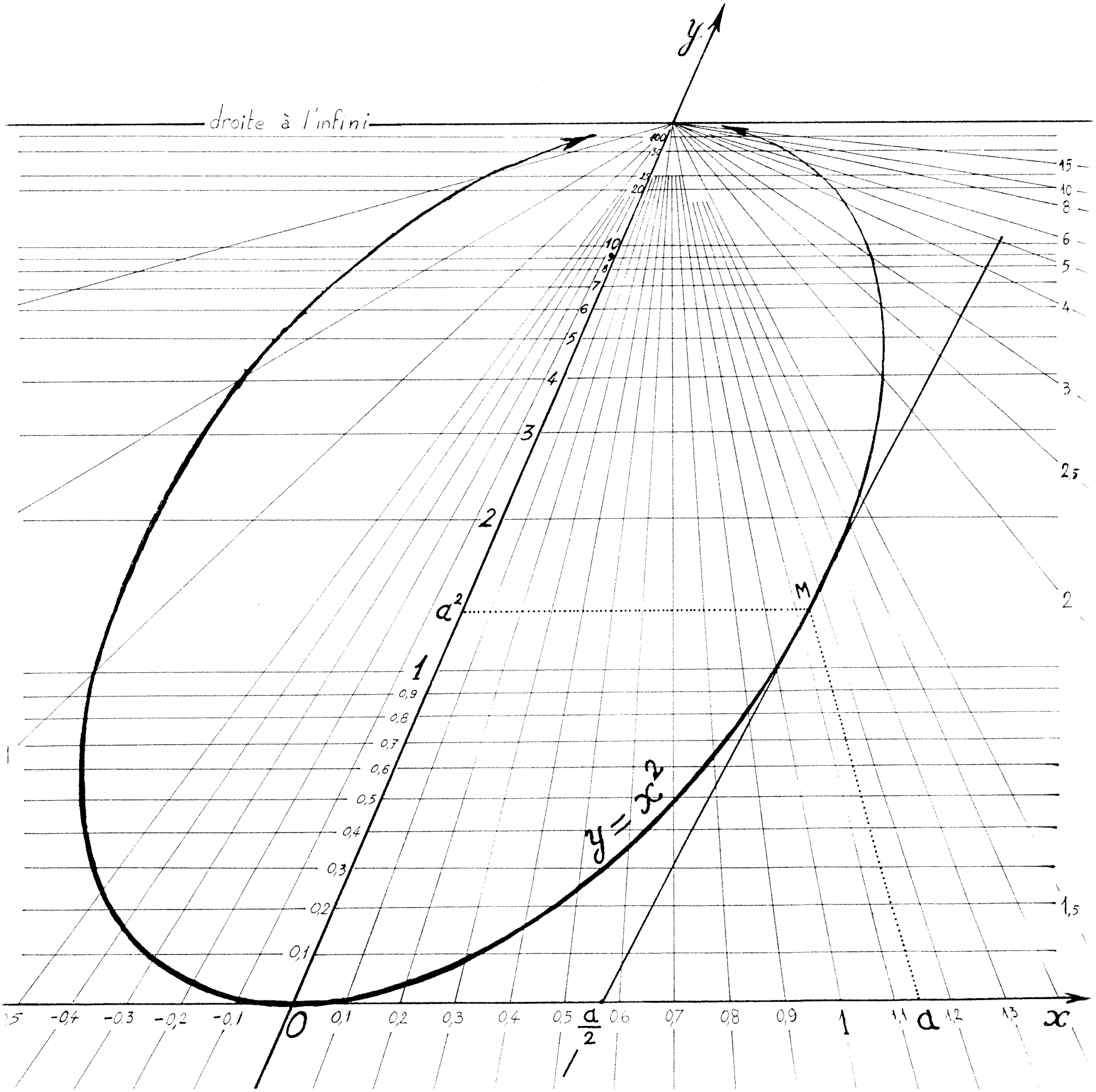
L'OUVERT

N° 40 SEPTEMBRE 1985 JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG



NOTRE COUVERTURE :

LA PARABOLE EST TANGENTE A LA DROITE A L'INFINI

Le dessin de couverture représente la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé, le tout vu en perspective (avec point de fuite). On voit bien que la parabole est tangente à la droite à l'infini. On peut aussi voir (mais c'est peut-être moins intéressant) une ellipse et les théorêmes de Dandelin, Desargues et autres sur les coniques.

EDITORIAL

Le professeur qui m'initia aux merveilles de la géométrie projective avait coutume de dessiner au tableau une ellipse en toutes circonstances, qu'il s'agît de parabole, d'hyperbole, voire même d'hyperquadrique. Bien sûr, dans le plan projectif complexe, une même équation caractérise toutes les coniques propres, pourvu que le repère soit à chaque fois adapté. Mais celà n'empêche pas d'être agréablement surpris en voyant qu'une parabole est vraiment une ellipse : question de poit de vue, et merci à J. Lefort de l'avoir pris.

Cette édition de l'Ouvert ne fait pas la part belle aux mathématiques pures et dures, ce qui ne saurait convenir qu'à titre d'exception. Pire, une lecture superficielle de l'article intitulé "Les mathématiques, école de la rigueur ?" , pourrait faire croire à une attaque en règle. Il serait très regrettable d'en rester à cette impression. Ne serait-ce qu'en raison de cette plainte si fréquemment entendue : "Les élèves ne savent plus raisonner".

Le point de vue historique, de la mathématique arabe aux reportages dans les classes du XIX^{ème}, pinceau à la main, est par contre à l'honneur. L'Ouvert n'a pas attendu que le Collège de France (*) conseille son introduction dans l'enseignement des Sciences, pour le développer. Mais un avis aussi autorisé ne peut que nous conforter.

Au fait, bonne rentrée !

E.Chaney

(*) dans sa récente note sur le système éducatif français, remise au Président de la République, et dont on ne peut que conseiller la lecture.

SOMMAIRE

L'OUVERT

ISSN 0290-0068

. Responsable de publication : J. Lefort

. Rédaction : G. Glaeser et E. Chaney

. Correspondance à adresser à :
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

. Participation aux frais pour 4 parutions annuelles : 80.- F (+ port si pas en Alsace)

. Disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.

LES MATHEMATIQUES, ECOLE DE LA RIGUEUR ?

Francis COUTURE (*)

Les mathématiques sont périodiquement l'objet de controverses dont l'enjeu est tantôt la place qu'elles doivent prendre ou plutôt conserver par rapport aux autres disciplines d'enseignement, tantôt la pédagogie elle-même quand la place est solidement assurée.

Aux heures favorables à leur hégémonie, les mathématiques sont l'avenir, on n'en fait jamais assez ; le débat, le problème, est de savoir comment les faire : ce sont les grandes heures de la pédagogie ; aux heures sombres, disons aux heures les moins claires car la raison ou la lumière restent ce qu'elles sont, même voilées, on fait trop de mathématiques ; il faut faire un peu de place aux pauvres, à la technologie en particulier, autrefois subordonnée, aujourd'hui maîtresse par la grâce de notre ministre qui semble avoir compris que cette pauvresse-là est destinée à nous enrichir pourvu qu'on encourage un peu la dialectique maître-esclave (ce qui est un aspect du socialisme).

Il ne faut en conclure aucune déchéance véritable de l'ancien seigneur : même dans cette optique utilitariste qui appelle les mathématiques à servir avec plus d'application, si je puis dire, "les besoins économiques" de la nation (ainsi peut-on entendre la notion de mathématiques appliquées), **les mathématiques sont et restent par excellence l'école de la raison et de la rigueur.**

De cela, personne ou presque ne doute ; la controverse semble inexistante sur ce point : si sporadiquement les sciences et la technologie d'une part, les lettres et les arts d'autre part, demandent une meilleure part, en aucun cas ils n'osent revendiquer leur part de la raison pure ou de la rigueur ; c'est au nom de la complémentarité qu'est présentée la requête : pour les Lettres,

(*) F. Couture est professeur de Philosophie de l'éducation à l'Ecole Normale de Strasbourg. Il enseigne également au Département d'Informatique de l'I.U.T. Strasbourg III.

l'esprit de géométrie aurait tendance à négliger sa compagne, l'esprit de finesse (*) ; et pour la technologie, la géométrie oublierait tout simplement ses origines, l'arpentage. En ces temps de rigueur économique, on demande à la rigueur intellectuelle de bien vouloir coopérer ; en aucun cas on ne conteste son lieu d'élection, les mathématiques.

Les excellentes intentions de M. Chevènement de développer "l'esprit critique", "la pensée logique", "le sens de la rigueur" (**) chez les élèves (et pourquoi pas également chez les maîtres et un tout petit peu chez les ministres ?) ne s'accompagnent d'aucune analyse des notions en jeu, d'aucun appel à débattre de ce que signifient le raisonnement et la pensée critique qu'il tient si fort à promouvoir.

Dans le discours pédagogique comme dans le discours politique, on entretient à loisir la plus grande confusion entre mathématiques, pensée logique, raisonnement, rigueur, et pensée ou esprit critique, comme si les termes s'identifiaient de proche en proche, occultant par contiguïté les "petites différences".

Si l'on juxtapose les extrémités de la chaine, personne n'osera identifier l'esprit critique aux mathématiques, et pourtant tout se passe comme si la notion de raisonnement réalisait le moyen terme idéalement symbolisé par le pôle "mathématiques".

PLUS ON "FAIT DE MATHS", MOINS ON RAISONNE

On ne peut pas dire que l'exercice scolaire des mathématiques soit sans danger pour l'éducation du raisonnement ; pour beaucoup d'élèves, "faire des maths"(***) équivaut à déraisonner : plus ils en font, moins ils raisonnent. Je ne vois pas l'intérêt de demander avec insistance aux mathématiques de se mettre au service des technologies quand elles sont déjà le plus souvent enseignées comme une technologie au service des technologies. Dans ce sens, il n'y a pire école du raisonnement que celle des mathématituqes et l'on aurait beaucoup à prendre et à apprendre des anciennes classes de rhétorique.

(*) cf Pascal "L'esprit de géométrie et l'esprit de finesse", Pensées.

(**) cf "Le Monde" du 7/12/84 et du 30/1/85.

(***) "faire des maths" est pris ici au sens scolaire.

Il est utile de rappeler, non pas bien sûr aux théoriciens de la logique ou de l'argumentation, mais aux pédagogues et aux politiques qui ont en charge l'éducation de la pensée, que le raisonnement, dans son acception la plus générale, ne se limite pas aux procédures logico-déductives (ce qui rendrait d'ailleurs pléonastique l'expression "raisonnement logique"), mais qu'il désigne toute démarche discursive permettant d'enchaîner les idées : l'induction (sous ses formes non réductibles à la déduction analytique) et l'analogie sont deux formes particulièrement courantes de raisonnement, même si elles n'ont pas la validité formelle de la déduction, seule "rigueur" reconnue. On peut aussi rappeler aux pédagogues que les mathématiques ne sont pas LA logique, qu'elles-mêmes sont une mise en oeuvre, privilégiée il est vrai, de certaines procédures logiques.

C'est d'ailleurs cette notion de démarche rationnelle (ou raisonnement en général), plus large que celle de raisonnement hypothético-déductif, qui autorise à parler du raisonnement du physicien, de l'historien, du mathématicien et, au sein même des mathématiques, à parler du raisonnement du géomètre, de l'analyste, etc...

Alors je pose la question : n'y aurait-il d'autre rigueur, dans tous ces raisonnements, que celle du calcul ? Toutes ces disciplines ne tiendraient-elles leur rigueur que de la rigueur mathématique qu'il conviendrait de leur "appliquer" ? Les esprits les plus ouverts au développement des lettres et des sciences conçoivent constamment cette ouverture comme relevant de l'imagination ou de l'intuition (*) ; les mathématiciens-chercheurs (ou simplement intelligents) eux-mêmes revendiquent cette complémentarité irrationnelle, sorte de "complément d'âme" conférant à leur discipline une dimension artistique ou esthétique.

Si la notion de rigueur qualifie très légitimement la procédure hypothético-déductive (ou démonstrative), dite aussi formelle dans la mesure où sa validité est indépendante du sens des objets sur lesquels elle porte, elle peut tout aussi légitimement prétendre à qualifier l'exigence qui s'attache au sens de ces objets. A ce niveau interviennent les notions en jeu appartenant à la

---

(*) "Pour le professeur de philosophie, l'esprit scientifique n'est pas seulement rigueur, objectivité, logique, mais implique aussi curiosité, imagination, inquiétude, généralement considérées par les pédagogues comme caractéristiques de l'"esprit littéraire". *"Il faudrait que l'on cesse d'opposer dans l'école ces deux types d'aptitudes"* remarque Mme Rollin. Certes, les enseignants doivent transmettre l'esprit de **rigueur** à tous les élèves, mais ils doivent amener ceux-ci à appliquer, dans les autres disciplines, **les relations logiques apprises en cours de maths.** *"Opérer ce transfert est la condition-clé de la réussite des études"."*

Elisabeth GORDON. LE MONDE. 9 avril 1985.

sémantique du domaine considéré, sortes d'objets ou de matériaux de base qui seront traités selon les figures rationnelles du niveau logique (déduction mais aussi induction et analogie comme je l'ai dit plus haut) : le point, la droite par exemple sont de tels objets non sémantiquement neutres, sauf à leur conférer éventuellement cette neutralité par convention dans une axiomatique formalisée (géométrie axiomatisée).

"PRENEZ SOIN DU SENS, ET LES SONS PRENDRONT SOIN D'EUX-MÊMES"

C'est sur la nature de ces objets ou notions que je voudrais insister : c'est là précisément que réside le danger de l'exercice scolaire (et universitaire dans une large mesure) des mathématiques pour le raisonnement en général, c'est-à-dire pour le raisonnement s'exerçant dans d'autres domaines que celui des mathématiques : je pense particulièrement à la vie courante, quotidienne, où, à partir de notions empiriques, nous faisons un usage constant du raisonnement.

Le domaine scientifique et plus spécialement celui des mathématiques, non seulement exige l'univocité des notions et leur stabilité sémantique (ou permanence) le long de la chaîne discursive, ce qui est parfaitement légitime en même temps qu'absolument nécessaire pour la validité de tout raisonnement ("scientifique" ou non) mais encore et surtout **habitue** l'esprit à cette univocité : sur le plan, si capital pour le raisonnement, de la réflexion sur le sens des notions utilisées, l'entraînement mathématique est particulièrement stérile, voire dangereux ; habituée à ne considérer dans les raisonnements que des objets monosémiques (univoques), la pensée est très tôt conditionnée à privilégier de façon quasi-exclusive l'aspect syntaxique formel au détriment de l'aspect sémantique. Dans le meilleur des cas, quand il y a ambiguïté sémantique, quand un même symbole désigne au moins deux réalités mathématiques différentes, l'attention est attirée sur le danger de la confusion et ce, préalablement à la "mise en route" du processus "logique". En aucun cas le raisonnement lui-même ne produit ses objets par différenciation des notions floues, sauf précisément dans la recherche ; on peut citer comme exemple d'un tel travail de production conceptuel la réflexion menée par Russell sur la notion d'ensemble, le raisonnement sur cette notion ayant conduit au célèbre "paradoxe des classes".

On peut d'ailleurs considérer le paradoxe en général comme le lieu privilégié du raisonnement réflexif, aussi bien dans le domaine de la pensée empirique quotidienne que dans le domaine scientifique ; il est par excellence le révélateur des ambiguïtés notionnelles.

Je donnerai ici un exemple de cette carence réflexive et rationnelle, tiré de ma pratique d'enseignant, essentiellement consacrée à l'éducation du raisonnement :

A la question : *"Comment entendez-vous cette opinion attribuée à Fouché, à propos de l'assassinat du duc d'Enghien :*

"c'est plus qu'un crime, c'est une faute",

plus des 2/3 des étudiants de 1ère et 2ème année en informatique à l'I.U.T. ont affirmé que la phrase ne signifiait rien, qu'elle était absurde parce que le crime appartenait à l'ensemble des fautes ; l'un d'entre eux a même déclaré que l'auteur de cette opinion ne savait pas raisonner ! Un seul a montré qu'il avait parfaitement compris le propos en le transposant au cas d'Eloi Machoro (indépendamment de la véracité des affirmations selon lesquelles Enghien ou Machoro auraient effectivement été assassinés). Très peu ont compris dans ce propos de Fouché que le crime se référait à l'ordre moral des particuliers et que la faute se référait à l'ordre politique, que l'ordre politique transcendait de fait et de droit l'ordre moral des particuliers, ce qui est d'ailleurs contestable : la peine de mort infligée par l'état n'est pas un crime (juridiquement parlant), encore qu'elle puisse être considérée comme tel au regard de la morale individuelle.

Je pourrais proposer un très grand nombre de raisonnements du même genre qui témoignent tous de l'application mécanique de modèles mathématiques inadéquats, avec en prime l'assurance chez leurs auteurs de raisonner avec "rigueur". Je n'ajouterai qu'un exemple pour la saveur et l'humour : Alfred Polgar, écrivain et journaliste autrichien, déclarait *: "A Salzbourg, il y a plus d'antisémites que d'habitants" !* J'ai obtenu, pour interpréter ce mot d'esprit le même type de raisonnements "logiquement corrects", renvoyant A. Polgar à ses études de mathématiques (ou l'invitant à les entreprendre).

Peut-être objectera-t-on que ce ne sont pas les meilleurs étudiants en mathématiques qui raisonnent ainsi ; 1/3 des étudiants environ ont interprété les énoncés de façon souple sinon de façon toujours pertinente. Je me propose d'ailleurs de faite une étude de corrélation entre les résultats en mathématiques des étudiants (tous de niveau Bac C) et leurs résultats dans ce genre d'exercice ; mais de toute façon, les "meilleurs" étudiants en mathématiques sont peut-être aussi ceux qui ne limitent pas leur raisonnement à l'application mécanique des procédures et des modèles. Dans tous les cas cela prouve la prégnance des modèles mathématiques et du formalisme mal assimilés chez l'étudiant moyen. Or les raisonnements de l'étudiant moyen m'intéressent et devraient intéresser les pédagogues et les politiques.

J'insiste sur le fait que les raisonnements incriminés plus haut ne le sont pas du point de vue de la validité formelle, compte tenu de l'interprétation des notions. Un raisonnement peut à la fois être non-contradictoire et idiot. Sous prétexte que la pertinence de l'interprétation est impossible à établir sur des critères mécaniques, l'interprétation elle-même est reléguée dans les eaux troubles du subjectif ; je pense au contraire qu'elle constitue un excellent objet d'étude (sinon un excellent objet scientifique) et qu'une certaine rigueur peut y être associée. La "rigueur de l'interprétation" ne me semble pas être une notion inconvenante, si différente soit-elle de la rigueur formaliste qui sévit dans l'enseignement, en France tout particulièrement (Descartes a été, à cet égard, une véritable catastrophe nationale).

Je répète que cet apprentissage forcené du formalisme me semble hautement préjudiciable à la formation du raisonnement et que, réduire l'exercice de la pensée aux procédures formelles, technicistes ou algorithmiques, c'est oublier un aspect tout aussi capital, tout aussi essentiel : le sens ; c'est confondre le raisonnement logique et la réflexion : c'est aussi se préparer à vivre dans une société d'experts spécialisés dans la fabrication de pensées séquentielles unidimensionnelles.

"Take care of the sense, and the sounds will take care of themselves" dit la Duchesse à Alice (*). Lewis Carroll, logicien du XIXème siècle pose ainsi le primat du signifié sur le signifiant.

LA SUBTILITÉ COMME RIGUEUR

Cette attention portée au sens, on pourrait l'appeler "subtilité" : la subtilité ne se confond ni avec l'intuition (créatrice, irrationnelle, etc...), ni surtout avec l'exigence mécanique et naïve qui prétend fixer le sens des mots ou notions au départ d'un raisonnement ou d'une discussion.

(*) "Prenez soin du sens, les sons prendront soin d'eux-mêmes". Lewis Carroll, Alice au Pays des Merveilles, chapitre IX.

Cette façon d'entendre l'attention au sens ramène une fois encore le raisonnement au raisonnement déductif ; elle ignore que le raisonnement, en tant que pensée et non en tant que simple calcul, est autant un travail de production du sens (d'élucidation, d'explicitation et de dévoilement du sens) qu'une mise en oeuvre syntaxique de significations préétablies.

Sans doute, s'entendre au départ sur le sens de certains mots, peut servir la communication rationnelle jusqu'à un certain point ; mais ce n'est pas là l'essentiel d'une démarche rationnelle : si l'on pouvait s'entendre ainsi, le débat pourrait sans inconvénient majeur s'arrêter à cette entente préalable.

On peut ainsi développer une conception de la subtilité comme rigueur intellectuelle. Les tenants de la rigueur déductive demanderont si la subtilité peut s'enseigner, auquel cas elle-même n'éviterait pas le piège des procédures mécaniques.

Je répondrai que la subtilité peut s'éduquer et que, en tant que rationnelle, elle n'est pas étrangère à une démarche méthodique, en rappelant que toute méthode n'est pas calcul ; cependant comme toute méthode, elle risque effectivement la dégradation. Dans le cadre de cet article, j'indique simplement la direction des recherches que j'entreprends sur cette question.

Si le problème pédagogique du raisonnement n'est pas "d'appliquer" les règles logiques apprises en cours de mathématiques et ce, dans la mesure où cette "application" reste nécessairement entachée des procédures et des conditionnements propres à l'activité mathématique, le problème pédagogique urgent est alors d'initier à la logique pour elle-même, en entendant par Logique non seulement l'étude du calcul, propositionnel ou fonctionnel, mais aussi et surtout l'étude des problèmes d'interprétation sémantique que la logique soulève. La "méthode" particulière que je propose est une approche de ces problèmes d'interprétation par le paradoxe et le non-sens.

Paradoxe et non-sens me semblent être par excellence, les vecteurs de cette subtilité rationnelle que je tiens pour une forme authentique de la rigueur intellectuelle.

N.B. : Cet article vise essentiellement le mythe de la "bonne formation mathématique" en tant que légataire exclusif des biens rationnels ; il ne met en cause ni l'intérêt d'une formation en mathématiques, ni la nécessité d'une formation logique formaliste à laquelle l'étude des mathématiques contribue effectivement.

J'ai par ailleurs conscience d'avoir avancé plusieurs affirmations de façon un peu elliptique ; je suis disposé à apporter des compléments d'analyse sur certains points du texte si le voeu en est exprimé.

Je souhaiterais enfin que s'instaure un débat sur les questions soulevées par cet article et sur la nécessité notamment de développer en France un enseignement spécifique de la logique et d'argumentation.

COURRIER

CINQ FACES, PAS SEPT (SUITE)

M. FRIEDELMEYER, du Lycée Couffignal de Strasbourg, nous a fait parvenir une bien élégante solution du problème posé dans l'Ouvert n° 37, grâce à la géométrie descriptive, sans le moindre calcul. Il ajoute :

> *"La géométrie descriptive a pratiquement disparu dans l'enseignement secondaire aussi bien que supérieur, mises à part les classes de TE et Maths Sup Technologiques. On peut le regretter car elle permet souvent de traiter de façon simple et élégante les problèmes de géométrie dans l'espace. Le problème publié sous le titre "Cinq faces ! pas sept..." dans le n° 38, en donne, je crois, une illustration exemplaire."*

Nous le rermercions bien vivement de sa collaboration.

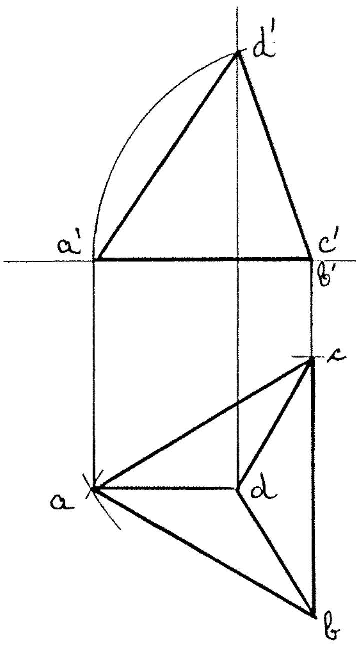


Fig. 1

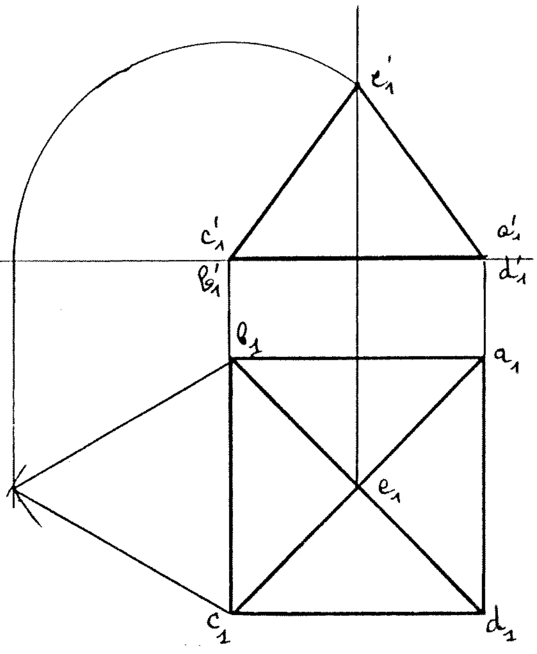


Fig. 2

Si le tétraèdre ABCD repose par sa face ABC sur le plan horizontal, sa projection horizontale est immédiate ; en projection frontale, son sommet D est obtenu en relevant le triangle ABC par une rotation d'axe de bout (BC), l'amenant sur BCD (Fig. 1).

Même type de construction pour l'épure de la pyramide à base carrée $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ (Fig. 2).

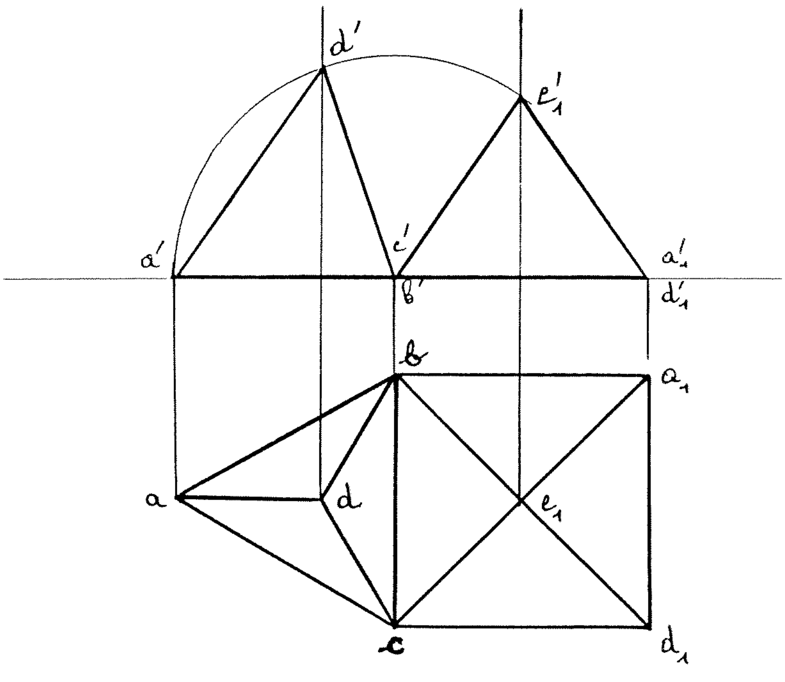


Fig. 3

Plaçons ces deux pyramides côte à côte, en faisant coïncider les arêtes BC et $B_1 C_1$ et remarquons que l'arête AD est frontale et donc se projette en vraie grandeur selon a'd', longueur commune à toutes les arêtes des deux pyramides, en particulier CD (Fig. 3). Les triangles a'b'd' et $a'_1 b'_1 e'_1$ sont isométriques.

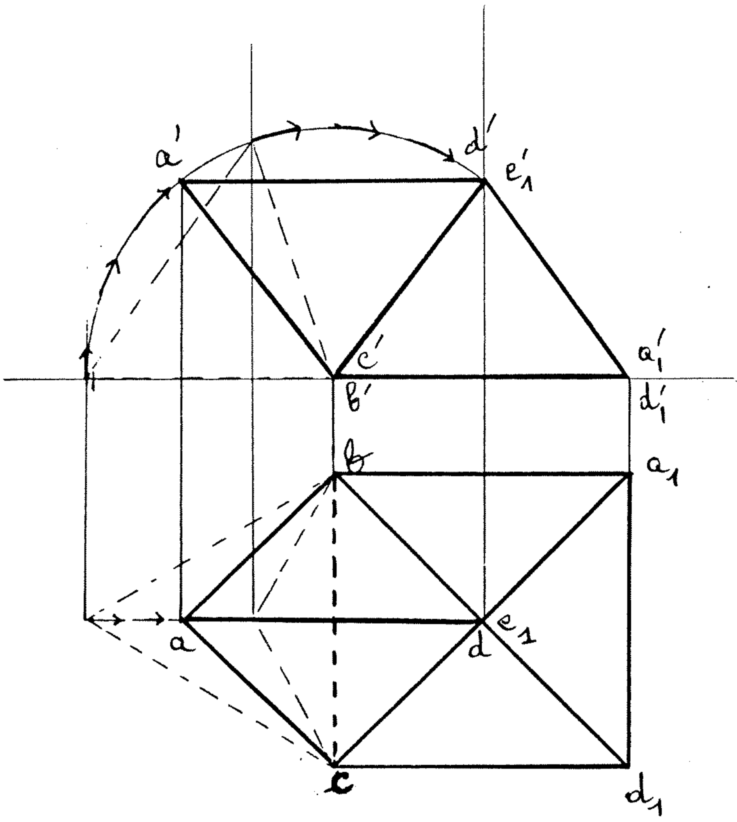


Fig. 4

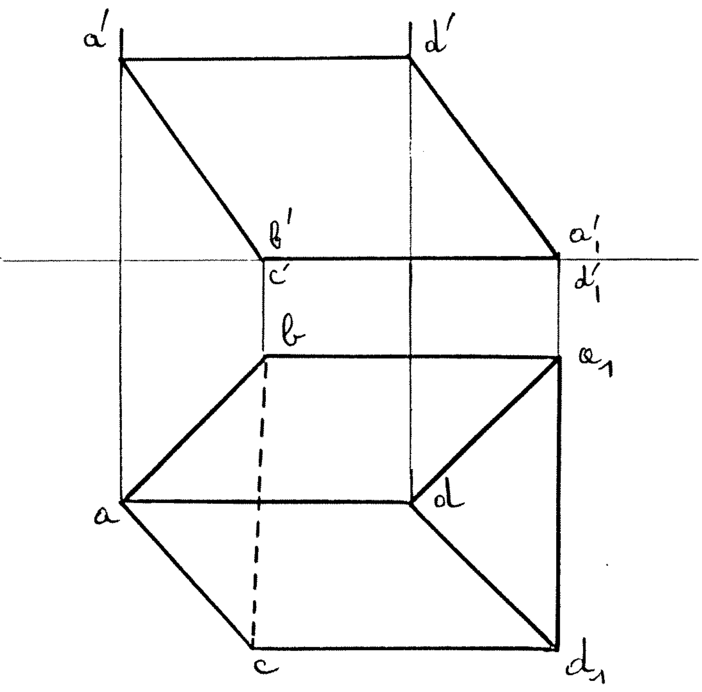


Fig. 5

Faisons maintenant tourner le tétraèdre autour de l'axe de bout (BC), jusqu'à faire coïncider les faces BCD et BCE_1 . Dans cette rotation l'arête AD reste frontale et devient donc parallèle à CD_1 , et bien sûr, de même longueur. Il est donc immédiat que les faces ACD et CDD_1 sont alors dans un même plan, le plan du parallélogramme ACD_1D ; de même pour les faces ABD et A_1BE_1 dans le plan du parallélogramme ABA_1D (fig. 4). Les deux solides ainsi accolés définissent finalement le prisme $ABCA_1DD_1$ (fig. 5).

AVIS DE RECHERCHE

Dans le cadre des recherches sur l'enseignement des mathématiques au Lycée, un chercheur en didactique des mathématiques souhaite pouvoir fouiller dans quelques vieilles copies d'interrogations **corrigées.**

Il s'agirait de copies de mathématiques de la seconde à la terminale, des années 1950 ou même avant, le plus important étant que les corrections datent de cette époque.

Elles peuvent être photocopiées ; nous vous les renverrons si vous le désirez, l'anonymat sera respecté si vous le mentionnez.

A titre d'exemples, voici quelques suggestions pour vos recherches :

- archives d'école,
- boîte à souvenir,
- vieux cahiers de parents...

Veuillez les faire parvenir à :

Monsieur RAMIREZ
I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

Merci !

AUX SOURCES D'UNE HISTOIRE DE LA REALITE SCOLAIRE

Georges GLAESER

Nombreux sont les ouvrages consacrés à l'histoire de l'éducation. La plupart sont intarissables sur les institutions, les décrets, les débats politiques à propos de la scolarisation, les projets ambitieux (même s'ils n'ont jamais été mis en pratique), l'architecture des bâtiments, etc...

L'acte éducatif lui-même est à peine évoqué... L'historien pénètre rarement dans la salle de classe pour observer ce que les élèves y font.

L'heure est venue d'élaborer une histoire de l'Enseignement mathématique centrée sur l'ENSEIGNEMENT.

Faute de mieux, une abondante source d'informations a été exploitée : les vieux manuels. Encore faut-il s'assurer que ces livres ont été effectivement utilisés ! Comment ? Par qui ?

Il est indispensable de connaître l'âge des élèves impliqués. On a trop tendance à considérer que tout ouvrage qui expose des mathématiques bien connues à l'époque est un manuel, même s'il était destiné à des adultes ou à des savants de haut niveau.

Un effort intéressant pour jeter un pont entre le livre, et son utilisation en classe a été tenté par André Harlé dans sa thèse de 3° cycle, intitulée : *"L'Arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXe siècle"* (Paris VII - 1984). L'auteur consacre quelques pages à confronter des *"carnets de devoirs"* avec les manuels d'où les énoncés des problèmes sont tirés. On recueille ainsi quelques indications fragmentaires sur le fonctionnement effectif d'un manuel face à un élève.

LES ECRIVAINS MIS À CONTRIBUTION

Depuis dix ans, j'essaye d'explorer systématiquement des sources littéraires : romans, mémoires, où les auteurs témoignent de de qu'ils ont retenus de leurs études mathématiques.

Parfois ils se bornent à exprimer leur enthousiasme (Ernest Renan, Lautréamont), leur dégoût, ou leurs regrets (Victor Hugo). Mais il arrive qu'ils donnent une description précise de quelques actions pédagogiques qu'ils ont connues dans leur enfance. Les documents les plus explicites dans ce sens sont l'autobiographie de Stendhal ("La Vie de Henry Brulard"), une nouvelle d'Erckmann-Chatrian ("Histoire d'un sous-maître"), "L'Histoire de ma Jeunesse" de François Arago, "Les Mémoires d'Outre-Tombe" de Chateaubriand (eh oui !), l'autobiographie de Jérôme Cardan.

Deux remarques à ce propos :

1. Je suis frappé du nombre d'écrivains classiques qui déclarent avoir pris grand plaisir à ces études... ce que mes professeurs de lettres m'avaient soigneusement caché. Et même, ceux qui déclarent avoir mal profité de cet enseignement, nous fournissent parfois des renseignements sur les pédagogies mises en oeuvre (par exemple Marcel Pagnol, Jules Vallès, Saint-Augustin).

2. J'ai eu beaucoup plus de difficultés à obtenir des informations sur l'école, tirées des littératures étrangères. Quelques indications concernent Goldoni, de Amicis, Thomas Carlyle (que je ne m'attendais pas voir aussi apparaître comme traducteur de la "géométrie" de Legendre !) Heinrich von Kleist, Goethe, Schopenhauer, Jung, Tolstoï... Ces sources d'informations sont encore insuffisamment dépouillées.

"PEUT-ÊTRE VOUS TOMBEREZ JUSTE..."

A titre d'exemple, je signalerai la dernière trouvaille qui vient de m'être communiquée : P. Jakez Hélias, dans "Le Cheval d'Orgueil" juge l'enseignement primaire, en Bretagne (pays bigouden) :

> "(...) Le français après tout, n'est pas si difficile. Nous en viendrons bien à bout. Mais il y a autre chose, Il y a le damné calcul, depuis les quatre opérations jusqu'aux problèmes de robinets en passant par les surfaces et les volumes. Et là encore, le français ne fait jamais ses comptes comme le breton.

Allez donc vous y retrouver. Cela commence par la grosse ficelle tendue à travers la classe devant le bureau et dans laquelle sont enfilées des bobines vidées de leur fil, celles des dizaines étant peintes en rouge. Avec le bout d'une longue tige de roseau qu'elle leur applique sur la gorge, la maîtresse les sépare les unes des autres et nous devons les compter à haute voix, une par une ou par paquets. Ceux qui se trompent ou qui restent bouche bée se font rappeler à l'ordre par le bout du bâton qui leur descend impérativement sur la tête. Cela continue par les bûchettes, ces doigts de brindilles dont nous avons une bonne réserve dans la case de notre table, des paquets de dix noués d'un fil de laine. Très importantes pour nous, les bûchettes. Il y en a qui sont tordues, qui se rangent mal les unes à côté des autres, pas étonnant qu'elles fassent des erreurs. D'autres sont droites et lisses, recouvertes d'une écorce polie. Elles sont plus faciles à manipuler. Avec elles, les comptes vont plus vite, on ne se trompe quasiment jamais. Aussi les élèves auxquels le calcul de réussit pas (j'en suis) cherchent-ils à les avoir par échange ou chapardage. Mais généralement, nous tenons à honneur de tailler nos bûchettes nous-mêmes. Certains d'entre nous sont réputés pour en faire de si justes qu'elles sont pratiquement infaillibles. Il y a, par la campagne, des arbres à bonnes bûchettes et d'autres qui ne valent rien. On raconte que dans les villes on vend des bûchettes toutes faites. Quels tricheurs, ces gens-là ! Mais la maîtresse nous rassure en affirmant que les enfants de là-bas ne sont pas meilleurs que nous en calcul.

De fait, nous nous débrouillons assez bien dans nos comptes, peut-être parce que nos parents calculent remarquablement de la tête sans avoir recours au moindre crayon. Alain Le Goff est passé maître dans cet exercice. Quand je lui demande comment il fait, il n'est pas capable de m'expliquer, mais il me regarde avec des yeux pétillants et il me dit : "Nous avons toujours été très pauvres dans notre famille. Si nous avions été bêtes par-dessus le marché, nous serions morts de faim. Nous avons donc été condamnés à faire marcher notre tête pour avoir quelques chances de rester vivants. Faites donc marcher la vôtre." Je veux rester vivant, c'est juré.

Cependant, mes camarades et moi, nous avons quelque difficulté avec le dix-huit qui se dit en breton trois-six (*tri c'hweh*). Nous nous étonnons un peu de ce que le français appelle quarante ce qui est deux-vingts (*daou ugent*), soixante ce qui est trois-vingts (*tri ugent*) et pourtant il dit quatre-vingts comme nous. Mais déjà les quatre opérations deviennent des exercices gratuits dans lesquels le breton n'a plus aucune part. (...)

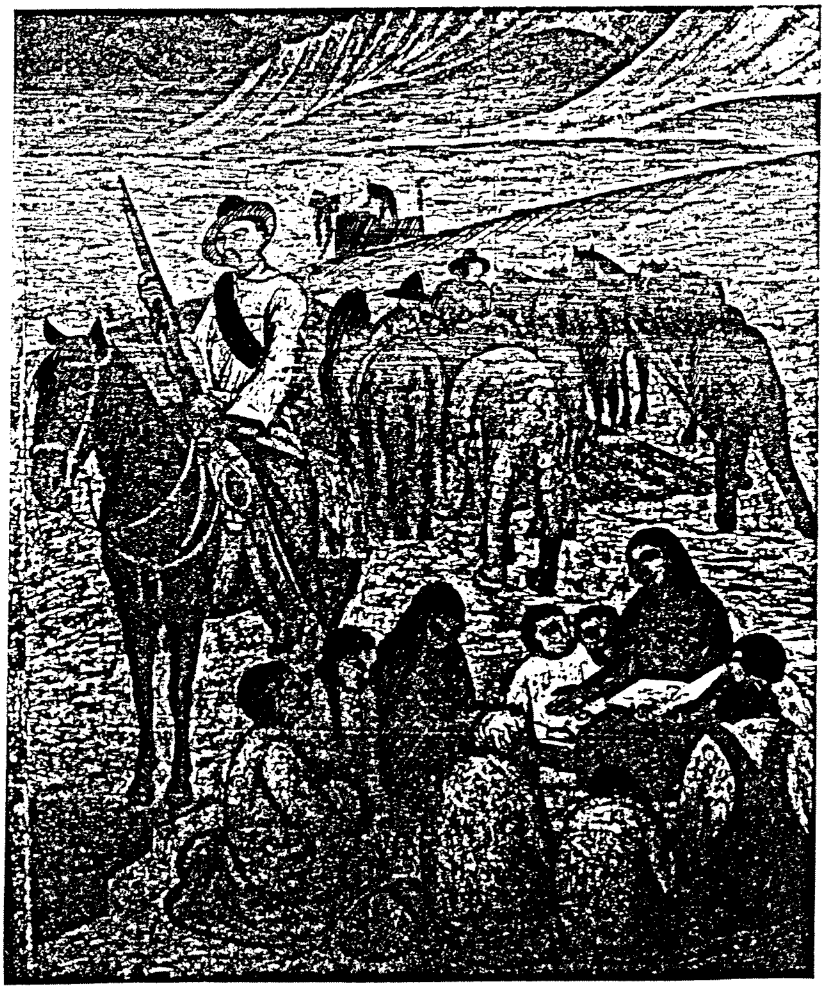
A l'école, il faut tomber tout juste. On va chercher des grammes et des milligrammes comme les apothicaires. Ce calcul-là est une invention d'avare ou d'hypocrite, je vous laisse à choisir. Les gens qui le font sont capables d'écorcher des poux pour en vendre la peau au prix du cuir.

C'est comme les mesures de longueur, de surface et de volume, quelle mesquinerie ! les ongles, les doigts (surtout le pouce) et la paume suffisent bien pour évaluer des pointes quand on sait ce qu'on veut en faire. D'autres mesures se font avec les deux poings fermés. Une corde de bois s'estime assez bien avec les bras. Les maçons comptent par pieds et par toises. A-t-on jamais vu peser des pierres pour bâtir maison ? On les vend à la carrière par charretées. Oui, mais le menuisier déjà ne peut pas se passer de son mètre pliant, le marchand de drap ou le tailleur de son mètre-bâton. Et l'épicier lui-même a des poids de cuivre si petits qu'ils s'envoleraient si on respirait trop fort à côté. Allons, il faut y passer, nous y passerons. C'est égal. Quand nous parlons d'*un hectare* de terre à nos parents cultivateurs, ils traduisent en breton par *deux journaux à peu près*. Il n'y a pas d'à peu près à l'école. Seulement la chaîne d'arpenteur.

Je ne suis pas fort sur les problèmes. Le soir, sous la lampe à pétrole que ma mère monte au plus haut pour que j'y voie mieux, je m'étourdis la tête, je m'aigris le sang à essayer de résoudre des traquenards arithmétiques où les temps et les distances jouent à colin-maillard. Je n'en viens pas toujours à bout, surtout l'année des bourses. Et quand mes larmes commencent à tomber sur le papier, délayant l'encre violette, l'arithmétique se refuse de plus en plus, les calculs deviennent aberrants, les virgules chassent à droite ou à gauche, les totaux sont si stupéfiants que même Jean Dix-Sept s'en apercevrait. Personne autour de moi ne peut m'aider. Mon père jure dans sa moustache, ma mère accuse les instituteurs de cruauté, se trompe de maille dans son tricot. Et mon grand-père Alain Le Goff s'essuie les yeux avec le dos de sa main. Il est encore plus malheureux que moi. "Mettez-leur quand même quelque chose, dit-il. Peut-être vous tomberez juste." Je ne tombe jamais juste que lorsque je n'ai pas à pleurer."

Ces textes présentent en outre une utilité pédagogique pour les professeurs de mathématiques. On nous demande souvent : "Pourquoi nous enseignez-vous cela ?" Vous pouvez bien répondre, en invitant les contradicteurs à lire les passages cités ; puis en posant la question : "Est-il concevable que les bretons continuent à mesurer avec leur doigt ou leur paume, et qu'ils s'insurgent contre cette exigence ahurissante : "A l'école il faut tomber juste"."

Abraham BOSSE (1602-1676)
Le Maître d'Ecole



Diego RIVERA
La Maestra Rural (1923-1928)
Mexico

Sur un vélo construit avec cette norme de précision, Robic et Hinault auraient-ils gagné le Tour de France ? La nostalgie rétro de l'auteur est à l'exigence de "tomber juste" ce que l'art des empileurs de dolmen est à celui qui conduisit aux cathédrales, mille ans plus tard. On trouve, par exemple, des élévations très précises de la cathédrale de Strasbourg, antérieures à sa construction, au musée de l'Oeuvre Notre Dame.

LES ARTISTES À LA RESCOUSSE

Cela m'amène à une autre source d'information : chacun peut tomber sur des documents significatifs, au détour d'une visite de musée; bien des oeuvres d'art représentent des scènes scolaires, et en particulier des situations d'apprentissage mathématique.

H. I. Marrou a recensé des scènes pédagogiques, représentées sur les monuments funéraires antiques. On admirera des bas-reliefs révélateurs de Luca della Robbia à Florence ; et au Kunstmuseum de Bâle des enseignes, peintes par Holbein, père et fils, destinées à des "boutiques" de calcul ou de lecture.

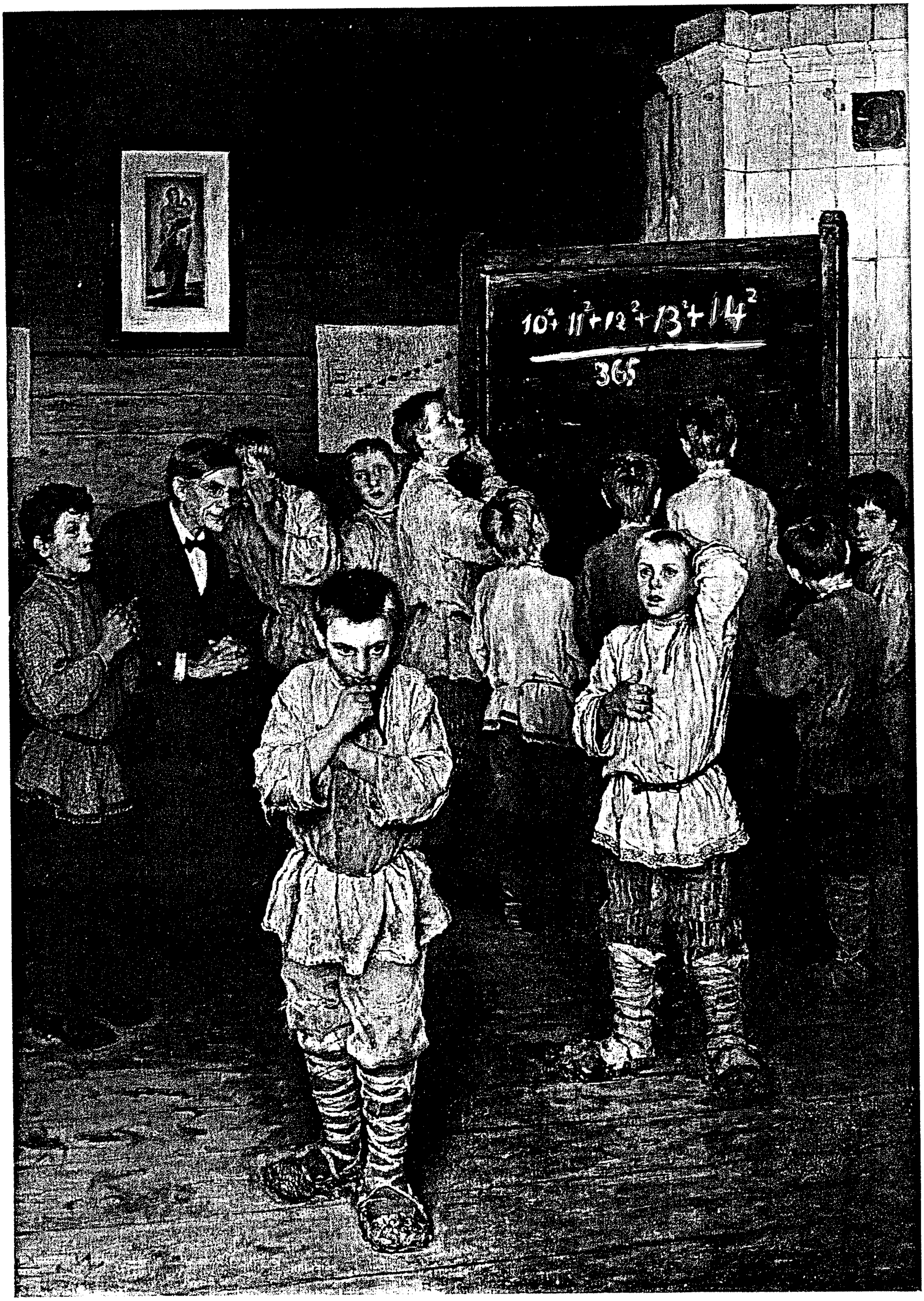
Les célèbres gravures d'Abraham Bosse, ci-jointes, évoquent des situations scolaires caractéristiques, au XVIIe siècle. Bien différente est la fresque de Diego Rivera "La maestra rural" qui représente une école en plein air bien étrange.

Je ne puis énumérer ici toutes les trouvailles que j'ai pu recueillir dans des musées ou des ouvrages d'Art.

Je me bornerai, pour finir, par présenter des oeuvres picturales de deux peintres mineurs, bien différents, de la fin du XIXe siècle.

Bogdanov-Bielski (1868 - 1945) appartenait à cette école de peintres russes que l'on appelle les "Ambulants", qui décidèrent d'aller dans les villages pour témoigner sur la situation du peuple, et qui renoncèrent à portraiturer la haute société.

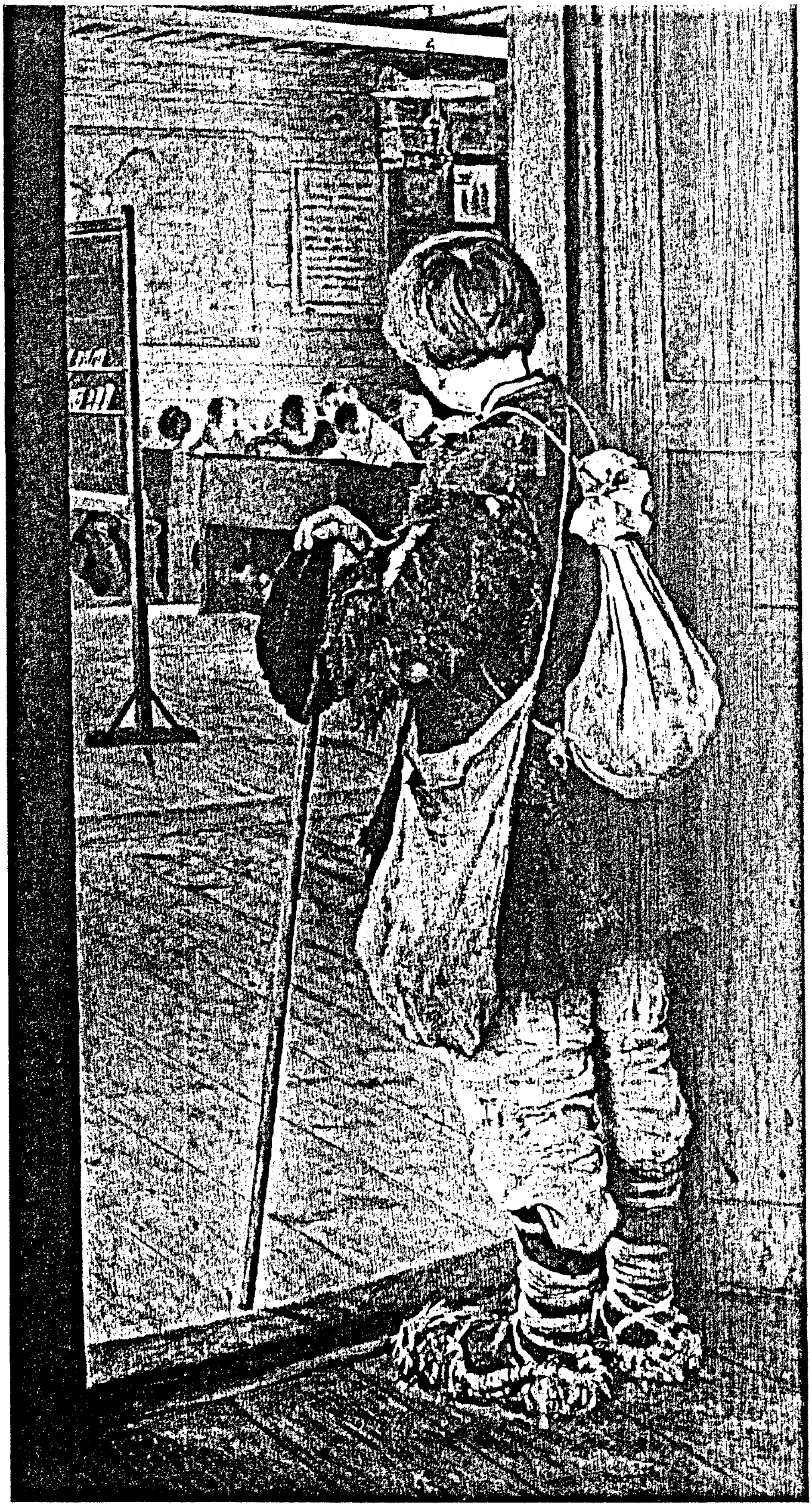
> L'histoire de ce peintre est émouvante ; un universitaire célèbre, le professeur Ratchinski, décida d'abandonner sa chaire de S^{t} Petersbourg, pour aller - à la manière de Tolstoï - alphabétiser les moujiks, ... et il



BOGDANOV-BIELSKI (1868-1945)

La Leçon de Calcul (1895)

Galerie Tretiakov - Moscou



BOGDANOV-BIELSKI
Au Seuil de la Classe (1897)

se mit à enseigner l'arithmétique dans d'humbles villages.

Au cours d'une leçon, il fut frappé par la concentration d'esprit d'un jeune garçon qui semblait fort attentif à tout ce que disait le professeur.

Ratchinski s'aperçut cependant que l'enfant ne prêtait guère attention aux explications arithmétiques, mais qu'il était en train d'exécuter un portrait du maître ! Ayant reconnu le talent précoce du jeune moujik, Ratchinski le prit sous sa protection, et parvint à lui faire faire des études artistiques. Son jeune pupille fut finalement élu à l'Académie des Beaux-Arts.

Bogdanov-Bielski - c'était lui - a peint beaucoup de scènes relatives à ce mouvement qui poussait les intellectuels à "aller au peuple". Deux de ses tableaux sont ici reproduits.

Nous insisterons surtout sur la célèbre "Leçon de calcul mental" (1895). On demande aux enfants de calculer de tête le nombre :

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

qui fut certainement inspiré à Ratchinski par une solution de l'équation diophantienne :

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2.$$

Observez les diverses attitudes des enfants, l'absence de tables et de bancs. Des élèves attendent leur tour pour dire au professeur la réponse qu'ils viennent de trouver...

Et le tableau du pauvre garçon, qui regarde de jeunes écoliers "au seuil de l'école" n'est-il pas aussi très émouvant ?

Un autre peintre qui devrait intéresser les historiens de la réalité scolaire, est le suisse Albert Anker (1831 - 1910), auteur de nombreux tableaux sur la scolarisation au début de notre siècle. Son "Ecole de Village" (1896) est exposée au Kunstmuseum de Bâle. On y observera une classe fort peu homogène. Les filles, qui ne disposent pas de tables, lisent pendant que des garçons de tous âges, écoutent attentivement, bavardent, chahutent, ou dorment. Mais "Gare à la baguette" que manie l'instituteur !

Dorfschule (1896) Kunstmuseum - Bâle

Albert ANKER (1831-1910)

L'Examen (1862) Kunstmuseum - Berne

"L'Examen scolaire" (1862) est une commande du Musée de Berne. Plus j'examine cette scène, plus je m'interroge sur ce qu'il s'y passe : "A quoi joue-t-on ?" Que font ces adultes, assis à gauche, qui regardent un garçon, haut comme trois pommes, lire en suivant à l'aide d'une baguette. Ses camarades, et d'autres adultes suivent la performance avec grande attention. De tels examens, proposés à des enfants aussi jeunes, étaient-ils courants à l'époque? A quoi correspond ce cérémonial ? Voilà bien une réalité scolaire, sur laquelle les textes officiels ne peuvent nous renseigner.

L'amateur-historien que je suis, souhaiterait recevoir des informations, de tous ceux qui tombent fortuitement sur des renseignements de ce genre. Au hasard d'une lecture, ou d'une visite dans un musée, on rencontre un document que seuls les spécialistes des Belles-Lettres ou des Beaux-Arts ont étudiés. Mais les enseignants qui s'intéressent au passé de leur métier, ne peuvent-ils également y prêter attention, d'un point de vue professionnel ?

LES ACTIVITES DE L'I.R.E.M. POUR 1985/86

n°	Intitulé	Animateur(s)	Date et lieu

INFORMATIQUE (collèges)

71363	Activités algorithmiques ler cycle - LOGO (utilisation de LOGO fin de primaire - début ler cycle	D. Guin N. Vogel	I.R.E.M.

INFORMATIQUE (lycées)

71361	Traitement informatique de l'image numérique en lycée : logiciels et matériels - applications pédagogiques et lycée à l'aide d'images satellitaires	T. Hatt	Lycée F. de Coulanges de Strasbourg - 2 jours bloqués : 14 et 15 janvier 86
71362	Utilisation de la table traçante en lycée - logiciels et matériels - applications pédagogiques - projections cartographiques - cartographie automatique - géométrie	T. Hatt N. Vogel	Lycée F. de Coulanges de Strasbourg - 3 jours bloqués : 5-6-7 février 86
71364	Réalisation de logiciels ler et 2nd cycles	G. Metivier	I.R.E.M.
71365	Initiation à la programmation structurée - Niveau 1	N. Vogel	I.R.E.M.
71367	Initiation à la programmation structurée - Niveau 2	G. Kuntz	I.R.E.M. mardi après-midi
		M. Rual	Mulhouse jeudi après-midi
71366	Informatique et enseignement des mathématiques (réflexion sur l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement de la géométrie en 2nd cycle)	N. Vogel J.-P. Igot	I.R.E.M.
71459	La proportionnalité - Réflexion sur l'acquisition de la proportionnalité et réalisation de didacticiels	A. Bonnet	L.E.G.T. Bd Charlemagne Sélestat

MATHEMATIQUES (lycées)

12008	Histoire des mathématiques en section A - Etude et recherche de documents historiques en liaison avec les programmes de maths de classe de 1ère et de Term. A1 - A2 - A3	C. Kahn O. Schladenhaufen	I.R.E.M.
12009	Liaison collège - Lycée en maths - Echanges entre collègues -Savoirs minimaux en fin de 3e pour l'entrée en 2nde	E. Busser M. De Cointet C. Kahn O. Schladenhaufen	I.R.E.M.
12011	Evaluation pour orientation en fin de 2nde - Etude des savoirs minimaux en fin de 2nde selon la section choisie pour la classe de 1ère	C. Kahn E. Busser O. Schladenhaufen M. De Cointet	I.R.E.M.
12012	Géométrie en 2nd cycle - Documents de travail envoyés par correspondance aux professeurs de lycées contactés en début d'année - Compte-rendu - synthèse résultats	O. Schladenhaufen C. Kahn M. De Cointet E. Busser	I.R.E.M.
12149	Nouveaux programmes de mathématiques en 1ère - Informations par réunions entre collègues et élaboration de documents en mathématiques	M. De Cointet C. Kahn O. Schladenhaufen E. Busser	I.R.E.M.

La fiche d'inscription est disponible auprès de votre chef d'établissement.
La demande est à adresser à la 6e division au Centre de Stages - 1 rue du Dauphiné 67300 SCHILTIGHEIM au plus vite.

INFORMATION

OUVERTURE D'UN ATELIER D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES A L'I.R.E.M.

POURQUOI UN ATELIER D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES ?

Le savoir mathématique est souvent perçu comme un savoir formel, dogmatique et sans vie où définitions, axiomes et théorèmes s'enchevêtrent en un discours sans grande signification réelle. Cette signification échappe parce qu'elle trouve son origine dans des situations, dans des problèmes que l'enseignement a la plupart du temps gommés au profit d'une théorie qui se veut parfaite dans sa rigueur et sa certitude, mais qui est sans âme.

"La signification des notions, leur adaptation au réel, la valeur des axiomes, tout cela prête à discussion : ce sera l'affaire des philosophes. Les applications des mathématiques se heurtent à quantités de contingences : le mathématicien ne va pas se commettre là dedans ; ce sera l'affaire du physicien et de l'ingénieur. Le mathématicien ne s'occupera que du stade déductif ; encore ne regardera-t-il que le raisonnement tout fait, car la construction d'un raisonnement logique ne se fait pas logiquement." (Henri Lebesgue : Message d'un mathématicien)

Alors, l'histoire des mathématiques permet de retrouver le contexte problématique qui a donné naissance à telle invention, à telle découverte mathématique. Elle permet de suivre le cheminement des idées et par là d'étudier les questions, les obstacles, voire les erreurs, qui ont accompagné la production et l'acquisition d'un concept.

UN EXEMPLE : L'ÉMERGENCE DU CONCEPT DE GROUPE

Une illustration exemplaire d'un tel cheminement nous est donnée par l'émergence du concept de groupe, à partir du problème de la résolution des équations polynôme de degré supérieur à cinq, par radicaux. Au départ donc, un problème apparemment banal : de même qu'on sait résoudre depuis le début du XVIIe siècle des équations de degré 1, 2, 3, 4 - trouver une méthode pour résoudre des équations de degré 5 ou plus. Au bout, on trouve, bien sûr, une réponse à ce problème, mais on pourrait dire accessoirement, car on y trouve bien plus : un nouvel outil mathématique : le concept de groupe, une nouvelle théorie : la théorie de Galois. L'épistémologue Imre LAKATOS a une formule imagée, teintée de l'humour propre à son style , pour décrire ce type de situation : *"Le vieux problème a disparu, de nouveaux problèmes ont émergé. Après Christophe Colomb, on ne devrait plus être surpris de ne pas résoudre le problème tel que l'on se l'était posé"* (LAKATOS : Preuves et réfutations, p. 115, éditions Hermann).

C'est à ce voyage que vous convie l'atelier d'histoire des mathématiques par l'étude d'une série de textes qui jalonnent cette longue recherche patiente mais acharnée entre 1770 et 1831.

. 1770 - 1771 - LAGRANGE
"Mémoire sur la résolution algébrique des équations".

. 1771 - VAN DERMONDE
"Mémoire sur la résolution des équations".

. 1801 - GAUSS
"Recherches arithmétiques" section VII : "Des équations qui déterminent les sections circulaires".
(C'est dans cette section que l'on trouve la célèbre démonstration de la possibilité de construire à la règle et au compas un polygone régulier de 17 côtés et plus généralement de $2^{2^n} + 1$ côtés.

. 1813 - CAUCHY
"Mémoire sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme".

. 1826 - ABEL
"Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement".

. 1831 - GALOIS
"Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux".

L'atelier essaiera par l'étude approfondie de ces textes tous remarquables, de dégager la dynamique qui accompagne et impulse le développement des mathématiques à un moment charnière de son histoire : passage d'une mathématique des objets et de leurs propriétés, à une mathématique des structures et des relations. On pourra aussi, alors, mieux cerner la personnalité fascinante d'un génie comme Galois : en quoi il s'appuie sur l'oeuvre de ses prédécesseurs, en quoi il invente et innove radicalement.

J.-P. FRIEDELMEYER

N.B. : **Une réunion d'information se tiendra le mercredi 2 octobre à 15 heures en salle de Séminaire de l'I.R.E.M.**

MATHEMATIQUE ARABE AU LYCEE

C. KAHN et O. SCHLADENHAUFEN

Nous avons invité Monsieur A. DJEBBAR le mercredi 9 janvier 1985 au Lycée Marie Curie. Devant un public d'une centaine d'élèves des classes de 1ère S et de T.C., il a évoqué la naissance de l'algèbre et son développement dans les pays arabo-musulmans du VIIIe siècle au XIVe siècle.

Voici un résumé de sa conférence qui a enthousiasmé nos élèves ; certains d'entre eux sont même restés une heure de plus pour en savoir davantage.

De 622, date de l'Hégire (émigration de Mohamet vers Médine) à 750 se construit le nouvel état mulsuman avec ses institutions politiques, religieuses, économiques et culturelles. Le désir et le besoin de mieux connaître les Mathématiques conduisent les Arabes à lire les écrits des Grecs, des Indiens et des Babyloniens. Dans les manuscrits grecs et indiens dont ils disposaient alors, ils ne trouvent aucune étude particulière de l'Algèbre mais tout au plus des éléments de logistique (opérations arithmétiques sur les nombres : +, −, ×, :, $\sqrt{\ }$), plus développées chez les Indiens grâce au système décimal de position complète. Mais malgré l'absence de témoignages directs, il semble que les Arabes aient connu certaines traditions mathématiques des Babyloniens. Ces derniers ont utilisé en effet certains procédés de calcul algébrique : ils savaient résoudre $ax = c$ (sans utiliser cette écriture), des équations qui se ramènent au second degré comme $ax^2 + bx = c$, ainsi que le système d'équations $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$

Ils commencent par traduire les textes existants et c'est au début du IXe siècle, sous le règne du khalife al - Ma' mūn que paraît le premier traité d'algèbre. Il s'agit du "livre concis en Algèbre (de l'arabe al-jabr) et en Muqābala" (* voir encart) écrit par Al Khawarizmi (780 - 850). Le nom de ce savant est à l'origine de notre mot "algorithme". Cet ouvrage très mince en regard de tous les livres que nous trouvons dans nos bibliothèques, comprend deux parties :

A L'ORIGINE DU MOT ALGEBRE ...

... se trouve le Caliphat Abbassides (750-1280). Durant cette période, Bagdad sa capitale devint le centre intellectuel du monde musulman. Sous le règne des Caliphes Harum-al-Raschid (786-808) et Al-Mâmûn (809-833), la venue à Bagdad de savants indiens, arabes, persans, juifs et chrétiens fut fortement encouragée. Il en résulta divers travaux d'arithmétique, d'algèbre, d'astrologie et d'astronomie et surtout la traduction en arabe de nombreuses oeuvres grecques classiques.

Parmi ces savants se trouvait un mathématicien persan : Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî dont le nom signifie : Mohammed, fils de Moïse, du Kwarezm. Le Kwarezm était un petit royaume situé au nord de l'Iran actuel dans ce qui est maintenant le Turkestan Soviétique. Il fut détruit au 13e siècle par les Mongols.

Au 12e siècle, en Angleterre, les oeuvres d'al-Khowârizmî fûrent traduites en latin. C'est ainsi qu'apparurent en anglais les mots : *"algorism"* ou *"augrim"* qui finirent par donner le terme *"algorithme"*.

Al-Khowârizmî fut le premier à utiliser le terme algèbre dans un traité intitulé : *"'ilm al-jabr w'al-muqâbalah"* ce qui signifie : *"Science de la réduction et de l'annulation"*. Ces deux termes se réfèrent à des opérations effectuées sur des égalités algébriques. Ils signifient, pour le premier, faire passer d'un côté à l'autre du signe égal des termes précédés du signe - et pour le second, supprimer des termes identiques situés de part et d'autre du signe égal.

Par exemple :	donne (al-jabr) :	puis (al-muqâbalah) :
$az + 2p = z^2 + az - p$	$az + 3p = z^2 + az$	$3p = z^2$

Les traductions latines du 12e siècle introduisirent les termes suivants : *"Ludus Algebrae Almucgrabalaeque"*, *"Gleba Mutabilia"*, *"Largibra"*. Au 16e siècle apparut en anglais : *"Algiebar and Almachabel"* et en allemand : *"Gebra und Almuttrabola"*. Le terme al-jabr finit par s'imposer alors que al-muqâbalah disparut.

Cependant al-jabr provenait d'un verbe arabe signifiant réunir ou consolider. Le mot passa avec ce sens en Espagne où il donna : *"algebrista"* signifiant rebouteux. Ainsi les barbiers se disaient : *"algebrista y sangrador"*, soit : celui qui remet les os en place et pratique des saignées. Au 16e siècle, le terme algèbre se répandit en Italie, en France et en Angleterre avec le sens de science de la réduction des fractures.

Que reste-t-il maintenant de ce terme ? Les cylindres peints en hélice (barber poles) qui servaient d'enseigne aux coiffeurs aux Etats-Unis autrefois, sont peut-être un lointain souvenir des attelles destinées à réduire les fractures ?

Dominique VIAUD

1° Dans la première partie il distingue trois sortes d'objets : les nombres simples qu'il désigne par **dirham** (du nom de l'unité monétaire grecque drachme) ; l'inconnu qu'il appelle **say'** (chose) ou gizr quand il s'agit plutôt de la racine d'une équation, et enfin il utilise **māl** pour le carré de l'inconnu.

Puis il définit les six équations canoniques :

. $ax = c$	. $ax^2 = bx$	. $ax^2 + c = bx$
. $ax^2 = c$	. $ax^2 + bx = c$	. $ax^2 = bx + c$

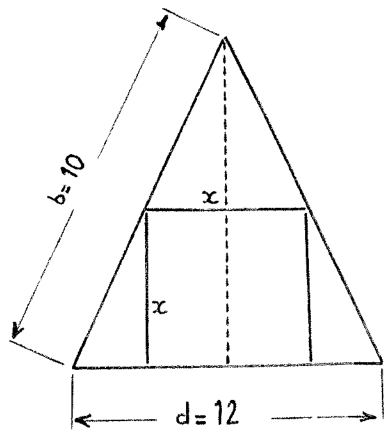
où a, b, c, appartiennent à $\mathbb{N}^*$ ou à $\mathbb{Q}^{*+}$, et il explicite pour chacune d'elles, l'algorithme de résolution qui fournit la ou les solutions (positives) cherchées. Il conclut cette partie en donnant des démonstrations géométriques de l'existence des solutions de ces six équations.

2° La seconde partie, plus longue que la première, concerne les applications. L'auteur y résout des problèmes posés par la vie quotidienne dans la cité musulmane : problèmes d'héritage dont les règles figurent dans le Coran, problèmes de transactions commerciales, problèmes d'arpentage pour l'établissement de l'assiette de l'impôt. Cette deuxième partie devait faciliter la vente du livre auprès des marchands, des juges, des fonctionnaires de l'administration.

Exemples

1. **Problème d'arpentage :**

Partager un champ triangulaire isocèle en trois rectangles et un carré inscrit dans le triangle.



1. calcul de h : $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 8$

2. calcul de la surface totale : $S = \frac{1}{2} h \, . \, a = 48$

3. calcul de x :

$$x^2 + x\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) + (h - x) \; x \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} ab$$

$$\rightarrow \quad x = 4 + \frac{4}{5} .$$

2. Problème d'héritage :

Un homme (musulman) meurt et laisse 4 garçons. Il fait une première donation égale à la part d'un des garçons et une seconde donation égale au quart de la différence entre le tiers de l'héritage et la première donation.

Réponse : On résoudra l'équation :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}m - x\right) + x + 4x = m$$

(m = héritage, x = part d'un garçon).

3. Problème de transaction commerciale :

On veut acheter du froment et de l'orge, le prix d'une mesure du premier étant le double du prix de la même mesure du second. On suppose également que la dépense totale est égale à la différence des prix de chaque mesure augmentée de la différence des quantités achetées. Sachant qu'on a acheté 6 mesures de froment et 4 d'orge quel est le prix d'une mesure de froment ?

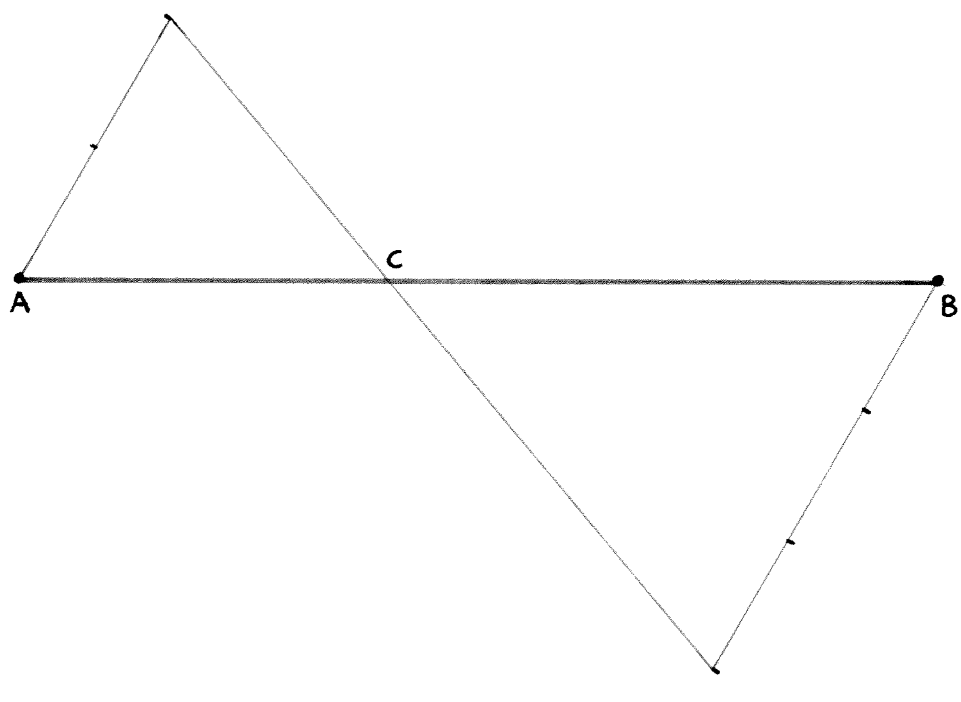
Réponse :

$$6x + 4\left(\frac{x}{2}\right) = \left(x - \frac{x}{2}\right) + (6 - 4)$$

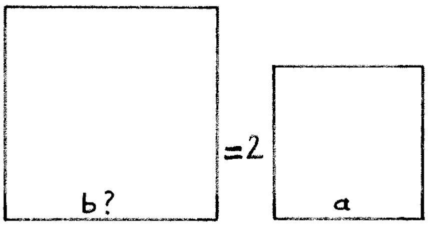
Cet ouvrage atteste l'apparition d'une nouvelle discipline scientifique : l'Algèbre. Les Arabes, conscients de posséder de nouveaux outils, ont essayé de résoudre algébriquement certains problèmes non résolus par les Grecs et même des problèmes déjà résolus mais à l'aide de méthodes géométriques. Parmi ces problèmes on peut citer quelques-uns concernant la construction à la règle et au compas.

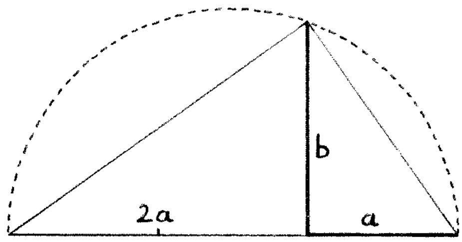
Par exemple :

. Pour trouver le point C qui partage un segment donné AB dans un rapport donné $\lambda = \frac{AC}{BC}$ on peut utiliser des parallèles.



. Pour obtenir le côté d'un carré double (au sens de la surface) d'un carré donné, on peut se servir d'une propriété connue dans le triangle rectangle.





Par contre, la duplication du cube, l'inscription de certains polygones réguliers dans un cercle (n = 7, n = 9, n = 11 etc...), la trisection de l'angle restaient sans solution géométrique (et pour cause).

- duplication du cube : construire un cube ayant pour volume le double de celui d'un cube donné,
- inscription d'un polygone régulier dans un cercle : le problème est simple pour un triangle équilatéral, un carré, un pentagone et un hexagone, mais pour l'heptagone on ne trouve pas de solution,
- trisection de l'angle : diviser un angle quelconque en trois parties égales.

Les Grecs savaient réaliser la construction, à la règle et au compas, pour un angle droit ou pour un angle de 108° (lié au pentagone).

Pour le cas général et pour la duplication du cube, les Grecs avaient obtenu la solution par intersections de courbes coniques (cercles, paraboles, ellipses, hyperboles) ou par construction de courbes dites mécaniques (par exemple la conchoïde de Nicomède). Les problèmes dont les solutions ne sont pas constructibles à la règle et au compas, comme Wantzel devait le démontrer au XIXe siècle, conduisent à des résolutions d'équations du 3e degré - traduction algébrique que les Arabes donnent au Xe siècle.

Par exemple, effectuer la duplication d'un cube de côté a donné revient à trouver x tel que $x^3 = 2a^3$. Ils résolvent cette équation par extraction de racines. La seconde équation qu'ils ont cherché à résoudre était de la forme : $x^3 + c = ax^2$ avec a et c des coefficients numériques donnés ; cette équation est liée au problème d'Archimède exposé dans "le traité sur la Sphère et le Cylindre" (proposition 4, livre II) : il s'agit de déterminer la section d'une sphère par un plan de manière que le rapport des volumes des deux calottes sphériques soit égal à un rapport donné.

C'est al-Māhānī (mort en 888) qui fut le premier à ramener ce problème géométrique à la résolution de l'équation $x^3 + c = ax^2$. Mais, après avoir tenté vainement de la résoudre, il dit qu'elle était impossible. Elle sera résolue par al-Kuhī (Xe siècle). Après eux, d'autres mathématiciens ont résolu, à l'aide des coniques, d'autres équations du 3e degré, et au XIe siècle, Omar al-Khayyām (1048 - 1131) écrira un livre de synthèse sur tous ces travaux. Il donnera une classification des équations de degré $\leqslant 3$ et exposera les démonstrations géométriques, reposant sur les intersections de coniques, qui permettent de déterminer le nombre de racines positives de chaque équation.

D'autres travaux seront faits dans ce domaine et concerneront la recherche de ces mêmes solutions par des méthodes d'approximation . Ces recherches de solutions approchées d'un problème seront d'ailleurs développées dans d'autres domaines (calcul d'une racine $n^{ième}$ d'un nombre, calcul approché de π, etc...).

Un des grands savants qui s'illustra dans ce domaine fut al Kāshī (mort en 1437 environ) qui travailla à Samarcande dans le grand observatoire construit par Ulugh Beg (qui était à la fois souverain et homme de Science).

Le meurtre de ce souverain éclairé amènera le déclin des activités scientifiques dans les régions qu'il gouvernait. Mais ces activités se poursuivront en Egypte et au Maghreb, même si elles n'avaient plus le dynamisme et la fécondité de celles des IX - XIIe siècles.

C'est à partir du XIIe siècle que les mathématiques arabes vont être partiellement traduites en Latin puis en Hébreu et vont ainsi se diffuser en Europe ; elles seront à la base de la réactivation scientifique européenne dont les effets commenceront à se manifester au XIIIe siècle en Italie et dans le midi de la France et plus tard dans le reste de l'Europe.

PUBLIÉE POUR LES MAÎTRES PAR LES I.R.E.M.

LA COLLECTION INTER - I.R.E.M.

n° 1 : Thèmes en Seconde (1981)

Prix : - collection Inter-IREM : 30.- F le volume } uniquement en Alsace
- catalogue math-expo : 20.- F
Pour alléger les charges administratives liées au paiement par chèque d'une petite somme, veuillez si possible passer à la bibliothèque de l'IREM pour règler en espèces. Sinon, essayez de vous regrouper entre collègues et envoyez un chèque global (à l'ordre de Monsieur l'Agent Comptable de l'U.L.P. - IREM) - CCP 55. 06. 44.

n° 3 : Quelles activités pour quels apprentissages ? du collège au lycée (1983)

n° 2 : Technologie et Mathématiques en F (1982)

CATALOGUE MATH EXPO : SUPPLÉMENT À L'OUVERT N° 35

POUR UNE MATHÉMATIQUE VIVANTE EN SECONDE

(Nouvelle édition mise à jour en 1984)

Publication de l'A.P.M.E.P.

SOMMAIRE

Nous tenons à remercier les quelque cinquante professeurs de l'Académie de Strasbourg qui ont accepté de faire travailler leurs élèves sur plusieurs de ces nouveaux chapitres et ces tests, et de nous faire part de leurs observations et critiques.

Le groupe lycée de
l'IREM de STRASBOURG

ENIGME : QUI EST CE PROFESSEUR ?

Un professeur tout-à-fait improvisé, comme il le reconnaît lui-même dans ses lettres adressées à sa chère épouse depuis la prison de Picpus, en 17...

> Je t'écris, ma chère amie, en sortant de donner ma leçon. Je me suis chargé, à la demande de deux de mes camarades d'infortune, dont l'un est un marchand du Palais-Égalité et l'autre un secrétaire greffier de juge de paix, de leur montrer la nouvelle arithmétique , ou pour mieux dire, le passage de l'ancienne à la nouvelle. Je leur montre le matin, ce que j'ai appris la veille au soir; mais cette nouvelle arithmétique est si facile, et le livre qui l'enseigne si clair, que cela va tout seul. J'ai d'ailleurs une idée qui soutient mon courage, et me fait prendre plaisir à ce travail : c'est celle que, peut-être, un jour viendra, enfin, où je pourrai te donner les mêmes instructions qui, sous peu de temps, deviendront de première nécessité.
>
> (...)
>
> Tu te souviens peut-être, ma chère amie, que je te mandais, il y a quelques jours, que je t'écrivais en sortant de professer, pour deux de mes compagnons d'infortune, le passage de l'ancienne arithmétique à la nouvelle. Ce cours est fini. Mes deux élèves savent leur affaire comme ceux qui ont fait l'ouvrage. Ce premier succès nous a encouragés à un nouveau travail; il s'est joint un troisième élève aux deux premiers, et je professe à présent, pour tous trois, les comptes à parties simples et à parties doubles. Nous avons commencé hier, et je t'écris au sortir de la leçon. Tu vois que je n'ai pas encore perdu mon talent d'enseigner même ce que je ne sais pas. J'apprends le matin ce que je montre le soir; ou, quelquefois, même, j'apprends la suite de la leçon pendant que j'en enseigne le commencement. Quoi qu'il en soit, mon premier cours a très bien réussi;

Notre professeur bénévole s'est beaucoup intéressé à l'éducation des jeunes filles, éducation étant pris dans son acception la plus générale. Et, de sa geôle, il songe à celle de sa propre fille :

> Tu t'occupes de ce que je n'ai pas de lecture ! Je ne peux plus lire pour mon plaisir. Je lis ce que je peux en journaux, parce que je ne cesse pas de m'intéresser à nos succès. Pour tout le reste, je ne lis plus que pour apprendre; j'ai fait de la lecture un travail, et plus un délassement. J'ai repassé l'arithmétique de Bezout , pour être sûr que je pourrais la montrer à ma fille;

Bien entendu, ce prisonnier de marque ne tient pas sa célébrité de son activité de professeur d'arithmétique, ni même d'avoir inventé l'obus creux moderne...
Si vous le découvrez, l'OUVERT sera heureux d'offrir un abonnement d'un an à une personne de votre choix.

And Figure 10 is perhaps more amazing -- these pictures occurred in a study of Newton's method for cubic polynomials. They are pictures in the parameter space, each point being colored according to which of the three roots 0 will converge under Newton's method for finding the zeros; the values of the parameter for which there is no convergence at all are colored in a fourth color, yellow (which appears as white in the xerox). Once again, different spots of yellow enlarge to show different patterns in the surrounding colors.

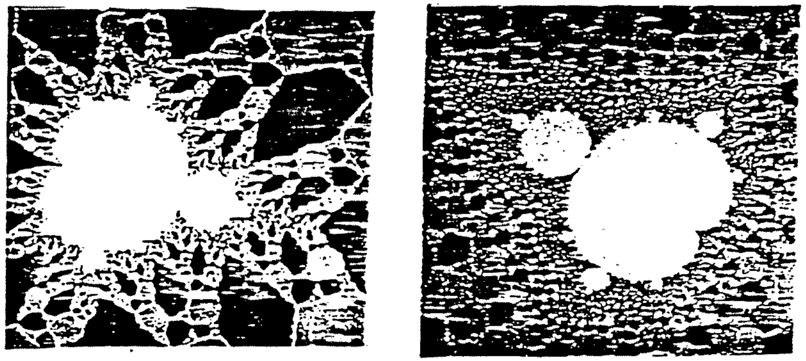


Figure 10

We see over and over again that different copies of the Mandelbrot set are surrounded by different patterns. Being able to see these patterns and their differences is what gives rise to the ideas for theorems, only a few of which have been mentioned above. The computer has not been used to actually prove the theorems, but it has been an absolutely essential tool for guiding the direction of the theoretical work of Hubbard, Douady, and Branner, and their many colleagues and students in dynamical systems.

REFERENCES

Paul Blanchard, "Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere", Bulletin (new series) of the American Mathematical Society, Volume 11, Number 1, July 1984 (a detailed survey, with a complete bibliography)

Adrien Douady, "Systèmes Dynamiques Holomorphes", Seminar BOURBAKI 35e année, 1982/3 nº 599.

Adrien Douady and John H. Hubbard, "Étude Dynamique des Polynômes Complexes", Publications Mathematiques d'Orsay, 84-02.

Benoit B. Mandelbrot, THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE (W.H. Freeman, 1981).

VIENT DE PARAITRE

Page extraite du volume des "Supporting Papers" du symposium de la C.I.E.M. (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématiques) :

"The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching" (Strasbourg, mars 1985)

Ce volume est disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M. : 321 pages d'articles (anglais et français) au prix unitaire de 80.- F et peut être expédié contre un chèque de 100.- F établi à l'ordre de Monsieur l'Agent Comptable de l'U.L.P. (compte I.R.E.M.).