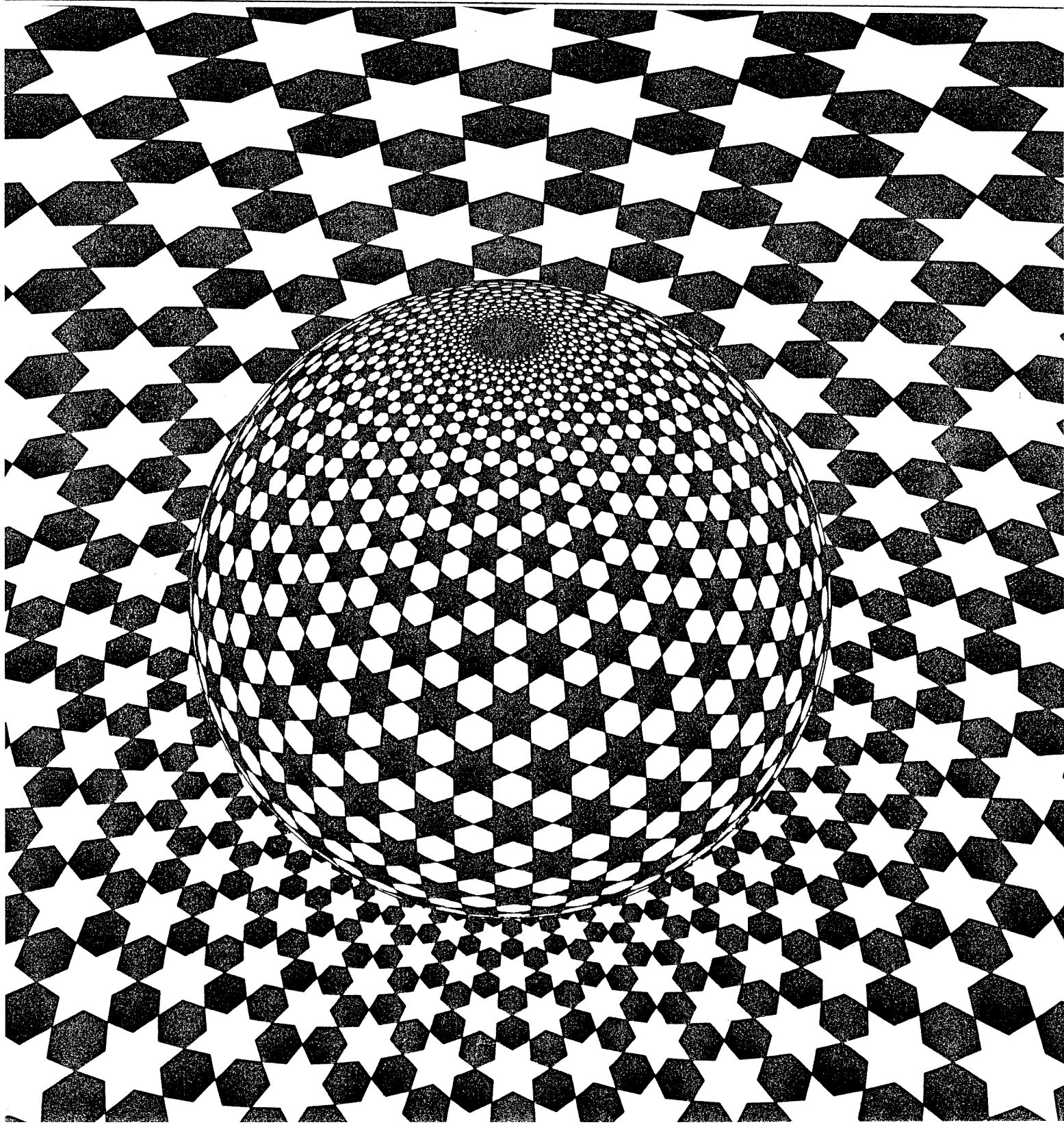


# L'OUVERT

JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG N° 42 MARS 1986



## NOTRE COUVERTURE :

Elle nous vient de Grande-Bretagne. Intitulée "Inversion", c'est la réduction d'un des quatre "posters" dessinés par Robert Dixon à l'aide d'un ordinateur et proposés à la vente ( 2£ chacun) par l'association des enseignants de mathématiques : A.T.M. (Association of Teachers of Mathematics) Kings Chambers, Queen Street, Derby, DE 1 - 3 DA

## CONSEILS ?

L'époque des conseils de classes revient périodiquement. Surcroît de travail pour tous les professeurs qui trouvent pénibles ces fins de trimestre :

. Il faut remplir des bulletins, se creuser la tête pour trouver quelque chose à dire sur des élèves dont on n'a rien à dire et qui pourtant existent et attendent peut-être un encouragement ou un conseil.

. Il faut rencontrer des parents dont on a l'impression qu'ils ne sont là que pour défendre leur progéniture, comme si leur vision des enfants ne pouvait pas compléter la nôtre ?

. On a l'impression de devoir se justifier face à des attaques de délégués, peut-être maladroites ; mais devons-nous abandonner notre rôle d'éducateur dans ces moments là et n'avons-nous donc de compte à rendre qu'à nos supérieurs hiérarchiques ?

Combien de fois n'entend-t-on pas des professeurs se plaindre du manque de séances de concertation ? Sans doute ce ne sont pas les mêmes qui cherchent à expédier le plus rapidement possible les conseils de classe, rare moment où nous pouvons échanger nos opinions sur l'ensemble de la classe et sur chaque élève. Bien sûr, si nous estimons que notre travail se limite à enseigner des mathématiques, ou du français ou telle autre discipline, pourquoi discuter avec des collègues ? Sinon pour se persuader que les élèves sont vraiment mauvais et méprisables ! Pourquoi s'intéresser à l'environnement social des élèves puisqu'ils sont là pour travailler et que de toute façon on ne peut pas changer leurs conditions de vie familiale ?

Quand je lis dans la presse les témoignages d'engouement des collégiens et lycéens pour l'informatique et l'E.A.O. (enseignement assisté par ordinateur), je ne peux qu'être désolé d'apprendre que l'une des principales raisons d'un tel état est que l'ordinateur ne les juge pas.

N'est-ce pas l'aveu que les élèves se sentent écrasés par les professeurs ? N'est-ce pas l'aveu d'une incompréhension entre enseignants et enseignés ? N'est-ce pas finalement un aveu de faillite de notre action que d'entendre dire qu'on préfère avoir des relations avec une machine plutôt qu'avec l'homme ?

Je pense toujours que notre but est d'aider les élèves, de valoriser leurs points forts, de chercher avec eux une solution à leurs difficultés sans avoir la prétention de toujours en trouver une, de les écouter sans tomber dans la démagogie. En un mot, de les respecter pour pouvoir exiger le respect de leur part.

## SOMMAIRE

N° 42 - MARS 86

|   |       |
|---|-------|
| * NOTRE COUVERTURE  | P. 1  |
| * EDITORIAL   | P. 11 |
| * SABLE ET MATHEMATIQUE (suite), par R. ISS   | P. 1  |
| * GEOMETRIE AU PARC DE L'ORANGERIE, par E. EHRHART  | P. 7  |
| * RESOLUTION PAR LE PLIAGE DE L'EQUATION DU 3 <sup>e</sup> DEGRE<br>ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES, par J. JUSTIN | P. 9  |
| * PETITE HISTOIRE DE PENTAGONE, par F. PLUVINAGE  | P. 20 |
| * LE PENTAGONE DE DÜRER SOUS LA LOUPE INFORMATIQUE<br>par N. VOGEL  | P. 22 |
| * LE "CAHIER DE MATH" DE SYLVIE, par F. PLUVINAGE   | P. 28 |
| * LES FICHES CUISINE DE TONTON LULU - Lutte des classes<br>dans un nuage, par J. LUBCZANSKI                     | P. 31 |
| * LES MATHS AU JOUR LE JOUR : Un livre de Lubczanski<br>par J. LEFORT   | P. 43 |
| * LES NOUVELLES PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M. de Strasbourg  | P. 44 |
| * EXAMENS D'HIER, ATTITUDES DE TOUJOURS, par F. ARAGO   | P. 45 |

## L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

- . Responsable de la publication : J. Lefort
- . Correspondance à adresser à :  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG CEDEX
- . Abonnement (pour 4 numéros annuels) :  
80.- F pour l'Alsace  
106.- F pour les autres départements français  
95.- F pour l'étranger
- . Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

Après l'étude théorique des "tas de sable" parue dans le précédent numéro de "L'ouvert" je voudrais ajouter quelques mots sur l'aspect pratique de la question et signaler une utilisation possible dans notre enseignement.

#### COMMENT FAIRE DES "TAS DE SABLE"

Il faut d'abord se procurer du sable très fin et homogène. Ce n'est peut-être pas si facile que cela, quand on n'habite pas à proximité d'une plage ! Ce sable doit être très sec et ceci est essentiel. Sinon, au lieu de "couler" grain par grain, le sable s'agglomère, on assiste à des glissements de terrain en miniature et le tas obtenu risque d'être peu ressemblant à son modèle mathématique. On peut penser à d'autres matériaux granuleux (sel fin, semoule, etc), mais ils donnent des résultats décevants car trop hygroscopiques et d'une homogénéité toute relative. Peut-être existe-t-il des sables synthétiques - comme ceux utilisés dans les sabliers - qui donneraient de meilleurs résultats (lignes de crête plus nettes, angle  $\alpha$  plus important) ?

Une fois en possession du sable, on peut opérer avec un matériel très simple. Par exemple, on peut utiliser des morceaux de carton (dimensions de l'ordre de 5 à 15 cm), posés sur un ou plusieurs verres au fond d'un plat destiné à recueillir le sable excédentaire. Un demi-litre à un litre de sable peut alors suffire. On peut aussi doubler l'échelle, avec des plaques de contreplaqué d'une vingtaine de cm, posées sur une boîte de conserve au fond d'un baquet et un seau de sable. Une fois que le tas commence à prendre forme, verser le sable en pluie pour bien faire apparaître les crêtes - et résister à la tentation de modeler le sable !

On peut perfectionner ce matériel. D'abord, lorsqu'on utilise des plateformes comportant des bords ne faisant pas partie de la directrice étudiée, des crêtes indésirables vont apparaître. Pour les éviter, il faut munir ces bords d'un rebord destiné à retenir le sable (Fig. 1). Par ailleurs, nous avons vu qu'une directrice définit, en fait, deux plateformes complémentaires, donc deux tas de sable. On peut obtenir simultanément ces deux tas en découpant, dans le fond d'une caissette une fente ayant la forme de la

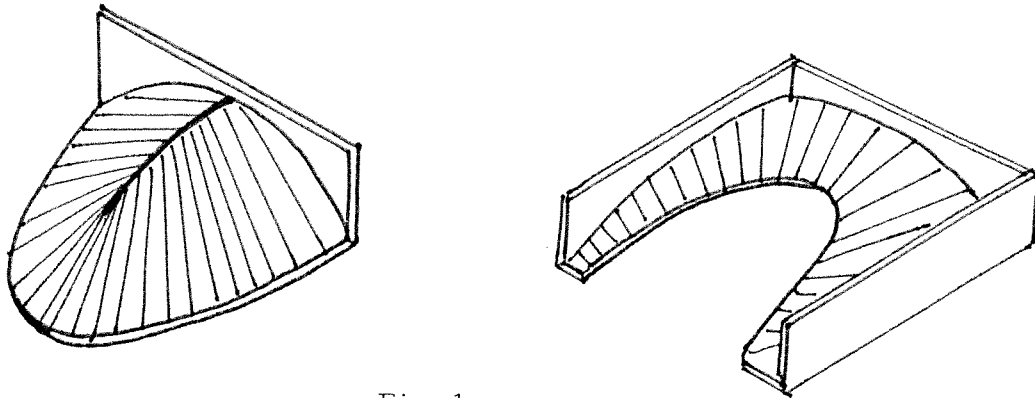


Fig. 1

directrice (avec un dispositif approprié pour maintenir en place la partie éventuellement détachée de ce fond). Le sable, en glissant par la fente, modèle en même temps les deux surfaces.

Peut-être Jean LEFORT pourra-t-il nous présenter un dispositif ingénieux à faire des tas de sable lors d'une prochaine "EXPO-MATH" ?

#### DESSINER DES TAS DE SABLE

On peut s'intéresser aux tas de sable à un autre point de vue : celui du dessin. En effet, on peut les représenter comme le font les cartographes pour les montagnes, en dessinant les courbes de niveau et les lignes de crête.

Nous savons que les courbes de niveau, en projection horizontale, sont formées d'arcs parallèles à la directrice, raccordés éventuellement à des arcs de cercle lorsque celle-ci présente des points anguleux ou de rebroussement. Certes, le tracé des parallèles à une courbe, sur le vu de leurs équations, est fastidieux et approximatif, à moins de le faire avec un ordinateur. Mais lorsque la directrice ne comporte que des parties rectilignes ou circulaires, les courbes de niveau sont, elles aussi formées de segments de droite et d'arcs de cercle. Il est donc possible de les tracer avec la règle et le compas (voir par exemple le dessin de couverture de "L'OUVERT" de décembre 85). Nous verrons plus loin que, dans ce cas, les crêtes également se construisent par points et par tangentes avec la règle et le compas. D'autre part, de la vue "en plan" d'un tas de sable, on peut aussi déduire des vues "de profil" en faisant appel à des notions quasi-intuitives de géométrie descriptive.

Dans ces conditions, dessiner des tas de sable à partir de directrices simples est un exercice à la portée de beaucoup de nos élèves. Par exemple, pour être capable de représenter le tas de sable qui se forme sur une plaque polygonale convexe, il suffit d'avoir des connaissances sur la symétrie ou les propriétés de la bissectrice. Dessiner un tas de sable à partir de considérations théoriques et pouvoir ensuite vérifier le résultat en le matérialisant avec du sable, et cela en quelques instants, me paraît un exercice de travaux dirigés, susceptible d'intéresser des élèves et propre à développer chez eux la vision dans l'espace. On n'a pas souvent, en mathématique élémentaire, l'occasion de mettre le concret aussi facilement "en équations"...

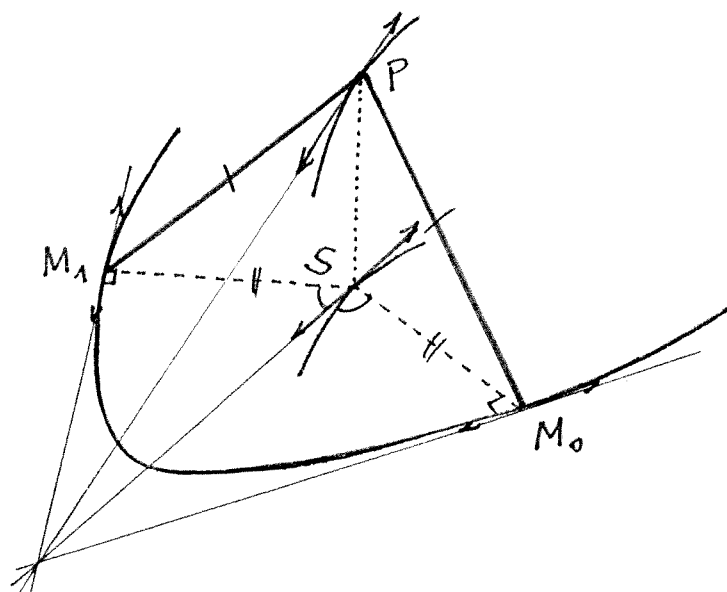
On peut, de plus, comparer les courbes de niveau dessinées avec leurs homologues de la réalité : en effet on peut faire apparaître celles-ci facilement en arasant le tas de sable avec une règlette que l'on déplace horizontalement.

### PROPRIETES DES CRÊTES

Nous avons vu qu'une crête apparaît dans un tas de sable lorsqu'une nappe de la surface  $TS$ , relative à une branche de la directrice coupe la nappe relative à une autre branche de celle-ci (nous supposons la directrice continuellement dérivable, sauf en un nombre fini de points). La crête, intersection de ces deux nappes est donc un ensemble de points de la surface par lesquels il passe au moins deux génératrices rectilignes.

Soit  $P$  un de ces points, par lequel il passe deux génératrices seulement (c'est le cas général). On voit, sur la figure 2, qu'il est, de ce fait, équidistant des deux branches de la directrice sur lesquelles s'appuient ces génératrices. Cette propriété se conservant

Fig. 2



en projection horizontale, la projection de la crête (que nous appellerons encore crête par abus de langage) est formée d'arcs dont chacun est un ensemble de points équidistants de deux branches de la directrice (1).

En projection, la tangente à la crête en un point  $S$  est la bissectrice de l'angle des deux normales  $M_0S$  et  $M_1S$  (cela se voit sur la figure 2 en remarquant que la tangente en  $P$  est l'intersection des plans tangents à la surface en  $P$ ).

Par le point  $P$ , il passe une courbe de niveau de la première nappe envisagée ci-dessus et une courbe de niveau de la deuxième nappe. Elles y sont soit sécantes, soit tangentes (2). La courbe de niveau du tas de sable qui passe par  $P$  admet donc en ce point deux tangentes distinctes ou confondues, orthogonales respectivement aux deux génératrices  $M_0P$  et  $M_1P$ . Le point  $P$  est donc, en général, un point double, anguleux ou de rebroussement.

Nous en déduisons cette autre propriété, valable aussi bien dans l'espace qu'en projection : la crête est formée d'arcs dont chacun est, soit un ensemble de points doubles, anguleux ou de rebroussement des courbes de niveau, soit lui-même une courbe de niveau.

---

(1) Cet énoncé peut évidemment paraître flou... Il resterait à préciser ce que l'on entend par "branches" de la directrice et à voir quels couples de branches concourent effectivement à la formation d'un arc de crête. Cela dépasserait le cadre de cet article. La propriété énoncée suffit pour rechercher les crêtes dans le cas simple où nous allons nous placer (les "branches" seront des arcs de cercle et des segments de droite).

Signalons, toutefois, qu'une "branche" peut se réduire à un point. Nous avons vu, en effet, qu'un point anguleux de la directrice, lorsqu'il formait un angle rentrant pour la plateforme, engendrait sur le tas de sable une portion de cône de révolution. Celui-ci peut donc fournir une crête dont les points sont équidistants du point anguleux, sommet du cône, et d'une autre partie de la directrice. Ce point ayant le même effet qu'un arc de cercle, on peut le considérer comme un arc de cercle de rayon nul.

(2) Elles peuvent aussi être confondues : dans ce cas, la crête est la ligne de niveau elle-même. Cela se produit lorsque les deux branches considérées de la directrice sont parallèles (exemples : la directrice est un rectangle, une couronne circulaire...).



## APPLICATION ET EXEMPLE

Appliquons ces diverses propriétés à l'étude des crêtes dans le cas particulier déjà signalé ci-dessus : celui d'une directrice formée d'arcs de cercle et de segments de droite qui en constituent les "branches".

1. La surface du tas de sable est, dans ce cas, constituée de portions de plans et de cônes de révolution à axes verticaux et de même angle au sommet. On sait, dans ces conditions, que leurs intersections sont des droites et des coniques. Par suite, la crête est formée (dans l'espace, donc aussi en projection) de segments de droite et d'arcs de conique.

2. Chaque point de la crête, est, en projection, équidistant soit de deux droites, soit d'une droite et d'un cercle, soit de deux cercles (ces cercles pouvant se réduire à des points). Cette crête est donc formée de portions d'ensembles classiques qui sont des droites et des coniques admettant les centres des cercles pour foyers.

3. Les points doubles ou anguleux des lignes de niveau ne peuvent être que des intersections soit de deux droites, soit d'une droite et d'un cercle, soit de deux cercles. On peut donc construire la crête par points et par tangentes avec la règle et le compas. On retrouve ainsi des constructions classiques de la théorie des coniques.

Tout cela sera plus clair sur un exemple. Supposons la directrice formée d'un demi-cercle de diamètre AB et des prolongements Ax et Bx' de ce diamètre (Fig. 3).

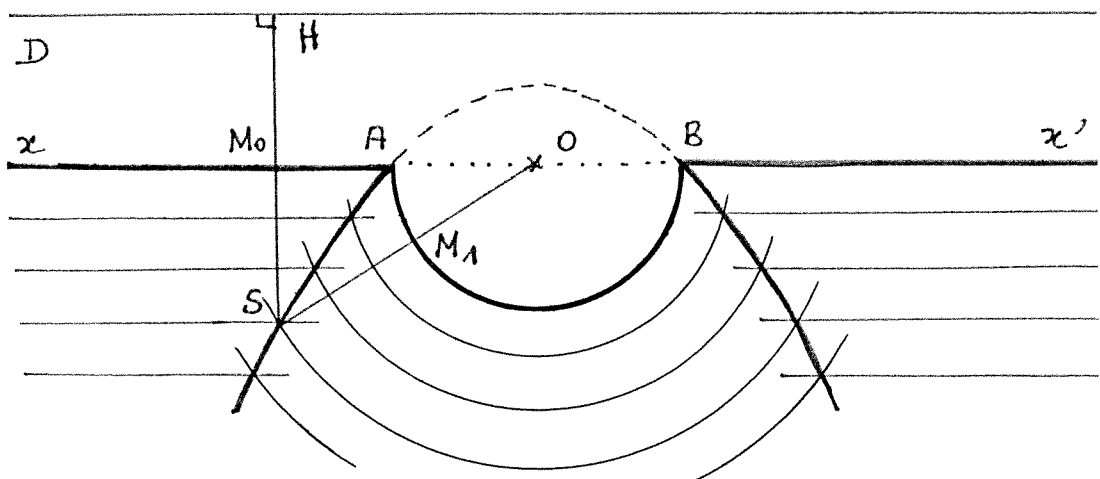


Fig. 3

Traçons des courbes de niveau (celles de cotes rondes comme les géographes...), d'une part celles qui sont relatives aux portions rectilignes de la directrice, d'autre part celles qui sont relatives au demi-cercle. Chaque droite de la première famille rencontre le

cercle (de même cote) de la deuxième famille en un point S de la crête.

Ce point S est équidistant de la partie rectiligne et de la partie circulaire de la directrice :

$$\|\vec{M_0S}\| = \|\vec{M_1S}\|.$$

Il est aussi équidistant des courbes de niveau correspondantes. En rajoutant la courbe de niveau fictive de cote  $-R$  ( $R$  étant le rayon du demi-cercle) – courbe réduite à une droite  $D$  et au centre  $O$  du demi-cercle –, on voit que :

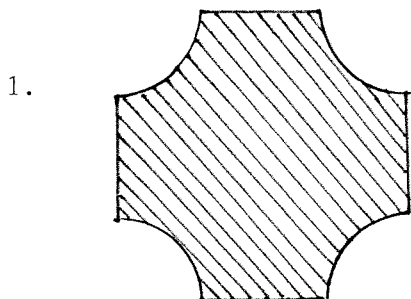
$$\|\vec{OS}\| = \|\vec{HS}\|.$$

La crête est donc formée de deux arcs d'une parabole de foyer  $O$  et de directrice  $D$ .

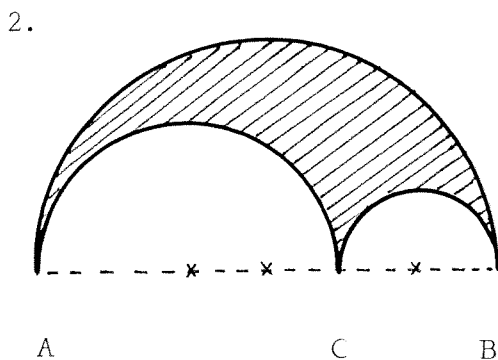
On découvre – ou on retrouve – ainsi les propriétés focales de la parabole... En utilisant une directrice formée de deux cercles on obtiendra de la même façon une hyperbole ou une ellipse...

#### EXERCICES PROPOSES AUX LECTEURS :

Dessiner le tas de sable obtenu avec les plateformes suivantes :



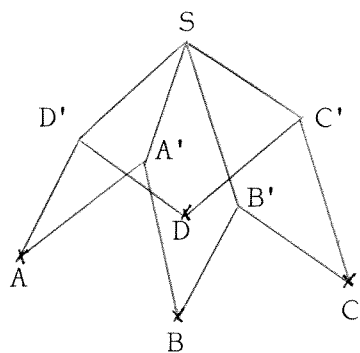
La directrice est un carré, échancré par quatre quarts de cercle de même rayon  $R$ . Si  $2a$  est le côté du carré  $R = a(\sqrt{2} - 1)$ . Examinez aussi le cas d'un rayon plus grand ou plus petit.



La directrice est limitée par trois demi-cercles tangents deux à deux. La crête est constituée par deux arcs d'ellipse et un arc d'hyperbole qui se coupent en un même point, équidistant des trois demi-cercles. (On peut construire ce point en utilisant une projection auxiliaire sur le plan vertical passant par  $AB$  et en traçant la courbe de niveau qui y passe.)

Un enfant escaladant un échafaudage apprend plus sur l'espace que dans tous les livres, constitués de feuilles bidimensionnelles

Alan Holden



Si vous vous promenez dans l'Orangerie printanière, votre regard sera sans doute attiré dans un pré par une petite construction élégante et moderne, où le rouge vif d'un cordage maillé contraste avec l'éclat métallique du cadre auquel il est suspendu. Cet objet décoratif a été offert par nos édiles à nos jeunes

enfants, qui y exercent avec un visible plaisir leurs talents innés de grimpeurs au-dessus d'un sable sécurisant.

Comme le montre la figure, le cadre haut de quatre mètres est constitué par douze barres égales formant quatre losanges, dont l'angle aigu a  $60^\circ$ . Sur la base horizontale carrée ABCD s'appuient des triangles isocèles AA'B, BB'C, CC'D et DD'A. Comme exemple simple d'activité mathématique à partir du concret vous pouvez poser à vos élèves les questions suivantes :

PROBLEMES :

- 1) Montrer que les triangles cités sont rectangles et verticaux.
- 2) Calculer la longueur des barres.
- 3) En ajoutant par la pensée au cadre son symétrique par rapport au plan de base, on forme un dodécaèdre intéressant : ses faces sont des losanges, dont quatre carrés, et ses vingt-quatre arêtes sont égales.  
Montrer qu'il est deux fois plus long que large.  
Trouver son aire et son volume.

4) Sur ce polyèdre, ainsi que sur le polyèdre défini par le cadre et sa base, vérifier la relation d'Euler :

$$s - a + f = 2$$

entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces.

#### OBSERVATION

Et le cordage ? Observez-le attentivement à l'occasion : vous y découvrirez avec étonnement une amorce de pavage de l'espace par des octaèdres tronqués semi-réguliers\*. (Chacun a pour faces huit hexagones réguliers et six carrés).

Pour l'observation de polyèdres - leur contemplation dirais-je presque - je voudrais vous signaler un livre, remarquable de simplicité, sur les solides de Platon, d'Archimède, de Kepler, etc... : "Formes, espace et symétries" par Alan Holden (traduit de l'anglais, Cédic 1979). Il n'y a aucun calcul, mais par contre il y a plus de deux cent belles photos, entre autres des huit ~~delta~~ octaèdres : polyèdres convexes dont les faces sont des triangles équilatéraux égaux (le "delta" de la lettre grecque - suggérant la forme des faces) et de nombreux et esthétiques solides : figures spatiales sans volume, à faces polygonales.

Cet ouvrage peut être consulté à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

---

\* Il n'existe pas d'autre pavage semi-régulier de l'espace.

---

RESOLUTION PAR LE PLIAGE DE L'EQUATION DU TROISIEME DEGRE  
ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

par Jacques JUSTIN

---

## 1. INTRODUCTION

Il est bien connu que si on amène par pliage un point A sur une droite D, le pli obtenu est tangent à la parabole de foyer A et de directrice D. Si on répète l'opération de nombreuses fois, on voit se dessiner la parabole comme "enveloppe" des plis marqués. Amener un point sur une droite pouvant se faire d'une infinité de façons, l'idée vient naturellement d'imposer une autre condition. Par exemple, si l'on impose au pli de passer par un certain point B, on obtient les tangentes menées de B à la parabole. Mais on peut aussi bien imposer la condition suivante : amener en même temps un certain point A' sur une certaine droite D'. Le pli obtenu sera alors tangent à la fois à la parabole précédente et à la parabole de foyer A' et de directrice D'. Nous venons de résoudre le problème suivant : construire les tangentes communes à deux paraboles données. Or, ceci est une construction impossible, en général, avec la règle et le compas car elle correspond à la résolution d'une équation du troisième degré.

Nous allons voir que l'opération "amener au moyen d'un seul pli deux points donnés, respectivement, sur deux droites données" permet de résoudre l'équation générale du troisième degré. Nous donnerons quelques applications et examinerons enfin d'une façon un peu plus systématique les constructions possibles par pliage.

## 2. ETUDE ANALYTIQUE

Pour simplifier les calculs nous supposerons que les droites sont perpendiculaires et nous les prendrons comme axes de coordonnées. Nous verrons en 3. comment passer sans calculs au cas de droites faisant un angle quelconque. Quant au cas particulier où les droites sont parallèles, nous verrons en 8. à quoi il se ramène.

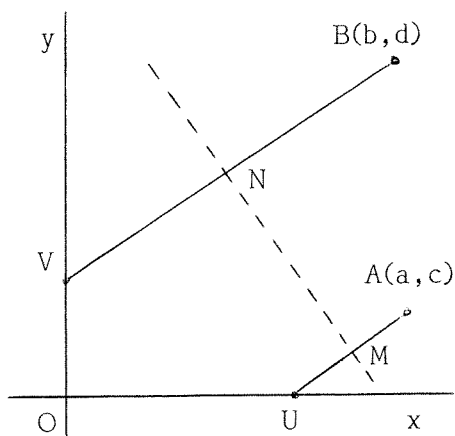


Fig. 1

Soit donc, figure 1, à amener  $A(a, c)$  sur  $Ox$  et en même temps  $B(b, d)$  sur  $Oy$ . Après pliage,  $A$  vient en  $U$  et  $B$  en  $V$ . Si  $M$  et  $N$  sont les milieux de  $AU$  et de  $BV$ , le pli est la médiatrice  $MN$  de  $AU$  et de  $BV$ . Prenons comme inconnue la pente commune de  $AU$  et de  $BV$ , soit  $t$ .

En calculant les coordonnées de  $M$  et de  $N$ , puis en écrivant que la pente de  $MN$  est  $-1/t$ , on obtient l'équation :

$$bt^3 + (c - 2d)t^2 + (2a - b)t - c = 0 \quad (1)$$

L'équation (1) peut s'identifier à l'équation générale du troisième degré, disons  $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ .

Il suffit de poser :

$$a = \frac{q+1}{2}, \quad b = 1, \quad c = -r, \quad d = -\frac{p+r}{2} \quad (2)$$

Par conséquent, l'opération de pliage considérée permet de résoudre, très simplement, l'équation générale du troisième degré.

Remarque : L'équation du 3e degré (à coefficients réels) ayant une ou trois racines réelles, il y aura, à part les cas dégénérés, une ou trois façons de faire le pli.

### 3. ANGLE QUELCONQUE

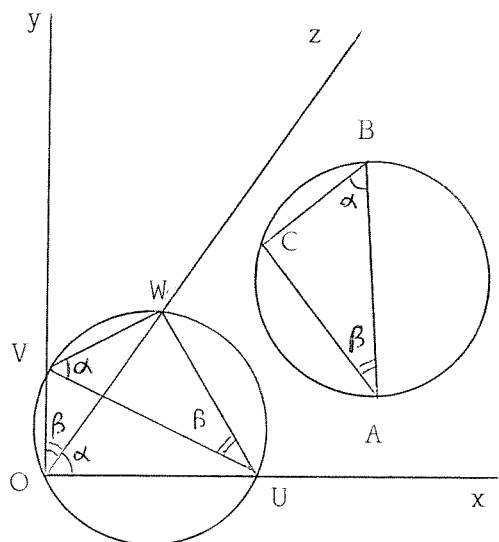


Fig. 2

Reprenons sur la figure 2 les éléments de la figure 1, et soit  $Oz$  une droite quelconque passant par  $O$ . Traçons le cercle circonscrit au triangle  $OUV$ . La droite  $Oz$  recoupe ce cercle en  $W$ . Posons  $\widehat{xOz} = \alpha$  et  $\widehat{yOz} = \beta$ . Les propriétés des angles inscrits donnent  $\widehat{UVW} = \alpha$  et  $\widehat{VUW} = \beta$ .

Il est alors facile de construire le point  $C$  qui vient en  $W$  par le pliage. Il est en effet donné par  $\widehat{BAC} = \beta$  et  $\widehat{ABC} = \alpha$ .

Au lieu de faire le pli en amenant  $A$  sur  $Ox$  et  $B$  sur  $Oy$ , on aurait obtenu le même résultat en amenant  $A$  sur  $Ox$  et  $C$  sur  $Oz$ .

On aurait même pu substituer aussi à  $Ox$  une autre droite quelconque passant par  $O$  et à  $A$  un point convenablement construit. D'une façon réciproque, l'opération que nous pourrions noter  $(A \rightarrow D, A' \rightarrow D')$ , avec les droites  $D$  et  $D'$  quelconques, se ramène à une opération analogue avec des droites perpendiculaires. On peut en tirer deux conclusions :

a) L'emploi de droites formant un angle quelconque n'augmente pas la puissance de l'opération, qui reste la capacité de résoudre l'équation du troisième degré.

b) Si l'on a trouvé une certaine construction utilisant une opération ( $A \rightarrow D, A' \rightarrow D'$ ) on peut trouver d'autres constructions ayant le même résultat en remplaçant D et D' par d'autres droites ayant le même point d'intersection.

Remarque : L'étude géométrique que nous venons de faire est apparentée au Théorème de LA HIRE (1640-1718) :

"Si un cercle mobile de rayon  $R/2$  roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon  $R$ , tous les points du cercle mobile décrivent des diamètres du cercle fixe."

Revenons à la figure 2. Lorsqu'on retourne la partie du papier contenant A et B, dans le but de faire le pli, on fait glisser A sur Ox et B sur Oy jusqu'à ce que le pli puisse se former. Pendant ce mouvement, le cercle de diamètre AB, retourné, est le cercle mobile du théorème de La Hire. Lorsque A est en U et B en V, sa position est le cercle circonscrit à OUV. Tous ses points, décrivent des segments de droites passant par O. Par exemple C décrit un segment de la droite Oz.

#### 4. TRISECTION DE L'ANGLE

4.1 Diviser un angle en trois parties égales avec la règle et le compas est un problème célèbre. Depuis l'Antiquité on a cherché à le résoudre, jusqu'à ce que WANTZEL, en 1837, démontre que c'est impossible.

Par contre, il existe de nombreuses méthodes utilisant des courbes, des instruments ou des mécanismes particuliers. Nous allons voir que le pliage, grâce à l'opération étudiée ci-dessus est un de ces moyens.

4.2 Si  $m$  est la tangente d'un angle  $\theta$ , la tangente  $t$  de  $\theta/3$  vérifie l'équation  $t^3 - 3mt^2 - 3t + m = 0$ .

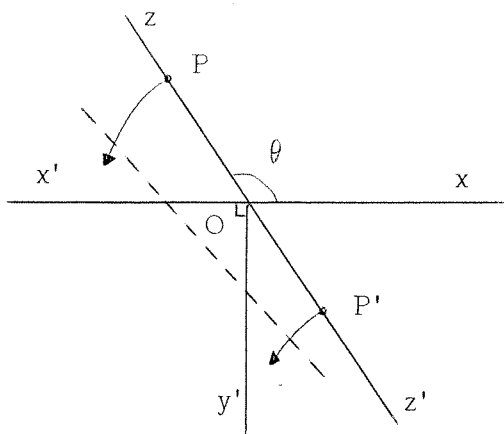


Fig. 3

En identifiant avec l'équation (1) au moyen des formules (2) on obtient pour les points A et B de la figure 1 les coordonnées  $A(-1, -m)$  et  $B(1, m)$ . D'où la construction pour diviser en trois l'angle  $\theta = \widehat{xOz}$  de la figure 3: prolonger Ox et Oz et Ox' et Oz'. Tracer Oy' perpendiculaire à Ox. Marquer P sur Oz et P' sur Oz' à égale distance de O. Faire ( $P \rightarrow Ox', P' \rightarrow Oy'$ ).

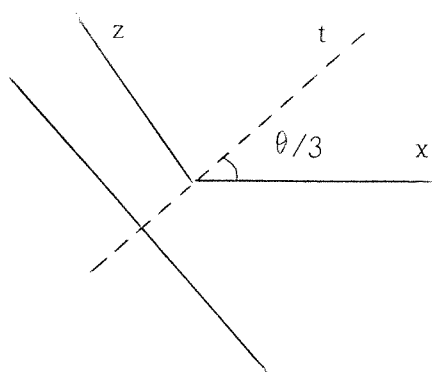


Fig. 4

Mener de O la perpendiculaire Ot au pli obtenu. On a  $\widehat{xOt} = \theta/3$  (Fig. 4).  
Il peut être intéressant de donner une preuve géométrique.

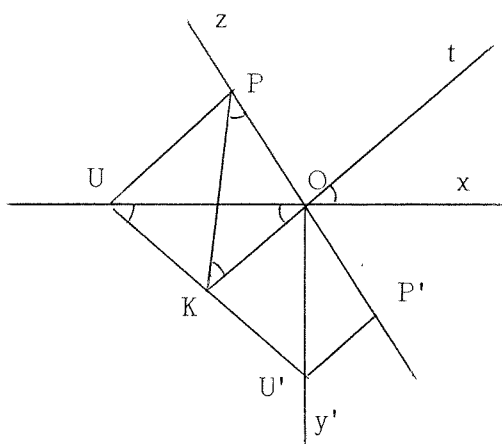


Fig. 5

Soient U et U' les positions de P et P' après pliage (figure 5) et soit K le milieu de UU'. Le triangle UOU' étant rectangle, on a  $\widehat{UOK} = \widehat{KUO} = \alpha$ .  
Le trapèze PUU'P' admettant le pli (non dessiné) comme axe de symétrie, tous les autres angles indiqués ont pour valeur  $\alpha$ .  
On a donc, dans le triangle KPO  
 $\widehat{KPO} + \widehat{POK} + \widehat{OKP} = \pi$ , c'est-à-dire  
 $3\alpha + \widehat{UOP} = \pi$ , c'est-à-dire  
 $3\alpha = \widehat{xOz} = \theta$ , d'où  $\widehat{xOt} = \theta/3$ .

4.3 En utilisant la méthode géométrique indiquée en 3., on peut, en partant de la trisection ci-dessus, trouver d'autres méthodes, par exemple la suivante (Fig. 6).

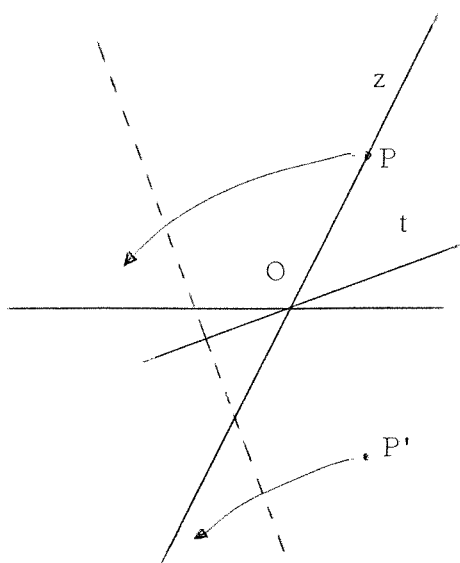


Fig. 6

Choisir un point P arbitraire sur le côté Oz de l'angle à trisecter  $\widehat{xOz}$ . Prendre le symétrique P' de P par rapport à Ox.  
Effectuer  
(P  $\rightarrow$  Ox, P'  $\rightarrow$  Oz).  
La ligne Ot telle que  
 $\widehat{xOt} = \widehat{xOz}/3$  est la perpendiculaire menée de O au pli obtenu.



### 5. RACINES CUBIQUES

L'équation donnant la racine cubique de  $m$  est  $t^3 - m = 0$ . En identifiant à (1) au moyen des formules (2), on obtient les coordonnées  $A(\frac{1}{2}, m)$  et  $B(1, \frac{m}{2})$  (Fig. 7).

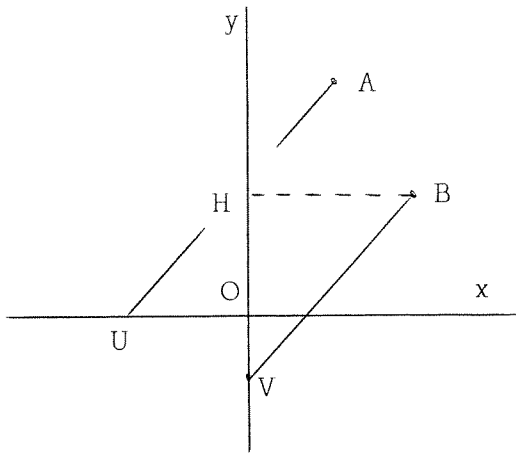


Fig. 7

On effectue  $(A \rightarrow Ox, B \rightarrow Oy)$ .

Soit  $V$  la position occupée par  $B$  après pliage et soit  $H$  la projection de  $B$  sur  $Oy$ .

La racine cubique  $t$  cherchée est égale à la longueur  $VH$  puisque

$$t = \frac{VH}{HB} = \frac{VH}{1}.$$

### 6. HEPTAGONE REGULIER

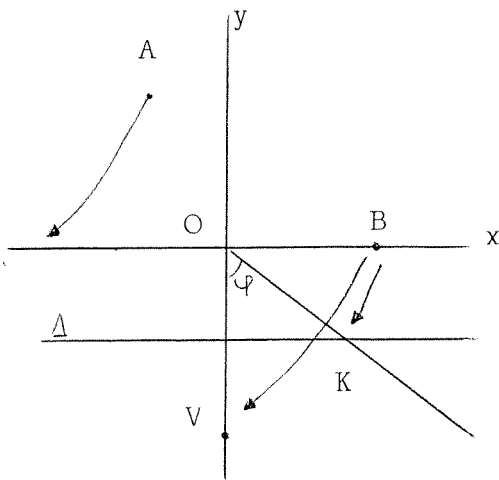


Fig. 8

Soit  $\Psi = \frac{2\pi}{7}$  l'angle au centre de l'heptagone régulier. On sait que  $x = e^{i\Psi}$  vérifie l'équation  $x^7 - 1 = 0$ . L'étude de cette équation conduit à poser  $t = x + \frac{1}{x} = 2\cos \Psi$  et montre que  $t$  est solution de l'équation du 3e degré

$$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0.$$

En identifiant à (1) comme précédemment on trouve  $A(-\frac{1}{2}, 1)$  et  $B(1, 0)$ .

L'opération  $(A \rightarrow Ox, B \rightarrow Oy)$  amène  $B$  en  $V$  (figure 8). On a  $OV = t = 2 \cos \Psi$ . Traçons la médiatrice  $\Delta$  de  $OV$ . Amenons  $B$  sur  $\Delta$  au moyen d'un pli passant par  $O$ . Soit  $K$  la position de  $B$  après pliage. On obtient  $\widehat{VOK} = \Psi$ .

### 7. EQUATION DU QUATRIEME DEGRE

On sait, depuis FERRARI (1522-1565), que l'équation générale du 4e degré peut se résoudre en utilisant une équation du troisième degré appelée la résolvante. Par conséquent on peut, par le pliage, résoudre l'équation du 4e degré. Par exemple, on peut trouver les points d'intersection de deux coniques, ou encore leurs tangentes communes. Cela sera très laborieux.

Nous avons rappelé en 1. que les plis obtenus en amenant un point sur une droite sont tangents à une parabole. De même si on amène un point A sur un cercle (C), le pli obtenu est tangent à la conique admettant A comme foyer et (C) comme cercle directeur relatif à l'autre foyer. Par conséquent si l'on amène par un pli A sur (C) et en même temps un autre point A' sur un autre cercle (C') on obtiendra une tangente commune à deux coniques connues. On aura ainsi résolu de façon simple une équation du 4e degré.

En conclusion, si l'on utilise en plus du pliage un compas pour tracer des cercles, on ne résoudra pas plus d'équations qu'avec le pliage seul, mais on gagnera en simplicité.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les équations avaient leurs coefficients réels. Montrons maintenant que le pliage permet de résoudre les équations du 3e degré (et du 4e) à coefficients complexes. Naturellement, déterminer par pliage un nombre complexe voudra dire trouver sa partie réelle et sa partie imaginaire ou, ce qui revient au même, trouver son module et son argument.

Soit donc une équation du 3e degré à coefficients complexes. On la résout au moyen des formules de CARDAN (1501-1576) qui expriment les solutions par des sommes de racines cubiques. Soit donc à calculer les racines cubiques d'un nombre complexe  $z = r e^{i\varphi}$ , de module r et d'argument  $\varphi$ . Le module d'une racine est tout simplement  $\sqrt[3]{r}$  que l'on sait obtenir (voir 5.) et son argument est tout simplement  $\varphi/3$  que l'on sait aussi obtenir (voir 4.).

## 8. OPERATIONS ELEMENTAIRES DE PLIAGE

8.1 Pour étudier les constructions géométriques possibles par pliage, il faut fixer de façon précise les opérations autorisées. Ceci nécessite des conventions dont le détail serait fastidieux et qui sont susceptibles de variantes. Nous résumerons en disant que les opérations élémentaires sont celles qui consistent à faire un pli puis à déplier. Le résultat est une ligne droite, la marque du pli. Le pli sera déterminé par une ou deux conditions, par exemple amener un point P sur un point P' ou sur une droite D, etc... En utilisant une notation inspirée de Peter MESSER, dressons une liste des opérations élémentaires. Les lettres P représentent des points et les lettres D des droites. La colonne Contrainte indique les conditions à respecter pour que le pli ne puisse se faire que d'un nombre fini de façons (indiqué dans la colonne Nombre).

| Opération                                | Contrainte   | Résultat en général                            | Nombre  |
|--|--|--|---------|
| ① $(P \rightarrow P, P' \rightarrow P')$ | $P \neq P'$  | Droite $PP'$                                   | 1       |
| ② $(P \rightarrow P')$                   | $P \neq P'$  | Médiatrice de $PP'$                            | 1       |
| ③ $(P \rightarrow P, D \rightarrow D)$   |  | Perpendiculaire menée de $P$ à $D$             | 1,2     |
| ④ $(P \rightarrow D, D' \rightarrow D')$ | $\neg (P \in D \text{ et } D // D')$   | Projection de $P$ sur $D$ parallèlement à $D'$ | 0,1     |
| ⑤ $(D \rightarrow D')$                   | $D \neq D'$  | Bissectrices de $\widehat{D, D'}$              | 1,2     |
| ⑥ $(P \rightarrow D, P' \rightarrow P')$ | $\neg (P = P' \in D)$  | Solution équation du 2e degré                  | 0,1,2   |
| ⑦ $(P \rightarrow D, P' \rightarrow D')$ | $\{P, P'\} \not\subset D \cap D'$<br>et<br>$\{P, D\} \neq \{P', D'\}$<br>et<br>$(P \notin D \text{ ou } P' \notin D' \text{ ou } D \cap D' = \emptyset)$ | Solution équation 3e degré                     | 0,1,2,3 |

Remarques :

a) Certaines opérations peuvent dégénérer dans des cas particuliers. Par exemple, si  $P' \in D'$ , l'opération ⑦ se décompose en  $(P \rightarrow D, P' \rightarrow P')$ , c'est-à-dire ⑥ et en  $(P \rightarrow D, D' \rightarrow D')$ , c'est-à-dire ④. On peut si on le souhaite imposer des conditions pour éviter ces dégénérescences.

b) Si  $D // D'$ , ⑤ donne la parallèle équidistante de  $D$  et  $D'$ .

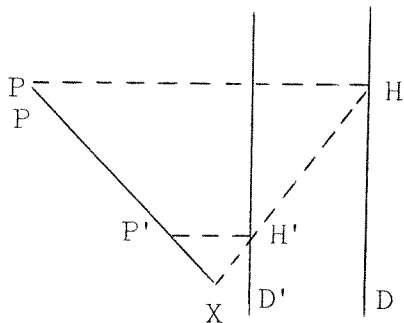


Fig. 9

c) Nous avons vu en 2. et 3. que l'opération ⑦ résout l'équation du 3e degré si  $D$  et  $D'$  sont concourantes. Si  $D // D'$  (fig. 9), menons les perpendiculaires  $PH$  à  $D$  et  $P'H'$  à  $D'$ .  $HH'$  rencontre  $PP'$  en  $X$ . L'opération ⑦ donne le même pli que l'opération  $(P \rightarrow D, X \rightarrow X)$  qui est du type ⑥. En effet on voit facilement que  $X$  appartient au pli.

8.2 Nous pouvons maintenant définir les constructions réalisables par pliage. Ce seront celles qui respectent les règles suivantes :

- a) On part d'un certain nombre de points et de droites considérés comme déjà construits (ou connus).
- b) Tout pli obtenu par une opération ① à ⑦ à partir d'éléments déjà construits sera considéré comme une droite construite.
- c) L'intersection de deux droites construites sera considérée comme un point construit.

Il est à remarquer que l'on n'utilise pas les facilités suivantes : marquer avec un crayon les positions de points ou de droites après pliage, plier plusieurs épaisseurs du papier ensemble. Ces facilités peuvent simplifier certaines constructions mais n'apportent aucune possibilité nouvelle.

Une façon d'apprécier la puissance du pliage en matière de constructions consiste à étudier les nombres "constructibles par pliage". Un nombre sera constructible par pliage s'il est la coordonnée  $x$  ou  $y$  d'un point que l'on peut construire en partant des seuls points  $(0,0)$  (origine des coordonnées) et  $(1,0)$ . Cette définition est analogue à celle des nombres constructibles avec la règle et le compas.

a) Supposons d'abord que les seules opérations autorisées soient ① à ④. Dans ce cas, les seuls nombres constructibles sont ceux de la forme  $\frac{a}{2^n}$ , avec  $a$  entier entre 0 et  $2^n$ , et  $n$  entier positif. Si toutefois on ajoute le point  $(0,1)$  aux deux points de départ, on peut construire tous les rationnels (les fractions).

b) Avec les opérations ① à ⑤ les nombres constructibles constituent un "corps",  $K_1$ .

c) Avec ① à ⑥ on obtient un corps,  $K_2$ , qui est celui des nombres constructibles avec la règle et le compas. Cela s'explique parce que ⑥ correspond à l'intersection du cercle de centre  $P'$  et de rayon  $P'P$  avec la droite  $D$ .

d) Avec ① à ⑦ on obtient un corps encore plus gros,  $K_3$ . Les corps  $K_1, K_2, K_3$  sont les plus petits sous-corps du corps des réels ayant la propriété suivante :

- pour  $K_1$  :  $x \in K_1$  et  $y \in K_1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in K_1$ ,

- pour  $K_2$  :  $x \in K_2$  et  $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in K_2$ ,

- pour  $K_3$  : si  $p \in K_3$  et  $q \in K_3$ , les racines réelles de  $x^3 + px + q = 0$  appartiennent à  $K_3$ .

Remarque : Les groupes d'opérations mentionnés plus haut sont redondants. Par exemple, il suffit de ① ② et ⑤ pour obtenir tous les nombres de  $K_1$ .

8.3 En ce qui concerne leur réalisation physique, les opérations ① à ⑦ sont de deux types :

- pour réaliser ① ( $P \rightarrow P, P' \rightarrow P'$ ), on courbe le papier au voisinage de  $PP'$  puis on pince progressivement de façon à obtenir le pli  $PP'$ . Cela exige de surveiller ce qui se passe dans la partie courbée du papier. Les opérations ③ et ⑥ qui imposent au pli de passer par un point donné sont du même type.
- par contre, pour réaliser ② ( $P \rightarrow P'$ ) on amène  $P$  sur  $P'$  et on aplatit en maintenant la coïncidence des deux points. Les opérations ④, ⑤ et ⑦ sont du même type, elles se réalisent en imposant certaines conditions de position relative à deux parties du papier qui reposent à plat l'une sur l'autre. Le pli se forme automatiquement dans la bonne position quand on aplatit l'ensemble de la feuille. Ceci serait facile à réaliser mécaniquement en munissant les points de tétons et les droites de glissières. Par exemple, pour ② une simple épingle suffit.

Les opérations du second type sont donc, en un certain sens plus simples que celles du premier. Il est assez curieux que toutes les opérations ① à ⑦ puissent être remplacées par deux opérations seulement, du second type, à savoir ② ( $P \rightarrow P'$ )  $P \neq P'$  et une restriction de ⑦ :

$$\textcircled{7\text{bis}} : (P \rightarrow D, P' \rightarrow D') P \notin D, P' \notin D', P \neq P'.$$

## 9. CONCLUSION

9.1 A la suite de l'annonce en Juin 1984 des résultats qui précèdent, nous avons reçu du Professeur K. HUSIMI une solution par pliage pour la trisection publiée en 1980 par K. ABE dans une revue japonaise. Le bruit de cette découverte était déjà parvenu en Europe mais aucune précision ni sur l'auteur ni sur la méthode n'avait pu être obtenue, de sorte que la chose avait été considérée avec scepticisme. La solution de Mr ABE est celle que nous donnons en 4.2, avec en plus une adaptation pratique au carré traditionnel.

Un peu plus tard, en Juillet 1984, Peter MESSER (U.S.A.) nous envoyait un papier donnant l'équation du pli pour les diverses opérations élémentaires, ainsi qu'une méthode élégante pour diviser le côté d'un carré dans le rapport  $\sqrt[3]{2}$ .

9.2 Le fait que le pliage permette de résoudre l'équation générale du 3e degré prouve que le pliage est un procédé plus puissant que la règle et le compas pour faire des constructions géométriques. Ceci est remarquable pour deux raisons :

- d'abord parce que le pliage ne met en jeu que des moyens très simples,

- mais surtout parce que pendant très longtemps personne ne semble s'être intéressé à l'opération ⑦, ou en tout cas n'a jugé utile de publier ses résultats. Une fois venue l'idée d'étudier cette opération, son étude s'effectue sans difficulté. L'opération ⑦ est en fait peu utilisée en pliage. Le seul exemple que nous en ayons vu se trouve dans "The Silver Rectangle", page 25 (BOS Booklet n° 21). Une réflexion systématique aurait cependant dû conduire à cette opération.

9.3 En fait la croyance commune était que le pliage permet exactement les mêmes constructions que la règle et le compas. Pourtant certains éléments auraient dû inciter à la réflexion :

- une remarque de Steven BARR disant qu'il serait aussi facile de diviser un angle en trois qu'en deux par pliage si l'on avait plusieurs paires de mains,
- la possibilité connue depuis longtemps d'obtenir tout polygone régulier ayant un nombre impair de côtés en faisant un noeud avec une bande de papier.

En réalité, ces deux cas ne correspondent pas à des opérations élémentaires, mais à des opérations avec plis simultanés, où des conditions compliquées sont imposées aux plis (soit à l'aide des mains multiples, soit, dans le cas du noeud, mécaniquement par le fait que le papier ne peut pas se traverser). Peut-on définir de telles opérations ? Peut-on émettre la conjecture qu'avec elles, toute équation algébrique peut être résolue par pliage ?

## 10. BIBLIOGRAPHIE

- ABE K. - Angle trisection possible by origami (en japonais), Science of Origami, p. 8, supplément à Saiensu, Oct. 1980 (édition japonaise de Scientific American)
- BARR S. - Origametry defined, The Origamian 6,3 (1966), p. 4
- CARREGA J.C. - Théorie des Corps, la Règle et le Compas, Hermann, 1981 (\*)
- JOHNSON D.A. - Paperfolding for the Mathematics Class, National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A., 1971
- JUSTIN J. - Exact angle trisection by Origami (1/6/84)
- MESSER P. - Summary of all irreducible cases of simultaneous superimpositions of elements in a folding plane...
- ROW S. - Geometric exercises in paper folding (1901) Dover, 1966
- MURRAY W. - RIGNEY F. - Paperfolding for beginners, Dover, 1960 (\*)

(\*) à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

11. ADDITIF

Des recherches récentes du Professeur HUZITA (un Japonais, enseignant en Italie) viennent de déceler un article vieux de cinquante ans qui donne déjà la propriété du pliage étudiée ici. Il s'agit de :

"Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici", par M. PIAZOLLA BELLOCH, dans Periodico di Mat. IV, XVI, n° 2 (1936) p. 104-108.

La méthode par pliage y apparaît comme apparentée à un procédé de résolution graphique de l'équation du 3e degré dû à LILL et exposé à la fin du livre de Félix KLEIN :

"Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus", Bd II (Springer, Berlin, 1926).

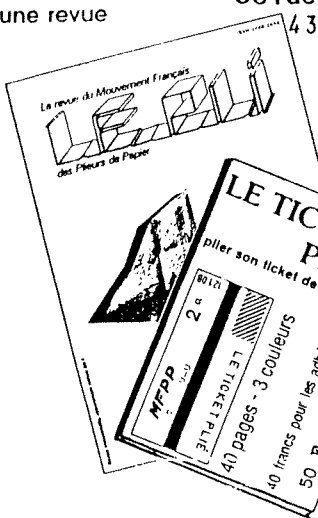
**Mouvement Français des Plieurs de Papier**

Association Loi 1901 créée en 1978


56 rue Coriolis 75012 Paris  
43.43.01.69

une revue des manuels de pliage

500 adhérents  
des expositions  
un festival



**LE TICKET PLIÉ**  
Plier son ticket de métro  
40 pages - 3 couleurs  
40 francs pour les adhérents  
50 F pour les autres



**PLIAGES 1**  
Initiation et perfectionnement  
60 F pour les autres  
40 francs pour les adhérents

Egalement  
PLIAGES 2 (perfectionnement)  
35 F (adhérents) 50 F (autres)

Je désire adhérer au M.F.P.P. et recevoir "LE PLI". Je joins à ce bulletin dûment rempli, un chèque de 150 francs (170frs pour l'étranger) à l'ordre du M.F.P.P., et 5 timbres à 2, 10 francs.

TARIF 86

Mlle  Nom : .....

Mme  Prénom : .....

Mr  Né(e) le : .....

Adresse : .....

Code postal : .. Ville : .....

Tél. : .. Pays : .....

Profession : .....

Ecrire en lettres capitales

**Bulletin d'adhésion**

Je m'engage à ne faire qu'un usage privé et non commercial des documents qui me seront prêtés ou fournis par le M.F.P.P. conformément aux règles concernant le copyright et la protection des droits des auteurs.

date :

Signature :

.....  
Précédée de la mention "lu et approuvé"

Signature des parents pour les mineurs.

---

PETITE HISTOIRE DE PENTAGONE

F. PLUVINAGE

---

Du directeur de l'Ecole Normale de Bar-le-Duc, M. Christian Becques, nous est parvenu le document extrait d'un cahier de l'abbaye de Boscodon sur l'Art des bâtisseurs romans, cahier dont une partie est consacrée à la géométrie. La construction du pentagone proposée par Dürer peut rendre perplexe si on la croit exacte, alors qu'elle n'est qu'approchée. Mais elle est si bien approchée que l'usage des instruments géométriques ne met pas d'écart appréciable en évidence. L'article de Nicole Vogel, une spécialiste de l'utilisation de la table traçante associée à un ordinateur, montre tout le parti que l'on peut tirer de cette question en faisant divers tracés relatifs à cette construction. Nous espérons que de tels articles, s'ajoutant à ceux sur la géographie et la représentation de solides antérieurement parus, inciteront certains collègues à envisager pour leur établissement l'équipement de cet instrument merveilleux qu'est une table traçante : la précision des tracés, leur caractère durable et reproductible par simple photocopie en font un outil irremplaçable pour un enseignement mathématique qui vise la qualité des productions matérielles aussi bien qu'intellectuelles.

Tout en soumettant à Nicole Vogel ce problème qui me paraissait intéressant pour être exploité sur la table traçante, j'en avais parlé à M. l'inspecteur général J. Vitard à l'occasion d'une réunion sur l'évaluation, et J. Vitard avait dans un coin de sa mémoire (étendue) le souvenir d'avoir rencontré le pentagone de Dürer dans le Journal de Mathématiques Élémentaires d'il y a un siècle. Comme nous n'avons pas les numéros de cette époque à la bibliothèque du Département de Mathématiques à Strasbourg, il m'a fait une photocopie de ce court article de 1885. Les références citées font de cet article une petite tranche d'histoire des mathématiques élémentaires, qui pourra intéresser les lecteurs. Ce qui pourra aussi retenir leur attention est la différence entre les figures à la règle et au compas des documents reproduits et les figures à la table traçante de l'article de Nicole Vogel.



SUR LE PENTAGONE D'ALBERT DÜRER

La construction que nous avons indiquée dans le numéro précédent (\*\*), donne lieu à une observation importante qui nous a été communiquée par M. Catalan.

Mais d'abord une lettre employée deux fois par M. Dufrenoy, qui nous avait signalé cette construction, a rendu celle-ci inintelligible. Pour éviter toute confusion, voici la figure qui convient à la construction citée ; la lettre E visée dans les trois dernières lignes de la lettre de M. Dufrenoy doit être remplacée par D.

Une remarque plus intéressante porte sur ce fait que le pentagone construit, conformément à la règle donnée, n'est pas régulier.

La construction indiquée est due à Albert Dürer (\*\*\*)

(\*\*) Voyez Journal, p. 45.  
 (\*\*\*) Alberti Düreri Institutionum,.... (1606), p. 55.

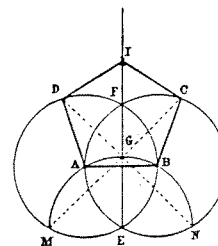
Elle a été signalée par M. Catalan dans la Nouvelle Correspondance mathématique (t. II, 1876 p. 403). M. Catalan, en faisant connaître cette construction d'Albert Dürer, proposait de calculer les angles de ce pentagone équilatéral.

Cette question a été résolue par M. VanAubel (Nouvelle Correspondance mathématique, t. III ; 1877, p. 386), qui a trouvé, pour les angles du pentagone, les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} A = B &= 108^{\circ} 22' 1'' \\ C = D &= 107^{\circ} 2' 8'' \\ I &= 109^{\circ} 11' 42'' \end{aligned}$$

Le pentagone d'Albert Dürer est donc à peu près régulier, mais il ne doit pas être donné comme régulier, ainsi qu'on paraît l'avoir dit à tort (\*).

G.L.



(\*) Illustrated London Practical Geometry. — Éléments de géométrie pratique, par G. de Volder, p. 153; deuxième édition; Gand 1877.

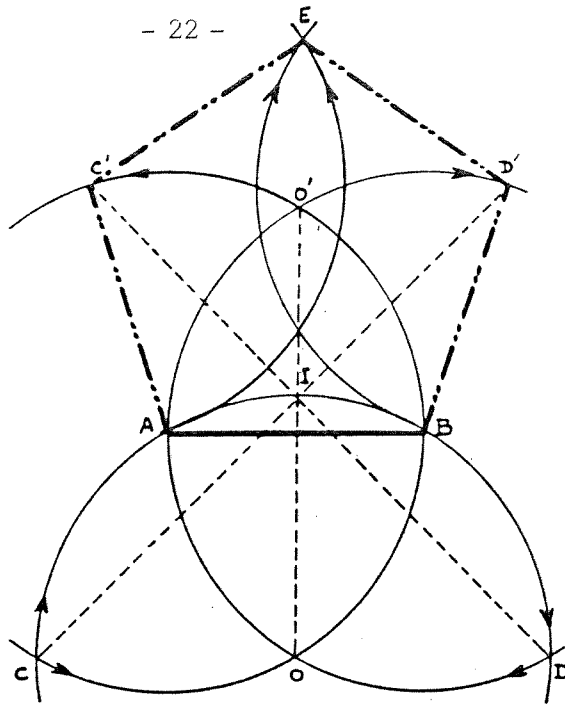


Fig. 1  
Cahier de l'Abbaye  
de Boscodon n° 4

Construction du pentagone.

méthode d'Albert Dürer (1471-1528)

1. Segment AB, côté du pentagone.
2. Tout le tracé se fait avec la même ouverture de compas, égale à AB.
3. De A comme centre : arc CC'.
- De B comme centre : arc DD'.
- De O comme centre : arc CD
4. On trace les droites OO'; C1D'; DIC'.
5. De C' comme centre : arc AE.
- De D' comme centre : arc BE.

Un très joli tracé.

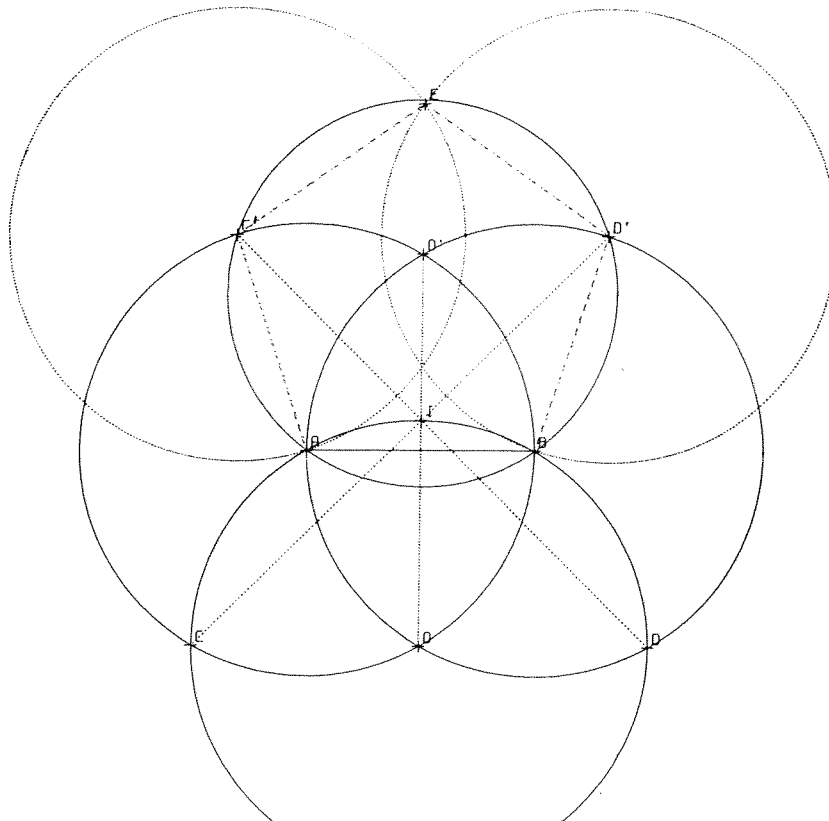


Fig. 2

---

LE PENTAGONE DE DÜRER SOUS LA LOUPE INFORMATIQUE

Nicole VOGEL

---

On attribue à Albert Dürer la construction suivante (Fig. 1, extraite du Cahier de l'Abbaye de Boscodon, n° 4, qui a pour joli titre "L'Art des bâtisseurs romans").

Un très joli tracé... ? Pas de doute, il est joli et les cinq côtés du pentagone sont égaux, par construction.

Refaisons cette figure sur une table traçante, en y ajoutant le cercle passant par A, B et D' (Fig. 2).

Tiens ! Le cercle ne passe pas par E ! La très grande précision du tracé ne peut pas être mise en cause ici. Le pentagone obtenu ne semble donc pas régulier. Calculons les mesures en degrés des angles  $\hat{B}$ ,  $\hat{D}'$ ,  $\hat{E}$  du pentagone, en utilisant un soupçon de géométrie analytique (dans les notations, nous ne distinguerons pas les angles de leur mesure en degré, les sinus et cosinus majuscules et minuscules n'étant plus très "blécas"). Prenons le repère (O, D, I).

On a :

$$AB = BD' = 1$$

donc

$$\vec{AB} \cdot \vec{D'B} = \cos \hat{B}.$$

Les coordonnées de  $\vec{AB}$  sont (1,0) donc  $\cos \hat{B} =$  abscisse de  $\vec{D'B}$ .  $D' \in (CI)$ , donc D' a pour coordonnées (x, x+1) et  $\vec{D'B} \left( \frac{1}{2} - x, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - x \right)$ . En résolvant l'équation en x ( $BD'^2 = 1$  et  $x > 0$ ), on trouve :

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

On en déduit :

$$\cos \hat{B} = \frac{1}{2} - x = \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

et

$$\hat{B} = \text{Arc cos} \left( \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4} \right),$$

c'est-à-dire

|                                      |
|--------------------------------------|
| $\hat{B} \simeq 108^\circ 21' 58''.$ |
|--------------------------------------|

Fig. 3

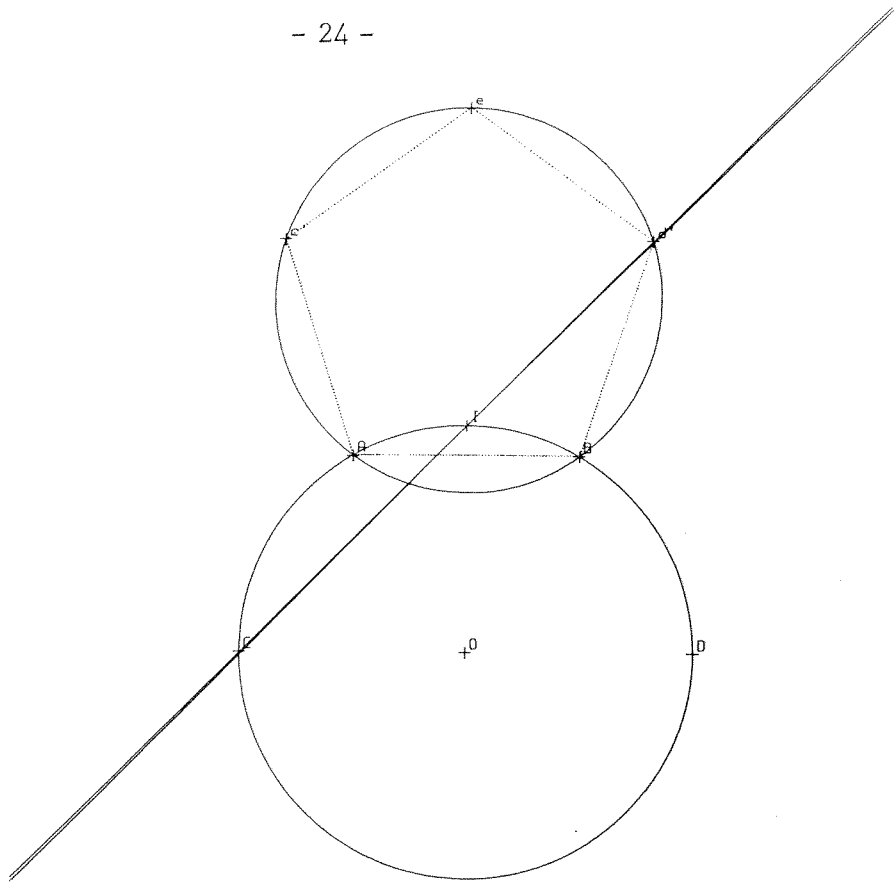
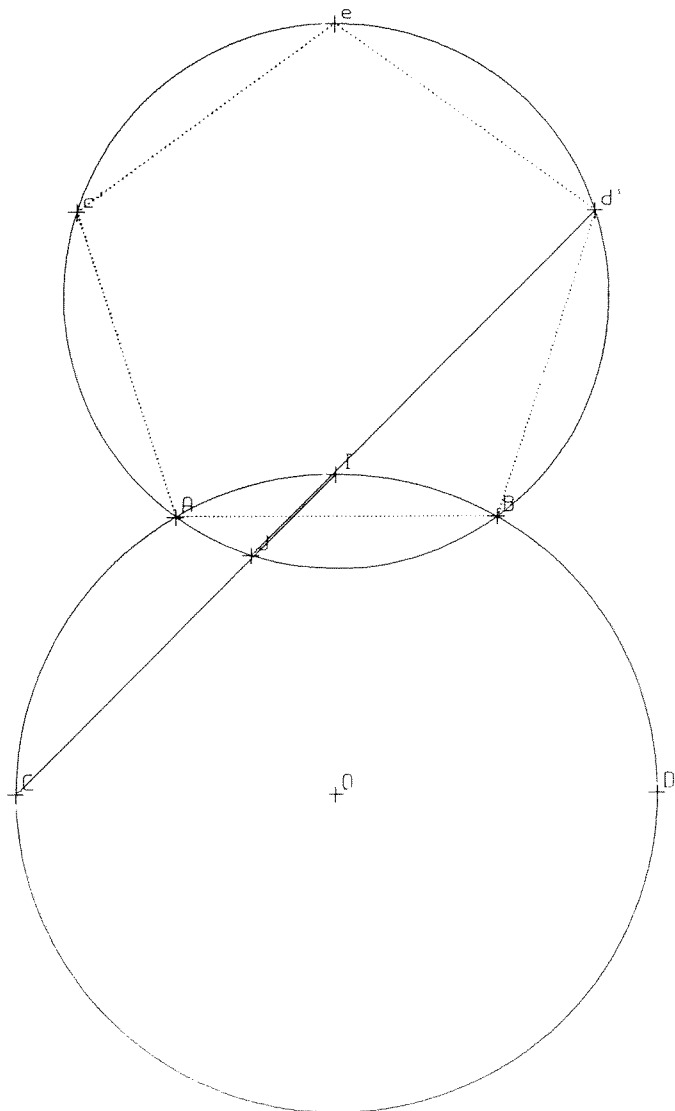


Fig. 4



Soit  $\alpha$  l'angle  $\widehat{OED'}$

$$\sin \alpha = x = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4}$$

d'où

$$\widehat{E} = 2 \alpha = 2 \text{Arc sin} \left( \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{4} \right)$$

c'est-à-dire

$$\widehat{E} \simeq 109^\circ 11' 32''.$$

$\widehat{E} + \widehat{C'} + \widehat{D'} + \widehat{A} + \widehat{B} = 540^\circ$ , donc  $\widehat{D'} = 270^\circ - \widehat{B} - \frac{\widehat{E}}{2}$ , c'est-à-dire

$$\boxed{\widehat{D'} \simeq 107^\circ 2' 16''.}$$

Le pentagone de Dürer n'est donc pas régulier. Essayons de traduire l'erreur commise en mesures encore plus frappantes.

Avec la table traçante, construisons un pentagone  $ABd'ec'$  régulier à partir d'un segment  $[AB]$  donné, les points  $C, D, I, O$  définis comme dans les figures 1 et 2, le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au pentagone  $ABd'ec'$  et le cercle de centre  $O$  passant par  $A$ . Complétons avec les droites  $(CI)$  et  $(Id')$  (Fig. 3).

On constate que les deux droites sont distinctes, alors que la construction de Dürer les supposait confondues. Faisons encore quelques calculs pour trouver leur angle :

Toujours dans le repère  $(O, D, I)$ , les coordonnées de  $d'$  sont

$$\left( \frac{1}{2} + \cos 72^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 72^\circ \right)$$

d'où

$$\vec{Id'} \left( \frac{1}{2} + \cos 72^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sin 72^\circ \right).$$

De plus, on a

$$\vec{CI} (1, 1) \text{ et } CI = \sqrt{2}.$$

Soit  $\xi$  l'angle  $(\vec{CI}, \vec{Id'})$ , on a

$$\cos \xi = \frac{\vec{CI} \cdot \vec{Id'}}{CI \cdot Id'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \cos 72^\circ + \sin 72^\circ}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3} + \cos 72^\circ + (\sqrt{3} - 2) \sin 72^\circ}}$$

donc

$$\boxed{\xi \simeq 0^\circ 17' 3''.}$$

Il s'agit donc d'un angle minuscule, qu'un tracé à la main ne pouvait pas mettre en évidence.

Recommençons la figure 3 sans les droites (CI) et (Id'). Sur cette nouvelle figure, nous traçons le segment [CI]. D'autre part, nous appelons J l'intersection de la parallèle à (CI) passant par d' avec le cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au pentagone, et nous traçons [d'J] (Fig. 4).

Nous constatons que les parallèles (CI) et (d'J) sont distinctes, ce qui était prévisible, puisque C, I, d' ne sont pas alignés. Par contre, la construction de Dürer suppose ces deux droites confondues.

Précisons d'abord la position du point J sur le cercle  $\mathcal{C}$ .  $\widehat{ICO} = 45^\circ$ , et puisque (d'J) // (CI) et (d'c') // (CI), on a aussi :  $\widehat{c'd'J} = 45^\circ$ .

En raisonnant dans le triangle ec'd', on trouve  $\widehat{ed'c'} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ .

Donc  $\widehat{Jd'B} = \widehat{ed'B} - \widehat{ed'c'} - \widehat{c'd'J} = 108^\circ - 81^\circ = 27^\circ$ .

Sur le cercle  $\mathcal{C}$ , appelons J' le point qui se trouve au quart du petit arc  $\widehat{AB}$ , à partir de A. On a  $\widehat{AB} = 72^\circ$ , donc  $\widehat{BJ'} = \frac{3}{4} \cdot 72^\circ = 54^\circ$ . Or, l'angle inscrit  $\widehat{Jd'B}$  intercepte l'arc  $\widehat{BJ}$ , donc  $\widehat{BJ} = 2 \cdot 27^\circ = 54^\circ = \widehat{BJ'}$ . On en déduit que J et J' sont confondus.

Conclusion : J se trouve au quart du petit arc  $\widehat{AB}$  à partir de A.

Calculons maintenant la distance entre (CI) et (d'J) :

(d'I) passe par d'  $(\frac{1}{2} + \cos 72^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 72^\circ)$  et a la direction de  $\vec{CI}(1,1)$ . Donc l'équation de (d'I) est :  $x - y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 72^\circ + \sin 72^\circ = 0$ , ou encore  $x - y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \sin 27^\circ = 0$ .

Soit  $K(x_k, y_k)$  la projection de I sur (Jd'). Les coordonnées de  $\vec{IK}$  sont  $(x_k, y_k - 1)$  avec  $y_k - 1 = -x_k$  car  $\vec{IK} \perp \vec{CI}$ .

En traduisant  $K \in (Jd')$  avec  $y_k = 1 - x_k$ , on trouve  $x_k = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 27^\circ$ .

$IK^2 = 2x_k^2$  donc  $IK = \sqrt{2} \cdot x_k = \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} - \sin 27^\circ$ .

|                                    |
|------------------------------------|
| $IK \simeq 0,0057 \text{ unités.}$ |
|------------------------------------|

L'unité de longueur est AB. Sur la figure 4,  $AB = 3\sqrt{2}$  cm, donc  $IK \simeq 0,25$  mm.

Ici aussi, il s'agit d'une distance très petite, qui dépasse largement la précision d'un tracé à la main et même l'épaisseur d'un trait de crayon !

Quelques remarques pour conclure :

Les figures 2, 3 et 4 ont été réalisées avec un logiciel que j'ai écrit pour faire les constructions géométriques planes à l'aide d'une table traçante. On peut se servir de ce logiciel même si l'on ne sait pas programmer. On peut l'utiliser à l'IREM où l'on trouvera aussi le matériel nécessaire.

On vient de voir qu'avec cet outil, on peut faire de la géométrie expérimentale beaucoup plus fiable qu'avec le dessin à la main.

On peut aussi réaliser un certain nombre de figures quasiment irréalisables à la main (exemples : problèmes de points cocycliques - cercle d'Euler, problèmes d'alignement - droite de Simson, de Steiner, etc...)

Cela peut intéresser tous ceux qui ont déjà torturé des droites qui s'obstinent à ne pas passer par des points où pourtant il est prouvé qu'elles doivent passer, et tous ceux qui se sont déjà épuisés à démontrer que des points non alignés sont alignés parce qu'ils le sont tellement bien sur le dessin. N'est-ce pas le cas de la construction de Dürer ?

---

LE "CAHIER DE MATH" DE SYLVIE

par F. PLUVINAGE

---

Sylvie est élève en sixième dans un collège de l'agglomération strasbourgeoise en 1984-85. A la fin de l'année, elle a accepté de prêter pour quelque temps son "cahier de math" à son professeur, qui me l'a montré.

Le "cahier" est en fait un classeur, sur lequel il n'y a pas écrit "Mathématique" (avec ou sans "s"), mais "La Bataille des Planètes". Un être supérieur, droit sorti de l'univers des bandes dessinées, habillé façon Superman avec en plus un genre de casque intégral profilé sur la tête, tient dans une main un objet qui ne m'est pas familier à moi, pauvre humain, mais qui émet un puissant rayonnement, et dresse la tête vers le firmament peuplé de planètes, d'étoiles et d'astéroïdes.

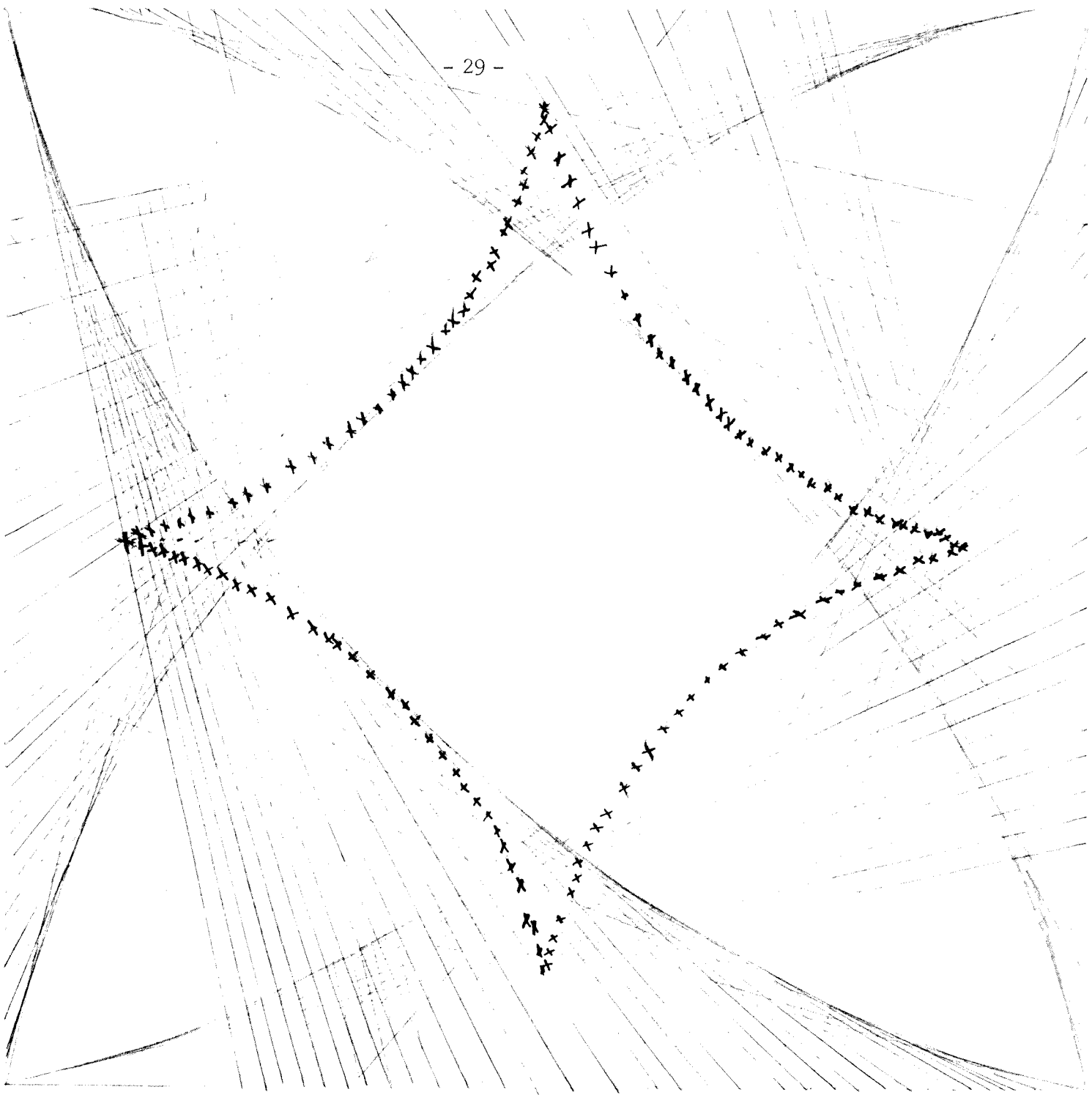
Le format des feuilles du classeur est le grand format :  $21 \times 29,7$ , mais le classeur contient aussi une quantité de plastique importante par rapport à la quantité de papier. Des feuilles plastiques colorées délimitent quatre zones, d'inégale épaisseur.

La première zone est intitulée "COURS". Elle est mince : 6 feuilles de papier à carreaux "callygraphe" manuscrites et 6 pages fournies par le professeur, reproduites sur machine à alcool, et insérées par Sylvie dans trois pochettes plastiques transparentes, spéciales pour classeur.

La deuxième zone est intitulée "EXERCICES". Elle comporte 34 feuilles, la plupart quadrillées, mais certaines blanches (pour la géométrie). Quelques sujets reproduits de stencils à alcool sont collés, ainsi que quelques figures géométriques.

La troisième zone est intitulée "TRAVAIL EN GROUPE". Elle se compose de 28 feuilles et de 14 pochettes plastiques garnies. Ici, la majorité des feuilles sont de papier blanc, pour effectuer des constructions géométriques. Certaines de ces constructions sont d'ailleurs superbes, et très riches même si le principe mathématique de départ est évidemment simple (on est en 6e !) : par exemple, la figure des milieux de segments de longueur donnée  $l$ , inscrits dans un carré donné de côté un peu inférieur





T. Bien

à l, est très agréable à contempler. Pour ce qui est des pochettes plastiques, la plupart contiennent des feuilles de papier millimétré, pour des études graphiques.

La quatrième zone est celle des "DEVOIRS EN CLASSE". Il s'agit des contrôles notés, revêtus ensuite du paraphe des parents de Sylvie. La signature des parents n'a d'ailleurs pas dû être l'occasion de scènes dans le cas de Sylvie, car ses notes sont toutes correctes ou même très bonnes.

Au total, le contenu du classeur est riche, et l'organisation permet de s'y retrouver facilement. Quelques défauts d'organisation peuvent toutefois être notés, sans en tenir Sylvie pour "coupable" : en effet, le travail en groupes a été l'occasion de changement de professeur, à l'intérieur de l'équipe enseignante du collège (qui tient à un fonctionnement double : classes hétérogènes d'une part et groupes de niveau d'autre part). De ce fait, certains savoirs dégagés des travaux en groupes sont présents dans la zone "Travail en groupe", alors qu'il s'agit en réalité de notions de cours (exemple : le cours sur les encadrements et approximations). Mais ceci n'est pas gênant dans le cas de Sylvie ; notons toutefois que l'examen de classeurs d'élèves moins organisés met en évidence des défauts de nature à compromettre la possibilité d'utilisation du classeur en cours d'année. Faut-il prolonger en sixième l'usage de l'école primaire, où l'on ramasse périodiquement les cahiers pour contrôle ?

Pour conclure ces quelques remarques, il me paraît intéressant de souligner deux caractéristiques d'un tel classeur au terme d'une année de travail .

- La première observation est d'ordre "historique". De même que la salle de classe d'aujourd'hui diffère de celle d'il y a par exemple 35 ans, de même le matériel des élèves se distingue nettement de celui de leurs ancêtres. Les feuilles sont mobiles, mais avec de bons moyens de les conserver. On peut noter, rien que dans la présentation, la place que peut tenir l'activité de l'élève ; il ne s'agit plus du cours dicté suivi des rituels exercices d'application.

- La deuxième observation est d'ordre "économique". Le classeur de mathématiques que nous avons examiné est en fin d'année un objet qui a coûté cher ; on peut estimer son prix total à une somme de 100 à 150 Francs, selon les fournisseurs. Pour les familles qui ne peuvent consacrer que des moyens modestes, il y a là un sérieux handicap, car, au contraire des livres, les fournitures sont à la charge des parents.

Nouveaux rebondissements dans l'affaire du "petit gros" :



LUTTE DES CLASSES DANS UN NUAGE ...

par Jacques LUBCZANSKI

J'ai eu l'occasion de vous entretenir d'un problème de fond :

"Qu'est-ce qu'un petit gros ?". Plus précisément :

Une "population" étant donnée par les poids et tailles des individus qui la composent, quel critère mathématique choisir pour déterminer l'ensemble des "petits gros" de cette population ?

D'ailleurs, le problème de fond était plutôt un problème de forme !

En effet, selon la forme qui résumait le mieux le "nuage" des points (\*), on arrivait à telle ou telle conclusion.

Aujourd'hui, face au même problème, nous allons abandonner les idées de description géométrique du nuage.

Adieu donc l'art abstrait !

Place au vieux bon sens : "Qui se ressemble s'assemble !".

Et pour regrouper les individus d'une population en "classes" (dont l'une serait notre ensemble des "petits gros"), suivons ce vieux dicton, assemblons les points qui se ressemblent.

Le problème prend donc la tournure suivante : quel critère mathématique pour évaluer la ressemblance des individus, c'est-à-dire des points du nuage ?

Comment utiliser ce critère pour regrouper les points en "classes" ?

Et comment interpréter les résultats obtenus à la lumière du problème posé ?

On est au coeur de la branche des mathématiques qui s'appelle "l'Analyse des données". Mais rassurez-vous : il n'est pas question ici de tout dire sur ce sujet ! Faisons plutôt un petit bout de chemin, une promenade touristique dans ce domaine souvent -et à tort- méconnu.

---

(\*) : le "nuage" est l'ensemble des points représentant, dans un plan cartésien, les individus de la population donnée : dans notre problème, chaque point a deux coordonnées  $(x, y)$  ;  $x$  est une mesure de la taille et  $y$  une mesure du poids.

Quel critère mathématique pour évaluer la ressemblance entre les points ?

- le critère le plus naturel : mesurer la distance entre deux points ; il nous mènera à une répartition de la population en "classes de distance" ;
- un autre critère possible : mesurer la distance, non plus entre les points, mais entre les classes d'une répartition : cela nous conduira à une hiérarchie entre classes, à une classification ;
- enfin, dernier critère évoqué dans cette fiche : mesurer la cohésion interne, la concentration de chaque classe d'une répartition, et la rendre optimale.

Comment utiliser le critère choisi pour regrouper les points en classe ?

Il s'agira ici avant tout de méthodes pratiques : dans tous les cas, la répartition de la population en classes sera le résultat d'un algorithme. En effet, si les méthodes sont toutes très simples dans leur principe, leur mise en oeuvre s'accompagne d'une quantité de calculs considérable, confiés bien entendu à un ordinateur : d'où la nécessité d'une résolution algorithmique. Il est même un cas où les ordinateurs actuels ne sont pas assez puissants, et où on doit se contenter pour l'instant d'une solution approchée !

Comment interpréter les résultats obtenus à la lumière du problème posé ?

La question de la pertinence des méthodes, du choix des différents paramètres est la plus délicate. C'est en conservant les mêmes données tout au long de cette fiche que nous pourrons faire les comparaisons nécessaires.

**A** NI DIEU NI MAITRE... : (Classes de distance)

a. L'outil : C'est la distance entre les points : deux points seront dits "voisins" si leur distance est inférieure ou égale à un seuil fixé  $\bar{d}$ .

Les points voisins sont alors regroupés en "classes de distance"; une "classe de distance  $\bar{d}$ " est simplement un ensemble (non vide) vérifiant la propriété : "si un point y est, alors tous ses voisins y sont aussi".

On obtient ainsi une répartition de la population en classes disjointes, de taille variable, non ordonnées : il s'agit d'amas anarchiques de points.

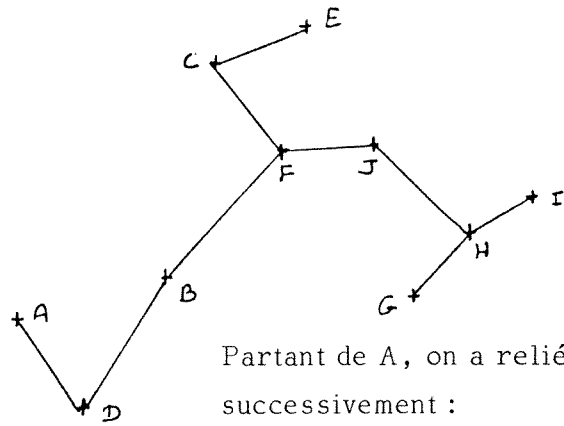
b. La mise en oeuvre : la détermination pratique des classes de distances se fait en deux temps :

. D'abord, on met en relation tous les points du nuage : on va dessiner un "arbre" dont ces points seront les noeuds. Pour que cet arbre soit le plus simple possible, on utilise l'algorithme suivant :

On part d'un point  $M_1$ , qu'on relie à son plus proche voisin  $M_2$ , d'où une "branche"  $M_1M_2$ . Alors  $M_3$  est, parmi les points qui restent, le point le plus proche de la branche  $M_1M_2$  : on le relie à cette branche par l'extrémité la plus proche,  $M_1$  ou  $M_2$ .

D'où un (petit) arbre à deux branches :  $M_4$  sera le point le plus proche de cet arbre, parmi ceux qui restent, etc...

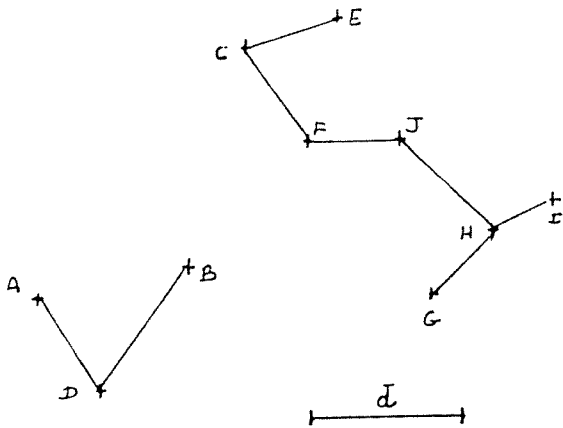
De proche en proche on construit ainsi un arbre reliant tous les points du nuage, et dont la longueur est minimale : c'est ce qu'on a fait pour les points du nuage ci-dessus, en partant du point A. (Mais en fait l'arbre obtenu ne dépend pas du point de départ.)



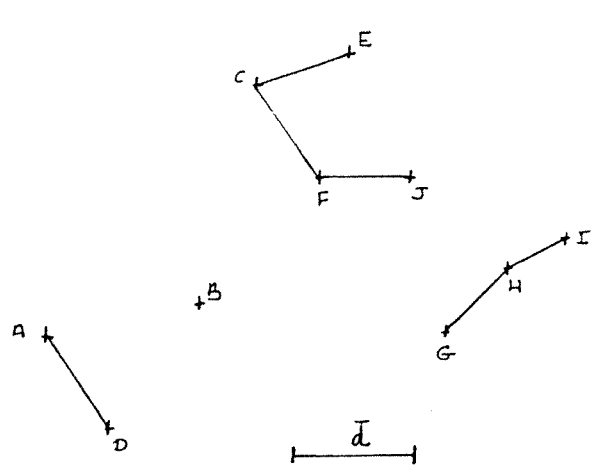
Partant de A, on a relié successivement :  
D, B, F, J, C, E, H, I, G.

. Ensuite, ayant fixé le seuil  $\bar{d}$ , on coupe toutes les branches de longueur supérieure à  $\bar{d}$  : les "sous arbres" qui restent définissent les classes de distance cherchées.

Voici ce que cela donne pour notre nuage, avec deux choix différents de  $\bar{d}$  :



Classes de distance :  $\{A, B, D\}$  ;  $\{C, E, F, G, H, I\}$



Classes de distance :  $\{A, D\}$  ;  $\{B\}$  ;  $\{C, E, F, J\}$  ;  $\{G, H, I\}$  .

c. Pathologie des classes de distance : Notre exemple, pourtant très simple, suffit pour observer les deux maladies les plus courantes :

. l'anémie : les classes de très faible effectif, par rapport à celui de la population, ne sont pas très significatives (par exemple ici  $\{B\}$  ) ; leurs points sont en fait des isolés.

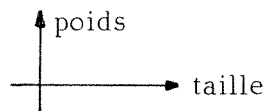
. La filiformie : dans une même classe, on peut trouver des points très éloignés les uns des autres, mais reliés par une chaîne de points voisins : dans notre exemple de gauche, E et G sont dans la même classe, mais pas F et B !

Il existe un remède à ces deux maladies : c'est d'éliminer les isolés, c'est-à-dire les points qui n'ont pas assez de voisins ; après avoir fixé le seuil  $\bar{d}$ , on fixe un seuil  $n$  : un point qui a moins de  $n$  voisins sera déclaré "isolé" et impitoyablement supprimé, avant même de tracer l'arbre : on gagne ainsi en temps de calcul et en "interprétabilité". Les effectifs des classes sont alors tous supérieurs à  $n$  ; dès que  $n \gg 3$ , les classes filiformes disparaissent.

En pratique, c'est donc un choix judicieux des deux seuils  $\bar{d}$  et  $n$  qui assure une répartition satisfaisante : plusieurs essais peuvent être nécessaires (et en tous cas un calcul préalable du nombre de voisins de chaque point pour différents seuils  $\bar{d}$ ).

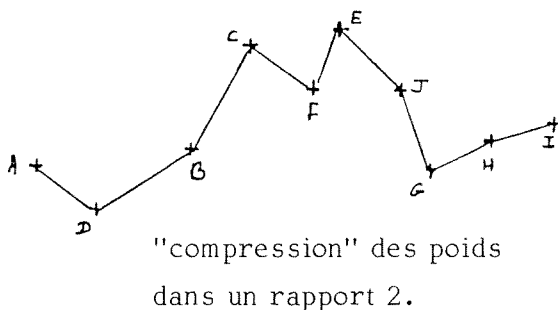
d. Interprétation des résultats : Dans notre exemple, c'est certainement le choix pour  $\bar{d}$  de l'exemple de droite, et pour  $n$  de la valeur 1 qui donne une répartition correcte :  $\{A, D\}$  ;  $\{C, E, F, J\}$  ;  $\{G, H, I\}$ . B a été éliminé car il n'a pas de voisins. Si on se souvient que la taille est en abscisse et le poids en ordonnée, que peut-on dire ?  $\{C, E, F, J\}$  est le groupe des "lourds".  $\{G, H, I\}$  est le groupe des "grands". Quant à  $\{A, D\}$  ce sont, par rapport aux autres, les "petits légers". Et les trois groupes sont bien séparés.

Où sont passés les petits gros ?

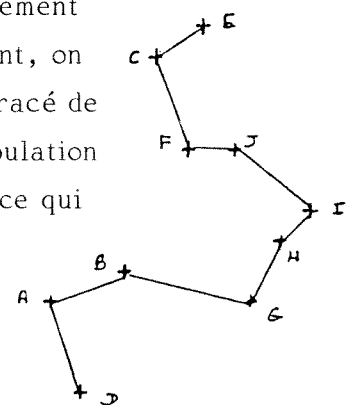


e. Attention aux échelles : Il faut aussi se souvenir qu'on a choisi des échelles de représentation, aussi bien pour le poids que pour la taille.

Un changement d'échelle, sur l'une ou l'autre des coordonnées, modifiera les distances entre les points et la répartition obtenue :



Mais si le changement est trop important, on trouve, dès le tracé de l'arbre, une population filiforme, c'est ce qui se passe ici.



"compression" des tailles dans un rapport 2.



1ère étape : on fusionne H et I en HI, car  $d(H, I) = 5$  : c'est le plus petit nombre du tableau. Pour continuer, il suffit de récrire le tableau des distances de classe, c'est-à-dire de remplacer, dans le tableau précédent, les lignes H et I par une ligne HI et les colonnes H et I par une colonne HI, en prenant le plus petit des deux nombres : le reste du tableau ne change pas.

(Ici la colonne HI est en fait celle de H, car I est plus éloigné que H de tous les autres points).

|    | B | C | D | E | F | G   | HI  | J  |
|----|---|---|---|---|---|-----|-----|----|
| A  |   |   |   |   |   | 169 | 229 |    |
| B  |   |   |   |   |   | 65  | 101 |    |
| C  |   |   |   |   |   | 100 | 100 |    |
| D  |   |   |   |   |   | 130 | 194 |    |
| E  |   |   |   |   |   | 90  | 74  |    |
| F  |   |   |   |   |   | 41  | 45  |    |
| G  |   |   |   |   |   | 0   | 8   |    |
| HI |   |   |   |   |   |     | 0   | 18 |

2ème étape : on cherche le plus petit nombre du tableau : c'est  $d(G, HI)$ . Si on fusionne G et HI en GHI, le tableau rétrécit encore d'une ligne et d'une colonne

|     | B | C | D | E | F | GHI | J  |
|-----|---|---|---|---|---|-----|----|
| A   |   |   |   |   |   | 169 |    |
| B   |   |   |   |   |   | 65  |    |
| C   |   |   |   |   |   | 100 |    |
| D   |   |   |   |   |   | 130 |    |
| E   |   |   |   |   |   | 74  |    |
| F   |   |   |   |   |   | 41  |    |
| GHI |   |   |   |   |   | 0   | 18 |

3ème étape : le plus petit nombre du tableau est 9 : on fusionne F et J

4ème étape : le plus petit nombre du tableau est 10 : on fusionne C et E

5ème étape : le plus petit nombre du tableau est 13, qui figure deux fois : on fusionne A et D d'une part, C et F d'autre part.

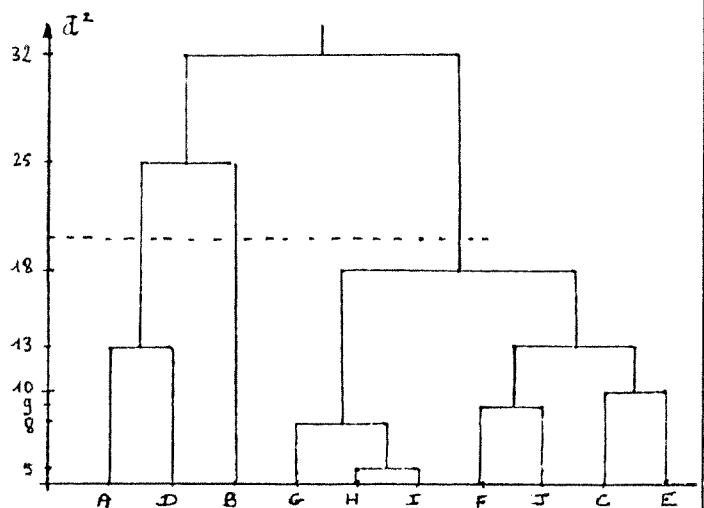
En pratique, il est inutile de récrire les tableaux à chaque étape : il suffit de suivre les nombres du tableau, du plus petit au plus grand : après 13 vient 17, distance entre F et E : mais F et E sont déjà dans la même classe : au suivant !

C'est  $18 = d(J, H)$  : on fusionne GHI et FJCE.

Puis  $25 = d(B, D)$  et aussi  $d(G, I)$  : G et I sont déjà ensemble ; on fusionne B et AD. Tiens il ne reste plus que deux classes ABD et GHIFJCE : on les fusionne !

Pour résumer, on dresse un arbre, que les savants appellent dendrogramme : ce dessin représente la classification de la population étudiée, en classes et sous classes...

En coupant l'arbre à une hauteur quelconque, il tombe des branches ! On obtient la répartition en classes correspondant à cette hauteur, à ce seuil :

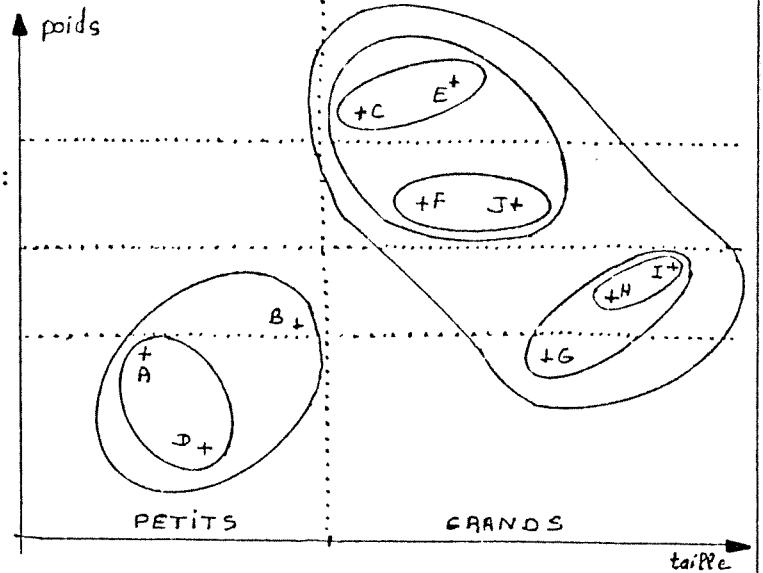
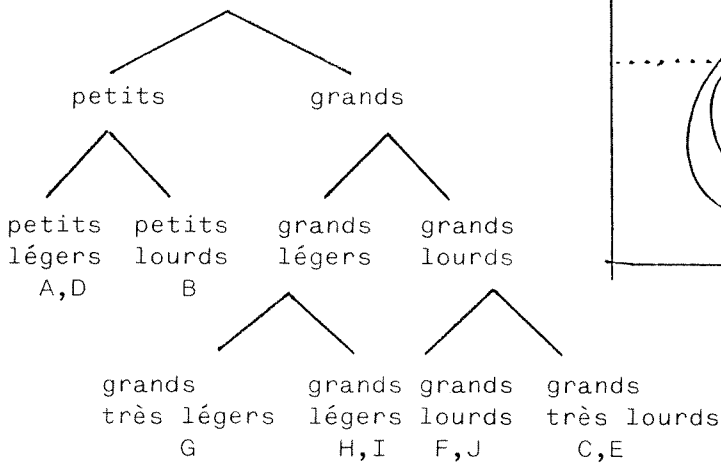




Par exemple, si on scie à la hauteur 20, il tombe trois branches :  
AD ; B ; GHIFJCE.

c. Interprétation des résultats : on peut représenter sur le nuage la classification obtenue :

Les lignes de niveau de la taille (droites verticales) et du poids (droites horizontales) permettent alors d'interpréter chaque "fourche" du dendrogramme :



Et si on cherche les "petits gros" parmi les petits lourds, un seul candidat : B.

De même si on cherche les grands maigres parmi les grands très légers, G est un grand maigre.

d. Pathologie de la distance de classes :

- on en arrive à opposer B, petit gros, à G, grand maigre, alors que G est plus proche de B que de C ;
- on aurait pu séparer AD et B, (ainsi que FJCE et GHI) par la taille : on aurait obtenu des "très petits" (AD) et des "petits" (B) : en cherchant les "petits gros", c'est A qu'on aurait choisi, comme le plus lourd des "très petits".

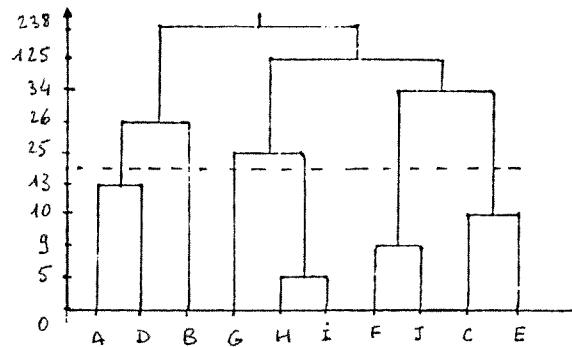
On peut attribuer ces défauts de la méthode au choix qu'on a fait de la distance entre classes, qui favorise la fusion de deux classes dès qu'elles possèdent des points proches : le risque est alors de trouver dans une même classe des points très éloignés.

e. Remèdes homéopathiques : il y a deux autres façons classiques de mesurer la distance entre classes, qui évitent la "pathologie" rencontrée :

-  $d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  peut être la plus grande distance possible entre un point de  $\mathcal{L}_1$  et un point de  $\mathcal{L}_2$  :

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{L}_1 \\ x_2 \in \mathcal{L}_2}} d(x_1, x_2)$$

Avec cette distance, les classes ne peuvent fusionner que si tous leurs points sont proches. Dans notre exemple, on arrive alors à une hiérarchie différente, mais à la même classification ! Etonnant non ?



-  $d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  peut enfin être simplement la moyenne des distances des points :

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{1}{n_1 \times n_2} \sum_{x_1 \in \mathcal{L}_1} \sum_{x_2 \in \mathcal{L}_2} d(x_1, x_2)$$

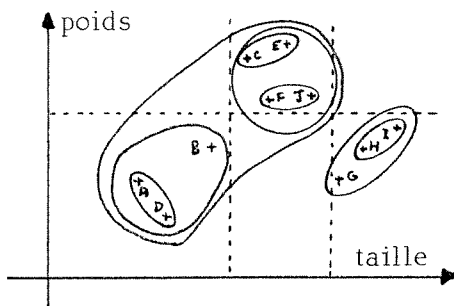
où  $n_1$  et  $n_2$  sont les effectifs de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ .

On obtient bien sûr une hiérarchie et une classification différentes des précédentes, où on ne peut plus caractériser nettement des "petits lourds".

GHI sont des grands maigres :

ABD est plus petit et plus léger que FJCE.

Il n'y a plus de petits gros !



f. Dernier examen clinique : quels résultats résistent à la valse des distances ?

C'est la répartition en trois classes ADB, GHI et FJCE :

en effet ces classes ne fusionnent que pour des valeurs élevées de  $\bar{d}$  : avec la distance moyenne, il faut attendre  $\bar{d}^2 = 94$ , alors que ces classes sont constituées dès que  $\bar{d}^2 = 21$  ; et il en est de même avec les autres distances. On retrouve -mais est-ce étonnant ? - une des répartitions obtenues avec la méthode du paragraphe précédent.

Avec une hiérarchie (variable) en prime !

QUI M'AIME ME SUIVE... (Critère de variance interne)

Une autre façon de juger si un ensemble de points, une classe, forme un "amas" est de prêter attention à sa cohésion interne : les points sont-ils rassemblés autour d'un "centre" ou au contraire sont-ils dispersés ?

L'outil : c'est la notion classique de variance, que nous allons retrouver : en effet, on va mesurer la cohésion d'un ensemble de points en calculant d'abord le centre de

cet ensemble, puis la distance moyenne à ce centre : plus celle-ci sera faible, plus les points seront regroupés autour du centre.

Et si la moyenne des distances est calculée de façon non pas arithmétique mais quadratique (c'est-à-dire la racine carrée de la moyenne des carrés), on retrouve la notion de variance totale d'un nuage (voir "Qu'est-ce qu'un petit gros" § 1 & 2). Si  $\mathcal{L}$  désigne la classe étudiée et G son centre, la variance de  $\mathcal{L}$  est  $V = \frac{1}{n} \sum_{M \in \mathcal{L}} d^2(M, G)$ , où n est l'effectif de  $\mathcal{L}$ .

Si à présent, on considère toute la population qu'on veut répartir en classes le plus cohérentes possibles, on peut, pour chaque répartition, calculer la somme des variances de chaque classe, et chercher à rendre cette somme la plus petite possible.

Cette somme porte parfois le nom de variance intraclasse, par opposition à la variance interclasse, qui est la variance de l'ensemble des centres des classes. En anglais, les termes sont plus clairs : on parle de variance "within" et de variance "between". Pour ma part, je dirai simplement variance interne (pour mesurer la cohésion à l'intérieur de chaque classe) et variance externe (pour mesurer la cohésion entre classes).

Or, il se trouve que si V est la variance totale de la population,  $V = v_i + v_e$  où  $v_i$  et  $v_e$  sont les variances interne et externe de la répartition.

Autrement dit, on pourra soit minimiser  $v_i$  soit maximiser  $v_e$ .

La méthode théorique : elle est simple : l'effectif de la population étant fini, il suffit de faire calculer à l'ordinateur la variance  $v_i$  pour toutes les répartitions possibles : celles-ci sont en nombre fini donc il y en a au moins une qui minimise  $v_i$  : c'est la meilleure répartition en amas.

Malheureusement, il y a deux écueils :

- la répartition minimisant  $v_i$  est connue : c'est la répartition... en singletons, pour laquelle  $v_i = 0$  ; et plus généralement : plus il y a d'amas, plus  $v_i$  est petite : notre recherche de minimum doit donc se faire à nombre d'amas constant : on se fixe d'avance k nombre de classes de la répartition et c'est parmi les répartitions en k classes qu'on cherche celle qui minimise  $v_i$ .

- seulement voilà : même en fixant le nombre k de classes, il y a une quantité énorme de répartitions possibles.

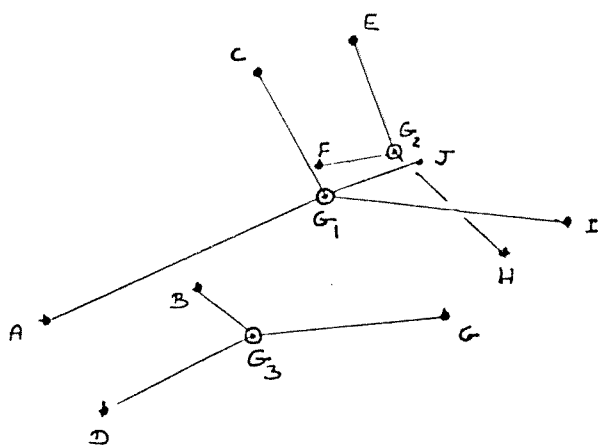
Tenez, dans notre exemple, il y a 34105 répartitions des 10 individus en 4 classes.

La formule générale est  $S_m(k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_k^j j^m$  où m est l'effectif de la population et k le nombre de classes.

Pour nous donner une idée,  $S_{15}(5) \approx 2,1 \times 10^8$   
 $S_{25}(5) \approx 2,4 \times 10^{15}$

Ce nombre croît effroyablement vite avec  $m$  : alors si on étudie une population d'effectif un peu sérieux, on dépasse très vite les capacités des ordinateurs actuels !

La mise en oeuvre : faute de pouvoir calculer la répartition "optimale", on va chercher une répartition "suboptimale" : en d'autres termes, on va utiliser un algorithme qui, partant d'une répartition donnée, la modifie à chaque étape de façon à diminuer la variance interne  $v_i$  : décrivons cet algorithme pour notre exemple :



Partons d'une répartition quelconque, en trois classes ACJI, BDG et EFH.

Calculons les trois centres  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$ .

A est plus près de  $G_3$  que de son centre  $G_1$  :

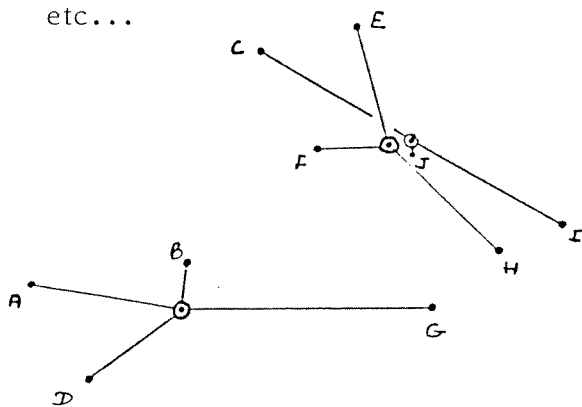
"qui m'aime me suive !" lui crie  $G_3$ , et voici A qui change de classe...

La nouvelle répartition est donc :

ABDG, CJI et EFH.

Les centres ne sont plus les mêmes et la variance interne a diminué.

On recommence : on prend un par un les points nuage ; dès que l'un d'entre eux est plus près d'un autre que du sien, on le change de classe : on recalcule les nouveaux centres, etc...

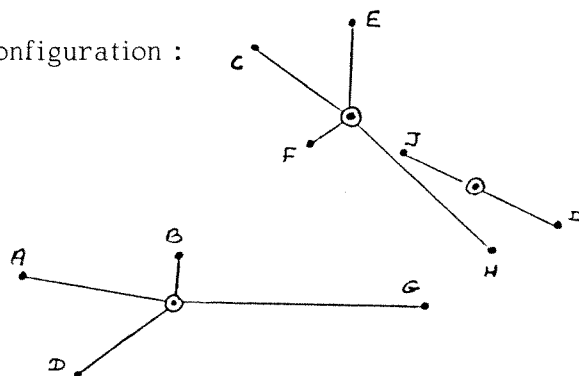


Voici les étapes de l'algorithme pour notre exemple :

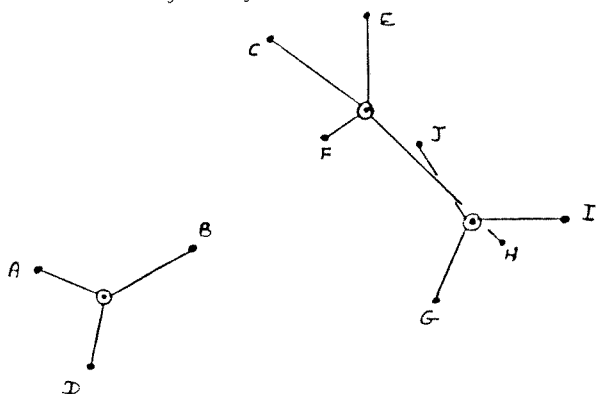
B ne change pas de classe,

C rejoint la classe EFH...

D'où la configuration :

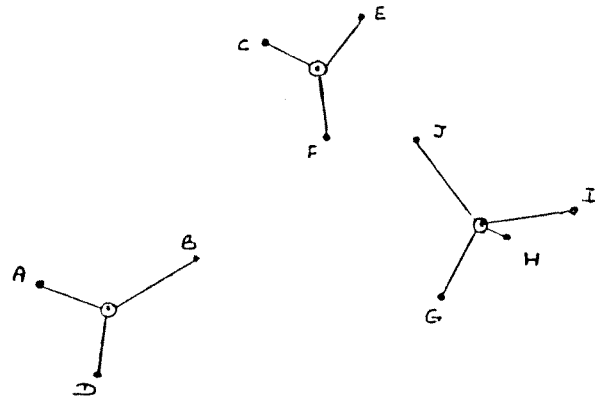


Puis G rejoint JI :



Enfin, H change à son tour de classe et on arrive à cette répartition, que l'algorithme ne modifie plus :

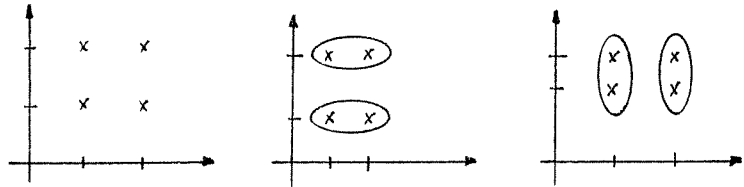
(on n'était d'ailleurs pas obligé de suivre l'ordre alphabétique... et le résultat serait différent avec un autre ordre !)



Pathologie des centres "mobiles" :

- Sensibilité aux modifications d'échelles : il faut faire attention à ne pas créer artificiellement des amas par un choix maladroit des échelles de représentation :

En effet, que penser de ces trois représentations des mêmes données avec des échelles différentes ?



- Comment choisir d'avance le nombre  $k$  d'amas ? Ce ne sont pas les chiffres qui vont répondre (le minimum de  $v_1$  décroît quand  $k$  augmente) mais la pertinence de la répartition obtenue par rapport aux questions étudiées.

- Enfin, la solution obtenue est suboptimale et non optimale : elle dépend de la répartition initiale choisie : il faut si possible faire plusieurs essais pour choisir ensuite la solution la plus interprétable.

Interprétation des résultats :

D'autres essais, à partir de répartitions initiales différentes, donnent des répartitions finales différentes ; celle qu'on a obtenue à la page précédente ne donne pas la variance interne minimale, réalisée pour la répartition ADB, CEFJ et GHI ; on a déjà rencontré et interprété celle-ci : ne nous y attardons pas.

Un autre choix de  $k$  donne des classes malingres (doubletons pour  $k = 4$ , singletons pour des valeurs supérieures) ou au contraire des classes opulentes ( $k = 2 \dots$  et  $k = 1$ ). Le choix de  $k = 3$  semble donc pertinent.

Le retour de la hiérarchie :

Le critère de variance interne, qu'on a utilisé, peut aussi servir à la méthode de classification hiérarchique vue plus haut : en effet on peut décider à chaque étape de l'algorithme de classification de fusionner les deux classes de façon à "gagner" le plus possible de variance interne (ou à "perdre" le moins possible de variance externe).

Cela revient à mesurer la distance entre classes par cette variation de variance :

si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux classes d'effectifs  $n_1$  et  $n_2$ , de centre  $G_1$  et  $G_2$ , on montre que

$$\Delta v_i = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} d^2(G_1, G_2) \text{ lors de la fusion de ces deux classes (et } \Delta v_e = -\Delta v_i).$$

Alors on prend  $d(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} d^2(G_1, G_2)$  et l'algorithme s'applique.

**D** CONCLUSION

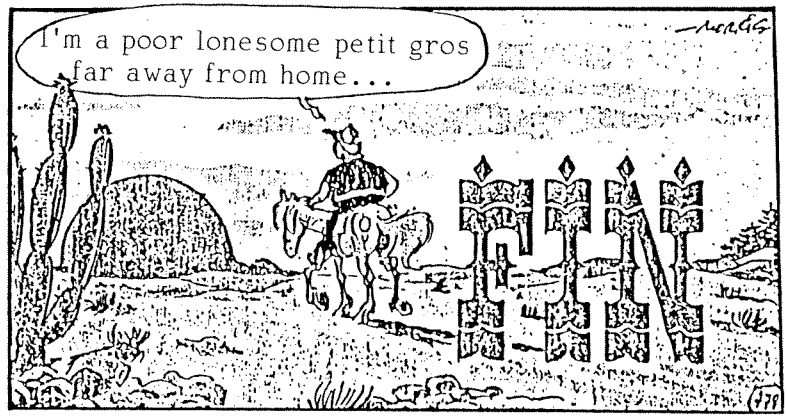
Voilà. La promenade au pays de l'analyse de données touche à sa fin.

Certains dirons peut-être que c'était se donner beaucoup de mal pour retrouver des amas qu'on distingue à l'oeil nu sur le nuage.

Je répondrai que les méthodes présentées ont l'avantage de rester valables en dimension 3, 4 ... n, ce qui arrive souvent dans la pratique, mais où l'oeil n'est d'aucun secours. Et si j'ai voulu les présenter en dimension 2, c'est pour montrer combien, pour finir, ces méthodes sont simples dans leur principe, et efficaces dans leur action.

Et surtout, cette partie des mathématiques est sans doute la plus utilisée par les non-mathématiciens, pour confirmer ou infirmer des hypothèses, pour affirmer ou nier des théories : cela peut être lourd de conséquences, quand parfois, les mathématiques servent d'alibi à l'esprit critique.

Je pense que cela mérite bien un détour.



---

LES MATHS AU JOUR LE JOUR

Un livre de Lubczanski

J. LEFORT

---

Pour tous ceux qui ont apprécié l'humour de Jacques Lubczanski, une bonne nouvelle : la sortie du premier volume : "Les maths au jour le jour" (édition Cédic, collection Activités dans la mathématique, 126 pages), recueil d'exercices tirés de la vie quotidienne. Qu'on en juge d'après les titres de quelques chapitres : Contraception : la vérité ; Salaire : la sortie du blocage ; La force Manta rapatriée ; Empruntez à - 50% ; Recyclez vos vieux cartons ; Où est le trésor de Rackham le Rouge ? ... etc ... plus de 20 sujets tirés du quotidien, diverses idées d'exploitation et 40 pages de corrigés qui apportent des compléments.

Si le fidèle lecteur de l'APMEP se souviendra d'avoir vu bien des chapitres dans le bulletin, il devra néanmoins tout relire, ne serait-ce que pour savoir que : "La force Manta rapatriée" est un problème de programmation linéaire ou que "Recyclez vos vieux cartons" est un problème de géométrie métrique dans l'espace... Il lui faudra aussi tout relire pour savoir à quel niveau traiter tel sujet : en collège pour "Pose d'un parquet" ou "Vol de Nuit" mais le plus souvent en lycée. Gageons cependant que cette lecture se fera avec plaisir, l'humour apparaissant à chaque page et avec intérêt, chacun y apprenant du nouveau.

J'espère convaincre ceux qui hésitent encore en citant une partie du premier chapitre :

— Le proviseur : *« l'année 1985 marque une progression de 13 % dans la réussite au baccalauréat de la classe de TX.*

*« Je félicite les professeurs de cette classe! »*

— Un professeur : *« Je vous remercie, mais le taux de réussite n'a augmenté que de 8 % . »*

— Un élève de TX : *« qu'on soit redoublant ou pas, cette année ça a moins bien marché pour les élèves :*

*« Je ne félicite pas les profs! »*

— Un redoublant de TX : *« En tout cas, en redoublant en 85, j'avais 35,5 % de chances de plus de réussir que l'année d'avant. »*

— Un autre redoublant : *« pas du tout! tu avais 10 % de chances en moins! »*

On lira avec étonnement, dans le corrigé, que tout le monde a raison et on en profitera pour apprendre beaucoup sur les politiques salariales des entreprises. Vous ne voyez pas le rapport ? Alors, allez vous procurer le livre de Jacques Lubczanski et vous admirerez l'auteur dans sa façon de choisir les valeurs numériques de ses exemples .

LES NOUVELLES PUBLICATIONS DE L'IREM DE STRASBOURG

(disponibles à la bibliothèque)

- |  |        |
|--|--------|
| . Initiation à l'algorithmique et à la programmation<br>par D. Guin, J.-P. Igot, N. Vogel - 104 pages  | 20.- F |
| . Algorithmique approfondie et structures de données<br>par G. Kuntz - 130 pages   | 26.- F |
| . Exercices et problèmes d'algorithmique et de programmation -<br>Corrigés - par N. Vogel - 105 pages  | 21.- F |
| . Récursité et LOGO - 1 : préexpérimentation<br>par C. Dupuis, M.-A. Egret, D. Guin - 50 pages   | 10.- F |
| . Expériences sur les apports de l'informatique à l'enseignement des<br>mathématiques - Option Algorithmique en Terminale A 2<br>par C. Dupuis, D. Guin, J.-P. Igot, N. Vogel - 35 pages | 7.- F  |
| . Rapport sur l'expérimentation "Pédagogie différenciée" conduite en<br>mathématiques au collège d'Ostwald en 1984-1985<br>par F. Pluvinage, J.-C. Rauscher, C. Soumoy - 85 pages        | 17.- F |
| . "Les Mathématiques dans les nouvelles formes d'action éducative"<br>11e colloque national des Professeurs d'Ecole Normale, Guebwiller :<br>18-19-20 mai 1984 - 64 pages                | 13.- F |



---

EXAMENS D'HIER, ATTITUDES DE TOUJOURS

F. ARAGO

---

On connaît le travail toujours inachevé de Georges Glaeser dans ses recherches bibliographiques en didactique. Il nous propose ici un texte autobiographique de François Arago, texte tiré de "Histoire de ma jeunesse" et publié chez Christian Bourgois.

Il s'agit de la relation de deux examens : le premier au concours d'entrée à Polytechnique où il est interrogé par Louis Monge (le frère de Gaspard), le deuxième à un examen interne à l'X où l'interrogateur est le célèbre Legendre.

Que nul ne tire du xénophobisme de Legendre ou du mépris de l'élève qu'affiche Monge une raison supplémentaire d'agir à l'instar de ces grands hommes ; au contraire, retenons la leçon de l'histoire et évitons de retomber dans ces erreurs pédagogiques qui conduisent même à des atteintes aux droits de l'homme comme nous le rappelle malheureusement la réalité quotidienne de certains pays.

J. LEFORT

Le moment de l'examen arriva enfin, et je me rendis à Toulouse, en compagnie d'un candidat qui avait étudié au collège communal. C'était la première fois que des élèves venant de Perpignan se présentaient au concours. Mon camarade, intimidé, échoua complètement. Lorsque, après lui, je me rendis au tableau, il s'établit entre M. Monge, l'examineur, et moi, la conversation la plus étrange :

« Si vous devez répondre comme votre camarade, il est inutile que je vous interroge.

— Monsieur, mon camarade en sait beaucoup plus qu'il ne l'a montré ; j'espère être plus heureux que lui ; mais ce que vous venez de me dire pourrait bien m'intimider et me priver de tous mes moyens.

— La timidité est toujours l'excuse des ignorants ; c'est pour vous éviter la honte d'un échec que je vous fais la proposition de ne pas vous examiner.

— Je ne connais pas de honte plus grande que celle que vous m'infligez en ce moment. Veuillez m'interroger ; c'est votre devoir.

— Vous le prenez de bien haut, monsieur ! Nous allons voir tout à l'heure si cette fierté est légitime.

— Allez, monsieur, je vous attends. »

M. Monge m'adressa alors une question de géométrie à laquelle je répondis de manière à

affaiblir ses préventions. De là, il passa à une question d'algèbre, à la résolution d'une équation numérique. Je savais l'ouvrage de Lagrange sur le bout du doigt ; j'analysai toutes les méthodes connues en en développant les avantages et les défauts : méthode de Newton, méthode des séries récurrentes, méthode des cascades, méthodes des fractions continues, tout fut passé en revue ; la réponse avait duré une heure entière. Monge, revenu alors à des sentiments d'une grande bienveillance, me dit : « Je pourrais, dès ce moment, considérer l'examen comme terminé : je veux cependant, pour mon plaisir, vous adresser encore deux questions. Quelles sont les relations d'une ligne courbe et de la ligne droite qui lui est tangente ? » Je regardai la question comme un cas particulier de la théorie des osculations que j'avais étudiée dans le *Traité des fonctions analytiques* de Lagrange. « Enfin, me dit l'examineur, comment déterminez-vous la tension des divers cordons dont se compose une machine funiculaire ? » Je traitai ce problème suivant la méthode exposée dans la *Mécanique analytique*. On voit que Lagrange avait fait tous les frais de mon examen.

J'étais depuis deux heures et quart au tableau ; M. Monge, passant d'un extrême à l'autre, se leva, vint m'embrasser, et déclara solennellement que j'occuperais le premier rang sur sa liste.

(...)

Je viens de rapporter les paroles étranges que M. Monge le jeune m'adressa à Toulouse en commençant mon examen d'admission. Il arriva quelque chose d'analogue au début de mon examen de mathématiques pour le passage d'une division de l'École dans l'autre.

L'examineur, cette fois, était l'illustre géomètre Legendre, dont j'eus l'honneur, peu d'années après, de devenir le confrère et l'ami.

J'entrai dans son cabinet au moment où M. T..., qui devait subir l'examen avant moi, était emporté, complètement évanoui, dans les bras de deux garçons de salle. Je croyais que cette circonstance aurait ému et adouci M. Legendre ; mais il n'en fut rien. « Comment vous appelez-vous ? me dit-il brusquement. — Arago, répondis-je. — Vous n'êtes donc pas Français ? — Si je n'étais pas Français, je ne serais pas devant vous, car je n'ai pas appris qu'on ait été jamais reçu à l'École sans avoir fait preuve de nationalité. — Je maintiens, moi, qu'on n'est pas Français quand on s'appelle Arago. — Je soutiens, de mon côté, que je suis Français, et très bon Français, quelque étrange que mon nom puisse vous paraître. — C'est bien ; ne discutons pas sur ce point davantage, et passez au tableau. »

Je m'étais à peine armé de la craie, que M. Legendre, revenant au premier objet de ses préoccupations, me dit : « Vous êtes né dans les départements récemment réunis à la France ? — Non, monsieur ; je suis né dans le département des Pyrénées-Orientales, au pied des Pyrénées. — Eh ! que ne me disiez-vous cela tout de suite ? tout s'explique maintenant. Vous êtes d'origine espagnole, n'est-ce pas ? — C'est présumable ; mais, dans mon humble famille, on ne conserve pas de pièces authentiques qui aient pu me permettre de remonter à l'état civil de mes ancêtres : chacun y est fils de ses œuvres. Je vous déclare de nouveau que je suis Français, et cela doit vous suffire. »

La vivacité de cette dernière réponse n'avait pas disposé M. Legendre en ma faveur. Je le reconnus aussitôt ; car, m'ayant fait une question qui exigeait

l'emploi d'intégrales doubles, il m'arrêta en me disant : « La méthode que vous suivez ne vous a pas été donnée par le professeur. Où l'avez-vous prise ? — Dans un de vos Mémoires. — Pourquoi l'avez-vous choisie ? Était-ce pour me séduire ? — Non, rien n'a été plus loin de ma pensée. Je ne l'ai adoptée que parce qu'elle m'a paru préférable. — Si vous ne parvenez pas à m'expliquer les raisons de votre préférence, je vous déclare que vous serez mal noté, du moins pour le caractère. »

J'entrai alors dans des développements établissant, selon moi, que la méthode des intégrales doubles était, en tous points, plus claire et plus rationnelle que celle dont Lacroix nous avait donné l'exposé à l'amphithéâtre. Dès ce moment, Legendre me parut satisfait et se radoucit.

Ensuite, il me demanda de déterminer le centre de gravité d'un secteur sphérique. « La question est facile, lui dis-je. — Eh bien, puisque vous la trouvez facile, je vais la compliquer : au lieu de supposer la densité constante, j'admettrai qu'elle varie du centre à la surface, suivant une fonction déterminée. » Je me tirai de ce calcul assez heureusement. Dès ce moment, j'avais entièrement conquis la bienveillance de l'examineur. Il m'adressa, en effet, quand je me retirai, ces paroles, qui dans sa bouche parurent à mes camarades d'un augure très favorable pour mon rang de promotion. « Je vois que vous avez bien employé votre temps ; continuez de même la seconde année, et nous nous quitterons très bons amis. »

Il y avait, dans les modes d'examen adoptés à l'École polytechnique de 1804, qu'on cite toujours pour l'opposer à l'organisation actuelle, des bizarreries inqualifiables. Croirait-on, par exemple, que le vieux M. Barruel examinait sur la physique deux élèves à la fois, et leur donnait, disait-on, à l'un et à l'autre la note moyenne ? Je fus associé, pour mon compte, à un camarade plein d'intelligence, mais qui n'avait pas étudié cette branche de l'enseignement. Nous convînmes qu'il me laisserait le soin de répondre, et nous nous trouvâmes bien l'un et l'autre de cet arrangement.