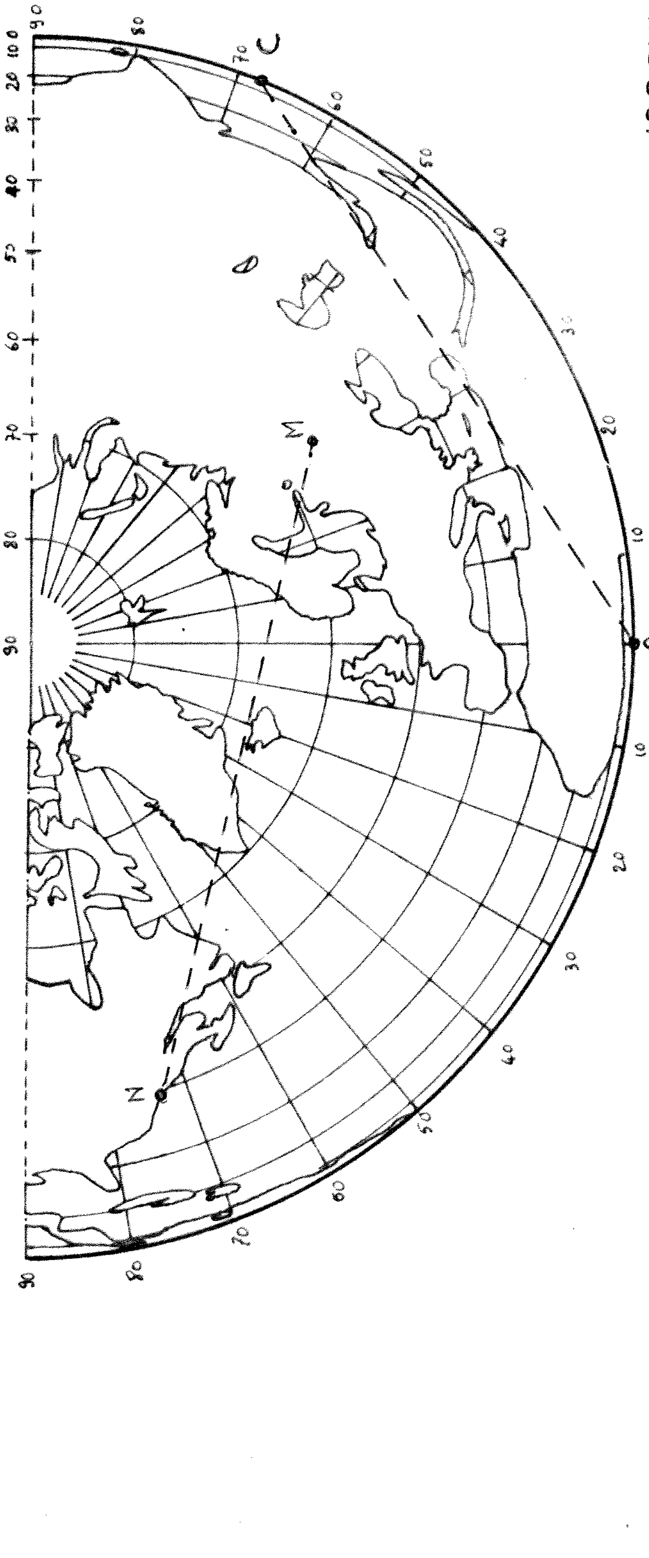
La projection isocyclindrique consiste à projeter la sphère terrestre sur un cylindre circonscrit (le long de l'équateur, par exemple). M' est l'image de M et MM' est perpendiculaire à l'axe du cyclindre).
Pour obtenir une carte plane, on découpe ensuite le cylindre en suivant une génératrice (la ligne de changement de date, par exemple), on le déroule puis on effectue une réduction d'échelle pour avoir une carte de dimensions convenables.

La projection orthogonale consiste à projeter une demi-sphère sur le plan diamétral qui la limite (par exemple l'hémisphère nord sur l'équateur). C'est la projection au sens habituel de la géométrie. M' est l'image de M et MM' est perpendiculaire au plan de projection. On effectue ensuite une réduction d'échelle pour obtenir une carte de dimensions convenables.

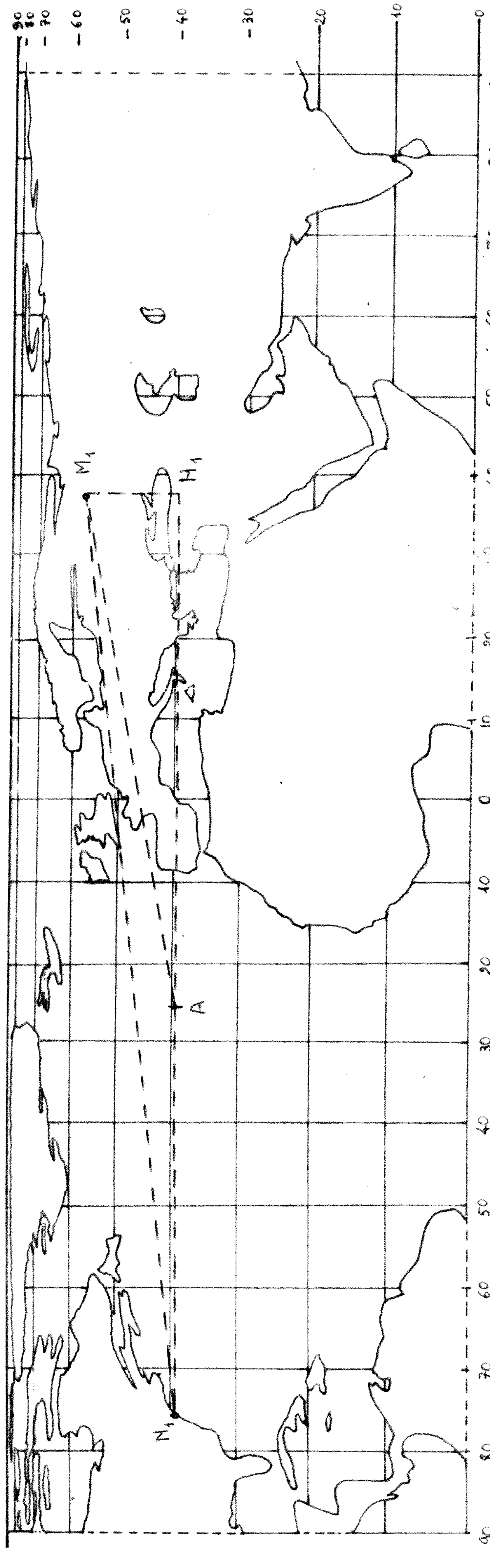
La projection isocylindrique conserve le rapport des surfaces. En particulier la sphère terrestre et le cylindre circonscrit ont la même superficie. Les déformations sont cependant importantes près des pôles.
La projection orthogonale n'a pas de propriétés particulières simples. On note que les déformations sont importantes près de l'équateur.

ORTHOGONALE

$67^\circ 30' \simeq 7500$ km

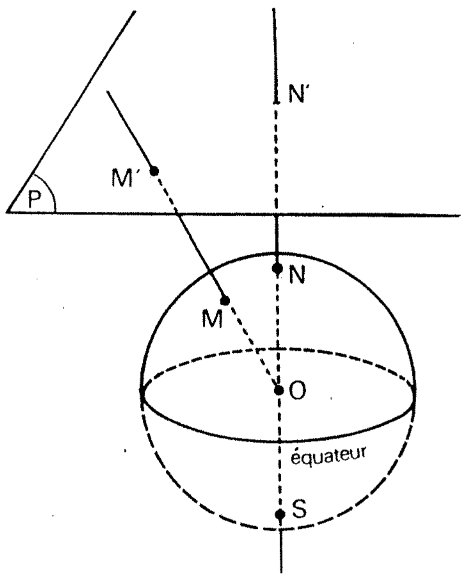


ISOCYLINDRIQUE



Si l'on dispose de deux cartes ayant la même échelle le long de l'équateur, l'une obtenur par projection orthogonale et l'autre par projection isocylindrique, il est possible de construire la distance, à la surface de la Terre, de deux points. Par exemple, entre Moscou (noté M et M_1) et New-York (noté N et N_1) : on trace le triangle rectangle $M_1N_1H_1$ (M_1H_1 suit un méridien). On reporte MN en AH_1, puisAM_1 en BC. L'arc BC mesuré sur l'équateur de la projection orthogonale représente la distance cherchée.

LA PROJECTION GNOMONIQUE



La projection gnomonique consiste à projeter une demi-sphère sur un plan à partir du centre de la sphère. M' est l'image de M. I qui a pour image I' s'appelle le point central de la projection.
Cette projection qui n'est ni conforme ni équivalente présente le grand avantage de transformer les grands cercles (chemins les plus courts sur la sphère) en droites (chemin les plus courts sur le plan).
Les méridiens et l'équateur qui sont des grands cercles ont pour image des droites ; les parallèles ont pour image des coniques : hyperboles, paraboles, ellipses en général ou des cercles quand le point central est un pôle.

Dans tous les cas, le calcul des angles est assez facile. Par exemple, si le point central est un pôle, l'angle v entre la direction du pôle et le chemin suivit s'obtient à partir de l'angle V lu sur la carte et la latitude l du lieu où l'on fait la mesure par la formule :

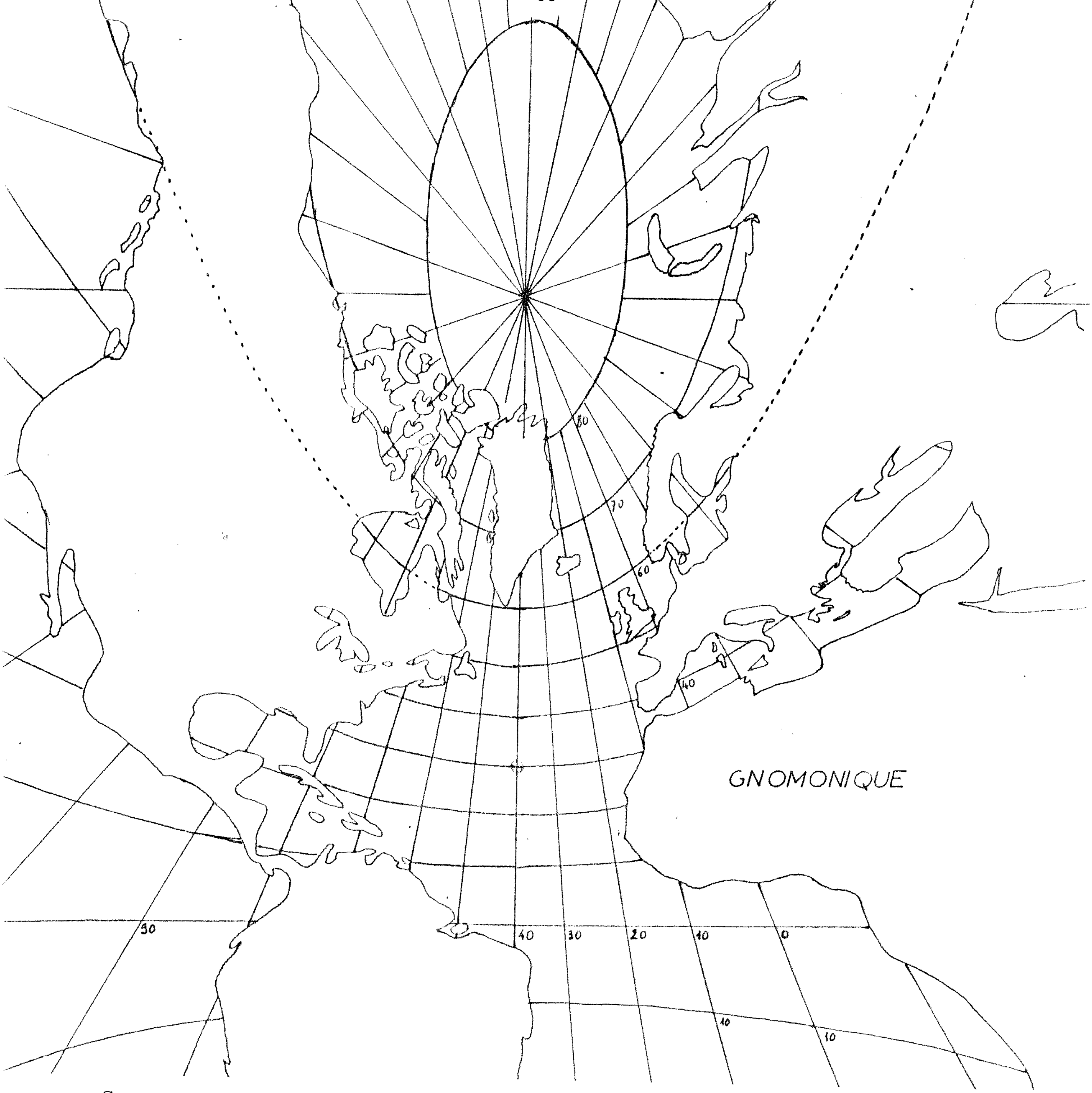
$$\operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{tg} V}{\sin l}$$

Par exemple sur une route entre Miami (M) et Paris (P) :

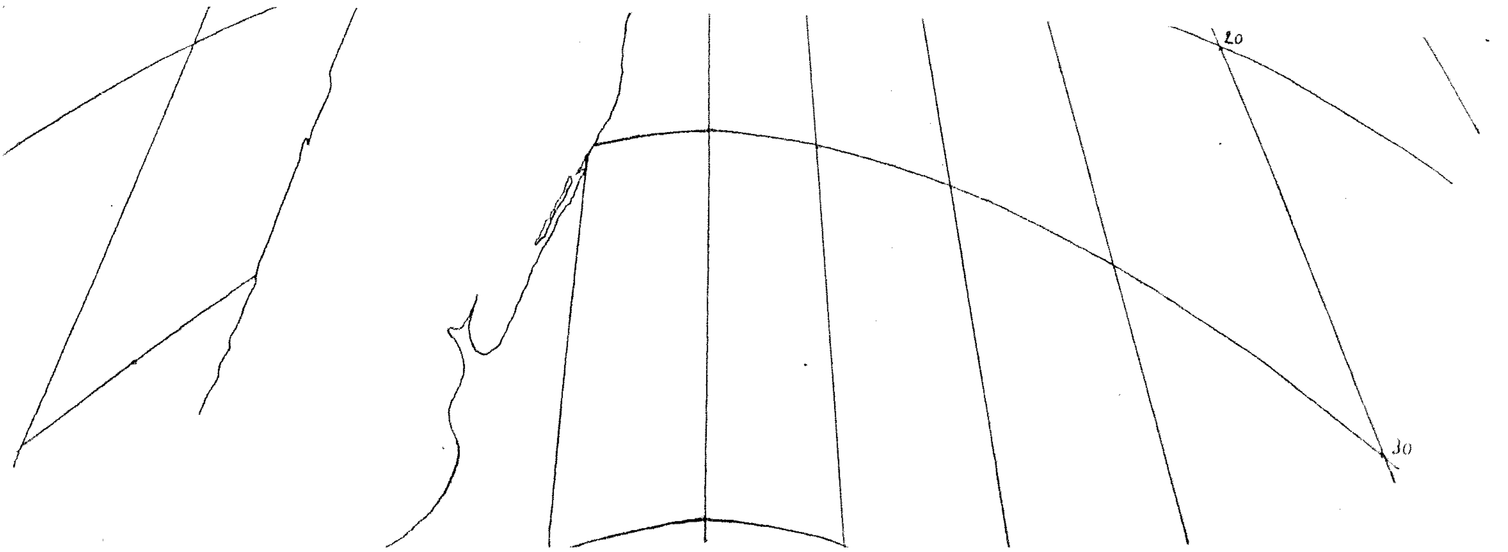
$$\left.\begin{array}{l} V = 20^\circ \\ l = 30^\circ \end{array}\right\} \quad \text{donc } v = 36^\circ 00'$$

$$\left.\begin{array}{l} V = 50^\circ \\ l = 45^\circ \end{array}\right\} \quad \text{donc } v = 59^\circ 20'$$

Sur cette carte le point central se trouve au pôle nord.

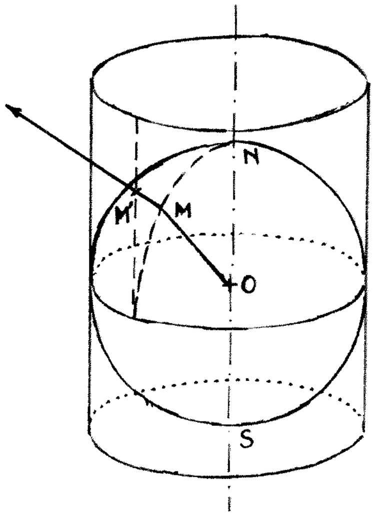


Sur cette carte le point central se trouve au milieu de l'océan atlantique nord (par 30°N et 40° W).



LA PROJECTION DE MERCATOR

Le flamand Gerhard Kremer, dit Mercator, est né à Rupelmonde en 1512 et est mort à Duisbourg en 1594. Il fut le premier à asseoir la cartographie sur de solides bases mathématiques. C'est en 1569 qu'il publia la première carte du monde en dix-huit feuillets, en utilisant la projection qui porte son nom.

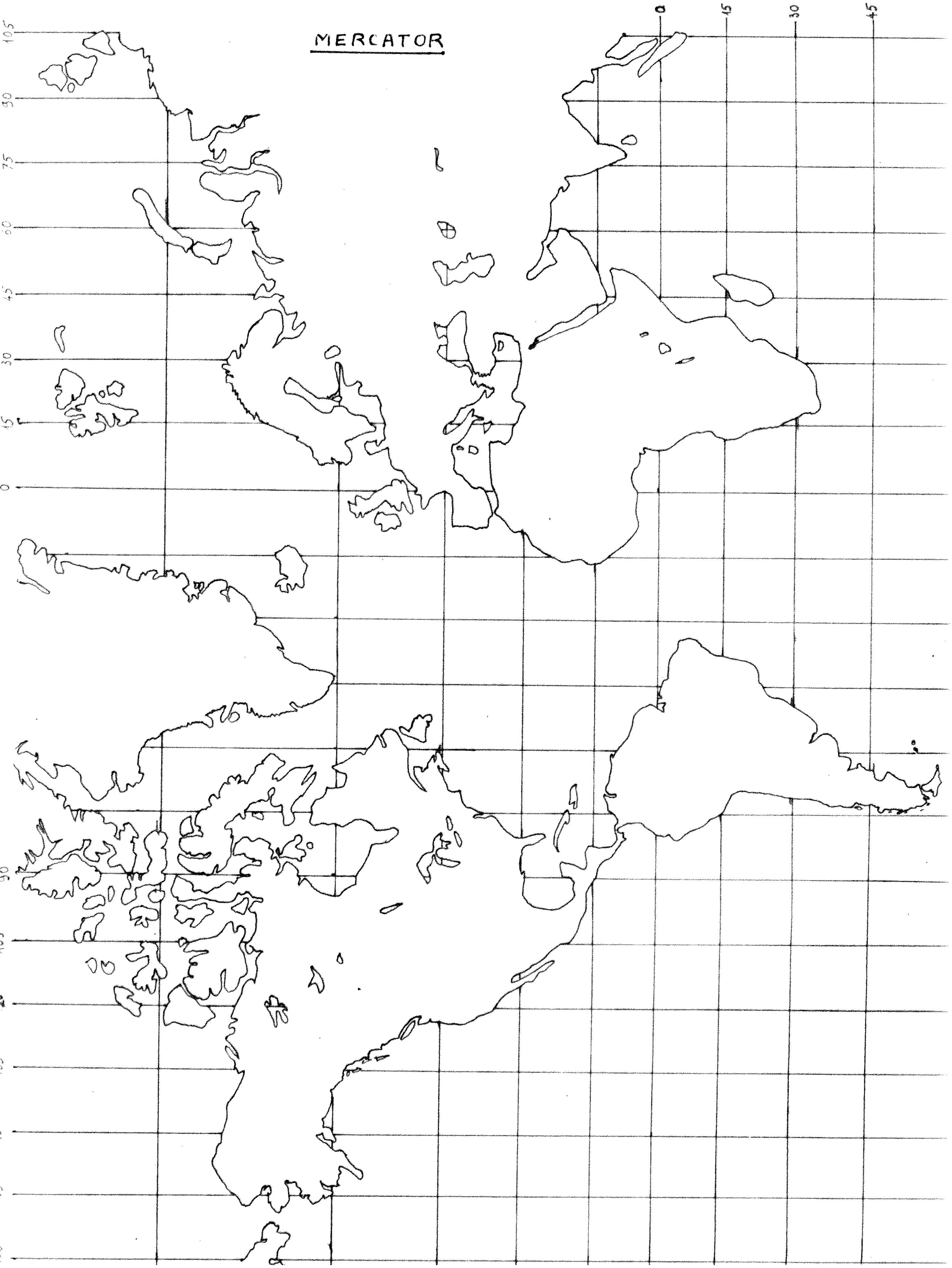


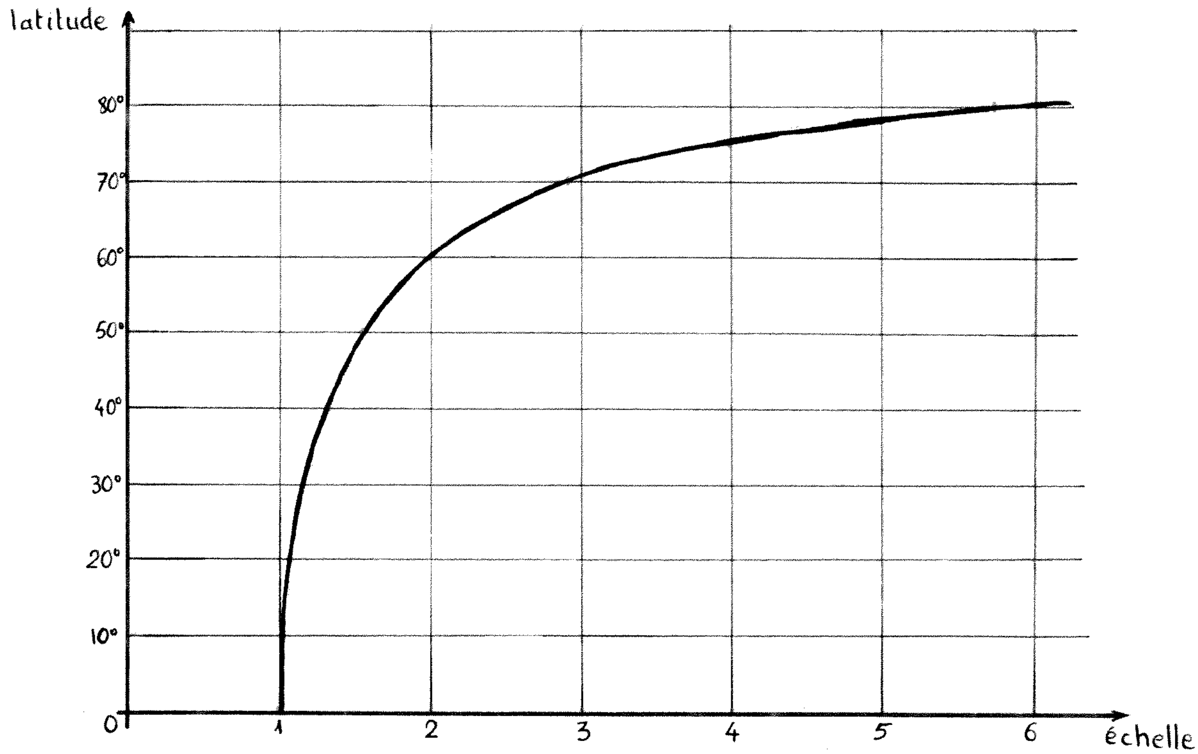
Dans la projection de Mercator usuelle, on projette un point M de la surface terrestre en M' sur un cylindre tangent à l'équateur. **Attention** : les points O, M et M' ne sont pas alignés mais sont dans un même plan méridien.

Pour obtenir une carte plane, on découpe ensuite le cylindre puis on le déroule. Enfin une réduction d'échelle permet d'obtenir une carte de dimensions convenables.

Sur le canevas obtenu, les méridiens sont des droites parallèles régulièrement espacées, les parallèles sont des droites perpendiculaires aux précédentes mais dont l'écartement croît quand on s'éloigne de l'équateur. (L'écartement est inversement proportionnel au cosinus de la latitude.)

La projection de Mercator est une projection conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles. De plus elle représente par des droites les routes dont le cap est constant. Mais les déformations sont d'autant plus importantes que l'on se rapproche des pôles. La projection de Mercator est donc essentiellement utilisée pour la représentation des régions équatoriales.

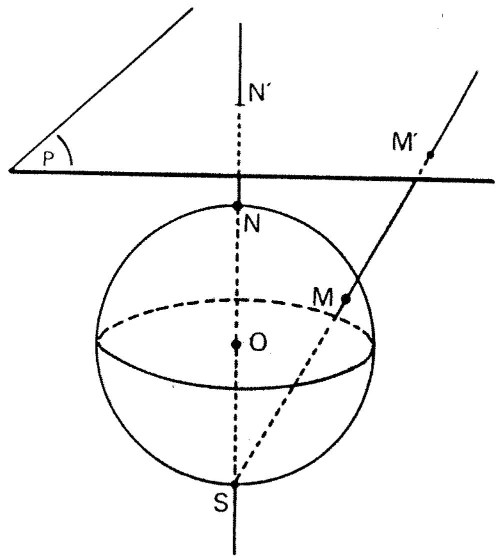

MERCATOR



Le graphique ci-dessus donne la relation entre l'échelle et la latitude. Par exemple, l'échelle de la carte vaut deux fois celle à l'équateur pour les points de latitude 60°. A partir de cette valeur l'échelle croît très rapidement.

Pour les besoins de la navigation aérienne on utilise la projection de Mercator oblique : le cylindre auxiliaire de projection est tangent au grand cercle itinéraire de l'avion. On parle de projection de Mercator transverse quand le cylindre est tangent à un méridien.

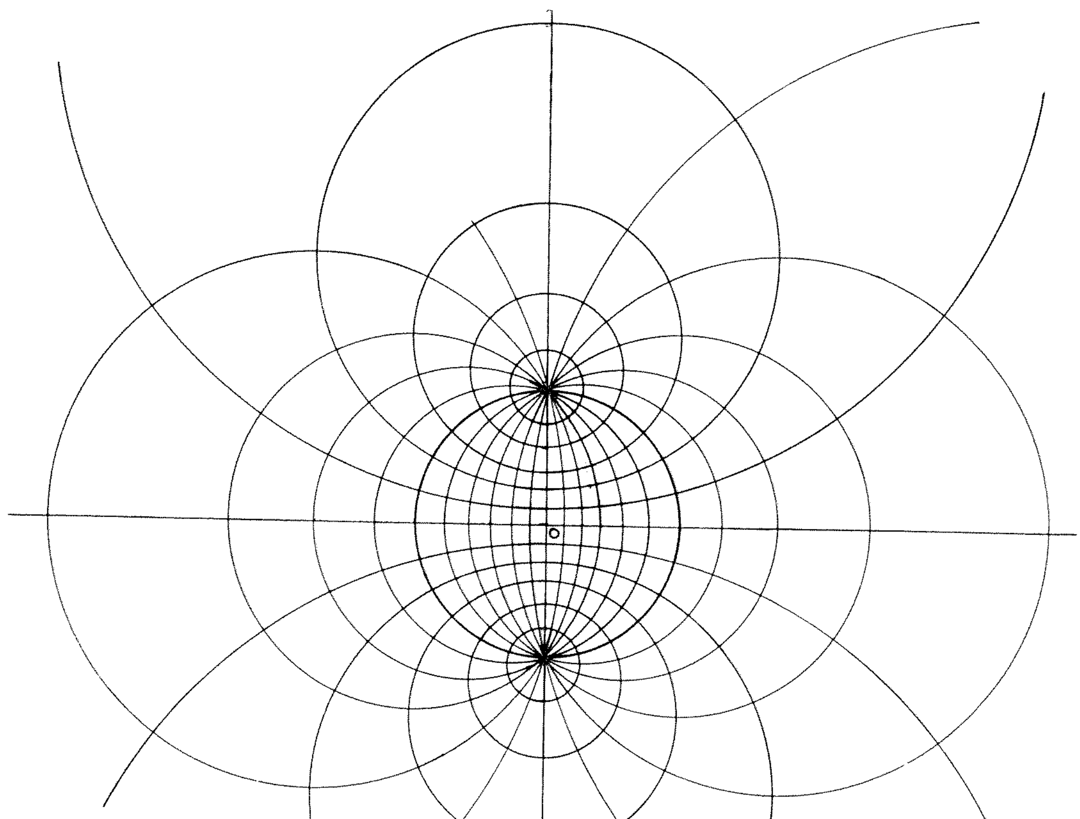
LA PROJECTION STEREOGRAPHIQUE



La projection stéréographique consiste à projeter la sphère terrestre, à l'exception d'un point (I sur le dessin) sur un plan. Les points I et J sont diamétralement opposés sur la sphère. M' est l'image de M.

Les images des cercles tracés sur la sphère sont des cercles et parfoir des droites sur la carte. Le canevas ci-dessous représente le cas particulier des méridiens et des parallèles.

La projection stéréographique conserve les angles ; c'est une représentation conforme.

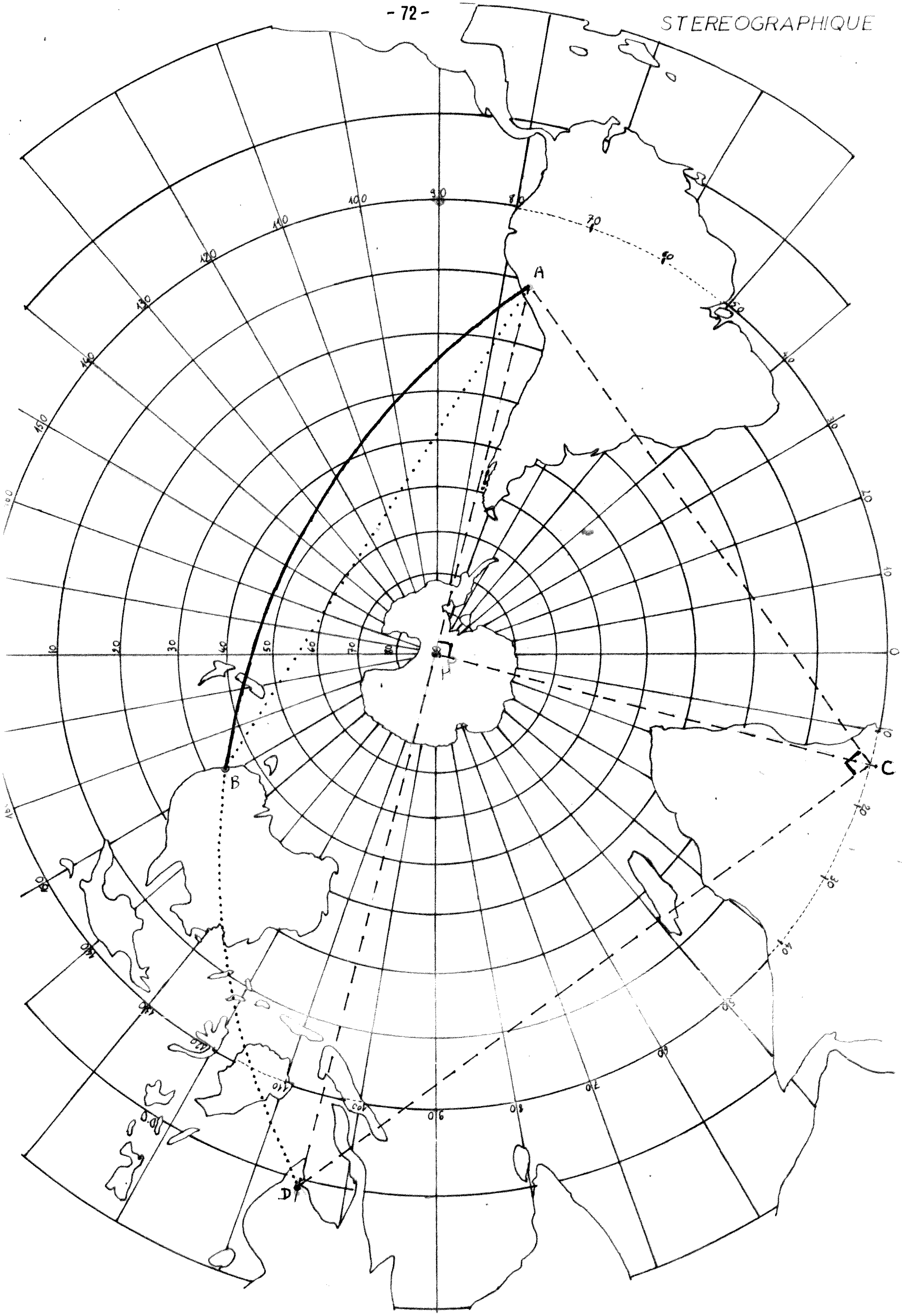


Canevas pour une projection stéréographique de 15 en 15° -

La projection stéréographique est surtout utilisée pour les cartes des régions polaires, auquel cas les méridiens sont des droites concourantes au pôle (le point I à partir duquel s'effectue la projection est le pôle opposé) et les parallèles sont des cercles concentriques.

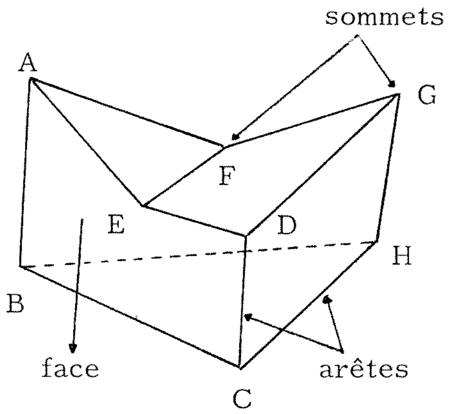
L'image du plus court chemin entre deux points A et B (il s'agit de Lima et Sydney dans cet exemple) est le cercle tracé en trait épais. Pour construire ce cercle, on construit le triangle rectangle APC où P est le pôle et C se trouve sur l'équateur, puis le triangle rectangle ACD où D est aligné avec A et P. Le cercle passant par A, B et D est l'image du grand cercle passant par Lima et Sydney.

STEREOGRAPHIQUE



polyèdres

POLYEDRES



Voici un **polyèdre** : c'est un volume limité par des faces planes.
Ce polyèdre comporte :

8 sommets : A B C D E F G H
12 arêtes : AB, AE, AF, BC, BH, CD, CH, DE, DG, EF, FG, GH,
6 faces : ABCDE, AEF, ABHGF, BCH, DEFG, CDGH.

POLYEDRE vient du grec "poly" : plusieurs (πολυ)
"èdre" : faces (εδρον)
Un polyèdre à 6 faces s'appelle un **hexaèdre** (hexa : six)
Un polyèdre à 12 faces s'appelle un **dodécaèdre** (dodéca : douze) etc...
selon les préfixes suivants :

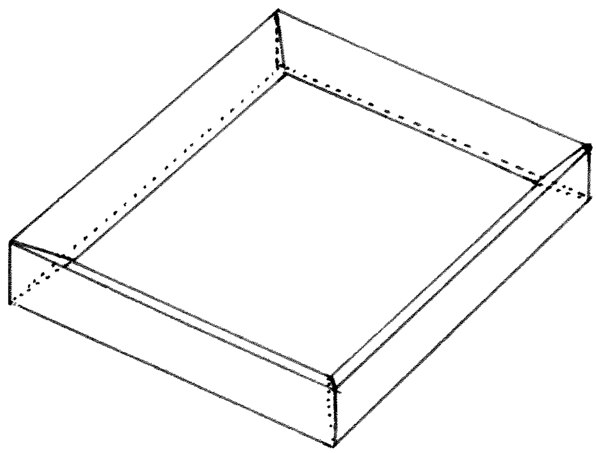
tétra	penta	hexa	hepta	octa	déca	dodéca	icosa
4	5	6	7	8	10	12	20

et si vous savez le grec, vous pouvez en inventer d'autres comme : triacontaèdre de triaconta : trente, sinon vous direz un "30-èdre" ou un polyèdre à 30 faces.

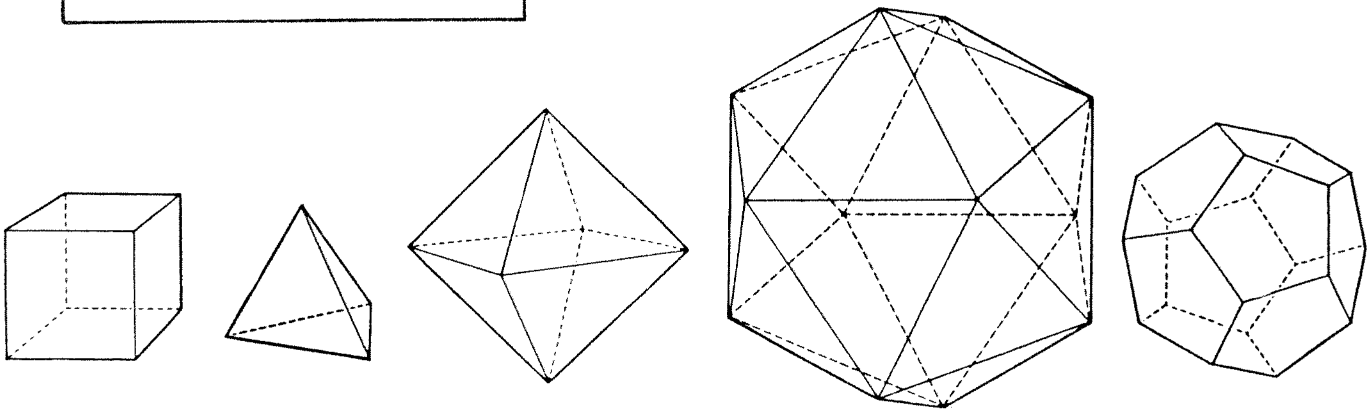
Vous avez à votre disposition plusieurs polyèdres. Pour chacun d'eux, compte le nombre de faces F, d'arêtes A et de sommets S. Ceci est délicat. Calculer S-A+F pour chacun des polyèdres. On trouve souvent 2. C'est la formule d'Euler.

	F nbre de faces	A nbre d'arêtes	S nbre de sommets	S - A + F
Tétraèdre	4	6	4	2
Cube	6	12	8	2
Octaèdre	8	12	6	2
dodécaèdre	12	30	20	2
Icosaèdre	20	30	12	2
Prisme triangulaire	5	9	6	2
Pyramide à base carrée	5	8	5	2
anneau carré	12	24	12	0
anneau triangulaire	9	18	9	0

En pratique, on trouve 2 si le volume est plein, 0, si il y a un trou (comme dans un anneau), -2, si il y a deux trous, -4, si il y a trois trous etc... On peut aussi obtenir des nombres impairs pour des polyèdres plus compliqués.



POLYEDRES DE PLATON



Cube — Tétraèdre régulier — Octaèdre régulier — Icosaèdre régulier — Dodécaèdre régulier

Voici les cinq polyèdres connus depuis Platon (4ème siècle Avant J.C)
On dit q'un **polyèdre est régulier de Platon** si :

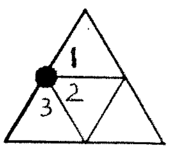
. Chacune de ses faces est un polygone régulier (toujours le même)
. Chacun de ses sommets est commun au même nombre de faces } <u>réguliers</u>
. Il est situé entièrement d'un même côté du plan d'une quelconque de ses faces (on dit qu'il est <u>convexe</u>).

Remarques : . En un sommet aboutissent au moins trois faces.
. Une arête est déterminée par deux faces.

Pourquoi n'y a-t-il que **cinq** polyèdres réguliers de Platon ?

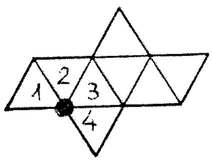
1) Prenons des triangles réguliers (ou triangles équilatéraux). Autour d'un sommet on peut mettre 3, 4 ou 5.

3



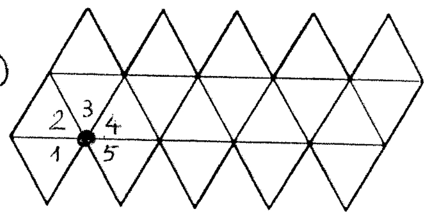
conduit au tétraèdre

4



conduit à l'octaèdre

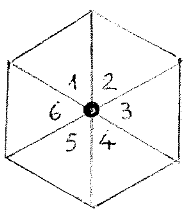
5



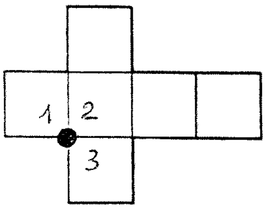
conduit à l'icosaèdre

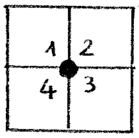
six faces triangulaires remplissent le plan et ne permettent pas de faire du volume.

6



2) Prenons des carrés. Autour d'un sommet on ne peut en mettre que 3.

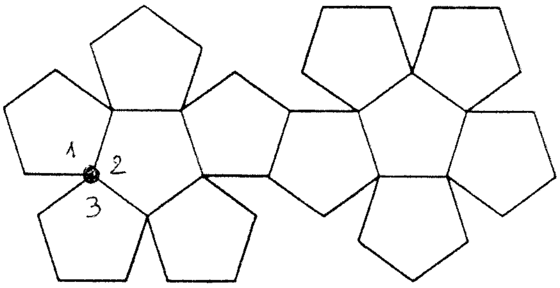


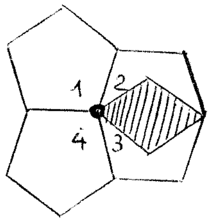


conduit au cube

quatre faces carrées remplissent le plan et ne permettent pas de faire du volume.

3) Prenons des pentagones réguliers. Autour d'un sommet on ne peut en mettre que 3.



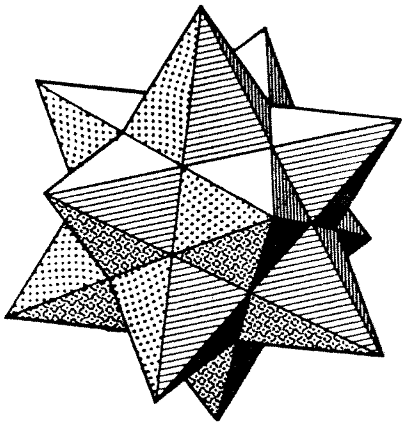


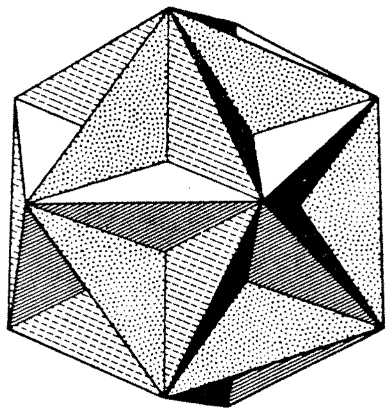
conduit au dodécaèdre

On ne peut pas placer 4 pentagones autour d'un sommet sans chevauchement.

4) Si on prend trois polygones à six, sept... autour d'un sommet on remplira tout le plan et il y aura même chevauchement, ce qui ne permet pas de créer un volume.

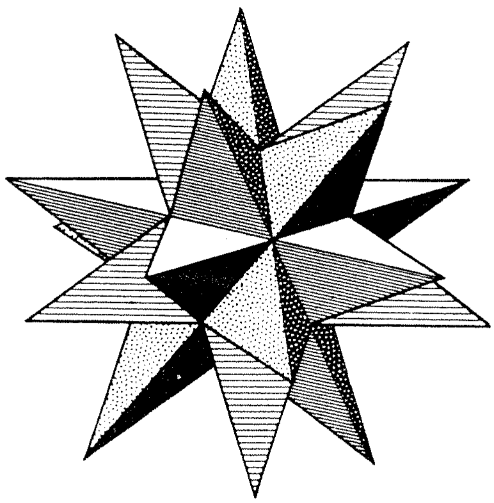
POLYEDRES DE KEPLER - POINSOT

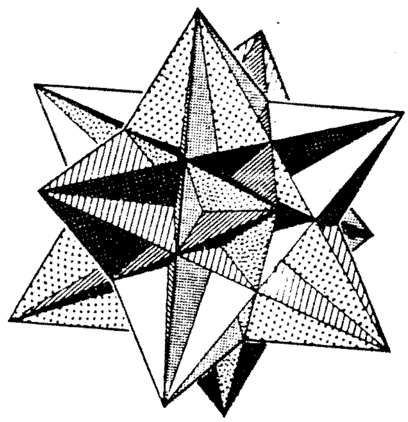




Petit dodécaèdre étoilé

Grand dodécaèdre

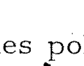




Grand dodécaèdre étoilé

Grand icosaèdre

Voici les quatre polyèdres étoilés réguliers découverts par Képler (1571-1630) pour le petit et le grand dodécaèdre étoilés et par Poinsot (1777-1859) pour le grand dodécaèdre et le grand icosaèdre. Ils sont réguliers mais ne sont pas convexes.

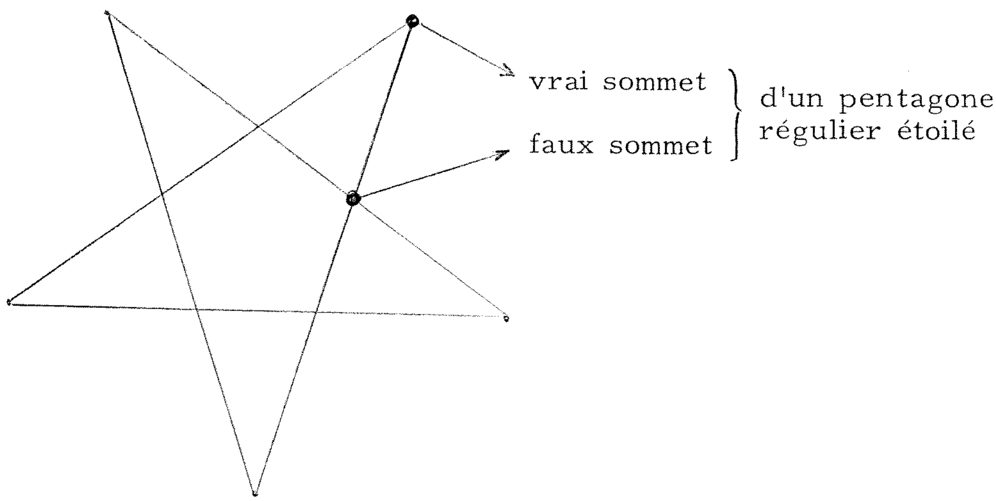
On remarque que les polyèdres de Képler ont des "faces" étoilées (ce sont des pentagones étoilés ).
Tandis que les polyèdres de Poinsot ont des "faces" convexes disposées de façon étoilée.

On dit qu'un **polyèdre est régulier** si :

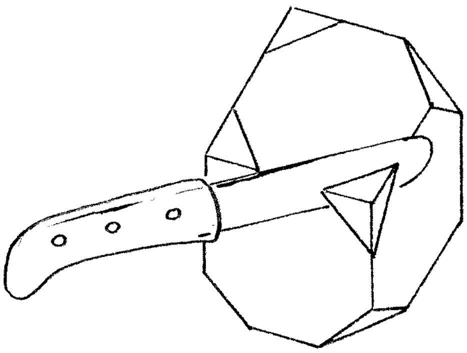
. Chacune de ses faces est un polygone régulier (toujours le même).
. Chacun de ses sommets est commun au même nombre de faces.

	nbre de "sommets"	nbre de "faces"	nbre d'"arêtes"
Petit dodécaèdre étoilé	12	12	30
Grand dodécaèdre	12	12	30
Grand dodécaèdre étoilé	20	12	30
Grand icosaèdre	12	20	30

Il n'est pas question, ici, de chercher à appliquer la formule d'Euler car on ne compte pas réellement tous les sommets, toutes les arêtes et toutes les faces.



POLYEDRES D'ARCHIMEDE



Découpons les coins d'un cube pour faire apparaître des triangles équilatéraux et des octogones réguliers.

C'est le cube tronqué

Plus généralement, **un polyèdre est Archimédien** si :

. Chacune de ses faces est un polygone régulier (mais pas nécessairement identique)

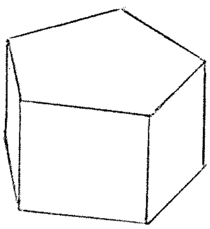
. Chacun de ses sommets est commun au même nombre de faces dont la succession est toujours la même.

. Il est convexe

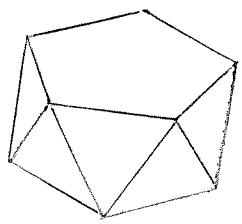
On trouve ainsi treize nouveaux polyèdres (voir dessin ci-contre).

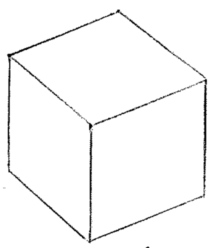
Mais répondent également à la définition deux autres familles infinies :

Les prismes réguliers **les antiprismes réguliers**

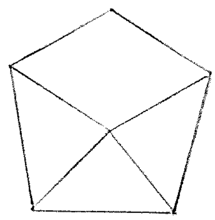


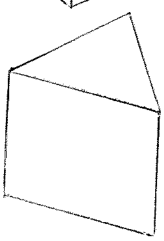
à base pentagonale



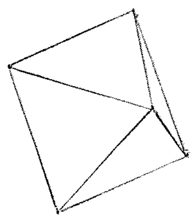


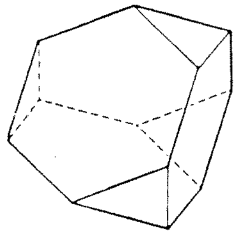
à base carrée



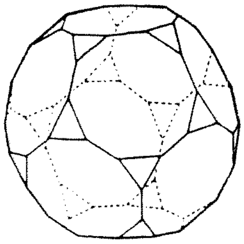


à base triangulaire

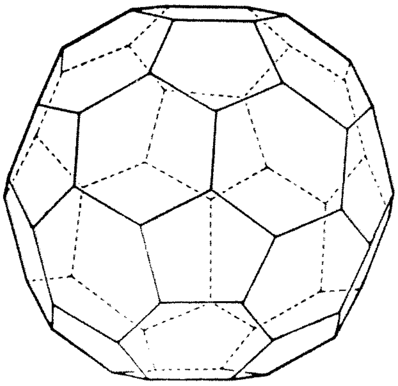




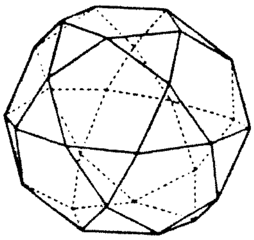
tétraèdre tronqué



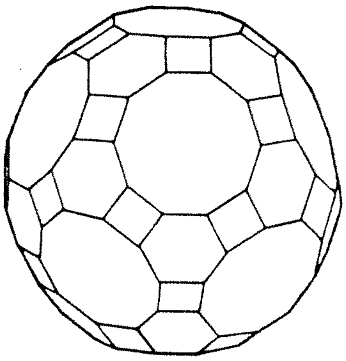
dodécaèdre tronqué



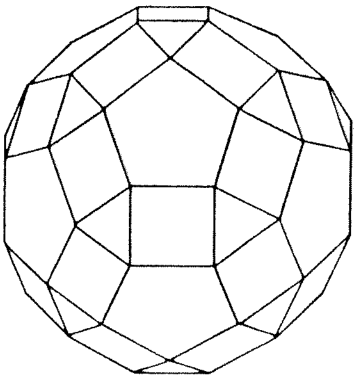
icosaèdre tronqué



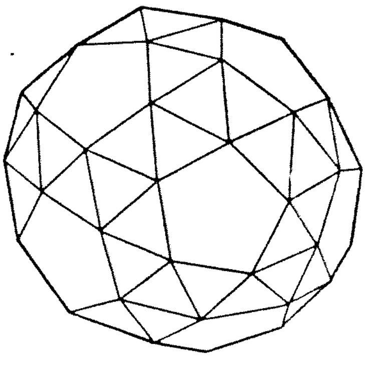
icosidodécaèdre



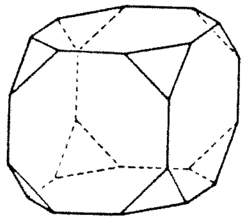
icosidodécaèdre tronqué



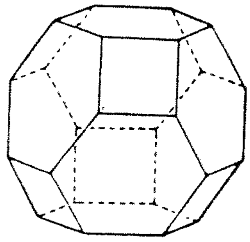
rhombicosidodécaèdre



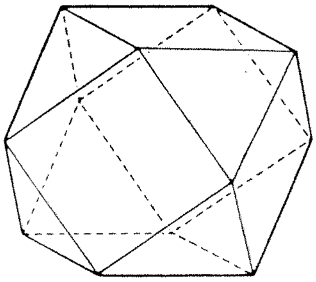
dodécaèdre adouci



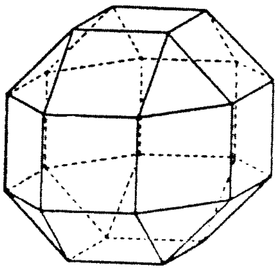
cube tronqué



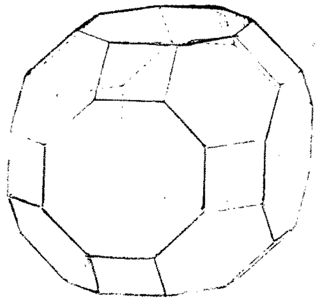
octaèdre tronqué



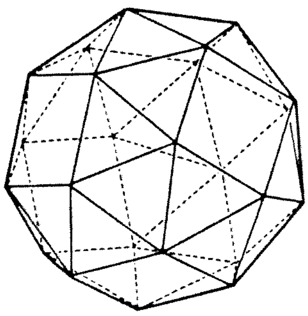
cuboctaèdre



rhombicuboctaèdre



cuboctaèdre tronqué

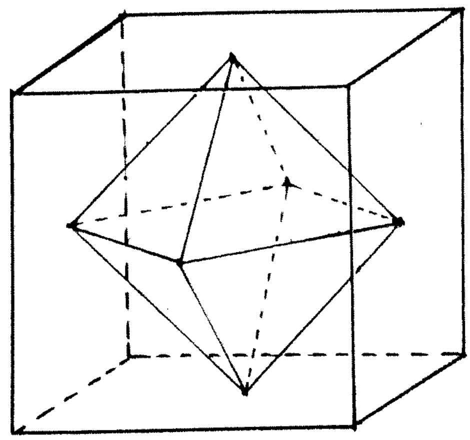


cube adouci

DUALITE

POLYEDRE DUAL

Marquez un point au centre de chaque face d'un cube ; reliez par des droites les six points marqués : vous obtenez les arêtes d'un octaèdre.
Et si vous faites la même chose à partir d'un octaèdre, vous obtenez un cube.



On dit que cube et octaèdre sont duals l'un de l'autre .

Le DUAL d'un polyèdre régulier ou semi-régulier est donc le polyèdre dont les arêtes sont obtenues en joignant les centres des faces adjacentes.

- La dualité échange donc les nombres F et S de faces et de sommets de deux polyèdres duals :
  le dual a. F sommets, correspondant chacun à une face de son "parent",
  . S faces, correspondant chacune à un sommet du polyèdre "parent",
  . et, A arêtes, comme son "parent".
- La dualité est une notion symétrique :
  si P a pour dual Q, Q a pour dual P.
- On retrouve dans le dual les mêmes éléments (axes et plans) de symétrie que dans le polyèdre d'origine.

DUALS DES POLYEDRES DE PLATON

Ces polyèdres sont tous duals les uns des autres, selon le tableau de correspondance:

POLYEDRE	F	A	S	
Tétraèdre	4	6	4	Tétraèdre
Cube	6	12	8	Octaèdre
Octaèdre	8	12	6	Cube
Dodécaèdre	12	30	20	Icosaèdre
Icosaèdre	20	30	12	Dodécaèdre
	S	A	F	DUAL

DUALS DES POLYEDRES D'ARCHIMEDE

- Contrairement aux polyèdres de Platon, les polyèdres d'Archimède, ne sont pas duals les uns des autres.
  - . Parce que les **sommets** du cuboctaèdre sont tous identiques, les **faces** de son dual, le dodécaèdre rhombique, sont toute identiques.
  - . Parce que **quatre faces** se réunissent à chaque sommet du cuboctaèdre, chaque face du dodécaèdre rhombique est un **quadrilatère.**
  - . Parce que les faces du cuboctaèdre sont de **deux types**, les sommets du dodécaèdre rhombique sont de **deux types** :

    3 faces pour former un sommet provenant d'un triangle.

    4 faces pour former un sommet provenant d'un carré.

- En remplaçant leurs sommets par des faces, et leurs faces par des sommets, on obtient obtient de nouveaux polyèdres, dont la propriété essentielle est d'avoir **des faces de même forme**, puisqu'ils proviennent de polyèdres dont les sommets sont tous de même nature.
- Par ailleurs, une face du dual a **le même nombre de côtés** qu'il y a de **faces réunies au sommet** correspondant du parent.

- A un sommet du dual arrivent autant d'**arêtes** qu'il y a de **côtés** à la face correspondante du parent.

Voici la nomenclature couramment utilisée :

Polyèdres d'ARCHIMEDE →	F	A	S	
Tétraèdre tronqué	8	18	12	Triaki-tétraèdre
Cube tronqué	14	36	24	Triaki-octaèdre
Octaèdre tronqué	14	36	24	Tetraki-hexaèdre
Cuboctaèdre	14	24	12	Dodécaèdre rhombique
Petit rhombicuboctaèdre	26	48	24	Icositétraèdre trapézoïdal
Grand rhombicuboctaèdre (ou cuboctaèdre tronqué)	26	72	48	Hexaki-octaèdre
Snub cube	38	60	24	Icositétraèdre pentagonal
Dodécaèdre tronqué	32	90	60	Triaki-icosaèdre
Icosaèdre tronqué	32	90	60	Pentaki-dodécaèdre
Icosidodécaèdre	32	60	30	Triacontaèdre rhombique
Petit rhombicosidodécaèdre	62	120	60	Hexacontaèdre trapézoïdal
Grand rhombicosidodécaèdre ou icosidodécaèdre tronqué	62	180	120	Hexaki-icosaèdre
Snub dodécaèdre	92	150	60	Hexacontaèdre pentagonal
Prismes	n+2	3n	2n	Bipyramides triangulaires
Antiprismes	2n+2	4n	2n	Trapézoèdres
	S	A	F	← DUAL

BIBLIOGRAPHIE

I Numération

* Histoire Universelle des chiffres. Georges Ifrah - Seghers
* Histoire comparée des numérations écrites - Geneviève Guitel - Flammarion
* Mathématiques et mathématiciens - P. Dedron et J. Itard - Magnard
* Nombre, mesure et continu - J. Dhombre - Nathan
* Naissance de l'écriture - Ministère de la Culture - Editions de la réunion des musées nationaux

II Jeux

* Récréations mathématiques (tome 1 à 4) - Edouard Lucas - Blanchard
* 1000 casse tête - Reter van Delft et Jack Botermans - Chêne
* Problèmes et divertissements mathématiques (Tomes 1 et 2) Martin Gardner - Dunod

III CARTOGRAPHIE

* Mathématiques - Classe de Seconde - IREM Strasbourg - Istra

IV POLYEDRES

* Modèles mathématiques H.H Cundy et A.P. Rollet - Cedic
* Formes espaces et symétries (collection Distracts) - A. Holden - Cedic

* * *
* *
*

SOMMAIRE

I NUMERATION

II JEUX

III CARTOGRAPHIE

IV POLYEDRES