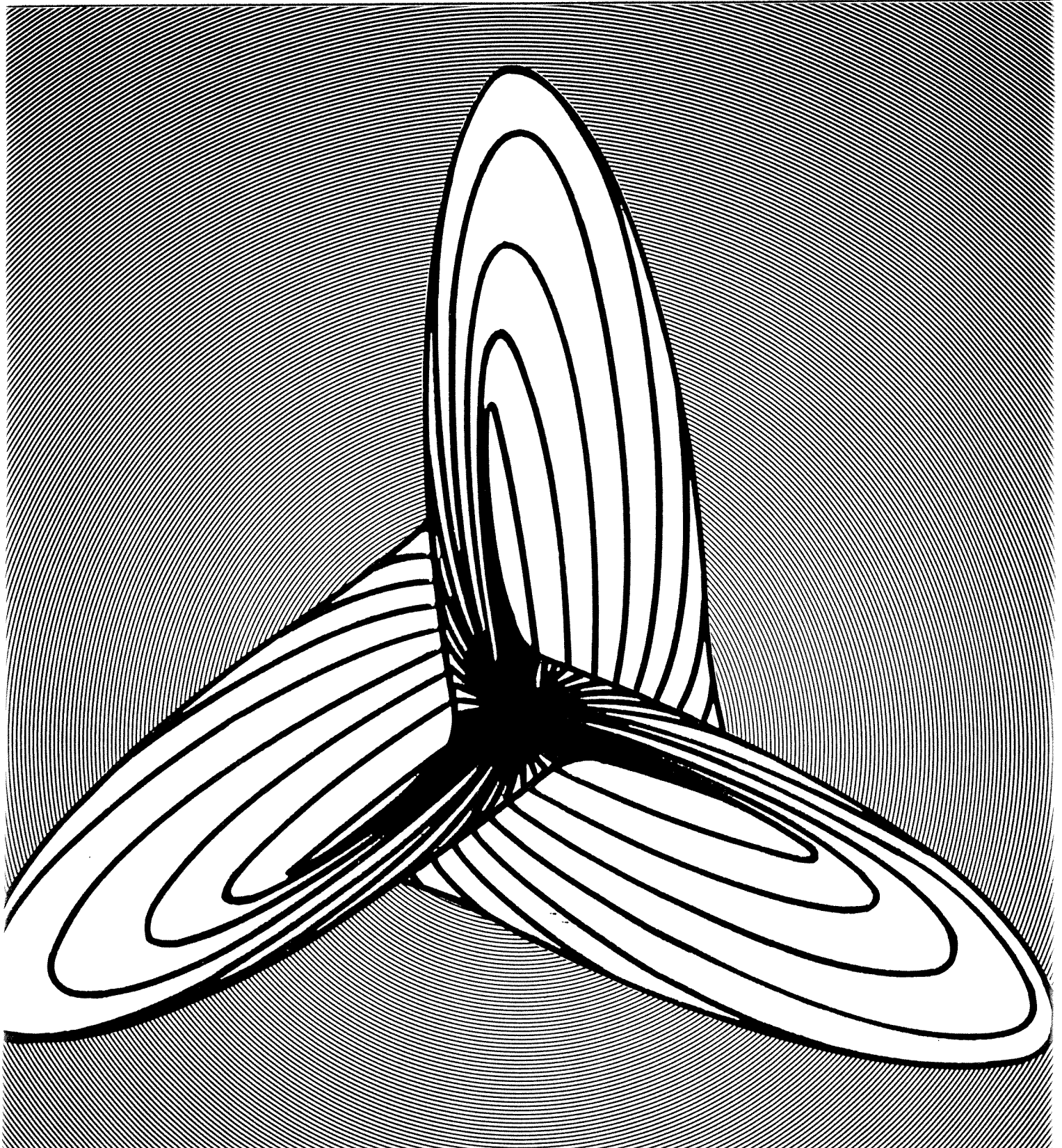


L'OUVERT

N° 38 MARS 1985

JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG



NOTRE COUVERTURE : La surface de Boy du 6° degré.
Sous son air bien sage - ne dirait-on pas une hélice de
super-tanker - elle cache bien bien des choses. Changez
son paramétrage, et vous la verrez devenir inquiétante.
Sans compter qu'elle cache des manches de parapluie,
des bonnets croisés et autres babioles...
Après avoir lu l'article de F. Apéry (p. 1), vous saurez
tout sur l'odyssée des limiers qui l'ont traquée, jusqu'à
nos jours.

EDITORIAL

Les filières scientifiques sont à l'honneur. On nous invite à y attirer une foule toujours plus nombreuse d'élèves, dans le but de doter le pays d'une forte armée de techniciens, d'ingénieurs... à en faire pâlir les japonais.

Les professeurs de disciplines scientifiques, et tout particulièrement de mathématique, doivent donc délaissé le rôle de censeur sévère pour apprendre celui de sergent-recruteur. Dans le passé récent, il est vrai, le recrutement des sections scientifiques se faisait de plus en plus sélectif, situation dont les professeurs de mathématique étaient loin d'être innocents. Le retournement de tendance actuellement encouragé est donc, en partie du moins, un juste retour des choses. Il peut aussi susciter quelques inquiétudes :

- La sélection par l'échec est humiliante. Le sentiment de ne jamais avoir été dans le coup au cours d'une année dans une section scientifique où l'on a été poussé, peut briser l'ambition d'un élève, le résoudre à la médiocrité.
- Ne sera-t-il pas tentant, pour accueillir plus de monde et obtenir ainsi de glorieuses statistiques, de recréer sans le dire les filières C et D en Première ? Cela semble être déjà le cas dans certains établissements. Le programme se prête pourtant bien mal à une telle manipulation.
- Il n'est plus rare, au Japon, que des adolescents se suicident pour ne pas avoir réalisé l'ambition scolaire de leurs parents. Une mère s'est même résolue à l'infanticide devant l'échec de son fils. Matteo Falcone, version Soleil levant...
Le modèle japonais est-il vraiment si enviable ?

Dans ce numéro de l'Ouvert, J. Martinet et P.A. Meyer parlent de ce qui fait la vie des mathématiques d'aujourd'hui. Voilà ce qui devrait circuler parmi nos élèves pour susciter de véritables vocations scientifiques.

Pour ne pas rester sur ces sombres considérations, feuilletez vite l'Ouvert. Un roman policier historico-mathématique ouvre les réjouissances. Le suspect, un certain "planprojectif" est soupçonné de s'être carrément (!) immergé. Les manches de parapluie dont il s'est machiavéliquement muni ne l'ont pas empêché d'être confondu.

III
SOMMAIRE

* NOTRE COUVERTURE	P. I
* EDITORIAL	P. II
* LE VINGT-QUATRIÈME PROBLÈME DE HILBERT Par F. Apéry	P. 1
* RÉACTION EN CHAÎNE... Par M. de Cointet	P. 25
* TÉMOIGNAGE DE MATHÉMATIENS Par J. Martinet et P.-A. Meyer	P. 29
* INFORMATION : AUTOUR DE LOGO Par D. Guin	P. 33
* UN SCÉNARIO, POUR LE CALCUL NUMÉRIQUE EN 4E Par F. Pluvinage et B. Blochs	P. 34
* DÉBAT : DE LA SIGNIFICATION MATHÉMATIQUES D'HYPOTHÈSES EN PHYSIQUE ET RÉCIPROQUEMENT...	P. 41
* CINQ FACES ! PAS SEPT ...	P. 50
* COURRIER	P. 52

L'OUVERT

ISSN 0290-0068

- . Responsable de publication : J. Lefort
- . Rédaction : G. Glaeser et E. Chaney
- . Correspondance à adresser à :
Bibliothèque IREM
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
- . Participation aux frais pour 4 parutions
annuelles : 60.- F (+ port si pas Alsace)
- . Disponible à la Bibliothèque de l'IREM.

LE VINGT-QUATRIEME PROBLEME DE HILBERT

François APERY

1. JACOB STEINER DÉCOUVRE UNE MITRE À ROME

La théorie des *surfaces fermées* (connexes compactes sans bord) a montré au 19^e siècle qu'il était possible de les classer au sens de l'analysis situs, c'est-à-dire à une transformation bijective bicontinue près, par leur orientabilité et leur genre. Une surface est dite *non orientable* si elle contient un ruban de Möbius (Fig. 1). Quant à son genre, il correspond au nombre maximum de courbes fermées sans point double que l'on peut y découper sans la disconnecter. De telles surfaces peuvent être définies de façon abstraite à partir d'un polygone régulier à un nombre pair de côtés dont on identifie deux à deux les côtés choisis convenablement. Mais historiquement, les surfaces sont d'abord apparues comme des objets géométriques de l'espace \mathbb{R}^3 .

La représentation la plus intuitive est celle obtenue par *plongement dans \mathbb{R}^3* , c'est-à-dire par image continue injective. La surface fermée ainsi plongée n'a alors aucun point d'auto-intersection dans \mathbb{R}^3 . C'est le cas de la sphère, du tore et plus généralement du bretzel à g anses qui représente la surface orientable de genre g (Fig. 2).

Le plan projectif réel est un bon exemple de surface fermée non orientable. Il peut être construit à partir d'un plan affine auquel on adjoint une droite affine (droite à l'infini) et un point. Il est alors aisé de constater que toute droite projective est l'âme d'un ruban de Möbius. L'impossibilité de représenter une surface fermée non orientable comme surface plongée dans \mathbb{R}^3 est montrée par DARBOUX dans son cours sur la théorie des surfaces en 1882. Aussi pour en connaître la géométrie, on a recours à la notion d'*immersion en position générale*. Celle-ci est donnée par une application continuellement différentiable dont la dérivée définit en tout point un plan tangent, telle que les seules auto-intersections permises soient des courbes doubles le long desquelles la surface se recoupe transversalement, et un nombre fini de points

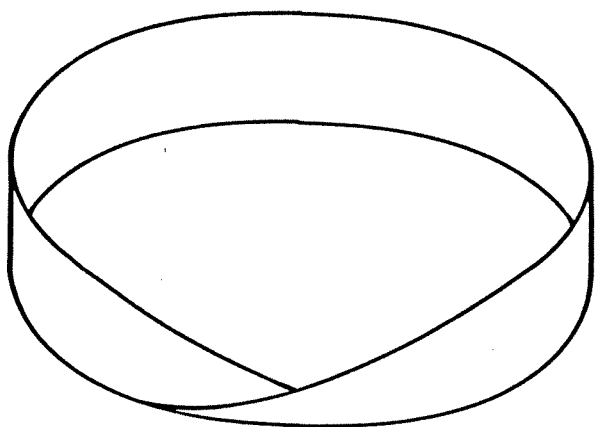


Fig. 1 : Ruban de Moëbius

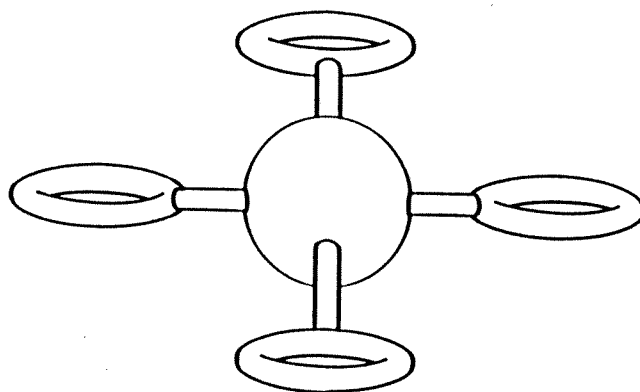


Fig. 2 : Surface de genre 4 (bretzel à quatre anses) vue comme somme connexe d'une sphère et de quatre tores

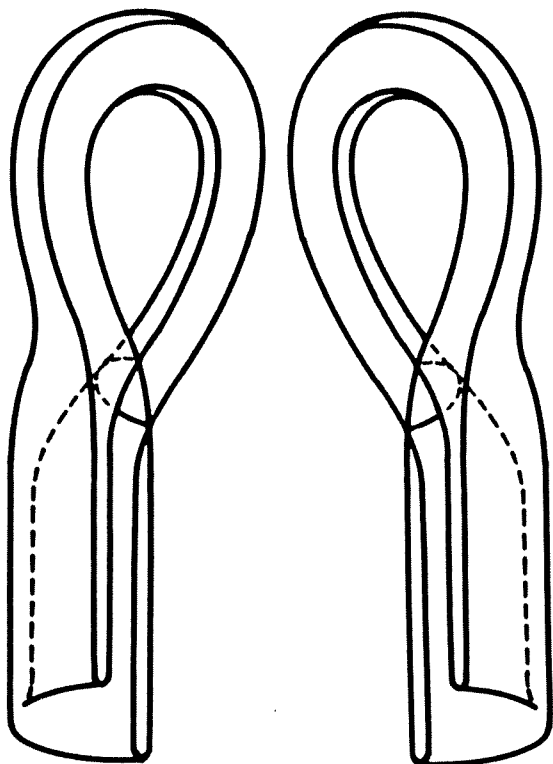


Fig. 3 : Deux rubans de Moëbius immergés donnent une bouteille de Klein, par recollement le long de leurs bords

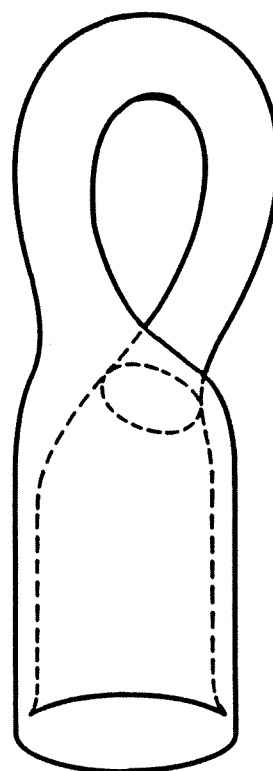


Fig. 4 : Bouteille de Klein

triples en lesquels la surface admet trois plans tangents indépendants.

La première immersion en position générale d'une surface fermée non orientable dans \mathbb{R}^3 à avoir été construite est celle de la surface de genre 2 qui fut obtenue par Félix KLEIN en 1882 par recollement de deux rubans de Möbius le long de leur bord ; c'est la célèbre *bouteille de Klein* (Fig. 3 et 4). Réussir une telle construction pour le plan projectif réel, c'était en fait résoudre la question pour toute surface fermée non orientable puisqu'une telle surface est somme connexe d'un certain nombre de plans projectifs réels. Rappelons que l'opération de somme connexe de deux surfaces consiste à ôter un petit disque sur chacune d'entre elles et à les recoller le long de leurs cercles bords ainsi fermés.

L'existence d'une immersion en position générale du plan projectif réel paraissait néanmoins suffisamment improbable pour que David HILBERT, à l'époque où il dressait une liste de vingt-trois problèmes devant guider les recherches des mathématiciens pour les années à venir, en confie un vingt-quatrième à son élève Werner BOY : **prouver l'impossibilité d'immerger le plan projectif réel dans l'espace à trois dimensions.**

En 1901 Werner BOY résolvait *négativement* le problème de HILBERT et construisait une immersion en position générale du plan projectif réel dans \mathbb{R}^3 baptisée depuis **surface de BOY**.

Notons que l'on connaissait bien avant BOY des représentations du plan projectif réel dans l'espace sous la forme de surfaces admettant des singularités, c'est-à-dire ne pouvant être les images d'immersions.

Il s'agissait essentiellement de la *mitre* (Fig. 5) et de la *surface romaine* (Fig. 6) qui sont dues à Jacob STEINER. Les singularités que l'on y observe sont toutes du même type, dite *singularité du bonnet croisé* (Fig. 10) au voisinage de laquelle on ne peut définir de plan tangent de façon continue.

Pour ces deux surfaces, comme nous le verrons, on dispose d'équations polynômiales du quatrième degré. Le problème qui s'est posé immédiatement après la découverte de BOY a été de représenter sa surface par une équation polynômiale. Il subsistait encore à l'époque l'idée que l'existence d'un être géométrique se trouvait renforcée par la donnée d'équations éventuelles.

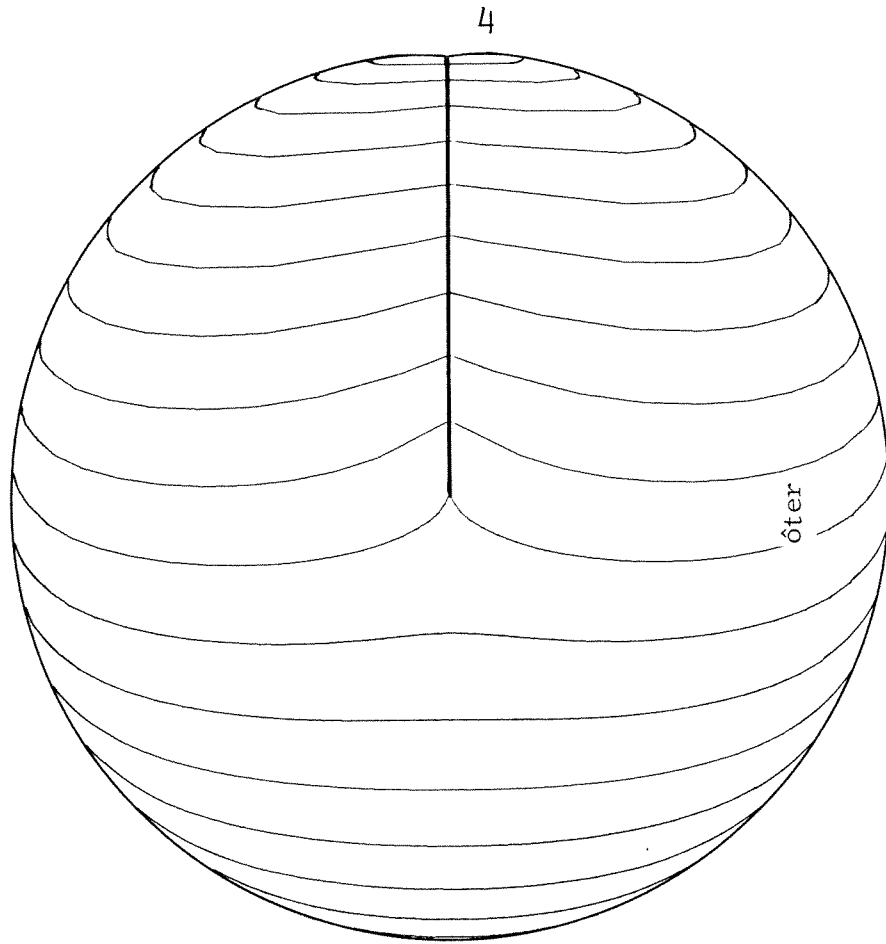


Fig. 5 : Mitre

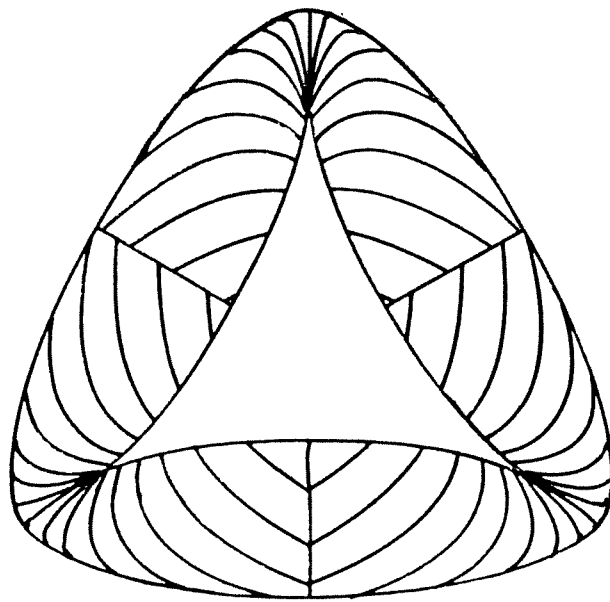


Fig. 6 : Surface romaine

Nous nous proposons dans le présent article de montrer la démarche historique qui a conduit J. STEINER à définir ses surfaces à partir d'une propriété de M. FREGIER et ensuite à utiliser la géométrie des coniques mise ainsi en oeuvre pour les étudier, et s'inspirer de leurs propriétés pour donner à la surface de BOY une équation du sixième degré.

2. FRÉGIER DÉCOUVRE UN POINT

Pour construire ses surfaces le géomètre suisse Jacob STEINER avait pris comme point de départ une propriété démontrée en 1816 dans les annales de Gergonne par M. FREGIER : on se donne une quadrique propre (q) de l'espace projectif, un point O sur cette quadrique, une conique propre (c) contenue dans un plan (π) ne passant pas par O ; on construit ensuite un tétraèdre (τ) de sommet O inscrit dans (q) dont les trois arêtes issues de O coupent (π) suivant un triangle autopolaire relativement à (c) ; alors la face de (τ) opposée à O passe par un point fixe F indépendant du tétraèdre choisi (Fig. 8).

Cette propriété était déjà une généralisation d'une propriété analogue dans le plan projectif, mais la méconnaissance à l'époque du calcul matriciel avait interdit à FREGIER de la généraliser en dimension quelconque. Voici la forme générale que l'on peut en donner sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2.

Propriété 1. Soit (q) une hyperquadrique propre de l'espace projectif de dimension n, O un point de (q), (c) une hyperconique propre (hyperquadrique de codimension 2) située dans un hyperplan (π) ne passant pas par O, et (τ) un (n+1) - simplexe de sommet O inscrit dans (q) dont les n arêtes issues de O coupent (π) suivant un n-simplexe autopolaire relativement à (c) ; alors la face hyperplane de (τ) opposée à O passe par un point fixe F appelé *point de Frégier*.

Preuve. Soit $M = (u_1 | \dots | u_n)$ une matrice $n \times n$ dont les colonnes u_1, \dots, u_n représentent les systèmes de coordonnées homogènes en (x^1, \dots, x^n) des sommets d'un n-simplexe autopolaire relativement à (c). Si C désigne la matrice de (c) on a $\det C \neq 0$ et on peut supposer, quitte à multiplier les coordonnées homogènes des sommets du n-simplexe par une constante non nulle, que

$${}^t M \cdot C \cdot M = I \cdot \det C \quad \text{où } I \text{ est la matrice unité } n \times n.$$

Après une éventuelle permutation des colonnes de M on a $\det M = 1$.

Or on sait que

$$\tilde{M} M = M \tilde{M} = I \cdot \det M \quad \text{où } \tilde{M} \text{ est la transposée de la matrice des cofacteurs de } M.$$

On en déduit la relation :

$${}^t \tilde{M} \cdot \det C = C \cdot M.$$

La matrice de (q) s'écrit

$$\begin{pmatrix} Q & | & v^t \\ \hline v^t - v^n & & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\begin{pmatrix} u_j^t \\ \vdots \\ u_j^n \end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M, les équations de l'arête issue de O correspondante

du (n+1)-simplexe obtenu en adjoignant O au n-simplexe précédent s'écrivent

$$\frac{x^t}{u_j^t} = \dots = \frac{x^n}{u_j^n}$$

En désignant par 2λ la valeur commune de ces quotients on voit que cette arête recoupe (q) en un point $(2\lambda \cdot u_j^t, \dots, 2\lambda \cdot u_j^n, x^{n+1})$ vérifiant

$$\begin{aligned} O &= (2\lambda \cdot u_j^t, \dots, 2\lambda \cdot u_j^n, x^{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} Q & | & v^t \\ \hline v^t - v^n & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\lambda \cdot u_j^t \\ \vdots \\ 2\lambda \cdot u_j^n \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= 4\lambda \cdot [\lambda(u_j^t, \dots, u_j^n) \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} u_j^t \\ \vdots \\ u_j^n \end{pmatrix} + x^{n+1} \cdot \langle u_j, v \rangle] \\ \text{où } \langle u_j, v \rangle &= (u_j^t, \dots, u_j^n) \cdot \begin{pmatrix} v^t \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

λ étant supposé non nul, on trouve le point F de coordonnées homogènes

$$(2u_j^t \langle u_j, v \rangle, \dots, 2u_j^n \langle u_j, v \rangle, -{}^t u_j \cdot Q \cdot u_j)$$

La quantité $\langle u_j, v \rangle$ étant non nulle dès que l'on suppose que l'arête précédente n'est pas dans l'hyperplan tangent à (q) en O.

Soit (u_0^t, \dots, u_0^n) le pôle relativement à (c) de l'intersection de (π) avec l'hyperplan tangent en O à (q). On peut supposer

$$C \cdot \begin{pmatrix} u_0^t \\ \vdots \\ u_0^n \end{pmatrix} = \det C \cdot \begin{pmatrix} v^t \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} u_0^t \\ \vdots \\ u_0^n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} v^t \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Les équations de la droite issue de O et passant par ce point sont

$$\frac{x^t}{u_0^t} = \dots = \frac{x^n}{u_0^n}$$

ce qui donne la représentation paramétrique

$$x^t = \lambda u_0^t, \dots, x^n = \lambda u_0^n$$

Nous voulons prouver que le point F d'intersection de cette droite avec l'hyperplan déterminé par F_1, \dots, F_n ne dépend pas des coefficients u_j^t de M.

Les coordonnées du point F s'écrivent $(\lambda u_0^t, \dots, \lambda u_0^n, x^{n+1})$ et vérifient

$$O = \begin{vmatrix} 2u_1^t \langle u_1, v \rangle & \dots & 2u_1^n \langle u_1, v \rangle & -{}^t u_1 \cdot Q \cdot u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2u_n^t \langle u_n, v \rangle & \dots & 2u_n^n \langle u_n, v \rangle & -{}^t u_n \cdot Q \cdot u_n \\ \lambda u_0^t & \dots & \lambda u_0^n & x^{n+1} \end{vmatrix} = \Delta$$

sachant que $\det M = 1$ on a, en développant Δ suivant la dernière ligne

$$\Delta = 2^n \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle x^{n+1} + 2^n \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} u_0^j \cdot \Delta^j$$

$$\text{avec } \Delta^j = \begin{vmatrix} u_1^j \langle u_1, v \rangle \dots u_1^{j-1} \langle u_1, v \rangle u_1^{j+1} \langle u_1, v \rangle \dots u_1^n \langle u_1, v \rangle u_1 \cdot Q \cdot u_1 \\ u_n^j \langle u_n, v \rangle \dots u_n^{j-1} \langle u_n, v \rangle u_n^{j+1} \langle u_n, v \rangle \dots u_n^n \langle u_n, v \rangle u_n \cdot Q \cdot u_n \end{vmatrix}$$

Le développement de Δ^j suivant la dernière colonne donne

$$\Delta^j = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} u_i \cdot Q \cdot u_i \Delta_i^j \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_{i-1}, v \rangle \langle u_{i+1}, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle$$

où Δ_i^j est le mineur du terme de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^t M$, c'est-à-dire, d'après la relation $\hat{M} \det C = {}^t M C$,

$$\Delta_i^j = \det^{-1} C \cdot ({}^t M C)_i^j (-1)^{i+j} \quad \text{où } M_i^j \text{ désigne le terme de la } i^{\text{ème}} \text{ ligne et } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.$$

On a donc

$$\Delta = 2^n \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle x^{n+1} + 2^n \lambda \det^{-1} C \sum_{i,j} u_0^j \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_{i-1}, v \rangle \langle u_{i+1}, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle u_i \cdot Q \cdot u_i ({}^t M C)_i^j$$

or

$$\begin{aligned} \sum_j u_0^j ({}^t M C)_i^j &= ({}^t M C)_i u_0 = ({}^t M C)_i \tilde{C} v = ({}^t M C \tilde{C})_i v \\ &= \det C ({}^t M v)_i = \det C \langle u_i, v \rangle \end{aligned}$$

finalement

$$\Delta = 2^n \langle u_1, v \rangle \dots \langle u_n, v \rangle (x^{n+1} + \lambda \sum_i u_i \cdot Q \cdot u_i)$$

on déduit de la relation $\Delta = 0$

$$x^{n+1} = -\lambda \sum_i u_i \cdot Q \cdot u_i = -\lambda \sum_i ({}^t M)_i^i Q(M)^i = -\lambda \text{tr}({}^t M Q M) = -\lambda \text{tr}(Q M {}^t M)$$

or

$$C M {}^t M = \det C \cdot {}^t \hat{M} M = \det C \cdot I$$

donc

$$M {}^t M = \tilde{C}$$

et les coordonnées du point F sont

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \quad \text{et } x^{n+1} = -\text{tr}(Q \tilde{C}) \quad \underline{\text{cqfd}}$$

Quelques propriétés du point de Frégier, résultantes de la démonstration :

1. Le point de Frégier est situé sur la droite issue de O et passant par le pôle de l'intersection (d) de (π) avec l'hyperplan tangent en O à (q), relativement à (c). Si, dans le système de coordonnées homogènes (x^1, \dots, x^{n+1}) le point O s'écrit $(0, \dots, 0, 1)$ et l'hyperplan (π) a pour équation $x^{n+1} = 0$, si C désigne la matrice de (c) relativement à (x^1, \dots, x^n) , Q celle de l'intersection de (q) avec (π) et si enfin l'équation de l'hyperplan tangent en O à (q) s'écrit

$$v_1 x^1 + \dots + v_n x^n = 0$$

alors le point de Frégier F a pour coordonnées homogènes (x^1, \dots, x^{n+1}) avec

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad x^{n+1} = -\text{tr}(Q \tilde{C})$$

où \tilde{M} désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de M, et $\text{tr} M$ désigne la trace de M. On remarque que ces coordonnées dépendent linéairement des coefficients de (q) et sont des polynômes homogènes de degré n-1 en fonction de ceux de (c).

2. La condition imposant à l'hyperconique (c) d'être propre, c'est-à-dire non dégénérée, peut être améliorée au vu des coordonnées du point de Frégier. En effet si on note (d) l'intersection de (π) avec le plan tangent en O à (q), et (γ) l'intersection de (q) et (d) ((γ) est donc une quadrique de codimension 3), on a la

Propriété 2. Le point de Frégier est défini si et seulement si l'hyperconique (c) admet au plus un point singulier, ce dernier n'étant pas situé sur (γ) .

Preuve. Examinons d'abord le cas où (q) n'est pas tangente à (π) .

On peut alors choisir le repère projectif, tout en respectant les contraintes de la propriété précédente, de façon que

$$Q = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point de Frégier n'est pas défini si et seulement si

$$\tilde{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{tr} \tilde{C} = 0.$$

Les formules de Cramer montrent que la première condition équivaut à ce que (c) admette un point singulier sur l'hyperplan $x^n = 0$ c'est-à-dire sur l'intersection (d) de cet hyperplan avec (π) .

Quant à la deuxième condition ($\text{tr} \tilde{C} = 0$) les mêmes formules de Cramer montrent qu'elle équivaut à ce que (c) et (\tilde{c}) admettent un point singulier en commun. Or dans l'hyperplan (π) , l'hyperconique tangentielle (\tilde{c}) est l'ensemble des points dont les polaires relativement à

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0$$

sont tangentes à (c), ce qui signifie, dans le cas où (c) admet des points singuliers, que ces polaires passent par les points singuliers.

On en déduit que $\text{tr} \tilde{C} = 0$ si et seulement si (c) admet un point singulier sur $(q) \cap (\pi)$ dont les équations sont justement

$$x^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0.$$

Finalement le point de Frégier n'est pas défini si et seulement si (c) admet son point singulier sur $(\gamma) = (q) \cap (d)$, ou si (c) admet plus d'un point singulier (auquel cas $\tilde{C} = 0$).

Dans le cas où (q) est tangente à (π) , alors, (q) étant propre, on a
 $\text{rg } Q = n - 1$.

De plus (π) ne passant pas par O , le plan tangent en O à (q) ne passe pas par le point de contact de (q) avec (π) et on peut choisir le repère projectif de façon que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & (O) \\ (O) & \cdot & 1 \\ & & O \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le point de Frégier n'est pas défini si et seulement si

$$\tilde{C} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{tr } Q\tilde{C} = 0$$

ce qui donne une matrice \tilde{C} de la forme

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \square & \vdots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

La deuxième condition donnant alors $\text{tr } \tilde{C} = 0$. Nous aurons donc la même conclusion que dans le premier cas. cqfd

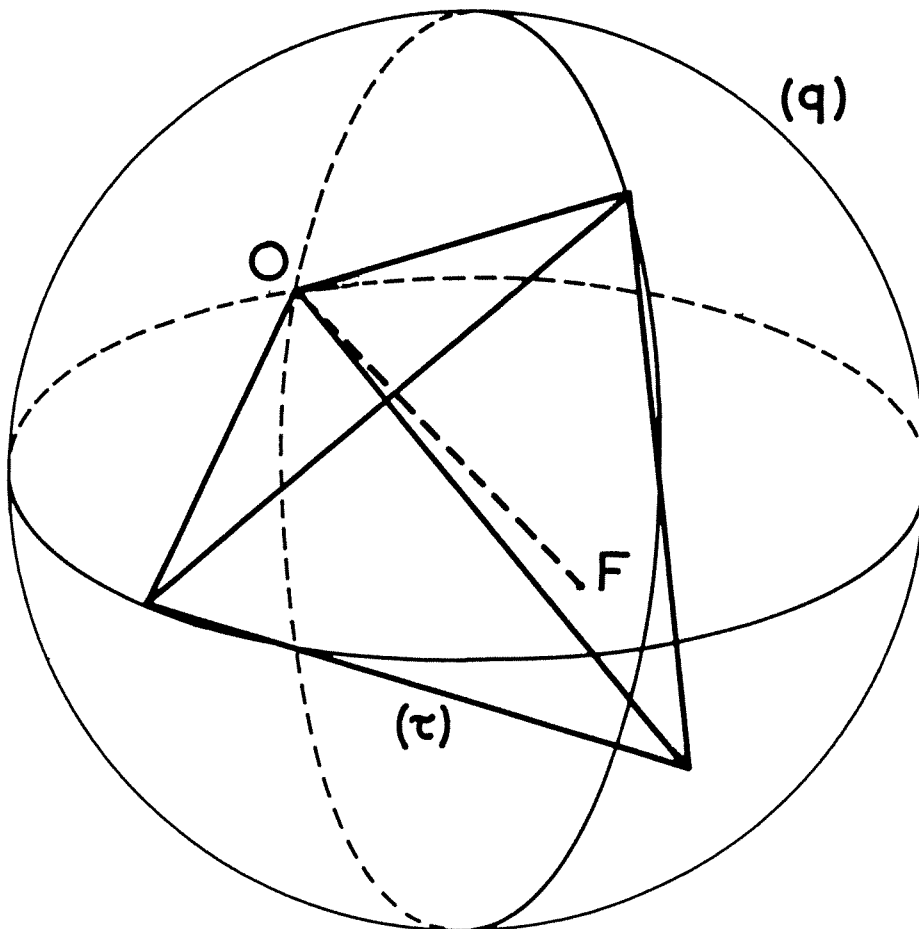


Fig. 8 . Le point de Frégier

Muni du résultat de FREGIER en dimension trois, STEINER s'est intéressé à la surface décrite par le point de Frégier quand la conique (c) parcourt une famille linéaire de coniques à deux paramètres dans le plan (π), c'est-à-dire un *2-pinceau* de coniques engendré par trois coniques indépendantes.

Dans un tel 2-pinceau, il est clair qu'il y a des coniques dégénérées et c'est la propriété 2 qui nous permet de le choisir de façon que le point de Frégier soit défini pour toute conique de la famille. En effet, la quadrique (γ) de codimension 3 est maintenant réduite à deux points et l'ensemble des points singuliers des coniques d'un 2-pinceau est une cubique appelée *hessienne du 2-pinceau*. Il suffit donc de s'assurer premièrement, que cette cubique est irréductible ce qui exclut les droites doubles dans le 2-pinceau, et deuxièmement que cette hessienne ne passe pas par les deux points de (γ), ce qui est généralement le cas. Nous venons de construire une surface de Steiner.

C'est lors de son séjour à Rome en 1844 que STEINER avait dégagé quelques propriétés géométriques de la surface qu'il avait construite conformément aux principes précédents. Ainsi savait-il par exemple qu'elle était engendrée par des coniques. En effet si la conique (c) décrit une famille linéaire à un paramètre, c'est-à-dire un 1-pinceau (l'usage du mot faisceau est maintenant réservé à un autre concept mathématique), le point de Frégier dépend quadratiquement de ce paramètre et décrit donc une conique. Il ne semble pas que STEINER ait jamais publié un article sur cette surface qu'il appelait sa *surface romaine* (Fig. 6), d'autant plus que, peu familier avec les calculs algébriques trop touffus, il n'avait pu en déterminer le degré avec certitude, pas plus d'ailleurs qu'il n'en avait obtenu de représentation paramétrique. K. WEIRSTRASS rapporte qu'un an avant sa mort STEINER lui avait demandé d'entreprendre lesdits calculs, ce qu'il fit sans difficulté sachant que les coordonnées du point de Frégier étaient des formes quadratiques en les coefficients de la conique (c), comme nous l'avons montré dans la propriété 1. La surface obtenue est donc une surface algébrique rationnelle dont la paramétrisation par des formes quadratiques ternaires est définie partout, ce qui montre qu'il s'agit d'une surface du quatrième degré. On peut signaler dès maintenant, compte tenu de la démonstration de la propriété 2, que le point de Frégier se situe en O si et seulement si la conique (c) admet un point singulier sur l'intersection (d) du plan (π) avec le plan tangent en O à (γ). Or la hessienne du 2-pinceau décrit par (c) est une cubique irréductible. Si on la suppose non tangente à (d) elle coupe (d) en trois points distincts ce qui montre que le point O est triple sur la surface de

Steiner et, en particulier, que la surface ne se réduit pas à une quadrique revêtue deux fois, ou à un plan revêtu quatre fois.

3. WEIERSTRASS DÉCOUVRE LES SURFACES DE STEINER

Nous avons indiqué la démarche historique qui a conduit à considérer les surfaces de Steiner, mais on peut procéder différemment pour en atteindre plus rapidement les propriétés essentielles. Les calculs de WEIERSTRASS ont permis tout naturellement d'appeler *surface de Steiner* toute surface de l'espace projectif complexe paramétrée par quatre formes quadratiques ternaires indépendantes ne s'annulant pas simultanément. En langage géométrique, cela revient à projeter la surface de Veronese paramétrée dans l'espace projectif complexe de dimension 5 par les six monômes du second degré à trois variables $u^2, v^2, w^2, uv, vw, wu$, dans l'espace à trois dimensions, par une projection dont le centre est une droite ne la coupant pas.

On dit qu'une surface de Steiner est une *projection générique* de la surface de Veronese dans l'espace projectif à trois dimensions. La simplicité de cette définition permet d'atteindre facilement les propriétés caractéristiques des surfaces de Steiner. Ce sont avant tout des surfaces du quatrième degré. On peut ensuite en rechercher les points multiples en se représentant les quatre formes quadratiques ternaires indépendantes ne s'annulant pas simultanément comme quatre coniques engendrant un 3-pinceau \mathcal{C} sans point fixe. Dire que deux points distincts m et m' ont même image par la paramétrisation de la surface de Steiner revient à dire que toute conique de \mathcal{C} qui passe par l'un passe par l'autre. L'ensemble des coniques qui passent par m forme un 2-pinceau ; on considère donc une conique (c) du 3-pinceau \mathcal{C} ne passant pas par m et recoupant la droite mm' en deux points distincts n, n' , il existe alors exactement une paire de points distincts $\{a, b\}$ sur la droite mm' qui soient conjugués par rapport à $\{m, m'\}$ et $\{n, n'\}$: $\{a, b\}$ est le 2-simplexe autopolaire du 1-pinceau de 0-quadrique engendré par $\{m, m'\}$ et $\{n, n'\}$. Les deux points a et b sont conjugués par rapport à toutes les coniques de \mathcal{C} .

Réciproquement si on a une telle paire de points distincts a, b conjugués par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} , il est clair que toute conique de \mathcal{C} passant par un point m de la droite ab passe par son conjugué m' par rapport à $\{a, b\}$ et que les deux points m et m' ont même image sur la surface de Steiner. La recherche des points multiples de la surface de Steiner est donc ramenée à la recherche des paires de points conjugués par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} .

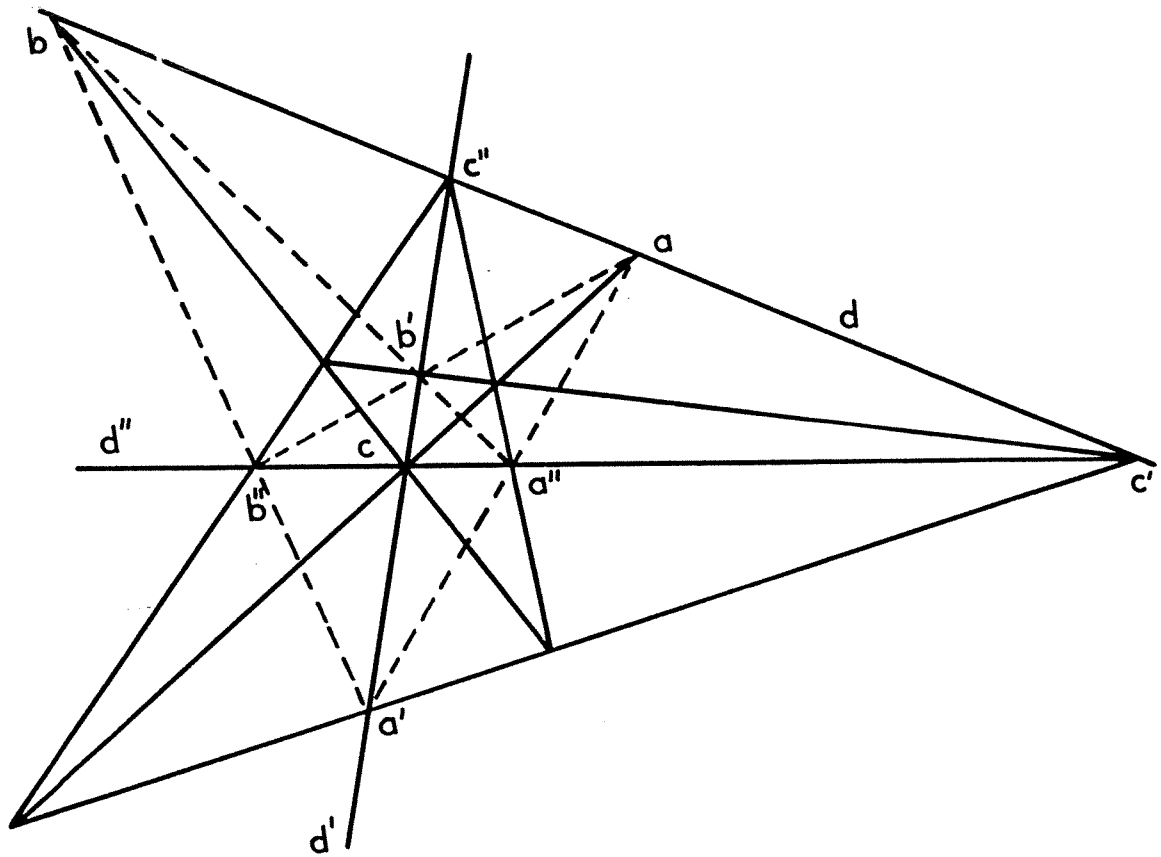


Fig. 9 : Configuration du quadrilatère complet

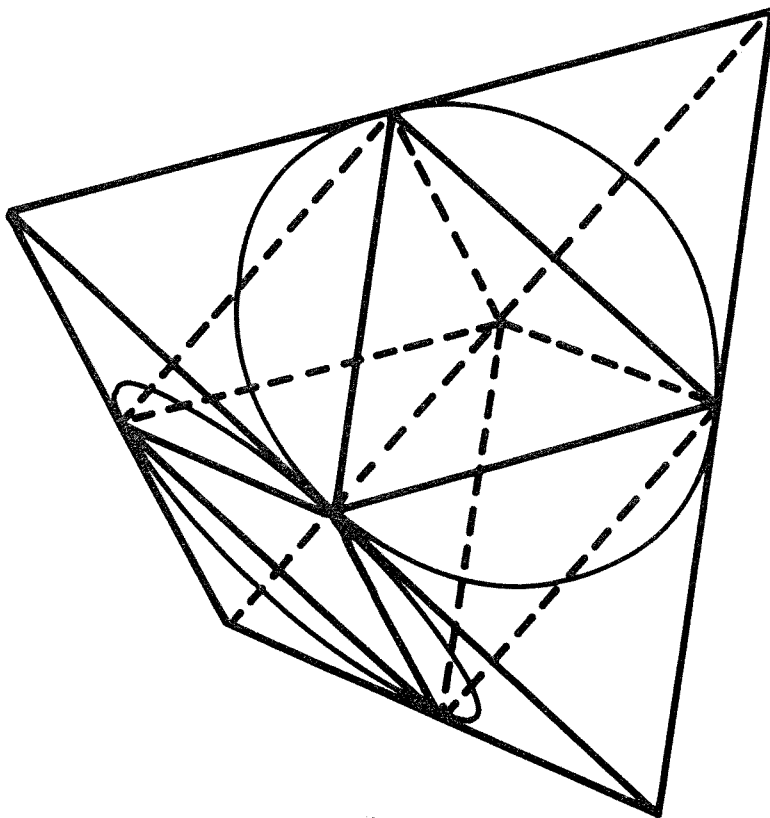


Fig. 11 : Octaèdre régulier des parapluies de Whitney de la surface romaine et tétraèdre régulier des plans de contact de la surface romaine le long de cercles

On engendre le 3-pinceau \mathcal{C} par quatre coniques indépendantes $[c_1, c_2, c_3, c_4]$ de façon que les hessiennes (γ) et (γ') de $[c_1, c_2, c_3]$ et $[c_1, c_2, c_4]$ n'aient aucune composante commune, que le 1-pinceau $[c_1, c_2]$ ait quatre points fixes distincts, et qu'aucun sommet du triangle autopolaire de $[c_1, c_2]$ n'admette de conjugué par rapport à $[c_3, c_4]$ sur son côté opposé. Les deux hessiennes (γ) et (γ') se coupent alors en neuf points en tenant compte des multiplicités, et parmi ces neuf points figurent les trois sommets du triangle autopolaire de $[c_1, c_2]$ n'admettant pas de conjugués par rapport à \mathcal{C} .

Si on appelle a l'un des six points restants, ses deux polaires par rapport à c_1 et c_2 se coupent en un point b par lequel passe la polaire par rapport à c_3 puisque a est sur (γ) , et également la polaire par rapport à c_4 puisque a est sur (γ') . Ce point b conjugué de a relativement à \mathcal{C} est situé sur (γ) et (γ') . Ainsi les six points restants de $(\gamma) \cap (\gamma')$ se distribuent en trois paires de points distincts conjugués par rapport à \mathcal{C} . Ces trois paires déterminent trois droites d, d', d'' .

Nous n'examinerons que la *situation générique* dans laquelle les trois paires sont distinctes. Les trois droites d, d', d'' sont alors distinctes, car deux paires alignées sont nécessairement confondues. Si maintenant les trois droites étaient concourantes en un point a , alors nécessairement les trois paires seraient de la forme $\{a, b\}, \{a, b'\}, \{a, b''\}$ où b, b', b'' seraient alignés sur la polaire de a par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} . Or cette situation a été exclue par les hypothèses sur les générateurs c_1, c_2, c_3, c_4 . Les droites d, d', d'' sont donc en position générale. Nous sommes dans la configuration du *quadrilatère complet* (Fig. 9).

Chaque droite d, d', d'' a pour image une courbe du second degré revêtue deux fois, c'est donc une droite double δ, δ' ou δ'' sur la surface de Steiner. Ces trois droites doubles ne sont pas coplanaires car la surface est du quatrième degré, et, par ailleurs, si c, c', c'' désignent les sommets du triangles (d, d', d'') , ces trois points ont pour image commune sur la surface Steiner *un point triple commun aux trois droites doubles non coplanaires* $\delta, \delta', \delta''$.

Muni de ce résultat on peut choisir aisément un repère projectif permettant d'obtenir une équation cartésienne de la surface de Steiner. En effet plaçons l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ au point triple, les trois droites doubles passant respectivement par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation du quatrième degré ne peut alors contenir que les monômes

$$x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2, x^2yz, xy^2z, xyz^2, xyz.$$

Les coefficients de x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2 et xyz sont non nuls sinon la surface serait décomposable ou conique. On peut donc écrire l'équation sous la forme

$$ax^2y^2 + by^2z^2 + cz^2x^2 = 2xyz(t + dx + ey + fz) \quad abc \neq 0$$

Le choix de la position des points $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur les droites doubles et du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ permet d'écrire l'équation sous la *forme canonique* :

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyzt.$$

Il devient légitime de parler de *la* surface de Steiner de l'espace projectif complexe. De cette équation on tire ses différentes propriétés. Par exemple la paramétrisation sous la forme

$$x = 2vw, \quad y = 2wu, \quad z = 2uv, \quad t = u^2 + v^2 + w^2.$$

Outre les trois droites doubles se coupant en un point triple ordinaire (en lequel la surface admet trois plans tangents indépendants), la surface admet six singularités du type "*parapluie de Whitney*" situées par paires sur les droites doubles et formant un octaèdre régulier dont le centre est au point triple (on a construit canoniquement sur l'espace projectif complexe muni de son repère projectif une structure affine hermitienne complétée d'un plan projectif à l'infini). Ces six points doubles en lesquels les deux plans tangents à la surface viennent coïncider sont les images des trois paires de points conjugués par rapport au 3-pinceau \mathcal{C} .

La surface est engendrée par une famille à deux paramètres de coniques images des droites du plan projectif complexe. Chaque plan tangent coupe la surface suivant deux coniques. Quatre plans particuliers formant un tétraèdre régulier dont les milieux des arêtes sont aux sommets de l'octaèdre des parapluies de Whitney, sont tangents à la surface le long de quatre cercles inscrits dans les faces du tétraèdre et circonscrits aux faces correspondantes de l'octaèdre (Fig. 11). Les symétriques du point triple par rapport aux quatre faces de l'octaèdre non communes avec le tétraèdre sont situées sur la surface et appelés *pôles de la surface de Steiner*. Les plans tangents à la surface en ses pôles sont parallèles aux faces correspondantes de l'octaèdre.

La littérature datant de plus d'un siècle a multiplié les propriétés de cette surface qui a parfois été étudiée sous le nom de *surface tétraèdre de Lamé* avec l'équation

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{t}$$

On retrouve la forme canonique de l'équation en posant

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons une des propriétés de cette surface mentionnée par KUMMER dans une étude systématique des surfaces de quatrième degré engendrées par des coniques, selon laquelle son contour apparent vu d'un point non situé sur la surface est une

sextique ; vu d'un point de la surface non situé sur une droite double c'est une quartique ; vu d'un point double non triple c'est une conique ; et vu du point triple le contour apparent est réduit à trois points.

Il reste à remarquer que la surface de Steiner complexe peut avoir, à homographie près, deux restrictions dans le réel selon la réalité des trois droites doubles. Si les trois sont réelles, nous retombons sur l'équation

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 2xyzt.$$

Cette surface réelle porte usuellement le nom de *surface romaine* (Fig. 6). Si une seule des droites doubles est réelle, un choix convenable du repère projectif nous conduit à l'équation

$$4x^2(x^2 + y^2 + z^2 + zt) = y^2(t^2 - y^2 - z^2).$$

C'est cette dernière surface réelle que l'on appelle la *mitre* (Fig. 5). Ses trois droites doubles ont pour équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - i\sqrt{2}x = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \begin{cases} y + i\sqrt{2}x = 0 \\ z = -t \end{cases}$$

Ces deux surfaces algébriques réelles sont en fait deux aspects de la même surface algébrique complexe et leurs propriétés géométriques sont donc très voisines.

Le groupe des symétries de la surface romaine est toutefois plus riche que celui de la mitre : dans le premier cas, il s'agit du groupe du tétraèdre régulier, c'est-à-dire le groupe symétrique \mathcal{S}_4 , tandis que dans le second il s'agit du groupe de Klein $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Ces deux surfaces algébriques réelles sont définies par des paramétrisations quadratiques mais la présence de singularités du type "*bonnet croisé*" (Fig. 10), (singularité réelle correspondant au parapluie de Whitney) en lesquelles les paramétrisations voient le rang de leur matrice jacobienne baisser d'une unité, interdit aux deux images du plan projectif réel de coïncider exactement avec les surfaces algébriques réelles correspondantes. En effet, le long de la courbe double, en un point de l'image du plan projectif réel différent d'une singularité, la singularité admet deux plans tangents réels distincts qui viennent coïncider au point singulier et se séparent ensuite en deux plans tangents imaginaires conjugués. La droite double admet donc un point d'arrêt à la singularité dans l'image du plan projectif réel alors qu'elle est entièrement contenue dans la surface algébrique réelle correspondante. La partie de courbe double manquant dans l'image du plan projectif réel s'appelle *manche de parapluie*, c'est le morceau réel du parapluie de Whitney complexe

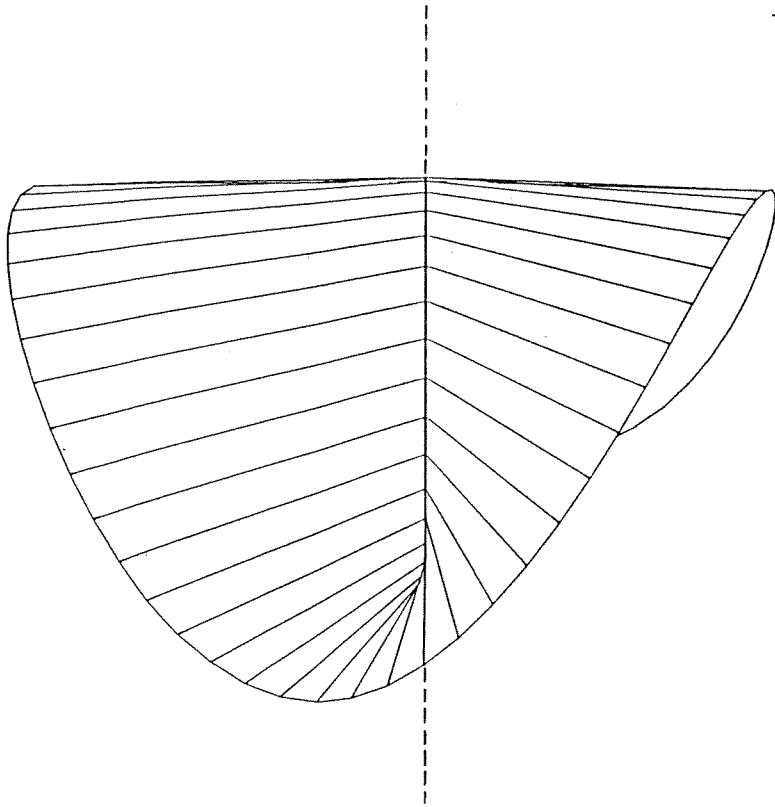


Fig. 10 : Deux singularités du type "bonnet croisé" sur la cubique réglée.
Les deux manches de parapluie sont en pointillés

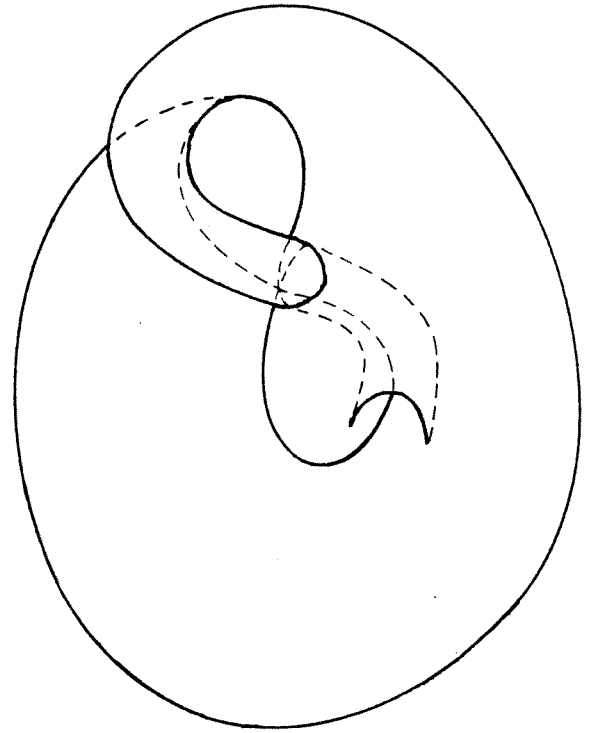


Fig. 7 : Première surface de Boy

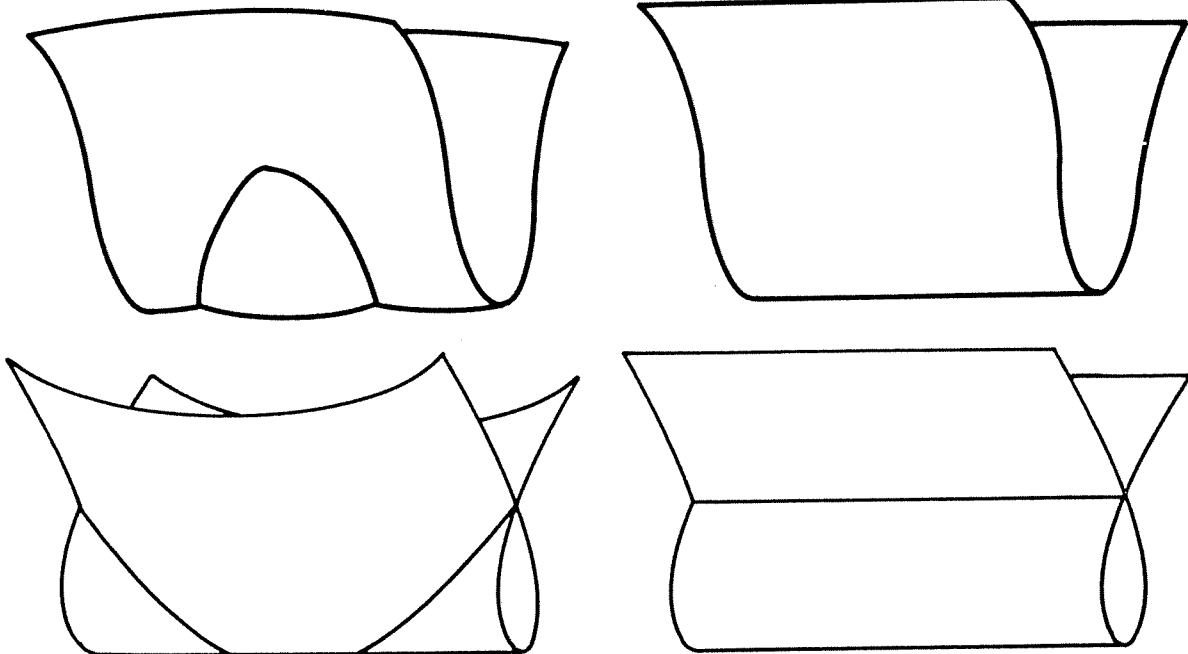


Fig. 12 : en haut : confluence elliptique de deux bonnets croisés
en bas : confluence hyperbolique de deux bonnets croisés

qui n'est pas dans le bonnet croisé (Fig. 10). Les singularités du type "bonnet croisé" apparaissent par paires, il y en a six sur la surface romaine et deux sur la mitre.

Ces deux représentations du plan projectif réel dans \mathbb{R}^3 pèchent donc d'un point de vue géométrique par la présence de singularités (la surface n'est pas l'image d'une immersion en position générale) et d'un point de vue algébrique par l'existence de manches de parapluie parasites.

Nous allons donner à présent un aperçu d'une méthode développée en détail dans mon travail cité en référence, permettant de lever ces deux obstacles.

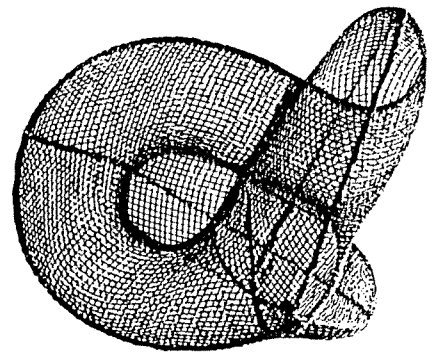
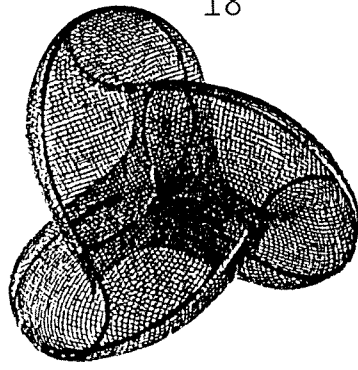
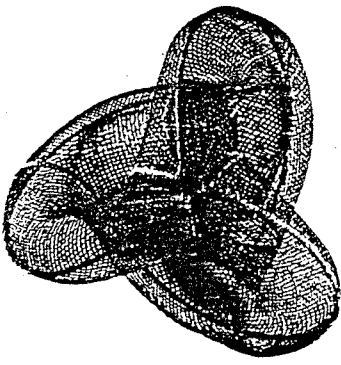
4. WHITNEY INVENTE LE PARAPLUIE À BONNET CROISÉ

On doit à Hassler WHITNEY en 1944 d'avoir reconnu que la singularité du bonnet croisé est la seule singularité stable d'une application d'une surface dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire la seule singularité qui est préservée par une perturbation assez petite. On sait également que ces singularités naissent ou meurent par paires et que génériquement il n'y a que deux manières de disparaître pour une paire de singularités du type bonnet croisé : premièrement la confluence elliptique qui fait disparaître en même temps la courbe d'auto-intersection, et deuxièmement la confluence hyperbolique qui raccorde les deux morceaux de la courbe d'auto-intersection en un seul (Fig. 12).

Nous nous proposons de construire une image du plan projectif réel dans \mathbb{R}^3 par immersion en position générale à partir d'une image contenant des singularités, en faisant disparaître les singularités par paires. Sachant que le plan projectif ne peut être plongé dans \mathbb{R}^3 et donc que la surface cherchée admet une courbe d'auto-intersection, la confluence utilisée serait du type hyperbolique si l'on parlait de la mitre qui ne contient que deux bonnets croisés. Nous aboutirions alors à la première surface trouvée (par une autre méthode) par BOY (Fig. 7).

Mais HILBERT a remarqué que l'on pouvait imposer à la surface d'avoir un axe de symétrie ternaire, son groupe de symétrie étant alors le groupe alterné \mathcal{A}_3 . C'est cette dernière surface que l'on appelle **surface de Boy** (Fig. 13).

Elle admet un point triple sur son axe de symétrie ternaire lequel la recoupe en un autre point appelé *pôle de la surface*. Un modèle de la surface de Boy a été réalisé par le sculpteur Max SAUZE à partir d'ovales passant par le pôle, et en remplaçant les ovales par des ellipses. J.-P. PETIT et J. SOURIAU ont mis au point empiriquement en 1981 une paramétrisation picturalement très satisfaisante (Fig. 14). Une véritable paramétrisation conceptuelle de la surface de Boy avait précédemment



*Fig. 13 : Surface de Boy avec axe de symétrie ternaire
(extrait de l'ouvrage de Hilbert et Cohn-Vossen : Anschauliche Geometrie)*

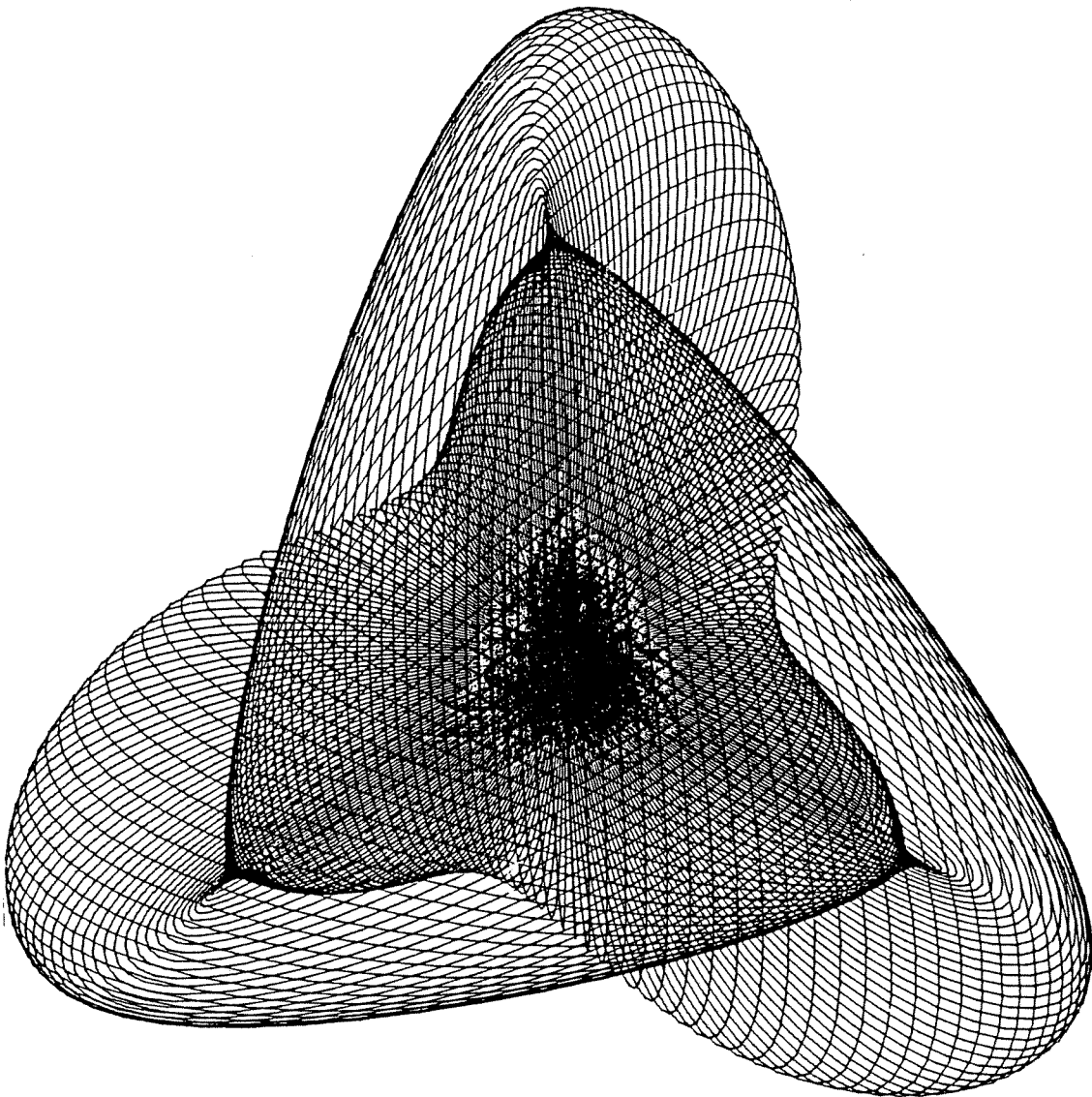
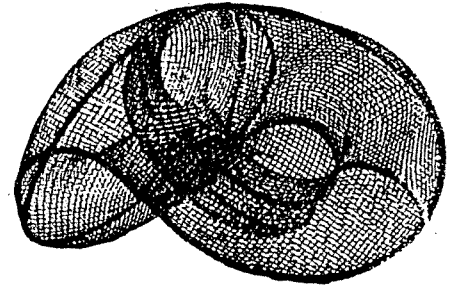


Fig. 14 : Surface de Boy, d'après la paramétrisation de J.-P. Petit et J. Souriau

été obtenue en 1978 par B. MORIN en partant du principe que son contour apparent vu du centre de sa sphère osculatrice en son pôle était une hypocycloïde à trois rebroussements (Fig. 15).

Si on veut déformer la surface romaine par confluence hyperbolique des bonnets croisés ; si l'on remarque que par chacun de ses pôles passe un axe de symétrie ternaire la recoupant en son point triple ; qu'elle est engendrée par des ellipses passant par l'un de ses pôles ; et que son contour apparent vu de ce pôle est une hypocycloïde à trois rebroussements, il est légitime de chercher à construire la surface de Boy en la supposant engendrée par des ellipses passant par son pôle et en imposant à son contour apparent vu du pôle d'être une hypocycloïde à trois rebroussements. On part donc des ellipses de la surface romaine passant par son pôle et tangentes au tétraèdre circonscrit, en un point du cercle inscrit dans la face opposée, le plan tangent au pôle étant parallèle à cette face. On déforme cette ellipse dans son plan en ne modifiant pas la tangente au pôle mais en modifiant son intersection avec la face du tétraèdre opposé au pôle (Fig. 16).

Il existe un plan particulier perpendiculaire à l'axe de symétrie ternaire de la surface de Boy qui la coupe, selon les dessins de BOY, suivant une courbe décomposée en un ovale et une composante à trois points doubles, ce plan étant le plan des cols relativement à la cote définie par l'axe de symétrie (Fig. 17). Imposer le degré minimum à cette courbe revient à dire qu'il s'agit d'un cercle et d'une *hypocycloïde à trois rebroussements allongée*.

Le plan particulier correspondant sur la surface romaine est justement le plan de la face du tétraèdre opposée au pôle. Il est alors naturel de faire passer les nouvelles ellipses par le cercle inscrit dans la face du tétraèdre et de leur faire recouper cette face suivant une hypocycloïde à trois rebroussements allongée, ses trois points doubles pouvant être choisis sur le cercle et sur les mêmes rayons que les rebroussements du contour apparent vu du pôle.

Dans le cas de la surface romaine, la paramétrisation canonique fait de chacune de ces ellipses l'image d'une droite projective passant par l'antécédent du pôle. Or les plans des ellipses enveloppent un cône de sommet au pôle et dont la base située dans la face du tétraèdre opposée au pôle est une hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite au cercle de contact de la romaine avec cette face. Les droites projectives passant par l'antécédent du pôle sont donc représentées par les tangentes à l'hypocycloïde que l'on repère par leur angle polaire $-\theta$. On repère le plan de l'ellipse par l'origine 0 au pôle, le vecteur $\vec{j}(\theta)$ déterminé par l'intersection J de l'ellipse

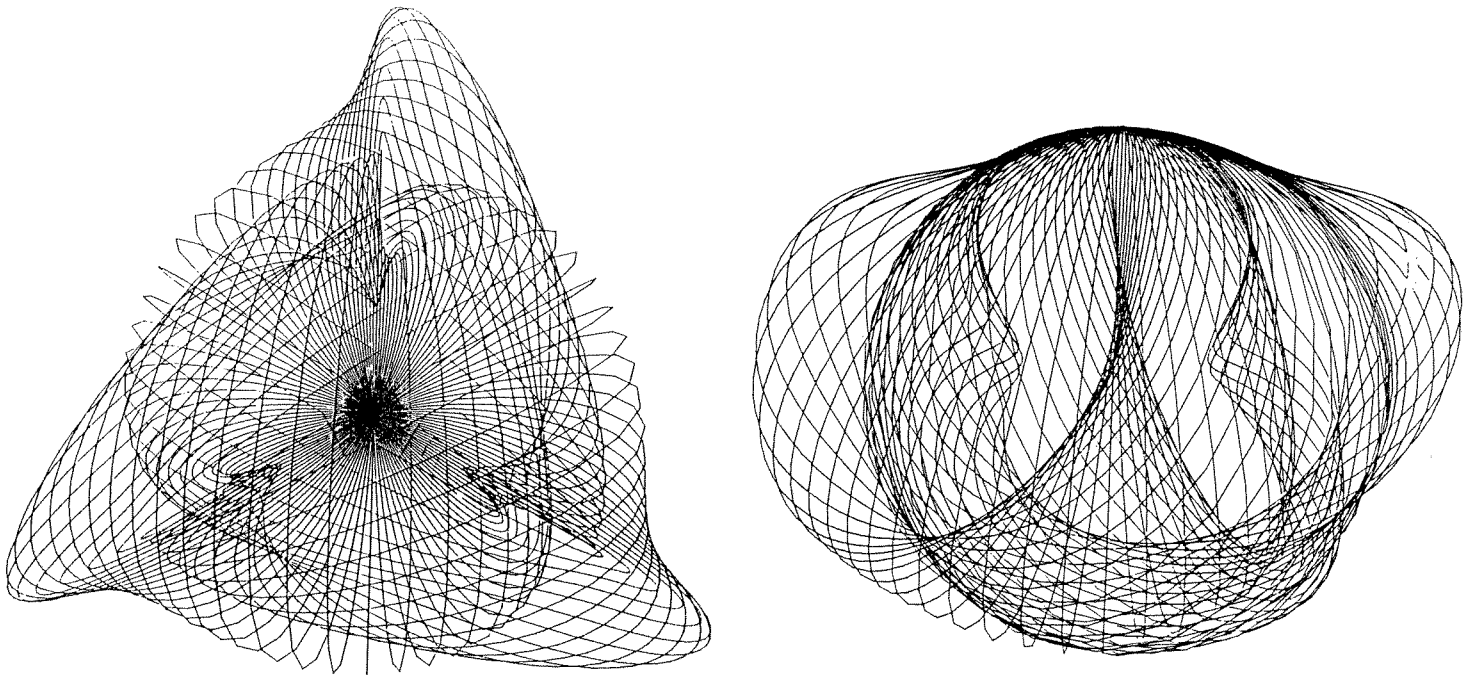


Fig. 15 : Surface de Boy, d'après la paramétrisation de B. Morin

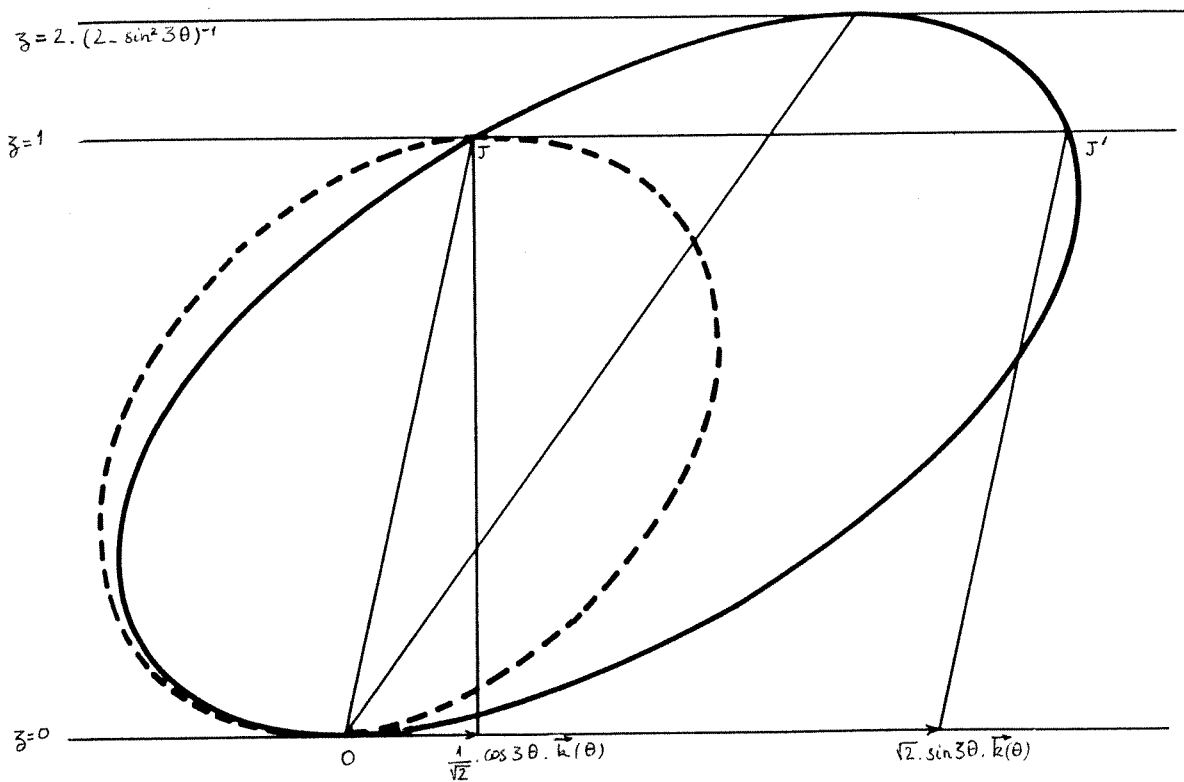


Fig. 16 : Ellipse de la surface romaine (en pointillé) et ellipse correspondante de la surface de Boy (en gras)

et du cercle inscrit dans l'hypocycloïde et le vecteur $\vec{k}(\theta)$ d'angle polaire $-\theta$ et de longueur $\sqrt{2}$ fois le rayon du cercle inscrit dans l'hypocycloïde (Fig. 18). On paramètre alors un point de l'ellipse par le quotient t de son ordonnée par son abscisse dans le repère $(0, \vec{j}(\theta), \vec{k}(\theta))$. Nous obtenons la paramétrisation suivante d'un point M de la surface

$$\vec{OM} = f(\theta, t) \cdot (\vec{j}(\theta) + t \cdot \vec{k}(\theta)).$$

Dans le cas de la surface romaine on a

$$f(\theta, t) = (1 + t^2)^{-1/2}$$

Pour obtenir une paramétrisation de la surface de Boy, il faut perturber le facteur $f(\theta, t)$ en respectant les contraintes décrites précédemment. Le fait que M décrive, pour θ constant, une conique tangente en 0 à $\vec{k}(\theta)$ implique pour $f(\theta, t)$ la forme suivante

$$f(\theta, t) = (a(\theta) - t \cdot b(\theta) + t^2 \cdot c(\theta))^{-1/2} \quad \text{où } c(\theta) \text{ ne s'annule pas.}$$

Pour $t = 0$ le vecteur \vec{OM} est égal à $\vec{j}(\theta)$ donc $a(\theta) = 1$.

La conique recoupe le plan du cercle au point pour lequel le paramètre t vérifie $f(\theta, t) = 1$ c'est-à-dire

$$t = b(\theta) \cdot c^{-1/2}(\theta).$$

Le point J' correspondant est donné par

$$\vec{OJ}' = \vec{j}(\theta) + b(\theta) \cdot c^{-1/2}(\theta) \vec{k}(\theta).$$

La quantité $\sqrt{2} \cdot b(\theta) \cdot c^{-1/2}(\theta)$ représente donc la longueur à porter sur la tangente orientée par $\vec{k}(\theta)$ à partir du point de contact J du cercle inscrit dans l'hypocycloïde avec le cercle de même rayon l'engendrant mécaniquement par roulement sans glissement à l'intérieur d'un cercle de rayon triple (Fig. 18). Si cette quantité est nulle le point J' décrit le cercle inscrit dans l'hypocycloïde, c'est le cas de la surface romaine, si la quantité vaut $2 \cos(3\theta)$ le point J' décrit l'hypocycloïde.

Pour que J' décrive l'hypocycloïde à trois rebroussements allongée cherchée, on choisit un terme de la même période mais en quadrature de phase avec $2 \cos 3\theta$, c'est-à-dire

$$b(\theta) c^{-1/2}(\theta) = \sqrt{2} \sin 3\theta$$

Il subsiste un degré de liberté que l'on fixe arbitrairement en posant $c(\theta) = 1$. Il reste alors à effectuer un calcul algébrique pour montrer que l'on obtient ainsi une surface algébrique réelle du sixième degré ayant toutes les caractéristiques topologiques de la surface de Boy (Fig. 19). Voici son équation :

$$64(T-Z)^3 Z^3 - 48(T-Z)^2 Z^2 (3X^2 + 3Y^2 + 2Z^2) + 12(T-Z)Z [27(X^2 + Y^2)^2 - 24Z^2(X^2 + Y^2) + 36\sqrt{2}YZ(Y^2 - 3X^2) + 4Z^4] + (9X^2 + 9Y^2 - 2Z^2) [-81(X^2 + Y^2)^2 - 72Z^2(X^2 + Y^2) + 108\sqrt{2}XZ(X^2 - 3Y^2) + 4Z^4] = 0$$

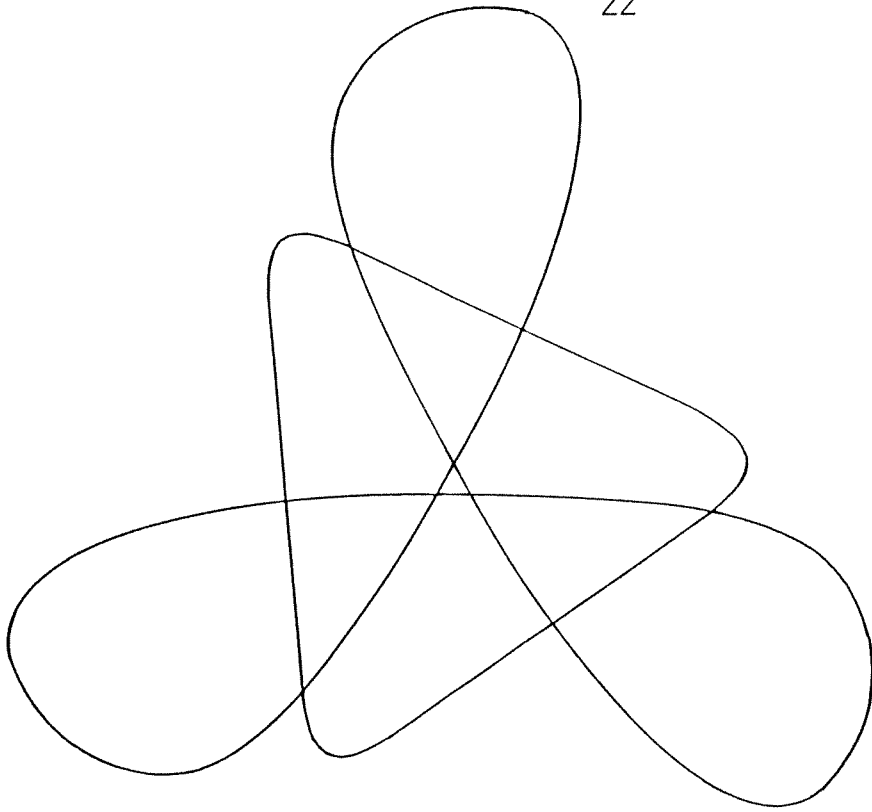


Fig. 17 : Courbe d'auto intersection de la surface de Boy avec son plan des cols relativement à la fonction hauteur définie par l'axe de symétrie ternaire

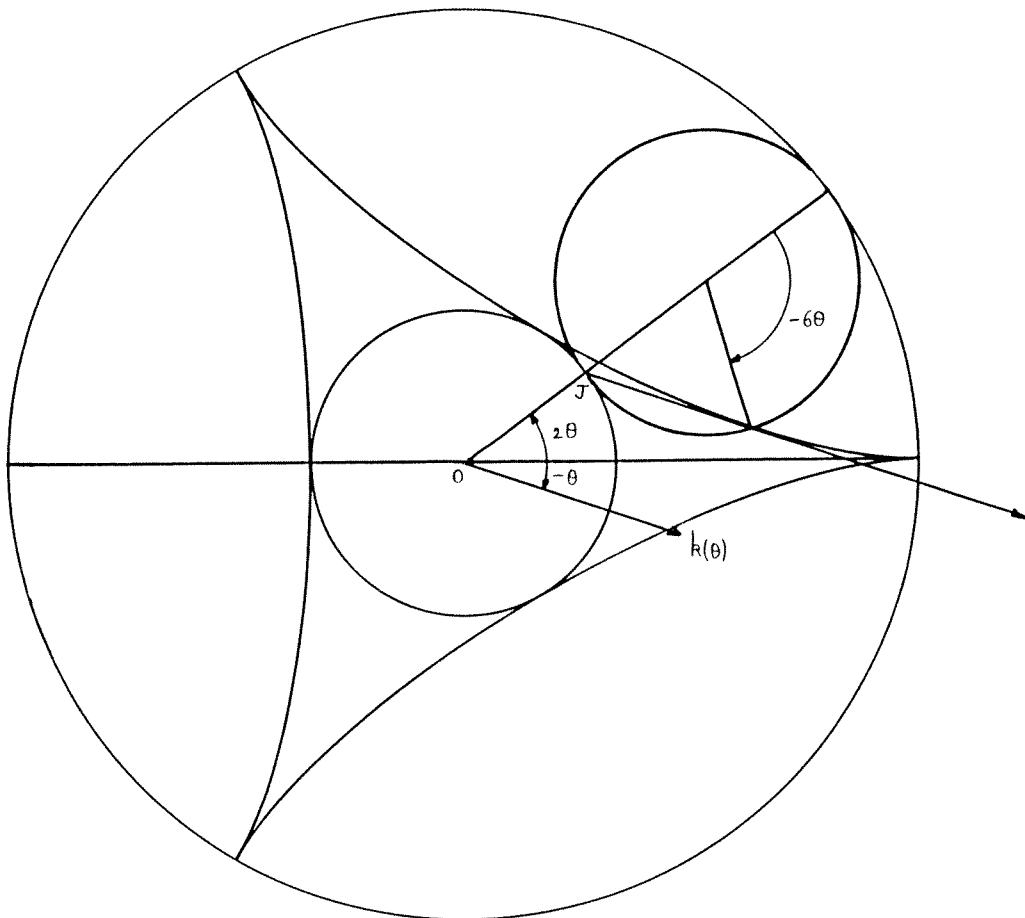
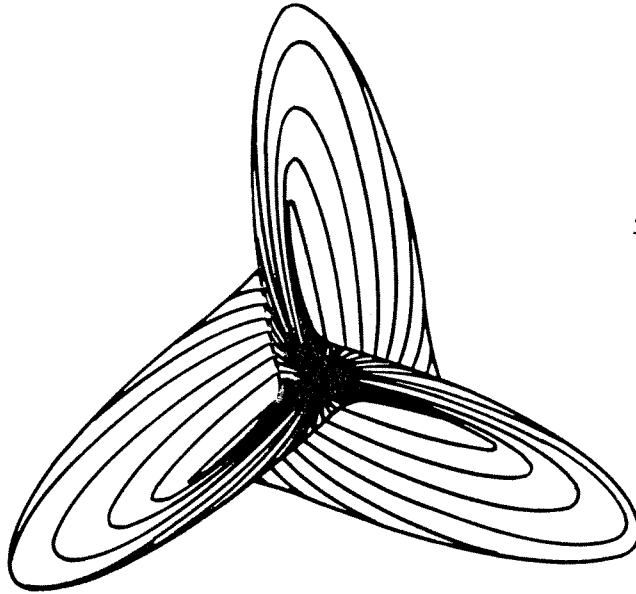


Fig. 18 : Génération mécanique de l'hypocycloïde à trois rebroussements

En adjoignant au facteur $\sqrt{2} \sin 3\theta$ un paramètre multiplicatif on réalise algébriquement la confluence hyperbolique des trois paires de bonnets croisés de la surface romaine conduisant à la surface de Boy.



*Fig. 19 : Surface de Boy
du 6^o degré*

5. CONCLUSION À L'ITALIENNE

La méthode utilisée par BOY pour construire sa surface est de nature purement géométrique et relève uniquement de ce que l'on appelait à l'époque l'analysis situs, mais comme nous l'avons signalé, l'absence de données algébriques ou même numériques a pu être de nature à troubler la conviction de certains mathématiciens. Ainsi en 1924 trouve-t-on un article de Friedrich SCHILLING reconstruisant la première surface trouvée par BOY, en commençant par vider le travail de ce dernier de toute sa substance mathématique, pour n'en garder que la famille des sections planes parallèles à laquelle il ajoute des cotes en millimètres permettant la réalisation d'un modèle.

De telles méthodes empiriques, quelle que soit la valeur picturale des modèles dont elles permettent la réalisation, ne peuvent en aucune manière se substituer à une construction mathématique telle que celle de BOY par exemple.

On peut se demander en conclusion par quel hasard, en cette époque de première floraison de la géométrie algébrique "à l'italienne", personne ne s'est trouvé pour feuilleter en détail le bestiaire des surfaces algébriques du sixième degré (BOY savait que sa surface, si elle était algébrique, était au moins du sixième degré), avec l'intention d'y trouver une surface répondant au problème de HILBERT. Par exemple une étude systématique des surfaces du sixième degré engendrées par des coniques avait été faite par Th. REYE en 1896.

RÉFÉRENCES

La représentation de la surface de BOY comme surface du sixième degré est résolue dans mon travail :

F. APERY - La surface de Boy - Thèse de 3ème cycle
Publication de l'I.R.M.A. Strasbourg (1984)

On pourra consulter les références suivantes concernant les auteurs cités dans le texte :

- W. BOY - Über die Curvatura integra u.d Topologie geschlossener Flächen,
Math. Ann. 57, 151-184 (1903)
- G. DARBOUX - Théorie des surfaces, Gauthier-Villars (1914)
- M. FREGIER - Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre,
Annales de Gergonne t. VI n° VIII 1er février 1816
- E. KUMMER - Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von
Kegelschnitten liegen, J. für die reine und ang. Math. 64, 66-76 (1865)
- B. MORIN - Equations du retournement de la sphère, CRAS série A Paris,
t. 287, 879-882 (1978)
- J.-P. PETIT et J. SOURIAU - Une représentation analytique de la surface de
Boy, CRAS série I, t. 293, 269-272 (1981)
- Th. REYE - Über quadratische Transformationen und rationale Flächen mit
Kegelschnittschaaren, Math. Ann. 48, 113-141 (1896)
- F. SCHILLING - Über die Abbildung der projektionen Ebene auf eine geschlossene
singularitätenfreie Fläche im erreichbaren Gebiet des Raumes
Math. Ann. 92, 69-79 (1924)
- K. WEIERSTRASS - Zwei specielle Flächen vierter Ordnung, Jacob Steiner's
Gesammelte Werke Bd II, S. 741-742.

REACTION EN CHAÎNE...

Michel de COINTET

Le directeur de l'I.R.E.M. m'avait signalé un exercice intéressant pour mes élèves : "Calculer $9x^4 - y^4 + 2y^2$ lorsque $x = 10814$ et $y = 18817$ ".

C'est donc ce que je fis, à la fin d'une séance d'entraînement à la manipulation des calculatrices, en classe de Seconde. Cela créa un certain émoi car il y eut autant de résultats que de types de calculatrices ; c'était bien pour cela que j'avais posé cet exercice ! La conduite de ce calcul dépassant les capacités des calculatrices il fallait s'en tirer autrement : une semaine après, deux élèves me proposèrent les solutions suivantes :

$$\textcircled{1} \quad \frac{18817}{10864} = \sqrt{3} \quad (\text{je l'ai trouvé "à la calculatrice"}).$$

$$\text{donc } 18817^4 = 9 \times 10864^4$$

$$\text{donc pour } x = 10864 \text{ et } y = 18817, \quad 9x^4 - y^4 + 2y^2 = 2y^2 = 708\,158\,978.$$

$$\textcircled{2} \quad 9x^4 - y^4 + 2y^2 = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$$

$$\text{or pour } x = 10864 \text{ et } y = 18817, \quad 3x^2 - y^2 = -1 \quad (\text{"à la calculatrice"})$$

$$\begin{aligned} \text{donc pour ces valeurs de } x \text{ et } y, \quad 9x^4 - y^4 + 2y^2 &= -(3x^2 + y^2) + 2y^2 \\ &= -3x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

Quelle aubaine ! Le second avait résolu le problème ; le premier apportait tout ce qu'il fallait pour montrer à quelle catastrophe numérique on était conduit lorsqu'on abusait du signe d'égalité : une erreur supérieure à sept cent millions "à l'arrivée" pour une erreur bien inférieure au millionième "au départ" ! Tout cela parce que la calculatrice affiche : 1,7320508 tant pour $\sqrt{3}$ que pour $\frac{18817}{10864} \dots$
Quelle aubaine pour convaincre les élèves de ne pas confondre un nombre irrationnel et une valeur décimale dite "approchée".

Mais ce n'est pas tout car Jean Martinet me signala sur ces entrefaits, que $\frac{18817}{10864}$ était sûrement une fraction réduite de $\sqrt{3}$.

Je retrouvais rapidement l'article de notre collègue J. GOERG "Introduction aux fractions continues" paru dans "l'Ouvert" n° 11 ; et je pus proposer à nos élèves l'exercice suivant :

Exercice 1

a) $\sqrt{3}$ est solution de $x^2 = 3$, donc de $x^2 - 1 = 2$, donc de $x - 1 = \frac{2}{x + 1}$
donc de $x = 1 + \frac{2}{x + 1}$;

En déduire que $\sqrt{3}$ est solution de $x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

b) On considère la suite des nombres formés de la façon suivante : le premier, noté $f_0 = 1$; le second noté $f_1 = 2$; pour les suivants : chacun noté f_n , est calculé à partir du précédent du précédent, noté f_{n-2} par la formule : $f_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f_{n-2}}}$

Questions :

- 1) Donner une expression plus simple de f_n en fonction de f_{n-2} ;
- 2) Calculer $f_2, f_3, \dots, f_{14}, f_{15}$, sous forme de fraction irréductible ;
- 3) Donner les valeurs \dots de chacune de ces fractions qu'affichent votre calculatrice.

Bien sûr, $f_{15} = \frac{18817}{10834}$!!!

Mais ce procédé d'approximation est tout de même un peu long. Que donnerait celui de Newton ? Oh miracle, en prenant 2 comme valeur initiale, la suite de Newton est constituée de fractions réduites de $\sqrt{3}$ et le quatrième (!) terme de la suite est $\frac{18817}{10864}$. Je ne résistai pas au plaisir de compléter le précédent exercice par :

Exercice 2

a) Vérifier que $\sqrt{3}$ est solution de $x = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$

b) On considère la suite des nombres formés de la façon suivante : le premier noté $F_1 = 2$; pour les suivants : chacun, noté F_p , est calculé à partir du

précédent, noté F_{p-1} par la formule :

$$F_p = \frac{1}{2} \left(F_{p-1} + \frac{3}{F_{p-1}} \right)$$

Question :

Calculer F_2 , F_3 , F_4 .

Mais ce n'est pas fini, car l'équation $3x^2 - y^2 = -1$ dont (10864, 18817) est une solution, est une équation de Fermat-Pell (article de notre collègue Stoltz dans "l'Ouvert" n° 12). Voilà de quoi proposer à mes élèves :

Exercice 3

a) Montrer que si (a, b) est solution de $3x^2 - y^2 = -1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, (a_n, b_n) défini par

$$\begin{cases} a_n = \frac{(a + b\sqrt{3})^n - (a - b\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \\ b_n = \frac{(a + b\sqrt{3})^n + (a - b\sqrt{3})^n}{2} \end{cases}$$

est solution de cette même équation.

b) Le couple $(1, 2)$ est solution de cette équation. On pose $a = 1$; $b = 2$. Calculer, sans calculatrice, mais en utilisant les identités remarquables :

$$(a_0, b_0) ; (a_1, b_1) ; (a_2, b_2) ; (a_3, b_3).$$

Calculer à l'aide de votre calculatrice : (a_8, b_8) .

Bien sûr, on trouve $a_8 = 10864$ et $b_8 = 18817$!!!

N.B. : Pour tout n , $\frac{b_n}{a_n}$ est une fraction réduite de $\sqrt{3}$: ceci est un résultat plus général sur lequel je tombais fortuitement, en consultant "Analyse, volume 1" de Léonhard Epistémon, rédigé par J.-L. Ovaert et J.-L. Verley, livre original et passionnant paru en 1983 chez Cédic/Nathan.

Domage que la formule du binôme ne soit pas au programme de Seconde car on peut calculer a_8 et b_8 en l'utilisant et en se passant de calculatrice !

Voilà une piste suivie par hasard, au gré des rencontres de professeurs et d'élèves qui s'est avérée riche d'enseignements pratiques (il y a beaucoup à calculer) et théoriques (approximation d'un réel au moyen de suites) !

Pour terminer, une anecdote (!) : à la suite de l'exercice 2, une élève n'ayant pas compris pourquoi $\frac{3}{\sqrt{3}}$ était égal à $\sqrt{3}$, je lui demandais quelle était la définition de $\sqrt{3}$; et de m'entendre dire : "Ben, c'est un-virgule-sept-cent-trente-deux et des poussières" ! Ciel, de quoi revenir sur terre, après avoir eu des ailes ! C'est bien le charme de notre métier, non ?

TEMOIGNAGE DE MATHÉMATIENS

Jean MARTINET et Paul André MEYER (*)

Note de l'Ouvert : Dans le cadre de la promotion des vocations scientifiques, le Recteur de l'académie de Strasbourg a demandé à différents professeurs de l'U.L.P. des articles sur leur discipline.

Ils seront réunis dans un fascicule édité par le C.R.D.P. et distribué dans les lycées d'Alsace. Ce doit être un support pour des activités interdisciplinaires (philo, math., physique, biologie...) et une sensibilisation des élèves à la lecture de textes scientifiques.

Le texte qui suit est dû à cette initiative, et l'Ouvert le publie avec l'accord de ses auteurs.

Les mathématiques occupent dans l'enseignement secondaire une place à part, et peu de lycéens ont à leur égard une attitude indifférente. Certains sont attirés par la perfection formelle et la rigueur d'un bon cours, d'autres violemment rebutés par ce qui leur semble être abstrait et glacé (ou creux). La réalité des mathématiques contemporaines, telles qu'on les découvre après la fin des études secondaires, et même des deux premiers cycles universitaires, est assez différente. Donnons d'abord quelques exemples de domaines où des techniques mathématiques ont acquis une importance considérable, au cours des trente ou quarante dernières années.

1. LES DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

La "programmation linéaire" donne des moyens d'analyser très efficacement des systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à un grand nombre d'inconnues. Elle permet ainsi une gestion rationnelle de situations économiques complexes

(*) professeurs à l'Université Louis Pasteur - Strasbourg.

(comportant un grand nombre de paramètres) comme celle-ci : une compagnie pétrolière doit alimenter ses points de vente d'essence à partir d'un certain nombre de centres de stockage ; comment organiser la distribution pour minimiser le coût total du transport ?

Le calcul des probabilités fournit les techniques de la "gestion du risque" : il permet de prendre des décisions rationnelles dans des situations où certains paramètres sont aléatoires (c'est-à-dire qu'on ne maîtrise pas les lois qui les déterminent).

A un niveau beaucoup plus général, la théorie des grands phénomènes économiques s'est largement mathématisée dans les dernières décades. C'est pour des contributions essentiellement mathématiques dans ce domaine qu'on a été attribués trois des récents prix Nobel d'économie (l'un des lauréats étant d'ailleurs français).

2. LES COMMUNICATIONS

La presse a largement popularisé les extraordinaires images de planètes lointaines (comme Jupiter), transmises par des satellites d'exploration du système solaire. Le message correspondant provenait d'un émetteur faible et situé à très grande distance, donc brouillé par un "bruit de fond" considérable. C'est un procédé de codage du message et une technique d'analyse convenables qui ont permis de démêler ce "puzzle" ; ces techniques sont dues à des mathématiciens ; elles utilisent des idées algébriques très ingénieuses. Elles font partie d'une véritable théorie mathématique, qui a des applications dans des domaines très variés de la technique des communications.

3. LE CONTRÔLE AUTOMATIQUE

L'automatisation d'un appareil (pilotage d'un avion, fonctionnement d'une colonne de distillation en chimie, ...) requiert un processus de contrôle, lui-même automatique, qui maintienne l'appareil dans des conditions normales de fonctionnement, et qui conduise au but recherché sans gaspillage de temps ou d'énergie. Beaucoup de ces processus ont été mis au point de façon empirique, sur le terrain ; mais les mathématiciens ont maintenant élaboré une théorie du "contrôle optimal", dont les outils sont surtout les équations différentielles et aux dérivées partielles et qui s'avère déjà très efficace.

Dans la plupart des exemples précédents, la mise en oeuvre des techniques mathématiques pour résoudre un problème précis impose évidemment le recours à l'ordinateur : les opérations (pas toujours numériques) sont en général simples dans leur principe, mais requièrent un temps d'exécution qui les met hors de portée de l'être humain.

Malgré les performances extraordinaires des ordinateurs modernes, l'exécution de certains "algorithmes" reste très coûteuse (algorithme = description systématique des procédures à suivre pour parvenir à un résultat, à partir de données connues). Le problème du "tri" est un exemple célèbre ; il s'agit, étant donnée une suite (finie) de nombres entiers, de la réordonner du plus petit jusqu'au plus grand. On ne dispose pas encore d'algorithmes très rapides pour réaliser une telle opération, alors qu'elle joue un rôle clef dans le fonctionnement des ordinateurs. De nos jours, l'étude générale des algorithmes est un domaine des mathématiques en pleine expansion.

Nous avons mis jusqu'ici en évidence l'aspect le plus neuf de l'évolution du rôle social des mathématiques : leur interaction croissante avec des domaines de plus en plus variés de la "technologie" (au sens large du terme). Par ailleurs, les mathématiques suivent en même temps leur cours millénaire de science fondamentale, avec ses problématiques propres et aussi ses liens étroits avec les autres sciences de base (surtout la physique). Les aspects les plus frappants de cette évolution, à notre époque, sont peut-être les suivants :

1. L'énorme accroissement du nombre des chercheurs a produit une accumulation considérable de résultats importants. Ce fait n'est pas une banalité "arithmétique" ; jusqu'au début de notre siècle, les progrès de notre science ont été dûs à un très petit nombre de savants de grand talent ; rien ne prouvait qu'il était possible, au prix d'un large effort social d'éducation, de former autant de chercheurs de qualité ; c'est évident maintenant.

De nos jours, il n'est pratiquement plus possible à un seul individu d'avoir une vue d'ensemble des mathématiques. Aussi la recherche, traditionnellement très individualisée, devient souvent un travail d'équipe.

2. Notre siècle a vu se développer un très fort courant de réflexion sur les fondements des mathématiques. Cette réflexion a eu des effets bénéfiques, en conduisant à des synthèses clarificatrices entre des domaines jusque là distincts, et en mettant en évidence l'importance de certains concepts (comme groupes, espaces vectoriel, ...) que les mathématiciens du 19^e siècle utilisaient "sans le savoir". A l'opposé, elle a eu malheureusement un effet néfaste sur l'enseignement ; il a porté au premier plan

les idées "structurelles" à la mode, en négligeant trop ce qui fait leur substance : les problèmes hérités du passé. Aussi l'image que les lycéens reçoivent des mathématiques est-elle largement faussée.

Aujourd'hui, la recherche mathématique est d'une formidable vitalité : elle a assimilé les bouleversements conceptuels que nous venons d'évoquer, perçu la fécondité de sa collaboration avec les domaines technologiques ; ses liens avec la physique théorique se resserrent (mécanique quantique et théorie des particules élémentaires, théorie de la "turbulence", ...) ; les liens avec la biologie se développent rapidement.

Cependant, elle est menacée d'une crise grave dans tous les pays occidentaux : les restrictions budgétaires dues aux difficultés économiques ont largement réduit, depuis dix ans, le recrutement de jeunes chercheurs en mathématiques.

Les Etats-Unis ont déjà compris la gravité de cette situation, et pratiquent à nouveau une politique d'encouragement aux études scientifiques et à la recherche. Les mathématiciens français luttent pour que notre pays fasse un effort considérable dans le même sens : la France est, en mathématiques, au troisième rang mondial !

Notre témoignage peut se résumer en ceci :

- Les mathématiques offrent aujourd'hui un champ d'activités d'une extrême richesse : la recherche occupe environ 2000 personnes en France (une centaine à Strasbourg, qui est un des plus importants laboratoires de province) ; les cycles de formation supérieure se diversifient : mathématiques fondamentales, informatique, gestion, mathématiques appliquées à l'économie sont des orientations déjà offertes par les universités de notre région.
- Le lycéen ayant du goût pour les mathématiques fait un pari sans grand risque sur l'avenir en développant ce goût. Le talent est plus répandu qu'on ne le croit, mais il ne se révèle pas sans un effort important, et cet effort est une source de plaisir. Nous recommandons particulièrement la lecture d'ouvrages élémentaires sur les mathématiques, de caractère extra-scolaire ; voici une adresse utile dans ce but : bibliothèque de l'I.R.E.M. (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) 10, rue du Général Zimmer à Strasbourg, on y trouve un choix très riche de livres accessibles et passionnants.

AUTOUR DE LOGO...

Dominique GUIN

Deux brochures ont été récemment publiées par l'I.R.E.M. de Strasbourg.

Le premier fascicule a pour but de faciliter une première approche du langage LOGO. Il est présenté dans la version MICRAL (version unique disponible sur le matériel agréé par l'Education Nationale jusqu'à ces derniers jours...). Vous y trouverez en annexe une correspondance des primitives version APPLE qui est nécessaire pour utiliser un manuel quelconque concernant le langage LOGO (exception faite du Manuel TO 7 qui vient d'être publié). Cette brochure n'a pas l'ambition de remplacer un tel manuel, mais plutôt d'aider à la compréhension de certaines notions propres au langage LOGO.

Le second fascicule relate une expérimentation en classe de cours moyen. Il décrit succinctement les activités suscitées dans la classe en une année scolaire. L'idée de départ est d'offrir au système scolaire un espace d'exploration, de créativité, d'apprentissage : utiliser l'outil informatique, c'est pour nous, mettre à la disposition des enfants un outil pour "*apprendre mieux*".

Je signale enfin l'existence d'un groupe I.R.E.M. Strasbourg : Activités Algorithmiques et utilisation du langage LOGO. Ce groupe interdisciplinaire réunit des professeurs de collège le mercredi de 10 h à 12 h tous les quinze jours. Le travail dans ce groupe n'est pas un apprentissage systématique du langage LOGO. Il est plutôt axé sur une réflexion pédagogique de l'utilisation du micro-ordinateur. On introduit ensuite les notions nécessaires à la réalisation des programmes en LOGO.

UN SCENARIO, POUR LE CALCUL NUMERIQUE EN CLASSE DE QUATRIEME

François PLUVINAGE et Bernard BLOCHS

INTRODUCTION

L'an dernier, Bernard Blochs est venu au D.E.A. de Didactique des Mathématiques avec le souhait de tirer le meilleur parti des activités de calcul mental qu'il propose régulièrement à ses élèves de collège. Pour ce faire, il est apparu intéressant de considérer le calcul numérique en général, avec les trois principales techniques dont disposent les élèves : calcul mental, calcul machine et calcul papier-crayon. A partir du démarrage d'une activité en classe sur ce thème, nous avons régulièrement envisagé comment la développer. Sans préjuger des observations que Bernard Blochs rapportera dans son diplôme, et qui seront d'ailleurs complétées cette année, il me paraît possible dès à présent de soumettre le scénario qui suit aux collègues qui auraient envie d'essayer, en fin de quatrième ou en troisième, de faire des mathématiques dans leurs classes grâce au calcul. Le scénario ne détermine pas tout (heureusement), mais il permet au professeur de savoir vers quoi la classe se dirige. Par ailleurs, liberté est laissée au professeur de déterminer sur quelles activités parmi celles proposées il souhaite attribuer des notes à ses élèves.

Après le scénario, on trouvera en annexe les contenus précis choisis par Bernard Blochs pour chacune des activités.

HYPOTHÈSE PÉDAGOGIQUE

Si le fait de savoir mettre en oeuvre **une** technique de calcul renvoie à une formation qui reste étroitement limitée, celui de choisir entre **plusieurs** techniques, pour appliquer celles qui sont les plus efficaces pour traiter des calculs donnés, correspond à une formation mathématique réelle.

PRÉSENTATION DE LA PLACE DU SCÉNARIO DANS LA CLASSE

Le calcul est envisagé comme n'absorbant pas la totalité de l'activité des élèves. En début d'année, quelques séances de quelques minutes chacune sont proposées régulièrement aux élèves en calcul mental. Le scénario est prévu pour huit séances à raison d'une séquence hebdomadaire, sur les quatre de la classe en mathématique ; il se déroulera donc pendant une durée totale d'environ deux mois.

ACTIVITÉS NUMÉRO 1 : Une interrogation écrite de calcul avec autorisation d'utiliser des calculettes.

Consigne donnée aux élèves : "Vous allez avoir vingt calculs à effectuer. Pour chacun d'eux, vous pouvez vous servir de celles des trois techniques : calcul mental, calcul papier-crayon, calcul machine, qui vous paraissent les plus efficaces. Vous aurez simplement à entourer, à côté du résultat, la ou les techniques que vous aurez utilisées pour parvenir au résultat ; ces techniques sont indiquées en abrégé : Me pour le calcul mental, PC pour le calcul papier-crayon, Ma pour le calcul machine. Il est précisé, pour la correction, que seront comptées comme réussites uniquement les résultats exacts, pas des valeurs approchées".

Durée : jusqu'à la fin de la séquence scolaire.

Les feuilles distribuées aux élèves laissent une place pour écrire les calculs.

$$9^{\circ}) \quad \frac{\cancel{14} \times \cancel{25} \times \cancel{9}}{\cancel{45} \times \cancel{28} \times 18} = \frac{5}{2 \times 18}$$

~~9~~ 2

Résultat

$$\frac{14 \times 25 \times 9}{45 \times 28 \times 18} = \frac{5}{36}$$

Technique(s)
utilisée(s)

Me **PC** Ma

Exemple de question avec sa réponse. Ici, il y a calcul papier-crayon puisque des résultats intermédiaires (les simplifications) ont été notés.

Contenu de l'interrogation

L'interrogation comporte vingt questions. Les nombres en jeu sont soit des entiers, soit des décimaux, soit des fractions, éventuellement négatifs. Chaque calcul ne propose qu'une seule opération, éventuellement répétée (une suite de multiplications par exemple). Par rapport au calcul machine, il n'y a aucun problème d'introduction ni aucun dépassement de capacité. En revanche, pour quelques uns des calculs, la calculette ne donne pas le résultat exact comme demandé, mais arrondi.

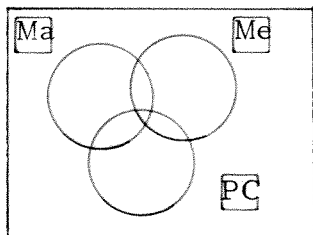
Correction des copies

Pour chaque élève et pour chaque question relever :

1° Réussite : R, Arrondi : A, Faux ou non-réponse : E
(échec)

2° Relever la technique en hiérarchisant : $Me < Ma < PC$
(si un élève entoure à la fois Me et Ma, on relève Ma).

ACTIVITÉ NUMÉRO 2 : "Corrigé" suivi de propositions



Le corrigé est aussi un compte-rendu :

-Nombres d'erreurs rapportés aux différentes techniques de calcul

-Techniques plutôt utilisées pour les divers exercices.

On essaie, lors de cette séance d'environ la moitié d'une séquence scolaire, de situer chaque énoncé dans le schéma ci-contre.

Deuxième partie de la séquence : il est demandé à chaque élève de trouver :

- quatre calculs bien adaptés au calcul mental,
- quatre calculs bien adaptés au calcul machine,
- quatre calculs bien adaptés au calcul papier-crayon.

ACTIVITÉ NUMÉRO 3 : Interrogation analogue à celle de l'activité numéro 1, et compte-rendu des propositions d'élèves.

Interrogation

La consigne est la même que dans l'activité numéro 1. Les feuilles fournies aux élèves ont la même organisation. La durée est d'une moitié de séquence scolaire (environ 25 minutes).

Contenu des exercices.

L'interrogation comporte dix questions. Chaque calcul ne propose qu'une opération, comme la première fois. Mais, à la différence de la première fois, il apparaît des calculs conduisant à des problèmes d'introduction des données et à des dépassements de capacité des calculettes. Certains exercices proposés en interrogation peuvent être choisis parmi ceux que les élèves ont proposés pour l'activité numéro 2.

Compte-rendu des propositions d'élèves

On essaiera de classer les propositions. Par exemple, on pourra relever différentes sortes d'obstructions en calcul machine : présence de fractions, de racines carrées, de variables, ou problèmes de gestion : pas ou capacité.

ACTIVITÉ NUMÉRO 4 : "Corrigé" de la deuxième interrogation et calcul mental.

Correction d'interrogation

Les mêmes éléments de compte-rendu que pour la première interrogation seront fournis. De plus, l'attention sera attirée sur l'évolution d'ordre de grandeur qui permet d'effectuer par ailleurs un calcul machine. Exemple : le calcul de 17000×780000 revient à celui de 17×780 si l'on sait que le résultat, soit 13260, est à faire suivre de six 0.

Calcul d'ordre de grandeur

Huit calculs sont proposés. Il ne s'agit pas de trouver le résultat, mais seulement le nombre de chiffres avant la virgule que comporte le résultat. La méthode est ici imposée : calcul mental. Les huit calculs présentent des décimaux, avec une seule opération (multiplication ou division) chaque fois.

ACTIVITÉ NUMÉRO 5 : Enchaînement de calculs

Consigne

On demande d'utiliser au mieux la calculette pour répondre aux cinq questions posées.

Contenu

Les exercices proposés ici ont été choisis chacun pour correspondre à un problème particulier de procédure machine. Nous les reproduisons ici, en explicitant le problème. Ainsi sera-t-il possible de leur substituer des variantes (nous en avons d'ailleurs indiquées dans certains cas).

1° Calculer $13! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 11 \times 12 \times 13$.

Variante : Calculer $2 \times 5 \times 8 \times 11 \times 14 \times 17 \times 20 \times 23 \times 26$.

Le problème est la saturation de l'affichage en cours de calcul.

Mais si on remarque alors que l'affichage se termine par des zéros, on peut supprimer ces zéros par une division par une puissance de 10 (à savoir 100 pour 13!) et ensuite terminer le calcul machine, pour n'avoir plus qu'à recopier le résultat, et lui rajouter en le recopiant les zéros manquants.

2° Calculer $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$.

Ici le calcul mental est possible et peut permettre de tester une procédure machine utile pour l'exercice suivant.

3° Calculer, avec la précision permise par la calculette :

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4,79}}} + 0,3.$$

(Variantes : Remplacer 4,79 par un autre nombre, compris entre 0,3 et 9).

L'énoncé oblige à introduire d'abord 4,79, c'est-à-dire presque le nombre qui se lit en dernier, et à savoir obtenir l'inverse ($1/x$ n'est pas une touche de calculette).

4° Calculer $-387 \times (20450 + 0,00045) + 386 \times 20503$

Variante : Calculer $18817 \times 7552,5 - 241,2 \times 7552,5 - 18817 \times 7434,87$.

Le but de l'exercice est d'amener à **appliquer** la distributivité de la multiplication sur l'addition. Dans l'énoncé proposé, le calcul est possible sous la forme de l'énoncé, mais l'erreur est grossière si l'on n'applique pas la distributivité. Dans la variante, le calcul n'est possible qu'en regroupant premier et troisième termes (suggestion : pour la variante, retourner la machine pour lire un commentaire, après le calcul exact).

Ce genre d'exercices est très important pour mettre en évidence que le signe "=" sépare des expressions qui ont, bien sûr, même valeur mathématique, mais pas même "valeur" pour ce qui est des traitements (on ne peut pas toujours substituer une expression à l'autre dans un calcul effectif).

5° En prévoyant une quantité moyenne de 125 g de pâtes par personne et par jour, remplir le tableau ci-dessous, prévu pour une colonie de 28 enfants.

nombre de jours	1	2	3	4	5	6	7
quantité de pâtes							

Il s'agit ici d'avoir recours au facteur constant, pour éviter une manipulation fastidieuse.

ACTIVITÉ NUMÉRO 6 : Séance de travail sur calculatrices scientifiques

La séance du type "travaux dirigés", introduite par la correction de l'activité numéro 5 sur l'enchaînement des calculs et la reprise des exercices avec cette fois-ci des calculatrices scientifiques, a pour but de mettre en évidence les nouveautés des calculatrices scientifiques par rapport aux calculettes :

- puissances de 10,
- priorités opératoires et parenthésage,
- touche $1/x$ et autres fonctions,
- existence de chiffres de garde non visibles à l'affichage.

Une manipulation pour visualiser les chiffres de garde consiste à introduire le nombre π par la touche affectée à ce nombre, puis à retrancher 3,14159 (les six premiers chiffres de π) pour voir la différence qui apparaît.

ACTIVITÉ NUMÉRO 7 : Interrogation de calcul mental.

Vingt exercices sont proposés, dont certains amènent à **appliquer** les formules $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Quelques exercices comportent des variables, et dans certains cas, il est demandé de donner les résultats sous forme scientifique et sous forme normale (formes du type $a \times 10^n$, avec n entier relatif et a compris soit entre 0 et 1, soit entre 1 et 10).

ACTIVITÉ NUMÉRO 8 : Interrogation analogue à l'activité numéro 1, mais avec calculatrices scientifiques.

Dix calculs sont proposés, dont deux sont pratiquement des exercices de l'interrogation précédente (un est même rigoureusement identique). Il s'agit d'observer combien d'élèves, parmi ceux qui ont réussi les exercices correspondants en calcul mental, vont ici "assurer" en calcul machine.

Pour tous les exercices, le résultat exact est demandé, sauf pour un exercice, où le résultat n'est demandé qu'avec deux chiffres après la virgule :

$$\text{Calculer } \left(7,8092 - \frac{3,92099}{4,0275 - 2,57}\right)^3$$

L'un des exercices proposé est particulièrement spectaculaire :

$$\text{Calculer } P = 9x^4 - y^4 + 2y^2 \quad (*)$$

pour $x = 10864$ et $y = 18817$.

Si l'on n'utilise pas l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, pour les deux premiers termes de P, une calculatrice scientifique est très loin de fournir le résultat, qui est 1.

Variante : $P = x^4 - 25y^4 + 2x^2$, pour $x = 12238$ et $y = 5473$

$$P = 25x^4 - y^4 + 2y^2, \text{ pour } x = 23184 \text{ et } y = 51841$$

(Résultats : -1 pour le premier cas et 1 pour le second).

SYNTHÈSE

Au fur et à mesure du déroulement des activités, un classeur rassemblant les sujets, les résultats d'ensemble et les observations pourra être constitué. Il pourra être mis à la disposition des élèves pour consultation (par exemple en restant au Centre de Documentation du collège).

(*) Voir à ce sujet l'article de M. de Cointet, dans ce même numéro.

DE LA SIGNIFICATION MATHÉMATIQUE D'HYPOTHÈSES EN PHYSIQUE,
ET RÉCIPROQUEMENT, VOIRE AU DELÀ...

M. Olivier GEBUHRER, du Département de Mathématiques de l'U.L.P. nous a transmis les remarques qui suivent, à propos de l'article de C. COMTE intitulé "Leibnitz aurait-il pu découvrir la relativité ?", paru dans les OUVERT n° 36 et 37.

Le sectarisme, et ses jugements sans appels, parfois constatés chez les mathématiciens comme chez les physiciens, conduit à se féliciter de la qualité du débat suscité par l'article en question. Il n'existe pas de point de vue unifié - c'est heureux ! - pas plus d'un côté que de l'autre, mais cela n'exclut pas la discussion.

Les articles de C. Comte illustrent de façon particulièrement saisissante à quel point la relativité galiléenne et la relativité einsteinienne font partie d'un **même** ensemble d'idées * : il est impossible de réfléchir aux fondements de l'une d'elles sans opérer une réflexion de **même** nature sur l'autre. L'objet des remarques qui suivent a seulement pour but de poursuivre la réflexion (de façon très modeste) au plan **de la conceptualisation mathématique** (je ne saurais trop insister sur le fait qu'il ne sera pas question ici de technique mathématique). A l'issue de ces remarques, je me permettrai de relever quelques questions d'ordre philosophique (sans les développer) abordées de façon explicite par C. Comte.

* Voir par exemple à ce sujet : L. LANDAU et E. LIFSHITZ (T. 1 et T. 2)

§ 1. INTÉGRABILITÉ LOCALE ET MESURABILITÉ

C. Comte exige dans ses axiomes définissant l'énergie cinétique (ou ses propriétés) :

1) L'énergie cinétique e d'un corps libre ne dépend que du **module de sa vitesse**.

2) "Pour une distribution de masse en fonction de la vitesse donnée par $dm = c(\vec{x})d^3x$ cette expression devient

$$(4) \quad \iiint c(\vec{x}) e(x) d^3x$$

et nous admettons que l'intégrale écrite a un sens quelle que soit la distribution $c(\vec{x})$, sous réserve que $\iiint c(\vec{x}) d^3x$ converge. Cela revient à admettre que la fonction $e(x)$ est intégrable."

Il s'agit en fait ici d'exiger **beaucoup moins** : C. Comte demande seulement à la fonction e d'être **intégrable sur tout compact** de \mathbb{R}^3 (ce qu'on peut encore affaiblir) ; mais l'important à mes yeux réside dans le fait, qu'avant d'exiger que certaines intégrales convergent, il faut pouvoir parler de la possibilité de les intégrer : autrement dit, il faut postuler **la mesurabilité** de la fonction e . **C'est là l'hypothèse mathématique**. Avant d'en donner une interprétation heuristique, disons d'emblée que toute tentative de PROUVER une telle propriété de la fonction e , à partir des considérations physiques exigées par les principes d'invariance est VAINES. Mais comme le dit très justement C. Comte, le fait remarquable est que la régularité de la fonction e est le sous produit

1) **de sa mesurabilité**
 2) **de ses propriétés fonctionnelles** **déduites des principes d'invariance**. Cela ne démontre pas la perfection de la nature mais illustre l'acuité des outils conceptuels en notre possession pour accéder à des représentations non chétives du monde.

Il ne faut pas imaginer qu'il s'agit là de "raffinements mathématiques" inaccessibles au commun des mortels ; l'introduction du **concept** de mesurabilité des fonctions fut l'occasion d'un bouleversement d'idées en mathématiques aussi profond et radical que le fut en physique la relativité einsteinienne. D'ailleurs **ces mutations dans la pensée** sont contemporaines (début du XXe siècle).

Sans développer (on y reviendra peut-être ultérieurement) indiquons d'emblée un beau sujet de méditation : Quoi de plus "naturel" que la longueur d'un segment ? Comment ne pas demander à la mesure de la longueur l définie par exemple sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (ensemble des parties de \mathbb{R}) de réaliser la propriété "évidente" :

$$l(A_1) + l(A_2) = l(A_1 \cup A_2) \text{ pour deux parties disjointes } A_1 \text{ et } A_2 \text{ de } \mathbb{R} ?$$

Le "bon sens élémentaire" indique ainsi que l'égalité $l(A \cap B) + l(A \setminus B) = l(A)$ pour toute partie B de \mathbb{R} , sera vraie pour toute partie A de \mathbb{R} . Qu'il n'en soit

non seulement rien, mais qu'en outre, le nombre des parties A de \mathbb{R} qui sont trop complexes pour vérifier cette propriété, soit incommensurablement plus grand que celui des parties qui la possèdent, devrait permettre de réaliser qu'il s'agit bien ici des fondements conceptuels et non de "complications ésotériques dépourvues d'intérêt".

Puisqu'il est VAIN d'espérer prouver la mesurabilité des fonctions utilisées à partir des autres propriétés et encore plus VAIN d'espérer le faire à partir de considérations physiques, faut-il se résoudre à ce que les mathématiques introduisent le mystère dans le compréhensible ? Il en est pour le penser. Je crois pour ma part, qu'il n'est pas ridicule de chercher à interpréter cette hypothèse (en évitant les stupidités du style : "Un physicien ignore les fonctions non mesurables").

Voici mon point de vue :

L'hypothèse de mesurabilité des fonctions est un **reflet** de l'idée naturelle selon laquelle **un corps non quantique** (certains diraient macroscopique mais ce serait plus qu'un abus de langage) se voit attribuer des grandeurs non quantiques observables **qui sont le "produit" de découpages hyperfins** (donc de passages à la limite) dont le degré de finesse et le nombre d'opérations des découpages sont limités seulement par le "seuil" de la physique **non quantique**. Autrement dit, les grandeurs observables de la physique non quantique résultent des attributs "des parties constitutives" pour autant que l'on s'interdise des interactions quantiques. **Il ne s'agit pas non plus de raffinements des découpages de Riemann ;** le changement de point de vue est profond et n'est pas réductible à point de vue antérieur, même en première approximation. (Il faut mettre un certain nombre de termites à l'oeuvre sur une table en chêne avant "d'observer" la "nature" ondulatoire de la table ; quand on observe la dite "nature ondulatoire" de la "table", il est déconseillé d'inviter ses amis pour y déguster une fondue).

Autrement dit, la mesurabilité des fonctions utilisées reflète (mais ne prouve évidemment rien) la conformité et la COHERENCE interne de la physique non quantique : une mesure effectuée sur un corps non quantique ne perturbe pas sa nature de corps non quantique (en revanche, elle ne révèle pas sa structure).

§ 2. RÉGULARITÉ DES FONCTIONS

C. Comte note très justement qu'en réduisant "a minima" les hypothèses mathématiques, **on peut déduire** les autres propriétés et tout particulièrement celles

qui intéressent les physiciens, autrement dit la différentiabilité. Incidemment cela amènerait de nouveaux développements à propos **des distributions** et des relations entre solutions faibles et fortes des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Mais dans le cas qui nous occupe, je voudrais souligner que la régularité des fonctions introduites n'est pas le fait du "hasard" : c'est un phénomène profond et général. Le couple "mesurabilité - équation fonctionnelle" suffit à entraîner la continuité et la différentiabilité dans une très vaste gamme de situations. Commençons par l'exemple qui sert de prototype.

Considérons un **caractère mesurable** de \mathbb{R} . C'est une fonction mesurable χ à valeurs dans \mathbb{C}^* telle que

$$\chi(s + t) = \chi(s) \cdot \chi(t),$$

la fonction χ est alors **nécessairement** de la forme

$$t \longmapsto \exp(it) !$$

De plus, **si on enlève la mesurabilité**, on peut trouver des fonctions $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\Psi(s + t) = \Psi(s) \cdot \Psi(t)$ et qui **ne sont bornées** sur aucun intervalle non réduit à un point !

(Il n'est hélas pas question de montrer au public de pareils Gremlins... ; des énoncés tels que : on prend une base quelconque de \mathbb{R} vu comme \mathbb{Q} -espace vectoriel... sont bien sûr des mystifications.)

Cette situation est en fait celle que l'on rencontre de façon générique dans l'étude des **caractères des algèbres de Banach commutatives** où la mesurabilité des caractères implique leur continuité. Plus particulièrement, dans les paires de Gel'fand, la mesurabilité des caractères implique alors leur continuité et leur C^∞ différentiabilité.

L'exemple traité par C. Comte entre dans ce cadre et il est intéressant de noter qu'il induit des idées réciproques : (déjà investiguées) "toute" équation fonctionnelle doit s'interpréter comme représentant la manifestation d'un caractère d'une algèbre de Banach commutative convenable (donc moralement d'une sorte de groupe). Notons qu'en outre, C. Comte pourrait exhiber à la fois des caractères (si on autorisait γ^2 à être **imaginaire**) (donc des fonctions **bornées** comme tout caractère) et des "exponentielles" **non bornées**, qui ne sont pas des caractères mais qui, sont encore des fonctions de type positif (en un certain sens). Ces solutions non bornées, sont cependant **bornées sur tout intervalle borné**. Cela indique que l'on ne pourra se passer d'une hypothèse supplémentaire :

L'existence d'une fonction C , à support compact, ≥ 0 , mesurable, bornée, d'intégrale > 0 , telle que :

$$0 < \int_{\mathbb{R}^3} C(\vec{X}) \cdot e(\vec{X}) \cdot d^3X < +\infty$$

qui élimine - non pas les gremlins (déjà éliminés par la mesurabilité), mais les solutions triviales (absurdes physiquement)

$$e \equiv 0 \text{ ou } e \equiv +\infty$$

§ 3. LES HYPOTHÈSES D'ISOTROPIE DE L'ESPACE ET D'UNIFORMITÉ DU TEMPS

1) Admettre que la fonction e ne dépend que du module de la vitesse et **s'autoriser la convolution** n'est-ce pas admettre l'isotropie... de l'espace des vitesses ?

Et si l'espace des vitesses est isotrope, on ne peut pas raisonnablement supposer que l'espace des coordonnées ne l'est pas... ,j'ajoute que l'on peut très bien admettre l'idée d'isotropie **locale**: une particule n'est pas "**libre**" mais éloignée éventuellement de tout champ.

2) Il n'y a pas de différence mathématique entre le paramètre rapidité et le **temps propre** d'une particule libre. C. Comte suggère un moyen physique d'accéder à la MESURE de la rapidité mais ne s'agit-il pas plutôt d'une **expérience mentale** ? ; l'analogie entre la "rapidité" et le temps propre serait alors plus profonde ; il est en effet impossible d'accéder par observation au référentiel d'inertie **lié** à la particule, donc on ne peut synchroniser les horloges entre l'observateur et la particule mais on a parfaitement le droit de se représenter l'horloge du référentiel d'inertie lié à la particule. Alors le temps propre, sans être accessible à la mesure, n'en a pas moins une **existence réelle**. Cela étant, le passage par le temps propre supprime toute idée d'uniformité du temps **mais** au prix de l'inaccessibilité des horloges.

Au terme de ces remarques, je souhaite remercier C. Comte de sa compréhension ainsi que "**L'OUVERT**" et ajouter à la liste des problèmes précédents plusieurs autres questions :

1) Ne faut-il pas accepter comme une **donnée** l'existence d'une dimension spécifiquement PHILOSOPHIQUE aux questions concernant l'appropriation par nos moyens de connaissance de la structure de l'univers, dimension **non réductible** aux démonstrations mathématiques, quelle que soit par ailleurs leur nécessité ?

2) En particulier, est-il possible de prouver une quelconque connaissance positive concernant l'univers par la seule médiation mathématique ? Quelle est la nature des relations entre connaissance et preuve mathématique ?

Olivier GEBUHRER

Voici la réponse de Claude Comte :

On ne peut qu'approuver la remarque d'Olivier Gebuhrer, selon laquelle la relativité galiléenne et la relativité einsteinienne relèvent d'un même ensemble d'idées ; leur pleine compréhension exige en effet que l'on considère dans toute son ampleur le rôle que jouent les **principes de symétrie en physique** *. La prise de conscience du rôle de premier plan que jouent ces principes a nécessité une longue maturation dans l'histoire des sciences. Jusqu'au début de ce siècle, on ne s'est intéressé qu'à la recherche du groupe d'invariance d'un ensemble de lois de la physique supposées bien établies : ainsi, les lois de la mécanique newtonienne sont invariantes par la transformation de Galilée, tandis que les équations de Maxwell du champ électromagnétique sont invariantes par la transformation de Lorentz-Poincaré. L'étude réciproque qui consiste à rechercher la forme des lois compatibles avec des principes de symétrie, est plus récente.

Einstein, dans l'article de 1905 intitulé "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement" utilise explicitement le principe d'équivalence des référentiels galiléens (appelé également "principe de relativité"), pour trouver la forme des lois de transformation des coordonnées d'espace-temps d'un référentiel galiléen à un autre ; pour cela, il utilise en plus le principe d'invariance de la vitesse de la lumière.

A propos des lois de conservation en mécanique, Emmy Noether (mathématicienne allemande, 1882-1935, fille du mathématicien Max Noether ; elle avait donné en 1907 un thèse importante sur les invariants algébriques) établit un théorème qui stipule ceci : à toute transformation qui laisse invariante l'action lagrangienne ou les équations d'Hamilton, correspond une quantité qui est une constante du mouvement ; l'invariance sous un groupe de Lie à n dimensions entraîne n lois de conser-

* Pour une vue d'ensemble, on pourra lire :

Michel Paty, Symétries et groupes de transformation dans les théories contemporaines de la matière : jalons épistémologiques (Cahiers du Centre de Recherches Nucléaires de Strasbourg : CRN/HE 84-12).

vation : ainsi l'invariance par translation spatiale entraîne la conservation de la quantité de mouvement p , et l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie E . Ce théorème est actuellement d'une importance capitale en physique théorique, tant par son application à la mécanique quantique qu'à la théorie quantique des champs et aux théories d'invariance de jauge **. Il permet également de présenter la théorie de la mécanique avec le plus d'unité et de simplicité, comme le font L. Landau et E. Lifshitz, dans leur célèbre cours de physique théorique dont on ne saurait trop conseiller la lecture.

Cependant, les travaux ci-dessus font appel à d'autres principes que les seuls principes de symétrie : le principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans l'article d'Einstein, et le principe de moindre action de Maupertuis - Euler - Lagrange - Hamilton dans l'énoncé du théorème de Noether. La question surgit de savoir si ces principes supplémentaires sont vraiment indispensables : **les principes de symétrie n'auraient-ils pas une portée encore plus grande ?** Une telle question n'est pas académique : si nos théories se trouvaient un jour prises en défaut, on aurait évidemment tort d'incriminer des principes superflus. Il est crucial de poursuivre l'objectif de ramener les théories existantes au **minimum de principes**, en ajoutant, d'un point de vue de physicien, que ces principes doivent être contrôlables expérimentalement.

Il est aujourd'hui bien établi que le principe d'invariance de la vitesse de la lumière n'est pas indispensable pour fonder la théorie de la relativité : cela a été vu dès 1911 par Ignatowski et Rothe. En ce qui concerne la mécanique, le principe de moindre action fournit à ce jour le maximum de cohérence ; son efficacité le fait régner sans partage sur la théorie de la mécanique constituée en un corps de doctrine autour de lui. Cependant, cette efficacité semble bien redoutable d'un point de vue de physicien, car il n'est pas susceptible d'une vérification expérimentale directe. Dans mon travail, j'ai délibérément pris le parti de m'en passer. Lorsqu'il s'est agi d'établir l'expression de la vitesse en fonction de l'énergie et de l'impulsion, j'aurais pu aveuglément utiliser la première équation d'Hamilton $V = \frac{\partial E}{\partial p}$, qui aurait immédiatement fourni le résultat $V = thx$ (à partir de $E = chx$ et $p = shx$) ; il était beaucoup plus gratifiant d'établir ce résultat par l'argument que j'ai exposé, qui fait seulement appel à un principe de symétrie : l'isotropie de l'espace ! Le succès de cette tentative laisse présumer que le principe de moindre action n'est pas si indispensable

** J. Leite Lopes, Gauge field theories, an introduction, Pergamon Press

qu'il paraît ; encore faut-il parvenir à comprendre autrement l'existence de lois de conservation en mécanique, que par le théorème de Noether, où le principe de moindre action joue le rôle primordial, et les principes de symétrie sont subordonnés à celui-ci.

Je n'ai pas traité ce problème d'existence des lois de conservation dans l'article publié dans l'Ouvert, mais je l'ai abordé d'une manière inédite dans ma thèse de doctorat. Pour résumer, il existe une autre manière de comprendre l'origine de lois de conservation dans un système dont les constituants interagissent, par exemple les molécules d'un gaz qui subissent de multiples collisions élastiques. Pour cela, faisons une étude phénoméno-logique d'une expérience de collision de deux particules : si les vitesses initiales sont fixées en grandeur et en direction, l'issue de la collision sera très variable selon les conditions du choc (selon la valeur du paramètre d'impact), mais l'expérience montre qu'il **existe des restrictions sur les valeurs que peuvent prendre les vitesses de sortie.**

Posons donc simplement comme principe que l'issue de la collision n'est pas ... n'importe quoi ! Ensuite, il n'est pas très difficile de trouver la forme de ces restrictions si l'on impose que les symétries galiléennes soient respectées : elles prennent effectivement la forme de lois de conservation, celle d'une grandeur invariante par rotation, l'énergie, et d'une grandeur vectorielle, l'impulsion ; de plus, on démontre que ces grandeurs s'additionnent, comme je l'ai admis au début de l'article dans l'Ouvert : elles sont de la forme $\sum_i m_i f(x_i)$, et on démontre aussi que les masses m sont **toutes de même signe.**

Ainsi, j'ai pu retrouver les conclusions du théorème de Noether en substituant au principe de moindre action un autre principe beaucoup plus facile à contrôler expérimentalement : tout le monde sait bien que l'état final n'est pas arbitraire ; autrement, on verrait par exemple un corps libre au repos se mettre spontanément en mouvement sans changement de son état interne. On n'a aucune peine à concevoir qu'en dehors du "principe d'existence de restrictions", le monde serait un chaos total, car l'issue de toute interaction serait absolument arbitraire et imprévisible. Il est sans doute préférable de fonder la mécanique sur un "principe d'existence de restrictions", qui ne préjuge nullement de la forme de ces restrictions, et qui, à l'opposé du principe de moindre action, ne présuppose aucun schéma particulier d'organisation de la nature. En effet, au lieu de prétendre que les mouvements des corps ont toujours lieu de telle sorte qu'une certaine quantité - l'action - soit minimale, on pose un principe au contenu beaucoup plus modeste, car il dit seulement ce que le monde n'est pas : le chaos total. Et il est ensuite tout à fait satisfaisant de constater que les lois de la mécanique découlent logiquement des principes de symétrie, dès lors qu'on admet que le monde n'est pas un chaos total.

Ces éclaircissements ne sont sans doute pas inutiles pour donner une perspective des recherches que je poursuis et dont je n'ai publié qu'une partie dans l'Ouvert. Je voudrais faire remarquer également que, dans l'optique de ramener la théorie à un minimum de principes bien contrôlables expérimentalement, j'ai renoncé à postuler la continuité-dérivabilité de l'énergie. Je me suis rendu compte qu'on pouvait exiger beaucoup moins ; en effet, il suffit d'admettre (ce que tout le monde fait sans le dire) que tout système physique est doué d'une certaine énergie ; que l'énergie d'un système est la somme de celles de ses parties (non interagissantes), qui peuvent être infiniment petites, mais que la valeur de l'énergie pour le système entier ne peut dépendre du mode de découpage du système en parties. Je suis reconnaissant à Olivier Gebuhrer d'avoir relevé une certaine imprécision dans les termes mathématiques que j'ai employés pour exprimer mon idée ; lorsque j'ai écrit "cela revient à admettre que la fonction $e(\chi)$ est intégrable", c'est en fait d'intégrabilité locale qu'il s'agissait, ou mieux encore : de **mesurabilité**. Je suis bien d'accord aussi avec lui qu'il est vain d'espérer prouver ce caractère de mesurabilité de l'énergie à partir de considérations physiques ; dans ma thèse de doctorat, j'ai prouvé certaines propriétés de la fonction énergie : l'additivité, le caractère défini positif, mais j'ai admis sa continuité ; depuis ce travail, je suis parvenu à affaiblir l'hypothèse de régularité sur l'énergie : il suffit d'admettre que $e(\chi)$ est une fonction mesurable.

En ce qui concerne la rapidité et le temps propre, je voudrais préciser que ces grandeurs sont de nature physique différente : la rapidité est une grandeur sans dimension (c'est "l'angle" de la transformation de Lorentz) tandis que le temps propre a la dimension ... du temps. On peut établir la relation suivante entre la rapidité χ , l'accélération γ_0 mesurée dans le référentiel propre du véhicule, et le temps propre τ (le temps indiqué par une horloge à bord du véhicule) :

$$\chi - \chi_0 = \frac{1}{C} \int_0^{\tau} \gamma_0 dt.$$

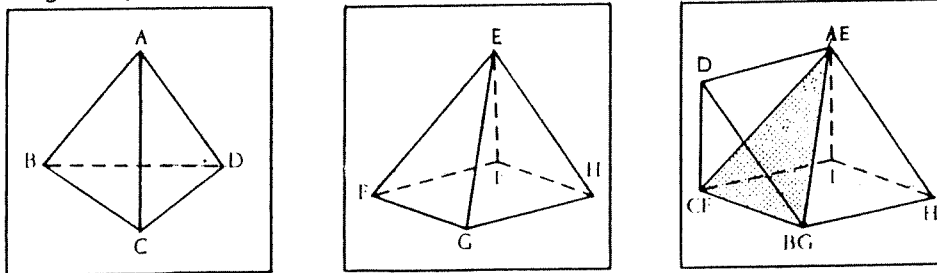
L'expérience que je propose pour mesurer la rapidité n'est pas plus "mentale" que ne le serait la description d'une horloge. Tout comme la mesure du temps, la mesure de la rapidité requiert la mise en oeuvre d'un mécanisme à répétition : au lieu de compter le nombre de périodes effectuées par un quelconque mécanisme d'horlogerie, on compte le nombre de "ravitaillements en vol" d'une fusée. On peut d'ailleurs remarquer que si la fusée fonctionne de manière identique, elle brûle chaque fois son carburant durant un temps propre fixe τ_0 , subit une accélération moyenne fixe $\bar{\gamma}_0$, dans son référentiel propre et acquiert une rapidité supplémentaire fixe $\Delta \chi = \frac{1}{C} \bar{\gamma}_0 \tau_0$ conformément à la formule précédente. Avec notre fusée, nous disposons donc d'un moyen simple d'étalonner à la fois le temps propre et la rapidité !

CINQ FACES ! PAS SEPT...

Dans l'OUVERT n° 37, l'énoncé suivant était reproduit :

"On considère deux pyramides dont toutes les arêtes ont la même longueur a . L'une est un tétraèdre régulier, l'autre une pyramide régulière à base carrée.

On recolle les deux pyramides selon une de leurs faces latérales en forme de triangle équilatéral"



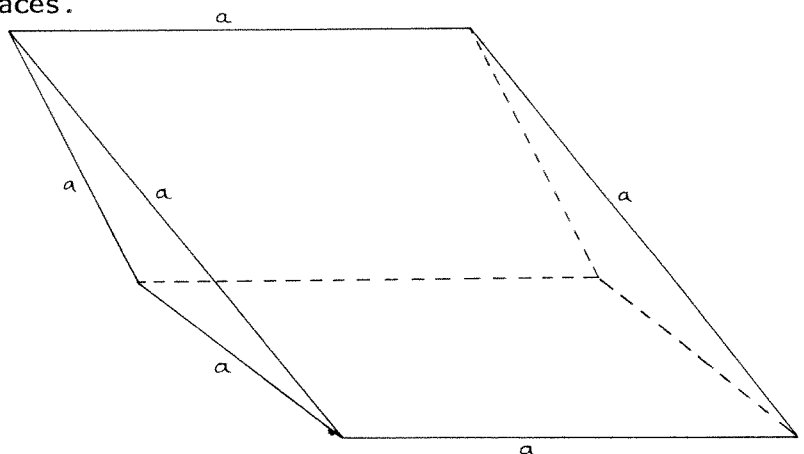
On obtient ainsi un polyèdre dont on demande le nombre de faces.

Les examinateurs avaient collé un zéro à tous les candidats qui n'avaient pas répondu 7. L'un d'entre eux avait protesté...

M. BAYARRI, de Cernay, nous a transmis son avis :

Le polyèdre en question a **cinq faces**.

Plus précisément c'est un prisme oblique... assez régulier !



Ce schéma représente la situation :

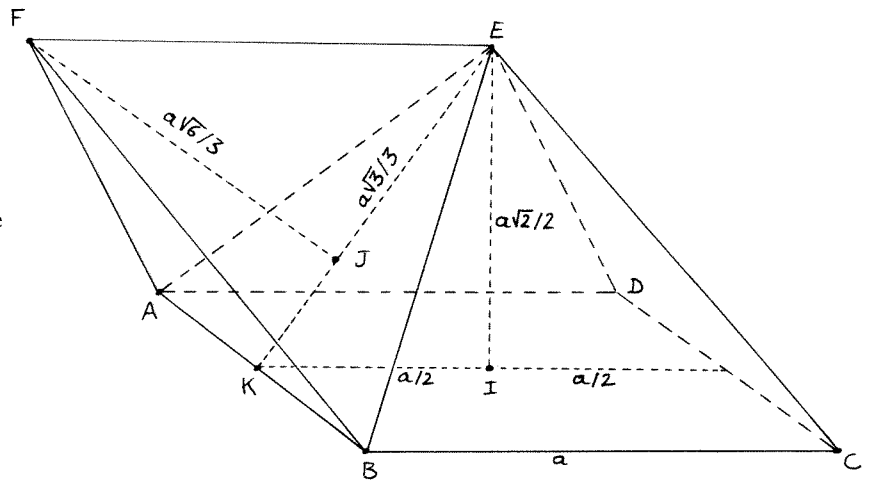
I est le centre du carré ABCD, [EI] est orthogonale au plan engendré par ce carré.

J est le centre de gravité du triangle équilatéral AEB, [EK] est la médiane issue de E dans ce triangle ;

[FJ] est orthogonale au plan AEB. Les mesures

portées sur le schéma sont

aisées à établir (T. de Pythagore, position du centre de gravité dans un triangle,...).



Le plan \mathcal{P} contenant K et orthogonal à (AB) contient I, E, J et F (I, E et J sont dans \mathcal{P} car (IK), (EK) et (JK) sont orthogonales à (AB) ; de plus, (FJ), étant orthogonale au plan AEB, est forcément orthogonale à (AB), d'où $F \in \mathcal{P}$).

Représentons le polyèdre en coupe suivant le plan \mathcal{P} :

$$\text{On a : } \widehat{\text{FEJ}} = \sqrt{2} \\ \text{et : } \widehat{\text{JEI}} = \frac{1}{\sqrt{2}} ;$$

forcément l'angle $\widehat{\text{FEI}}$ est **droit** (pour deux angles α et β aigus, on a :

$$\text{"tg } \alpha \text{ tg } \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ "),}$$

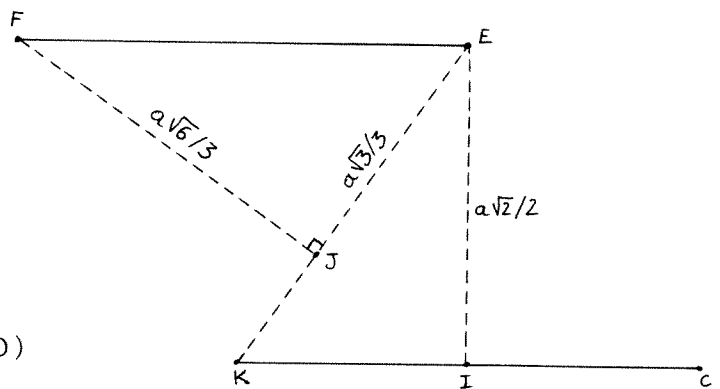
donc (FE) // (KI), or (KI) // (BC)

d'où (FE) // (BC) et aussi (FE) // (AD)

vu que (AD) // (BC).

Les plans FEB et BCE sont donc

confondus, de même pour les plans FEA et AED ; le polyèdre n'a donc que cinq faces.



Mieux encore, remarquons que les quadrilatères FECB et FEDA sont des losanges (F, E, C et B sont coplanaires et $FE = EC = CB = BF$; raisons analogues pour FEDA) ; le polyèdre est donc un prisme oblique, très régulier, car sa base est un triangle équilatéral de côté a , deux de ses faces latérales sont des losanges de côté a et la dernière est un carré de côté a !

COURRIER

Je tiens à vous remercier pour l'éclectisme des articles de votre équipe dont la lecture (assez rapide) et la compréhension (beaucoup plus ardue parfois) occupe de bons moments de ma "carrière" d'ingénieur retraité. Car si les mathématiques qui m'ont été nécessaires pour les études sur l'Énergie pour la Sidérurgie Lorraine dont j'avais fait ma spécialité n'ont guère dépassé le niveau de la Taupe d'il y a 50 ans, j'ai toujours eu un faible pour la logique (avec ses astuces et ses trouvailles) de l'appareil mathématique pour arriver dans les domaines les plus variés à des conclusions intéressantes, bizarres voire même inattendues... à condition que tout cela ne plane pas trop au dessus de ma "comprenette".

Pour ne parler que du dernier numéro, j'ai retrouvé avec les balles de ping-pong un problème de boulets qui trainait à l'École d'Artillerie de Poitiers ; constaté avec Euler au bac qu'on ne remboursait à l'époque qu'un peu plus de 2 fois en 33 ans un capital emprunté, pour près de 4 fois en 20 ans aujourd'hui avec les taux pratiqués ; apprécié les tiroirs bourrés, bonne combinatoire qui sort des sentiers battus par les poker, yam, tiercés et lotos divers ; ... et vraiment ravi par le début de l'article de M. Comte dont la démarche est passionnante, même si la fin de l'exposé attendu avec impatience doit être pour moi un peu torturante du côté des méninges pour le bien assimiler.

André MONET - Villemomble

RAPPEL IMPORTANT

**Pensez à signaler
tout changement
dans l'intitulé
de votre adresse
Merci !**