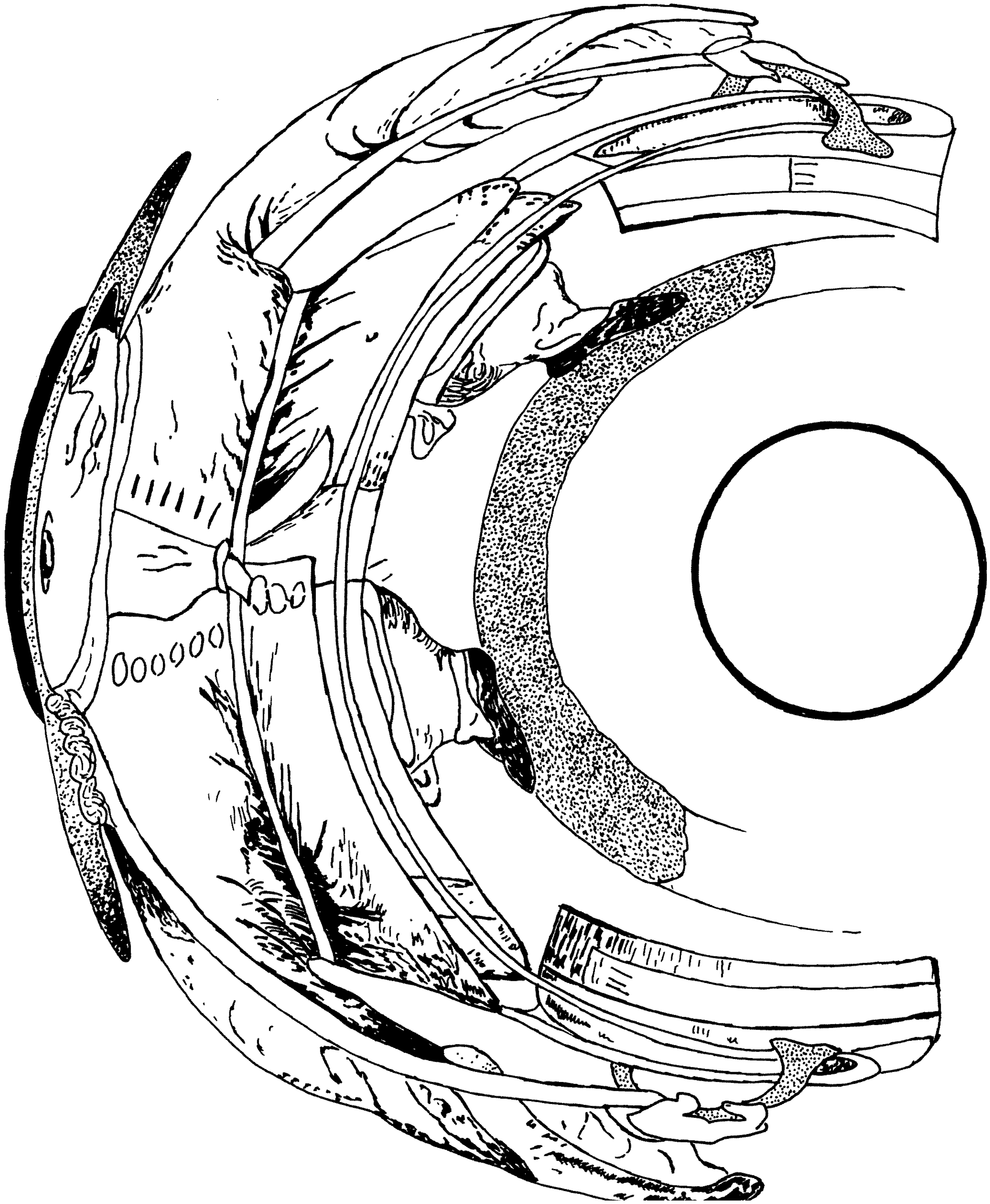
L'OUVERT

ISSN 0290.0068

JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG N° 43 JUIN 1986



NOTRE COUVERTURE :

Anamorphose cylindrique. Fac similé de l'oeuvre de J.-F. NICERON (1613-1646) que l'on peut consulter à la bibliothèque de l'IREM. Pour rétablir la forme première du personnage, placer un cylindre réfléchissant sur le cercle en trait fort et observer l'image miroir depuis la gauche.

Pour fabriquer le miroir cylindrique, utiliser le rectangle de métal fourni avec "L'Ouvert". Le périmètre du cercle de base correspond à la longueur du rectangle (16,6 cm).

EDITORIAL

L'ordinateur est de plus en plus présent dans nos classes. De plus en plus, il nous faut penser à nos cours en tenant compte des puissants moyens de calcul dont nous disposons. Soit pour réfléchir à la manière de poser un problème sur machine, et c'est le rôle de l'algorithmique que l'on trouve dans les programmes de A 2, soit pour les applications numériques et l'on se souvient des querelles à propos de l'introduction des calculatrices aux examens.

Qu'en sera-t-il demain avec mu-math ou d'autres logiciels de calcul algébrique qui relègueront la TI 30 au rang d'objet de musée ? Pour le moment, ce logiciel est encore cher pour un établissement scolaire (environ 4000 F) mais d'ores et déjà il nous oblige à réfléchir à un recentrage complet de nos cours et de notre pédagogie.

Rassurons-nous quand même : il reste largement de quoi intéresser nos élèves, que ce soit sur l'histoire des mathématiques (et Friedelmeyer vous invite à son atelier), que ce soit sur les diverses constructions à la règle et au compas du pentagone régulier, que ce soit sur le découpage des polyèdres, initiation à beaucoup de mathématiques, que ce soit tout simplement un peu d'origami, révélation pour des élèves de cinquième.

Bonne lecture à tous et bonnes vacances !

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N° 43 - JUIN 86

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

. Responsable de la publication : J. Lefort

. Correspondance à adresser à :
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX

. Abonnement (pour 4 numéros annuels) :
80.- F pour l'Alsace
106.- F pour les autres départements français
95.- F pour l'étranger

. Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

LA GEOMETRIE SE PLIE POUR LES ELEVES DE 5°

Michel BARTHELET

Tout a commencé par la découverte d'un livre d'ORIGAMI dans lequel j'ai trouvé des pliages de tétraèdre, d'octoèdre, d'hexaèdre, sans compter ceux d'objets décoratifs. Ayant été enthousiasmé par la simplicité de ces constructions et surtout par cet "effet de choc" produit par la pureté et l'esthétique du produit fini, j'ai décidé de présenter la géométrie dans l'espace en 5° par ces pliages.

Un beau matin, j'ai apporté en classe tous les pliages que j'avais fait. Grand enthousiasme ! J'ai présenté, en particulier, le cube, ou "bombe à eau". Ce fut du délire quand j'ai expliqué pourquoi on l'appelait ainsi. C'est le premier pliage que nous avons fait ensemble. Ce fut aussi le seul. J'ai profité de cette "démonstration" et de leur réceptivité pour introduire les notions utiles de plis en creux, plis en relief, plis inversés, et les règles du jeu de l'Origami : partir d'une feuille carrée et ne faire ni collage, ni découpage. A la fin de l'heure, je leur ai demandé de chercher d'autres pliages respectant les mêmes règles.

Pendant les heures suivantes, ils ont dû fabriquer par pliage, l'hexaèdre, l'octaèdre et le tétraèdre, solides obligatoires. Une fois ce travail fait, en général en binômes, soit par groupes de quatre élèves, ils pouvaient choisir ce qu'ils voulaient faire, par exemple des pliages utilitaires ou décoratifs qui étaient proposés, soit sous forme de photocopies de schémas de construction, soit par modèles qu'il fallait démonter puis reproduire, soit par organigrammes de pliage.

Peu à peu, groupe après groupe, nous avons exploité ces activités, à partir des questions soulevées par les élèves. Bien sûr, les questions de volume et d'aire latérale ont été étudiées. Mais aussi la proportionnalité entre le côté du carré de la feuille de départ et l'arête des solides obtenus. Certains élèves ont même calculé des coefficients moyens. Un gros obstacle rencontré par les élèves a été une imprécision dans le pliage. Il faut en effet travailler sur une feuille bien carrée, et faire des plis soigneux et bien marqués pour obtenir un solide ayant un minimum d'imperfections. Les élèves brouillons ont dû se contraindre beaucoup pour y arriver. De plus, il faut une certaine habileté manuelle qui n'est pas naturelle chez certains ! Donc, pour limiter les risques de dérapage du pli , l'idée de tracer au préalable est venue naturellement. D'où une étude sérieuse des traces de pli sur le papier après avoir construit, puis défait le volume, suivie par la construction précise et plane à la règle et au compas. Ce fut une révision spontanée de la géométrie de 6° ! Un autre problème soulevé par les élèves voulant colorier les faces est de les retrouver sur la feuille redépliée... Le vocabulaire géométrique précis s'est avéré le seul vraiment opérationnel pour communiquer. Les pliages sont devenus des symétries axiales, les plis, des droites ou des médiatrices. Les élèves ont manipulé les objets de l'espace et une grande partie du programme de géométrie de 5°. Les activités de décryptage des programmes de pliage ont obligé les élèves à une grande réflexion et je peux vous dire que très peu d'entre eux ont abandonné devant la difficulté.

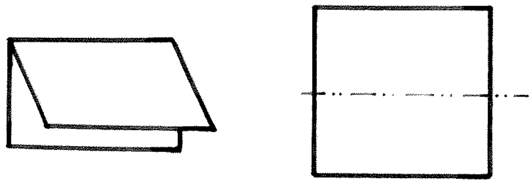
Cette activité a suscité chez les élèves un grand enthousiasme, une activité mathématique intense qui ne s'est pas démentie sauf peut-être lorsque les questions sont devenues plus abstraites et plus théoriques. Nous avons conclu par une exposition lors de journées "portes-ouvertes". Pour la préparer, le travail s'est fait en dehors des heures de cours, le professeur étant simplement le contrôleur des panneaux d'exposition. Les visiteurs ont pu admirer en particulier un bouquet d'une trentaine de fleurs en papier, peintes et arrosées de parfum ("pour faire plus vrai"), une bombe à eau de 5 mm d'arête, un hexaèdre fabriqué à partir d'une feuille de 2 m de côté, des pliages faits avec toutes les sortes de papier...

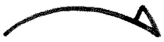
Nous avons aussi exposé d'autres pliages que les élèves ont trouvé soit dans la littérature, soit en modifiant des pliages déjà faits. Les élèves ont pris grand plaisir à chercher en tout cas. J'ai pu les regarder travailler et l'évaluation de chaque élève a été beaucoup plus précise. Le bilan de l'activité a été très positif et je recommencerai !

Voici, à titre d'exemple et de façon résumée, la construction du tétraèdre. On a rappelé auparavant quelques signes conventionnels de l'origamie.

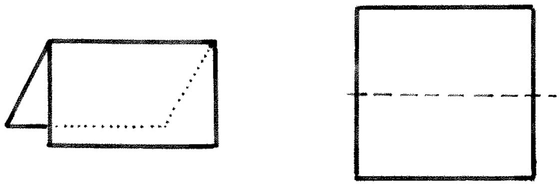
SYMBOLISME

pli vallée
pli en avant

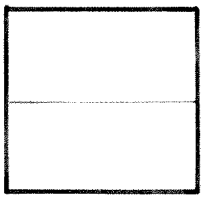




pli montagne
pli en arrière

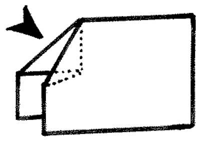


plier et rouvrir



trace d'un pli

pli inverse



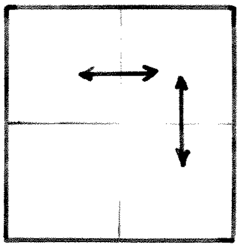
introduire

souffler

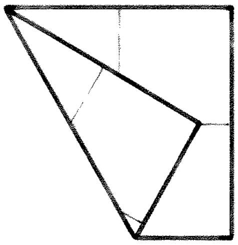
dessin agrandi

point particulier indiqué

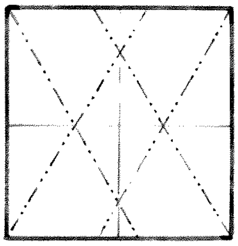
LE TETRAEDRE



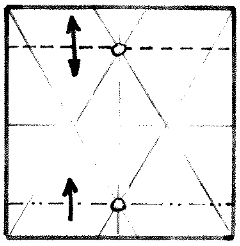
marquer les médianes.



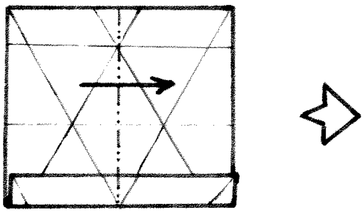
le fameux pli à 30° obtenu en amenant le sommet sur la médiane ; rouvrir .



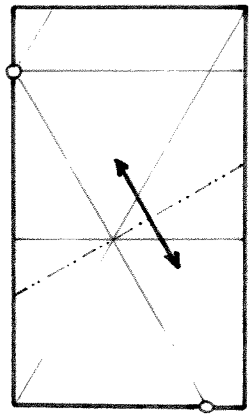
répéter pour chacun des sommets.



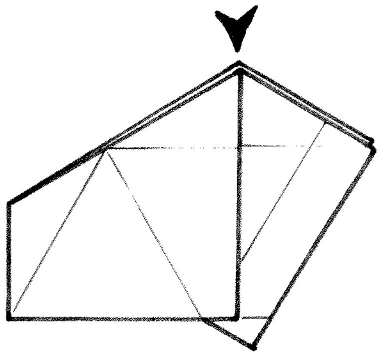
plier le bord inférieur ; plier et rouvrir le bord supérieur.



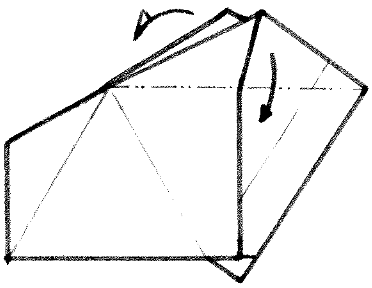
plier en deux



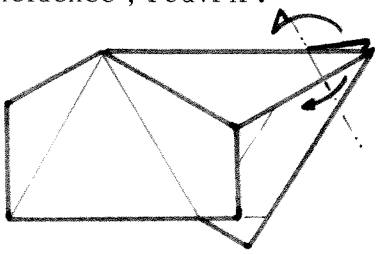
plier en amenant les deux points en coïncidence ; rouvrir.



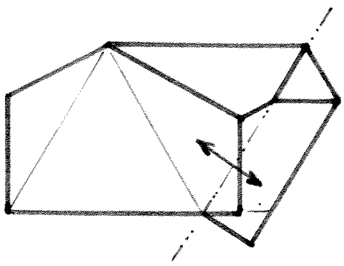
pli inverse



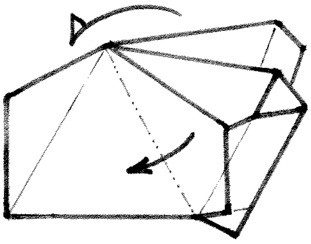
plier de chaque côté les pointes supérieures.



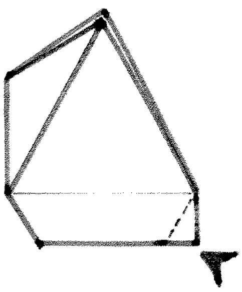
plier de chaque côté les pointes de droite (en utilisant le pli en partie marqué).



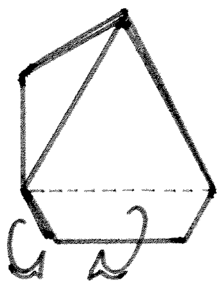
plier ; rouvrir.



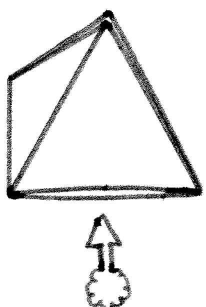
écarter les deux parties de droites et rabattre de chaque côté .



pli inverse.



introduire la bande inférieure .



souffler.

ALGORITHMES EN T A2

Une option - Un choix - Un document - Une expérience

par C. DUPUIS - D. GUIN - J.-P. IGOT - D. MARY-ROUSSELIERE - N. VOGEL

N.D.L.R. : Nombreux sont les collègues qui, enseignant en T A2, ont passé une heure à informer les élèves sur les différentes options afin qu'ils choisissent en connaissance de cause. C'est faire injure aux élèves de A que de laisser croire qu'ils sont rebelles à toute activité mathématique. Ils ont leurs goûts et préférences qu'il faut utiliser (et le rejet de la géométrie n'est pas typique des littéraires) ; leur sensibilité ne doit pas être braquée par un formalisme souvent imposé sans nécessité ou trop tôt dans les cours de mathématiques. Chaque année, des T A2 reprennent goût à certaines mathématiques grâce à la motivation de professeurs qui les enthousiasment, qui, pour l'arithmétique et l'histoire des numérations, qui, pour l'astronomie et les démélés de Kepler, Gallilée ou Newton, qui, pour les probabilités et les lois du hasard...
L'enseignement de l'option algorithmique relaté ci-dessous montre ce qui peut être fait dans ce cas particulier. Nous engageons vivement le lecteur à profiter de tout le travail qui a été fourni dans le cadre de cette expérience.

UNE OPTION

Un groupe de travail a été constitué à l'I.R.E.M. de Strasbourg sur le thème des apports de l'informatique à l'enseignement des mathématiques.

Différentes expériences ont été réalisées avec des adultes enseignant en mathématiques ou d'autres disciplines, ainsi que des jeunes de l'école élémentaire ou du lycée, sur ce thème.

Le présent article relate un travail mené dans le cadre du programme de mathématiques de la Terminale A2.

Nous nous proposons ici de vous présenter des extraits d'un document rédigé et mis au point grâce à la collaboration de deux enseignants de T A2, Monsieur QUELEN (Lycée des Pontonniers) et Madame D. MARY-ROUSSELIERE (Lycée Kléber) à Strasbourg, qui ont accepté de mener une expérimentation dans leurs classes.

UN CHOIX

La liste des thèmes que contient le programme de l'option algorithmique en T A2 nous a paru bien trop longue pour permettre en 15 heures autre chose qu'un survol à haute altitude.

Nous avons préféré une démarche favorisant l'activité des élèves et leur permettant d'écrire eux-mêmes des algorithmes simples, ce qui implique évidemment de limiter le nombre de thèmes abordés.

Nous nous sommes beaucoup interrogés sur la place de la machine dans notre enseignement. Il nous semblait que l'algorithmique est une discipline qui peut exister indépendamment de son utilisation en informatique.

Cependant, la motivation du passage sur machine est essentielle dans cet apprentissage. En effet, la transposition quasi-immédiate des algorithmes écrits en un langage de programmation, et l'exécution des programmes obtenus par les ordinateurs donnent un intérêt concret aux algorithmes et justifient même l'activité.

L'utilisation des ordinateurs permet aussi de démystifier l'informatique auprès d'élèves qui, parce que classés "littéraires" ont souvent plus d'appréhensions et moins d'occasions de faire des essais dans ce domaine que les "scientifiques".

UN DOCUMENT

Ces considérations nous ont conduit à rédiger des fiches-élèves et des fiches-professeur. La dernière version, modifiée après expérimentation, est disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M. (prix : 7.- F). On y aborde les notions de séquences d'opérations, de variable et d'affectation ; l'essentiel du travail porte sur l'écriture d'un algorithme de classement de nombres.

UNE EXPERIENCE : Commentaire de l'enseignante

Il arrive, lorsqu'on demande à un élève de Terminale A2 de choisir a priori parmi les options proposées par le programme celle qu'il souhaite étudier, que l'arithmétique et la géométrie associées à un passé douloureux soient d'emblée rejetées, que les probabilités soulèvent des réticences et l'astronomie qui évoque davantage l'astrologie que le calcul soit acceptée avec enthousiasme. Quant aux activités algorithmiques, ces termes sont tellement suspects qu'aucun élève ne se hasarde à en demander la signification !...

Tout ceci pour dire que l'option "activités algorithmiques" a été imposée à de malheureux littéraires avec force paroles rassurantes durant l'année scolaire 1984-1985. Si l'on excepte deux ou trois opposants irréductibles sur une classe de trente élèves, les autres ont activement participé au travail. Nous osons même avouer que certains ont montré de l'ardeur à l'ouvrage. Le test final nous semble refléter une bonne compréhension.

EXTRAITS DU DOCUMENT ET COMMENTAIRES

Commentaires

Le travail de présentation (fiche 1) a duré 3 heures. Il a permis de présenter aux élèves la notion d'algorithme et de les familiariser avec le type de réflexion qui leur est proposé par la suite. Nous avons introduit la notion de case-mémoire à partir d'exercices sur l'échange de contenus de bols.

Fiche 2B élèves	Mémoires
3 Dans trois cases mémoires notées M1, M2, M3 sont rangés trois nombres. L'opération notée "M1 ⟵ M2" signifie maintenant "recopier le contenu de la mémoire M2 dans M1", en lieu et place du contenu actuel de cette dernière, à la manière d'une copie de cassette magnétique.	

Fiche 2B professeur	Mémoires
3 La notion de case mémoire correspond à la réalité des ordinateurs et peut être utilement illustrée par les manipulations de cassetttes ou de bandes magnétiques en sonorisation. Mettre en évidence les deux faits suivants : si "M1 ← M2" 1) l'ancien contenu de M1 est remplacé par celui de M2 2) celui de M2 subsiste dans M2	

Un premier travail d'organisation de calculs avec un nombre restreint de mémoires est réalisé dans la fiche 3A.

Voici un extrait de la fiche 3B élèves :

Fiche 3B élèves	Mémoires (suite) - Classements

(2) a) Exécuter l'algorithme ci-contre, sur les mémoires M1, M2, M3 contenant respectivement - 5, 0, - 3.
Que contiennent-elles après cette exécution ?

. R ← M1
. si M2 < M1 alors R ← M2
. M2 ← M3
. M3 ← R

b) Même question si les contenus initiaux sont - 3, - 5, 0.

(3) On désigne par x, y les contenus inconnus de deux mémoires M1, M2. Ecrivez un algorithme permettant de classer ces deux nombres, dans l'ordre croissant, dans les mémoires M1, M2. (On utilisera ← et si ... alors ...)

(4) Ecrivez l'algorithme correspondant pour trois mémoires M1, M2, M3 contenant trois nombres inconnus x, y, z.

(5) Déroulez l'algorithme du (4) si les mémoires M1, M2, M3 contiennent au départ 2, 1, 0 en indiquant les contenus intermédiaires de toutes les mémoires utilisées, à chaque étape du déroulement. Combien d'essais analogues faut-il faire pour vérifier que l'algorithme fonctionne bien dans tous les cas ?

Nous avons expliqué dans la fiche 2 (professeur) qu'on peut noter ECHANGE (A,B) l'algorithme qui échange les contenus des mémoires A et B :

. R ← A
. A ← B
. B ← R

Extrait de Fiche 3B professeur	Mémoires (suite) - Classements

(3) et (4) Les exercices qui suivent ont pour but de préparer l'écriture d'un algorithme de classement des contenus de n cases mémoires.

n = 2 Si M2 < M1 alors ECHANGE(M1,M2)
sinon RIEN

n = 3 Une des difficultés rencontrées par les élèves est de raisonner sur des mémoires sans en connaître le contenu. Plusieurs solutions seront sans doute proposées par les élèves. Les algorithmes rencontrés ne sont souvent pas généralisables pour n > 3.
Voici un algorithme qui a le mérite de se généraliser facilement à n cases (cf. fiche 4).

1° Rechercher le plus petit des trois contenus et le mettre dans M1.

2° Recommencer avec les deux cases restantes M2 et M3 d'où l'algorithme :

```
si M2 < M1   alors   ECHANGE (M1,M2)
si M3 < M1   alors   ECHANGE (M1,M3)
                (* M1 contient alors le plus petit nombre)
si M2 > M3   alors   ECHANGE (M2,M3)
                (* M2 contient le plus petit des deux restants)
```

ou en détaillant :

```
si M1 > M2   alors | R ← M1
                   | M1 ← M2
                   | M2 ← R
si M1 > M3   alors | R ← M1
                   | M1 ← M3
                   | M3 ← R
si M2 > M3   alors | R ← M2
                   | M2 ← M3
                   | M3 ← R
```

. Entamer ici une discussion sur la généralisation à plus de 3 cases.
  1) comparer M1 à tous les suivants, échanger dès que M1 est plus grand
  2) comparer M2 à tous les suivants, " " " M2 " " "
     etc...

. Variante possible :
  1) au lieu d'échanger chaque fois les contenus, rechercher la case contenant le plus petit, en parcourant toutes les cases concernées. Echanger ensuite le contenu de cette case avec celui de la case M1.
  2) Procéder de même avec les cases M2, M3 ...

On aura alors :

```
P ← 1
Si M2 < MP   alors   P ← 2
Si M3 < MP   alors   P ← 3
exécuter ECHANGE(M1,MP)
P ← 2
Si M3 < MP   alors   P ← 3
exécuter ECHANGE (M2,MP)
```

5 Mettre en évidence ici la nécessité de parcourir les deux branches de chaque alternative (Soit 6 essais pour le cas n = 3)

Il nous semble intéressant de présenter les deux variantes aux élèves car nous avons rencontré des élèves trouvant "plus naturel" chacun des deux algorithmes.

Le travail sur cette fiche a mis en évidence de nombreuses difficultés dans l'écriture des algorithmes (l'omission du sinon RIEN, la possibililé de réutiliser une procédure telle qu'ECHANGE...). Il nous a semblé plus profitable de laisser les élèves explorer à fond leurs fausses pistes, travailler à leur rythme, sur leurs algorithmes, même difficiles à généraliser.

La fiche 4A avait pour but d'écrire l'algorithme permettant de classer 4 nombres.

Dans le contrôle 1, proposé pour une heure, figure un premier exercice de pilotage d'un robot, non reproduit ici.

Contrôle 1

Exercice 2 :

On dispose de 4 mémoires T_1 T_2 T_3 T_4 contenant chacune un nombre entier

T_1	T_2	T_3	T_4
x	y	z	n

.

Les nombres x, y et z vérifient la relation $x < y < z$.

ALGORITHME

SI $T_4 \leq T_1$ ALORS $\left[\begin{array}{l} T_3 \leftarrow T_2 \\ T_2 \leftarrow T_1 \\ T_1 \leftarrow T_4 \end{array}\right.$

SINON $\left[\text{SI } T_4 \leq T_2 \text{ ALORS } \left[\begin{array}{l} T_3 \leftarrow T_2 \\ T_2 \leftarrow T_4 \end{array}\right. \quad \text{SINON } \left[\text{SI } T_4 \leq T_3 \text{ ALORS } \left[T_3 \leftarrow T_4 \right.\right.\right.$

<u>Question 1</u> On donne les contenus suivants :

T_1	T_2	T_3	T_4
4	7	8	2

et on exécute l'algorithme ci-dessus.

Indiquez, dans un tableau, les contenus de T_1 T_2 T_3 T_4 à chaque étape de l'exécution.

<u>Question 2</u> Même question dans le cas où au départ les contenus sont

T_1	T_2	T_3	T_4
-2	1	6	3

<u>Question 3</u> Plus généralement les contenus au départ sont :

T_1	T_2	T_3	T_4
x	y	z	n

avec $x < y < z$

a) si $n \leq x$, quels sont les contenus de T_1 T_2 T_3 à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

b) si vous ignorez la position de n par rapport à x,y et z, que pouvez-vous dire des contenus de T_1 T_2 T_3 à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

L'exercice 2, ci-contre, porte encore la trace de la première désignation que nous avions donnée aux cases-mémoires : T comme tiroir. Nous avons abandonné, après la 1ère expérimentation, cette image trop concrète qui créait deux obstacles. L'opération $T_1 \leftarrow T_2$ était interprétée par certains élèves comme "vider le tiroir T_2 dans le tiroir T_1". A la suite de cette opération, le tiroir T_2 était vide, ce qui ne correspond pas à la réalité de l'opération d'affectation. Cette interprétation était suggérée par l'analogie très forte entre tiroir et bol, et par le fait que nous avions utilisé la même notation "$\leftarrow$" pour l'opération "verser le contenu d'un bol dans un autre". Le deuxième obstacle était qu'un tiroir pouvait contenir plusieurs nombres, surtout s'il était assez grand !

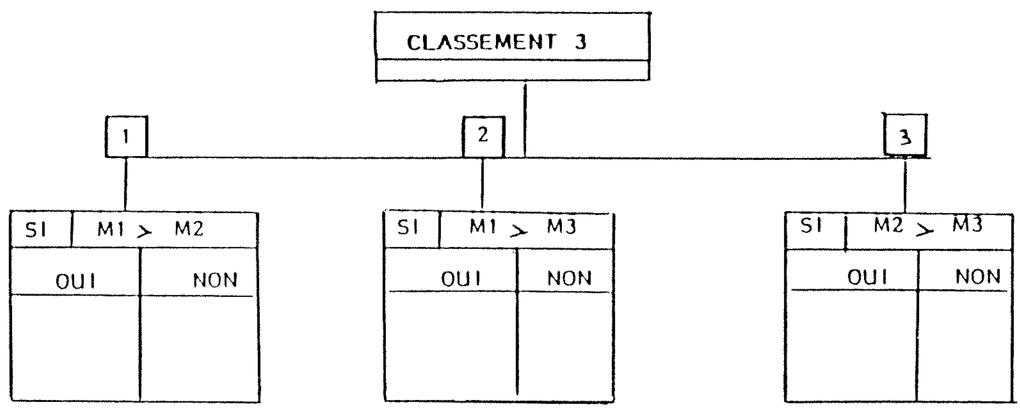
Nous avons, dans la deuxième expérimentation modifié notre présentation en conséquence (cf. fiches 2B). L'opération "verser le contenu d'un bol dans un bol vide est notée $\curvearrowleft$ par opposition à l'opération d'affectation $M_1 \leftarrow M_2$. Toute mention de tiroir a disparu. Les deux erreurs ne se sont pas reproduites dans la 2ème expérimentation, l'analogie avec la copie de cassette magnétique ne présentant pas ces deux inconvénients.

Une difficulté qui subsiste quelle que soit la présentation est celle de la compréhension du si alors (sinon). A ce stade 6 élèves sur 20 lors de la 1ère expérimentation n'étaient pas parvenus à éxécuter correctement l'algorithme du contrôle 1.

Une autre représentation des algorithmes est alors proposée aux élèves : "l'arbre" (fiche 5, ci-dessous). Dans cette représentation, on assimile le déroulement d'un algorithme au parcours d'un "arbre" de haut en bas, et de gauche à droite, les instructions à éxécuter figurant dans les "feuilles terminales" de l'arbre. Cette représentation permet de débloquer certains élèves qui ont tendance à éxécuter toutes les instructions même si elles sont soumises à certaines conditions. Elle est aussi très utile pour la structuration des problèmes car elle suggère la décomposition en sous-problèmes.

Fiche 5 élève	Fonctionnement d'un algorithme de classement

Le schéma suivant représente l'algorithme de classement de 3 nombres de la fiche 3



(1) Complétez les cases OUI NON respectives avec les instructions de l'algorithme de classement.

(2) M1, M2, M3 contiennent, au départ - 2, 4, - 5.
Indiquez pour chacun des tests [1] [2] [3] , laquelle des cases OUI ou NON est parcourue pour effectuer le classement de ces trois nombres.

(3) Même question pour 2, 1, 0

(4) Quelles étaient les valeurs initiales possibles de M1, M2 et M3 pour que l'algorithme se déroule de la façon suivante :

[1]	[2]	[3]
OUI	NON	OUI

(5) Quels sont tous les autres déroulements possibles ? Donnez un exemple de contenus pour chaque cas.

(6) Construire un schéma similaire pour le classement de 4 nombres par l'une ou l'autre des méthodes vues dans la fiche 4-A.

Fiche 5 professeur	Fonctionnement d'un algorithme de classement

[1]

Si	M1 > M2
OUI	NON
ECHANGE (M1,M2)	

[2]

Si	M1 > M3
OUI	NON
ECHANGE (M1,M3)	

[3]

Si	M2 > M3
OUI	NON
ECHANGE (M2,M3)	

N.B On pourra barrer la case vide ou bien y mettre RIEN

(2)

- 2	4	-5
- 2	4	-5
- 5	4	-2
	-2	4

[1]	[2]	[3]
NON	OUI	OUI

(Faire remarquer que le contenu de M1, M2, M3 évolue éventuellement d'un test à l'autre.)

(3)

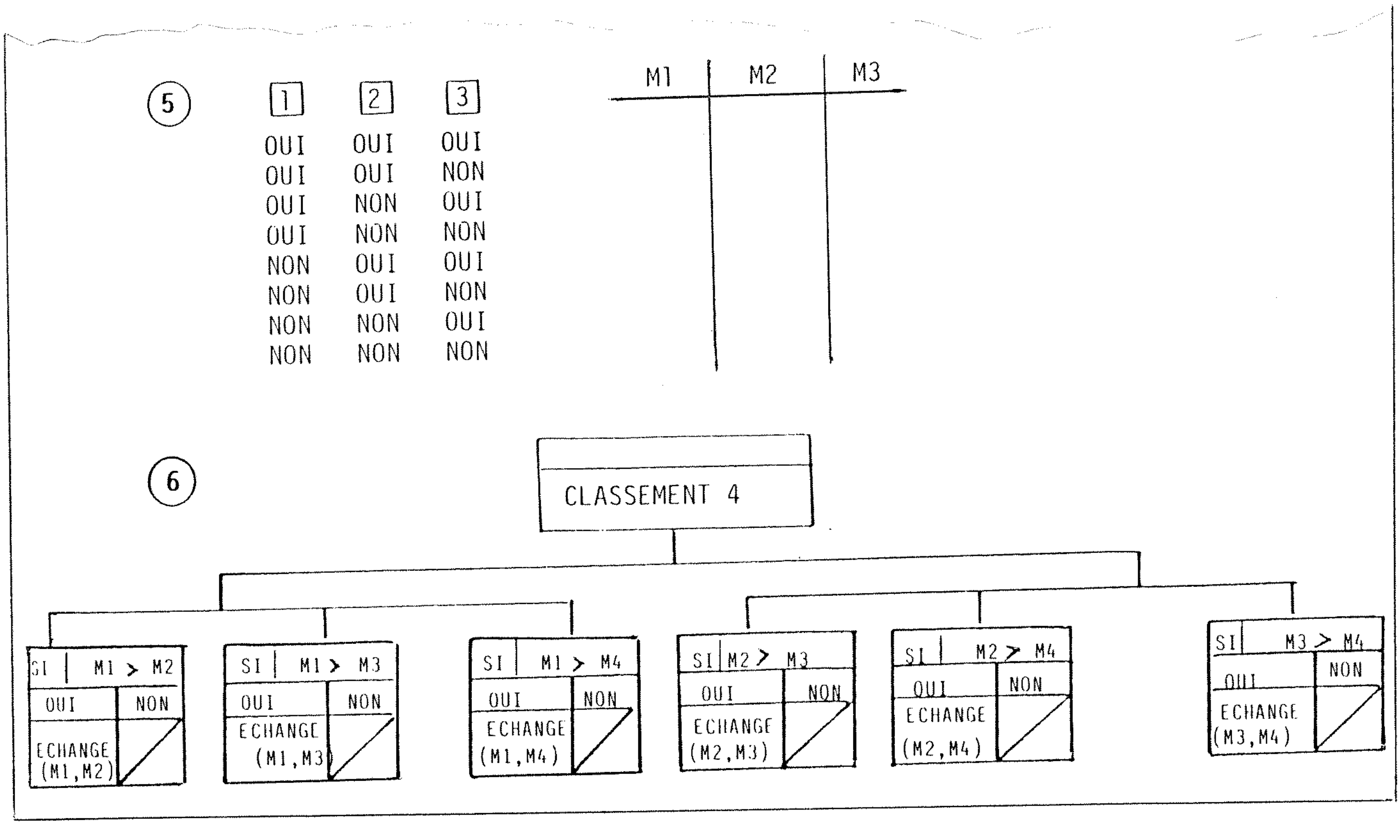
2	1	0
1	2	0
0	2	1
	1	2

[1]	[2]	[3]
OUI	OUI	OUI

(4)

[1]	[2]	[3]
OUI	NON	OUI

M1	M2	M3
2	0	1
0	2	1
	1	2



La séance suivante a été consacrée à la généralisation de l'algorithme de classement à n nombres. Ensuite, nous avons fourni le programme (LSE ou BASIC) aux élèves et nous leur avons montré comment l'utiliser sur micro-ordinateur. Nous avons mis en évidence l'analogie voulue entre le formalisme utilisé dans l'écriture des algorithmes et la structure du programme.

Nous avons terminé cet enseignement sur la construction d'un jeu ayant essentiellement comme objectifs :

- réutiliser les notions acquises dans une autre activité plus proche de l'informatique familiale,
- poursuivre ce type d'activité dans le cadre d'un club informatique.

A priori et a posteriori, ce type d'activité nous a paru très intéressant à présenter dans une terminale littéraire pour au moins deux motifs. Le premier est que ces élèves sont souvent bloqués par des difficultés numériques que l'on ne rencontre pas ici. Le second est qu'ils ont pu, dans un cadre nouveau, exercer leurs qualités d'organisation, de logique et de rigueur.

Remarquons, enfin, que le passage sur machine a été une activité indispensable pour répondre à un de nos objectifs : aucun de ces élèves de section littéraire n'avait déjà programmé un micro-ordinateur, nous avons voulu leur offrir la possibilité de poursuivre cette activité dans un club informatique, s'ils le désiraient.

NOS ENFANTS S'INTERESSENT ENCORE...

ou :

DIFFERENTES CONSTRUCTIONS D'UN PENTAGONE REGULIER A L'AIDE DE LA REGLE ET DU COMPAS

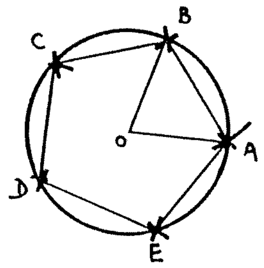
par Jean-Paul BOMANS

Dans une classe de 1ère S, à propos d'exercices portant sur les relations métriques dans le triangle, j'ai demandé à mes élèves de calculer le côté et l'apothème d'un octogone régulier puis d'un octogone étoilé régulier. Je me suis alors aperçu que la notion de polygone régulier constructible à l'aide de la règle et du compas leur était totalement étrangère et constituait donc pour tous un énorme champ d'investigation.

Les cas du triangle équilatéral, du carré, de l'hexagone, des octogones et des dodécagones ont été rapidement résolus. Restait alors, pour nous, les cas des pentagones et des décagones. Et là, j'ai osé !

J'ai osé leur demander, pour la fois suivante, de trouver une construction du côté d'un pentagone régulier à l'aide de la règle et du compas, ce qui constituait une question de cours voici encore quelques années (voir annexe 1). Quelle ne fut pas ma surprise en confrontant les résultats : pas moins de quatre constructions différentes furent proposées. Il ne restait plus qu'à vérifier qu'elles convenaient. Voici ce que cela a donné :

1. CALCUL DU COTÉ C_5 DU PENTAGONE RÉGULIER INSCRIT DANS UN CERCLE DE RAYON R



On suppose le pentagone ABCDE construit.

1) Calcul de $\cos \frac{2\pi}{5}$

O est l'isobarycentre de A, B, C, D, E ; donc :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Projetons sur (OA) ; on obtient :

$R(1 + pr\,(\overrightarrow{OB}) + pr\,(\overrightarrow{OC}) + pr\,(\overrightarrow{OD}) + pr\,(\overrightarrow{OE})) = 0$

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0\,.$$

Et en posant $x = \cos\frac{2\pi}{5}$:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0$$

d'où : $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Or, $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$

donc : $\boxed{\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\,.}$

2) Calcul de c_5

Dans OAB : $BA^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB\cos\widehat{OA,OB}$

donc : $AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\frac{2\pi}{5}$

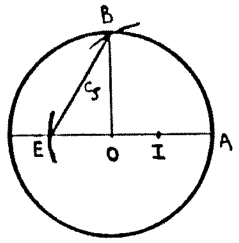
$$= 2R^2 - 2R^2\,\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$= R\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

ainsi : $\boxed{c_5 = R\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\,.}$

2. CONSTRUCTIONS ET JUSTIFICATIONS

Construction 1



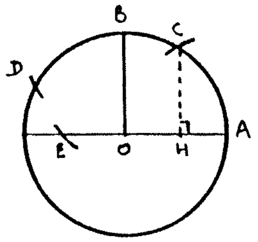
I est le milieu de (O,A)

IB = IE

C_5 = BE

La démonstration est laissée au soin du lecteur.

Construction 2



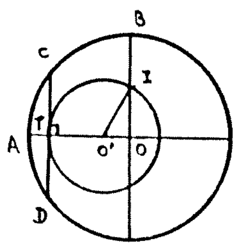
AC = BD = R

CD = CE

BE = C_5

L'arc CD vaut $\frac{\pi}{2}$ donc CD = CE = R $\sqrt{2}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (OA). Alors, en utilisant Pythagore : EH = $\frac{R}{2}$ $\sqrt{5}$. Il est ensuite facile de calculer OE puis BE et de vérifier ainsi la construction.

Construction 3



I est le milieu de (O,B)

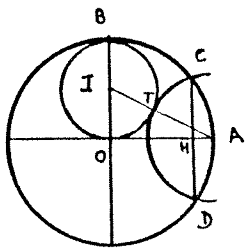
OO' = $\frac{1}{4}$ OA

CD est tangente au cercle (O',O'I) et parallèle à BO

CD = C_5

Le calcul permettant de démontrer ce résultat est laissé au soin du lecteur.

Construction 4



I est le milieu de (O, B).

On trace le cercle de centre I et de rayon R/2.

On trace le cercle de centre A tangent en T au précédent.

$CD = C_5$.

Le calcul est ici un peu plus long mais repose toujours sur une application répétée du théorème de Pythagore.

N.D.L.R. : Il y a deux cercles de centre A, tangents au cercle (I, R/2). On peut construire outre C et D, deux autres points C' et D'. Soit A' le point diamétralement opposé à A, on démontre que CC'A'D'D est un pentagone régulier.

3. EPILOGUE

Une fois la construction du pentagone réalisée, celle du pentagone étoilé, du décagone et du décagone étoilé en découlent immédiatement ainsi que les calculs de leurs côtés et de leurs apothèmes.

Plusieurs élèves se sont alors lancés dans le cas de l'heptagone régulier (un essai figure en annexe 2). Il a fallu démolir leurs tentatives et, une fois n'est pas coutume, les décourager dans leur impossible entreprise (voir aussi l'annexe 3).

4. ANNEXES

Annexe 1 : Emile Borel, Géométrie 1er et 2ème cycle, Armand Colin, 1921.

312 GÉOMÉTRIE

Pentagone et décagone. — Divisons une circonférence en 10 parties égales (fig. 361) et joignons le premier point A au second B et au quatrième D; soit M le point d'intersection de AD avec le rayon OB; je dis que les triangles AMB et OMD sont isoscèles et semblables. Il suffit d'évaluer leurs angles au moyen des arcs qu'ils interceptent sur la circonférence. Celle-ci ayant été divisée en 10 parties égales chacun des arcs AB, BC,..., LA vaut $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ de quadrant; on en conclut

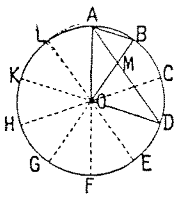


Fig. 361.

$$\widehat{MAB} = \widehat{MDK} = \frac{2}{5} \text{ dr.}$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{BMA} = \widehat{DMO} = \widehat{MOD} = \frac{4}{5} \text{ dr.}$$

On a donc :

$$AM = AB \qquad MD = OD = R.$$

De même les triangles OMA et OAD sont isoscèles et semblables ; on en conclut

$$\frac{AM}{OA} = \frac{OA}{AD}.$$

Posons $AM = x$, $AD = AB = y$; cette dernière équation donne

$$xy = R^2$$

et l'on a d'autre part

$$y - x = AD - AM = MD = R.$$

CÔTÉS DES POLYGONES RÉGULIERS 313

Il est donc aisé de calculer y et x; les quantités y et $-x$ ont pour somme R et pour produit $-R^2$; ce sont donc les racines de l'équation

$$X^2 - RX - R^2 = 0$$

équation qui donne

$$X = R\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La racine positive est égale à y et la racine négative à $-x$; on a donc

$$y = R\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad x = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

La valeur de x est le côté du décagone régulier inscrit; y est le côté du *décagone étoilé*, que nous figurons ci-contre (fig. 362) sans insister sur sa construction et ses propriétés.

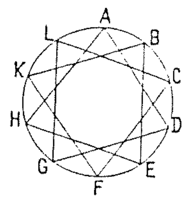


Fig. 362.

Le côté du pentagone régulier inscrit est DF et l'on a

$$\overline{DF}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{AD}^2 = 4R^2 - R^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

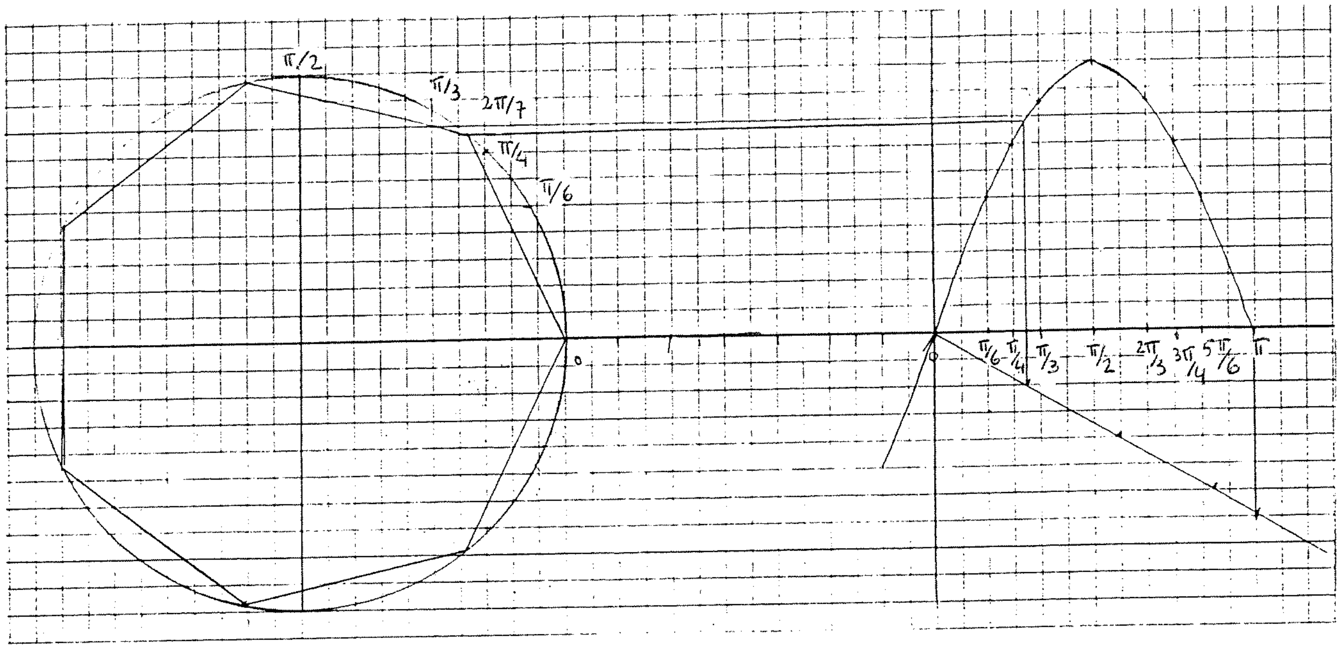
$$= R^2\frac{8-3-\sqrt{5}}{2} = R^2\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

c'est-à-dire

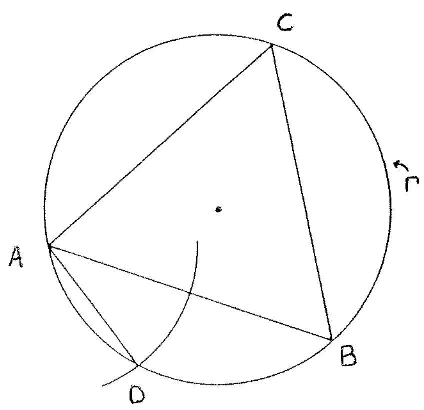
$$DF = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

On calculerait de même le côté BF du *pentagone étoilé*.

Annexe 2 : Tentative de construction de l'heptagone régulier à l'aide de la règle et du compas par un élève de 1ère S.



Annexe 3 : Sujet proposé au Rallye Mathématique d'Alsace, en classe de 1ère, en 1977 (Voir : L'Ouvert n° 16, p. 41).



2ème sujet (Cette question concerne le plan affine euclidien usuel).

Un disciple de Pythagore vint un jour, tout heureux, lui annoncer une découverte :

"Je viens, lui dit-il, d'inventer une construction à la règle et au compas de l'heptagone régulier convexe (polygone régulier convexe à sept côtés). Voici mon procédé :

Je trace un cercle Γ, et un triangle équilatéral ABC inscrit dans Γ, puis à partir de A comme centre, je mène un arc de cercle de rayon égal à la moitié de la longueur AB : cet arc vient couper Γ en D. Je dis que [A,D] est le côté d'un heptagone régulier convexe inscrit dans Γ" (voir figure).

Que pensez-vous de la valeur scientifique de la découverte de l'élève de Pythagore ? Justifiez votre réponse par une démonstration.

ATELIER D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Thème de l'année 1986-1987 : LES SERIES TRIGONOMETRIQUES DANS LA CONSTRUCTION DE L'ANALYSE MODERNE

La richesse inépuisable des séries trigonométriques ainsi que la rapidité avec laquelle on est conduit, dans leur étude aux questions les plus profondes concernant l'évolution des concepts mathématiques - sans lourdeurs terminologiques ou pré-requis démesurés - les mystères renouvelés des calculs effectifs qui s'y rattachent, pourraient suffire à motiver une étude de l'histoire des idées dans ce domaine.

Il se trouve que les séries trigonométriques constituent sans conteste possible un point nodal récurrent de la pensée mathématique contemporaine : on ne peut à cet égard mieux faire que de citer l'un des grands ouvrages récents sur le sujet (hélas en anglais !) : R.E. Edwards : Fourier Series, a Modern Introduction T.1 et T.2 (Holt-Rinehast Winston Eds) ou récemment dans la collection Textbooks in Maths de Springer.

> "It seems fair to credit Dirichlet with the beginning of the rigorous study of Fourier Series in 1829, and with the closely related concepts of function in 1837. Both topics have been pursued with great rigor ever since, in spite of more than one crisis no less serious than that wich engaged the attentions of Bernoulli, Euler, d'Alembert, and others and wich related to the prevailing concept of functions and their representation by trigonometric series. (Cantor's work in set theory, wich led ultimately to another major crisis had its origins in the study of trigonometric series.) "*

Nous étudierons donc les textes relatifs aux problèmes clefs suivants :

. La querelle de l'équation des cordes vibrantes ; d'Alembert, Euler, Bernouilli - ou : qu'entend-t-on par fonction, fonction analytique, fonction continue ?

. Le problème de la convergence uniforme : "démonstration" par Cauchy d'une conjecture considérée jusque là comme évidente : la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue ; les exemples de Fourier et Poisson ; les contre-exemples d'Abel ; la "bonne" démonstration de Seidel.

. Les travaux de Dirichlet - ou : quelles fonctions peut-on représenter par une série trigonométrique ?

. Le rôle joué par les séries trigonométriques dans la constitution de la théorie des ensembles, dans les théories de l'intégration - Riemann - Cantor - Lebesgue.

L'atelier fonctionnera un mercredi par mois, de 14 h 30 à 16 h 30. Première séance le 1er octobre 1986 en salle de réunion de l'I.R.E.M.

O. GEBUHRER J.-P. FRIEDELMEYER

(*) Il semble juste d'attribuer à Dirichlet l'initiative de l'étude rigoureuse des séries de Fourier (1829) et du concept de fonction qui s'y rattache étroitement (1837). Ces deux domaines ont fait l'objet d'études très précises depuis, malgré plusieurs crises aussi sérieuses que celle qui préoccupa Bernouilli, Euler, d'Alembert et d'autres, concernant le concept prédominant des fonctions et de leur représentation par les séries trigonométriques (les travaux de Cantor sur la théorie des ensembles qui aboutirent à terme à une nouvelle crise d'importance, dérivaient des séries trigonométriques).

UN LOGICIEL DE CALCUL SYMBOLIQUE : MU - MATH

Etienne MEYER

Mu-math est un logiciel de calcul symbolique qui permet d'obtenir entre autres, les résultats suivants, sans programmation, uniquement par interrogation, à l'aide d'un "langage" très simple :

. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$

. $\left[\left(\frac{17}{9}\right)^3 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \right] \times \frac{1}{\frac{51}{12} + \frac{35}{36}} = \frac{307871}{243648}$

. Le P.G.C.D. de 3621 et 2496 est 3

. $10! = 3628800$

. $250! = \ldots$ suivent 499 chiffres !!!

. $\sqrt{29952} = 48 \sqrt{13}$

. $9X^4 - Y^4 + 2Y^2 = 1$ lorsque $X = 10864$ et $Y = 18817$
(se reporter à l'article de M. de Cointet dans "L'Ouvert" n° 38)

. Les solutions de l'équation en x, $x^2 - 3x + 2$ sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$

. Les solutions de l'équation en z, $z^5 = 1$, sont $z_1 = e^{8i\frac{\pi}{5}}$, $z_2 = e^{6i\frac{\pi}{5}}$,
$z_3 = \ldots z_5 = 1$.

. $(x^2 - 3x + 1)(2x - 1) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 1$.

. La dérivée de $\ln(x^2 + 1)$ est $\frac{2x}{1 + x^2}$.

. Une primitive de $\cos^3 x$ est $\frac{3}{4} \sin x + \frac{1}{12} \sin 3x$.

. La limite en $+\infty$ de $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$ est $+\infty$.

. $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \frac{1}{4}(n^2 + 2n^3 + n^4)$.

. Le développement de Taylor à l'ordre 10 de $x \sin x$ en $x = 0$ est
$x^2 - \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{120} x^6 - \frac{1}{5040} x^8 + \frac{1}{362880} x^{10}$.

. $\int_0^8 \frac{x}{1 + x}\,dx = 8 - \ln 9$

1. PRESENTATION GENERALE DE MU-MATH

Ce logiciel est écrit mu-SIMP (un dialecte de LISP, langage bien adapté à ce type de problème comme l'est certainement aussi PROLOG) et est complètement "ouvert" : il peut être utilisé tel quel, ou examiné, modifié et complété à la guise de l'utilisateur. Des leçons d'utilisation et des leçons de programmation (bien faites) sont disponibles avec le langage et le logiciel sur les disquettes. Il est adaptable sur les micros 8 bits fonctionnant sous CP/M et figure au catalogue des logiciels de l'opération I.P.T. pour les 16 bits (je l'ai utilisé sur Apple II + 64K avec la carte Z80 et sur LX549 ; il est transférable sur d'autres machines E.N.).

L'utilisation de mu-math en classe (2nde - 1ère T) demande une première préparation de l'ordre de 15mn avec les élèves pour leur expliquer l'essentiel du fonctionnement et leur donner la liste des principales "fonctions" disponibles. La mise en route en salle informatique demande quelques minutes. Vous ai-je sufisamment convaincu de la simplicité et de l'intérêt de ce logiciel pour que vous me suiviez dans une approche plus détaillée et plus honnête ?

La première difficulté rencontrée est celle de la lecture d'expressions mathématiques écrites sur une ligne avec quelques conventions spécifiques. C'est ainsi que vous ne verrez pas $e^{8i\frac{\pi}{5}}$ mais # E ↑ (8*# I*#PI/5). On s'y fait !

La deuxième difficulté est liée aux nombreuses formes possibles d'une même expression ; par exemple :

$$3x(1 - x)(1 + x) = x(1 - x)(3 + 3x) =$$
$$= 3(x - x^2)(1 + x) = 3x(1 + x - x(1 + x)) =$$
$$= \ldots \qquad = 3(x - x^3) =$$

Et encore, dans cet exemple il n'y a pas de dénominateur ! Le logiciel met à la disposition de l'utilisateur des "variables de contrôle" ; suivant les valeurs affectées à ces variables, l'expression donnée sera écrite sous telle ou telle forme. C'est un peu complexe (mais pas surprenant). Heureusement, le logiciel gère lui-même ces variables dans certaines recherches (recherche de primitives par exemple) et dans un premier temps, il n'est pas nécessaire de pénétrer dans l'arbre des nombreuses possibilités.

Par ailleurs, mu-math met à la disposition de l'utilisateur, trois configurations standards de ces variables, accessibles par trois fonctions. On obtient ainsi, en posant

$$P = \left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right] \times \frac{1}{x^2+y^2}$$, les résultats suivants :

$$\mathrm{EXPD}(P) = \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2+y^2}$$

FCTR(EXPD(P)) = 2 (tout de même !)

mais ... $\mathrm{EXPAND}(P) = \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$

et $\mathrm{FCTR}(P) = \dfrac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{x^2+y^2}$ (sans changement !)

Hum ! Il est temps de revenir à des choses simples.

2. L'ARITHMETIQUE ET L'ALGEBRE

Mu-math manipule les entiers jusqu'à 661 chiffres, ce qui est assez spectaculaire ; en fait, il travaille sur des expressions, et les calculs qu'il fait sont nécessairement exacts (un exemple est donné, à la fin de l'article, de programme permettant le calcul d'une valeur approchée des racines des entiers). Grâce à l'application des règles de calcul sur les fractions, il permet donc tout calcul exact sur les rationnels. Mu-math dispose des constantes #E, #I, #PI (pour e, i, π) : il n'en connaît pas, bien sûr, la valeur, mais seulement quelques propriétés lui permettant la simplification d'expressions contenant ces constantes. C'est ainsi que ln(e) sera transformé en 1, i^2 en -1, $\cos(\pi)$ en -1. Par contre, tel qu'il est livré ce logiciel ne donne pas $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. (Il vous est possible de complèter le logiciel...). La manipulation d'expressions contenant des racines carrées procède de la même logique. $\sqrt{2}$ (en fait 2 ↑ (1/2)) n'est pas connu, mais grâce à l'application des règles sur le calcul avec exposants, on obtiendra $(\sqrt{2})^2 = 2$.

L'application de ces mêmes règles donnera également $(\sqrt{A})^2 = A$; $\sqrt{-1} = i$; $\sqrt{i} = \sqrt{i}$ (!) ; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{-16} = 4i$. Tout n'est pas conforme à nos habitudes et à nos exigences, mais tout cela procède "d'une certaine logique", celle choisie par l'auteur du programme : aucun contrôle sur A pour l'utilisation de $\sqrt{A}$, et choix de l'ordre d'application des règles de calcul (par exemple : on obtiendra $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = i^2 = -1$ et non pas $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$).

Or, il n'y a pas de "bon choix" ! et certaines situations peuvent amener des "erreurs" : à l'utilisateur de rester prudent et attentif (ou de modifier les règles du jeu ! - problème analogue pour 0° -). Je reviendrai sur les conséquences pédagogiques de ces difficultés à la fin de l'article.

La résolution des équations

Une équation est d'abord considérée comme une expression particulière, (et pour mu-math, une équation sera écrite sous la forme E1 == E2 ; par exemple : $ax^2 + bx + a == a^2 + a$) et ces expressions sont manipulables : on peut les multiplier par un réel, les ajouter, les multiplier, les transformer par une fonction (sous-entendu : membre à membre).

Pour résoudre soi-même l'équation E : $3x + 4 ==10$, on pourra donc demander l'évaluation des expressions suivantes :

$$E1 : E - (4==4)$$
$$E2 : \frac{E1}{3}$$

Et on obtient l'équation suivante : x==2 qui représente en fait la solution.

Mu-math sait essentiellement résoudre (formellement) les équations du second degré et donner les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre. Il ramène également l'équation E1.E2 ==0 à E1 ==0 et E2==0 mais ne découvre pas par lui-même les factorisations (autres que la factorisation par x) permettant la résolution de certaines équations (c'est le contraire qui aurait été surprenant ! mais peut-être qu'un jour, lorsque l'intelligence artificielle aura réellement fait des progrès, pourrons-nous disposer de fonctions de mise en facteurs...).

Voici quelques exemples de résolution d'équations par mu-math :

. SOLVE $(t^3 + 2t^2 - 4t==t\ ,t)$ donne $t== -1 +\sqrt{6}$
$t== -1 -\sqrt{6}$
et $t== 0$

(t a pu être mis en facteur)

. SOLVE $(x^2 - kx + 2, x)$, c'est-à-dire, SOLVE $(x^2 - kx + 2==0,x)$
donne : $x== \frac{k}{2} + \sqrt{-2 + \frac{k^2}{4}}$ et $x== \frac{k}{2} - \sqrt{-2 + \frac{k^2}{4}}$

. SOLVE $(x^2 - kx + 2,k)$ donne $k==x + \frac{2}{x}$
(il faut, bien sûr, préciser le nom de l'inconnue ; par contre, ici, aucun "test" n'est prévu sur les paramètres - cas x = 0 -).

. SOLVE (x^2 - 3x + 2, k) donne $\{\ \}$ (pas de solution de k !)

. SOLVE (x==x, x) donne x==ARB(1)
(c'est-à-dire : une première valeur ARBitraire pour x)

. Par contre, SOLVE (ax==0, x) donne x==0 sans précaution.

Mu-math possède également un ensemble très riche de fonctions permettant de manipuler les matrices (et par conséquent de résoudre des systèmes d'équations), mais vu le sort actuellement réservé aux matrices dans l'enseignement secondaire, je n'en dirai pas plus.

3. L'ANALYSE

On dispose, entre autres, des fonctions ln, sin, cos, exp avec des variables de contrôle (nombreuses pour les fonctions trigonométriques) permettant de préciser si l'on souhaite l'utilisation de telle règle de transformation ou non. Mais il n'est pas, fort heureusement, nécessaire dans un premier temps de rentrer dans ces considérations délicates pour utiliser avec profit les fonctions suivantes du logiciel :

LIM pour la recherche de limite,
DIF pour dériver,
INT et DEFINT pour la recherche d'une primitive et l'intégration
TAYLOR pour le développement en série de Taylor.

Recherche de limite

Il faudra préciser, non seulement l'expression de la fonction, mais également le nom de la variable, la valeur particulière x_o de la variable en laquelle on désire la limite, et éventuellement s'il s'agit d'une limite à gauche (par défaut, c'est la limite à droite qui est recherchée). Les valeurs possibles pour x_o sont : un nombre ou un symbole désignant un nombre, PINF, MINF ($+\infty$, $-\infty$), PZERO, MZERO (0 par valeurs positives ou par valeurs négatives). Pour les réponses, s'y ajoutent encore CINF ($\frac{1}{0}$), ? (limite n'existe pas) et il est possible que le logiciel demande à l'utilisateur des précisions sur des paramètres influençant la réponse :

. LIM ($\frac{x^2 + 1}{dx + 1}$, x, PINF) provoquera la question : quel est le signe de d ?
A la réponse + de l'utilisateur, mu-math répond PINF pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{dx + 1} \right)$

.LIM ($\frac{1}{x}$, x, 0) donne PINF (limite à droite)

.LIM ($\frac{1}{x}$, x, O, TRUE) donne MINF (limite à gauche)

.LIM (sin x, x, PINF) donne ? (pas de limite)

Dérivation

Aucune difficulté pour dériver ne m'est apparue, et ce n'est guère surprenant : les règles de dérivation sont claires et permettent d'arriver au résultat. On sera parfois amené à transformer l'expression proposée par mu-math, à l'aide de FCTR ou EXPD, pour lui donner une forme plus agréable. Une remarque cependant : mu-math ne sera guère gêné si vous lui demandez la dérivée de ln $(-x^2)$; il travaille sur des expressions, à nous de lui poser de bonnes questions !

Recherches de primitives et intégration

C'est vraissemblablement la partie la plus formidable du logiciel. Bien sûr, il échoue sur de nombreux exemples (il donne alors comme réponse, la question posée ou une question équivalente), mais quelle assurance dans de nombreux cas où nous, nous savons qu'on peut y arriver, mais reculons devant l'ampleur des calculs.

.INT ($\cos^3$ x, x) donne $\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x$

.INT (INT(sin x,y),x) donne - y cos x

.INT ($\frac{1}{x^2+2x+3}$, x) donne $\ln(3+2x+x^2)$

.INT ($\frac{1}{x^2+x}$, x) donne $\ln\left(\frac{-x}{1+x}\right)$

(pourquoi ce signe - ? C'est dommage, mais tout de même, ça me donne une bonne idée, ça aide...)

.INT (x sin x, x) donne -x cos x + sin x

.INT ($\sin^6$ x + $\cos^6$ x, x) donne $\frac{5}{8}x + \frac{3}{32}\sin 4x$

.DEFINT ($\frac{1-x}{1+x}$, x, 0,1), c'est-à-dire $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}$, donne 2 $\ln$ 2 - 1

.INT ($\sqrt{1+x^3}$, x) donne ..... INT ($\sqrt{1+x^3}$, x).

4. LA FONCTION TRACE

En mu-SIMP, sauf ordre explicite d'impression, n'apparaît à l'écran que le résultat de la dernière évaluation. On dispose cependant d'une fonction aux possibilités très intéressantes : TRACE. Ainsi, si dans le programme d'une fonction F, on utilise les fonctions F1, F2, F3 et qu'on applique la fonction F après avoir demandé TRACE (F1, F2, F3), on obtiendra le résultat de l'évaluation de chacune des fonctions F1, F2 et F3 à chaque fois que le programme principal F les appellera. Ceci permet d'obtenir une trace de la manière dont mu-math cherche à résoudre le problème posé (mais nécessite de connaître les fonctions-clefs intéressantes : on peut trouver celles-ci en listant le programme mu-math).

L'intérêt pédagogique de cette fonction TRACE est évident : elle permet de montrer la méthode utilisée pour résoudre les problèmes ; celle-ci est systématique, déterministe. Par exemple, dans la recherche d'une primitive de $\frac{1 + x}{3 + 2x + x^2}$ (où nous reconnaissons immédiatement $u'u^{-1}$) la fonction INT, reconnaissant un produit ($(1 + x) \times \frac{1}{3 + 2x + x^2}$) essaye d'abord une intégration par parties, abandonne rapidement cette voie, puis décompose la fonction en $\frac{1}{3 + 2x + x^2}$ et $\frac{x}{3 + 2x + x^2}$. La recherche d'une primitive de chacune de ces fonctions aboutissant à un résultat, le programme ne cherche pas de voies plus simples. C'est ainsi que le résultat est obtenu ici par un chemin assez complexe (passage par ATAN ($\frac{x + 1}{\sqrt{2}}$)). Dans d'autres cas, la "trace" de la recherche peut apporter des idées intéressantes.

5. DERNIER PARAGRAPHE

Quel est l'avenir d'un tel logiciel ? Quelle est son utilité ? Voici quelques réflexions faisant suite à une modeste utilisation en classes (2nde, 1ère, Term.).

. La mise en oeuvre est très simple et les élèves aiment bien.

. Pour certaines pages d'exercices, la réussite de mu-math est de l'ordre de trois exercices sur quatre. Moralité dégagée de cette observation : si mu-math y arrive, vous (les élèves) devriez y arriver aussi en suivant les bons conseils de votre professeur ; si mu-math n'y arrive pas, il doit y avoir une "astuce" à appliquer avant de mettre en oeuvre les méthodes classiques.

. Les quelques "ennuis" rencontrés ont donné une bonne occasion pour approfondir des points délicats.

. L'utilisation de la fonction TRACE a permis une bonne réflexion chez certains élèves sur les méthodes de recherche de primitives.

Sans rentrer dans les détails, je voudrais signaler tout de même qu'il est possible de compléter mu-math par des programmes écrits en mu-SIMP (mais ceci n'a pas été fait entièrement avec les élèves, impérialisme BASIC oblige !) Voici l'exemple du calcul de la racine carrée d'un rationnel positif à une précision donnée : RAC(A, B, C) donne, sous forme décimale ("troncature" après écriture sous forme $n \,.\, 10^{-p}$) et sous forme rationnelle, une valeur approchée de $\sqrt{A}$ à 10^{-B} près, en prenant C comme première valeur de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{u_n + a^2}{2a}$. Par défaut, C vaut 1 et B vaut 5.

```
?       FUNCTION VAP(E,N),
    POINT:N,
    NEWLINE(1),
    PRTMATH(E,0,0,TRUE),
    POINT:FALSE,E,
ENDFUN$


? FUNCTION RAC(X,N,A),
    WHEN ABS(A↑2-X)<10↑( -N),A,EXIT,
    RAC(X,N,(A+X/A)/2),
ENDFUN$


? FUNCTION RACINE(X,N,A),
    WHEN NOT NUMBER(X),X↑(1/2),EXIT,
    WHEN NUMBER(A↑(1/2)),X↑(1/2)),X↑(1/2) EXIT,
    BLOCK
         WHEN N=FALSE,N:5 EXIT,
    ENDBLOCK,
    BLOCK
         WHEN A=FALSE,A:1 EXIT,
    ENDBLOCK,

    VAP(RAC(X,N,A),N),
ENDFUN$


? RACINE(2,4,2);

@:
1.4142
 577 / 408


? RACINE(19);

@:
4.35889
 5331463645914715901021239526856398081 / 1223121644931491741401139604654015680


? RACINE(3,1);

@:
1.7
 7 / 4


? RACINE(3,2);

@:
1.73
 97 / 56
```

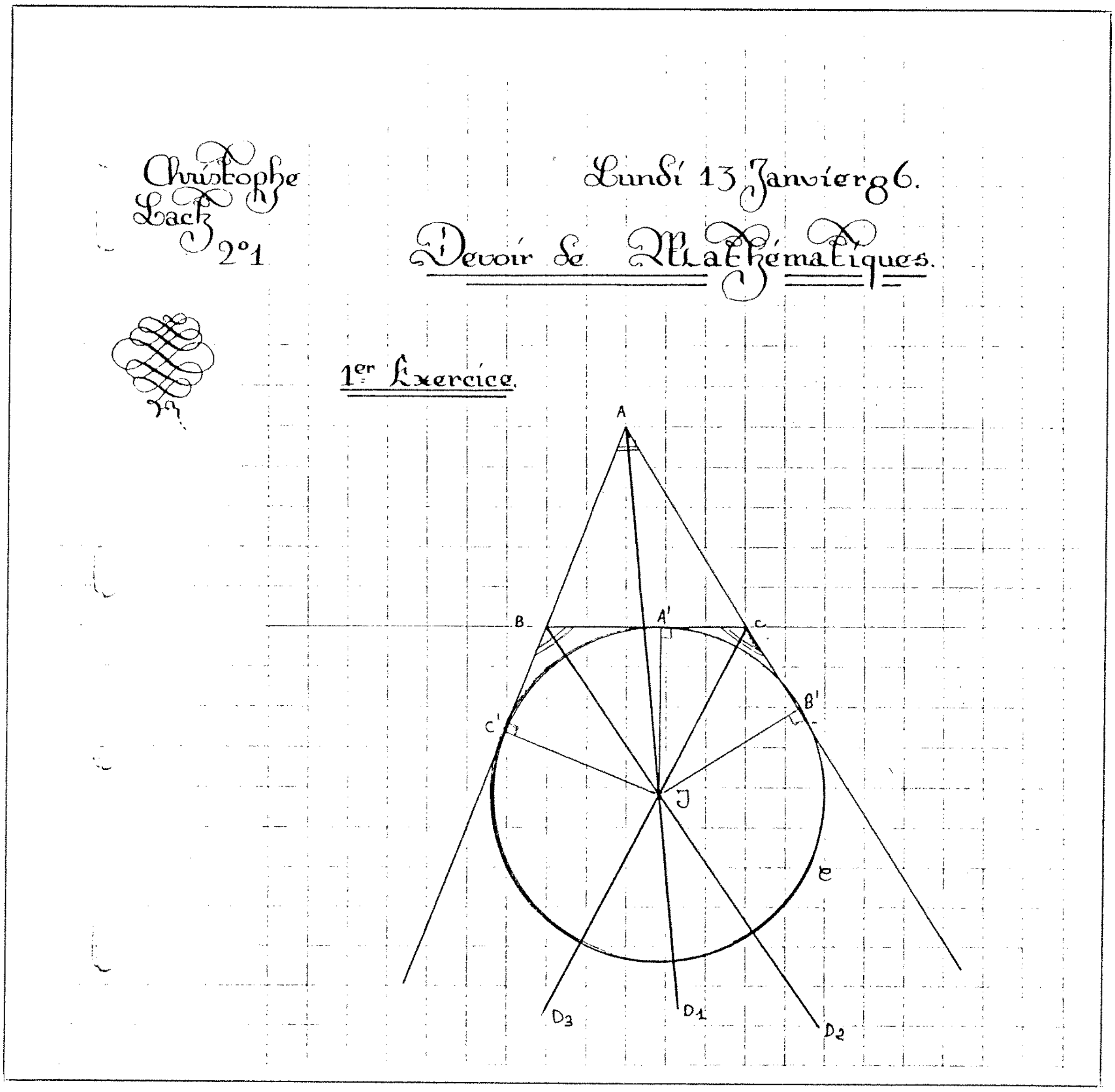
```
? RACINE(3,3);

@:
1.732
 97 / 56


? RACINE(3,4);

@:
1.7320
 18817 / 10864
```

Ce logiciel, sans être parfait, est merveilleux. D'autres, du même genre, vont certainement arriver, par voies scolaires ou non ; ils vont influencer petit à petit notre enseignement, modifier exercices et "problèmes" à poser aux élèves. Je crois qu'il serait intéressant que nous échangions nos expériences, nos essais, notre réflexion...
Si cela vous intéresse, écrivez à "L'Ouvert" qui transmettra et nous examinerons la suite à donner.



DECOMPOSITION DES POLYEDRES

et le TROISIEME PROBLEME DE HILBERT

Jean LEFORT

§ 1. INTRODUCTION

En 1900, se tient l'Exposition Universelle, à Paris. A cette occasion, le Second Congrès International des Mathématiciens rassemble la fine fleur de l'époque, sous la présidence de Poincaré. L'exposé de Hilbert est l'un des plus attendus. Il le donne le mercredi matin, 8 août 1900, par une grande chaleur, et y présente sa fameuse liste de 23 problèmes. D'ailleurs, pressé par le temps, il suit le conseil de Hurwitz et de Minkowski, et n'expose qu'une sélection de 10 problèmes. Le texte de son exposé paraîtra en 1902, en allemand - c'est le texte reproduit dans ses oeuvres complètes - et en anglais - traduction dans le Bulletin de la Société Mathématique Américaine, reprise dans le symposium de 1974.

Voici le troisième problème, tel que P. Cartier le traduit de l'allemand :

"3. L'égalité du volume de deux tétraèdres ayant des bases et des hauteurs égales.

Gauss exprime, dans deux lettres à Gerling, son regret que certains théorèmes de la géométrie des solides dépendent de la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire, pour employer la locution moderne, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier le théorème d'Euclide (livre XII, prop. 5), selon lequel deux pyramides de même hauteur à base triangulaire sont dans le même rapport que leurs bases. Mais le problème analogue pour les aires planes a été complètement résolu ; Gerling a aussi réussi à démontrer l'égalité des volumes de deux polyèdres symétriques au moyen d'une subdivision en parties superposables (par déplacement). Cependant, il me semble impossible de prouver en général de cette manière le théorème d'Euclide cité plus haut, et il s'agirait de donner une démonstration rigoureuse de cette impossibilité. Une telle démonstration serait obtenue, si nous réussissions à trouver deux tétraèdres de même base et de même hauteur, qui ne se subdivisent d'aucune manière en tétraèdres superposables, et qui aussi ne se laissent pas compléter par des tétraèdres superposables en des polyèdres pour lesquels une telle subdivision en tétraèdres superposables soit possible."

L'histoire de ce problème est curieuse. Avant la publication de Hilbert, Dehn, dès 1900 a donné une solution sous la forme réclamée par Hilbert ; ce qui est plus important, il a défini l'invariant qui porte son nom, et sur lequel nous reviendrons plus loin. D'ailleurs, lors de la présentation orale, Hilbert n'avait pas gardé le 3ème problème dans sa liste restreinte. Considéré comme résolu - et comme faisant partie de la géométrie élémentaire - il ne continue à occuper que quelques géomètres suisses, danois ou russes.
En 1974, un colloque à De Kalb (U.S.A.) fait le point sur les problèmes de Hilbert. Il y a bien un exposé oral sur le 3ème problème, mais aucun texte dans les deux volumes publiés.

Pourtant, depuis 1975, divers problèmes de topologie et de géométrie différentielle amènent à étudier des généralisations de cette question et la découverte d'analogies avec d'autres théories laisse supposer des liens inattendus entre arithmétique, topologie et physique mathématique.

§ 2. EUCLIDE ET LES AIRES PLANES

Dans les Eléments, la fin du Livre I et le Livre VI sont consacrés aux aires planes. Le début du Livre I est consacré aux cas d'égalité des triangles ; on devrait plutôt dire "congruence des triangles" si l'on nomme congruentes deux figures A et B pour lesquelles il existe un déplacement direct amenant A en coïncidence avec B. A partir de la proposition I.34, on s'intéresse à diverses situations où l'on peut affirmer que des triangles ou des parallélogrammes ont la même aire. En particulier, on a la proposition I.41, que l'on pourrait paraphraser par l'énoncé classique : l'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur. Mais rien ne serait plus contraire à l'esprit d'Euclide ; il ne définit nulle part la notion d'aire, et il n'est pas question d'attribuer une valeur numérique à une aire.

Si l'on analyse les démonstrations d'Euclide et que l'on se réfère aux notions communes (axiomes généraux qui suivent au début des Eléments la liste des postulats géométriques), on se rend compte qu'il considère dans l'ensemble des polygones (1) une relation d'équi-

(1) Euclide ne donne pas vraiment de définition générale d'un polygone, mais considère surtout des triangles et des quadrilatères (définitions 19 à 22).

valence que l'on interprétera comme signifiant que A et B ont même aire. Cette relation d'équivalence (1) satisfait aux règles suivantes :

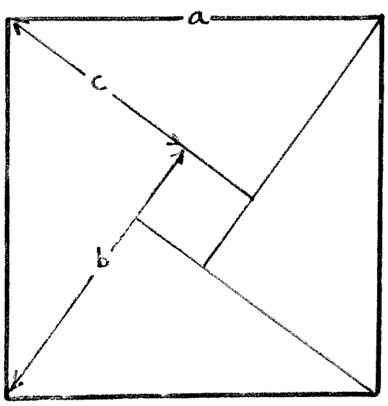
a) des figures congruentes sont équivalentes (notions communes n° 4) ;

b) si la figure A est composée de deux morceaux A' et A'', et de même B est composée de B' et B'', de l'équivalence de A' avec B' et de A'' avec B'', on conclut à l'équivalence de A avec B (notions communes n° 2) ;

c) sous les hypothèses de b), si A est équivalente à B, et A' à B', alors A'' est équivalente à B''(notions communes n° 3).

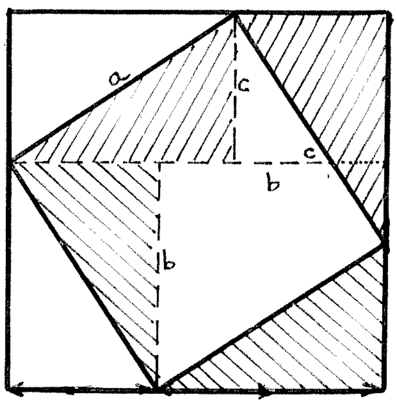
d) si la figure A est composée de n parties équivalentes à A', et B de n parties équivalentes à B', de l'équivalence de A et B on infère celle de A' et B'.

Le couronnement du Livre I est le théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle ABC de côtés a,b,c, où l'angle en A est droit, on a $a^2 = b^2 + c^2$. Cette égalité s'interprète de la manière suivante (2) : le carré construit sur le côté a est équivalent à une figure composée de deux carrés égaux à ceux construits sur les côtés b et c. De très nombreuses démonstrations de ce théorème reposent sur des manipulations d'aires comme le montrent les trois figures suivantes :

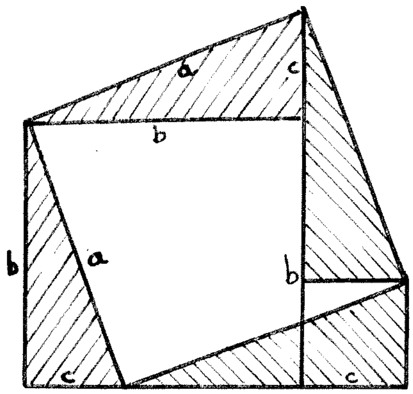


méthode chinoise au début de notre ère

$$a^2 = (b - c)^2 + 2bc$$
$$= b^2 + c^2$$



méthode de Legendre



méthode de Thabit ibn Qurra (9ème siècle)

En comparant les parties hachurées dans le même sens on a immédiatement, et dans les deux cas

$a^2 = b^2 + c^2$.

(1) Euclide n'éprouve pas le besoin de distinguer la congruence des figures et leur équivalence, et parle d'égalité dans les deux cas.

(2) On sait que les manipulations d'aires sont un substitut d'algèbre chez Euclide (voir en particulier le Livre II).

Au Livre VI, Euclide utilise les résultats acquis sur les proportions au Livre V ; il va pouvoir étudier les similitudes, et démontrer les deux résultats fondamentaux suivants :
a) si la figure A' est semblable dans le rapport t à la figure A, le rapport des aires de A' et A est t^2 ;
b) si, dans un parallélogramme, on multiplie deux côtés parallèles dans le rapport t et les deux autres dans le rapport t', alors l'aire est multipliée par tt'.
Au passage, on établit le théorème de Thalès par la méthode des équivalences d'aires.

§ 3. LES AIRES PLANES AU 19ème SIECLE

L'idée de développer complètement la notion d'aire sans recourir à la continuité est reprise au 19ème siècle par de nombreux auteurs, dont Bolyai le père. Le résultat de ces travaux est synthétisé au chapitre 4 des "Grundlagen der Geometrie" de Hilbert. Tout d'abord, il faut définir clairement la notion de polygone (ou plutôt de domaine polygonal) dans le plan, comme réunion finie de domaines triangulaires. On dit qu'un polygone A est décomposé en deux polygones B et C si l'on a $A = B \cup C$ et que l'intersection $B \cap C$ est réunion de segments de droites ; définition analogue pour la décomposition en un nombre fini de polygones.

DEFINITION 1 : Deux polygones A et A' sont équivalents par décomposition (ou equidécomposables) si l'on peut décomposer A en triangles T_1 , ..., T_n et A' en triangles T'_1 , ..., T'_n de sorte que chaque triangle T_i soit congruent au triangle T'_i .

DEFINITION 2 : Deux polygones A et A' sont équivalents par complémentation (ou équicomplémentables) s'il existe deux polygones équivalents par décomposition C et C' tels que C soit décomposé en A et B, et C' en A' et B', avec B et B' équivalents par décomposition.

Il est clair que deux polygones équivalents au sens 1 le sont au sens 2. La réciproque est vraie en géométrie plane réelle, mais ne le serait plus dans la géométrie plane sur un corps ordonné non archimédien. Dans le cas réel, qui nous occupe seul ici, il y a donc une seule notion d'équivalence ; elle répond à toutes les exigences d'Euclide. En adaptant ses raisonnements, on prouve par des méthodes élémentaires le résultat suivant (Euclide, I.45) :

Soit AB un segment, pris comme unité de longueur. Pour tout polygone P, il existe un rectangle ABCD équivalent à P, et un seul (1).

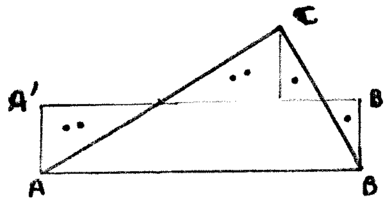
(1) Euclide n'éprouve pas le besoin de démontrer l'unicité qui découle pour lui de l'axiome : "le tout est plus grand que la partie" (Notions communes n° 5).
Le mot "équivalent" est pris ici dans le sens d'aires égales.

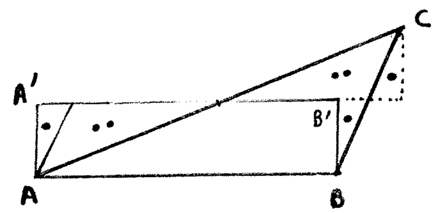
On prendra comme unité d'aire le carré de côté AB ; l'aire du polygone P précédent sera mesurée, dans cette unité, par le rapport CB/AB.

C'est en 1832 que Bolyai (le père) - et en 1833 de façon indépendante Gerwien - démontra le théorème : "Deux polygones ont la même aire si et seulement si ils sont équivalents par décomposition".

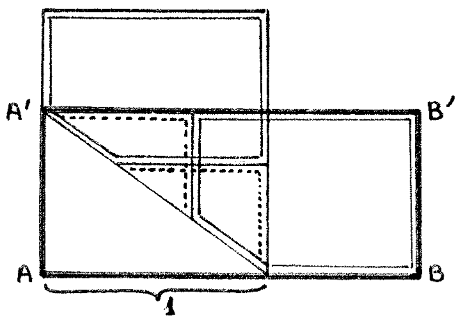
La démonstration repose sur les deux étapes suivantes :

1) On peut décomposer un triangle ABC en un rectangle ABB'A'





2) On peut décomposer un rectangle ABB'A' en un rectangle dont l'un des côtés est de longueur 1.

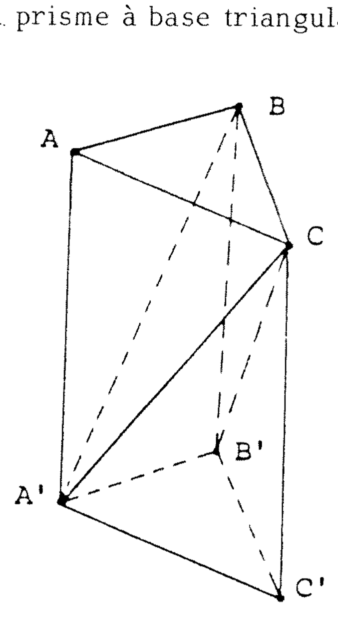


Si le rectangle est trop long on le découpe en n morceaux qu'on empile.

§ 4. EUCLIDE ET LES VOLUMES

En dimension 3, un résultat crucial (Euclide, XII.7) affirme que les trois pyramides ABCA', BCA'B' et A'B'C'C en lesquelles se décompose un prisme à base triangulaire ABCA'B'C' ont même volume.

Il suffit pour cela de prouver que deux tétraèdres ABCD et ABCD' ont même volume si la droite DD' est parallèle au plan ABC, et ceci résulte de Euclide, XII.5. Mais ce dernier résultat nécessite chez Euclide aussi bien que chez Legendre par exemple (1), la méthode d'exhaustion, c'est-à-dire un découpage continué indéfiniment et une application de l'axiome d'Archimède (ou, de façon moderne un calcul d'intégrale). La démonstration repose sur les deux étapes suivantes :



(1) voir page suivante.

Le tétraèdre P = ABCD est décomposé comme suit :

le tétraèdre P' = AB'C'D'

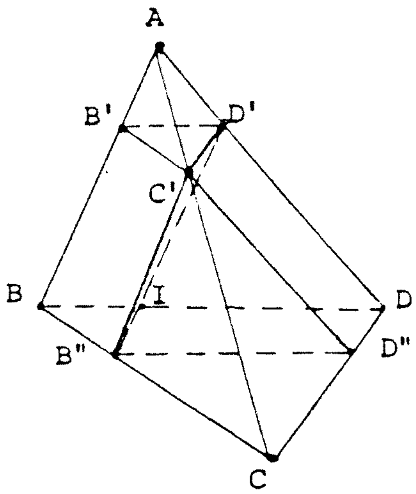
le tétraèdre P'' = CC'B''D''

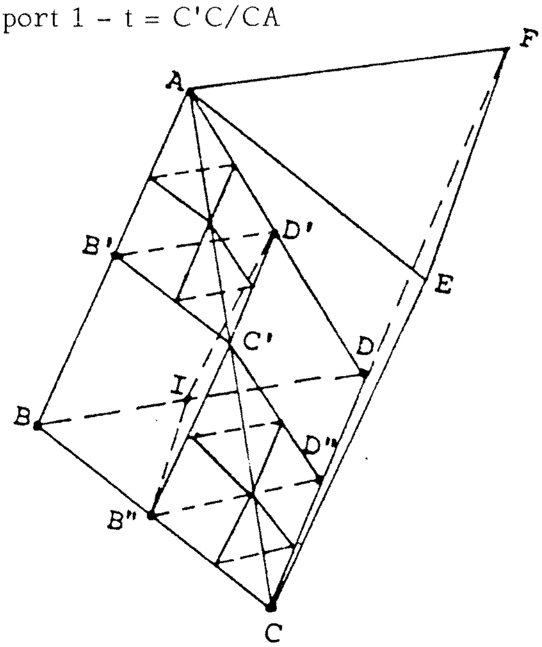
le prisme BB''IB'C'D'

le prisme C'B''D''ID'D

P' est homothétique de P dans le rapport t = C'A/CA

P'' est homothétique de P dans le rapport 1 - t = C'C/CA





Chacun des prismes BB''IB'C'D' et C'B''D''ID'D est équivalent à $\frac{1}{8}$ du grand prisme Π = AEFBCD. Les tétraèdres P' = AB'C'D' et P'' = CC'B''D'' sont égaux et homothétiques de rapport $\frac{1}{2}$ de P. Si l'on admet que le volume est homogène de poids 3, on a

vol(P') = vol(P'') = $\frac{1}{8}$ vol(P)

d'où facilement vol(P) = $\frac{1}{3}$ vol (Π).

N.B. : Euclide et Liu Hui continuent la subdivision en 2, et utilisent un raisonnement équivalent à la formule $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$.

On comprend alors la question de Hilbert : "Deux polyèdres de même volume sont-ils équivalents par découpage fini ?".

§ 5. LES VOLUMES A PARTIR DU 19ème SIECLE

On dit qu'un polyèdre P est décomposé en les polyèdres A et B si l'on a P = A $\cup$ B et si A $\cap$ B est une réunion de polygones ou de segments. On admet que si P est décomposé

---

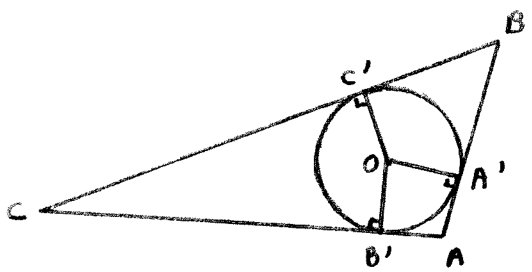
(1) Il est remarquable que, malgré la différence notable des points de vue, et l'éloignement géographique et culturel, la même construction se retrouve tant dans Euclide, XII.3, que chez Liu Hui (刘徽) un auteur chinois du 3ème siècle (voir D.B. WAGNER dans Historia Mathematica 6(1979), p. 164-188).

en tétraèdres le volume de P est la somme des volumes des tétraèdres et que ce volume ne dépend que de P (et non pas de la décomposition choisie). Il suffit donc de connaître le volume des tétraèdres pour pouvoir calculer le volume de n'importe quel polyèdre. Le résultat d'Euclide, obtenu par la méthode d'exhaustion, affirme que deux tétraèdres de même base et de même hauteur ont même volume.

Cependant, dans un certain nombre de cas particuliers, un découpage fini permet de conclure :

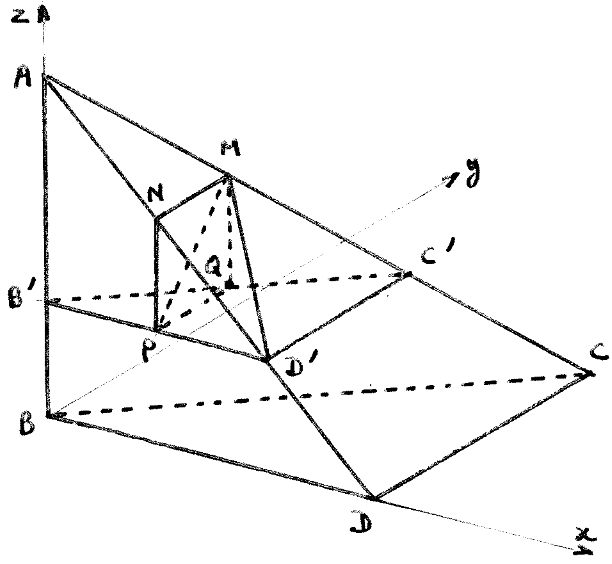
1) Pour les prismes (droits ou obliques), puisqu'il suffit de travailler sur la base plane et de le ramener ainsi à un prisme à base carrée ; puis de travailler sur l'une des faces latérale pour le ramener à un prisme droit et enfin à un cube en recommençant encore deux fois la même opération.

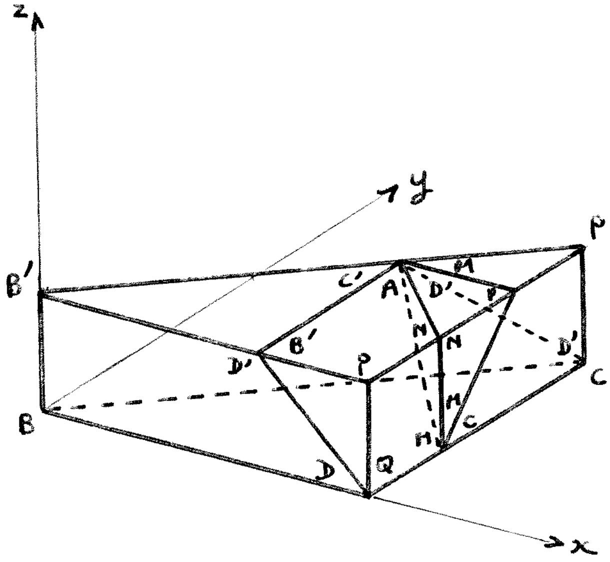
2) Pour les polyèdres symétriques par rapport à un plan (ce qui n'est pas tout à fait évident car on ne peut pas retourner un polyèdre, comme un gant, comme on peut retourner une figure plane). La démonstration analogue à celle ci-dessous pour un triangle scalène a été faite par Gerling en 1844.



O est le centre du cercle inscrit. On échange par déplacement les pièces B'OC'C et A'OC'B.
Dans l'espace on décompose le polyèdre en tétraèdres élémentaires et on utilise la sphère inscrite dans le tétraèdre.

3) En 1896 Hill découvre trois familles de tétraèdres (plus quelques isolés complétés en 1923-56-58-62 et 74 par divers mathématiciens) équivalents par découpage fini à un cube. Voici un exemple particulier de découpage en un prisme droit (ce qui résout le problème - voir plus haut) d'un tétraèdre de Hill (on trouvera les caractéristiques des autres en annexe).





On décompose le tétraèdre A(0,0,1) B(0,0,0) C(1,1,0) D(1,0,0) en les quatre morceaux BCDB'C'D' ; AMNPQB' ; MPD'C'Q et MNPD' avec B'D'C' plan $z = \frac{1}{3}$ et MNPQ plan $x = \frac{1}{3}$. On rassemble selon le prisme de la 2ème figure.

Mais ce n'est qu'en 1943 que Sydler démontre que dans l'espace ordinaire, il y a équivalence logique entre l'analogue des définitions 1 et 2 du paragraphe 3 (équivalence entre l'équidécomposition et l'équicomplémentation). Ce résultat a été étendu à une dimension quelconque par Hadwiger en 1957 et Zylev en 1965.

En 1896 également Bricard énonce le résultat suivant :

> Si deux polyèdres A et B sont équidécomposables, alors on peut trouver des entiers n_i et n'_j et $p > 0$ tels que :
>
> $$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_q\alpha_q = n'_1\beta_1 + n'_2\beta_2 + \dots + n'_r\beta_r + p\pi$$
>
> où les α_i sont les angles dièdres de A et β_j ceux de B.

Ce résultat implique la non-équidécomposabilité du cube et du tétraèdre régulier. En effet, pour le cube $\Sigma n_i\alpha_i = k\frac{\pi}{2}$ tandis que pour le tétraèdre $\Sigma n'_j\beta_j = l\delta$ où δ n'est pas rationnel en π (car $\cos\delta = \frac{1}{3}$).

Malheureusement la démonstration que donne Bricard est erronée. C'est en la reprenant que Dehn arrive en 1900 à énoncer le théorème général.

§ 6. INDICE DE DEHN . THEOREMES DE DEHN ET DE SYDLER

Dans un premier papier,peu clair, publié quelques mois avant l'intervention de Hilbert, Dehn montre qu'on peut trouver deux polyèdres de même volume qui ne sont pas équivalents. Pour cela il invente un indice I qui répond aux axiomes suivants :

a) Si P et P' sont deux polyèdres, on a

$$I(P \cap P') + I(P \cup P') = I(P) + I(P').$$

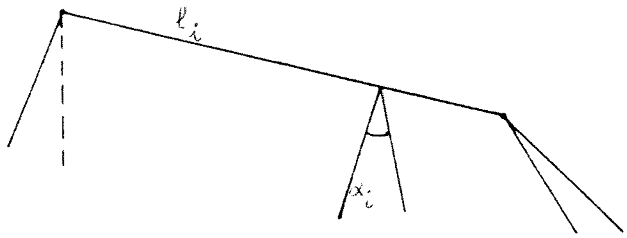
b) Si P est dégénéré, on a $I(P) = 0$.

c) Si P et P' sont deux polyèdres pour lesquels il existe un déplacement g avec $g(P) = P'$, on a $I(P) = I(P')$. (On remarquera l'analogie avec le volume.)

Il est alors immédiat qu'on a $I(P) = I(P')$ si les polyèdres P et P' sont équidécomposables.

L'indice de Dehn a pris au cours des décennies plusieurs formes (rarement simples). La dernière en date, très moderne, peut s'exprimer ainsi :

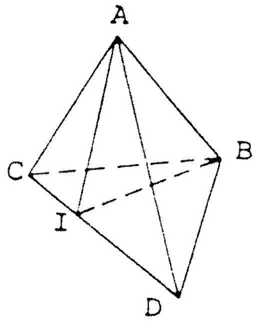
C'est la somme formelle des (l_i, α_i) où l_i est la longueur d'une arête et α_i l'angle dièdre correspondant étendue à toutes les arêtes i du polyèdre.



On pose $D(P) = \sum_{i=1}^{n} (l_i, \alpha_i)$ avec les règles d'addition et de réduction suivantes :

$$(l, \alpha) + (l', \alpha) = (l + l', \alpha)$$
$$(l, \alpha) + (l, \alpha') = (l, \alpha + \alpha')$$
$$(l, \alpha) = (\frac{l}{n}, n\alpha) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$
$$(l, \alpha) = 0 \iff \alpha = k\pi$$

[En fait, la forme initiale de l'indice de Dehn D(P) s'appuyait sur le théorème de Bricard.]



Pour vérifier l'additivité de l'invariant de Dehn, on se ramène au cas élémentaire d'un tétraèdre $P = ABCD$ décomposé en deux tétraèdres $P' = ABCI$ et $P'' = ABDI$; l'arête CD est décomposée en deux arêtes CI et ID, mais les deux angles dièdres sont égaux à δ, d'où $|CD| = |CI| + |ID|$, et

$$(|CD|, \delta) = (|CI|, \delta) + (|ID|, \delta).$$

De même l'arête AB est commune aux trois tétraèdres avec des angles δ_1 pour P, δ_2 pour P' et δ_3 pour P'' ; comme on a $\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$, on a

$$(|AB|, \delta_1) = (|AB|, \delta_2) + (|AB|, \delta_3).$$

Les autres arêtes et dièdres sont communs aux deux tétraèdres, et l'on a finalement $D(P) = D(P') + D(P'')$.

On retrouve facilement le résultat de Bricard .

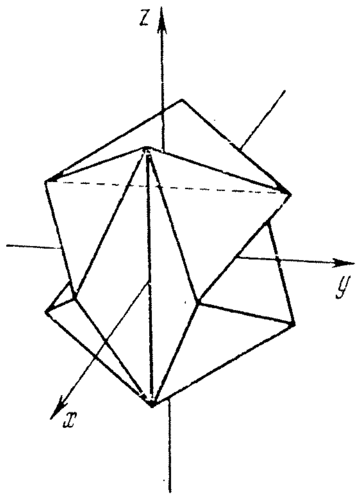
Considérons maintenant un cube C et un tétraèdre régulier T de même volume que C. Soit ℓ la longueur des arêtes de C, et ℓ' celle des arêtes de T'. Les angles dièdres du cube sont tous égaux à $\frac{\pi}{2}$, et il y a 12 arêtes du cube, d'où

$$D(C) = (12\ell, \frac{\pi}{2}) = (6\ell, \pi) = 0.$$

De manière analogue on a $D(T) = (6\ell', \delta)$; mais on a $\cos \delta = \frac{1}{3}$ ce qui exclut que δ/π soit rationnel, d'où $D(T) \neq 0$.

En conclusion, on a $vol(C) = vol(T)$ et $D(C) \neq D(T)$, les polyèdres C et T ne sont pas équivalents.

<u>Remarque</u> : L'indice de Dehn (de même que le résultat de Bricard) montre qu'un polyèdre dont tous les angles dièdres sont des rationnels en π est décomposable en un cube. Sydler en 1951 et Jessen en 1967 construisirent de tels polyèdres : ce sont les polyèdres orthogonaux (c'est-à-dire que deux faces quelconques sont orthogonales dès qu'elles ont une arête commune). L'exemple de l'icosaèdre de Jessen montre qu'il ne s'agit pas toujours d'un assemblage de parallélipèdes :



Les sommets sont les points
$(\pm 2, \pm 1, 0)$
$(0, \pm 2, \pm 1)$
$(\pm 1, 0, \pm 2)$
huit des faces sont des triangles équilatéraux et les douze autres des triangles isocèles.
L'enveloppe convexe ressemble à l'icosaèdre régulier.

De tels polyèdres n'ayant que des angles dièdres égaux à $\frac{\pi}{2}$ sont décomposables en un cube. Mais l'exemple des prismes montre que cette condition n'est pas nécessaire. Le tétraèdre de Hill donné au § 5 répond à cette condition (dièdres de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$). Il est important de remarquer que 6 tels tétraèdres - à l'orientation près - remplissent un cube. On reviendra sur cette particularité.

Le théorème de Sydler (1965)

Le résultat de Dehn semblait clore la discussion, et de fait, il n'y eut que des progrès insignifiants jusqu'en 1940. C'est sans doute Hopf qui ramena l'intérêt sur ce problème et les progrès viendront d'un de ses élèves, nommé Sydler. Il commença à y travailler vers 1943, et démontra finalement en 1965 le résultat suivant qui lui vaudra un prix de la Société Royale Danoise :

Deux polyèdres sont équivalents si et seulement s'ils ont même volume et même indice de Dehn.

§ 7. QUELQUES AUTRES DIRECTIONS DE RECHERCHE

En géométrie plane non archimédienne (1) on démontre qu'on peut trouver deux triangles de même aire qui ne sont pas équidécomposables. Par contre, on démontre qu'il y a équivalence entre l'égalité d'aire et l'équicomplémentabilité.

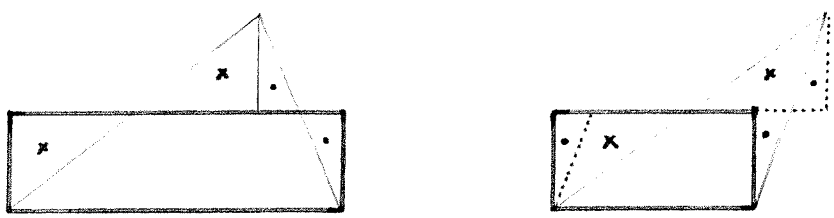
En géométrie plane non euclidienne on démontre l'équivalence des concepts d'équidécomposabilité et d'égalité d'aire aussi bien en géométrie hyperbolique qu'en géométrie elliptique. Il y a d'autre part équivalence avec la notion d'équicomplémentabilité.

En dimension supérieure à 3 il y a toujours équivalence entre équidécomposable et équicomplémentable mais il n'y a pas équivalence avec l'égalité de "volume" (ou ce qui en tient lieu). Des analogues de l'indice de Dehn en dimension 4 et plus ont été proposés par Hadwiger (en 1954). En dimension 4 les conditions trouvées sont nécessaires et suffisantes mais on a seulement démontré leur nécessité en dimension 5 et plus.

Sous groupes de déplacements. Au lieu de transformer une figure en une autre en utilisant des déplacements quelconques pour réassembler les différentes pièces, on peut essayer de se limiter à des déplacements d'un sous-groupe donné à l'avance.

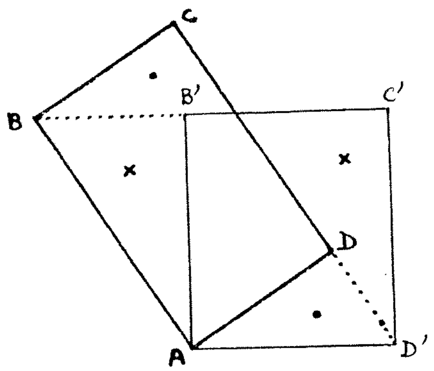
Hadwiger et Oher ont démontré en 1951 que pour les polygones du plan on pouvait se contenter de translations et de symétries centrales (et cela est minimum en ce sens que tout sous groupe permettant l'équidécomposabilité de deux figures de même aire contient ces deux types de transformations). La démonstration repose sur la suite de dessins ci-dessous :

1) Un triangle est équivalent à un rectangle (2 cas de figures)



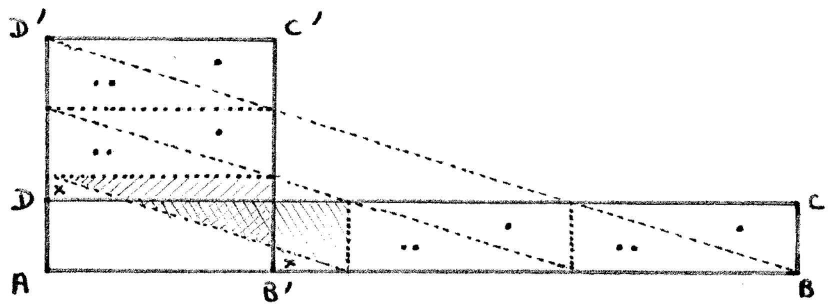
(1) On peut trouver deux segments AB et AC avec $|AB| < |AC|$ tels qu'il n'existe pas d'entier n avec $n . |AB| > |AC|$.

2) Un rectangle est équivalent à un rectangle de direction de côtés donnée.



Si ABCD est trop étroit, on le coupe en deux (ou plus) morceaux égaux qu'on ré-empile comme page 34.

3) Un rectangle est équivalent à un carré



4) Un polygone est équivalent à une réunion de triangles.

Pour les polyèdres, le groupe minimum est celui des déplacements.

Si on prend un sous-groupe de déplacements qui ne contient pas le groupe minimum, on peut se poser la question de chercher les conditions qui rendent deux figures équidécomposables selon ce sous-groupe. Hadwiger a résolu le problème dans le cas des polygones du plan et du groupe des translations :

Soit $\vec{\Delta}$ une droite orientée et P un polygone. On appelle poids du côté AB du polygone P relativement à $\vec{\Delta}$ la quantité εl où l est la longueur de AB et ε vaut 0 si AB n'est pas parallèle à Δ, + 1 si AB est parallèle à Δ et si localement P est à droite de AB orienté comme $\vec{\Delta}$ et -1 si P est à gauche de AB. L'indice de Hadwiger de P relativement à $\vec{\Delta}$: $H_{\vec{\Delta}}(P)$ est la somme des poids de tous les côtés du polygone P. Le théorème annonce que :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux polygones P et Q de même aire soient équidécomposables par translation est que $H_{\vec{\Delta}}(P) = H_{\vec{\Delta}}(Q)$ pour toute droite orientée $\vec{\Delta}$.

Exemples : Deux parallélogrammes de même aire car si P est un parallélogramme $H_{\vec{\Delta}}(P) = 0$ pour tout $\vec{\Delta}$.

Des indices analogues faisant intervenir plans et droites ont été créés en dimension 3 et l'on a aussi une condition nécessaire et suffisante.

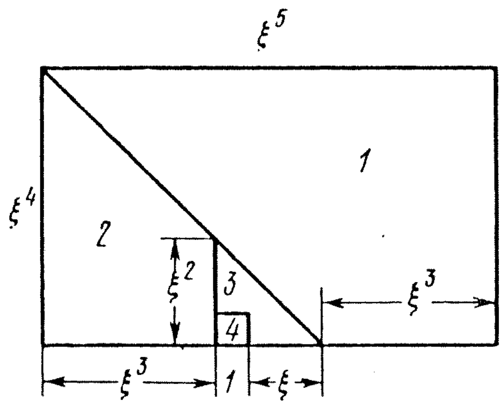
D'autres groupes. Au lieu de choisir un groupe de déplacement, on peut prendre un autre groupe de transformation.

> Dans $\mathbb{R}^3$ deux polyèdres quelconques sont décomposables selon le groupe des similitudes directes, c'est-à-dire qu'il existe une décomposition de P ($P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$) et une décomposition de Q ($Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$) ainsi qu'un ensemble de similitudes directes $\{s_i\}$ telles que $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$ $s_i(P_i) = Q_i$.

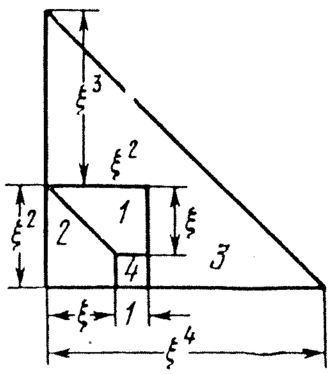
Ce résultat est évident dans $\mathbb{R}^2$ puisqu'une homothétie amène le polygone P à avoir même aire que le polygone Q. Aussi dans $\mathbb{R}^2$ a-t-on le résultat plus fort suivant :

> Si G est le groupe des homothéties-translations, deux polygones quelconques sont équidécomposables selon G.

Une autre façon de voir ce théorème est la suivante : On dispose d'une photocopieuse permettant des agrandissements et des réductions dans des rapports arbitraires et d'une paire de ciseaux. On peut décomposer un polygone P en un nombre n de morceaux, chaque morceau subit une homothétie à la photocopieuse et on peut les rassembler en conservant la direction des côtés pour obtenir un polygone Q fixé à l'avance. La figure ci-dessous en donne un exemple :



$$\left(\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$



§ 8. LIEN AVEC LE 18ème PROBLEME DE HILBERT

Ce problème est la recherche des polyèdres pavant l'espace. Sydler a démontré en 1943 que :

> Si un polyèdre P est équidécomposable avec un cube et si on peut décomposer P en n polyèdres Q isométriques alors Q est aussi équidécomposable avec un cube.

Comme le cube pave l'espace ainsi qu'un certain nombre de prismes, si on peut décomposer l'un de ces polyèdres en polyèdres isométriques, on obtient à la fois d'autres pavages de l'espace et des polyèdres équidécomposables avec un cube.

Le théorème de Sydler donné ci-dessus permet de démontrer d'une autre façon que les tétraèdres de Hill sont équidécomposables avec un cube, puisque, comme il a été vu page 39, ces tétraèdres pavent le cube.

BIBLIOGRAPHIE

. BOLTIANSKII (V.-G.) - Hilbert's third problem - Traduction anglaise chez V.-H. Winston & Son - Washington D.-C.

. CARTIER (Pierre) - Décomposition des polyèdres : le point sur le 3ème problème de Hilbert - Séminaire Bourbaki - 37ème année - n° 646 (juin 1985)

. I.R.E.M. de Strasbourg - Géométrie 1ère S et E - Chapitre sur les "Puzzles" Editions Casteilla (anciennement Istra)

Edges	$H_1(\alpha)$		$H_2(\alpha)$		$H_3(\alpha)$	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
ab	$\sin\alpha$	α	$2\sin\alpha$	α	$2\sin\alpha$	α
ac	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$	$\sqrt{3}\cos\alpha$	$\pi/3$	$\sqrt{12}\cos\alpha$	$\pi/6$
ad	1	$\pi/2$	2	$\pi/2$	$\sqrt{2+\sin^2\alpha}$	$\pi-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\right)$
bc	1	$\pi/2$	$\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$	$\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\cot\alpha\right)$	2	$\pi/2$
bd	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$	$2\sin\alpha$	$\pi/2-\alpha$	$\sin\alpha$	$\pi-2\alpha$
cd	$\sin\alpha$	α	$\sqrt{5\sin^2\alpha-1}$	$\arccos\left(\frac{1}{2}\cot\alpha\right)$	$\sqrt{2+\sin^2\alpha}$	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha\right)$

Edges	T_0		T_1		T_2		T_3	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\tau=(\sqrt{5}+1)/2$	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{2}$	$\pi/2$	$1/\tau$	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	2	$\pi/4$	1	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	2	$\pi/2$
bc	1	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$
bd	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3}/\tau$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{2}$	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	2	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau^3}$	$2\pi/5$

Edges	T_4		T_5		T_6		T_7	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
ab	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau^3}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$4\pi/5$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$
ac	$\sqrt{3}\,\tau$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	2	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
bc	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
bd	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
cd	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$	$2/\tau$	$\pi/2$	2τ	$\pi/2$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$

Edges	T_8		T_9		T_{10}	
	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles	Lengths	Dih. angles
ab	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}$	$3\pi/10$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{7}/2$	$\alpha_1=\arctan\sqrt{7/5}$	$\sqrt[4]{5}/(2\sqrt{\tau})$	$\pi/5$	$\sqrt{7-3/\tau}/2$	$\alpha_3=\arctan\sqrt{9+2\sqrt{5}}$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/10$	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/5$
bd	$\sqrt{3}/2$	$\pi/3$	$\sqrt{7+3\tau}/2$	$\alpha_2=\arctan\sqrt{9-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{7-3/\tau}/2$	$\pi-\alpha_3$
cd	$\sqrt{7}/2$	$\pi-\alpha_1$	$\sqrt{7+3\tau}/2$	$\pi-\alpha_2$	$\sqrt[4]{5}\,\sqrt{\tau}/2$	$3\pi/5$

Edges	T_{11} Lengths	T_{11} Dih. angles	T_{12} Lengths	T_{12} Dih. angles	T_{13} Lengths	T_{13} Dih. angles	T_{14} Lengths	T_{14} Dih. angles
ab	$\sqrt[4]{5}\sqrt{\tau}$	$3\pi/10$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$
ac	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$2\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$
ad	1	$\alpha_4 = \pi - \arctan 2\tau^2$	$\sqrt{5}/2$	$\alpha_7 = \pi - \arccos {}^2/_3$	$2/\tau$	$\pi/2$	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$
bc	$\sqrt[4]{5}/\sqrt{\tau}$	$\pi/10$	2	$\pi/4$	$2/\tau$	$\pi/2$	$\sqrt{7+3\tau}/\tau^2$	$\pi-\alpha_2$
bd	1	$\alpha_5 = \pi - \arctan 2$	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \alpha_7/2$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{7+3\tau}/\tau^2$	α_2
cd	1	$\alpha_6 = 2\pi - \alpha_4 - \alpha_5$	$\sqrt{5}/2$	$\pi - \alpha_7/2$	$\sqrt{18-11\tau}$	$3\pi/5$	$2\sqrt{18-11\tau}$	$3\pi/10$

Edges	T_{15} Lengths	T_{15} Dih. angles	T_{16} Lengths	T_{16} Dih. angles	T_{17} Lengths	T_{17} Dih. angles	T_{18} Lengths	T_{18} Dih. angles
ab	$2\sqrt{2+\tau}$	$\pi/10$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}$	$\pi/5$
ac	$2\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\tau\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\tau\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$
ad	$\sqrt{10-3\tau}$	$\pi-\alpha_3$	2τ	$\pi/2$	2	$\pi/2$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3$
bc	$2\sqrt{5}-2$	$\pi/2$	$\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3$
bd	$\sqrt{10-3\tau}$	α_3	$\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/\tau^2$	$\pi/3$
cd	$\sqrt{18-11\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}$	$\pi/5$

Edges	T_{19} Lengths	T_{19} Dih. angles	T_{20} Lengths	T_{20} Dih. angles	T_{21} Lengths	T_{21} Dih. angles	T_{22} Lengths	T_{22} Dih. angles
ab	$2\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/6$	$2\sqrt{2+\tau}$	$\pi/10$	$\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$\tau\sqrt{3}$	$\pi/3$
ac	$2\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$2\sqrt{3-\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$2\sqrt{3}$	$\pi/3$
ad	$\sqrt{10-3\tau}$	$\pi-\alpha_8$	$\sqrt{6+\tau}$	$\pi-\alpha_9$	$\sqrt{3-\tau}$	$3\pi/5$	$2\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$
bc	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$2\sqrt{3}$	$2\pi/3$	$\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{7-\tau}$	$\pi-\alpha_{10}$
bd	$\sqrt{10-3\tau}$	$\alpha_8 = \arccos u$, $u=\tau^2/(2\sqrt{3})$	$\sqrt{6+\tau}$	$\alpha_9 = \arccos v$, $v=\tau^{3/2}/(2\sqrt[4]{5})$	$\sqrt{5}-1$	$\pi/2$	$\sqrt{7-\tau}$	$\alpha_{10} = \arctan w$, $w=\sqrt{11+16\tau}$
cd	$\sqrt{2+\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/3$	$\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/3$	$2\sqrt{3-\tau}$	$3\pi/10$

Edges	T_{23} Lengths	T_{23} Dih. angles	T_{24} Lengths	T_{24} Dih. angles	T_{25} Lengths	T_{25} Dih. angles	T_{26} Lengths	T_{26} Dih. angles
ab	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{6-3\tau}$	α_{12}	$\sqrt{3}$	$\pi/3-\alpha_{12}$
ac	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\pi/3$	$\sqrt{3}$	$\alpha_{12} = \arctan\sqrt{3/5}$
ad	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{11-4\tau}/2$	$\pi-\alpha_{11}$	$2\sqrt{4-2\tau}$	$\pi/2$	$\sqrt{3-\tau}$	$4\pi/5$
bc	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$2\pi/5$	$\sqrt{3-\tau}$	$3\pi/5$	$2\sqrt{2}$	$\pi/2$
bd	$\sqrt{6-3\tau}$	$\pi/3$	$\sqrt{11-4\tau}/2$	$\alpha_{11} = \arccos z$, $z=1/(2\sqrt{3}\tau^2)$	$\sqrt{6-3\tau}$	$2\pi/3-\alpha'_{12}$	$\sqrt{2+\tau}$	$2\pi/5$
cd	$\sqrt{7-4\tau}$	$3\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}/2$	$3\pi/5$	$\sqrt{7-4\tau}$	$\pi/5$	$\sqrt{3}(\tau-1)$	$\pi/3$