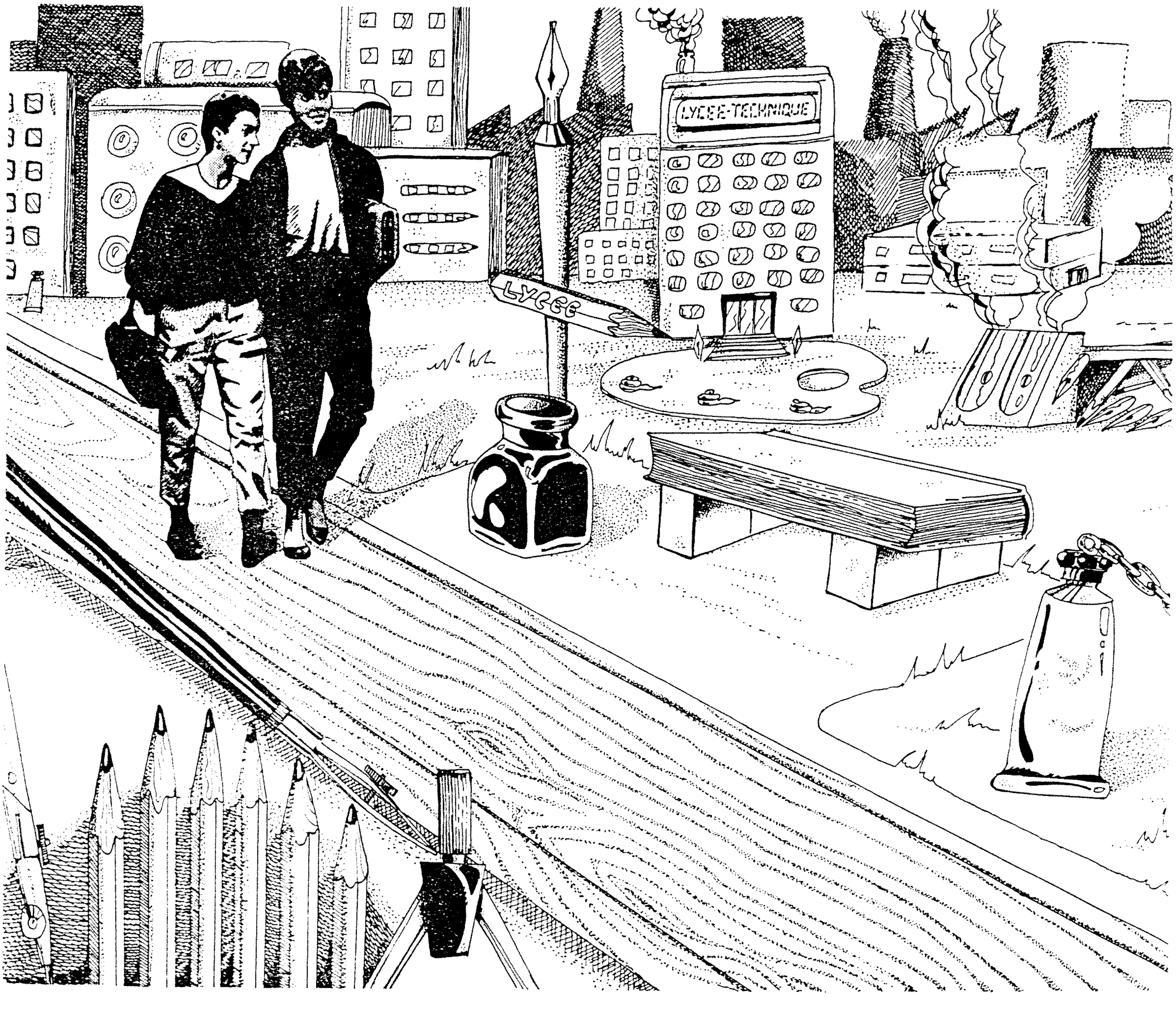
L'OUVERT

ISSN 0290.0068

JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG N° 44 SEPT. 1986



NOTRE COUVERTURE

Impressions de rentrée : travail graphique réalisé par Olivier METZGER, élève du Lycée Camille Sée de Colmar.

C'est la rentrée,

Dire que "*L'Ouvert*" fait peau neuve, n'est sans doute pas la bonne image. Rien, dans l'aspect extérieur n'a changé. Il faut *ouvrir* "*L'Ouvert*" pour se rendre compte du changement. Quelle différence! Des marges régulières, des caractères de style et de taille variés, adaptés à chaque usage, une mise en page nette...

"*L'Ouvert*" n'est plus, depuis longtemps, une revue d'intérêt local puisque sa diffusion s'étend à plusieurs pays (même si elle est numériquement faible). Maintenant, on peut affirmer qu'il s'agit d'une revue professionnelle autant par son contenu que par sa forme.

Pour le contenu, faisons confiance à la qualité des auteurs. Pour la forme, nous la devons à l'introduction de TEX , traitement de textes mathématiques. TEX a pour créateur Donald KNUTH (U.S.A.) et fut introduit en France en 82 – 83 et développé par l'équipe du Laboratoire de Typographie Informatique de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Actuellement, TEX tourne sur tout compatible IBM–PC. Pour faciliter le codage du texte, nous utilisons STRATEC, logiciel qui a été développé par ce même Laboratoire de Typographie Informatique.

Nous montrerons dans le prochain numéro la technique de saisie de texte à l'aide de TEX.

Bonne lecture à tous.

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N°44 – SEPTEMBRE 1986

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : J. LEFORT.

◇ *Correspondance à adresser à* :
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex.

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)* :
80 F. – pour l'Alsace
106 F. – pour les autres départements français
95 F. – pour l'étranger.

◇ *Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.*

LOGO en SIXIÈME :

COMPTE-RENDU D'UNE EXPÉRIENCE

Eugénie ADAM-KOLEZA (*) et Marie-Agnès EGRET

1. — Pendant l'année scolaire 1984-85, 24 élèves d'une classe de 6^e ont fait leurs premiers pas en LOGO sous la direction de leur professeur de mathématiques et dans le cadre du cours.

Pendant cette même année, une étudiante de 3^e cycle de didactique des mathématiques a mené une recherche sur la proportionnalité et assisté à tous les cours.

Beaucoup de nouveautés par rapport à l'école primaire pour ces élèves, mais un travail passionnant pour tous, très stimulant mais aussi parfois limité (problèmes de matériel, élèves en situation de trop grand *échec* scolaire ...). Nous nous proposons, dans cet article, de préciser l'utilisation du micro-ordinateur qui a été faite dans cette classe.

2. — A propos de ...

A propos de la classe. Cette classe de 6^e est une classe de niveau très hétérogène, composée d'élèves étudiant en 1^e langue l'allemand ou l'anglais. Un premier test, proposé en début d'année, permet d'avoir une idée partielle du niveau de la classe. Quatre élèves d'excellent niveau, six élèves de niveau moyen et quatorze élèves offrant très peu de réussite à des exercices simples de comparaison ou multiplication de nombres.

Il faut remarquer cependant que très peu de problèmes de discipline sont apparus.

A propos du matériel informatique utilisé. Au collège, nous disposons pour les élèves de six MICRAL 8022G. Le langage LOGO a été implanté sur ce matériel tardivement et il a la particularité de ne *connaître* que les nombres entiers (ce matériel est donc très adapté pour étudier la proportionnalité!).

Le langage écrit sous LISP occupe beaucoup de place en mémoire, et il n'est pas rare de se trouver bloqué en cours de travail. Aucune opération n'est alors possible si ce n'est la réinitialisation. Le travail est alors perdu.

(*) boursière de la fondation des bourses de l'État grec.

A propos du rythme de travail. Les élèves ont été séparés en deux groupes et ont travaillé assez régulièrement tous les quinze jours. Il faut noter que parallèlement, un travail en LOGO autour de la conjugaison a été effectué avec leur professeur de français, à partir du 2ᵉ trimestre. Par conséquent, les problèmes liés aux maniements du clavier ou de l'éditeur ont été peu à peu surmontés.

A propos du "contrat". Pendant toute l'année, une sorte de *contrat* a été établie avec les élèves : le travail sur ordinateur est amusant mais il ne s'agit pas que d'un jeu. Par conséquent, face à un problème donné, avant de commencer à taper n'importe quoi pour *voir ce qui va se passer*, on essaie d'établir un *plan d'action.* Et ce travail de réflexion se fait au papier-crayon. La machine joue alors le rôle d'un outil de contrôle.

A propos du "déroulement d'une séance". Munis du contrat précédent et d'une situation-problème (en général, la réalisation d'un dessin donné au tableau ou sur feuille blanche), les élèves préparaient par écrit pendant une dizaine de minutes leur programme. Le travail n'était pas totalement individuel. Les élèves avaient la possibilité d'échanger des idées entre eux et de demander des explications supplémentaires.

3. — Contenu des séances d'initiation à la programmation en LOGO [1].

a) Pendant le 1ᵉʳ trimestre et, à la suite d'une séance introductrice à LOGO (primitives, manipulation de la machine), nous avons abordé les sujets suivants :
- écriture d'un programme simple en mode direct,
- écriture d'un programme simple en mode procédural,
- exercices d'application : carrés, carrés *qui tournent.*

Bien avant d'avoir abordé la notion d'angle dans le cours de mathématiques, les élèves ont été amenés à mesurer l'angle de rotation de la tortue. Comme ils étaient peu habiles à utiliser un rapporteur, ces mesures posaient souvent d'énormes difficultés (et en poseront jusqu'à la fin de l'année). Trois élèves ont alors construit un outil pour aider leurs camarades : un cercle gradué de 10° en 10°, dessiné sur rhodoïd transparent et muni d'une flèche mobile en carton.

b) Pendant le 2ᵉ trimestre, quelques séances ont été consacrées à la notion de variable (appelée *tiroir*). Plusieurs exemples ont été abordés à ce propos. Les dessins réalisés étaient surtout des figures géométriques simples (carré, rectangle, hexagone régulier, ...).

[1] Nous avons été beaucoup aidés dans cette partie, par les deux fascicules publiés par l'I.R.E.M. de Strasbourg : LOGO I - Le Langage, par D. GUIN et LOGO II - Dans une classe de C.M.2, par D. GUIN et J.-J. HELM .

Plus tard, ces mêmes programmes, dans le cadre de la programmation structurée, ont été incorporés dans des programmes plus complexes à titre de sous-programmes. Les programmes *fleur* et *drapeau* sont deux exemples de ce qui a été fait.

Il faut noter que les élèves ont accepté sans difficulté d'utiliser les variables quand cela leur était demandé. Si la demande n'était pas clairement formulée, ils préféraient, dans l'ensemble, fixer les dimensions de leur dessin. Mais l'utilisation d'une variable pour écrire un programme de conjugaison et l'instruction "Relie" ne leur ont, par la suite, posé aucun problème. Pendant le cours de mathématiques, équations à trous et exercices du type : *trouver I élément de $[AB]$ tel que $AI = 2AB$ ont été souvent donnés.*

c) Au début du 3^{e} trimestre, nous avons introduit la proportionnalité dans le cours de mathématiques par un travail sur les figures semblables ([2]). Ce travail a été appuyé par une recherche analogue durant l'heure informatique.

Nous avons, par exemple, proposé aux élèves, un programme "escargot", c'est-à-dire un programme permettant de dessiner un triangle rectangle qui tourne autour du sommet de l'angle droit en s'agrandissant.

Les problèmes rencontrés ont été alors de deux types :

1. Des difficultés de calcul de mesures d'angles : jusqu'ici, nous n'avions dessiné que des figures régulières où un premier calcul permettait de trouver tous les autres angles de rotation. Pour dessiner un triangle rectangle, les élèves devaient au moins trouver deux angles de rotation. Ces difficultés nous ont permis d'aborder les angles en cours de mathématiques et de préciser alors les notions d'angles supplémentaires, la somme des mesures des angles d'un triangle ...

2. La notion d'agrandissement était à ce moment-là nouvelle pour les élèves. La consigne donnée était de faire *le même triangle mais en plus grand.* L'idée que *en agrandissant un triangle, les angles restaient les mêmes* a été vite adoptée, dès qu'elle a été proposée par quelques élèves. Cette idée a, bien sûr, été approfondie en cours de mathématiques.

Tous les programmes réalisés étaient structurés par les élèves à partir d'un dessin donné. La difficulté était surtout liée à la programmation structurée et beaucoup moins aux connaissances mathématiques nécessaires pour réaliser leur projet.

([2]) La partie de l'expérience concernant l'enseignement de la proportionnalité chez les élèves, entre dans le cadre d'un doctorat préparé actuellement par E. ADAM-KOLEZA à l'I.R.E.M. de Strasbourg.

4. — Utilisation d'un logiciel écrit en LOGO.

Pour atteindre l'objectif de l'expérience menée : *aborder certaines questions sur l'acquisition de la proportionnalité chez l'élève de 11-12 ans* ([2]), nous avions besoin d'autres types de situations-problèmes : des problèmes qui ne demandent pas de connaissances approfondies de programmation, mais qui demandent par contre, un esprit créatif, une aptitude au raisonnement proportionnel.

C'est pour cette raison que le programme "Rectangle" est né ([3]).

Ce logiciel est un logiciel interactif où l'élève est félicité pour chaque réponse correcte et poussé à réfléchir pour chaque réponse fausse. Il se décompose en six étapes.

A la première étape, on demande à l'élève d'écrire une procédure qui permette de dessiner un rectangle connaissant sa largeur et sa longueur.

A la deuxième étape, l'élève doit dessiner un rectangle de largeur 12 et de longueur 30 en utilisant la procédure qu'il vient d'écrire.

Aux troisième et quatrième étapes, l'élève doit dessiner un rectangle *semblable* au premier, dont les dimensions sont deux fois, puis trois fois plus grandes que celles du modèle.

A la cinquième étape, la difficulté est plus importante : à partir d'une largeur donnée (60), on demande à l'élève de dessiner un rectangle semblable aux précédents. Il s'agit de trouver alors la longueur de ce rectangle.

Durant l'étape finale, étant données les dimensions du cadre (de l'écran), l'élève est invité à dessiner dans ce cadre le plus grand rectangle possible, semblable aux précédents : il est alors demandé la longueur de ce rectangle, puis sa largeur.

Ce logiciel a été testé par sept élèves de 6[e]. Très rapidement, une deuxième version s'est imposée : en effet, dans la première version, dès que l'élève donnait une réponse fausse, la phrase "tu crois? dessine-le" apparaissait à l'écran. Quand le rectangle était dessiné, il était effacé après quelques secondes et le conseil : "il vaut mieux recommencer" était donné. L'élève savait qu'il s'était trompé sans comprendre pourquoi. Pour compenser ce défaut, nous avons trouvé la solution suivante : offrir à l'élève la possibilité de tester lui-même sa réponse : nous avons ajouté la procédure DIAGONALE, c'est-à-dire que dès que l'élève donnait sa réponse, la machine exécutait l'instruction. Mais en dessinant le rectangle demandé,

---

([2]) voir page précédente...
([3]) Le programme "Rectangle" a été conçu et testé auprès des élèves par E. ADAM-KOLEZA, écrit en LOGO par D. GUIN et traduit en LOGO Micral par M.-A. EGRET
.

elle ajoutait sa diagonale ainsi que la diagonale du modèle. L'élève pouvait ainsi constater par lui-même si sa réponse était correcte ou non.

Nous aurions souhaité tester avec plus d'élèves ce programme, et en créer d'autres analogues, mais les problèmes techniques rencontrés alors sur Micral, nous ont fait renoncer provisoirement à ces projets.

5. — L'utilisation de programmes interactifs tels que "Rectangle" dans les séquences d'enseignement en mathématiques nous paraît essentielle. Il nous semble que pour une utilisation efficace de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques, la démarche devrait être la suivante :
- construire une séquence d'enseignement des mathématiques,
- écrire ensuite un logiciel destiné à être intégré dans cette séquence.

Bien sûr, toutes les difficultés ne sont pas résolues grâce à l'ordinateur, mais les élèves, souvent bloqués face à un problème purement mathématique, acceptent de travailler et de résoudre un problème analogue, pourvu que la machine puisse leur faire constater leur réussite ou leur échec.

Quelques précisions concernant l'article consacré à Mu-Math (*voir L'Ouvert* **43**, *p. 21*) :

Les fonctions utilisées et les exemples traités correspondent à la version 80 de ce logiciel. La version 83, testée depuis, est bien plus complète et plus performante (utilisation de la valeur absolue, résolution d'équations différentielles, simplification des fonctions rationnelles, résolution plus complète des équations — en particulier, 3^e et 4^e degrés).

La documentation concernant les deux versions peut être consultée à la Bibliothèque de l'IREM.

COMMENT L'HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PEUT AIDER LES PROFESSEURS DANS LEUR ENSEIGNEMENT

Georges GLAESER

L'article qui suit est une conférence à la Régionale de l'A.P.M., faite le 30 janvier 1986 à Mulhouse et le 6 février 1986 à Strasbourg. Il a été rédigé par Claudine KAHN et Odile SCHLADENHAUFEN

Ce n'est pas en résumant la vie de DESCARTES en deux lignes au bas d'une page d'un manuel ou en donnant la date du *Discours de la Méthode* qu'on apporte une information utile dans l'enseignement de la géométrie analytique. D'autant plus que ce qui est dit est parfois faux! : ce n'est pas DESCARTES qui a créé la géométrie analytique. Cette affirmation deviendrait plus raisonnable si l'on prenait pour définition de la géométrie analytique : *l'application de l'algèbre à la géométrie.* Celle-ci ne pouvait être antérieure à la mise au point d'un calcul algébrique!

Pour déterminer les diverses étapes de la constitution de cette branche de la mathématique, la méthode utilisée est la suivante : en examinant systématiquement des travaux de géomètres des siècles passés, il apparaît que les procédés ont considérablement évolué; certains exploits de PONCELET ne pouvaient pas figurer dans les travaux de PASCAL . Non seulement les connaissances ont augmenté mais surtout les pratiques et les savoir-faire ont gagné en efficacité.

Notre enseignement ne peut se réduire aujourd'hui à une simple transmission de nos connaissances. Il faut en outre se livrer à une éducation sur les manières d'aborder une question ou de conduire un calcul. Cette intervention pédagogique devrait se produire en toutes occasions, même à titre de commentaire d'une méthode utilisée par un professeur.

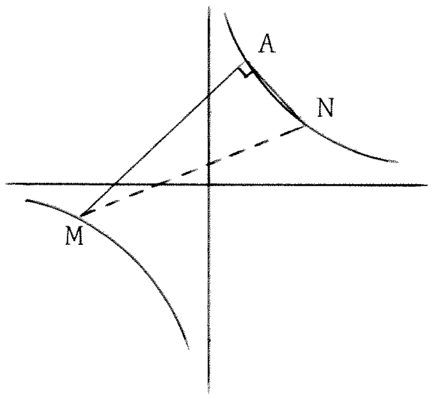
QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ?

1. Le calcul géométrique.
2. La résolution de problèmes de géométrie par l'algèbre.
3. L'interprétation de l'algèbre par la géométrie.
4. Va-et-vient entre 2 et 3.
5. L'usage de coordonnées institutionnalisées.
6. L'usage de divers outils de repérage (coordonnées, rectangulaires ou obliques, planes ...,
   représentations paramétriques, plan complexe,
   vecteurs ...).
7. Usage d'objets orientés (axes, angles de droites ...).
8. Le formulaire.
9. Choix habile de l'outil le plus approprié dans les formulaires.
10. Usage d'algorithmes.
11. Mise en oeuvre d'heuristique.
12. L'art d'invoquer des calculs qu'on *n'effectue pas*.

L'histoire de la Géométrie analytique
s'étend sur 22 siècles
(avant APPOLONIUS jusqu'à nos jours).

Voici comment ces différents points interviennent dans la résolution d'un problème qui nécessite peu de connaissances mais met en évidence la complexité de l'éducation à donner aux élèves :

Problème



Énoncé : Démontrer que la droite MN garde une direction fixe lorsque l'angle droit $\widehat{MAN}$ pivote autour du point fixe A.

Film de la résolution

$xy = 1 \qquad A(a, a^{-1})$	5.6
$\begin{cases} y - a^{-1} = t(x-a) \\ xy = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad tx(x-a) + x/a - 1 = 0$	8 10
La racine $x = a$ est évidente	11
Produit des racines	11
Coordonnées de M : $x = -1/ta \quad y = -ta$	10
Les coordonnées de N s'obtiennent en changeant t en $-1/t$	11
$x = t/a \quad y = a/t$	10
Inutile d'écrire l'équation de MN	12
Le calcul de la pente suffit. On trouve a^2	8
En faisant tendre M vers A, on trouve que a^2 est la pente de la normale en A	3

CHRONOLOGIE SOMMAIRE

1. Phase heuristique

EUCLIDE ARCHIMÈDE APPOLONIUS (262–200 av J.C.)	Calcul géométrique sans algèbre — sans coordonnées Sections coniques
ORESME (1361)	*De latitudinibus formarum* Les coordonnées géographiques
Les nombres négatifs ne sont pas encore familiers à cette époque	
FERMAT dès 1629	Interprétation de l'*Algèbre* par la géométrie. Etude géométrique de courbes définies algébriquement.
DESCARTES (1637)	La *Géométrie* résout des problèmes géométriques par l'*Algèbre*. Pas de coordonnées institutionnalisées. Les quatre quadrants sont étudiés séparément (exemple : le folium de DESCARTES n'était vu que dans le premier quadrant ; on complétait par symétrie).

Commentaires

1.— Dans la page d'APPOLONIUS on ne trouve ni axe, ni coordonnées, mais ce qui est écrit peut être transcrit assez simplement en utilisant des coordonnées. Si bien que tout un livre d'APPOLONIUS correspond à la moitié de ce qu'on enseignait en Terminale, il y a quelques années.

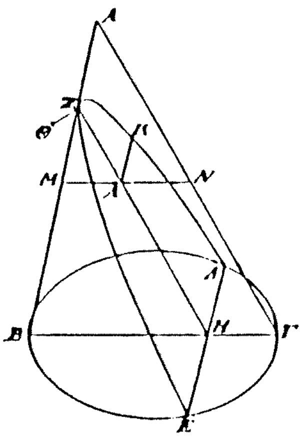
Les coniques d'Apollonius de Perge

PROPOSITION XI

Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe ; si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restants du triangle. Nous appellerons une telle section une parabole (¹).

$(x^2 \ldots)$ $(\ldots = y \times 2p)$

Soit un cône dont le sommet est le point Α, et dont la base est le cercle ΒΓ. Coupons-le par un plan passant par l'axe, lequel détermine comme section le triangle ΑΒΓ. Coupons-le aussi par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite ΔΕ, perpendiculaire à la droite ΒΓ, lequel détermine la ligne ΔΖΕ comme section dans la surface du cône, tandis que le diamètre ΖΗ de la section est parallèle à l'un des côtés ΑΓ du triangle passant par l'axe. Menons, du point Ζ, la droite ΖΘ perpendiculaire à la droite ΖΗ, et faisons en sorte qu'une droite ΖΘ soit à la droite ΖΑ comme le carré de la droite ΒΓ est au rectangle délimité sous les droites ΒΑ, ΑΓ (¹). Enfin, prenons un point quelconque Κ sur la section, et menons, par ce point Κ, la droite ΚΛ parallèle à la droite ΔΕ. Je dis que le carré de la droite ΚΛ équivaut au rectangle délimité sous les droites ΘΖ, ΖΛ.



2.— Quant à DESCARTES, il cherche des relations entre les longueurs, donne des équations, mais n'introduit pas de coordonnées. Pour lui, la chose importante est la géométrie; l'algèbre n'est qu'un outil. Il critique même les gens, qui, comme FERMAT, étudient des courbes définies par des "équations" sans références à des problèmes posés par la géométrie traditionnelle.

LIVRE PREMIER

Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

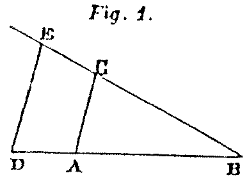
Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La multiplication.

Soit, par exemple, AB *(fig. 1)* l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.



je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

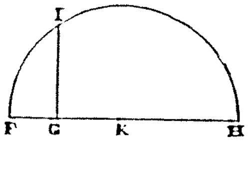
La division.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

L'extraction de la racine carrée.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH *(fig. 2)*, je lui ajoute en ligne

Fig. 2.



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a; et ab pour les multiplier l'une par l'autre; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b; et aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même (1); et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$,

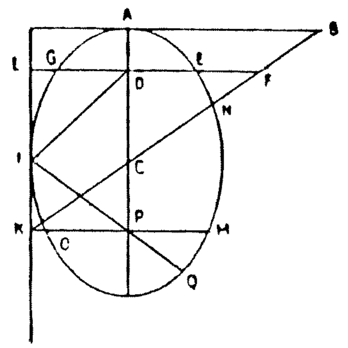
(1) Cependant Descartes répète presque toujours les facteurs égaux lorsqu'ils ne sont qu'au nombre de deux. Nous avons ici constamment adopté la notation a^2.

ESSAI SUR LES CONIQUES (Pascal 1640)

Pour apprécier la lenteur de l'évolution, examinons ce passage de l'*Essai sur les coniques* que PASCAL écrivit douze ans après la parution de la *Géométrie* de DESCARTES.

Le jeune géomètre y raisonne sur la figure ci-dessous, où il a construit une droite auxiliaire CB. La longueur AB a été choisie égale à la moyenne géométrique entre les demi-axes de l'ellipse. Il prouve alors que

la somme des carrés de DE et DF est égale au carré de AB.



Nous devons faire un effort de décryptage pour reconnaître ici la première apparition de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

L'artifice de la droite CB n'intervient que pour éviter d'écrire que $DF = (a/b)\,DE$, ce qui n'est pas dans les habitudes de l'époque.

3.— Pour Blaise PASCAL (1623–1662), il n'y a pas de formules automatiques, il faut à chaque fois inventer une construction. Il est probable que PASCAL n'ait jamais vraiment compris ce qu'étaient les nombres négatifs. La seule citation, sauf erreur, que l'on puisse trouver dans ses oeuvres est :

J'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte quatre, reste zéro.
PASCAL : *Oeuvres Complètes* .— Édition Pléiade, 1954, p. 1109

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
2. Construction de l'algorithme

EULER (1748)	"*Introductio in Analysim infinitorum*" (Tome 2) Présentation des coordonnées "cartésiennes" (positives ou négatives). Changement de coordonnées. Classification des coniques et des quadriques. Pas d'étude systématique de la droite!
LAGRANGE (1770) De 1768 à 1820, par MONGE (1795), LACROIX et leurs élèves	Élaboration du formulaire La dénomination "*Géométrie Analytique*" LACROIX prétend faire pour la Géométrie ce que LAGRANGE avait réalisé auparavant pour la Mécanique analytique Application automatique de séquences algorithmiques Stock d'alternatives pour exprimer les mêmes questions : usage de déterminants
BIOT (1809)	Premier manuel scolaire de G.A.
G.LAMÉ (1818)	"*Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie*" (ouvrage de réflexion à l'usage des mathématiciens : apparition de techniques nouvelles).
L.CARNOT (1803)	"*La géométrie de position*" Critique des difficultés causées par les nombres négatifs Le mot "*abscisse*" désigne encore une distance
PONCELET (1862) CHASLES	Géométrie orientée : "*Sur la loi des signes de position en Géométrie*" publié en 1862 (recherches de 1815 –1816)
MONGE	Aires et volumes orientés

Commentaires.

1. EULER ne traite pas de l'équation de la droite; il a peur de la trivialité : c'est un phénomène épistémologique important. La première mention de l'équation de la droite est faite dans un ouvrage de LAGRANGE (1770). La même année, paraissent deux manuels scolaires, l'un du Marquis de l' HOSPITAL, l'autre de Marie-Gaetana AGNESI, en usage chez les Jésuites ainsi qu'en Chine et dans le Nouveau Monde.
On y cite trois types d'équations de droites:

$$y = ax + b\ , \quad y = -ax + b\ , \quad y = ax - b$$

(sous-entendu : a et b sont deux nombres positifs), ce qui témoigne d'une peur des nombres négatifs.
Encore à cette époque, on fait une différence entre positif et négatif, comme entre le chaud et le froid. Mais on ne trouve pas d'équation de la forme $y = -ax - b$, car dans ce cas, la droite ne traverse pas le premier quadrant.
Pour ceux qui ont la nostalgie du latin, voici une page d'EULER qui donne une interprétation des nombres positifs et négatifs avec référence aux dextrorsum et sinistrorsum.

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM

EULER (1748)

LIBER SECUNDUS
Caput I

DE LINEIS CURVIS IN GENERE

1. Quoniam quantitas variabilis est magnitudo in genere considerata omnes quantitates determinatas in se complectens, in Geometria huiusmodi quantitas variabilis convenientissime repraesentabitur (Fig. 1) per lineam rectam indefinitam RS. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abscindere liceat,

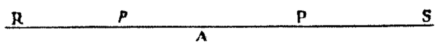


Fig. 1

ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur in linea indefinita RS punctum assumi debet A, unde magnitudines determinatae abscindendae initium sumere censeantur; sicque portio determinata AP repraesentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehensum.

2. Sit igitur x quantitas variabilis, quae per rectam indefinitam RS repraesentetur, atque manifestum est omnes valores determinatos ipsius x, qui quidem sint reales, per portiones in recta RS abscindendas repraesentari posse.

Scilicet, si punctum P in ipso puncto A capiatur, intervallum AP evanescens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum P ab A removetur, eo maior valor determinatus ipsius x intervallo AP repraesentabitur.

Vocantur autem haec intervalla AP *abscissae*.

Atque ideo abscissae exhibent variabilis x valores determinatos.

3. Quia vero recta RS indefinita utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipsius x valores abscindi poterunt. Quodsi autem valores affirmativos ipsius x ab A dextrorsum progrediendo abscindamus, intervalla Ap sinistrorsum abscissa valores ipsius x negativos exhibebunt. Cum enim, quo

LEONHARDI EULERI Opera omnia I 9 Introductio in analysin infinitorum

utrinque = de part et d'autre.

En 1750 CRAMER, dans son "*Analyse des lignes courbes*", étudie la courbe d'équation $x^2 + 6ax + 5a^2 - 6ay = 0$. Il regarde ce qui se passe lorsque x augmente, obtient ainsi la branche infinie *positive*. Puis il change x en $-x$ de manière incorrecte mais arrive au résultat.

INTRODUCTION À L'ANALYSE DES LIGNES COURBES ALGÉBRIQUES

par

Gabriel CRAMER (1750)

Ainſi dans la Courbe que repréſente l'éq : $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ou $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ [§. 11], l'équation fait voir qu'à l'Origine, où x eſt zéro, la valeur de
Fig. 10. y eſt $\frac{5}{6}a$. A a $= \frac{5}{6}a$ eſt donc la grandeur de la *prémière ordonnée*. Suppoſant enſuite x poſitive, on voit qu'à meſure qu'elle augmente, les termes $\frac{xx}{6a}$ & x augmentent auſſi, ſans que le terme conſtant $\frac{5}{6}a$ diminuë ; ce qui prouve que

l'abſciſſe x croiſſant, l'ordonnée y [$=\frac{xx}{6a}+x+\frac{1}{6}a$], qui eſt poſitive, croit auſſi. Donc du côté des abſciſſes poſitives, la Courbe n'a qu'une branche a d, qui tombe toute entiére dans l'angle des coordonnées poſitives, & qui, partant de l'extrémité a de la prémiére ordonnée A a, s'éloigne à l'infini & de l'Axe des abſciſſes & de l'Axe des ordonnées.

Pour connoître le cours de cette Ligne du côté des abſciſſes négatives, on ſera x négative, ce qui change l'éq. $y=\frac{xx}{6a}+x+\frac{1}{6}a$ en $y=\frac{xx}{6a}-x+\frac{1}{6}a$. Où l'on voit que x étant moindre que $6a$, $\frac{xx}{6a}$ eſt moindre que x, de façon que le terme conſtant $\frac{1}{6}a$ eſt moins augmenté par le terme poſitif $\frac{xx}{6a}$ que diminué par le terme négatif $-x$.

2. Etablissement du formulaire (1768 – 1820)

De nos jours, on enseigne souvent l'Analytique en très peu de temps : on présente la liste de formules (à encadrer et apprendre par coeur) qui expriment les faits géométriques simples. Il s'agira de choisir et combiner ces formules, puis de les appliquer automatiquement.

Ce furent principalement les premiers professeurs de l'Ecole Polytechnique, qui dressèrent ce formulaire en dégageant son mode d'emploi (MONGE, LACROIX).

Dans la phase suivante, ce formulaire acquit de la souplesse, par introduction de variantes et de symboles plus maniables (déterminant, plan complexe, quaternions, vecteurs ...).

L'introduction des coordonnées négatives et de la géométrie orientée se heurta longtemps à un véritable goulot d'étranglement.

Voici un extrait du "*Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*" de LACROIX.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE À LA GÉOMÉTRIE

par

LACROIX

Pour trouver la valeur de x, qui répond au point f où la ligne DF rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y = 0$, ce qui donne

$$ax + b = 0, \quad \text{et} \quad x = -\frac{b}{a} = Af.$$

Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{y}$, y lui-même deviendra négatif. Mais au-delà du point f, la ligne DF se trouve au-dessous de la ligne AB; l'ordonnée $p'n'$ tombera donc d'un côté opposé à celui où elle étoit située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives.

Ces remarques, qui confirment ce qui a été dit dans le nº. 72, ne sont pas particulières à la ligne droite. On ne sauroit y faire trop d'attention; car c'est de l'usage des quantités négatives dans les figures, que dépendent en grande partie, les diverses formes qu'affectent les lignes courbes.

L'équation $y = ax + b$ ne renfermant que deux constantes, a et b, dont la valeur particularise la droite qu'on considère, en la distinguant de toute autre, il s'ensuit que deux conditions suffisent pour déterminer cette droite. Celles qui s'offrent les premières, sont de l'assujettir à passer par deux points donnés; à être parallèle ou perpendiculaire à une autre droite donnée, et à passer en outre par un point donné. Nous aurons besoin dans la suite de connoître la forme que prend l'équation $y = ax + b$, pour satisfaire à ces diverses conditions; c'est pourquoi nous allons les examiner chacune en particulier.

84. Si on cherche l'équation de la ligne droite qui passe par deux points, dont les abscisses soient α et α', et les ordonnées β et β', on mettra successivement α et α' à la place de x, β et β' à celle de y, et on aura, pour déterminer a et b, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} \beta = a\alpha + b \\ \beta' = a\alpha' + b \end{array}\right\} \text{dont on tirera} \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} \\ b = \dfrac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha} \end{array}\right.$$

et il en résultera

$$y = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}x + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha' - \alpha}$$

pour l'équation de la droite cherchée.

On peut donner à ce résultat une forme plus simple; car si on retranche de l'équation $y = ax + b$, l'une des deux équations ci-dessus, la première, par exemple, b disparoîtra, et il viendra

$$y - \beta = a(x - \alpha);$$

cette dernière équation sera celle d'une droite assujettie à passer par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant d'ailleurs avec l'axe AB un angle quelconque: en y mettant, au lieu de a, la valeur trouvée précédemment, on aura

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha).$$

La distance des points proposés, ou la partie qu'ils interceptent sur la droite cherchée, aura pour expression

$$\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2}:$$

cela se voit évidemment, en supposant que N et N' représentent ces points; car leur distance NN' étant l'hypothénuse du triangle rectangle NRN', il s'ensuit que

$$\overline{NN'}^2 = \overline{NR}^2 + \overline{N'R}^2 = (AP' - AP)^2 + (P'N' - PN)^2.$$

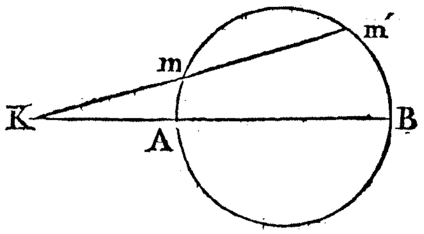
H 2

3. Dans le problème qui suit, CARNOT essaie de déterminer une corde mm' qui ait une longueur donnée, mais il tombe sur une racine négative qu'il ne parvient pas à interpréter. Son livre est un témoignage de l'incompréhension des nombres relatifs à l'époque.

GÉOMÉTRIE DE POSITION

par

Lazare CARNOT



Supposons $KA = a$, $KB = b$, $mm' = c$, $Km = x$, on aura donc par les propriétés du cercle

$$ab = x(c + x) = cx + xx;$$

donc $xx + cx - ab = 0$, ou $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$.

x a donc deux valeurs : la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question : mais que signifie la seconde qui est négative ? Il paroît qu'elle ne peut répondre qu'au point m', qui est le second de ceux où Km coupe la circonférence : et en effet, si l'on cherche directement Km', en prenant cette droite pour l'inconnue x, on aura $x(x - c) = ab$, ou $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$, dont la valeur positive est précisément la même que celle qui s'étoit présentée dans le premier cas avec le signe négatif. Donc, quoique les deux racines de l'équation $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K. Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si au contraire le point fixe K étoit pris sur le diamètre même AB et non sur le prolongement, on trouveroit pour x deux valeurs positives, et cependant elles devroient être prises en sens contraire l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas,

4. Il semble que ce soit PONCELET qui mentionna pour la première fois la relation de CHASLES (dans le texte suivant)!

APPLICATION D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

Troisième cahier

Sur la loi des signes de position en géométrie,
la loi et le principe de continuité (1864)

PONCELET prétend avoir déjà trouvé cela en 1815–1816.

Loi des signes de position, relative aux points rangés sur une ligne droite, une circonférence de cercle, etc.

Ces définitions et notions premières étant admises, passons à l'examen du système de trois points en ligne droite; en vertu du rapprochement que la *fig.* 101 établit entre les distances linéaires, les arcs et les angles, ce que nous dirons des uns pourra s'appliquer immédiatement aux autres: c'est pourquoi, dans ce qui suit, je me bornerai à considérer les distances linéaires seules, mais on devra se rappeler que les mêmes choses s'appliquent aux arcs et aux angles.

7. Soient donc a, b, c (*fig.* 102) trois points donnés sur la droite indéfinie AB; l'on aura évidemment, pour le cas où b est entre a et c, en cheminant de la gauche vers la droite, c'est-à-dire dans l'ordre

$$(abc), \quad ac = ab + bc.$$

Or cette relation intuitive aura lieu tant que b sera entre a et c, quelles que soient d'ailleurs les distances qui séparent ces points; c'est-à-dire tant que a, b, c n'auront pas changé de position entre eux, ou, si l'on veut encore, tant qu'aucune de leurs distances mutuelles ne sera devenue inverse, ~~rétrograde~~ par rapport au sens et à l'ordre primitifs.

Il en sera de même évidemment de toutes les autres relations dérivées de la première, soit géométriquement, soit algébriquement, par exemple de celles-ci,

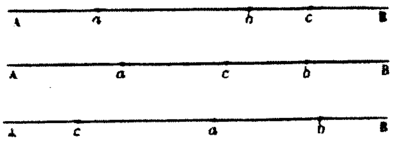
$$ab = ac - bc, \quad \overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + 2ab \,.\, bc,$$
$$\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 - 2ac \,.\, bc, \text{ etc., etc;}$$

car elles en sont des transformations exactes et rigoureuses: toutes ces relations demeurent immédiatement applicables, sans aucun changement de signe, à l'état supposé du système.

8. Mais la même chose n'a plus lieu dès l'instant où la disposition réciproque des points vient à changer, par suite du déplacement d'un ou de plusieurs d'entre eux : c'est-à-dire dès l'instant où l'une quelconque des distances ab, ac, bc devient inverse ou rétrograde par rapport à l'origine d'où elle se mesure, en allant toujours de la gauche vers la droite selon notre hypothèse invariable.

En effet, si le point b, par exemple (*fig.* 102), s'est trans-

Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.



porté (*fig.* 103), d'un mouvement continu quelconque, de la gauche à la droite de c, la distance bc ayant changé de sens, on aura (*fig.* 102), dans l'ordre

$$(acb), \quad ac = ab - bc ;$$

relation caractéristique qui ne diffère de $ac = ab + bc$, qu'en ce que bc a pris un signe contraire à celui qu'il avait primitivement, c'est-à-dire est devenu négatif en même temps qu'inverse en passant par zéro. Or, il en sera évidemment ainsi de toutes les autres relations métriques qu'on pourra déduire de celle-là algébriquement, et qui correspondront, chacune à chacune, aux premières de la combinaison (abc) appartenant à la *fig.* 102 ; elles ne différeront toutes, de leurs *corrélatives*, que par le changement de signe de bc.

Si donc on voulait rendre applicables à la seconde situation (acb) des points a, b et c, les relations trouvées pour la première (abc), il suffirait de changer bc en $-bc$ dans la relation primitive et dans toutes ses dérivées.

Désormais nous cesserons, pour la simplicité, de distinguer les relations dérivées de la relation primitive, parce qu'elles sont des conséquences rigoureuses de celle-ci, algébriquement ou géométriquement parlant.

9. Considérons maintenant la troisième et dernière disposition distincte que peuvent prendre les points a, b, c, par exemple celle où le point c, de la droite AB, passe en rétrogradant à gauche du point a. On a alors (*fig.* 104), dans l'ordre

$$(cab), \quad ac = bc - ab,$$

ou, algébriquement,

$$-ac = ab - bc ;$$

relation qui fait voir que, par suite du déplacement du point c de la *fig.* 102 à la *fig.* 104, ac et bc ont changé à la fois de signe, de même que les distances qu'elles représentent, devenues inverses, ont changé de sens relativement à l'ordre primitif des points ou des lettres.

Si donc l'on veut rendre applicable à la dernière de ces figures les relations diverses trouvées pour la première, il suffira d'y changer les signes des deux distances bc et ac, devenues (*fig.* 102) cb et ca dans l'ordre rétrograde.

D'ailleurs, ces diverses relations et leurs dérivées algébriques auront lieu pour toutes les grandeurs des lignes qui y entrent et qui, rapportées à la même unité de mesure, pourraient être représentées par des lettres quelconques, à la manière de Viète, et cela quand bien même elles changeraient de signe ou de sens en passant par l'infini.

10. Sans qu'il soit besoin d'aller plus loin, il est visible que les observations ci-dessus, relatives au système des points a, b, c (*fig.* 102), se reproduisent également dans toutes les autres permutations de ces points, à l'égard des changements de signe que doivent subir les distances de la relation primitive, pour qu'elle devienne applicable indistinctement à toutes les situations possibles. En particulier, quand les points a, b, c prennent la position indiquée par la *fig.* 105 ci-dessous, les distances sont devenues à la fois inverses ou rétrogrades par rapport à celles de la *fig.* 102 ; mais alors on a

$$ac = ab + bc, \quad \text{soit} \quad -ac = -ab - bc;$$

ces distances sont donc aussi devenues simultanément négatives ; ce qui confirme la règle algébrique. On voit par là, d'ailleurs, que les signes ne sauraient, sans convention ex-

Fig. 105.

presse, fixer la position absolue des points a, b, c sur la droite AB ; on pourra toujours les renverser symétriquement sans que les relations en soient troublées, en changeant le sens de la génération des lignes de la droite vers la gauche.

11. Donc, pour rendre une relation appartenant au système de trois points quelconques en ligne droite, et relative à une situation donnée de ces points, applicable à toutes les situations possibles des mêmes points, il suffit de changer dans cette relation, le signe des distances devenues inverses ou rétrogrades par rapport au sens dans lequel on les supposait primitivement engendrées. En d'autres termes, *il suffit de regarder comme positives les quantités qui conservent le même sens à l'égard de l'extrémité d'où elles se mesurent, et comme négatives celles qui changent de sens par rapport à ce même point.*

> Ainsi, il y aura *variation* de signe et *permanence* en même temps que variation ou permanence de position relative. Il est visible, en outre, que la permanence aura lieu toutes les fois que la distance ne sera devenue ni nulle ni infinie, et que, réciproquement, la variation n'arrivera que dans l'hypothèse contraire.

Après que la résolution de problèmes de géométrie ait été réduite à l'exécution automatique d'un algorithme, on voit se constituer au courant des XIX^e^ et XX^e^ siècles, des *habitudes heuristiques.* Elles conduisent à des calculs *élégants* et concis, contrastant avec la lourdeur qui régnait auparavant.

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)

3. EXTENTION DE L'IDÉE DE COORDONNÉE

WESSEL (1799) ARGAND (1806)	Le plan complexe
HAMILTON (1847)	Les quaternions
HAMILTON GRASSMANN (1844)	Le calcul vectoriel
LAMÉ (1818)	Notations abrégées : on parle de la droite d'équation $l = 0$ au lieu de $ax + by + c = 0$.
BOBILLIER (1797 – 1832) PLÜCKER (1801 – 1868)	Coordonnées homogènes et tangentielles
MÖEBIUS (1827)	" *Das barycentrische Kalkül* "
CAYLEY (1843)	Représentation des transformations par des matrices
PLÜCKER (1828) et PONCELET	Coordonnées plückériennes Allusion à des calculs non exécutés Élimination de la "triple – x": une lettre pour désigner un vecteur, une matrice, une fonction, ...

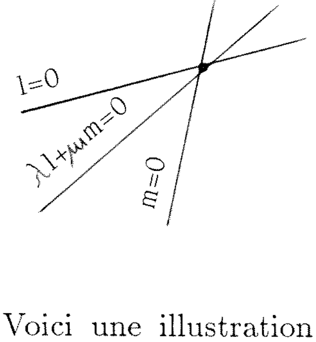
En particulier il y a des propriétés qui s'expriment mal par calcul, qu'on prend l'habitude de traiter par des raisonnements synthétiques (par exemple : exprimer qu'un triangle est équilatéral où l'usage de coordonnées rectangulaires masque les symétries et les invariances). Il arrive qu'il soit avantageux de changer plusieurs fois de système de coordonnées au cours d'un même problème. Enfin, on voit apparaître des calculs où le choix des coordonnées n'est pas explicité (calcul vectoriel ou barycentrique).

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)

4. RENOUVEAU HEURISTIQUE

vers une géométrie analytique,
sans axes ni coordonnées

SALMON (1848 à 1862)	Flexibilité dans l'emploi des nouveaux symboles : virtuosité heuristique.
BOULIGAND (1924)	" Géométrie vectorielle "
XX^{e}siècle	Algèbre linéaire



Dans le livre de SALMON on reconnaît l'*art* du calcul opposé à la *science* du calcul.

Voici une illustration du calcul géométrique sans utilisation de coordonnées. Cette résolution met en oeuvre un procédé de géométrie analytique.

CALCUL GÉOMÉTRIQUE

exemple : Les hauteurs d'un triangle

Il s'agit d'abord d'écrire *l'équation de la hauteur* issue de A. On peut y parvenir péniblement en utilisant des coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires (après avoir indiqué les coordonnées des trois sommets). Mais, le calcul devient plus suggestif si l'on remarque que l'ensemble des points X du plan euclidien satisfaisant à

$$\| XB \|^2 - \| XC \|^2 = \| AB \|^2 - \| AC \|^2$$

(Conséquence immédiate du théorème de PYTHAGORE) est la perpendiculaire menée de A sur BC.
En appelant D le point de rencontre des hauteurs issues de A et de B, on en conclut qu'il satisfait aux deux égalités suivantes :

$$\| DB \|^2 - \| DC \|^2 = \| AB \|^2 - \| AC \|^2$$
$$\| DC \|^2 - \| DA \|^2 = \| BC \|^2 - \| BA \|^2,$$

d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre, la conséquence :

$$\| DA \|^2 - \| DB \|^2 = \| CA \|^2 - \| CB \|^2 .$$

Elle exprime que D se trouve sur la troisième hauteur. En outre, les égalités écrites prouvent que :

$$\| AB \|^2 + \| DC \|^2 = \| BC \|^2 + \| DA \|^2 = \| CA \|^2 + \| DB \|^2$$

Conclusion

L'enseignant traditionnel ne trouve aucune difficulté à enseigner la géométrie analytique. Il expédie la présentation du formulaire, et s'étonne de trouver des élèves travailleurs, qui ont bien appris le cours, si maladroits dans la mise en oeuvre de la méthode.
C'est que la difficulté ne porte pas tellement sur l'*enseignement* des connaissances que sur l'*éducation* des savoir-faire.
Le didacticien ferait bien d'étudier minutieusement la pratique de la géométrie analytique à travers les textes des pionniers (sans oublier ORESME, FERMAT, PASCAL, NEWTON, LACROIX, LAMÉ ...). Il reprendra les articles de géométrie parus dans les journaux historiques (de Crelle, de Liouville ...) comme s'il corrigeait des copies d'élèves. Il s'étonnera des maladresses présentes dans les textes de nos prédécesseurs et s'interrogera : "*A quel moment voit-on apparaître tel ou tel perfectionnement dans l'art de calculer ou d'éviter des calculs inutiles ?*".
Pour le didacticien qui s'efforce de découvrir ce que nos élèves ont du mal à trouver tout seuls, et sur quoi nous devons les aider, l'histoire-fiction qui

se réduit à "*Descartes* (1637)" est un obstacle au progrès. On saute ainsi à pieds joints par dessus des siècles de tâtonnements et d'incertitudes pour décrire le progrès scientifique comme une succession de miracles ponctuels.

L'ALGÈBRE ARABE

A. DJEBBAR

On entend par algèbre arabe l'ensemble des ouvrages d'enseignement et de recherche, écrits en arabe, entre le VIII^e et le XVI^e siècle, et traitant de problèmes touchant à l'algèbre.

Malgré le silence des bio-bibliographes, il semble que l'algèbre arabe s'est constituée à partir d'un héritage babylonien constitué de problèmes et d'algorithmes de résolution des équations du premier et du second degré. Quant à l'héritage grec, dans ce domaine, il est quasi nul au moment de la naissance de cette nouvelle discipline. En effet, à la fin du VII^e siècle, la lecture des éléments d'Euclide reste géométrique et les arithmétiques de Diophante ne sont pas encore traduites (elles le seront au X^e siècle).

1. — La formation de l'école algébrique arabe a lieu à partir du IX^e siècle. Le principal personnage, dans l'état actuel de nos connaissances est : Al-Khwarizmi (780-850) qui écrit dans le cadre de la maison de la sagesse (Bayt-al-Hikma) qui est une sorte de petit CNRS ([1]). Il écrit un traité comportant environ un tiers de théorie pour deux tiers d'exercices d'application. Ce traité a pour but de répondre aux questions de tous les jours (héritage - commerce - arpentage ...). D'autres savants de son époque ont existé (malgré les controverses sur leurs apports), tels que Ibn Turk qui n'est connu qu'à partir de son petit-fils mais dont un ouvrage a été retrouvé récemment et édité par Sayili, et que Sanad Ibn Ali dont le livre a été perdu.

Cette école propose la résolution de l'équation du second degré suivant six cas modèles. Il faut en effet se souvenir que les nombres négatifs, pourtant connus et manipulés par les indiens, n'apparaîssent pas dans la tradition mathématique arabe. Ce que nous écririons :

$$\begin{array}{lll} ax^2 = bx & \text{est écrit} & \textit{les carrés égalent les choses,} \\ ax^2 = c & \text{est écrit} & \textit{les carrés égalent les nombres,} \end{array}$$

a et b sont entiers puis très vite fractionnaires. Petit à petit, ils seront aussi irrationnels sous la forme $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$; $n \pm \sqrt{m}$ (appelés binômes quand il

([1]) Il a eu pour élève son propre calife : El Ma mun (813-833).

y a le signe + et apotomes quand il y a le signe -). Ce sont les nombres sourds. Il s'y ajoutera bientôt les racines de ces mêmes quantités (2).

2. — Après le travail de l'école d'Al-Kwarizmi qui avait donné les équations canoniques (pour le second degré), les algorithmes de résolution, les justifications théoriques et géométriques ainsi que les procédés de mathématisation (ce qui permet de se ramener à l'équation canonique par Al-Jabr (restauration) et Al-Mugābala (comparaison)), on assiste à un développement grâce à la tradition d'Abū Kāmil († 930).

L'oeuvre d'Abū Kāmil fut essentiellement connue en Europe grâce à une traduction en hébreu faite au XV^{e} siècle par Mordechaï Finzi.

Des nombres irrationnels quadratiques et biquadratiques interviennent désormais dans les équations, comme coefficients et comme racines.

Voici par exemple la méthode (traduite en notation moderne) de résolution du problème suivant :

$$\begin{aligned} a+b&=10\\ (a/b)^2-(b/a)^2&=2 \quad . \end{aligned}$$

On cherche a et b.

On pose $a=x$ et $b=10-x$. Alors $a/b=x/(10-x)$.

On pose $y=(10-x)/x$. Alors $1/y^2=y^2+2$ soit $y^4+2y^2=1$.

On pose $X=y^2$. Alors $X=\sqrt{2}-1$ puis $y=\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Donc $(10-x)/x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Une méthode de résolution directe conduirait ensuite à

$$x=\frac{10}{1+\sqrt{\sqrt{2}-1}}\simeq 6,0842$$

mais la division par un irrationnel biquadratique est difficile (mais connue). Par souci pédagogique il termine de la façon suivante :

$$\left(\frac{10-x}{x}\right)^2=\sqrt{2}-1$$

pour se ramener à une équation du 2^{e} degré.

(2) Notons toutefois que 1 acquière le statut de nombre chez Ibn Mun^{c}im (621 de l'Hégire) et que Ibn Al-Bannā (1256-1321) parle de base non décimale. Mais ces deux savants font exception et seront vivement critiqués par Ibn Hajdūr († 1403).

On remarquera également, à travers cet exemple, l'utilisation par Abū Kāmil du changement d'inconnue, méthode que l'on retrouve dans d'autres domaines des mathématiques arabes.

Dans la même école, on trouve le *livre des carrés, des cubes, et de ce qui est au-delà* par Sinan Ibn Al-Fath qui signale qu'il a lu le livre d'Al Khwarizmi, qu'il l'a commenté et qu'il tient à faire la théorie des nouveaux objets que certains mathématiciens utilisent. Il s'agit essentiellement du travail sur les monômes. Il introduit x^3 (cube), x^4 (carré-carré), x^5 (Midad) et généralise les six équations canoniques. C'est ainsi que l'équation $ax^2 + bx = c$ est généralisée par $ax^{2n+p} + bx^{n+p} = cx^p$, $n \in \mathrm{N}$; $p \in \mathrm{N}$.

Compte tenu des outils mathématiques de l'époque et de l'absence de symbolisme, cette généralisation n'est pas *évidente* au X^e siècle.

La notation et le symbolisme resteront d'ailleurs des problèmes difficiles. A partir des XII^{e}et XIII^e siècles, on note l'apparition d'abréviations.

جذر (racine) conduit à حـ qui est peut-être l'ancêtre de notre $\sqrt{\ }$.

شيء (chose) conduit à ســ pour l'inconnue x.

مال conduit à مـ pour le carré x^2.

كعب (le cube-objet) donne كـ pour le cube x^3. (On notera que كعبة est la Kaaba qui a justement la forme d'un cube). Ainsi, par exemple, $12x^5$ se noterait $\overset{\text{مك}}{12}$.

3. — Avec la tradition d'Al-Karajī (Y 1029) apparaît la manipulation des polynômes : addition, soustraction, multiplication et surtout division. Cette même tradition fera une place importante au contenu des *Arithmétiques de Diophante* (dont certains chapitres sont même reproduits dans le livre al-Fakhrī d'al-Karajī). C'est à son école que l'on doit *le livre splendide* (al-Bahir) de As-samaw'al (Y 1175). As-samaw'al introduit la division des polynômes, quels que soient les coefficients, et fournit une méthode de calcul de $\sqrt{P(x)}$ ...où $P(x)$ est toutefois un carré parfait.

On trouvera même plus tard (au XIV^e siècle) chez Al-Qatrawānī une méthode de calcul de $\sqrt[3]{P(x)}$. Cela permet d'introduire de façon assez naturelle le triangle de Pascal sous forme des coefficients du binôme mais pas sous forme combinatoire. Au XIII^e siècle, un mathématicien du Maghreb, Ibn Mun^{c}im construira le même triangle mais en suivant une démarche strictement combinatoire. Il ne fera d'ailleurs pas le lien entre les C_n^p qu'il a obtenus et les coefficients du binôme.

4. — Avec la tradition de ʿUmar Al-Khayyām (ϒ 1139), s'élabore la théorie géométrique des équations cubiques, après que l'on se soit intéressé aux problèmes de duplication du cube et de trisection de l'angle, problèmes qui seront résolus grâce aux coniques d'Appolonius.

Cette tradition commence par la tentation de résolution algébrique d'un problème grec :

Dans le livre II de la sphère et du cylindre d'Archimède, la 4^{e} proposition étudie le rapport des volumes des calottes sphériques déterminées par l'intersection d'un plan et d'une sphère. Pour cela, il utilise un lemme dont il reporte la démonstration à plus tard mais qu'il ne démontre pas dans son livre. Al-Māhānī (888) essaie une reconstitution de cette démonstration. Il ramène le problème d'Archimède à la résolution de l'équation du 3^{e} degré : $x^3 + ax^2 = b$. *Ayant échoué dans la résolution par radicaux, il conclut à l'impossibilité de ce problème.*

C'est Abul Jūd (X^{e} et début du XI^{e} siècle) qui résout géométriquement un certain nombre d'équations du 3^{e} degré mais c'est à Umar Al-Khayyām que l'on doit la résolution des 25 types d'équation du 3^{e} degré (n'oublions pas que les nombres négatifs ne sont toujours pas utilisés).

Plus tard, Sharaf ad-Dīu at-Tūsī, reprendra l'étude de ces 25 équations en adoptant une démarche nouvelle où les propriétés algébriques des coniques sont systématiquement utilisées et où les solutions géométriques sont accompagnées de solutions approchées obtenues par la méthode dite de Hörner.

LE PROBLÈME DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DANS L'ÉMERGENCE DU CONCEPT DE GROUPE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

L'atelier d'histoire des mathématiques (voir "*L'Ouvert*" n° 40, sept. 85) fonctionne régulièrement un mercredi par mois et étudie les textes marquants, ayant contribué à l'invention de concepts ou outils essentiels des mathématiques d'aujourd'hui. Voici une présentation du thème abordé cette année.

Depuis le milieu du XVI^e siècle, on savait résoudre les équations polynôme de tous les degrés jusqu'au quatrième. Dans un livre publié en 1545 (Ars Magna) CARDAN et son élève FERRARI avaient fait connaître des méthodes et des formules déjà pratiquées plus ou moins secrètement par toute une école de mathématiciens italiens : TARTAGLIA, SCIPION del FERRO ... etc ... Il était dans la logique de l'activité mathématique de chercher une méthode, analogue ou différente, pour les équations de degré supérieur. EULER bien sûr s'y est attaqué, qui dans un mémoire intitulé :*De Resolutione Aequationum cuiusvis gradus* (Nouveaux commentaires de Petersbourg, 1764) propose toute une classe d'équations du cinquième degré à coefficients rationnels, résolubles par radicaux. Il donne entre autres cet exemple : $X^5 = 2625X + 61500$ qui admet la solution :

$$X = \sqrt[5]{75(5+4\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35+11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{225(35-11\sqrt{10})} + \sqrt[5]{75(5-4\sqrt{10})}$$

De tels exemples ne pouvaient que conforter les mathématiciens du XVIII^e siècle dans la certitude que des méthodes et des formules de résolution des équations du cinquième degré devaient bien exister, et, pourquoi pas, également des degrés supérieurs au cinquième. Seulement voilà, personne n'avait encore trouvé ni méthode ni formule, pour une équation à coefficients quelconques. EULER lui-même n'a réussi qu'à trouver un résultat *a contrario* : partant d'une certaine forme présumée de l'écriture des solutions, calquée sur celle des équations de degré trois ou quatre, il a déterminé les équations du cinquième degré, ayant des solutions qui s'écrivent sous cette forme.

C'est dans ce contexte théorique que LAGRANGE attaque le problème sous une forme tout à fait nouvelle dans un mémoire paru à l'Académie de Berlin en 1770-1771 sous le titre : *Mémoire sur la résolution des équations algébriques.*

A partir de l'examen systématique et approfondi de toutes les méthodes élaborées par ses prédécesseurs (CARDAN, FERRARI, HUDDE, TCHIRNHAUS, DESCARTES, EULER, BEZOUT) pour résoudre les équations générales des troisième et quatrième degré, LAGRANGE dégage deux idées fortes tout à fait décisives pour les recherches et les découvertes qu'elles provoqueront chez ses contemporains et au-delà, jusque chez GALOIS.—

1. — Toutes ces méthodes réussissent en ceci, qui représente en quelque sorte leur dénominateur commun : Si n désigne le degré de l'équation, elles utilisent toutes — de façon plus ou moins implicite — une fonction rationnelle des n racines, et cette fonction présente la particularité de prendre **moins de n valeurs distinctes** lorsque l'on permute de toutes les façons possibles ces n racines.

Exemple : pour $n = 3$, la fonction f des 3 racines x_1, x_2, x_3 de l'équation $X^3 + mX^2 + nX + p = 0$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$, où $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ne prend que deux valeurs distinctes θ_1 et θ_2 par les six permutations des trois lettres x_1, x_2, x_3.

Comme $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta_1\theta_2$ sont des fonctions symétriques des racines, on sait calculer leurs valeurs en fonction des coefficients m, n, p, et ainsi avec la relation supplémentaire $x_1 + x_2 + x_3 = -m$, on pourra déduire les valeurs de x_1, x_2 et x_3 à partir d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Tout le problème consiste donc à trouver de telles fonctions des racines pour les degrés supérieurs à quatre. Et LAGRANGE démontre un premier résultat important :

> *Si p désigne le nombre de valeurs distinctes que prend une fonction rationnelle de n quantités, alors p divise n!*

premier énoncé du théorème dit de LAGRANGE, connu aujourd'hui sous la forme

> *Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G, l'ordre de H divise l'ordre de G.*

2. — L'idée de groupe (de permutations) n'est en effet pas loin. LAGRANGE est tout naturellement amené à s'intéresser aux relations existant entre deux fonctions de n quantités, se comportant identiquement lorsqu'on effectue sur elles les n! permutations de ces n quantités. LAGRANGE appelle *semblables* de telles fonctions et démontre que si une fonction Y est semblable à une fonction t, alors Y s'exprime rationnellement en fonction de t et des coefficients de l'équation ayant les n quantités pour racines.

Cette idée aura une grande fortune, et GALOIS, par exemple, l'utilisera explicitement dans son mémoire sur les équations résolubles par radicaux, de même qu'il utilisera – après GAUSS et ABEL – les fonctions

$$(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n)^n$$

appelées résolvantes de LAGRANGE , dont l'intérêt réside en ce qu'elles sont invariantes par permutation circulaire (où α est racine n-ième de l'unité).

Au total, le mémoire de LAGRANGE a eu une énorme influence sur ses contemporains et continuateurs. Par son caractère complet, et bien qu'il n'aboutisse pas, il situe **le lieu où l'on peut progresser, il fixe les tâches à accomplir, il donne les outils pour les réaliser**. Après LAGRANGE on peut schématiquement suivre deux directions de recherche.

a. — Chercher à mieux connaître les lois qui règlent la possibilité de résoudre les équations, en s'attaquant à des classes particulières de celles-ci. C'est ce que fait GAUSS, qui montre que l'équation

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0 \quad (n \textit{ premier})$$

est toujours résoluble par radicaux, et donne une méthode précise de résolution.

De même, dans un *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, ABEL généralise la méthode de GAUSS aux équations dont les racines s'expriment toutes, rationnellement, à l'aide de l'une d'entre elles. Chez GAUSS, l'idée de groupe cyclique était à l'oeuvre implicitement, chez ABEL, c'était celle de groupe commutatif (abélien).

b. — Dans le même temps, on continuait à travailler sur l'équation générale du cinquième degré pour laquelle LAGRANGE avait donné une direction de recherche : chercher des fonctions de cinq variables prenant *peu* de valeurs distinctes par les 120 permutations possibles. Un premier résultat fut donné par l'italien RUFFINI qui, par l'examen systématique de ces permutations, arrive à la conclusion que le nombre p de valeurs que peut prendre une fonction rationnelle de 5 variables ne peut être égal ni à 8, ni à 4, ni à 3. (Rappelons que LAGRANGE avait démontré que ce nombre devait diviser 120.)

CAUCHY s'appuiera sur ce résultat pour créer sa théorie des substitutions, première ébauche d'une étude des groupes de permutations. Il généralisera le résultat de RUFFINI en démontrant que

> *Le nombre de valeurs différentes d'une fonction non symétrique de n quantités ne peut s'abaisser au-dessous du plus grand nombre premier p contenu dans n, sans devenir égal à 2.*

Ainsi, peu à peu, les outils se mettent en place, qui permettront à GALOIS de franchir les étapes décisives. En réalité le contexte du problème s'est beaucoup modifié. La question n'est plus de résoudre les équations de degré cinq ou plus, elle est devenue beaucoup plus vaste :

> *Etant donnée une équation algébrique à coefficients quelconques, numériques ou littéraux, reconnaître si les racines ne peuvent s'exprimer en radicaux, telle est la question dont nous offrons une solution complète*

(GALOIS , premier mémoire).

Nous vous présenterons dans les prochains numéros de "*L'Ouvert*", une analyse plus détaillée de chacune des oeuvres marquantes évoquées dans cet article.

LE SCRUTIN PROPORTIONNEL :

PLUS FORT RESTE OU PLUS FORTE MOYENNE?

Michel EMERY

J'ai été fort surpris, il y a quelques mois, d'apprendre l'instauration du scrutin de liste *à la proportionnelle à la plus forte moyenne* ([1]) pour les élections législatives et régionales : il ne m'était jamais venu à l'idée qu'il existât un autre type de scrutin proportionnel que celui dit *au plus fort reste*, qui me semblait *a priori* le seul équitable. Que pouvait bien être cette plus forte moyenne? En voici la recette, fournie par *Le Monde*. Une peréquation attribue à chaque liste un nombre d'élus égal au nombre total de sièges à pourvoir, multiplié par le rapport du nombre de voix pour cette liste au nombre total de voix exprimées; ou plutôt la partie entière de ce résultat. Cette opération d'arrondi laissant quelques sièges vacants, on les répartit entre les listes selon la règle suivante : pour chaque liste, ajouter fictivement 1 au nombre (éventuellement nul) d'élus de cette liste, puis diviser par le résultat obtenu le nombre de voix recueilli par la liste. Ce quotient est appelé moyenne de cette liste, et le premier des sièges vacants est attribué à la liste ayant la plus forte moyenne. Les autres sièges vacants, s'il y en a, sont attribués jusqu'à épuisement par le même procédé, les moyennes utilisées à chaque étape tenant compte de tous les sièges précédemmnt attribués.

La question que soulève tout ceci est évidente : que cache cet algorithme tortueux? En quoi cette technique est-elle plus équitable que l'attribution des sièges vacants selon l'ordre alphabétique, l'âge, la feuille d'impôts ou l'origine ethnique?

1. — Plus fort reste et plus forte moyenne.

Prenons le problème par l'autre bout et essayons d'imaginer les procédés raisonnables de répartition des sièges. Nous supposerons (c'est déjà assez compliqué comme ça!) que chaque liste est suffisamment longue pour ne pas se voir attribuer plus de sièges qu'elle n'en peut occuper, et que chaque électeur a voté pour une liste et une seule (autrement dit, nous ne nous occuperons que des suffrages exprimés, dans un scrutin sans panachage).

([1]) Le nom exact est scrutin de liste à un tour sans panachage avec répartition proportionnelle et attribution des sièges restant selon la règle de la plus forte moyenne.

Notations :
$E(x)$ = partie entière de x = plus grand entier au plus égal à x;
$F(x)$ = partie fractionnaire de $x = x - E(x)$.

Données :
k : nombre de listes en présence;
$p_1, p_2, \dots, p_k$: proportions respectives de voix obtenues par les listes (vérifient $p_1 + \cdots + p_k = 1$);
n : nombre de sièges à pourvoir.

Une fois admis le principe de la représentation proportionnelle (qui mérite, bien sûr, discussion, mais ce n'est pas notre propos), la liste numéro i a droit en principe à $p_i n$ sièges; et bien entendu toute la difficulté vient du fait qu'en général $p_i n$ n'est pas entier. Un instant de réflexion fournit (sans prétention d'exhaustivité) quatre manières d'y remédier.

Solution 1.

Attribuer quand même exactement $p_i n$ sièges à la liste i, de la manière suivante : si $p_i n = 3,274$ par exemple, cette liste aura 4 élus, mais le quatrième ne disposera, dans les votes de l'assemblée, que de 0,274 voix (2).

Avantages : on atteint l'égalité proportionnelle rigoureuse; en outre les assemblées seraient encore plus rarement divisées à parts égales sur une question. Inconvénients : on assisterait à une multiplication des petites listes, qui auraient chacune 0,0001 élu ... Et puis ce serait dévalorisant d'être un élu à part non entière.

Solution 2.

Attribuer à la liste i la partie entière de $E(p_i n)$ et ne pas attribuer les sièges restants, diminuant ainsi un peu l'effectif de l'assemblée. Inconvénient : ça ne marche que si k est petit devant n; pour $k > n$, on risque de n'avoir aucun élu!

A ma connaissance (fort limitée en ce domaine), les solutions 1 et 2 ne sont pas pratiquées, et j'ignore même si elles portent un nom.

Solution 3 (Plus fort reste).

Après avoir attribué $E(p_i n)$ sièges à chaque liste i, calculer les restes $F(p_i n)$ et attribuer, dans l'ordre et jusqu'à épuisement, les sièges restants à celles des listes ayant les plus grands restes (donc à celles qui ont été le plus brimées dans l'arrondi en partie entière). Ceci est toujours possible puisque le nombre de sièges non attribués,

(2) Nous écartons, par souci humanitaire, les tentatives chirurgicales pour fabriquer 0,274 député ...

$$n - \Sigma_i E(p_i n) = \Sigma_i (p_i n - E(p_i n)) = \Sigma_i F(p_i n),$$

est toujours plus petit que le nombre k de listes (car $F(p_i n) < 1$).

Si par exemple pour 8 sièges à pourvoir, les 4 listes obtiennent respectivement 3,374; 0,325; 2,705 et 1,596 élu(s) avant arrondi, on prend d'abord les parties entières 3, 0, 2 et 1, soit 6 sièges, et les deux sièges restant vont aux listes 3 et 4, qui ont les plus grandes parties fractionnaires (0,705 et 0,596).

Solution 4 (Plus forte moyenne).

On fixe un nombre q, convenablement choisi, et on décide que chaque élu devra représenter au moins q électeurs. En notant v le nombre total des voix exprimées (donc $p_i v$ le nombre des voix qu'a obtenues la liste i), ceci équivaut à donner à la liste i le quotient entier $E(p_i v/q)$ sièges où q doit être tel que $\Sigma_i E(p_i v/q) = n$. En posant $v/q = m$, ceci revient à attribuer à la liste i $E(p_i m)$ sièges, où m est choisi tel que $\Sigma_i E(p_m) = n$; ainsi ce procédé se ramène à appliquer la solution 2, mais en partant, au lieu de n sièges au total, d'un nombre m (entier ou non) plus grand que n, calculé de telle sorte que le nombre final d'élus retombe précisément à n.

En toute rigueur, pour s'assurer que tout ceci a un sens, il faut vérifier que :
a) le choix d'un tel m (ou, ce qui revient au même, de q) est toujours possible;
b) si plusieurs valeurs de m conviennent, elles fournissent les mêmes nombres d'élus $E(p_1 m), \ldots, E(p_k m)$.

Pour répondre à ces questions, considérons, pour $m > 0$, la fonction

$$g(m) = \Sigma_i E(p_i m)$$

où les p_i sont fixées. C'est une somme de fonctions croissantes, à valeurs entières. Le point b) est évident : g étant croissante, l'ensemble des m qui résolvent $g(m) = n$ est un intervalle sur lequel g, et donc aussi chacune de ses composantes $E(p_i m)$, est constante. Le a) est moins clair : ne pourrait-il se faire que, deux ou plusieurs des fonctions $E(p_i m)$ sautant en même temps d'une unité, la fonction g effectue pour une valeur de m un saut d'amplitude 2 ou plus, évitant ainsi la valeur n? Ce cas peut se produire, mais nous avons le droit de le négliger : il correspond à uner situation exceptionnelle où deux ou plusieurs listes ne peuvent être départagées. Aucun mode de scrutin ne peut éviter cela : dans le cas du plus fort reste, il se peut aussi que plusieurs listes aient le même reste. De telles situations, que nous appellerons dans la suite *ambiguës*, nécessitent la prise en compte d'un autre critère (âge, ...) ou un nouveau tour de scrutin. (Exemple type : deux sièges à pourvoir, trois listes rassemblant chacune le tiers des voix. Cet exemple est ambigu pour les modes de scrutin 3 et 4, mais pas pour 1 et 2 qui ne font que déplacer le problème!).

Ne serait-ce qu'à l'identité de leurs noms, le lecteur a déjà deviné que cette quatrième solution est la même que la recette donnée en introduction. En effet, pour un nombre positif arbitraire m_0, quand m croît à partir de m_0, le premier saut de la fonction $E(p_i m)$ intervient pour la valeur de m donnée par $p_i m = E(p_i m_0) + 1$, donc $m = (E(p_i m_0) + 1) / p_i$; ainsi le premier saut de $g(m) = \Sigma_i E(p_i m)$ provient du terme correspondant à l'indice i qui minimise $(E(p_i m_0) + 1) / p_i$, donc à la liste ayant la plus forte moyenne $p_i / (E(p_i m_0) + 1)$. Cette remarque justifie l'algorithme de répartition, et montre du même coup que, au lieu d'appliquer, comme l'indique la recette cet algorithme à partir de l'attribution initiale $E(p_i n)$, on obtiendrait le même résultat en partant de zéro (aucun siège à chaque liste), ou, plus généralement, de n'importe quelle attribution partielle $E(p_i r)$ (pourvu que r soit assez petit pour que $g(r) \leq n$; sinon, il faudrait compléter la règle et indiquer dans quel ordre on supprime des sièges aux listes en partant d'une répartition excédentaire – nous laissons cet exercice au lecteur). Avant de donner un exemple, une dernière remarque : nous avons utilisé ci-dessus des moyennes $p_i / (Ep_i m_0) + 1)$ qui ne sont pas tout à fait les $p_i v / (E(p_i m_0) + 1)$ qu'indique la recette; mais comme elles n'en diffèrent que par un facteur constant v et qu'il ne s'agit que de les comparer entre elles, ça n'a pas d'importance; de même, dans l'exemple que suit, nous utiliserons les $p_i n / (E(p_i m_0) + 1)$.

Reprenons le même exemple que pour le plus fort reste : huit sièges, quatre listes obtenant 3,374; 0,325; 2,705 et 1,596 élus. Une fois attribués les parties entières 3, 0, 2 et 1, on calcule les quatre moyennes :

$$\frac{3,374}{4} = 0,84 \qquad \frac{0,325}{1} = 0,32$$
$$\frac{2,705}{3} = 0,90 \qquad \frac{1,596}{2} = 0,80$$

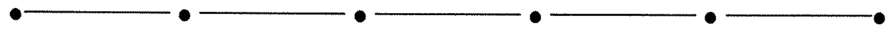
le premier siège restant va à la liste 3, qui a la plus forte moyenne, et dont la nouvelle moyenne devient $2,705/4 = 0,68$; la plus forte moyenne étant maintenant celle de la liste 1, c'est elle qui obtient le dernier siège (alors qu'au plus fort reste, c'était la 4).

2. — Comparaison graphique des deux méthodes.

Toutes les figures qui suivent seront tracées pour un nombre de sièges $n = 5$ (mais le lecteur n'aura aucune difficulté à imaginer le cas général) ; nous nous restreindrons aux cas où le nombre k de listes est 2 ou 3, étudiés à l'aide de diagrammes respectivement unidimensionnels et bidimensionnels (pour k quelconque, il faudrait une figure à $k-1$ dimensions; c'est largement au-delà des capacités de *L'Ouvert*, même pour $k=3$).

1°. $k=2$. Deux listes s'affrontent.

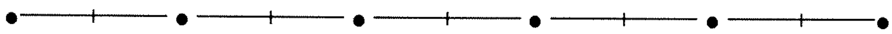
Les données sont p_1 et $p_2 = 1-p_1$; nous pouvons les visualiser par le point d'abscisse p_1 sur le segment $[0,1]$. Lorsque p_1 prend l'une des $n+1$ valeurs j/n (j entier de 0 à n), indiquées par un $\bullet$, la peréquation fournit des résultats entiers et toutes les méthodes de scrutin proportionnel donnent le même résultat.



(Par exemple, le troisième $\bullet$ à partir de la gauche signifie $p_1 = 2/5$; résultat : 2 sièges pour la liste 1, 3 pour la liste 2). Sauf cas ambigu, chaque valeur de p_1 (chaque point du segment) conduit, pour un mode de scrutin donné, au même résultat qu'un certain $\bullet$. Chaque $\bullet$ est donc entouré par une région (en fait un intervalle) de $[0,1]$ formée des scores que le mode de scrutin ne différencie pas du $\bullet$; ces régions sont séparées par les points ambigus (figurés par des ——).

Plus fort reste :

Les valeurs ambiguës de p_1 sont telles que $p_1 n$ tombe juste à mi-chemin entre deux entiers :



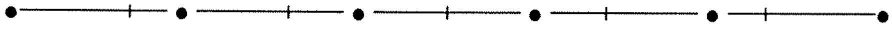
Chaque résultat $\bullet$ est au centre de sa région, sauf les deux extrêmes, dont la région est plus petite. L'interprétation graphique de la méthode du plus fort reste est claire : on remplace le résultat du vote par le $\bullet$ le plus proche.

Plus forte moyenne :

Cherchons la valeur ambigüe située entre deux $\bullet$ consécutifs, d'abscisses j/n et $(j+1)/n$. C'est la solution de l'équation obtenue en égalent les moyennes :

$$\frac{p_1}{j+1} = \frac{p_2}{(n-j-1)+1} = \frac{1-p_1}{n-j}$$

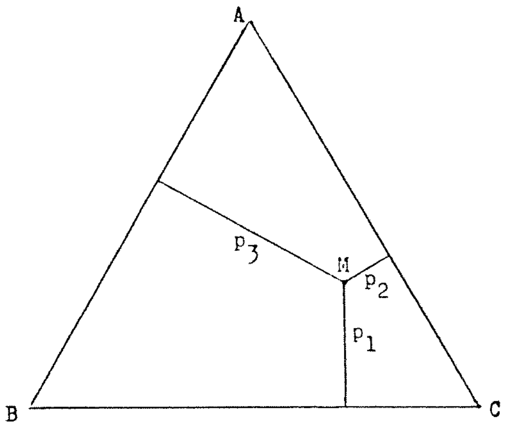
donc $p_1 = (j+1)/(n+1)$. Ainsi, les valeurs ambiguës divisent l'intervalle $[0,1]$ en $n+1$ régions de même longueur.



Les • ne sont plus au centre de leur région, les régions sont maintenant égales.

La différence entre les deux méthodes saute aux yeux : elle est peu marquée au centre, très nette aux bords, le plus fort reste étant plus favorable à la liste que a obtenu le moins de suffrages.

2°. $k = 3$. Trois listes sont en présence.
Pour représenter les données p_1, p_2, p_3 (trois nombres positifs de somme 1), nous allons utiliser un diagramme bidimensionnel familier aux chimistes et aux géologues ([3]) : les coordonnées barycentriques.



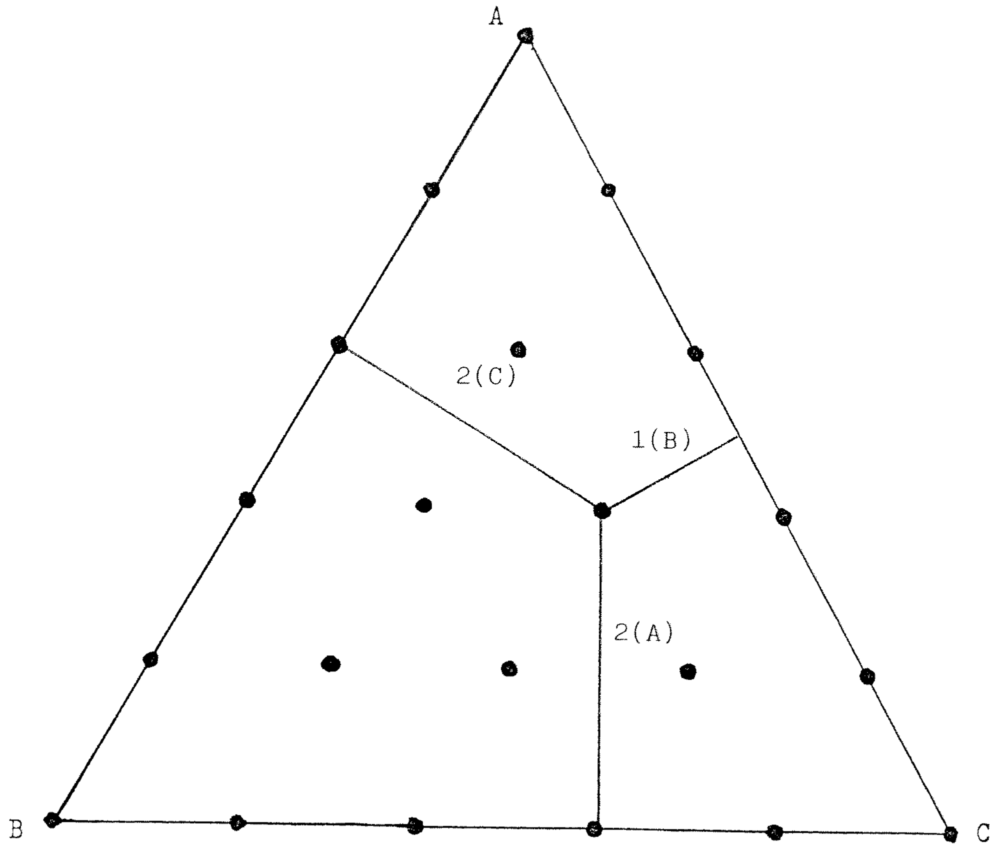
Dans un triangle équilatéral ABC, nous associons à (p_1, p_2, p_3) le barycentre M des points A, B, C pondérés par les poids respectifs p_1, p_2, p_3. Quand (p_1, p_2, p_3) décrit tous les scores possibles, le point M décrit tout le triangle. En prenant pour unité de longueur les hauteurs du triangle, p_1 est la distance de M au côté BC, p_2 sa distance à CA et p_3 à AB.

Ce triangle a aussi une interprétation tridimensionnelle : dans l'espace muni de coordonnées orthonormées, plaçons le point (p_1, p_2, p_3). Il se trouve dans le plan d'équation $x + y + z = 1$, qui passe par les extrémités des trois vecteurs du repère, et les points A, B, C peuvent s'interpréter comme ces trois extrémités, la figure étant simplement une coupe plane de l'espace muni des coordonnées usuelles. Ceci a une conséquence qui va nous servir : en coordonnées barycentriques, si α, β et γ sont trois nombrees dont deux au moins sont différents, $\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 = \delta$ est l'équation (non unique!) d'une droite.

Portons tout d'abord sur la figure, toujours avec des • , les points pour lesquels la péréquation donne des résultats entiers; ces points sont de la forme $p_1 = a/n, p_2 = b/n, p_3 = c/n$ avec a, b, c entiers et $a + b + c = n$; ils forment, dans le triangle ABC, les sommets d'un réseau triangulaire régulier.

Il reste à figurer les régions relatives, comme précédemment, à chaque • . Pour cela, nous allons chercher les points ambigus situés sur la

([3]) Pour représenter les mélanges, dans diverses proportions, de trois composants. Par exemple si les trois sommets signifient respectivement feldspath pur, quartz pur et mica pur, différentes zones du triangle représenteront les différents types de granite.



frontière entre deux régions correspondant à deux $\bullet$ voisins, que nous pouvons par exemple choisir sur une même horizontale. De tels $\bullet$ sont de la forme $(a/n, (b+1)/n, c/n)$ et $(a/n, b/n, (c+1)/n)$, avec a, b, c entiers, $a+b+c = n-1$.

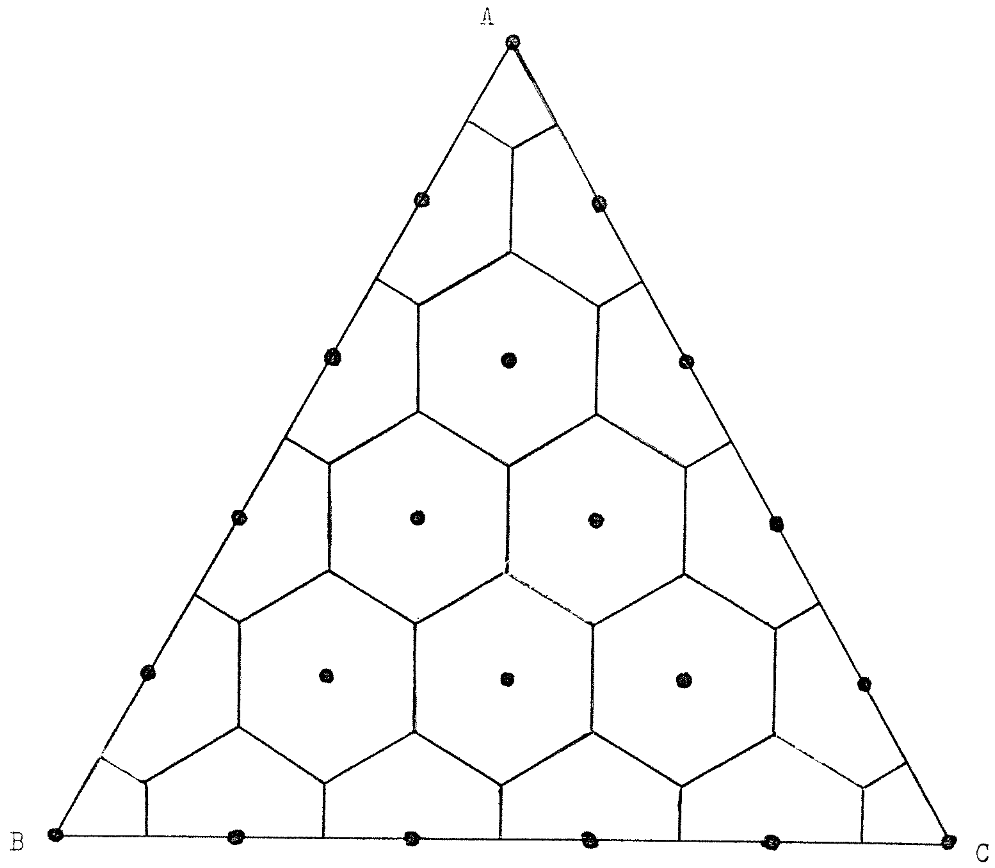
Plus fort reste :

L'équation donnant les points ambigus est dans ce cas l'égalité des restes

$$np_2 - b = np_3 - c,$$

donc $p_2 - p_3 = (b-c)/n$. C'est l'équation d'une droite verticale $(p_2 - p_3)$ $=$ *constante* passant juste au milieu entre les deux $\bullet$ (car ce milieu est $(a/n, (b+1/2)/n, (c+1/2)/n)$. Si l'on ajoute la condition $E(p_1 n) = a$, on trouve pour l'ensemble ambigu cherché un segment de cette droite. En échangeant le rôle des trois sommets, il est maintenant facile de construire les régions entourant les $\bullet$.

On obtient un réseau hexagonal régulier, les centres des hexagones étant les $\bullet$. Comme dans le cas $k = 2$, les régions sont définies par une



règle géométrique simple : l'approximation du plus fort reste conduit à remplacer chaque point par le • le plus proche. Ceci serait encore vrai pour k quelconque, si l'on pouvait dessiner un diagramme à $k-1$ dimensions.

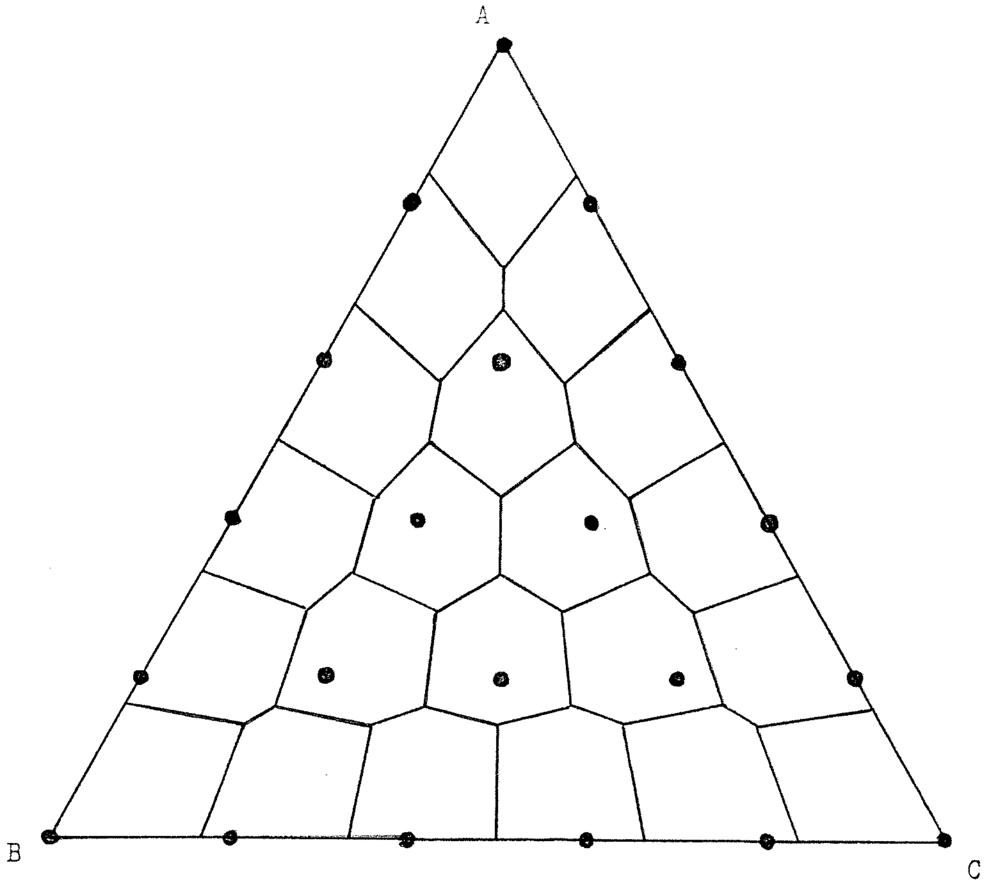
Plus forte moyenne :

Pour la frontière ambiguë entre nos deux • $(a/n, (b+1)/n, c/n)$ et $(a/n, b/n, (c+1)/n)$, l'égalité des moyennes s'écrit :

$$p_2/(b+1) = p_3/(c+1),$$

donc cette frontière est (un segment de) la droite d'équation $p_2/p_3 = (b+1)/(c+1)$. Cette droite est facile à construire : elle passe par le point A, et par le point $((a-1)/n, (b+1)/n, (c+1)/n)$ qui n'est autre que le • situé juste au dessous du milieu du segment qui joint nos deux • . Le tracé ne présente pas de difficultés et fournit la figure suivante.

On observe encore un réseau hexagonal, mais il n'est pas régulier, et semble malaisé à caractériser géométriquement. Regardons de plus près l'un de ces hexagones :

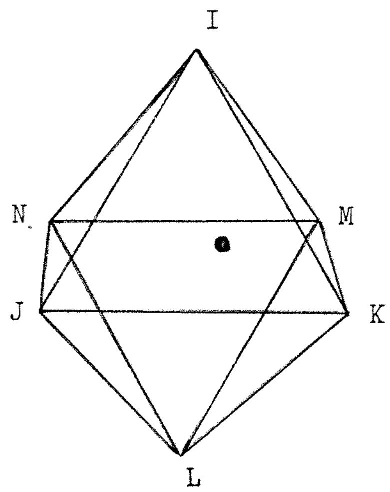


Si le $\bullet$ qu'il contient a pour coordonnées $(a/n, b/n, c/n)$, on trouve facilement, à l'aide des équations des droites ambiguës, les coordonnées de ses six sommets, qui valent

$$\begin{array}{ll} I : \left(\frac{a+1}{n+1}, \frac{b}{n+1}, \frac{c}{n+1}\right) & L : \left(\frac{a}{n+2}, \frac{b+1}{n+2}, \frac{c+1}{n+2}\right) \\ J : \left(\frac{a}{n+1}, \frac{b+1}{n+1}, \frac{c}{n+1}\right) & M : \left(\frac{a+1}{n+2}, \frac{b}{n+2}, \frac{c+1}{n+2}\right) \\ K : \left(\frac{a}{n+1}, \frac{b}{n+1}, \frac{c+1}{n+1}\right) & N : \left(\frac{a+1}{n+2}, \frac{b+1}{n+2}, \frac{c}{n+2}\right). \end{array}$$

Si le $\bullet$ est sur un côté du triangle ABC, trois sommets de l'*hexagone* y sont aussi, et la région est en réalité pentagonale .

Si le $\bullet$ est l'un des trois sommets, cette dégénérescence se produit deux fois, et on obtient un quadrilatère (ce qui suit n'en reste pas moins vrai). Ces coordonnées montrent que IJK est un triangle équilatéral, se déduisant de ABC par l'homothétie de centre $\bullet$ et de rapport $1/(n+1)$.



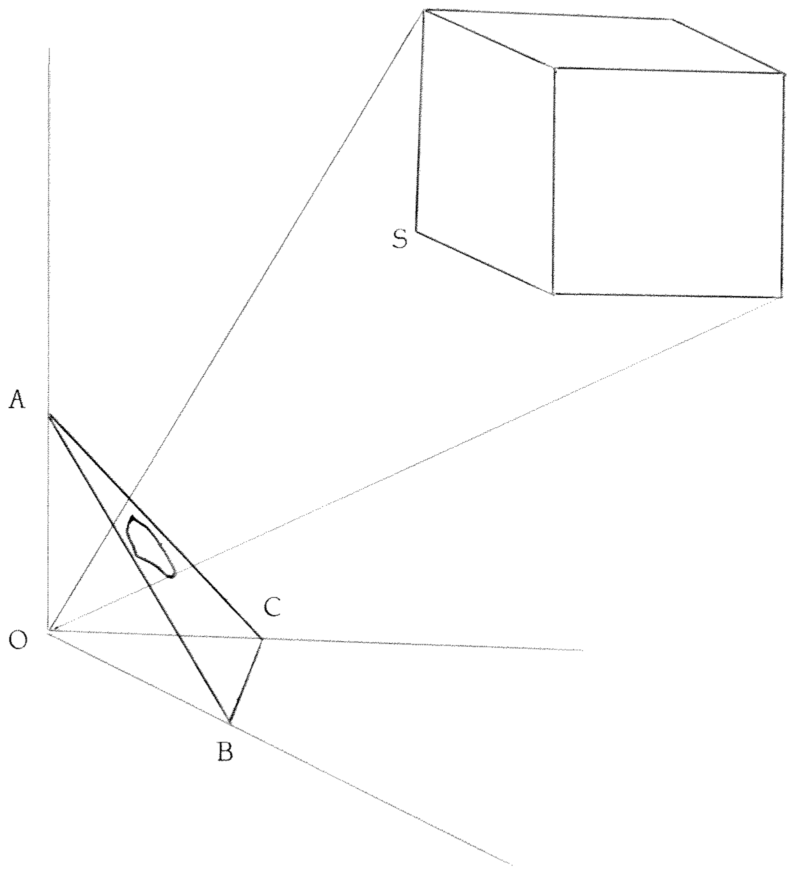
De même, LMN est lui aussi équilatéral, et se déduit de ABC par une homothétie de rapport $-(1/(n+2))$. Ainsi ces hexagoes, apparemment si dissemblables, sont tous formés de deux triangles équilatéraux de tailles et d'orientation fixes; seule diffère leur position relative. Outre le fait que les trois diagonales IL, JM et KN sont concourantes, ceci a une conséquence amusante : toutes ces régions ont même aire.

Ces hexagones, dans un cas comme dans l'autre (plus fort reste ou plus forte moyenne) ont aussi une interprétation tridimensionnelle.

Dans le repère orthonormé $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ plaçons le point S de coordonnées (a, b, c) et le cube $a \leq x \leq a+1$, $b \leq x \leq b+1$, $c \leq x \leq c+1$.

La projection perspective de ce cube sur le plan ABC n'est autre que l'un des hexagones irréguliers du réseau (pour la plus forte moyenne), tandis que sa projection orthogonale - à un changement d'échelle près - est l'un des hexagones réguliers correspondant au réseau illustrant le plus fort reste. Dans les deux cas, la projection de S est le • de l'hexagone.

Les résultats de cette étude graphique de la plus forte moyenne se généraliseraient à k quelconque si l'on pouvait dessiner dans les espaces à $k-1$ dimensions : la figure pourrait encore être interprétée comme une vue perspective d'une famille d'*hypercubes* à k dimensions (une dimension



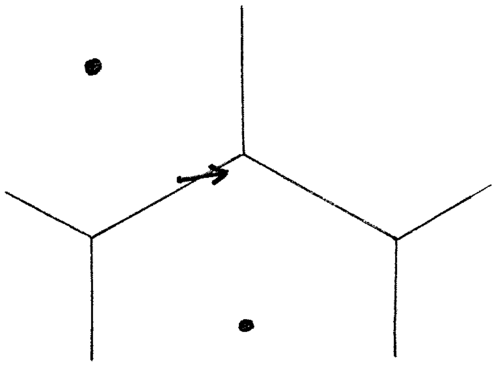
de plus) ; et les *hypervolumes* des régions entre lesquelles serait partagé l'*hypertriangle* seraient encore égaux (mais pour ce dernier point, la démonstration qui se généralise bien n'est pas celle donnée plus haut).

Pour conclure cette étude graphique des deux méthodes, la comparaison entre plus fort reste et plus forte moyenne pourrait reprendre ici mot pour mot ce qui a été dit pour $k = 2$: peu de différence au centre, différence plus sensible aux bords (et plus encore près des coins), le plus fort reste étant plus généreux envers les listes ayant recueilli le moins de voix.

3. — Imperfection des modes de scrutin.

Il est bien connu depuis CONDORCET que les systèmes électoraux donnent lieu à des phénomènes curieux, voire paradoxaux. Nous allons donner, pour les deux types de scrutin étudiés ici, trois telles propriétés.

Notre première remarque concerne aussi bien les deux modes de scrutin. Nous cherchons l'effet, sur le résultat de l'élection, du déplacement, dans le triangle ABC, du point représentant les suffrages obtenus. Le plus souvent, ça ne change rien : le point restant dans la même région, le résultat du scrutin n'en est pas affecté.



Cependant, il peut parfois se faire que le point, franchissant une ligne d'ambiguïté, change de région. Dans la majorité des cas, on assistera alors au transfert d'un siège d'une liste ayant perdu des voix à une liste qui en a gagné. Mais pas toujours! Si par exemple le déplacement se fait comme l'indique cette figure, le point s'éloigne de la base BC horizontale, mais le • de la région d'arrivée est plus proche de BC que le • de départ.

Ainsi, bien que gagnant des voix, la liste 1 a perdu un siège! Pour les lecteurs qui prèfèrent les nombres à la géométrie, un tel exemple peut être donné par :

Situation initiale :	*Situation finale* :
liste 1 : 1,622 élu	liste 1 : 1,624 élu
liste 2 : 1,757 élu	liste 2 : 1,751 élu
liste 3 : 1,621 élu	liste 3 : 1,625 élu

(Comme la ligne franchie est ambiguë pour chacun des deux types de scrutin, cet exemple convient aussi bien pour le plus fort reste que pour la plus forte moyenne.) Ici, la liste 2 ayant perdu quelques voix au profit de 1 et surtout de 3, le résultat net est un tranfert d'un siège de 1 à 3. Bien entendu, en intervertissant les situations initiale et finale, il est possible de gagner un siège en perdant des voix.

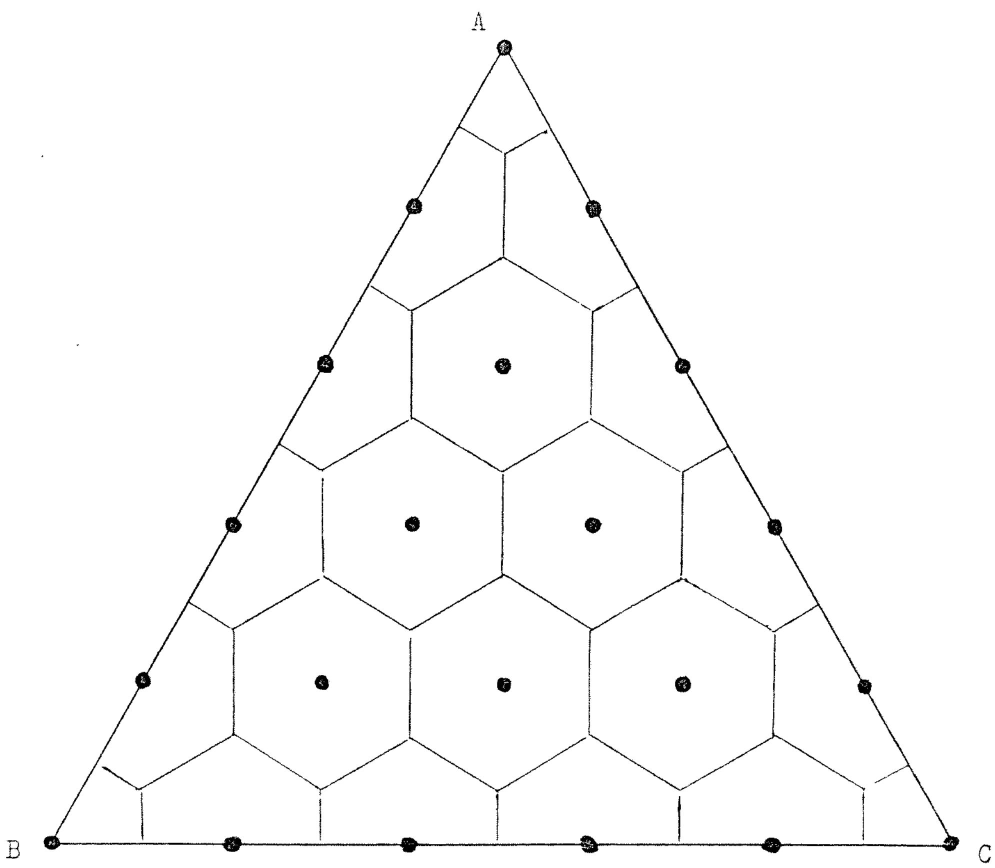
La deuxième remarque ne s'applique qu'au scrutin à la plus forte moyenne. En regardant la figure (la partition du triangle en hexagones irréguliers), on voit que la région contenant A descend loin vers le bas, entre les deux • qui sont dessous. Le calcul montre que, pour tout n, cette propriété a lieu dans toute la zone située au dessus de la ligne joignant les milieux de AB et AC. Ceci signifie que, après attribution des parties entières $E(p_in)$, une même liste peut encore recevoir plusieurs des sièges vacants, obtenant ainsi un nombre d'élèves strictement plus grand que la valeur approchée par excès $E(p_i n) + 1$. Ce phénomène est d'autant plus marqué que k est plus grand (mais on tombe malheureusement dans les cas où l'on ne peut plus faire de figure). S'il y a par exemple trois sièges à pourvoir et onze listes en présence, la liste 1 recueillant 24 % des voix et chacune des dix autres environ 7,6 %, la méthode de la plus forte moyenne donnera tous les sièges à la liste 1, bien qu'elle n'ait droit, avant arrondi, qu'à 0,72 élu. Sur cet exemple, on remarque aussi un autre effet de la méthode de plus forte moyenne : si les dix autres listes, au lieu de se présenter séparément, avaient formé une coalition contre la liste 1, réunissant 76 % des suffrages, elles auraient obtenu les trois sièges, et c'est la liste 1 qui, cette fois-ci, n'en aurait eu aucun! Ce fait est général : à la plus forte moyenne, les regroupements de listes sont toujours avantageux, et l'éclatement d'une liste en plusieurs, toujours désavantageux (au sens large : ils peuvent être sans effet; en outre, nous sommes ici sous l'hypothèse, toute théorique, où ces divisions ou ralliements se font sans perte ni gain d'électorat). Au plus fort reste, en revanche, tout est possible : les regroupements peuvent, suivant les situations, se révéler bénéfiques, neutres ou nuisibles; mais de manière moins marquée.

Cette dernière remarque a trait à l'influence sur le résultat du scrutin du nombre n de sièges, à suffrages p_i constants. Pour la plus forte moyenne, tout se passe comme on s'y attend : si l'on remplace n par $n+1$, l'une des listes — précisément celle qui a la plus forte moyenne — se verra attribuer un siège de plus (ceci résulte de la remarque faite plus haut selon laquelle la répartition peut être effectuée à partir de $E(p_i r)$, r quelconque). Mais pour le plus fort reste les choses ne sont pas si simples. Reportons-nous à la figure en nid d'abeilles. La réunion des régions dont les • sont sur le côté BC est limitée au dessus par une ligne brisée L_n dont les sommets sont alternativement à la distance $1/(3n) et 2/(3n)$ de BC (l'unité étant la hauteur $BC((\sqrt{3})/2)$. Lorsqu'on augmente n de 1, ces valeurs varient peu; la nouvelle ligne L_{n+1} est à peu près dans la même bande. Mais, au voisinage du milieu de BC, elle a été décalée d'une demi-période (elle est donc en opposition de phase par rapport à L_n), puisque le milieu est un maximum pour n pair et un minimum pour n impair. Les deux lignes se croisent donc plusieurs fois, et on peut trouver des points qui sont à la fois au dessous de L_{n+1} et au dessus de L_n. Ces points représentent les cas où, en passant de n à $n+1$ sièges à pourvoir, on fait passer la liste 1 de un élu à zéro! Exemple :

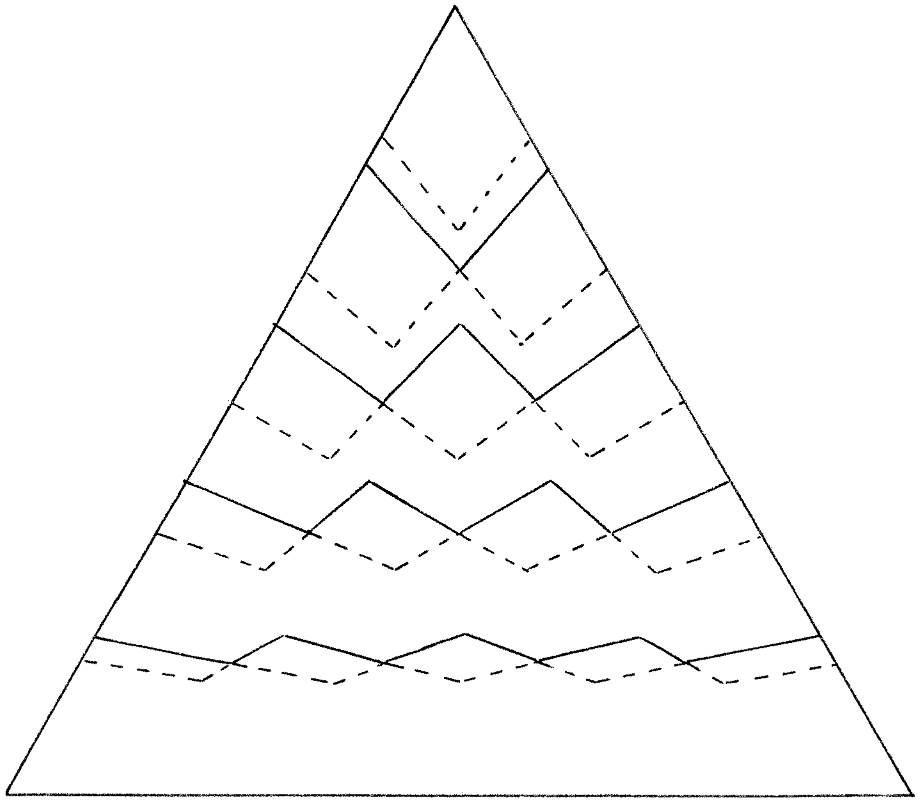
% des voix	liste 1 : 12 %	liste 2: 34 %	liste 3 : 54 %
4 sièges	0,48 $\rightarrow$1 élu	1,36 $\rightarrow$1 élu	2,16 $\rightarrow$2 élus
5 sièges	0,60 $\rightarrow$0 élu	1,70 $\rightarrow$2 élu	2,70 $\rightarrow$3 élus

La liste 1 a un élu s'il y a quatre sièges à pourvoir, et aucun s'il y en a cinq.

Ceci peut se représenter en superposant les deux figures obtenues pour $n = 5$ (en pointillés) et $n = 4$ (traits pleins), dans lesquelles on n'a conservé que l'information relative au nombre d'élus obtenu par la liste 1, faisant ainsi apparaître des bandes horizontales aux bords en zig-zag. Dans le bas du triangle, la ligne L_4 (en traits pleins) croise plusieurs fois L_5 (pointillés).



Pour la plus forte moyenne, au contraire, ces mêmes lignes ne se croisent plus :



En conclusion, je ne chercherai pas à choisir entre les deux méthodes; je laisse ce soin au lecteur, qui imaginera probablement d'autres arguments à mettre dans la balance. Retenons simplement que, par rapport au plus fort reste, la plus forte moyenne a une définition *a priori* tout aussi raisonnable; qu'elle rend plus difficile d'obtenir un élu et plus facile d'en obtenir beaucoup; et qu'elle souffre tout autant d'imperfections (même si ce ne sont pas les mêmes).

L'IREM DE STRASBOURG
PUBLIE UNE NOUVELLE BROCHURE :
"TRAVAUX PRATIQUES EN PREMIERES SCIENTIFIQUES"

Construire une suite de VALEURS APPROCHEES

avec EULER :

Soit, par exemple, $a=2$, c'est-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2 ; si on connoit déjà une valeur assez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

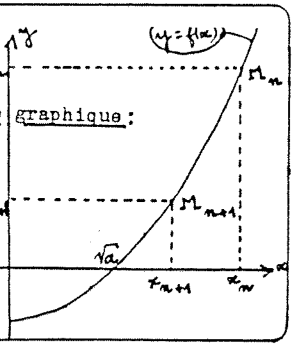
I.) $n=1$, on aura $x=\frac{3}{2}$,

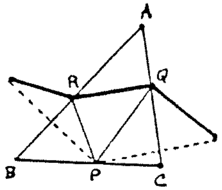
II.) $n=\frac{3}{2}$, on aura $x=\frac{17}{12}$,

III.) $n=\frac{17}{12}$, on aura $x=\frac{577}{408}$

ou :

Par lecture graphique :





Problème de FAGNANO

Comment choisir P, Q, R pour que PQR ait un périmètre minimum?

Professeurs de Premières Scientifiques, proposez à vos élèves, en Travaux Pratiques,

des **ACTIVITES**

- de difficultés et d'intérêt variés,
- rédigées pour eux,
- détaillées question par question sous forme de fiches de travail,
- "couvrant" pratiquement tout le programme,
- déjà expérimentées par une cinquantaine de professeurs dans leur classe.

Vous trouverez ces activités, et bien d'autres, dans la nouvelle brochure de l'**IREM de Strasbourg** :

"TRAVAUX PRATIQUES
EN PREMIERES SCIENTIFIQUES"

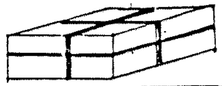
Elle est disponible dès maintenant au prix unitaire de **50 Frs.** La commande est à adresser à la Bibliothèque de l'IREM -10, rue du Général Zimmer 67084 Strasbourg Cedex, accompagnée si possible du règlement (à l'ordre de M. l'Agent Comptable de l'ULP IREM - CCP 5504644L036)

Aire et longueur d'une ARCHE DE CYCLOIDE :

Notion de limite et calculs trigonométriques

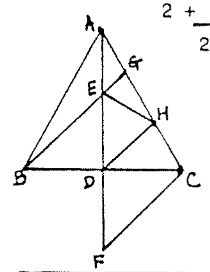
MAXI MINI

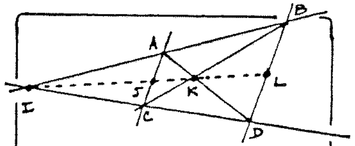
Peut-on ficeler cette boîte de 1dm^3 avec 12 dm de ficelle?



RATIONNELS ET IRRATIONNELS

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$





PLUSIEURS PISTES pour un même alignement

- calcul barycentrique
- transformations
- calcul vectoriel,

ou plusieurs méthodes "guidées" de résolution.

Concours Général 1876.
Philosophie.

Solution de M. Henri Bergson, élève du Lycée Fontanes, Lauréat du Concours (1er Prix).

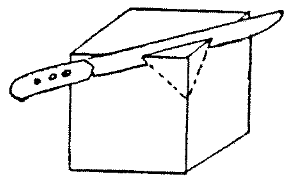
Nº 155. Dans un cube dont l'arête est a on mène une diagonale AA', puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet A.

1° On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d ;

2° On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan tend à se déplacer.

I.

Menons les trois droites A'B, A'C, BC. Il est clair que le plan A'BC est l'un des plans considérés, c'est-à-dire est perpendiculaire à AA'



TROISIEME DEGRE à travers les âges

ABU L GUD (Xème siècle) ramène le problème du calcul du côté du polygone régulier de 18 côtés à la résolution de :

$$x^3 + 1 = 3x$$

Mais quand, et comment, a-t-on su la résoudre?