L'OUVERT

N° 39 JUIN 1985 JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG

NOTRE COUVERTURE : Jean Le Rond d'ALEMBERT, né en 1717, mort en 1783. Initiateur et responsable de l'Encyclopédie avec son ami Denis DIDEROT, mathématicien et physicien de première importance, membre de l'Académie des Sciences à 23 ans, rénovateur de l'Académie Française ... , il s'est intéressé à tout ce que son siècle pouvait lui offrir. Voir p. 1

EDITORIAL

A la rentrée 85, les éditeurs de livres scolaires auront lieu d'être satisfaits. Pour les élèves et les professeurs, c'est une autre question : de l'Ecole primaire au second cycle, les programmes de mathématiques auront été refondus, de façon plus ou moins importante, plus ou moins concertée, (plutôt moins que plus, semble-t-il). L'Ouvert aurait aimé pouvoir en dire plus, mais, malheureusement, les informations sont encore bien fragmentaires, sinon contradictoires. Les raisons de ces changements relèvent-elles seulement du souci d'améliorer la formation scientifique des élèves ? Certains faits, comme le silence observé sur l'usage des calculettes à l'Ecole primaire, c'est à dire le refus de leur introduction, en font douter.

Un grand nombre de professeurs ont collaboré au travail du groupe Lycée de l'IREM portant sur les classes de seconde. Ils trouveront en p.25 un bilan détaillé des deux derniers tests proposés en 83-84. Mais la diversité et la pertinence des questions posées en feront en document fort utile pour bien d'autres collègues.

Soucieux de rendre agréablesles vacances de ses lecteurs, l'Ouvert s'est tourné vers le XVIIIème siècle. La publication complète de l'Encyclopédie fut achevée en 1784, mais une erreur de 0,5% dans la célébration des anniversaires reste acceptable !
D'Alembert en rédigea l'introduction, et dirigea la partie scientifique. Plus peut-être qu'un Lagrange ou qu'un Euler, il incarne ce siècle où les lumières étaient loin de régner, mais où le sens de l'élégance était encore vivace. Une promenade dans le XVIIIème siècle dalembertien vous est donc proposée, dès la p.1.

SOMMAIRE

L'OUVERT

ISSN 0290-0068

. Responsable de publication : J. Lefort
. Rédaction : G. Glaeser et E. Chaney
. Correspondance à adresser à :
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
. Participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 60.- F (+ port si pas Alsace)
. Disponible à la Bibliothèque de l'IREM.

D'ALEMBERT EST UN ROMAN

Par E. CHANEY

Je sortois l'autre jour de la maison qu'habite
Le fameux d'Alembert. *Quel affreux logement !*
O Ciel, disois-je alors, *je sors du noir Cocite !*
Voilà donc d'un sçavant le triste appartement !
Un Gascon qui passoit, s'arresta pour m'entendre.
« *Cadedis,* me dit-il, *ami, dois-je t'apprendre*
Que pour le grand flambeau de la terre et des cieux,
Il n'est et ne peut être aucun lieu ténébreux ? »

Epigramme adressé à M. d'Alembert,
dans le vieux Louvre à Paris.

LE FILS NATUREL

Les raisons qui rendirent d'Alembert célèbre de son vivant, tenaient à sa double qualité de philosophe des Lumières, et de géomètre. Pour ses contemporains, son origine d'enfant trouvé devant une église, le 17 novembre 1717, compta également. L'abandon de nouveaux nés était une pratique commune, au XVIIIe siècle. Mais qu'un être voué par sa naissance à une existence obscure, sinon à disparaître, fût reçu à l'Académie des Sciences 23 ans plus tard, que personne n'ignorât l'identité et la qualité de sa mère, voilà des circonstances qui rendaient les choses piquantes. Le fait divers se faisait roman et symbole.

Laissons à Diderot le soin d'en tirer les premiers effets, dans l'un de ses dialogues avec d'Alembert :

> Diderot.- Avant que de faire un pas en avant, permettez-moi de vous faire l'histoire d'un des plus grands géomètres de l'Europe. Qu'était-ce d'abord que cet être merveilleux ? Rien.
>
> D'Alembert.- Comment rien ! On ne fait rien de rien.

Diderot.- Vous prenez les mots trop à la lettre. Je veux dire qu'avant que sa mère, la belle et scélérate chanoinesse Tencin, eût atteint l'âge de la puberté, avant que le militaire La Touche fût adolescent, les molécules qui devaient former les premiers rudiments de mon géomètre étaient éparses dans les jeunes et frêles machines de l'un et de l'autre, se filtrèrent avec la lymphe, circulèrent avec le sang, jusqu'à ce qu'enfin elles se rendissent dans les réservoirs destinés à leur coalition, les testicules de son père et de sa mère. Voilà ce germe rare formé ; le voilà, comme c'est l'opinion commune, amené par les trompes de Fallope dans la matrice ; le voilà attaché à la matrice par un long pédicule ; le voilà, s'accroissant successivement et s'avançant à l'état de foetus ; voilà le moment de sa sortie de l'obscure prison arrivé ; le voilà né, exposé sur les degrés de Saint-Jean-le-Rond qui lui donna son nom ; tiré des Enfants-Trouvés ; attaché à la mamelle de la bonne vitrière, Mme Rousseau ; allaité, devenu grand de corps et d'esprit, littérateur, mécanicien, géomètre. Comment cela s'est-il fait ? En mangeant et par d'autres opérations purement mécaniques. Voici en quatre mots la formule générale : Mangez, digérer, distillez *in vasi licito, et fiat homo secundum artem.* Et celui qui exposerait à l'Académie le progrès de la formation d'un homme ou d'un animal n'emploierait que des agents matériels dont les effets successifs seraient un être inerte, un être sentant, un être pensant, un être résolvant le problème de la précession des équinoxes, un être sublime, un être merveilleux, un être vieillissant, dépérissant, mourant, dissous et rendu à la terre végétale.

Le brave militaire Destouches-Canon (un nom pareil ne s'invente pas), que Michelet qualifie d'étourdi pour avoir joué un pareil tour à une dame rencontrée un soir de carnaval, montra plus d'honneur en cette affaire que la chanoinesse : il pourvut son rejeton d'une pension de 1200 livres, et le fit instruire au Collège des Quatre Nations.

Pierre Louis Lacretelle l'aîné estima le cas suffisamment symbolique pour en tirer le sujet de son " roman théatral en quatre journées et dix actes", intitulé "Charles Artaut Malherbe ou le Fils naturel". Madame de Tencin y devient Marquise de Lusigny, le chevalier un prélat inspiré du Cardinal de Tencin, et d'Alembert un brillant jeune homme de lettres. Mais, tandis que le fils naturel est recherché à son insu par sa mère théatrale, on est à peu près certain que la Tencin ne fit jamais rien pour revoir d'Alembert. Elle recevait pourtant dans son salon -"ma ménagerie", disait-elle- aussi bien Fontenelle, que le physicien Mairan, ou encore Marivaux.

Femme séduisante, elle mit les ressources d'un esprit calculateur au service de l'intrigue politique. Ses débuts mondains lui avaient appris à réduire au silence d'éventuels scrupules : fille d'un conseiller au parlement de Grenoble, qui la plaça dans un couvent bien mal clos, elle ne s'y plut point. D'ailleurs, "de facheuses aventures ne permirent point qu'elle y restât", comme l'exprimait avec délicatesse un historien du XVIIIe siècle. Plus tard, un de ses amants se tua dans ses appartements, laissant un testament où il l'accusait de sombres crimes. La Marquise de Merteuil n'est pas loin, mais celle qui en fut peut-être un modèle ne connut pas sa fin outrageante : elle sortit innocentée de la Bastille où ce contre temps l'envoya, et se lança dans le parti anti-janséniste.

L'ex-religieuse, future chanoinesse, ne pouvait voir en un fils malencontreux qu'un accident de parcours, à traiter aussi froidement que tout autre obstacle.

Il est permis de penser que d'Alembert en fut profondément marqué. Prit-il seulement la peine de lire les romans que sa mère trouva le temps de commettre, entre deux intrigues ? Romans édifiants et chevaleresques où les amants se montrent éternellement fidèles, et les mères prêtes à exposer leur vie pour sauver celle de leur fils...

Se faisant moraliste, notre homme fut amené à qualifier les crimes. Et le distinguo par lequel il conclut son article est peut-être à rapprocher du destin auquel il échappa :

> Car le crime doit être puni non seulement à proportion du degré auquel le coupable a violé la loi, mais encore à proportion du rapport plus ou moins direct de la loi au bien de la société. C'est la règle sur laquelle le Legislateur doit juger du degré d'énormité des crimes et surtout de la distinction qu'on doit y apporter, en les envisageant, soit par rapport à la religion, soit par rapport à la morale purement humaine. Par là on peut expliquer pourquoi le vol, par exemple, est puni par les lois beaucoup plus sévérement que les crimes qui attaquent la religion aussi directement que le vol ; pourquoi la fornication, quoique beaucoup moins criminelle en elle-même que l'adultère caché, est cependant en un sens plus nuisible à la société humaine, puisqu'elle tend ou à multiplier dans l'Etat les citoyens malheureux et sans ressources, ou à faciliter la dépopulation par la ruine de la fécondité. [2]

L'HISTORIEN

D'Alembert historien de son temps choisit de traiter un sujet brûlant de la Régence et du règne de Louis XV : la "Destruction des Jésuites". Faut-il là aussi reconnaître un lien caché avec sa mère ?

Le Cardinal de Tencin, conseillé par une soeur avec laquelle il formait un remarquable couple d'intriguants, était un champion de la cause anti-janséniste, choisissant par là le camp des Jésuites. Ses turpitudes firent d'ailleurs beaucoup pour rendre ses alliés odieux, et faire pencher la cour vers le jansénisme.

Les raisons de tels choix n'étaient pas plus religieuses que les convictions de ce cardinal ambitieux et de sa soeur chanoinesse. Il s'agissait, par le truchement de jolies créatures, de disposer du Régent. A cet effet, le ministre Dubois, âme du complot, présenta Madame de Tencin au Régent. Et voilà précisément le moment choisi par le fringuant Destouches pour faire un enfant à la belle conspiratrice.

D'Alembert se trouva ainsi lié, ab initio, à la guerre entre Jansénistes et Jésuites. Mais il faut admettre qu'il traita le sujet avec recul, sans jamais laisser paraître de sentiment personnel. L'exergue choisi pour figurer en tête de "la Destruction" laisse entendre cependant qu'on eût pu le soupçonner de partialité :

> "Quiconque fait le voeu de dire la vérité, doit être sourd à l'amitié comme à la haine."

L'ouvrage fournit à son auteur une occasion de se montrer prophète à bon compte :

> "Le milieu du siècle où nous vivons paraît destiné à faire époque, non seulement dans l'histoire de l'esprit humain, par la révolution qui s'y prépare, mais encore dans l'histoire des états et des empires, par les évènements extraordinaires dont nous avons coup sur coup été témoins." [3]

On aurait tort de voir là l'annonce de la Révolution. Il s'agit des Lumières, et les évènements qui agitaient alors l'Europe allaient se révéler bien fades en regard de ceux qui devaient suivre.

Par contre l'évocation de la curieuse administration théocratique des Jésuites au Paraguay, montre un d'Alembert fort lucide sur les pratiques coloniales :

> "Souverains dans ce vaste pays, ils y rendent heureux, à ce qu'on assure, les peuples qui leur obéissent (...). Le peu qu'on en a découvert en fait l'éloge, et ferait peut-être désirer, si les relations sont fidèles, que tant d'autres contrées barbares où les peuples sont opprimés et malheureux, eussent eus, ainsi que le Paraguai, des Jésuites pour apôtres et pour maîtres." [3]

Que le peuple eût besoin d'un maître ne faisait pas de doute pour notre géomètre. Seule la qualité comptait :

> "Le peuple ne connaît qu'une seule chose, les besoins de la nature, et la nécessité de les satisfaire ; dès qu'il est à l'abri de la misère et de la souffrance, il est content et heureux ; la liberté est un bien qui n'est pas fait pour lui, dont il ignore l'avantage, et qu'il ne possède que pour en abuser à son propre préjudice ; c'est un enfant qui tombe et se brise dès qu'on le laisse marcher seul..."

L'ouvrage fit du bruit, et fut plusieurs fois réédité du vivant de son auteur. Le but était de montrer le caractère pernicieux du fanatisme religieux de l'un et l'autre camp. A choisir, d'Alembert eut peut-être préféré les Jésuites "qui comptaient parmi eux des hommes savants et célèbres, supérieurs peut-être à ceux dont les universités pouvaient se glorifier". Les excès du Jansénisme avaient frappé les esprits : on avait vu se presser au cimetière St Médard des milliers de nouveaux flagellants. Des femmes et des hommes s'y faisaient crucifier, une princesse de Conti y tombait régulièrement en convulsion.

Cet essai d'histoire et d'analyse politique eut des suites, évoquées par l'un des correspondants familiers de d'Alembert : Voltaire. Voici quelques extraits de lettres que ce dernier lui adressa en 1767 depuis sa retraite de Ferney. De curieuses "petites affaires", d'étranges "doubles courbures", un mystérieux "étui de mathématiques" y sont évoqués :

> "Permettez à présent que je vous parle de la petite affaire de M. Boursier ; il a essayé de trois ou quatre formules pour faire passer les ordonnées de ses courbes, mais il dit que la géométrie transcendante qui règne aujourd'hui s'y oppose entièrement. Il n'y a aucun bon mathématicien à Lyon qui puisse

D'ALEMBERT

D'APRÈS SAINT-AUBIN

Vers pour mettre au bas de mon portrait,
donné à Mademoiselle de (Lespinasse) :

De ma tendre amitié, ce portrait est le gage ;
Qu'elle soit dans vos maux votre bien, votre appui ;
Et dites quelquefois en voyant cette image:
De tous ceux que j'aimai, qui m'aima comme lui ?

Vers adressés par Mademoiselle de (Lespinasse)
à Madame la duchesse (d'Anville), en lui envoyant le portrait
dont on vient de parler :

De mon ami vous désirez l'image,
Mon cœur, pour vous l'offrir s'accorde avec le sien ;
L'amitié par ce don vous offre un double hommage,
A vous, qui la sentez, la méritez si bien.
Qu'entre nous ce portrait soit un nouveau lien.
Le portrait et l'ami m'en plairont davantage.

l'aider, cependant il désespère point de son problème ; mais il faudra du temps."

"Les doubles courbures seront bientôt prêtes, et, malgré les troubles de Genève, on trouve encore quelques mathématiciens . La grande difficulté sera de pouvoir arriver jusqu'à l'Académie des sciences. *Non licet omnibus adire Corinthum.* Le chemin est bien escarpé en vérité. Cela décourage : le bon temps est passé. Votre académicien de Berlin a de très bonnes idées : mais qui les remplira ? Il fait des vers et de la prose, mais pas si bien que La Harpe, et moi je suis accablé de vieillesse, de maladies et de chagrins, et je ne vous en aime pas moins. Bonsoir, homme charmant."

(...)

"Mon cher philosophe, il y a une dizaine de fautes ridicules dans cet ouvrage de mathématiques ; mais les gens au fait rectifieront aisément les méprises d'algèbre. Je ne sais pas trop comment je pourrais faire pour vous envoyer ces planches."

(...)

"Je me suis douté, monsieur, que vous ne seriez pas content de l'étui de mathématiques. Il vient du cabinet d'un grand maître, mais les garçons ne valent pas le diable. Ils ne sont occupés qu'à raisonner et à boire. On travaille votre planétaire."

(...)

"Il y a une statue de marbre haute d'un pied et demi environ qui vous est adressée par les voitures de Dijon : elle doit être franche de port. Je la crois arrivée à présent. Ce n'est pas la statue que Jean-Jacques demandait pour lui : c'est celle que vous avez bien voulu qu'un homme qui vous aime tendrement vous présentât.

Mille tendres amitiés aux Français vos amis et des croquignoles aux Welches."

[4]

Boursier n'est autre que Voltaire lui-même. Sa "petite affaire" n'a rien de mathématique : il s'agit de l'impression de la première lettre supplémentaire à la "Destruction des Jésuites". L'ouvrage "où subsistent une dizaine de fautes ridicules" aussi. Le planétaire est sans doute la "Destruction" en cours de ré-impression. Et la statue de marbre cache l'expédition de tirages des "Lettres". En fait, Voltaire s'était entremis pour faire imprimer ces ouvrages, et l'appareil géométrique qu'il dut déployer pour en informer son correspondant ne témoigne que de l'omni-présence de la censure, et des moyens de la tourner.

LE COMMERCE DES GRANDS

Si Madame de Tencin passa sa vie à courtiser les grands, en les faisant sourire lorsqu'elle se piquait de philosophie, d'Alembert fut au contraire l'objet de pressantes démarches venant des souverains acquis aux Lumières : Frédéric de Prusse, et Catherine de Russie. Il séjourna chez le monarque philosophe, et confia dans ses lettres à son amie Julie de Lespinasse la forte impression que cette cour lui fit. Des avances un peu trop pressantes du souverain hâtèrent cependant son retour à Paris. Cela ne l'empêcha pas, par la suite, de diriger l'Académie de Berlin, où il devait installer Lagrange dans le siège vacant d'Euler.

L'impératrice de Russie fit tout son possible pour attirer le savant auprès d'elle :

CATHERINE à d'ALEMBERT

M. d'Alembert, je viens de lire la réponse que vous avez écrite au S^r^ d'Odar, par laquelle vous refusez de vous transplanter pour contribuer à l'éducation de mon fils. Philosophe comme vous êtes, je comprends qu'il ne vous coûte rien de mépriser ce qu'on appelle grandeurs et honneurs dans ce monde ; à vos yeux tout cela est peu de chose et aisément je me range de votre avis. A envisager les choses sur ce pied, je regarderais comme très petite la conduite de la reine Christine qu'on a tant loué (sic) et souvent blamé (sic) à plus juste titre ; mais être né ou appelé pour contribuer au bonheur et même à l'instruction d'un peuple entier et y renoncer, me semble, s'est (sic) refuser de faire le bien que vous avez à coeur. Votre philosophie est fondée sur l'humanité ; permettez-moi de vous dire que de ne point ce (sic) prêter à la servir tandis qu'on le peut, c'est manquer son but. Je vous sais trop honnête homme pour attribuer vos refus à la vanité ; je sais que la cause n'en est que l'amour du repos pour cultiver les lettres et l'amitié, mais à quoi tient-il ? Venez avec tous vos amis, je vous promets et à eux aussi tous les agréments et aisances qui peuvent dépendre de moi et peut-être vous trouverez plus de liberté et de repos que chez vous ; vous ne vous prêtez point aux instances du roi de Prusse et à la reconnaissance que vous lui avez ; mais ce prince n'a pas de fils. J'avoue que l'éducation de ce fils me tient si fort à coeur et vous m'êtes si nécessaire que peut-être je vous presse trop ; pardonnez mon indiscrétion en faveur de la cause et soyez assuré que c'est l'estime qui m'a rendue si intéressée.

A Moscou, le 13 novembre 1762.

D'ALEMBERT à CATHERINE

Madame,

La lettre dont Votre Majesté Impériale vient de m'honorer me pénètre de la plus vive reconnaissance et en même temps de la plus vive douleur de ne pouvoir répondre à ses bontés. J'ose néanmoins, Madame, espérer de ces bontés même et j'ajoute de l'équité de Votre Majesté Impériale, de l'élévation et de la sensibilité de son âme, qu'elle voudra bien rendre justice aux motifs qui ne me permettent pas d'accepter ses offres.

Si la philosophie est insensible aux honneurs, elle ne saurait l'être au précieux avantage d'approcher une princesse éclairée, courageuse et philosophe (phénomène si rare sur le trône), de mériter sa confiance dans la partie la plus importante peut-être de sa glorieuse administration et de concourir à ses vues respectables pour le bonheur d'un grand peuple. Mais, Madame (et je supplie Votre Majesté Impériale d'être persuadée que je la respecte trop pour ne pas lui parler avec toute la franchise philosophique), je ne suis nullement en état par le genre d'études que j'ai faites, de donner à un jeune prince destiné au gouvernement d'un grand empire les connaissances nécessaires pour régner ; je ne pourrais tout au plus que le former par les faibles leçons aux vertus dont Votre Majesté Impériale lui donne bien mieux les exemples. Ma santé, d'ailleurs ne pourrait résister au climat rigoureux de la Russie, et me rendrait incapable du grand ouvrage auquel sa Majesté Impériale me fait l'honneur de m'appeler. Enfin, Madame, le petit nombre d'amis que j'ai le bonheur d'avoir, aussi obscurs et aussi sédentaires que moi, ne pourraient ni consentir à notre séparation, ni se résoudre à abandonner avec moi une patrie dont ils ne sont pas mieux traités. (...) [4]

D'autres tentatives suivirent, 50000 livres furent offertes, et 40000 de rente, mais rien n'y fit : d'Alembert resta à Paris. La correspondance avec Catherine s'acheva d'ailleurs sur un trait où on lui fit sentir sa modeste position : fort des civilités de la tsarine, le philosophe crut pouvoir intervenir en faveur d'officiers français embastillés à la suite de troubles en Pologne. Catherine, légèrement agacée, finit par lui répondre que, si le sort des malheureux l'émouvait à ce point, mieux valait s'apitoyer sur les milliers de Turcs défaits et prisonniers, que sur trois officiers tapageurs aux arrêts.

D'ALEMBERT MATHÉMATICIEN

Le théorème de d'Alembert

"Tout polynôme à coefficients réels a au moins une racine, réelle ou imaginaire"

En termes modernes : le corps des nombres complexes est algébriquement clos. Paradoxalement, d'Alembert ne fut ni le premier à conjecturer ce résultat (ce fut Girard), ni à le prouver. Cependant l'acharnement dont il fit preuve pour en obtenir une démonstration indique qu'il en saisissait l'importance. Lagrande puis Gauss en donnèrent des preuves complètes en recourant, ce qui est inévitable, à l'Analyse, selon la voie inaugurée par d'Alembert.

Equations différentielles et équations aux dérivées partielles

D'Alembert énonça clairement que la solution générale d'une équation différentielle linéaire est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée, mettant ainsi en valeur la notion de linéarité.

A côté de multiples méthodes de résolution des équations différentielles, il étudia systématiquement les équations aux dérivées partielles, et résolut l'épineux problème des cordes vibrantes, en donnant la solution générale de l'équation :

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ avec conditions initiales } u(x,o) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x,o).$$

Fondements du calcul infinitésimal

D'Alembert mit en garde ses contemporains contre l'usage sans précaution des séries, convergentes ou divergentes. Il donna d'ailleurs un critère de convergence pour les séries à termes positifs :

> Σu_n *est convergente si, dans le cas où* $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ *existe, cette limite est* < 1.
> *Elle est divergente si elle est* > 1.

Pour affranchir le calcul infinitésimal des débats sur les infiniment petits, il donna une définition de la notion de limite, où il situait la "véritable métaphysique" de ce calcul :

"Une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut s'approcher de la première plus près qu'une quantité donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable", "à proprement parler la limite ne coïncide jamais ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite, mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus et peut en différer aussi peu qu'on veut"...

Une définition qui porte encore une forte marque géométrique, ne serait-ce que par la monotonie qu'elle suppose implicitement. L'exigence de rigueur manifestée par d'Alembert ne renverse pas le courant de son siècle, qui utilisait les infiniment petits, mais fut adoptée au siècle suivant. Nous savons aujourd'hui qu'il est possible d'utiliser ces infiniment petits sans que la rigueur en souffre.

L'oeuvre de d'Alembert en physique, en mécanique particulièrement, mériterait qu'on s'y attarde longuement. Indiquons seulement que Louis de Broglie considère que la solution du problème des cordes vibrantes *"suffirait à rendre son nom immortel"*.

LE DILETTANTE

Que d'Alembert fut un génie apparaissait déjà évident à ses contemporains. L'évocation de quelques-uns de ses travaux mathématiques (voir encadré) suffira pour s'en convaincre. Mais la vivacité de son esprit et le caractère cyclothymique de son humeur en firent aussi un dilettante, passant facilement d'un sujet à l'autre, comme si la perspective de se fixer sur une tâche de longue haleine l'eût ennuyé (il dirigea cependant pendant dix ans, avec Diderot, la réalisation de l'Encyclopédie). Il eut ainsi l'occasion de s'exprimer sur un grand nombre de thèmes, sous forme de brefs essais, ou "maximes diverses". Nous continuerons notre flânerie dalembertienne (*) dans cette dernière voie.

La musique fut par exemple, comme pour son ami (puis ennemi, après la publication de l'article Genève dans le tome VII de l'Encyclopédie) Rousseau, un thème favori de ses méditations. Disciple de Rameau pour l'harmonie, il rédigea un traité théorique plus clair que celui du maître. Il revint sur le sujet à de nombreuses reprises et n'hésitait pas à proposer l'exploration de voies qu'il pensait originales, bien que les musiciens de la première époque baroque les eûssent déjà empruntées :

> Un objet effrayant, un bruit terrible produisent chacun en nous une émotion par laquelle nous pouvons jusqu'à un certain point les rapprocher, et que nous désignons souvent dans l'un et l'autre cas, ou par le même nom, ou par des noms synonimes. Je ne vois donc point pourquoi un Musicien qui auroit à peindre un objet effrayant, ne pourroit pas y réussir en cherchant dans la nature l'espèce de bruit qui peut produire en nous l'émotion la plus semblable à celle que cet objet y excite : j'en dis autant des sensations agréables ; penser autrement, ce seroit resserrer les bornes de l'art et de nos plaisirs. [2]

Une position très "expressionniste".

Allergique à tout esprit de système, d'Alembert ne se laissait pas impressionner par les "principes intangibles" de l'harmonie :

> L'imperfection de toutes les théories musicales vient de la même cause que la futilité de presque tous les systèmes physiques. On s'est pressé de bâtir avant

(*) Ce barbarisme est dû aux physiciens.

> d'avoir un assez grand nombre de matériaux pour élever l'édifice. Nous pratiquons dans notre musique moderne un grand nombre d'accords que vraisemblablement les anciens ne connoissoient pas. Est-il bien sûr que ces accords soient les seuls praticables et que de nouvelles combinaisons n'en fassent point découvrir d'autres ? On est bien porté à penser le contraire, lorsqu'on voit les musiciens pratiquer avec succès des accords très dissonnans et n'en pas tenter plusieurs qui le seroient beaucoup moins. Nous en avons indiqué un grand nombre dans l'*Encyclopédie* au mot *Basse fondamentale*. Nous croyons que la liste en pourroit être facilement augmentée et nous inviterons les musiciens à complèter cette liste, à essayer ces nouveaux accords, non seulement isolés, mais précédés ou suivis par d'autres, à tâcher enfin d'étendre leur art et à ne pas croire qu'il soit renfermé dans les limites de leur tête et de leur siècle. La plus belle langue est celle qui est la plus riche en mots, et en augmentant, comme nous le proposons ici, le nombres des accords, nous augmenterons le nombre des mots de la langue musicale, jusqu'à présent bien peu abondante. Il pourra résulter de là un autre avantage : ces nouveaux accords réunis et combinés avec les anciens, conduiront peut-être à quelque principe général qui servira de base à la vraie théorie que nous attendons encore ou cette combinaison approfondie nous convaincra qu'il n'y a point de théorie musicale à espérer, ce qui revient à peu près au même pour le progrès de la science.

L'article de l'Encyclopédie auquel il est fait référence propose des accords audacieux :

> Pour ne parler ici que d'un petit nombre de ces accords, par quelle raison n'employe-t-on jamais dans l'harmonie les accords *ut, mi, sol*#*, ut ; ut, mi, sol*#*, si,* dont le premier n'a proprement aucune dissonance ; le second n'en contient qu'une comme l'accord usité *ut, mi, sol, si* ? N'y a-t-il point d'occasions où de pareils accords peuvent être employés, ne fût-ce que par licence, car on sait bien que les licences sont fréquentes en musique ? Pourquoi ne pourroit-on pas quelquefois faire entendre dans un même accord deux tierces majeures ensemble ?
>
> (...)
>
> Pourquoi ces accords, dont aucun excepté le dernier, ne renferme pas plus d'une ou de deux dissonnances, sont-ils proscrits de l'harmonie ? Est-il bien certain par l'expérience (car encore une fois l'expérience est ici le grand juge) qu'aucun d'eux ne puisse être employé en aucune occasion en les considérant, *soit en eux-mêmes, soit par rapport à ceux, qui peuvent les précéder ou les suivre ?* [5]

ou franchement dissonants :

ut, mi, sol$^{\#}$*, si*^{b}.
ut, mi^{b}*, sol*$^{\#}$*, ut.*
ut, mi^{b}*, sol*$^{\#}$*, si.*
ut, mi^{b}*, sol*$^{\#}$*, si*^{b}.
ut, mi, sol, la^{b}.
ut, mi, sol$^{\#}$*, la,* etc.

Mais, à la différence de Rousseau qui se voulait grand musicien, d'Alembert ne prétendait pas imposer un point de vue, fût-il théorique. En dernier ressort, c'est aux musiciens qu'il revient d'innover :

> "Je sens toute mon insuffisance pour décider de pareilles questions ; mais je désirerois que quelque musicien consommé (et surtout je le répète, non prévenu d'aucun système) voulût bien s'appliquer à l'examen que je propose. [5]

LE PHILOSOPHE DES SCIENCES

L'histoire et la philosophie des sciences sont fort redevables à notre géomètre : la métaphysique ne l'effrayait pas, mais il tenait à ce que les genres fûssent nettement distingués. Ses positions épistémologiques annonçaient le positivisme du XIXe siècle, et méritent toujours d'être méditées. De ce point de vue, le "Discours préliminaire" de l'Encyclopédie, qui inaugurait une histoire philosophique des Sciences, est resté célèbre. Même à côté d'un tel momument, les pistes ne manquent pas.

Ainsi, dans un article intitulé "Arts", une comparaison appuyée avec le savoir-faire artisanal, invite-t-elle à prendre en compte la dimension historique des thèses scientifiques :

> Cependant c'est peut-être chez les artisans qu'il faut aller chercher les preuves les plus admirables de la sagacité de l'esprit, de la patience et de ses ressources.
> J'avoue que la plupart des arts n'ont été inventés que peu à peu, et qu'il a fallu une assez longue suite de siècles pour porter les montres, par exemple, au point de perfection ou nous les voyons. Mais n'en est-il pas de même des sciences ? Combien de découvertes qui ont immortalisés leurs auteurs, avoient été préparées par les travaux des siècles précédents, souvent même amenées à leur maturité, au point de ne demander plus qu'un pas à faire ? Et pour

> ne point sortir de l'horlogerie, pourquoi ceux à qui nous devons la fusée des montres, l'échappement et la répétition, ne sont-ils pas aussi estimés que ceux qui ont travaillé à perfectionner l'algèbre ? D'ailleurs, si j'en crois quelques philosophes que le mépris de la multitude pour les arts n'a point empêché de les étudier, il est certaines machines si compliquées, et dont toutes les parties dépendent tellement l'une de l'autre, qu'il est difficile que l'invention en soit due à plus d'un seul homme. Ce génie rare dont le nom est enseveli dans l'oubli, n'eût-il pas été bien digne d'être placé à côté du petit nombre d'esprits créateurs, qui nous ont ouvert dans les sciences des routes nouvelles ? [2]

La théorie newtonienne de la gravitation fut l'un des principaux sujets de méditation de d'Alembert. Qu'elle ne pût se déduire des autres lois connues de la nature, en particulier des "lois de l'impulsion des fluides", causait une certaine gêne à d'Alembert. Mais il ajoutait :

> Reconnoissons seulement que les effets de cette force n'ont pu se réduire encore à aucune des lois connues dans la mécanique ; n'emprisonnons point la nature dans les limites étroites de notre intelligence ; approfondissons assez l'idée que nous avons de la matière, pour être circonspect sur les propriétés que nous lui attribuons, ou que nous lui refusons ; et n'imitons pas le grand nombre des philosophes modernes, qui en affectant un doute raisonné sur les objets qui les intéressent le plus, semblent vouloir se dédommager de ce doute par des assertions prématurées sur les questions qui les touchent le moins. [2]

Et son jugement général sur l'oeuvre de Newton en souligne bien le caractère fondamentalement nouveau :

> Sa théorie du monde, (car on ne veut pas dire son système) est aujourd'hui si généralement reçue, qu'on commence à disputer à l'auteur l'honneur de l'invention, parce qu'on accuse d'abord les grands hommes de se tromper, et qu'on finit par les traiter de plagiaire. Je laisse à ceux qui trouvent tout dans les ouvrages des anciens, le plaisir de découvrir dans ces ouvrages la gravitation des planètes, quand elle n'y seroit pas ; mais en supposant même que les Grecs en aient eu l'idée, ce qui n'étoit chez eux qu'un système hazardé et romanesque, est devenu une démonstration dans les mains de Newton. Cette démonstration qui n'appartient qu'à lui, fait le mérite réel de la découverte, et l'attraction sans un tel appui seroit une hypothèse comme tant d'autres. [2]

La distinction qu'il opère entre la science de l'observation et celle fondée sur la démarche expérimentale est moderne, ce que renforce un choix des adjectifs qui inspira peut-être Bachelard :

> On pourroit appeller l'observation la Physique des faits, ou plutôt la Physique *vulgaire et palpable,* et réserver pour l'expérience le nom de Physique *occulte,* pourvu qu'on attache à ce mot une idée plus philosophique et plus vraie, que n'ont fait certains Physiciens modernes, et qu'on se borne à désigner la connoissance des faits cachés dont on s'assure en les voyant, et non le roman des faits supposés qu'on devine bien ou mal, sans les chercher ni les voir. [2]

L'homme avait parfois de l'humour, et la physique newtonnienne lui donna l'occasion de le montrer. Lors de sa réception à l'Académie Française, dont d'Alembert fut l'historien, un M. Ducis rendait hommage à Voltaire en le présentant monté sur "le char du soleil" pour y observer avec Newton le mouvement des planètes. La métaphore fut critiquée par de savants esprits : comment un astre, que le système de Newton tenait pour immobile, pouvait-il être comparé à un char. D'Alembert, qui n'était pas affligé de "l'esprit de sérieux", intervint dans la polémique, exposa le calcul de la vitesse du soleil par rapport au centre de gravité du système solaire, et conclut ainsi :

> Je trouve que dans le système newtonien la vitesse moyenne du soleil doit être d'environ 270 lieues par jour, et cette vitesse me paroît assez *honnête* pour qu'il soit permis aux poëtes modernes de donner au soleil un char, ou si l'on veut un *trône ambulant* ; ce qui revient à peu près au même, car je ne chicane point sur les termes. [4]

Ironie également dans cette mise en scène d'un homme déçu de tout, que l'on trouve dans une maxime titrée "Apologie de l'Etude" :

> L'histoire a été mon coup d'essai : j'en ai fait une où je m'exprimois librement sur des personnes redoutables : car, on m'avoit assuré que les traits hardis étoient un moyen sûr de plaire. Ces traits m'ont fait des ennemis cruels de ceux qui en étoient l'objet. J'ai été traité d'écrivain dangereux par les intéressés, et d'étourdi par les indifférents ; les critiques m'ont assailli de toutes parts ; et au lieu d'un peu de fumée sur quoi je comptois, je n'ai recueilli que des chagrins et des ridicules.

Le public, me suis-je dit pour me consoler, le public en personne me vengera ; je me présenterai à lui sur la scène dramatique pour y être couronné par ses mains. Plein de cette confiance, et d'une étude profonde des règles du théâtre, j'ai fait une tragédie, elle a été sifflée ; une comédie, elle n'a pas été jusqu'à la fin.

C'est le propre des malheurs de ramener à la philosophie, comme le joueur qui a tout perdu revient à la maîtresse ; cette philosophie, qui prétend nous dédommager de tout, m'ouvroit ses bras et me restoit pour asyle. J'écrivis, le coeur serré, un long et triste ouvrage de morale, où je croyois du moins avoir prêché la vertu la plus pure. Un imbécile assura que je réduisois tout à la loi naturelle. Mille plumes, et encore plus de clameurs, se sont élevées contre moi, et m'ont fait éprouver que la vérité est comme les enfans, qu'on ne la met point au monde sans douleur. Ayant ainsi appris à mes dépens, qu'il ne faut montrer aux hommes, ni la vérité historique qui les blesse, ni la vérité philosophique qui les révolte, mais des vérités froides et palpables, qui ne donnent prise ni à la calomnie ni à la satyre ; je me suis jetté dans les sciences exactes, et j'ai fait enfin un livre dont on a dit du bien, mais qui n'a été lu de personne. Ce genre de succès, pire que toutes mes disgrâces, a achevé de me décourager. [2]

Ne peut-on y discerner le regard amusé d'un d'Alembert serein sur son double triste et misanthrope ?

RÉFÉRENCES

[1] Diderot Entretien entre d'Alembert et Diderot

[2] D'Alembert Esprit, Maximes et principes divers
A Genève 1789 (rééd.)

[3] D'Alembert Sur la destruction des Jésuites en France
par un auteur désintéressé 1765

[4] D'Alembert Oeuvres et correspondances inédites, par
par M. Charles Henry Paris 1887

[5] Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des arts et des métiers
Denis Diderot et Jean le Rond d'Alembert. 17 vol. 11 vol. de planches
Paris 1751-1772

LE PARADOXE DE SCHWARZ

J. LEFORT

1. GÉNÉRALISATION D'UNE IDÉE D'ARCHIMÈDE

On sait, depuis Archimède, que pour calculer la longueur d'une courbe (plane ou non) on l'approche par des lignes polygonales inscrites telles que sur tout arc de la courbe le nombre des sommets ne soit pas borné supérieurement.

C'est par cette méthode bien pratique qu'Archimède put calculer une valeur approchée de π.

Essayons de généraliser cette démarche au cas des surfaces dans l'espace de dimension trois. Approchons une surface (suffisamment régulière) par des polyèdres inscrits tels que sur toute portion de cette surface le nombre de sommets ne soit pas borné supérieurement.

Pour des raisons pratiques, puisque trois points déterminent un plan, on a intérêt, dans le cas le plus général, à prendre des polyèdres dont les faces sont des triangles.

2. CYLINDRE ET ANTIPRISME

Appliquons cela à un cas bien connu : le cylindre, ou plutôt le tronc de cylindre, de rayon R et de hauteur H. Approchons-le par un empilement d'antiprisme de hauteur $h = \frac{H}{m}$ et dont les bases sont des polygones réguliers à n côtés. Quand m et n tendent vers l'infini, le polyèdre approche le cylindre au sens précédent.

> Rappelons qu'un antiprisme est le solide formé de deux polygones réguliers à n côtés, de même axe, tournés de $\frac{\pi}{n}$ radians l'un par rapport à l'autre. Les arêtes s'obtiennent en joignant chaque sommet de l'un des polygones à ses deux plus proches voisins de l'un et l'autre polygônes, comme on le voit sur la figure 1.

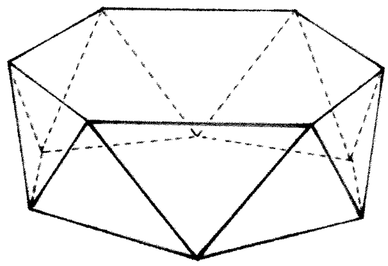


Fig. 1

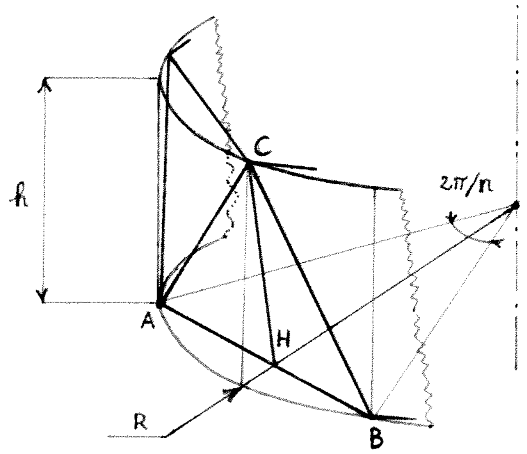


Fig. 2

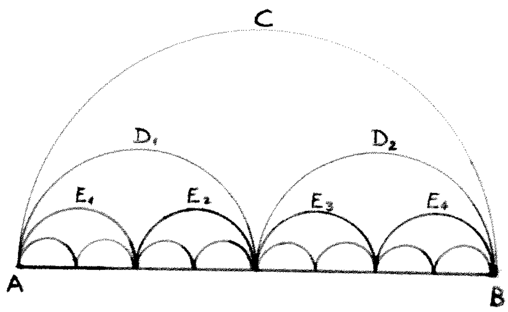


Fig. 3

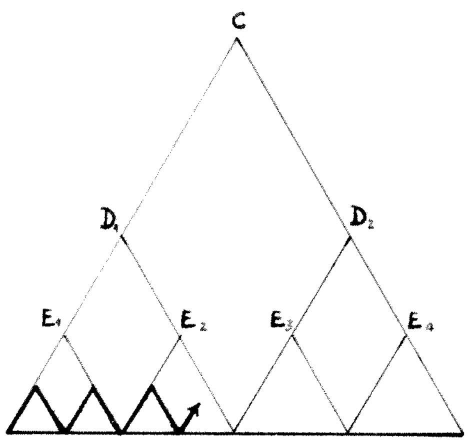


Fig. 4

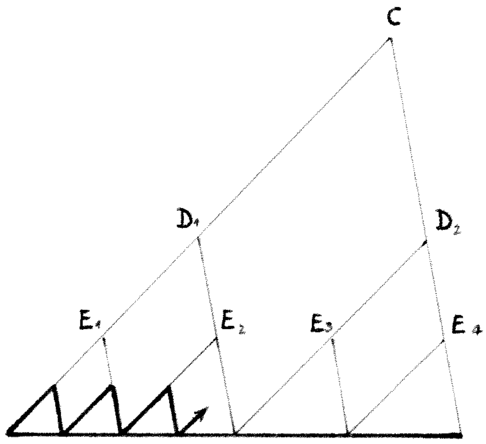


Fig. 5

Calculons l'aire latérale d'un antiprisme de hauteur h inscrit dans un cylindre de rayon R (Fig. 2).

Il y a 2n faces telles que ABC qui sont des triangles isocèles de base

$$AB = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

et de hauteur

$$HC = \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

L'aire latérale vaut donc :

$$2nR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

et comme on empile m tels tels antiprismes, on obtient pour l'aire latérale du polyèdre approchant le cylindre :

$$2nm\, R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

et en remplaçant h par sa valeur $\frac{H}{m}$:

$$S = 2nR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + m^2 R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

3. QUAND LES BORNES SONT DÉPASSÉES IL N'Y A PLUS DE LIMITE

Quand n et m tendent vers l'infini, le premier facteur $2nR \sin \frac{\pi}{n}$ tend vers $2\pi R$, mais la quantité sous le radical a un comportement étrange ! Pour n grand, $(1 - \cos \frac{\pi}{n})$ se comporte comme $\frac{\pi^2}{2n^2}$ et par conséquent, le deuxième facteur

$$\sqrt{H^2 + m^2R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

a même limite que

$$H\left(1 + \frac{m^2}{n^4} \frac{R^2 \pi^4}{4H^2}\right),$$

ce qui prouve qu'elle peut prendre une valeur quelconque entre H et $+\infty$ (tout dépend de la limite éventuelle de $\frac{m^2}{n^4}$).

Finalement, cette généralisation de l'idée d'Archimède, conduit à attribuer à l'aire latérale du cylindre de révolution une valeur quelconque entre $2\pi RH$ (qui est la "bonne" valeur) et $+\infty$! Autant dire qu'il n'y a pas de limite, bien que sur toute portion du cylindre le nombre de sommets ne soit pas borné supérieurement ! Que s'est-il passé ?

4. Retour au plan

On a approché une courbe par une ligne polygonale. Mais pourquoi avoir choisi des segments de droites ? Sans doute parce que leur longueur est relativement plus facile à calculer et que, en inventant cette méthode, Archimède n'allait pas utiliser des arcs de cercles pour calculer la longueur du cercle !

Imaginons cependant que l'on décide d'approcher une ligne droite par des arcs de cercle. La figure 3 montre que le segment AB est approché par ACB, puis par AD_1D_2B puis $AE_1E_2E_3E_4B$... etc... Or, la longueur de ces lignes est toujours la même et vaut πR alors que AB vaut 2R !

On aurait pu effectuer un raisonnement analogue avec des triangles équilatéraux (voir Fig. 4). La limite de la ligne polygonale est AB mais sa longueur vaut toujours 2a alors que AB = a !

On sent bien qu'en choisissant convenablement la ligne qui approche AB (Fig. 5) la longueur de celle-ci peut avoir pour limite un nombre arbitraire supérieur ou égal à la longueur de AB. C'est bien la même situation que dans le cas du cylindre.

5. Une nouvelle définition

Si finalement on ne peut jamais obtenir un nombre inférieur à la valeur connue tant pour les aires que pour les longueurs, modifions ainsi les définitions correspondantes :

Dans toutes les définitions précédentes, remplaçons partout la limite par la **limite inférieure** de la longueur (de l'aire) de toutes les lignes (les surfaces) inscrites qui approchent la courbe (la surface) donnée quand le nombre de sommets tend vers l'infini sur toute portion de la courbe (de la surface).

Ces définitions qui requièrent la notion de limite inférieure, sont plus délicates mais nécessaires si l'on veut éviter le paradoxe de Schwarz mis en évidence dans le cas du cylindre.

6. Où l'approche qualitative permet de mieux comprendre

On peut essayer de voir les choses d'un peu plus près, surtout si l'on est savant et que l'on aime bien les calculs analytiques. On sait que la longueur d'une courbe paramétrée dans un repère orthonormé par : $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$

est donnée par :

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

et que l'aire d'une surface paramétrée dans ce même repère par $(u,v) \longmapsto (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$, est donnée par :

$$\iint \sqrt{\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2}\ du\, dv$$

où, par exemple,

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ces calculs montrent que l'important est de connaître, par delà les fonctions x, y, z, leurs **dérivées**. Or qui dit dérivées, dit directions. On devine alors que si on remplace la surface par une surface approchée, il est impératif que cette dernière le soit non seulement en position, ce qui est assuré par le choix de polyèdres inscrits, mais aussi en direction, ce qui n'est pas toujours le cas pour des polyèdres inscrits. Et c'est là que se trouve la clef du paradoxe de Schwarz :

En reprenant la figure 2, on remarque que quand h tend vers O, c'est-à-dire quand m tend vers l'infini, alors le triangle ABC, face latérale d'un antiprisme, s'incline de plus en plus par rapport à l'axe du cylindre, donc à ses génératrices. Cela reste vrai même si n tend aussi vers l'infini, pour peu qu'il le fasse nettement moins vite que m. Si donc les antiprismes approchent le cylindre en position, ils ne le font pas en direction ou du moins pas toujours.

Il est heureux pour Archimède et ses successeurs, que dans le cas des courbes, les polygônes inscrits fassent les deux (approche en position et en direction). Comme quoi le passage de la dimension 2 à la dimension 3 n'est pas toujours une simple généralisation.

Bibliographie : Henri LEBESGUES "La mesure des grandeurs"
Blanchard, réédition 1975

ERRATUM

Une transmission défectueuse de maquette a tronqué la fin de l'article "Un scénario pour le calcul numérique en classe de 4e", de Bernard BLOCHS et François PLUVINAGE, paru dans l'Ouvert 38. Voici donc la page 40 de cet Ouvert, qui complète l'article mutilé. Que les auteurs et ses lecteurs veuillent bien accepter les excuses de l'Ouvert pour cette greffe tardive.

Une possibilité est d'organiser une séance-bilan à l'issue d'une ultime activité, analogue à l'activité numéro 3 : "Pour chacun des trois modes de calcul (mental, machine, papier-crayon) indiquer un exercice de chacun des quatre niveaux : facile, moyen, difficile, très difficile (mais quand même faisable)".

ANNEXE :

Sujets effectivement proposés par B. Blochs

n° 1

1) 41^2 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 3) $8,64 \times 3$ 4) $0,6^2$

5) $-3-8$ 6) $0,632^2$ 7) $\frac{2}{5}-\frac{7}{5}$ 8) $\frac{-21}{4} : \frac{35}{20}$

9) $\frac{14 \times 25 \times 9}{45 \times 28 \times 18}$ 10) 2 11) $8,7654321 \times 9$ 12) $9,87 \times 6,543$

13) $0,2 \times 0,1$ 14) 9^3 15) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ 16) 15×230

17) $2,712 \times 7,2121$ 18) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ 19) $2197 + \frac{1}{4}$

20) $0,5 \times 0,25$

n° 2

Trouve 4 calculs bien adaptés au calcul mental
" " " " " " " machine
" " " " " " " crayon-papier.

n° 3

1) 6^{40} 2) $0,002 \times 2,002$ 3) 17000×780000 4) 1^{26}

5) 647 800 000 : 79 000 6) 0,0005 : 19

7) $307\,020 \times 409\,500$ 8) $10,98765432123456 78 \times 3$

9) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 10) $1,5^2$

n° 4

Sans effectuer le calcul, indique le nombre de chiffres avant la virgule qu'aura le résultat :

1) 42 700,38 3 2) 32 181,3 3) 31,003 35,007

4) 171 358 : 20 5) 139,36 : 0,5 6) 32,75 : 0,187

7) 73 0,029 8) 73 : 0,029

n° 5

1) 13! 2) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}$

3) $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4,79}}}$ 4) $-387\ (20450 + 0,00045) + 386 \times 20\,503$

5) On prévoit comme quantité moyenne de pâtes 125g par personne. Complète le tableau pour une colonnie de 28 enfants :

nombre de jours	1	 7
quantité de pâtes		

n° 6

Séance de travaux dirigés : pour mieux utiliser une machine.

n° 7 Calcul mental

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ 2) $3 : \frac{1}{4}$ 3) $\frac{2}{9} : 6$ 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 5) 8^{-2}

6) $10^6 \cdot 10^{-4}$ 7) $3ab \cdot 4a$ 8) $3ab - 4a$ 9) 101^2

10) 18×22 11) 51^2 12) $(a+2)^2$ 13) $(3-b)^2$

14) $(x-3)(x+3)$

Conversions formes scientifiques - formes "normales" :

15) 12 000 000 16) 0,006 17) $7 \cdot 10^{-6}$

18) $3 \cdot 10^8$; 19) 5! 20) $0,03^2$

n° 8

1) 41^2 2) $83\,700^2$ 3) $\left(3+\frac{1}{2}\right)^2$

4) $1,999\,99 \times 2,000\,01$ 5) $\left(7,809^2 - \frac{3,920\,99}{4,0275 - 2,57}\right)^3$

6) 18×22 7) $83\,000,75^2$

8) $17,000\,1^2$

9) $P = 9x^4 - y^4 + 2y^2$

x	1	10 864
y	1	18 817
P		

SUPER-SONDAGE EN SECONDE (SUITE)

Par le groupe Lycée de l'I.R.E.M.

En 83-84, le groupe Lycée de l'I.R.E.M. de Strasbourg avait proposé aux collègues enseignant en Seconde l'expérimentation dans leurs classes de trois questionnaires-tests. Le premier a fait l'objet d'un compte-rendu dans "l'Ouvert" n° 35 de juin 84. Nous rendons compte ici des deux autres tests.

Le test n° 2 veut être un test sur les acquis de concepts jugés fondamentaux dans le programme de Seconde. La réussite à un tel test demande un apprentissage sérieux et une compréhension rigoureuse mais ponctuelle de ces concepts.

Le test n° 3 porte à la fois sur des connaissances inscrites au programme de Seconde et sur un savoir-faire dans leur mise en oeuvre conjuguée : ainsi l'utilisation de transformations géométriques simples est riche de possibilités dans l'étude de fonctions. La réussite à un tel test demande davantage d'imagination et d'organisation de ces connaissances, donc une appréhension plus globale du programme.

Le test n° 1 correspondait selon nous, à des savoirs minimaux, à l'entrée en classe de Seconde. Nous avions minuté chaque question pour juger ainsi le réflexe et non la découverte.

Les tests n° 2 et 3 vérifient les acquis en fin de classe de Seconde : le temps consacré à chaque épreuve était laissé à l'appréciation de chaque professeur, selon le niveau de sa classe.

L'I.R.E.M. a reçu des bilans de ces tests : les résultats du test n° 2 concernent 957 élèves et ceux du test n° 3, 731 élèves.

Dans les pages qui suivent sont présentés, face à la reproduction du questionnaire remis aux élèves, les résultats des tests.

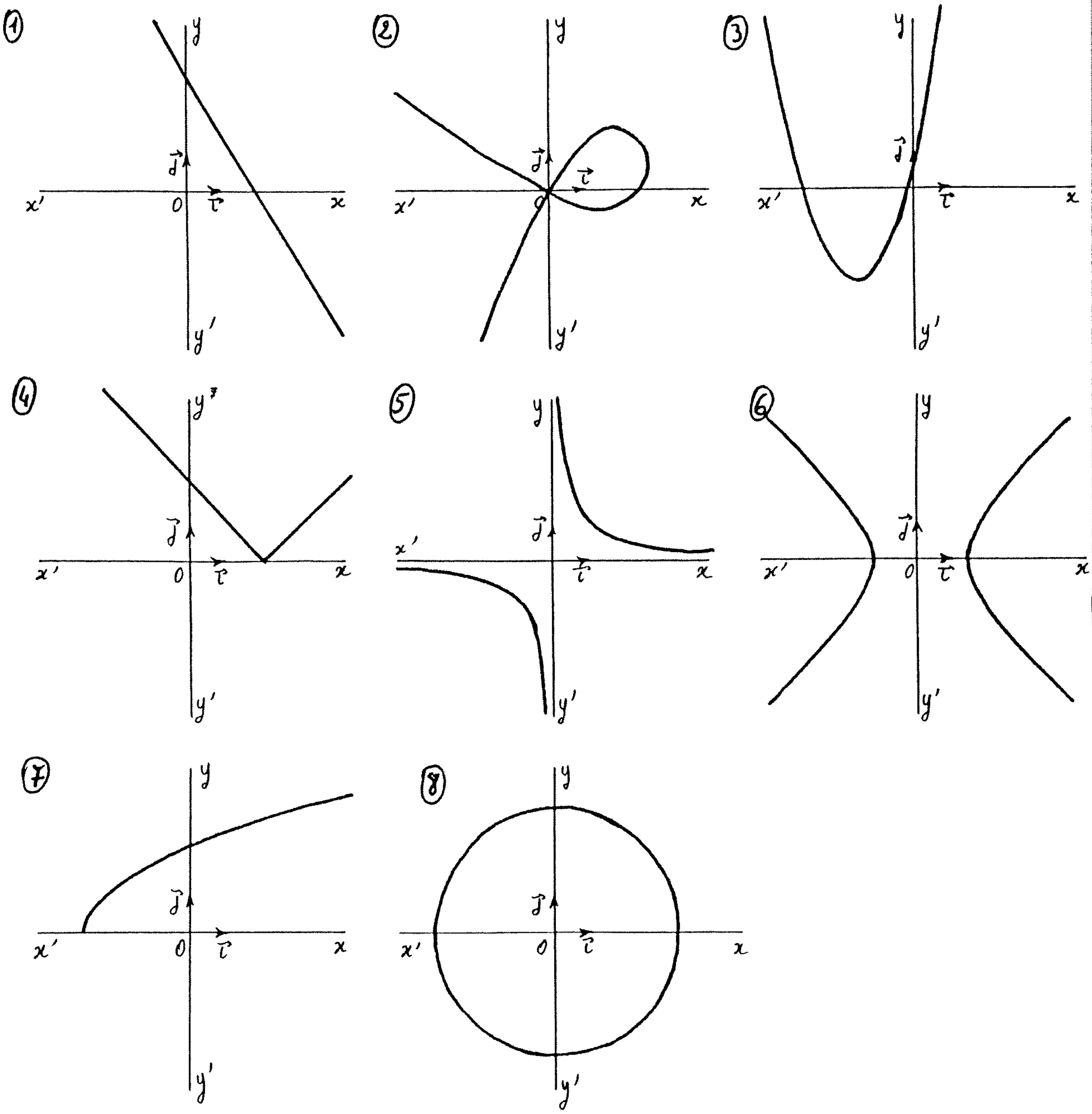
Convention générale : R signifie **réussite totale**
E signifie **échec partiel ou total**
NR signifie **non-réponse**

Les résultats sont donnés en pourcentage.

Test n° 2 - Page 1

Nous vous conseillons d'utiliser une feuille de brouillon.

1. Voici quelques courbes :



<u>Questions</u> : Ces figures sont-elles des représentations graphiques de fonctions ? Pour chacune d'elles répondre par oui ou par non.

1 :	5 :
2 :	6 :
3 :	7 :
4 :	8 :

Page 1 - Question 1 - Résultats

	1	2	3	4	5	6	7	8
R	92	95	94	82	95	60	83	85
E	8	5	6	17	5	39	16	14
NR	0	0	0	1	0	1	1	1

. 5 et 2 arrivent "en tête" des réussites, suivies de près de 3 et 1 . Viennent ensuite 8 7 et 4 .

. 40 % des élèves voit dans l'hyperbole de la figure 6 , une représentation graphique de fonction... Les réponses varient beaucoup d'une classe à l'autre pour cette figure.

. 8 % des élèves - ce qui n'est pas négligeable - se trompent face à une droite !

Le groupe Lycée de l'I.R.E.M. remercie encore bien vivement les professeurs qui ont participé à ce travail pour les informations, critiques et suggestions qu'ils lui ont envoyées.

Les trois tests sont reproduits dans la seconde édition de la brochure n° 27 de l'A.P.M.E.P. : "Pour une mathématique vivante en Seconde".

Test n° 2 - Page 2

2. Voici quelques fonctions :

$f_1 : x \longmapsto 4x - 8$; $f_2 : x \longmapsto x^2 - 4$; $f_3 : x \longmapsto x + \frac{2}{x-2}$

$f_4 : x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 4}$; $f_5 : x \longmapsto \frac{x-2}{x^2+2}$; $f_6 : x \longmapsto \frac{3}{|x| - 2}$

$f_7 : x \longmapsto \frac{-5}{|x-2|}$; $f_8 : x \longmapsto \sqrt{x+2}$; $f_9 : x \longmapsto \sqrt{2-x}$

$f_{10} : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

<u>Question</u> : Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions puis cocher le résultat obtenu dans le tableau suivant

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}-\{-2\}$	$]-\infty;2]$	$]2;+\infty[$	autre ensemble précisez lequel
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						
f_7						
f_8						
f_9						
f_{10}						

3. Donner un exemple de fonction ayant pour ensemble de définition :

a) $D_1 = \mathbb{R} - \{3\}$ $g_1 : x \longrightarrow$

b) $D_2 = \mathbb{R} - \{-5;1\}$ $g_2 : x \longrightarrow$

c) $D_3 = [1 ; +\infty[$ $g_3 : x \longrightarrow$

Page 2 - Question 2 - Résultats

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}
R	88	83	89	51	60	47	65	44	56	59
E	12	16	10	46	34	49	29	49	40	34
NR	0	1	1	3	6	4	6	7	4	7

. f_3 et f_1 viennent "en tête" des réussites, suivies de près par f_2.

. f_7, f_5 et f_{10} recueillent environ le même pourcentage de réussite ; viennent ensuite f_9 et f_4 puis f_6 et f_8.

. La question a le tort de ne pas être suffisamment détaillée pour pouvoir nous renseigner sur le ou les types d'erreurs les plus répandues. Seul le professeur peut s'en rendre compte pour les élèves de sa classe, s'il demande le détail des calculs... Par exemple, par f_9, la difficulté principale est-elle d'écrire la condition qui définit l'ensemble de définition ou bien est-elle de résoudre une inéquation ? Une amélioration du test consisterait donc à demander pour chaque fonction la condition, s'il y en a une, qui définit l'ensemble de définition (en donnant un exemple, pour éviter toute ambiguïté).

. Signalons que, selon plusieurs collèges, la disposition en tableau a troublé plus d'un élève en ce qui concerne f_4 et f_6 : ceux-ci ont coché deux cases : $\mathbb{R} - \{2\}$ et $\mathbb{R} - \{-2\}$

. On constate, au dépouillement, que l'hétérogénéité des résultats d'une classe à l'autre, augmente avec la diminution du taux de réussite global.

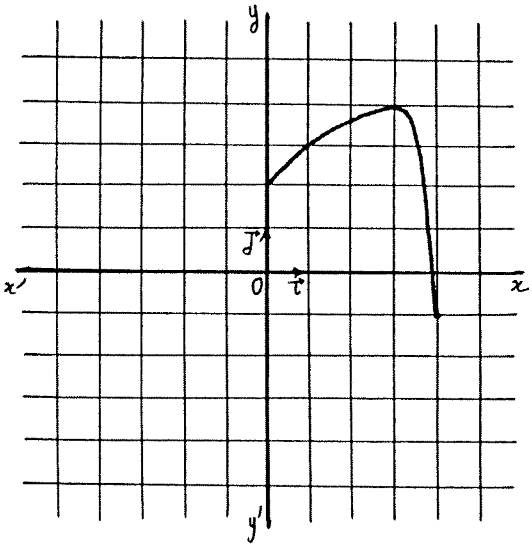
Page 2 - Question 3

	a)	b)	c)
R	78	46	45
E	17	25	35
NR	5	29	20

. La chute du taux de réussite est spectaculaire entre les réponses à a) et à b) ou c).

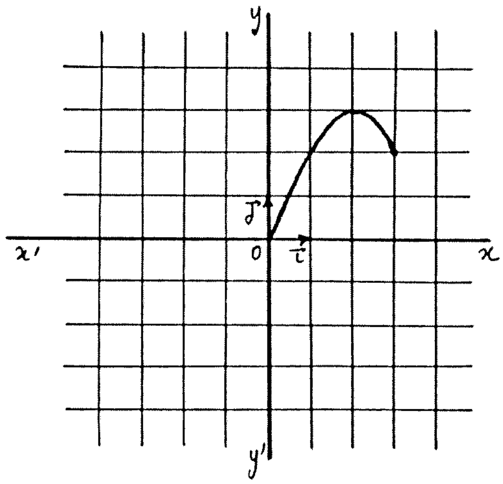
. Il serait intéressant pour le professeur de comparer : la réussite aux ensembles de définition de f_4, f_6 de la question 2 et à la question b) de la question 3), d'une part ; la réussite à l'ensemble de définition de f_8 de la question 2 et à la question c) de la question 3), d'autre part. Globalement, les taux de réussite sont très sensiblement les mêmes en b) et c) ; mais ce n'est pas toujours le cas dans une même classe !

4. Voici une partie de la représentation graphique d'une fonction paire définie sur $[-4 ; 4]$. Compléter cette représentation graphique et donner le tableau de variation (complet) de la fonction.



x	

5. Voici une partie de la représentation graphique d'une fonction impaire définie sur $[-3 ; 3]$. Compléter cette représentation graphique et donner le tableau de variation (complet) de la fonction.



x	

Page 3 - Questions 4 et 5 - Résultats

	4, graphique	4, tableau	5, graphique	5, tableau
R	73	49	71	46
E	16	42	18	42
NR	11	9	11	12

. Il saute aux yeux que les réussites aux graphiques, d'une part et les réussites aux tableaux de variation, d'autre part, sont sensiblement les mêmes : c'est vrai en moyenne, et classe par classe. Ceci ne nous étonne guère.

. Plusieurs collègues nous signalent des tableaux de variation incomplets.

6. Voici quatre fonctions. Dire pour chacune d'elles si elle est paire, ou impaire, ou ni paire ni impaire. Justifier la réponse.

* $f_1 : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 4}$

* $f_3 : x \longmapsto \dfrac{2x + 3}{x}$

* $f_4 : x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

7. Voici le tableau de variation d'une fonction définie sur $[-7 ; 7]$
Cocher les réponses dans le tableau suivant :

x	-7		-3		1		7
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

		Vrai	Faux	On ne peut pas répondre
a	$f(5) = -3$			
b	$f(-4) < 5$			
c	$-2 < f(0) < 5$			
d	$-3 < f(0) < 1$			
e	$f(6) = 2$			
f	$f(3) = -1$			
g	$f(x)$ s'annule trois fois sur $[-7;7]$			

Page 3 et 4 - Question 6 - Résultats

	1)	2)	3)	4)
R	68	52	43	43
E	25	41	48	46
NR	7	7	9	11

. Le premier exemple est le plus simple car il ne met en jeu que des fonctions paires, alors que les suivants mettront en jeu des fonctions paires et des fonctions impaires.

. La maîtrise de $(-x)$, $(-x)^2$, $(-x)^3$, $\frac{1}{(-x)}$, a fortiori $f(-x)$ n'est sûrement acquise que par une minorité des élèves.

. Signalons une ambiguïté probable dans la correction - certains nous l'ont signalé - Fallait-il "compter fausses" les réponses qui ne mentionnaient pas le domaine de définition D_f de la fonction ou/et qui ne vérifient pas que " $\forall x \in D_f, -x \in D_f$" ?

Page 4 - Question 7

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
R	54	76	65	30	68	54	71
E	43	23	32	65	28	41	20
NR	3	3	3	5	4	5	9

. b) arrive "en tête", suivie de g) e) et c), puis de a) et f). d) est bonne dernière. Cet ordre n'est pas, en soi, une surprise.

. Seule une analyse détaillée faite par le professeur peut le renseigner sur les erreurs et le pourquoi de celles-ci. Bien sûr la question d) est "piégée" : s'agit-il alors d'une erreur d'attention ou d'une erreur concernant l'inclusion de deux intervalles ?

. Il serait intéressant pour le professeur de comparer les résultats de ses élèves avec ceux qu'ils ont obtenus à la question 15 du test n° 1 (corrigé probablement entre temps). Combien d'élèves se sont servie (dans cette question 7 du test 2) d'un graphique pour répondre aux questions ?

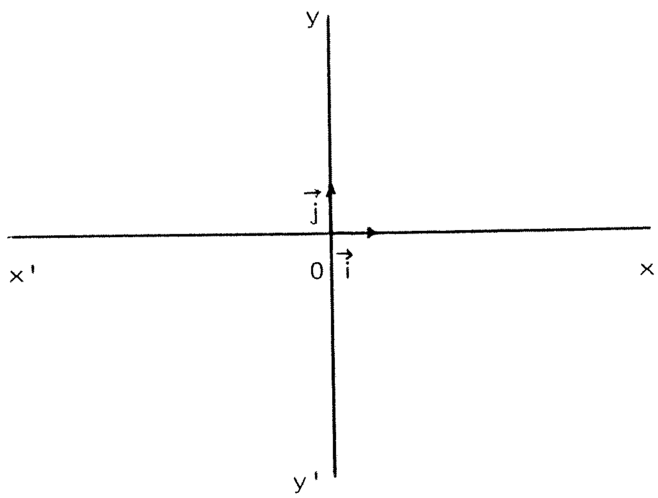
Test n° 2 - Pages 4 et 5

8. Donner le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$ et vérifiant les conditions suivantes :
f est croissante sur $[-2 ; 0]$; $f(-2) = -1$; f admet en 0 un maximum ; $f(0) = 2$; f est décroissante sur $[0 ; 2]$; f admet un minimum en 2 ; $f(2) = 1$; f est croissante sur $[2 ; 4]$; $f(4) = 3$.

x	
f(x)	

9. Donner la représentation graphique d'une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

f est définie sur $[-2 ; 5]$; f est croissante sur $[-2 ; 1]$;
f est décroissante sur $[1 ; 5]$; $f(-2) = -4$; $f(0) = 3$;
$f(5) = 1$



10. Déterminer l'ensemble de définition et étudier le sens de variation de chacune des fonctions suivantes. Conclure en donnant le tableau de variation de chaque fonction.

a) $f_1 : x \longmapsto -2x + 3$

b) $f_2 : x \longmapsto 3x^2 - 2$

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{2}{3 - x} + 1$

Pages 4 et 5 - Questions 8 et 9 - Résultats

	8)	9)
R	69	47
E	18	37
NR	13	16

. Ici aussi la chute est assez spectaculaire.
. Une difficulté - signalée par plusieurs collègues - de la question 9 : le maximum de f sur $[-2;5]$ n'est pas donné, et la liberté trouble plus d'un élève.
. Mais combien d'élèves on échoué à la question 9) faute d'avoir fait un tableau de variations, intermédiaire qu'on a l'habitude de faire en classe, mais qui n'était pas demandé ici ?
On pourrait peut-être répondre, en faisant précéder la question 8 ou la question 9 d'une question supplémentaire : on donnerait un tableau de variation et on demanderait un graphique correspondant.
Un bon exercice consisterait aussi à faire traduire en français un graphique ou un tableau de variation (exercices "réciproques" des questions 8) et 9).

Page 5 - Question 10

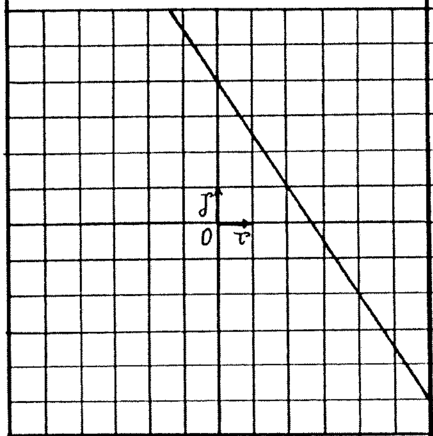
	a)	b)	c)
R	45	25	8
E	36	45	54
NR	19	30	38

. Les scores sont ici faibles, en chute libre de a) à c) en passant par b) !
. Plusieurs collègues invoquent le manque de temps ; c'est possible encore que le taux de réussite ne soit pas meilleur dans les classes ayant disposé d'une heure et demie que dans celles ayant disposé d'une heure...
. Il s'agit sûrement d'une question plus difficile ; on ne peut répondre (ou même essayer de répondre) que si on a une bonne compréhension et une bonne maîtrise de la définition du sens de variation d'une fonction et des résultats du cours. (Celles-ci rendent inutile tout recours au "taux de variation"...)

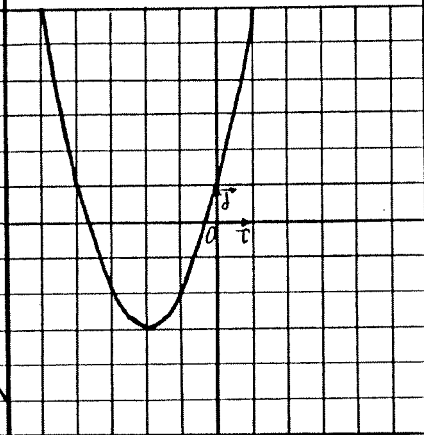
Test n° 3 - Page 1

1. Voici quelques représentations graphiques de fonctions. Chercher parmi les fonctions énumérées en bas de la page celle qui convient à chaque courbe représentative. Donner la réponse en remplissant la case prévue à cet effet.
(On ne demande pas de justificatif).

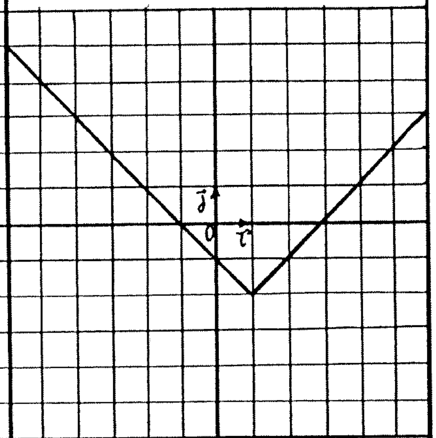
(1) $x \longmapsto$



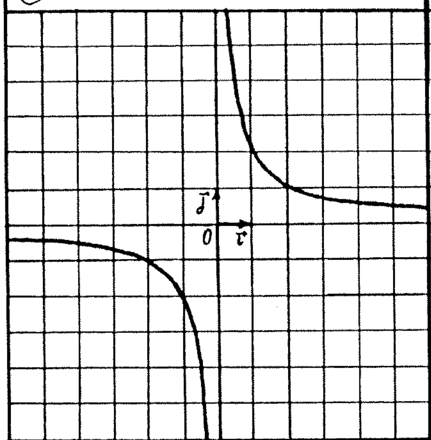
(2) $x \longmapsto$



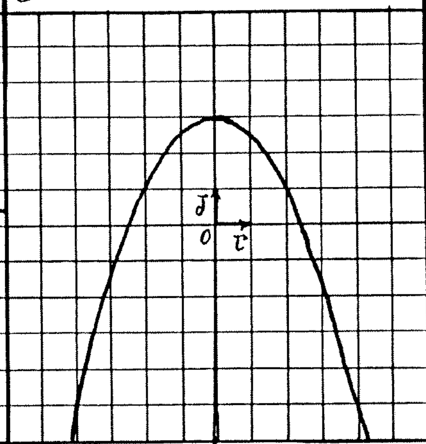
(3) $x \longmapsto$



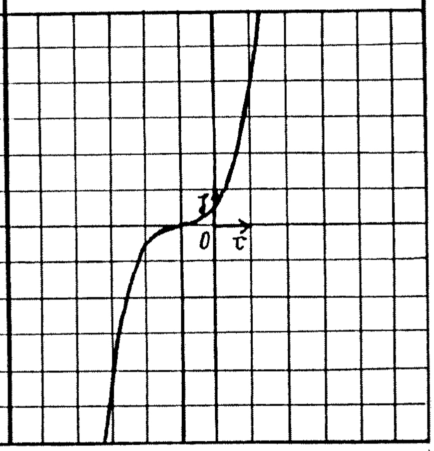
(4) $x \longmapsto$



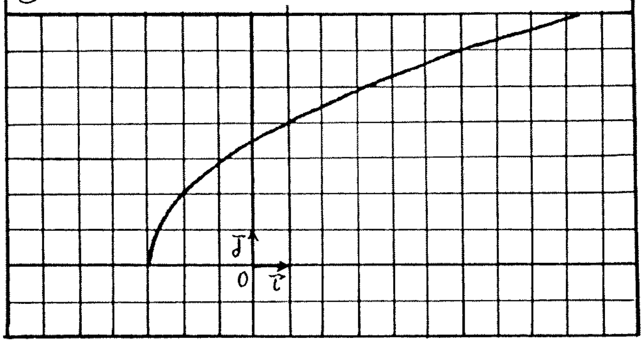
(5) $x \longmapsto$



(6) $x \longmapsto$



(7) $x \longmapsto$



$x \longmapsto |x-1| - 2$

$x \longmapsto |x+1|$

$x \longmapsto |x| - 2$

$x \longmapsto 2\sqrt{x+3}$

$x \longmapsto \sqrt{x-3}$

$x \longmapsto \sqrt{x} + 3,5$

$x \longmapsto \dfrac{2}{x}$

$x \longmapsto \dfrac{-2}{x}$

$x \longmapsto (x-2)^2 + 1$

$x \longmapsto x^2 - 2x - 3$

$x \longmapsto (x+2)^2 - 3$

$x \longmapsto -x^2 + 3$

$x \longmapsto -\frac{1}{2}x^2 + 3$

$x \longmapsto 2x^2 + 3$

$x \longmapsto \dfrac{1}{2x}$

$x \longmapsto 1,5x + 4$

$x \longmapsto -3x + 4$

$x \longmapsto -1,5x + 4$

$x \longmapsto \frac{1}{2}(x+1)^3$

TEST n° 3

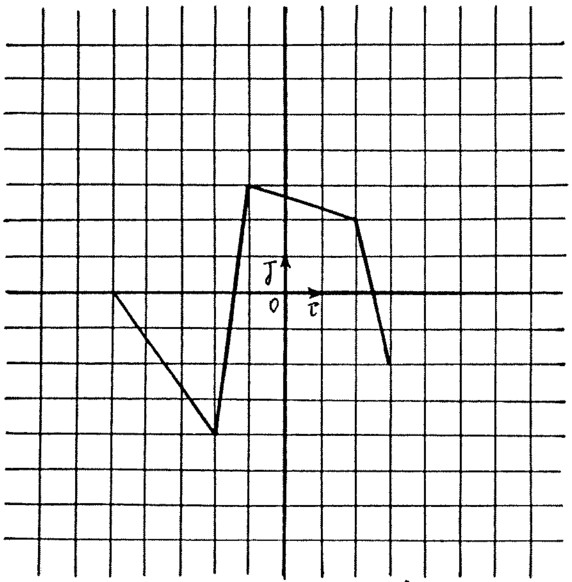
Page 1 - Question 1 - Résultats

	1	2	3	4	5	6	7
R	68	69	69	75	43	62	53
E	22	22	18	20	43	16	32
NR	10	9	13	5	14	22	15

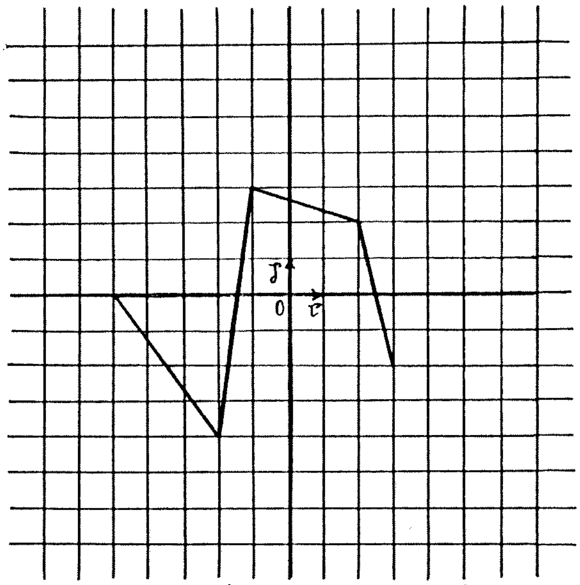
. En moyenne, 4 arrive en tête : c'est une hyperbole ; il en était de même dans le 1° question du Test 2. Coïncidence ? 3 2 1 réalisent le même score, suivis de 6 , puis de 7 qui n'obtient qu'un peu plus de 50 % de réussite. 5 est bonne dernière. Pourquoi cette chute de 40 % dans le taux de réussite entre 2 et 5 ? Le facteur $-\frac{1}{2}$ suffit-il à troubler ainsi les élèves ? Parce qu'il est négatif, ou fractionnaire ? Notons que pour cette question le taux de réussite varie de 92 % et 3 %, selon la classe...

. Notons aussi que près d'un tiers des élèves ne sait reconnaître l'équation d'une droite parmi les trois qui leur sont suggérées !

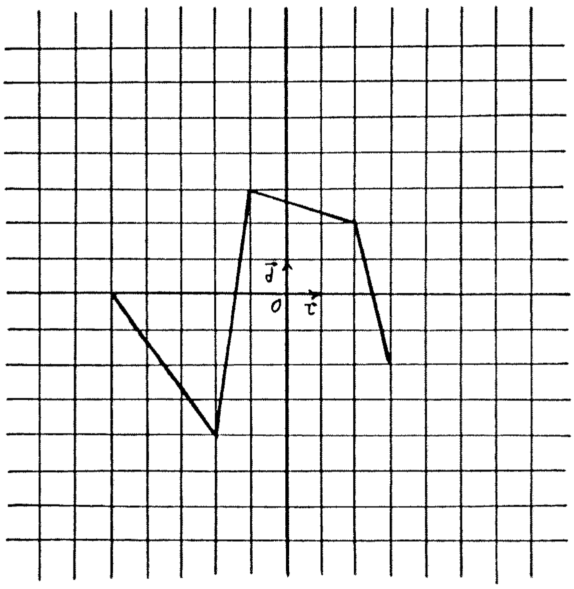
2. Voici la courbe représentative d'une fonction f. En déduire les courbes représentatives des fonctions g, h, i, j définies par
$g : x \longmapsto f(x) + 2$, $h : x \longmapsto f(x - 3)$, $i : x \longmapsto f(x - 3) + 2$
$j : x \longmapsto -f(x)$.
Dans chaque cas indiquer la transformation qui a permis de construire la nouvelle courbe à partir de celle de f. S'il s'agit d'une translation, préciser le vecteur de translation.



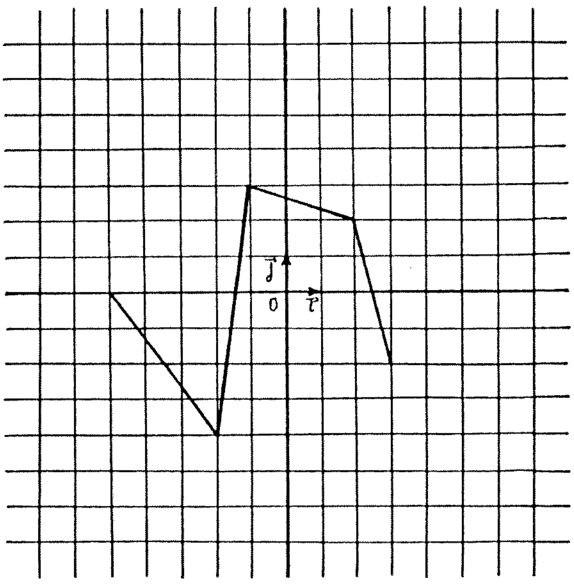
Représenter g sur ce graphique



Représenter h sur ce graphique



Représenter i sur ce graphique



Représenter j sur ce graphique

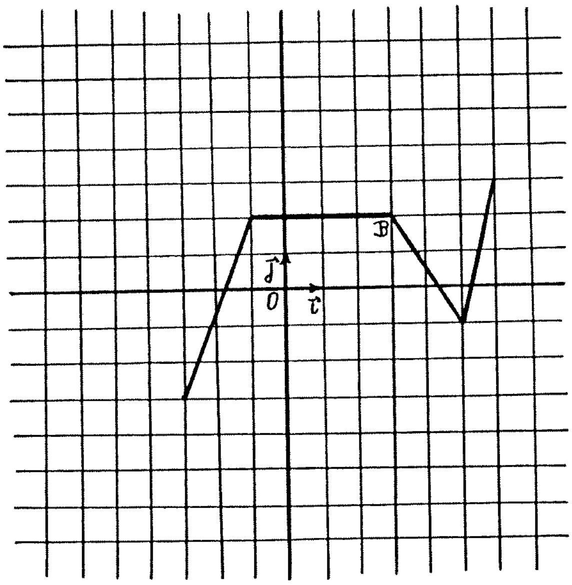
Page 2 - Question 2 - Résultats

	g	h	i	j
R	65	30	30	49
E	29	59	57	39
NR	6	11	13	12

. Les résultats sont sans surprise en ce qui concerne g h et i : le pourcentage de réussite chute de plus de la moitié entre g et h . Les élèves qui savent représenter h savent représenter i : le saut de difficulté est donc clair.

. On est un peu plus surpris par le score très moyen obtenu par j (il varie entre 72 % et 22 % d'une classe à l'autre.

3. Voici la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f : x \longmapsto f(x)$. Le vecteur de la translation qui transforme B en 0 est : $\overrightarrow{\ldots}(\ldots,\ldots)$.
Dessiner la courbe $\mathscr{C}'$ transformée de $\mathscr{C}$ par cette translation.
$\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de $g : x \longmapsto \ldots$



4. Voici le tableau de variation d'une fonction f . En déduire les tableaux de variation des fonctions h, i, j, k définies par :
$h : x \longmapsto 2f(x)$, $i : x \longmapsto -f(x)$, $j : x \longmapsto f(x) + 2$,
$k : x \longmapsto f(x - 3)$

x	-6		-4		$\frac{1}{2}$		6
$f(x)$	-4	↗	2	↘	0	↗	4

Page 3 - Question 3 - Résultats

	Vecteur	Expression de g	courbe représentative
R	55	19	62
E	27	45	19
NR	18	36	19

. Seule un peu plus de la moitié des élèves savent écrire le vecteur de la translation déterminée par deux points et lire ses coordonnées !...
. Peu de différence de réussite entre l'expression du vecteur de translation et la courbe représentative de g.
. Très faible score obtenu par l'expression de g (un élève sur cinq). Les élèves qui ont su écrire l'expression de g font probablement partie de ceux qui ont su représenter la fonction i de la question 2. Le score varie ici de 56 % et 0 %.

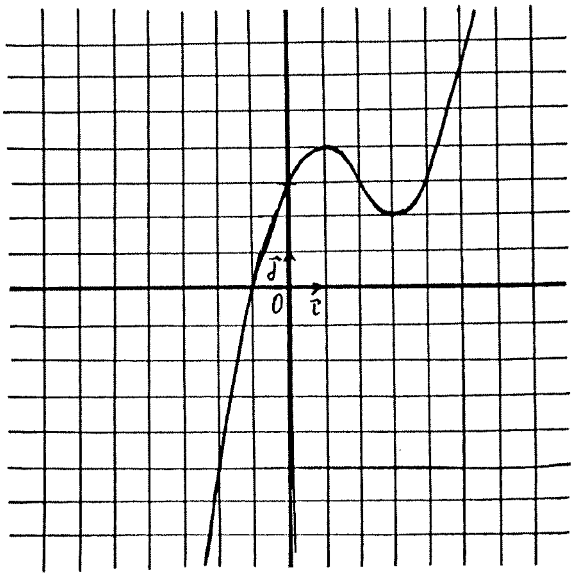
Page 3 - Question 4

	h	i	j	k
R	72	62	67	18
E	19	29	22	60
NR	9	9	11	22

. La différence de réussite entre h j i d'une part et k d'autre part ne nous étonne guère.
. Le score obtenu par k est le même que celui obtenu par la question g dans la question 3 . Ce sont probablement les mêmes qui maîtrisent les différents aspects du passage de $x \mapsto f(x)$ à $x \mapsto f(x - a)$.
. Le score obtenu par j est sensiblement le même que celui obtenu par g à la question 2 - il y a ici plus de non-réponses, mais moins d'échecs - par contre celui obtenu par i est bien meilleur que celui obtenu par j à la question 2 : il n'y aurait donc une difficulté propre au graphisme proprement dit.

5. Voici la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f. On considère la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x ; y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x' ; y') telles que $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

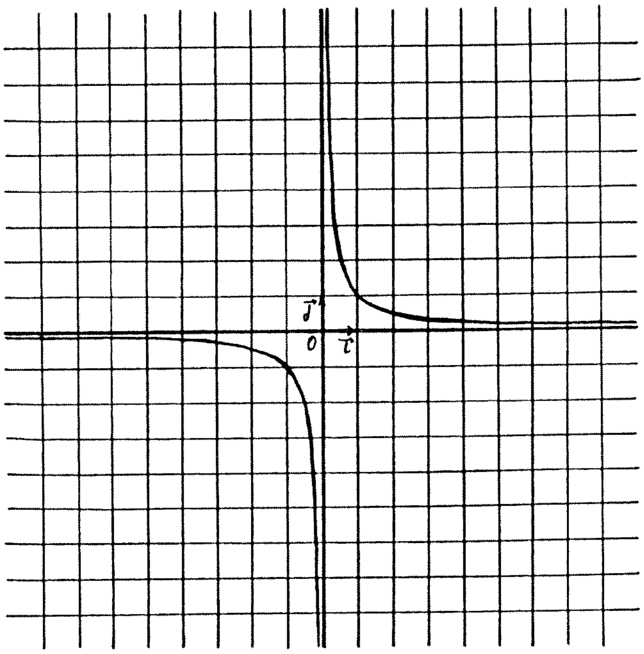
Soit $\mathscr{C}'$ la courbe transformée de $\mathscr{C}$. Dessiner $\mathscr{C}'$.



Quelle est cette transformation ? ...

$\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de $x \longmapsto$ ...

6. Voici la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$. On considère l'homothétie de centre 0 et de rapport 2. On appelle $\mathscr{C}'$ la transformée de $\mathscr{C}$ par cette homothétie.



Test n° 3 - Pages 4 et 5

1° Dessiner 8 points de $\mathcal{C}'$.

2° Soit M un point du plan, de coordonnées (x ; y), et M' de coordonnées (x' ; y') son image par cette homothétie. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$$\boxed{\begin{cases} x' = \dots \\ y' = \dots \end{cases}}$$

3° Ecrire une relation reliant x et y

puis une relation reliant x' et y'

Les points de $\mathcal{C}'$ appartiennent à la courbe représentative de : $x \longmapsto \dots$

Page 4 - Question 5 - Résultats

	courbe représentative	transformation	expression x
R	78	49	27
E	13	26	37
NR	9	25	36

. Le classement de ces scores est sans surprise...

. Ce qui est surprenant c'est l'importance de la chute entre le graphique et la reconnaissance de la transformation.

Page 4-5 - Question 6

	1)	2)	3) (x,y)	3) (x',y')	3) $x \longmapsto$
R	42	49	27	14	15
E	22	19	16	24	31
NR	36	32	57	62	54

. Plus du tiers des élèves en moyenne ne savent pas quoi faire à la première question (dessin) ; la réussite est meilleure lorsqu'il s'agit d'écrire des formules mais ceci n'est peut-être pas significatif, si on ne connaît pas la ou les erreurs faites à la première question ; il suffit d'un point "faux" pour que...

. Rien ne précisait dans la question 3 que le point M(x,y) appartenait à $\mathcal{C}$: oubli fâcheux des rédacteurs ! Dans ces conditions, seul le professeur peut interpréter les scores de ses élèves...

Quelques remarques suggérées par ces bilans :

(1) Les pourcentages indiqués dans chaque tableau sont, il va sans dire, des taux **moyens** de réussite, d'échec ou de non-réponse de la "population" scolaire étudiée. Naturellement ces taux varient d'une classe à l'autre ! Nous n'avons pas calculé les écarts-type correspondants ... Mais on peut, à la lecture des bilans fournis, remarquer ceci :

- les résultats concernant les questions à "très fort" ou "très faible" taux de réussite (supérieur à 80 % ou inférieur à 20 %) varient peu d'une classe à l'autre, sauf exceptions.
- les résultats concernant les autres questions varient très sensiblement d'une classe à l'autre.

(2) Le test n° 2 met en évidence les difficultés de lecture approfondie, d'utilisation appropriée et de transfert de l'un à l'autre des deux modes de représentation des fonctions : tableau de variations et graphique.
La majorité des élèves n'a pas acquis la maîtrise conjointe de ces deux types de "visualisation", leur emploi comme outil de déduction, et leur lien avec les propriétés numériques d'une fonction.

Certaines questions de ce test ne sont pas assez détaillées pour nous apprendre à quoi est dû l'échec de certains élèves : incompréhension d'un concept ou difficultés techniques de formalisation de calcul. Il en va ainsi de l'étude de l'ensemble de définition d'une fonction ou de son sens de variation : dans quelle mesure

- le concept,
- la mise en oeuvre d'une définition ou d'un théorème,
- la résolution d'équations ou d'inéquations,
- le calcul algébrique,
- le maniement des inégalités,

sont-ils source d'échec ?

(3) Les questions du test n° 3 se réfèrent essentiellement à la phrase suivante des programmes "Exemples d'autres études de variations se ramenant à celles-ci (changement d'échelle, utilisation de transformations algébriques et géométriques)" (III, b)). Le libellé "Exemples de" laisse le professeur très libre de l'importance qu'il entend donner à cette partie du programme : nombres d'exemples étudiés, et acquis demandés à ses élèves.
Aussi les résultats varient ici, très sensiblement d'une classe à l'autre et la signification des résultats globaux est plus contestable.

(4) De tels tests sont intéressants, avant tout, pour un professeur et sa classe. Lui seul connaît l'enseignement qui les a précédés et peut observer le cheminement et le travail de ses élèves. Améliorés par lui, de tels tests peuvent lui permettre de mieux connaître les difficultés et les acquis de ses élèves, et d'en tirer les conclusions.

(5) Un collègue pense que l'on aurait dû demander pour l'étude des variations des fonctions (Test n° 2 ; question 10 ; a) b) c)) de calculer le taux de variation. Un autre pense que l'étude du dernier exemple $x \longmapsto \frac{2}{3-x} + 1$ est trop difficile. A ceci nous nous permettons de répondre :

1) "L'étude systématique du taux de variation n'est pas au programme" (Note de service du 10.10.1984 ; B.O n° 38 du 25.10.84). Il apparaît souvent comme une recette ; son calcul et l'étude de son signe ne sont pas toujours simples à étudier (loin de là !).

2) L'emploi bien ordonné d'inégalités, joint à l'utilisation du cours concernant les fonctions du programme, permet de traiter "intelligemment" ce dernier exemple :

Que ce soit pour l'étude des variations de cette fonction $f : x \mapsto \frac{2}{3-x} + 1$, ou pour le calcul à l'aide d'une calculatrice des valeurs numériques prises par cette fonction, il s'agit de reconnaître l'algorithme qui permet de "passer de x à $f(x)$" :

$$x \xmapsto{\text{opposé}} -x \xmapsto{\text{ajouter } 3} -x+3 \xmapsto{\text{inverse}} \frac{1}{-x+3} \xrightarrow{\text{multiplier par } 2} \frac{2}{-x+3} \xmapsto{\text{ajouter } 1} f(x)$$

La connaissance du domaine de définition (ou le calcul de l'inverse, dans l'algorithme) oblige à distinguer deux intervalles. La "chaîne" des inégalités : $[x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$ découle alors des résultats du cours.

Nous ne nions pas les difficultés de cette méthode, mais elle a l'avantage de lier les aspects qualitatifs et numériques d'une fonction et de préparer les élèves à un aspect important de l'analyse. Nous n'ignorons pas que cette méthode "ne marche pas" toujours... Celà peut justifier alors le calcul des dérivées !

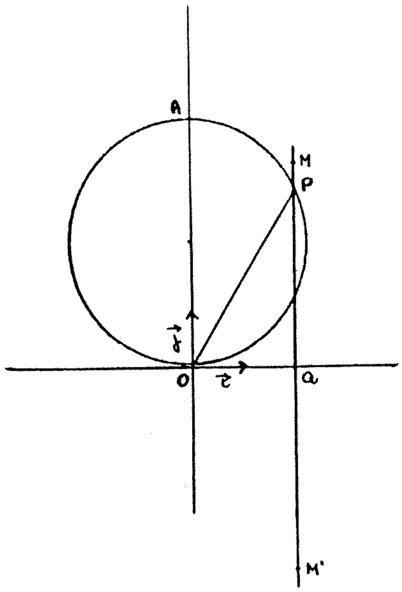
CONNAISSEZ-VOUS CETTE BROCHURE ?

Un florilège de constructions géométriques, quelques exercices de réflexion, des passages relatifs à l'Histoire des Mathématiques dans

"ACTIVITES GEOMETRIQUES de la Sixième à la Terminale"

Actuellement épuisée, cette brochure dont suivent quelques extraits, sera prochainement rééditée.

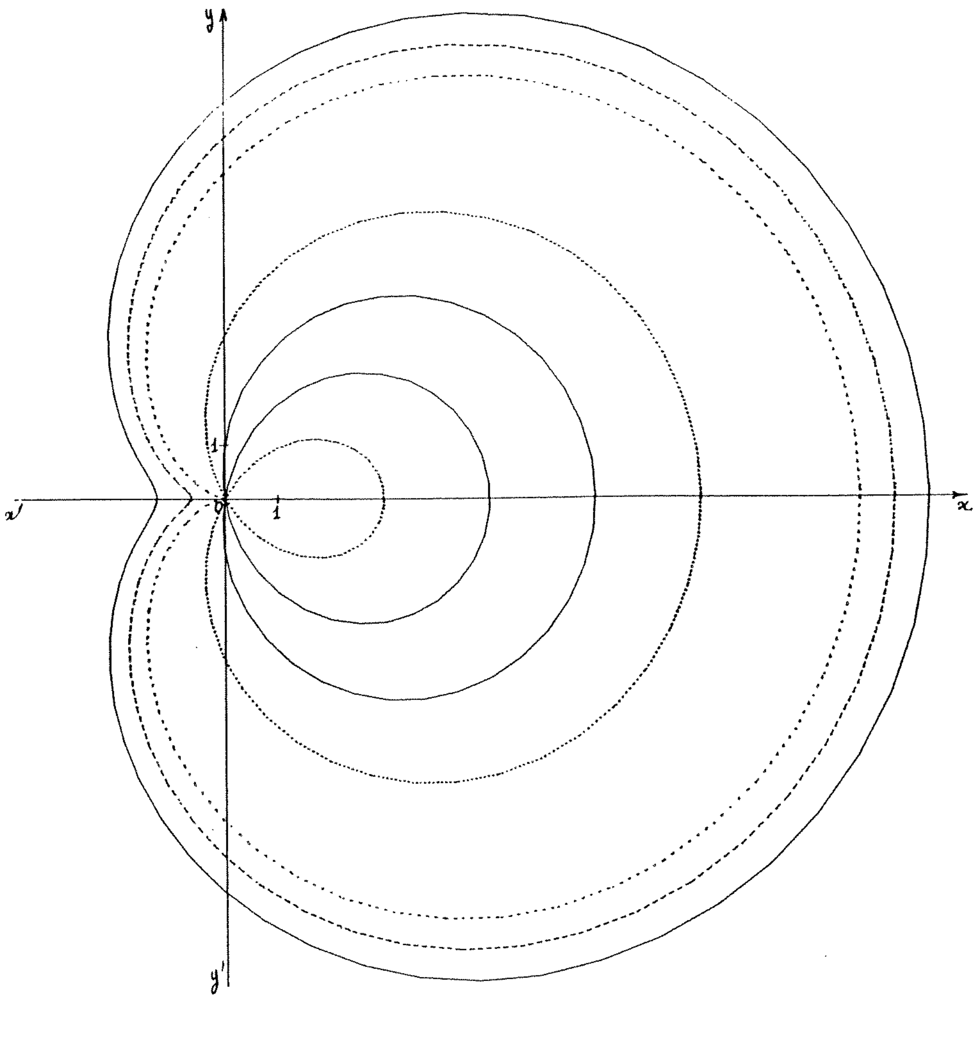
HUIT



Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on fixe un point A sur l'axe des ordonnées. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OA]. Une droite passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en P que l'on projette orthogonalement en Q sur l'axe des abscisses. Sur la droite (QP) on place les points M et M' tels que OP = QM = QM'.

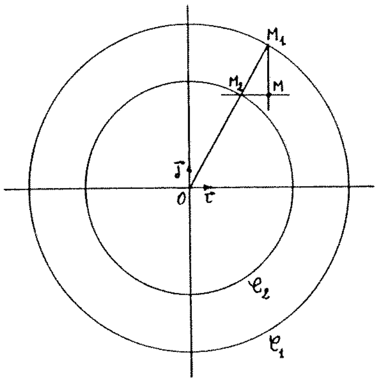
Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, M et M' décrivent un huit ou lemniscate de GERONO.

Cette courbe admet pour équation cartésienne $y^4 = a^2(y^2 - x^2)$



Quelques limaçons de PASCAL
La cardioïde figure parmi ces courbes.

10 Construction d'une ellipse à l'aide de deux cercles :



Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon r = 8 cm.
Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon r' = 5 cm.
Une demi-droite d'origine O coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en M_1 et le cercle $\mathcal{C}_2$ en M_2. L'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_2 et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M_1 est le point M.

Reprendre la construction précédente pour un certain nombre de demi-droites d'origine O. Tous les points M sont situés sur une ellipse.

Au XVIIIe siècle, la noblesse éclairée faisait souvent appel à des savants et des artistes pour meubler des loisirs d'une façon studieuse. Voici un passage de la correspondance d'Euler (1707 - 1783) à une princesse l'Allemagne.

La différence entre les méridiens de Berlin et de Magdebourg est d'1 degré 14 min. dont Berlin est plus oriental que Magdebourg: cette différence réduite en tems, donne 6 minutes 40 secondes, que les horloges de Berlin doivent marquer plus que celles de Magdebourg. Par conséquent s'il est midi à Magdebourg, ou si les horloges, que je suppose être bien réglées, y marquent XII heures, les horloges de Berlin doivent marquer au même instant 12 heures 6 min. 40 sec. de sorte qu'il y fasse déjà après midi.

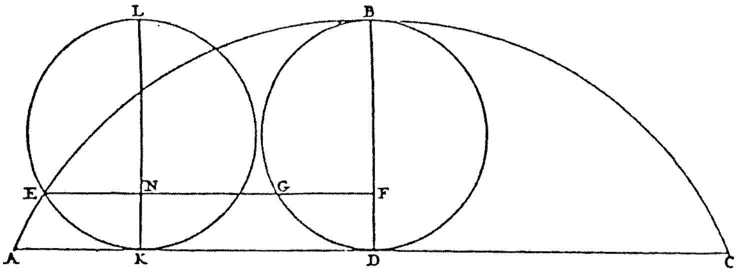
V.A. voit de là qu'à mesure que les lieux different en longitude, ou qu'ils sont situés sous des méridiens différens, les horloges bien réglées y doivent aussi marquer des heures différentes au même instant, et que cette différence doit être d'une heure entiere, lorsque la différence en longitude est de 15 degrés: chaques 15 degrés en longitude produisant une heure de tems pour la différence que des horloges bien réglées doivent marquer dans ces différens endroits au même moment.

Si l'on vouloit donc se servir d'une horloge pour trouver la longitude des endroits par lesquels on passe, il faut d'abord la bien régler en quelque endroit qu'on se trouve: ce Réglement se fait sur l'observation du midi, qui est le moment, où le Soleil passe par le méridien de ce lieu, et alors l'horloge doit montrer précisement XII heures.

PROPOSITION XIV.

Soit ABC *une cycloïde* [Fig. 35], AC *sa base*, BD *son axe. Je pense qu'on voit avec évidence comment cette ligne est engendrée suivant ce qui a été exposé plus haut sur sa définition et sa description mécanique*[1]). *Soit de plus* BGD *un cercle symétrique par rapport à l'axe* BD. *Traçons* EF *parallèlement à la base* AC *par un point* E *arbitrairement choisi sur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe* BD *en* F *et la circonférence* BGD *en* G. *Je dis que la droite* GE *est égale à l'arc* GB[2]).

[Fig. 35.]

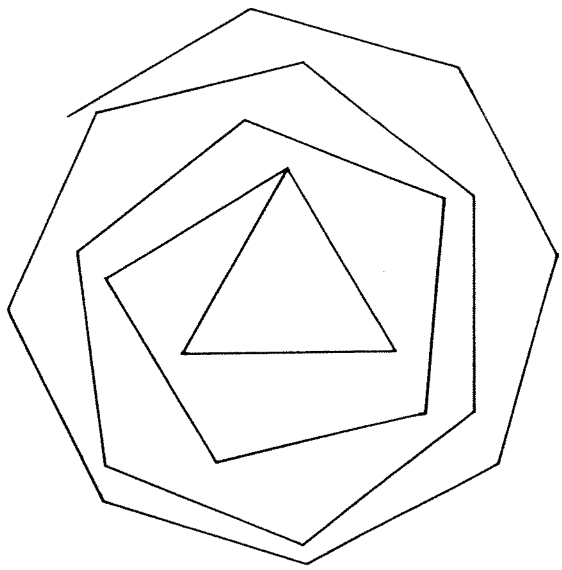


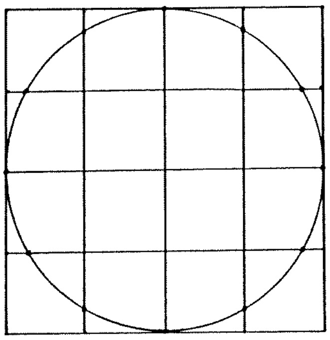
En effet, soit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la base de la cycloïde en K. Menons aussi le diamètre KL. La droite AK est donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD est égale à la demi-circonférence KEL; par conséquent KD est égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF est égale à EG, puisque EN = GF et que la partie NG leur est commune. Il est donc prouvé qu'on a aussi : GE = arc GB.

Christian HUYGENS (1629 - 1695) né à La Haye est célèbre par son ouvrage Horologium oscillatorium publié à Paris en 1673. Cet ouvrage présente ses découvertes sur le pendule qui s'étale sur une vingtaine d'années.
Il veut adapter le pendule au réglage des horloges ce qui l'amène à innover en horlogerie et indirectement en mathématiques.

Dessin inspiré de tableaux de Max BILL

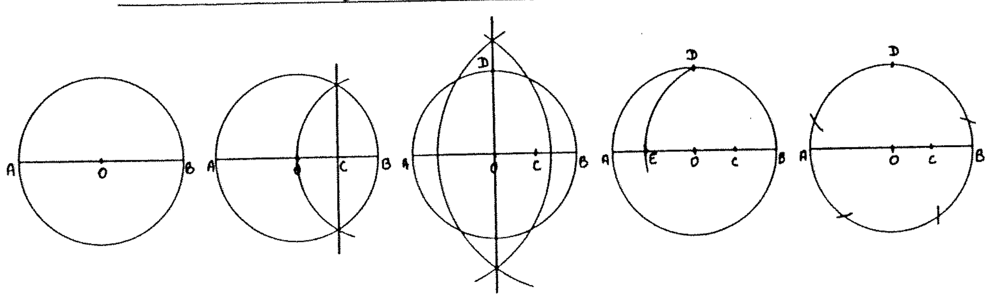
Reproduire ce dessin après avoir étudié les deux premiers paragraphes de ce chapitre.





Reproduire le dessin suivant .
Les points d'intersection du cercle et du quadrillage sont les sommets d'un dodécagone régulier.
Joindre ces points de 2 en 2, puis de 3 en 3 , de 4 en 4, de 5 en 5.
Quelles sont les figures obtenues ?

Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

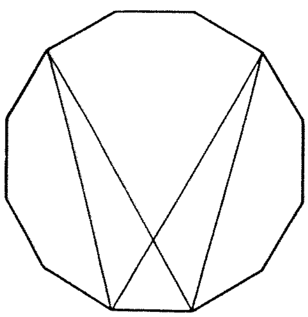


Puzzle

Here is an interesting puzzle. It is called a *dissection* puzzle and the problem is to cut a regular dodecagon up into pieces that can be rearranged to form a square. Some dissection puzzles were discovered by the Greeks, and in the 10th century a Persian mathematician wrote an entire book about them. Another book has been written recently by the world's current expert on dissection puzzles, a man who lives in Australia.*

Place a sheet of paper underneath the large dodecagon you constructed in Set I and poke a hole with the metal point of your compass at each of the 12 corners. Now join the 12 holes on your new sheet of paper to form another dodecagon and then draw in 4 more line segments like those shown in the figure at the top of this page to divide it into 6 parts. Notice that the resulting figure has line symmetry and that one of the 6 parts seems to be an equilateral triangle.

Cut the 6 pieces apart with scissors and try to rearrange them to form a square. If you can, make a sketch to show what the arrangement of the pieces looks like.



Le mathématicien a laissé nombre d'études qui nous sont parvenues telles : "De l'Equilibre des plans"... "Sur la Sphère et le Cylindre"... "L'Arénaire", où Archimède expose un système de numération des grands nombres (calcul des grains de sable pouvant être enfermés dans la Sphère du Monde ; mais calculs limités à un ensemble fini), le "Traité de la méthode" (texte retrouvé en 1906 où Archimède communique à Eratosthène comment il conduit ses recherches ; ce palimpseste découvert parmi les manuscrits du Patriarcat grec de Jérusalem, reconnu puis traduit par Heiberg comme fragment de l'œuvre d'Archimède, contient la majeure partie du texte grec sur ce Traité de la méthode), "Des corps flottants" où apparaît le très célèbre "Principe d'Archimède" et qui peut toujours être considéré comme le manuel de base de tout ingénieur naval, et essentiellement pour ce qui nous intéresse "La mesure du cercle" (voir suite) où Archimède exhibe l'encadrement célèbre $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$.

L'ingénieur en chef de Syracuse sut en effet merveilleusement défendre sa ville assaillie par les Romains (2ème guerre punique). Divers historiens : Polybe (IIe siècle avant J.-C.), Tite-Live (Ier siècle avant J.-C.) ou Plutarque (Ier siècle après J.-C.), nous rapportent (voir Ver Eecke qui nous fournit des extraits significatifs de ces auteurs) avec une grande précision les inventions toujours renouvelées d'Archimède : balistes ou catapultes permettant aux Syracusains de "bombarder" la flotte ennemie depuis le haut des murailles, mains de fer attachées à une chaîne et qui jetées sur les navires ennemis les saisissent alors par la proue, les élèvent à la verticale en utilisant un levier et un énorme contrepoids pour les laisser brutalement retomber,...

XLI

Puisqu'il ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour savoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous en une extrêmement simple, qu'on peut former en tirant des quatre angles A, B, C, H (Fig. 58), d'une des faces d'un cube ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube ; c'est-à-dire, le point également distant de A, D, B, E etc. On voit, sans peine, que la pyramide est la sixième partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles, en prenant chaque face pour base. Or, la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en six parties égales, ou ce

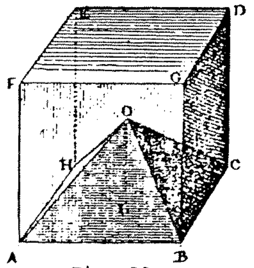


Fig. 58

qui revient au même, il faudra multiplier la sixième partie de la hauteur AF par la base ABCH ; et comme la sixième partie de la hauteur AF est le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'ensuit que la mesure de la pyramide OABCH est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

π SUR PIERRE TOMBALE

Les travaux d'Archimède auraient légitimé que π soit appelé le nombre d'Archimède. Il n'en est rien. Mais π sera appelé nombre de Ludolf. Citons Minois [MIN].

"En 1596, Ludolf van KEULEN (= Louis de Cologne) calcule 20 chiffres décimaux. Sa renommée est tellement grande qu'en Europe Centrale, π est appelé le nombre de Ludolf et la découverte est tellement admirée qu'une copie de ce π l'accompagne sur son tombeau, à Leyde :

HIC IACET SEPULTUS MR. LUDOLFF VAN CEULEN, PROFESSOR BELGICUS, DUM VIVERET MATHEMATICARUM SCIENTIARUM IN ATHENAEO HUIUS URBIS, NATUS HILDESHILMIA ANNO 1540, DIE XXVIII IANUARII, ET DENATUS XXXI DECEMBRIS, 1610, QUI IN VITA SUA MULTO LABORE CIRCUMFERENTIAE CIRCULI PROXIMAM RATIONEM AD DIAMETRUM INVENIT SEQUENTEM. QUANDO DIAMETER EST 1, TUM CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS EST QUAM

314159265358979323846264338327950288
1000000000000000000000000000000000000

ET MINUS QUAM
314159265358979323846264338327950289
1000000000000000000000000000000000000;

SED QUANDO DIAMETER EST
1000000000000000000000000000000000000,

TUM EST CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS QUAM
314159265358979323846264338327950288

& MINUS QUAM
314159265358979323846264338327950289."

Alexis Claude CLAIRAUT participe à l'expédition en Laponie consacrée à la mesure de la longueur d'un degré de méridien. A son retour il brille dans les salons littéraires et scientifiques. Sa réputation lui vaut de donner des leçons de mathématiques à la Marquise du Chatelet pour qui il rédige les Eléments de Géométrie (1741).

Voici enfin, à $\boxed{\text{titre de curiosité,}}$ comment ÉDOUARD LAGOUT, dans ses leçons de « tachymétrie » (1876), arrive à déterminer le volume de la sphère : son procédé est inspiré de celui de BHASKARA. « Une graine de platane est formée d'une grande quantité de pyramides hérissées autour du noyau central. De la réalité à la science, on doit supposer ce noyau très petit, se réduisant à un point invisible dans lequel se joindraient tous les sommets des pyramides.

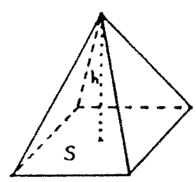
L'enveloppe de la sphère, étant égale à 4 cercles faits sur le rayon, sera uniformisée par un plateau formé de 4 planches jointives égales chacune à l'aire d'un cercle. Il ne restera plus qu'à uniformiser toutes les pyramides en hérisson, et pour cela je les implante sur le plateau. Elles seront jointes par les bases et ne laisseront aucun vide.

Ainsi implantées, elles présentent l'aspect d'une mâchoire de crocodile sur laquelle il faut hardiment mettre la main (de l'esprit) pour les aplatir uniformément au *tiers de la hauteur*. Alors la mâchoire, c'est-à-dire la sphère, est changée en un plateau, et ce plateau a pour hauteur le tiers du rayon. On aura donc par les opérations de l'*Algèbre tachymétrique* :

$$\text{Sphère, volume}\begin{cases} = \text{plateau} \times 1/3 \text{ du rayon} \\ = 4 \text{ aires de cercle} \times 1/3 \text{ rayon} \\ = 1/3 \times (4 \text{ aires de cercle} \times \text{rayon}) \end{cases}$$

N'oubliez pas les 4 planches faisant chacune l'aire du cercle ; la mâchoire de crocodile vous fera souvenir des pointes que l'on uniformise en les aplatissant au tiers. »

Pyramide de base S, de hauteur h, de volume V



Parallélépipède de base S, de hauteur $\frac{R}{3}$, de même volume V.