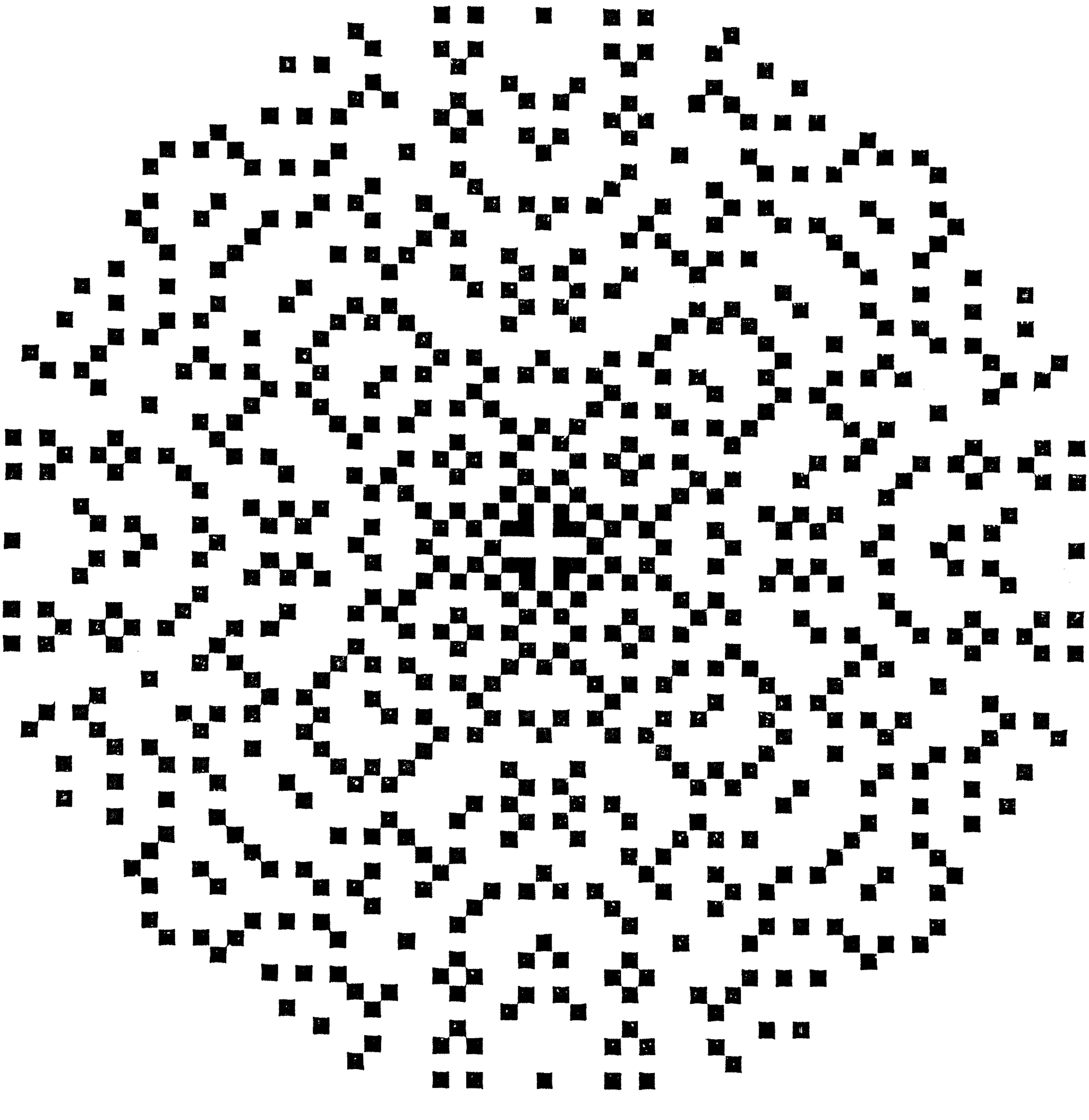
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n°45 – DÉCEMBRE 1986 ISSN 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

Représentation graphique des entiers premiers de GAUSS *de norme inférieure à* 2^{10} (voir le paragraphe 3 de l'article de R. SEROUL). Chaque entier premier $a + bi$ est représenté par un carré de côté unité centré au point d'affixe $a + bi$.

Faits pour (se) poser des questions

Au concours d'entrée à l'école normale de Colmar il y avait 20 places et 19 candidats; ordre fut donné au jury de ne pas mettre de note éliminatoire pour éviter des réductions de postes à l'E.N.

Il existe une terminale C de l'académie où le plus jeune élève, né en mars 71, a la moitié de l'âge du plus vieux, né en novembre 55.

De retour des U.S.A. , M. BEAUZAMY raconte son expérience d'enseignant dans une université américaine (voir "*La Gazette des Mathématiciens*", n°31 de juillet 86). Voici quelques données extraites de son article :

• Frais de scolarité pour la seule inscription en 1^er^ année de 1700 $ pour les petites universités d'Etat à plus de 10000 $ pour les plus célèbres universités privées.

• 35 % d'abandon au cours de la première année, mais moins d'un tiers de reçus dont 10 % peuvent envisager correctement une poursuite des études.

• Le niveau des deux premières années est à peu près celui d'une seconde et d'une première.

• Les mathématiques sont enseignées comme des recettes; aucune démonstration, aucune rigueur et les examens reposent essentiellement sur des Q.C.M. corrigés électroniquement.

• Evaluation des enseignants par les élèves.

Pour conclure, je cite M. BEAUZAMY : "*Je suis heureux que le système français ne repose pas sur les mêmes bases (...). Cet enseignement m'a laissé l'impression d'un invraisemblable gâchis*".

On apprend en économie que la mauvaise monnaie chasse la bonne. Qu'en est-il des diplômes?

La présence simultanée des points ci-dessus est pure coïncidence. Cela n'a, en particulier, rien à voir avec l'objectif gouvernemental de 80 % d'une classe d'âge au niveau du bac et des projets de recrutement et de formation des futurs maîtres à tous les niveaux de l'enseignement.

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N°45 – DÉCEMBRE 1986

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : J. LEFORT.

◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex.
Tél. : 88-41-63-00, poste 240

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)* :
80.–F pour l'Alsace
106.–F pour les autres départements
95.–F pour l'étranger.

◇ *Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.*

LES JOIES DE TEX

Evelyne LE GUYADER

Dans le souci constant d'améliorer la présentation de "*L'Ouvert*" , il fut décidé d'équiper l'I.R.E.M. d'un micro-ordinateur Victor VI. Afin de l'utiliser au mieux, je suivis un stage de 30 heures qui me permis seulement d'acquérir les rudiments de TEX. Au mois d'avril, il fallut se mettre à la saisie des articles destinés au numéro de rentrée.

C'est à ce moment que commencèrent les tâtonnements décourageants, suivis de victoires successives sur la machine et le système. Avec l'aide indispensable et fructueuse de Monsieur SEROUL, nous parvenions enfin, après bien des déboires, à *boucler* le numéro précédent.

Pour définir TEX en quelques mots : c'est compliqué, logique (presque toujours), tout est prévu, les signes mathématiques et d'autres aussi, que vous allez découvrir peu à peu, les changements de police de caractères, leur taille. La **grande difficulté** est qu'au moment de la saisie, **il est impossible de savoir à quel endroit de la feuille imprimée on se trouve** (en haut, au milieu, ..., à gauche, à droite ...). Imaginez la complexité pour des articles aussi variés que ceux que nous vous soumettons! **TEX a été créé pour les formules de mathématiques** mais les nombreuses figures inclues dans nos articles nécessitent un codage rigoureux; ne parlons pas des tableaux.

Jugez-en vous même à l'aide des quelques passages de "*textes-sources*" suivants correspondant au n°44 :

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite) 4. RENOUVEAU HEURISTIQUE *vers une géométrie analytique, sans axes ni coordonnées*	
SALMON (1848 à 1862)	Flexibilité dans l'emploi des nouveaux symboles : virtuosité heuristique.
BOULIGAND (1924)	" Géométrie vectorielle "
XX^{e}siècle	Algèbre linéaire

$ax^2 = bx$ est écrit *les carrés égalent les choses,*
$ax^2 = c$ est écrit *les carrés égalent les nombres,*

On pose $X = y^2$. Alors $X = \sqrt{2} - 1$ puis $y = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.
Donc $(10 - x)/x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.
Une méthode de résolution directe conduirait ensuite à

$$x = \frac{10}{1 + \sqrt{\sqrt{2} - 1}} \simeq 6,0842$$

mais la division par un irrationnel biquadratique est difficile (mais connue).
Par souci pédagogique il termine de la façon suivante :

$$\left(\frac{10 - x}{x}\right)^2 = \sqrt{2} - 1$$

pour se ramener à une équation du 2^{e} degré.

Tableau de la page 23 :

```
\setbox1=\vtop{\hsize 3cm\eightpoint\baselineskip 12pt\parindent 0cm
SALMON\par
({\oldstyle1848} à {\oldstyle1862})\par
BOULIGAND ({\oldstyle1924})\par
XX\emini siècle}

\setbox2=\vtop{\hsize 6.5cm\eightpoint\baselineskip 12pt\parindent 0cm
Flexibilité dans l'emploi des nouveaux
symboles : virtuosité heuristique.\par
" Géométrie vectorielle "\par
Algèbre linéaire}

\setbox1=\hbox{\box1\box2}

  ⊏⊏\entourer{\vbox{\hsize 9.5cm\parindent 0pt\eightpoint\baselineskip 12pt
\§
\centerline{CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)}
\centerline{4. RENOUVEAU HEURISTIQUE}
\§
\centerline{«vers une géométrie analytique»,}
\centerline{«sans axes ni coordonnées»}
\§\§
\box1}}⊐⊐
```

Formule de la page 26 :

```
⊏⊏\vbox{\halign{⊏#⊐&#&#\cr
ax↑2=bx& \quad est écrit \quad \hfil&
«les carrés égalent les choses,»\hfil\cr
\noalign{\vskip 3pt}
ax↑2=c& \quad est écrit \quad \hfil&
«les carrés égalent les nombres,»\hfil\cr}}⊐⊐
```

Formules de la page 27 :

```
\§
On pose  ⊏X=y↑2⊐. Alors ⊏X=√2-1⊐ puis ⊏y=√{√2-1}⊐.

\§
Donc ⊏(10-x)/x=√{√2-1}⊐.

\§
Une méthode de résolution directe conduirait ensuite à

  ⊏⊏x={10%{1+√{√2-1}}}\simeq 6,0842⊐⊐

\noindent
mais la division par un irrationnel biquadratique est
difficile (mais connue). Par souci pédagogique il termine
de la façon suivante :

  ⊏⊏\left( {10-x}%x \right) ↑2=√2-1⊐⊐
pour se ramener à une équation du 2\emini~degré.
```

E. LE GUYADER

LE SCRUTIN PROPORTIONNEL :

PLUS FORT RESTE OU PLUS FORTE MOYENNE?

Michel EMERY

.
.
.

% des voix	liste 1 : 12 %	liste 2: 34 %	liste 3 : 54 %
4 sièges	0,48 →1 élu	1,36 →1 élu	2,16 →2 élus
5 sièges	0,60 →0 élu	1,70 →2 élu	2,70 →3 élus

Nous avons la possibilité, en début de fichier, de définir des *macros*. Ceci nous évite par la suite de répéter des formules longues qui apparaissent souvent :

Début de fichier (article de Mr EMERY) :

```
                                   \input a4star
\pageno 34\overfullrule 0pt
\auteurcourant{\eightpoint M. EMERY}
\titrecourant{\eightpoint LE SCRUTIN PROPORTIONNEL}
\footnote{}{\copyright\ L'OUVERT ▶44◀ ({\oldstyle1986})\strut}

\centerline{▶LE SCRUTIN PROPORTIONNEL :◀}
\vskip 10pt
\centerline{▶PLUS FORT RESTE OU PLUS FORTE MOYENNE ?◀}
\vskip 20pt
\centerline{Michel \pd EMERY }
\vskip 30pt\noindent
\parindent 0pt
\def\0{\vskip 5pt\noindent}
\def\9{\bullet}
\def\7{\raise 3pt\hbox{\vrule height 2pt depth 2pt}}
\def\tt#1!{\raise 3pt\vbox{\hrule width #1 cm}}
\def\tv{\vrule height 12pt depth 5pt}
\def\fl{[\rightarrow]}
```

Ce qui nous permet de composer le bas de la page 38 :

```
  [[\9\tt 1.2!\7\tt .4!\9\tt 1!\7\tt .6!\9\tt .8!\7\tt .8!\9
\tt .6!\7\tt 1!\9\tt .4!\7\tt 1.2!\9]]
```

et le haut de la page 47 :

```
  [[\vbox{\offinterlineskip\halign{
\eightpoint #\kern 3pt &\tv\kern 3pt #\kern 3pt
                        &\tv\kern 3pt #\kern 3pt
                        &\tv\kern 3pt #\cr
\% des voix & liste 1 : 12 \%  & liste 2: 34 \%   & liste 3 : 54 \%\cr
4 sièges     & 0,48 \fl 1 élu & 1,36 \fl 1 élu & 2,16 \fl 2 élus\cr
5 sièges     & 0,60 \fl 0 élu & 1,70 \fl 2 élu & 2,70 \fl 3 élus\cr}}]]
```

Mais en fin de compte, quelle qualité d'impression! J'ajoute que chaque semaine nous apprenons d'autres astuces; nous ne sommes pas au bout de nos possibilités car TEX a encore beaucoup de secrets à révéler.

Pour terminer, nous insistons auprès des auteurs d'articles futurs sur la nécessité de nous fournir un manuscrit, ou mieux, un texte dactylographié, le plus clair possible. Merci de votre compréhension.

PREMIERS PAS VERS UNE
THÉORIE PARABOLIQUE DES NOMBRES

Yves PIRAT

Peut-on être mathématicien amateur? En astronomie, en botanique, en zoologie ... la contribution des amateurs est fort appréciée des professionnels. Mais les outils nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques sont tellement sophistiqués qu'on ne voit pas comment pourrait exister un mathématicien amateur. Quelques rares domaines se prêtent mieux à l'amateurisme : on connaît LINDGREN, spécialiste des puzzles géométriques et employé des postes australiennes.

Mais n'est-il pas plaisant de redécouvrir des résultats peu connus. L'article qui suit retrouve *par une autre voie* une méthode de factorisation inventée par FERMAT. L'auteur, Monsieur Y. PIRAT, s'il a un bac mathélem depuis 1945 a eu une activité professionnelle qui l'a bien éloigné des mathématiques.

Peut-être est-ce ça l'amateurisme en mathématiques? Pouvoir enthousiasmer son entourage sur des sujets classiques mais peu répandus. Faute de participer directement au progrès de notre discipline c'est un moyen sûr d'encourager son développement. (N.D.L.R.)

Plusieurs passages de l'ouvrage de WARUSFEL, "*Les Nombres et leurs Mystères* ", m'avaient particulièrement intrigué, et celui-ci entre autres : "*Nous savons bien quelle est la règle qui permet de passer d'un carré n^2 au carré suivant $(n+1)^2$: les écarts entre deux carrés successifs sont en progression arithmétique. S'il y avait quelque chose de tel pour la recherche qui nous occupe (= les nombres premiers), nous serions très avancés dans cette théorie* ". Je dois avouer que je ne m'étais jamais penché sur les *mystères* que l'on rencontre à chaque pas lorsque l'on s'engage sur le chemin de cette recherche. D'ailleurs, j'ignorais même que les nombres premiers suscitaient encore tant de problèmes délicats. Et mon étonnement fut encore plus vif lorsque je lus que certains spécialistes semblaient admettre que le hasard avait présidé à la répartition des nombres premiers dans le champ des entiers!

Curieux de nature, je décidai de m'aventurer un moment dans ce domaine qui n'est pas le mien, et ce malgré la mise en garde de WARUSFEL, laquelle aurait dû refroidir mon enthousiasme : "*Les armes nécessaires pour apprendre quelque chose sur les nombres premiers sont de taille formidable* ". Certes, mais qui peut affirmer que toutes les ressources offertes par les armes modestes ont bien été épuisées?...

La première figure que je dessinai — un peu pour m'amuser d'ailleurs! — fut la bonne, mais ...je l'ignorais !... J'eus en effet l'idée de reporter les 150 premiers nombres impairs dans un système d'axes selon le procédé suivant :

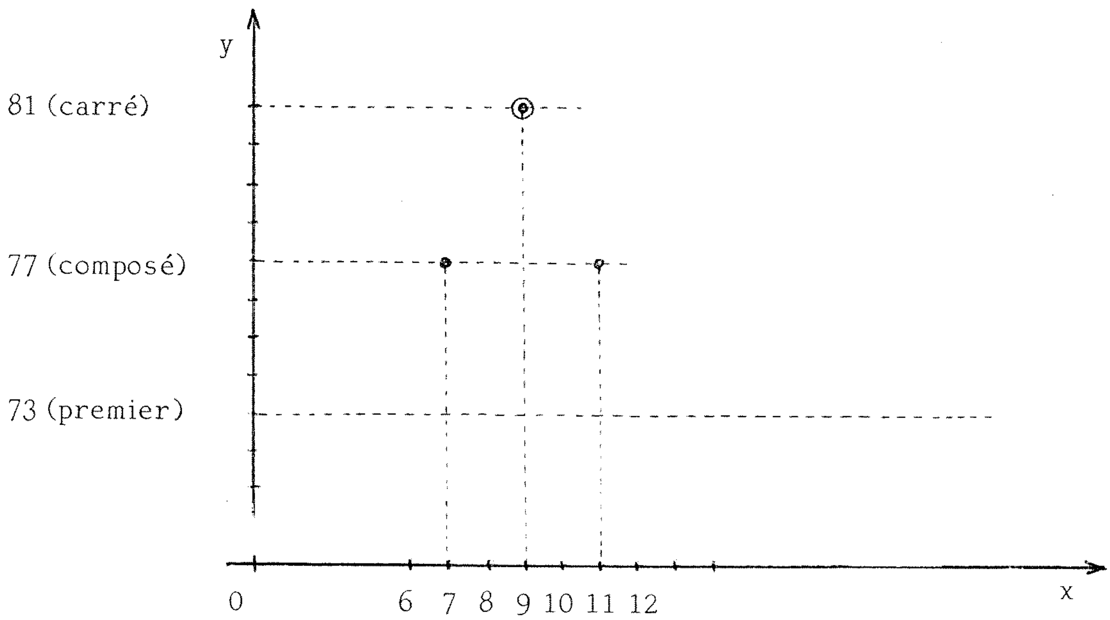


Figure 1

Immédiatement, j'eus l'impression qu'une famille nombreuse de paraboles s'emboîtait comme des poupées gigognes, chaque parabole ayant pour sommet un point matérialisant un carré. Quelques coups de crayon rouge confirmèrent l'exactitude de mon impression : il s'agissait bel et bien de paraboles, toutes identiques (voir *figure 2*).

Il ne fallut pas longtemps pour formuler leur équation, $Y = -X^2 + 2bX$, ou bien $Y = X(2b - X)$. Chaque sommet a pour coordonnées (b, b^2). En outre, si l'on respecte la condition $b \geq X$ (impair) ≥ 3, qui élimine les nombres pairs et les racines $X_1 = 1$ et $X_2 = N$, Y représente exclusivement *TOUS* les nombres entiers impairs *NON PREMIERS.*

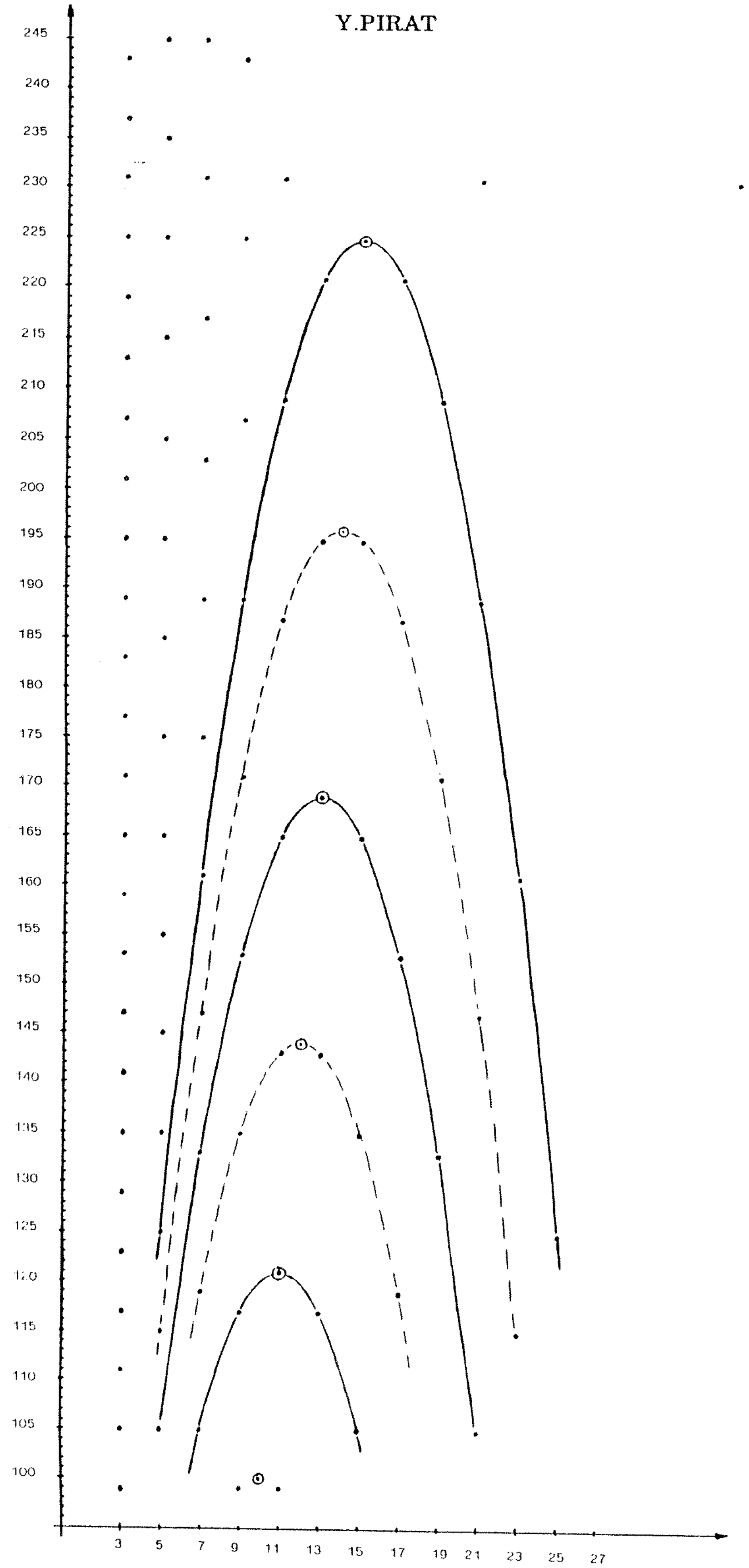
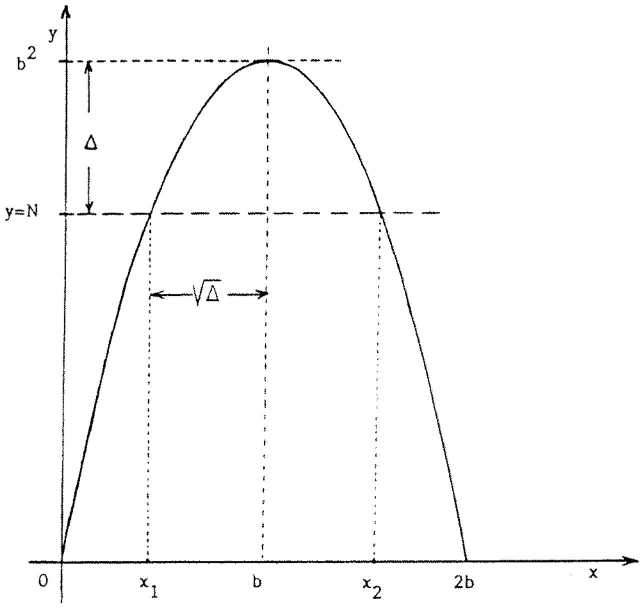

Y.PIRAT
245
240
235
230
225
220
215
210
205
200
195
190
185
180
175
170
165
160
155
150
145
140
135
130
125
120
115
110
105
100
3
5
7
9
11
13
15
17
19
21
23
25
27

Figure 2

La *figure 3* montre l'agencement théorique de chaque parabole.



$$y(=N) = -x^2 + 2bx$$
$$N = b^2 - \Delta$$

Figure 3

Il est dès lors possible de classer, en fonction de la valeur de $\Delta(= b^2 - N)$, les trois catégories de nombres entiers impairs :

Si Δ est un carré, nous avons deux racines distinctes ($N = X_1 \times X_2 =$ nombre composé) ;

Si Δ est nul, nous avons une racine double ($X_1 = X_2$; N est donc un carré, sommet d'une parabole) ;

Si Δ n'est ni un carré, ni nul, pour toutes les valeurs possibles de b, il n'existe aucune racine entière, et N est premier.

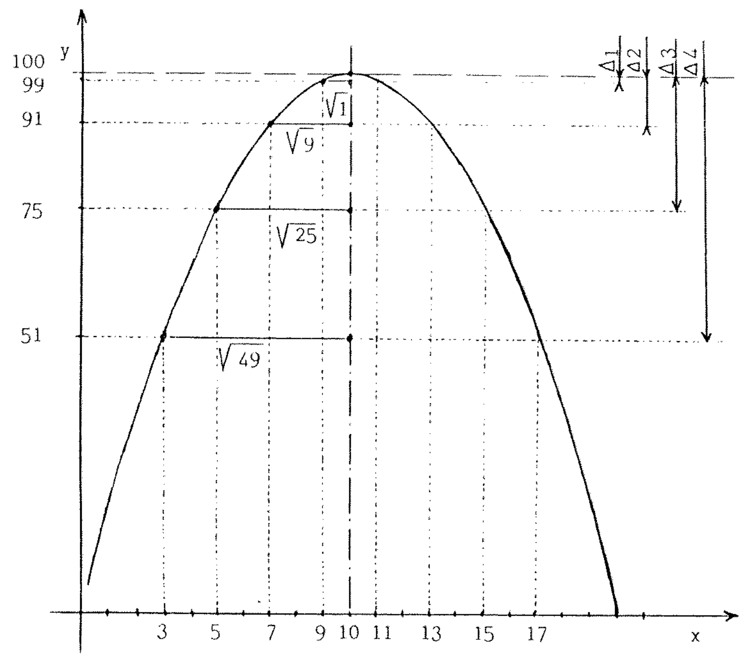
La *figure 1* donne un exemple pour chaque cas.

Comme on l'a facilement compris, chaque nombre non premier appartient à une ou plusieurs paraboles, et la différence entre le sommet et le nombre est égale à Δ, donc à un carré (naturellement, les N carrés sont exclus puisqu'ils sont sommets). Ainsi se trouve matérialisée la fameuse *différence de carrés* : $N = (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ (*Figure 4*).

Voyons brièvement l'exemple du nombre 105, choisi en raison du fait qu'il est susceptible de plusieurs factorisations (3×35, 5×21 et 7×15) et qu'il appartient conséquemment à 3 paraboles différentes dont les sommets sont respectivement

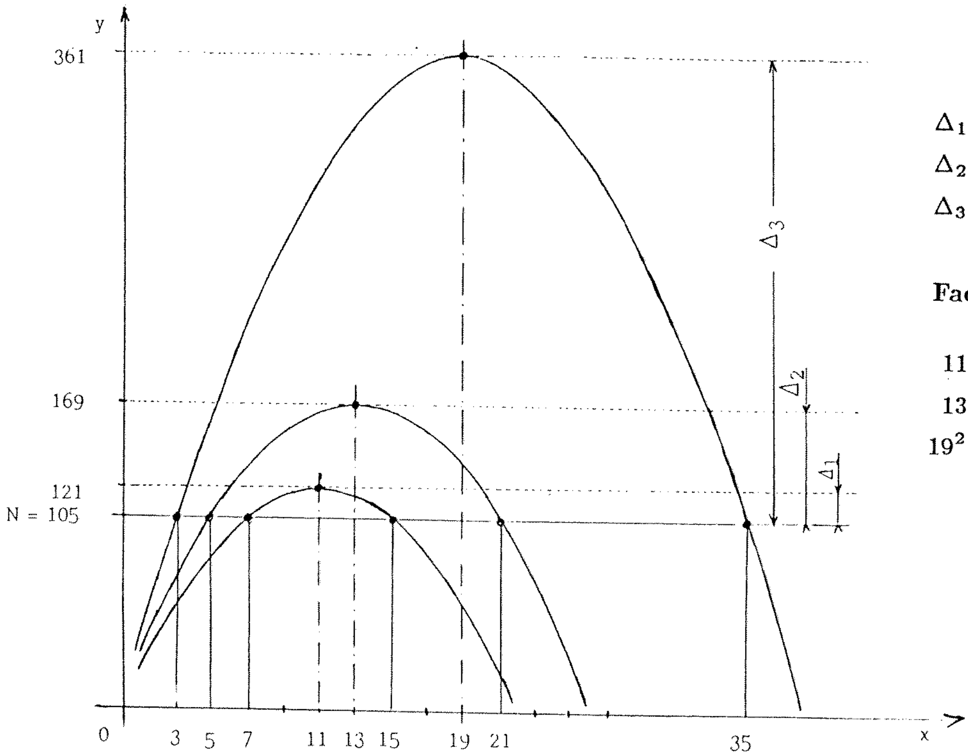
$$\frac{3+35}{2} = 19\ , \quad \frac{5+21}{2} = 13 \quad \text{et} \quad \frac{7+15}{2} = 11 \qquad (\textit{figure5}).$$

Jusqu'à présent, et à ma connaissance, personne n'a jamais réussi à *sortir* de la définition primaire du nombre premier, à savoir qu'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.



$\Delta_1 = 1^2 = 1$
$\Delta_2 = 3^2 = 9$
$\Delta_3 = 5^2 = 25$
$\Delta_4 = 7^2 = 49$

Figure 4



$\Delta_1 = 121 - 105 = 16 \rightarrow 4^2$
$\Delta_2 = 169 - 105 = 64 \rightarrow 8^2$
$\Delta_3 = 361 - 105 = 256 \rightarrow 16^2$

Factorisation :

$$11^2 - 4^2 = (11 + 4)(11 - 4) = 15 \times 7$$
$$13^2 - 8^2 = (13 + 8)(13 - 8) = 21 \times 5$$
$$19^2 - 16^2 = (19 + 16)(19 - 16) = 35 \times 3$$

Figure 5

Puis-je me permettre de proposer de considérer désormais comme nombre premier tout nombre pour lequel l'équation $Y = -X^2 + 2bX$ n'admet aucune solution entière? Mon *tout petit niveau mathématique* me conduit peut-être à ne proposer qu'une ineptie, mais j'ai l'impression que cette façon de voir les nombres premiers fait plus sérieux que la *divisibilité* enseignée aux potaches!

Le problème qui se pose maintenant peut s'énoncer en ces termes : *Sachant que la différence entre le sommet d'une parabole P et un nombre composé NC, dont les facteurs sont des racines de P, est toujours un carré ($= \Delta$), il suffit de rechercher si un nombre donné appartient ou non à une parabole pour en déduire son caractère, respectivement non-premier ou premier.*

Pour l'instant, précisons simplement que si l'on ajoute à N soit des carrés successifs (à partir de 1^2), soit les termes de la progression 1,3,5,7,..., et que l'on obtienne un carré à un moment donné, N n'est pas premier. Exemple :

$65527 + 1^2$ (pas carré), $65527 + 2^2$ (pas carré), $65527 + 3^2 = 65536$, carré de 256; donc 65527 n'est pas premier et ses facteurs sont $256 + 3$ et $256 - 3$; sa parabole a pour sommet la moitié de la somme de ses facteurs, soit 256 (confirmation); Δ égale $256^2 - 65527 = 3^2$.

$65527+1$ (pas carré), $65528 + 3$ (pas carré), $65531 + 5 = 65536$ (carré de 256).

Dans les deux cas le coût est strictement le même. En outre, il peut être très élevé si le carré le plus fort (sommet de la parabole) est très éloigné de N (cf. l'algorithme de FERMAT).

Deux questions se posent alors : Comment améliorer ce coût? Quelles sont les limites de la recherche?

LIMITES : Ajouter des carrés ou des termes de progression, c'est bien joli, mais, comme en toute chose, il faut savoir s'arrêter à temps! Les lecteurs — beaucoup plus compétents que moi! — n'ignorent pas qu'en matière de différence de carrés la limite est :

$$\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 = N$$

au-delà de laquelle nous obtenons des résultats plus grands que N.

Or, mes paraboles permettent de fixer une limite autrement plus intéressante que la précédente, et si cela ne constitue que leur seul intérêt ma recherche n'aura pas été inutile.

En effet, si nous traçons la parabole P_s à laquelle appartient le multiple de 3 immédiatement inférieur à N, nous pouvons affirmer que la parabole-limite supérieure de N a $(s - 1)$ pour sommet (voir *fig. 6*). Quant à la parabole-limite inférieure, P_i, elle a pour sommet le carré immédiatement supérieur à N [1]

[1] Pour trouver la limite avec le multiple de 3, j'utilise un *truc* personnel empirique : j'ajoute 9 à N et je divise la somme par 6. J'ignore si ce procédé est connu des spécialistes!

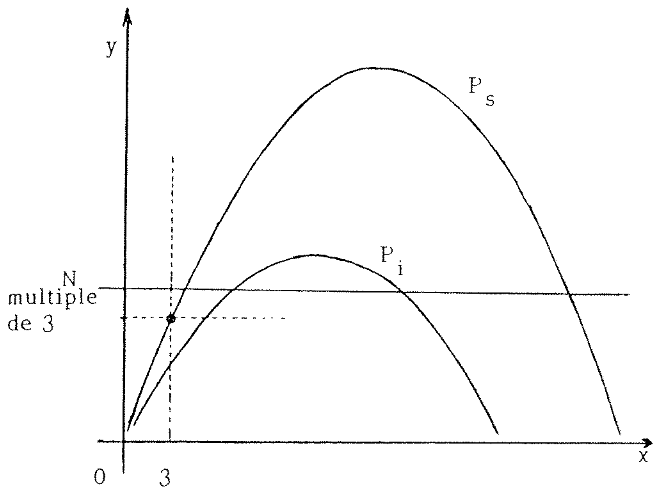


Figure 6

Si N n'est pas premier, sa parabole est impérativement située entre P_s et P_{i-1}. Si, parvenu au stade P_{s-1}, on n'a pas rencontré de carré, N est premier et il est inutile de poursuivre au-delà.

Il est très facile d'abaisser la limite supérieure (P_s), et de manière appréciable de surcroît, en éliminant par méthode naïve les petits facteurs (7, 11 et 13 par exemple), et de calculer le sommet de la parabole à laquelle appartient le multiple de 17 (par exemple) immédiatement inférieur à N.

DIMINUTION DU COÛT

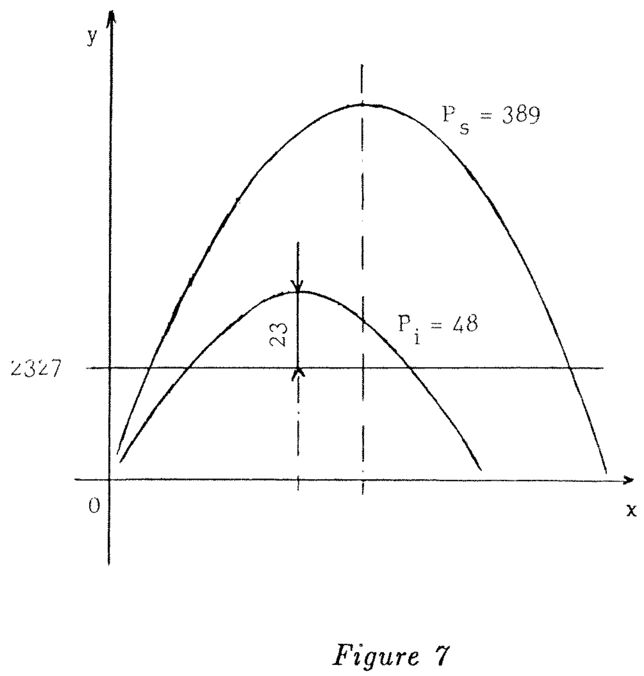


Figure 7

Tous les lecteurs comprendront sans autres explications que l'on peut atteindre le sommet de la parabole de N (si celui-ci n'est pas premier) en parcourant successivement tous les sommets situés entre N et cette parabole. Prenons l'exemple de $2327 (= 13 \times 179)$ (*fig. 7*).

Les additions successives des carrés ou des termes de la progression 1,3,5,7,..., nécessitent 83 opérations qui nous mènent à $2327 + 83^2 = 9216$, carré de 96, sommet de la parabole du nombre donné. Les additions successives des sommets permettent de gagner déjà un temps appréciable puisque 48 opérations seront nécessaires pour parvenir à 6889, carré de 83 ($= \Delta$) :

$$23 + (48 + 49) + (49 + 50) + \cdots (94 + 95) + (95 + 96) = 6889.$$

Le dernier sommet ajouté, 96, est celui de la parabole à laquelle appartient 2327; preuve : $96^2 - 83^2 = 2327$.

Mais on peut également procéder par soustraction en partant du premier sommet (parabole 48), et nous allons voir que c'est la méthode la plus rapide. Pour l'instant, donnons cet exemple :

$$\begin{gathered} 48^2 - 2327 (= \text{pas carré}) \\ 49^2 - 23287 (= \text{pas carré}) \ldots \\ 96^2 - 2327 = 6889 (= 83^2 = \Delta). \end{gathered}$$

Dans les deux derniers procédés, le coût est identique.

En jouant sur les chiffres finals, il est possible de réduire très sensiblement le nombre des opérations. En effet, nous savons que les nombres non premiers terminés par 7 sont les produits de $\ldots 7 \times \ldots 1$ ou de $\ldots 9 \times \ldots 3$, d'où l'on tire : — pour N terminés par 07, 27, 47, 67 et 87, les sommets des paraboles sont des nombres terminés par 4 ou 6 (et b^2 par 6 et Δ par 9) ; — pour N terminés par 17, 37, 57, 77 et 97, les sommets des paraboles sont des nombres terminés par 1 ou 9 (et b^2 par 1 et Δ par 4).

Dans le cas de 2327, nous savons donc que sa parabole (s'il n'est pas premier) a pour sommet un nombre terminé par 4 ou 6, ce qui limite les recherches à :

$$54^2 - 2327, 56^2 - 2327, 64^2 - 2327, \ldots, 94^2 - 2327, 96^2 - 2327,$$

soit 10 opérations, à raison de 2 par dizaine.

Vous pouvez ainsi vérifier que la factorisation de 956506017 réclame 640 soustractions par le procédé précédent ($b^2 - \Delta = 34129^2 - 14432^2$), au lieu de 3000 et quelques opérations.

Mes connaissances en mathématiques sont beaucoup trop restreintes pour explorer davantage ce champ parabolique. D'ailleurs, j'ignore si son sol est fertile ou stérile! Je laisse le soin à ceux qui savent cultiver la mathématique de haut niveau de semer et de récolter.

Quoi qu'il en soit, je me suis bien diverti ...entre deux records du monde de mots croisés (où je suis beaucoup plus à l'aise). Mais, entre nous, il n'y a pas d'abîme insondable entre l'étude que je viens de vous soumettre et les grilles que je soumets à mes lecteurs : une définition de mots croisés n'est-elle pas, elle aussi, une parabole? ...

FORMULES à la MACHIN

Raymond SEROUL

1. Introduction.

La chasse aux décimales du nombre π n'a vraiment pris son essor qu'à partir du moment où l'on a disposé de formulles telles que :

$$\begin{aligned}
\pi/4 &= 4\,\mathrm{Arctg}\,(1/5) - \mathrm{Arctg}\,(1/239) && \text{(John MACHIN 1706)}\\
&= \mathrm{Arctg}\,(1/2) + \mathrm{Arctg}\,(1/3) && \text{(HUTTON 1776)}\\
&= 2\,\mathrm{Arctg}\,(1/3) + \mathrm{Arctg}\,(1/7) && \text{(CLAUSEN 1847)}\\
&= \mathrm{Arctg}\,(1/2) + \mathrm{Arctg}\,(1/5) + \mathrm{Arctg}\,(1/8) && \text{(DASE 1884)}
\end{aligned}$$

En 1974 (*), on a calculé un million de décimales de π en utilisant la formule suivante (GAUSS)

$$\pi/4 = 12\,\mathrm{Arctg}\,(1/18) + 8\,\mathrm{Arctg}\,(1/57) - 5\,\mathrm{Arctg}\,(1/239).$$

Ce calcul a ensuite été vérifié à l'aide de la formule dûe à STÖRMER (1896)

$$\pi/4 = 6\,\mathrm{Arctg}\,(1/8) + 2\,\mathrm{Arctg}\,(1/57) + \mathrm{Arctg}\,(1/239).$$

Sachant que pour $x > 0$ on a l'égalité

$$\mathrm{Arctg}\,(1/x) = \pi/2 - \mathrm{Arctg}\,(x) = 2\,\mathrm{Arctg}\,(1) - \mathrm{Arctg}\,(x),$$

les formules précédentes se réécrivent sous la forme plus sympathique

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctg}\,(3) &= 3\,\mathrm{Arctg}\,(1) - \mathrm{Arctg}\,(2) && \text{(HUTTON)}\\
\mathrm{Arctg}\,(7) &= \mathrm{Arctg}\,(1) + 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) && \text{(CLAUSEN)}\\
\mathrm{Arctg}\,(8) &= 5\,\mathrm{Arctg}\,(1) - 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) - \mathrm{Arctg}\,(5) && \text{(DASE)}\\
\mathrm{Arctg}\,(239) &= -5\,\mathrm{Arctg}\,(1) + 4\,\mathrm{Arctg}\,(5) && \text{(MACHIN)}\\
&= 17\,\mathrm{Arctg}\,(1) - 6\,\mathrm{Arctg}\,(8) - 2\,\mathrm{Arctg}\,(57) && \text{(STÖRMER).}
\end{aligned}$$

(*) En 1979, il était question d'un projet de calcul avec 20 millions de chiffres binaires. Mais la technique de calcul est désormais basée sur un autre concept (formule de BRENT-SALAMIN).

En l'honneur du premier découvreur d'une telle formule, appelons formule *à la* MACHIN une égalité de la forme :

$$\text{(M)} \qquad \operatorname{Arctg}(n) = c_1 \operatorname{Arctg}(1) + c_2 \operatorname{Arctg}(2) + \cdots + c_{n-1} \operatorname{Arctg}(n-1)$$

où les c_i sont des entiers.

Remarque : la formule de GAUSS

$$\operatorname{Arctg}(239) = -39/5 \operatorname{Arctg}(1) + 12/5 \operatorname{Arctg}(18) + 8/5 \operatorname{Arctg}(57)$$

n'est pas une formule *à la* MACHIN selon notre définition, car les c_i n'y sont pas entiers.

Lorsqu'il est possible de trouver une formule *à la* MACHIN pour l'entier n, on dit que n est décomposable. La caractérisation de ces entiers a été obtenue en 1949 par John TODD :

Théorème 1. — *Un entier $n \leq 2$ est décomposable si et seulement s'il vérifie la condition* (T) *suivante : tout diviseur premier de $1+n^2$ est aussi un diviseur d'un entier de la forme $1+d^2$, avec $0 < d < n$.*

Les premiers entiers décomposables sont donc 3, 7, 8, 13, 18, 21, 30, ...

En outre, J.TODD est capable de fabriquer, pour chaque entier décomposable, une formule *à la* MACHIN. C'est ce travail que je me propose d'exposer ici. (On trouvera une liste des 30 premières formules *à la* MACHIN à la fin de cet article.)

2. La condition (T) est nécessaire.

Soit $n \geq 2$ un entier décomposable et qui vérifie donc (M). Posons

$$[1+i]^{c_1}[1+2i]^{c_2}\dots[1+(n-1)i]^{c_{n-1}} = [a+ib]/[u+iv]$$

($a+bi$ recueille les facteurs correspondants à $c_k > 0$ et $u+vi$ ceux correspondant à $c_k < 0$). L'idée de base, déjà connue de GAUSS, consiste à remarquer que l'argument de $1+in$ est précisément $\operatorname{Arctg}(n)$. Par conséquent, les nombres complexes $1+in$ et $[a+ib]/[u+iv]$ ont même argument. Aussi leur quotient

$$[a+ib]/[u+iv][1+in] = [A+iB]/[u^2+v^2][1+n^2]$$

est-il un nombre réel. Cela exige $B=0$, d'où $A=(au+bv)(1+n^2)$. On a donc

$$[a+ib]/[u+iv][1+in] = [au+bv]/[u^2+v^2]$$

soit encore

$$[u^2+v^2][a+bi] = [au+bv][u+vi][1+ni].$$

En passant aux modules, on trouve $[u^2+v^2][a^2+b^2] = [au+bv]^2[1+n^2]$, ce qui donne

$$[1+1^2]^{|c_1|}[1+2^2]^{|c_2|}\dots[1+(n-1)^2]^{|c_{n-1}|}=a^2[1+n^2].$$

La condition (T) est ainsi vérifiée.

3. L'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Il nous faut maintenant faire plus ample connaissance avec les nombres complexes de la forme $x+iy$ avec $x,y\in\mathbf{Z}$. On note cet ensemble $\mathbf{Z}[i]$. Il s'agit manifestement d'un anneau commutatif et intègre, appelé anneau des entiers de Gauss en hommage à leur créateur qui les introduisit vers 1830.

Si $\alpha=x+iy$ est un entier de Gauss, on pose

$$N(\alpha)=|\alpha|^2=x^2+y^2$$

et on dit que $N(\alpha)$ est la *norme* de α (à ne pas confondre avec la *norme euclidienne* qui est aussi le module de α). Il est clair que $N(\alpha\beta)=N(\alpha)\ N(\beta)$.

Pour mieux illustrer les propriétés de $\mathbf{Z}[i]$, nous allons les mettre en parallèle avec les propriétés correspondantes et bien connues des anneaux $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}[X]$ (polynômes à coefficients réels).

Tout d'abord, on dit que e est une *unité* d'un anneau A s'il existe $e'\in A$ tel que l'on ait $ee'=1$. Les unités de $\mathbf{Z}$ sont donc les entiers 1 et -1. Quant à celles de $\mathbf{R}[X]$, ce sont les polynômes réduits à une constante non nulle.

Si ϵ est une unité de $\mathbf{Z}[i]$, on aura $\epsilon\epsilon'=1$ d'où $N(\epsilon)N(\epsilon')=1$. On déduit immédiatement de cela que les unités de $\mathbf{Z}[i]$ sont caractérisées par la condition $N(\epsilon)=1$ et que ce sont les entiers de Gauss 1, -1, i, $-i$.
Lorsque l'on a $\alpha=\beta\epsilon$, avec ϵ unité, on dit que α et β sont *associés*. Les associés de $x+iy$ sont donc $\pm(x=iy)$ et $\pm(y-ix)$.

Soient a,b deux éléments de $\mathbf{Z}$, avec $b\neq 0$. On sait qu'il existe des entiers q et r vérifiant $a=bq+r$ et $|r|<|b|$. De même, si $a(X)$ et $b(X)$ sont deux polynômes, avec $\text{degré}\,b(X)>0$, on sait trouver deux polynômes $q(X)$ et $r(X)$ tels que $a(X)=b(X)\ q(X)+r(X)$ et $\text{degré}\,r(X)<\text{degré}\,b(X)$. On dit que les anneaux $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}[X]$ sont munis d'une *division euclidienne*.

Nous allons constater qu'un phénomène analogue se produit dans $\mathbf{Z}[i]$.
Soient α et β deux entiers de Gauss, avec $\beta\neq 0$. Posons $x+iy=\alpha/\beta$ puis $\gamma=\mathrm{E}\,(x)+i\,\mathrm{E}\,(y)$ (parties entières, x et y ne sont que rationnels ici). Il est immédiat que l'on a

$$\alpha=\beta\gamma+\rho\quad\text{et}\quad N(\rho)<N(\beta).$$

Cela montre que l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ est, lui aussi, muni d'une division euclidienne. (L'analogue de la fonction norme est la valeur absolue dans le cas de $\mathbf{Z}$ et le degré dans celui de $\mathbf{R}[X]$.)

Lorsque l'on dispose d'un anneau euclidien, on peut y faire de l'arithmétique comme dans $\mathbf{Z}$. La notion qui correspond à celle de nombre premier est celle d'élément *irréductible*. En utilisant la division euclidienne, on démontre comme on le fait pour $\mathbf{Z}$, que tout élément est un produit de facteurs irréductibles, et que cette décomposition est unique. Par exemple, on sait que tout polynôme non constant de $\mathbf{R}[X]$ est un produit de polynômes du premier degré et de polynômes du second degré n'ayant pas de racines réelles.

Voyons alors ce que donne cette théorie des anneaux euclidiens pour $\mathbf{Z}[i]$.

Théorème 2. — *Un entier de GAUSS est irréductible si et seulement si l'un de ses associés fait partie de la liste suivante*
(a) $1+i$,
(b) $a+bi$, *où* a^2+b^2 *est un nombre premier de* $\mathbf{Z}$ *de la forme* $4n+1$,
(c) p, *où* p *est un nombre premier de* $\mathbf{Z}$ *de la forme* $4n+3$.

Commentaires :
1) Un irréductible du type (b) est $5+42i$ puisque $1789 = 5^2+42^2$. Un irréductible du type (c) est 1979.

2) Si ω est un irréductible du type (a), sa norme est égale à 2. S'il est du type (b), sa norme $N(\omega)$ est un nombre premier de la forme $4n+1$. Si ω est du type (c), $N(\omega)$ est le carré d'un nombre premier de la forme $4n+3$. Le calcul de la norme d'un entier de GAUSS permet donc de tester facilement si l'on a affaire à un irréductible.

3) Les unités ± 1, $\pm i$ ne sont pas irréductibles par définition (1 n'est pas premier dans $\mathbf{Z}$).

4) Si $p \in \mathbf{Z}$ est un nombre premier (dans $\mathbf{Z}$), il n'est pas forcément irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$. C'est précisément tout l'intérêt des entiers de GAUSS que d'arriver à faire "éclater" en produits de facteurs certains nombres premiers. C'est aussi pour cette raison que l'on préfère utiliser la terminologie "élément irréductible".

Voici deux exemples de décomposition en facteurs irréductibles
$$5 = (1+2i)(1-2i) = (2+i)(2-i) \quad \text{et} \quad 1+57i = -(1+i)(1+2i)^3(3+2i).$$
On remarquera que nous avons donné deux décompositions de 5. Mais ces deux factorisations sont étroitement liées, car $2+i = i(1-2i)$ et $2-i = -i(1+2i)$.

Plus généralement, si $\xi = \omega_1 \ldots \omega_n$ est une décomposition de ξ en facteurs irréductibles, toutes les autres décompositions de ξ sont, à l'ordre près des facteurs, de la forme $\xi = \epsilon_1\omega_1 \ldots \epsilon_n\omega_n$, avec $\epsilon_1 \ldots \epsilon_n = 1$. C'est en ce sens que l'on parle de l'*unicité* de la décomposition en facteurs irréductibles.

6) Soit p un nombre premier de la forme $4n+1$. Peut-on avoir *deux* décompositions de p en une somme de deux carrés? Supposons que l'on ait $p = a^2+b^2 = c^2+d^2$, avec $a+ib$ irréductible. De l'égalité $(a+ib)(a-ib) = (c+id)(c-id)$, on déduit (quitte à changer d en $-d$) que $a+ib$ divise $c+id$. Nous avons donc $c+id = \epsilon(a+ib)$, puis, en passant aux normes, $p = N(\epsilon)p$. Ceci montre que ϵ est une unité. Autrement dit, la décomposition de p est unique et la liste des irréductibles de norme p est formée des huit entiers de GAUSS $\pm a \pm bi$ et $\pm b \pm ai$.

4. La condition (T) est suffisante.

4.1. Présentation de l'algorithme.

Soit $n \geq 2$ un entier qui vérifie la condition (T). L'idée de TODD est la suivante : il construit un algorithme qui détermine un entier $M \geq 1$ ainsi que des entiers w_i satisfaisant les conditions $|w_i| < n$ et

$$M(1+in) = \epsilon(1+iw_1)(1+iw_2)\dots(1+iw_t) \qquad (\epsilon \text{ unité}).$$

La comparaison des arguments fournit immédiatement une formule *à la* MACHIN. Soyons plus précis et considérons l'entier $n = 342$. Décomposons tout d'abord $1+342i$ en facteurs irréductibles

$$1+342i = (1+2i)(7+10i)(11-6i).$$

Choisissons un facteur irréductible qui ne soit pas de la forme $\pm 1 \pm wi$ ou $w \pm i$, par exemple $7+10i$. Nous avons l'égalité

$$(7+10i)(3+2i) = 1+44i.$$

Multiplions $1+342i$ par $(3+2i)(3-2i) = 13$, ce qui donne

$$13(1+342i) = (1+2i)(1+44i)(3-2i)(11-6i).$$

Réitérons ces opérations tant qu'il reste un facteur qui ne soit pas de la forme $\pm 1 + wi$ ou $w \pm i$. Nous obtenons par exemple

$$\begin{cases} (3-2i)(1-i) = 1-5i & (1-i)(1+i) = 2 \\ 2.13\,(1+342i) = (1+2i)(1+44i)(1-5i)(1+i)(11-6i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11-6i)(5-9i) = 1-129i & (5-9i)(5+9i) = 106 \\ 2.13.106\,(1+342i) = (1+2i)(1+44i)(1-5i)(1+i)(1-129i)(5+9i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5+9i)(2+1) = 1+23i & (2+i)(2-i) = 5 \\ 2.13.106.5\,(1+342i) = (1+2i)(1+44i)(1-5i)(1+i) \\ \qquad\qquad (1-129i)(1+23i)(2-i)\,. \end{cases}$$

Tous calculs effectués, il vient

$$\begin{aligned} 2.5.13.106\,(1+342i) = -i(1+2i)(1+44i)(1-5i)(1+i) \\ (1-129i)(1+23i)(1+2i). \end{aligned}$$

La comparaison des arguments montre que l'on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}(342) = k\operatorname{Arctg}(1) + 2\operatorname{Arctg}(2) - \operatorname{Arctg}(5) \\ + \operatorname{Arctg}(23) + \operatorname{Arctg}(44) - \operatorname{Arctg}(129) \end{aligned}$$

(où k est un entier convenable). On termine en calculant

$$k = \Big[\mathrm{Arctg}\,(342) - 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) + \mathrm{Arctg}\,(5) \\ - \mathrm{Arctg}\,(23) - \mathrm{Arctg}\,(44)\Big] / \mathrm{Arctg}\,(1) \\ = -1.$$

L'algorithme de TODD fournit ainsi la formule *à la* MACHIN

$$\mathrm{Arctg}\,(342) = -\mathrm{Arctg}\,(1) + 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) - \mathrm{Arctg}\,(5) \\ + \mathrm{Arctg}\,(23) + \mathrm{Arctg}\,(44) - \mathrm{Arctg}\,(129).$$

Remarquons en passant que l'on peut obtenir une nouvelle formule. En effet, 129 est décomposable, soit

$$\mathrm{Arctg}\,(129) = 2\mathrm{Arctg}\,(1) + \mathrm{Arctg}\,(23) - \mathrm{Arctg}\,(28).$$

D'où la nouvelle formule

$$\mathrm{Arctg}\,(342) = -3\,\mathrm{Arctg}\,(1) + 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) - \mathrm{Arctg}\,(5) \\ + \mathrm{Arctg}\,(28) + \mathrm{Arctg}\,(44).$$

4.2. Comment se fabrique une égalité du type $(7 + 10i)(3 + 2i) = 1 + 44i$.

Lemme 3. — *Soit $p = u^2 + v^2$ un nombre premier de la forme $4k + 1$. Il existe un unique entier de* GAUSS *$x + iy$ tel que l'on ait*

$$(u + iv)(x + iy) = 1 + iw, \quad |w| < p/2 \quad \text{et} \quad N(x + iy) < N(u + iv)/3.$$

En outre, si p divise $1 + d^2$, on a $|w| \leq d$.

Démonstration : considérons l'ensemble W des w qui figurent dans les égalités $(u + iv)(x + iy) = 1 + iw$. En séparant parties réelle et imaginaire, nous obtenons le système

$$ux - vy = 1, \quad vx + uy = w.$$

Puisque u et v sont premiers entre eux, il existe x_0 et y_0 tels que $ux_0 - vy_0 = 1$ (BEZOUT). La résolution de l'équation $ux - vy = 1$ montre que l'on a $x = x_0 + kv$, $y = y_0 + ku$ (k entier arbitraire) d'où l'on déduit $w = m + kp$ avec $m = vx_0 + uy_0$. Par conséquent, il existe une valeur de k et une seule telle que $|w| < p/2$. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} N(x + iy) &= N(1 + iw)/N(u + iv) = (1 + w^2)/p \\ &< \big(1 + p^2/4\big)/p \\ &< p/3 \qquad (\text{car } p \geq 5). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que p divise $1 + d^2$. Puisque w est le plus petit élément, en valeur absolue, de W il nous suffira de prouver que $\pm d \in W$ pour démontrer $|w| \leq d$. L'égalité

$$(u + vd)(u - vd) = u^2 + v^2 - (1 + d^2)v^2 = p - (1 + d^2)v^2$$

montre que p divise $(u + vd)(u - vd)$. Comme p est premier, cela exige que p divise $u + tv$, avec $t = \pm d$. Ecrivons ensuite

$$(1 + it)/(u + iv) = (1 + it)(u - iv)/p = (u + tv)/p + i(tu - v)/p.$$

Nous savons déjà que $x = (u + tv)/p$ est un entier. Montrons qu'il en est de même de $y = (tu - v)/p$. L'égalité $t(tu - v) = u(1 + t^2) - (u + tv)$ prouve que p divise t ou $tu - v$. Mais p vivise $1 + t^2 = 1 + d^2$: il ne peut donc pas diviser t. Cela démontre que $x + iy$ est un entier de GAUSS, soit encore $t \in W$.

Exemple : $u+iv = 7+10i$ donne $x_0 = 3, y_0 = 2, w = 44+kp, p = N(u+iv) = 144$. La plus petite valeur de w est obtenue pour $k = 0$, ce qui donne $(7+10i)(3+2i) = 1 + 44i$.

4.3. L'algorithme de TODD.

Entrée : un entier $n \geq 2$.

Sortie : si l'entier n ne vérifie pas la condition (T), l'algorithme l'annonce. Sinon, l'algorithme écrit des entiers de GAUSS $1 + iw_1, \ldots, 1 + iw_r$, avec $|w_i| < n$, puis termine en écrivant une unité ϵ et un entier M qui vérifient

$$M(1 + in) = \epsilon(1 + iw_1) \ldots (1 + iw_r).$$

Preuve de cet algorithme.

Supposons tout d'abord que l'entier n vérifie la condition (T). Les propriétés suivantes restent alors constamment vérifiées.

(T_1) *W est un produit d'entiers de* GAUSS *de la forme* $1 + iw$, *avec* $|w| < n$,

(T_2) *α est un entier de* GAUSS. *Si ξ est un facteur irréductible de α, il est du type (a) ou (b), et $N(\xi)$, qui est un nombre premier, divise un entier de la forme $1 + d^2$ avec $0 < d < n$,*

(T_3) *M est un entier (ordinaire) et l'on a $M(1 + in) = W\alpha$.*

Au moment de l'initialisation, nous avons $M = 1$, $W = 1$ et $\alpha = 1 + in$: les propriétés (T_1) et (T_3) sont donc vraies.
Reste (T_2). Tout d'abord, α ne possède pas de facteur irréductible du type (c). Sinon, on pourrait écrire $1 + in = p(x + iy)$ (avec p premier de la forme $4k + 3$) ce qui est absurde (regarder la partie réelle!). Si ξ irréductible divise α, sa norme $N(\xi)$ est donc un nombre premier qui divise $N(\alpha) = 1 + n^2$. En vertu de (T), $N(\xi)$ divise un entier de la forme $1 + d^2$, avec $0 < d < n$, ce qui termine (T_2).

```
M := 1; α := 1 + in;
W := 1; (* la variable W ne figure ici que pour faciliter la preuve *)
tant que N(α) > 1 faire
    rechercher un diviseur irréductible u + iv de α;
    si |u| = 1 faire
        écrire 1 + iv/u;
        W := W(1 + iv/u);
        α := α u/(u + iv)
    sinon
        si |v| = 1 faire
            écrire 1 − iu/v;
            W := W(1 − iu/v);
            α := α iv/(u + iv)
        sinon
            rechercher x + iy tel que (x + iy)(u + iv) = 1 + iw
            avec |w| minimum;
            écrire 1 + iw;
            si |w| ≥ n alors
                écrire "condition (T) non satisfaite";
                α := 1 (* fin de l'algorithme *)
            sinon
                M := M(x² + y²);
                W := W(1 + iw);
                α := α(x − iy)/(u + iv)
            fin si
        fin si
    fin si
fin tant que;
écrire α, M.
```

L'algorithme de TODD

Supposons maintenant qu'à un moment donné W, M, α vérifient (T_1), (T_2) et (T_3). Si α n'est pas une unité, l'algorithme recherche un diviseur irréductible $\xi = u + iv$ de α d'où $\alpha = (u + iv)\beta$. D'après (T_2), ξ est du type (a) ou (b).
Si l'on a $|u| = 1$ ou $|v| = 1$, W et α sont transformées en W' et α' et il est immédiat que W', M', α' vérifient (T_1), (T_2) et (T_3).
Si l'on a $|u| > 1$ ou $|v| > 1$, l'algorithme recherche $x + iy$ tel que $(x + iy)(u + iv) = 1 + iw$ avec $|w|$ minimum. L'hypothèse (T_2) nous apprend que $N(\xi) = p$ divise $1 + d^2$, avec $0 < d < n$. Le lemme 3 montre alors que $|w| \le d < n$. Par conséquent W, M, α sont transformées en W', M' et

$$\alpha' = \alpha(x - iy)/(u + iv) = \beta(x - iy).$$

Les propriétés (T_1) et (T_3) sont encore vraies.

Terminons en montrant que $x - iy$ vérifie (T_2). Tout diviseur irréductible η de $x - iy$ divise aussi $1 + iw$. Les arguments employés au moment de l'initialisation sont encore valables et montrent que η est du type (a) ou (b). Enfin $N(\eta)$ divise $1 + w^2$ dont nous savons qu'il vérifie $|w| < n$.

Prouvons maintenant que l'algorithme s'arrête au bout d'un temps fini. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on a $N(\alpha') < N(\alpha)/2$ si $|u| = 1$ ou $|v| = 1$. Sinon, on a $\alpha' = \beta(x - iy)$ d'où l'on déduit

$$N(\alpha') = N(\beta)\,N(x - iy) < N(\beta)\,N(u + iv)/3 < N(\alpha)/3$$

en appliquant la seconde partie du Lemme 3. Quel que soit le cas de figure, on a $N(\alpha') < N(\alpha)/2$. L'algorithme imprime donc r entiers de GAUSS, avec

$$r < \mathrm{E}\,\left[\log_2(1 + n^2)\right] + 1,$$

puis s'arrête en imprimant une unité.

Supposons maintenant que l'entier n ne vérifie pas la condition (T). Remplaçons la propriété (T_2) par la propriété (T_2') plus faible que voici :

(T_2') *α est un entier de* GAUSS. *Si ξ est un facteur irréductible de α, il est du type* (a) *ou* (b).

La preuve précédente s'adapte et montre qu'à chaque instant (T_1), (T_2') et (T_3) sont vraies.

Supposons alors que l'algorithme n'annonce pas "*la condition* (T) *n'est pas satisfaite*". Il fournirait dans ce cas — et en un temps fini — une formule *à la* MACHIN, ce qui est impossible.

Exemple : considérons l'entier $n = 19$.
Nous avons $1 + 19i = (1 + i)(10 + 9i)$. L'égalité $(x + iy)(10 + 9i) = 1$ exige $x = 1 + 9k$, $y = 1 + 10k$, $w = 19 + 181k$. La plus petite valeur de $|w|$ est donc 19 (obtenue pour $k = 0$). L'inégalité $|w| < 19$ n'est pas vérifiée : l'algorithme s'arrête signalant que 19 n'est pas décomposable.

5. Où il n'est plus question de fonction Arctangente.

Considérons l'égalité suivante, obtenue grâce à l'algorithme de TODD,

$$1850(1 + 266i) = -i(1 + i)(1 - 2i)^2(1 + 6i)(1 - 80i)(1 - 143i)$$

et qui, par passage aux arguments, nous fournit la formule *à la* MACHIN

$$\mathrm{Arctg}\,(266) = k\,\mathrm{Arctg}\,(1) - 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) + \mathrm{Arctg}\,(6) - \mathrm{Arctg}\,(80) - \mathrm{Arctg}\,(143).$$

Il est frustrant, après des calculs d'arithmétique pure, d'avoir recours à une calculatrice pour déterminer la valeur exacte de

$$k = \Big[\operatorname{Arctg}(266) + 2\operatorname{Arctg}(2) - \operatorname{Arctg}(6) + \operatorname{Arctg}(80) + \operatorname{Arctg}(143)\Big] / \operatorname{Arctg}(1)$$

(la valeur de k est 7).

Nous allons voir comment on peut éviter cette fausse note.

Soit $W = a + ib$ un nombre complexe différent de 0. Choisissons pour l'argument θ de W la détermination

$$-\pi \leq \theta < 3\pi/2.$$

La raison de ce choix inhabituel est que l'on a

$$\theta = \operatorname{Arctg}(b/a) + c\pi$$

avec

$$c = \begin{cases} 0 & \text{si } \ a \geq 0 \\ 1 & \text{si } \ a < 0. \end{cases}$$

(Nous travaillons avec les conventions suivantes : $b/0 = \pm\infty$ selon le signe de b et $\operatorname{Arctg}(\pm\infty) = \pm\pi/2$.)

Soit $w \neq 0$ réel et posons $W' = W(1 + iw) = a' + ib'$. Si θ' est l'argument de W', nous savons que

$$\theta' = \theta + \operatorname{Arctg}(w) + 2k\pi.$$

Cherchons comment se calcule k en fonction des données. Pour cela, considérons $\operatorname{Arctg}(b'/a')$ et $\operatorname{Arctg}(b/a)$ comme fonctions de a. Ces fonctions, ayant la même dérivée, ne diffèrent que par une constante. Avec un peu de patience, on trouve que l'on a

$$\operatorname{Arctg}(b'/a') = \operatorname{Arctg}(b/a) + \operatorname{Arctg}(x) - d\pi$$

où d est un entier défini de la manière suivante

$$d = \begin{cases} 0 & \text{si } \ a \notin]0, bw[\ \text{ et } \ aa' \neq 0 \\ \operatorname{sgn} w & \text{si } \ a \in]0, bw[\ \text{ et } \ aa' \neq 0 \\ [\operatorname{sgn} w + \operatorname{sgn} b]/2 & \text{si } \ a = 0 \\ [\operatorname{sgn} w - \operatorname{sgn} b]/2 & \text{si } \ a' = 0. \end{cases}$$

(Vu les hypothèses, on ne peut pas voir simultanément $a = 0$ et $a' = 0$).
Ce travail effectué, en écrivant

$$\operatorname{Arctg}(b'/a') + c'\pi = \operatorname{Arctg}(b/a) + c\pi + \operatorname{Arctg}(w) + 2\pi,$$

on obtient

$$k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \geq 0 \quad \text{et} \quad a' < 0 \quad \text{et} \quad w < 0 \\ -1 & \text{si} \quad a < 0 \quad \text{et} \quad a' \geq 0 \quad \text{et} \quad w > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Reprenons notre exemple. A partir de $W = 1$, d'argument $\theta = 0$, on calcule successivement les arguments de

$$\begin{array}{l} (1+i), \\ (1+i)(1-2i), \\ (1+i)(1-2i)(1-2i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1+i)(1-2i)^2(1+6i)(1-80i)(1-143i), \end{array}$$

ce qui donne la suite des arguments

$$\begin{array}{l} \operatorname{Arctg}(1), \\ \operatorname{Arctg}(1) - \operatorname{Arctg}(2), \\ \operatorname{Arctg}(1) - 2\operatorname{Arctg}(2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 9\operatorname{Arctg}(1) - 2\operatorname{Arctg}(2) + \operatorname{Arctg}(6) - \operatorname{Arctg}(80) - \operatorname{Arctg}(143). \end{array}$$

Au lieu de regarder ce qui se passe quand on multiplie W par une unité ϵ, déterminons plutôt l'argument de $M(1+in)/\epsilon$. On trouve facilement

$$\operatorname{Arctg}\left(M(1+in)/\epsilon\right) = \begin{cases} \operatorname{Arctg}(n) & \text{si} \quad \epsilon = 1 \\ \operatorname{Arctg}(n) + \operatorname{Arctg}(1) & \text{si} \quad \epsilon = -1 \\ \operatorname{Arctg}(n) - 2\operatorname{Arctg}(1) & \text{si} \quad \epsilon = i \\ \operatorname{Arctg}(n) + 2\operatorname{Arctg}(1) & \text{si} \quad \epsilon = -i. \end{cases}$$

Dans notre exemple, cela donne

$$\operatorname{Arctg}\left[1850(1+266i)/-i\right] = \operatorname{Arctg}(266) + 2\operatorname{Arctg}(1).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}(266) + 2\operatorname{Arctg}(1) = 9\operatorname{Arctg}(1) &- 2\operatorname{Arctg}(2) \\ &+ \operatorname{Arctg}(6) - \operatorname{Arctg}(80) - \operatorname{Arctg}(143) \end{aligned}$$

ce qui donne la formule cherchée, soit

$$\operatorname{Arctg}(266) = 7\operatorname{Arctg}(1) - 2\operatorname{Arctg}(2) + \operatorname{Arctg}(6) - \operatorname{Arctg}(80) - \operatorname{Arctg}(143).$$

6. Quelques remarques avant de terminer.

Voici quelques conseils qui pourront être utiles à ceux qui seront tentés de programmer l'algorithme de TODD.

6.1. Comment décomposer un entier de GAUSS en facteurs irréductibles.

Soit $\alpha = \xi_1 \ldots \xi_n$ une décomposition de α en facteurs irréductibles. D'après le théorème 2, $N(\alpha) = N(\xi_1) \ldots N(\xi_n)$ est la décomposition de $N(\alpha)$ en facteurs premiers. Toujours d'après ce théorème, nous savons que

(a) si $N(\xi) = 2$ alors $\xi = 1 + i$,

(b) si $N(\xi) = p$, avec p premier de la forme $4k+1$, alors $\xi = a+ib$ ou $\xi = b+ia$, a et b étant deux entiers > 0 tels que $p = a^2 + b^2$,

(c) si $N(\xi) = p^2$, avec p premier de la forme $4k + 3$, alors $\xi = p$.

La construction d'un algorithme pour décomposer α en facteurs irréductibles va maintenant de soi, sauf dans le cas (b). Comment en effet, trouve-t-on les entiers a et b? Plutôt que de décrire une méthode sophistiquée (**)
pour obtenir ce résultat, je me contenterai d'indiquer comment on peut utiliser la force brute avec discernement.

De $p = a^2 + b^2$ avec $0 < a < b$, on déduit $a < \sqrt{p/2} < b < \sqrt{p}$. Les intervalles dans lesquels se trouvent a et b ont pour longueurs $\sqrt{p/2} = 0,707\sqrt{p}$ et $\sqrt{p} - \sqrt{p/2} = 0,292\sqrt{p}$. D'où l'algorithme

---

$b := 1 + E\left(\sqrt{p/2}\right)$; (* E *désigne la partie entière* *)
$a := E\left(\sqrt{p - b^2}\right)$;
tant que $p \neq a^2 + b^2$ **faire**
    $b := b + 1$;
    $a := E\left(\sqrt{p - b^2}\right)$
fin tant que.

L'expérience prouve que cette procédure n'est pas trop catastrophique tant que l'on manipule de petites valeurs de p (si p possède au plus neuf chiffres on a $0,292\sqrt{p} < 29\,290$).

6.2. Comment trouver une solution particulière de $ax + by = 1$.

Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Pour trouver facilement une solution particulière de l'équation, en nombres entiers, $ax + by = 1$, voici un algorithme qui a été décrit en 1963 par BLANKINSHIP. L'idée est d'utiliser la méthode du pivot de GAUSS, en l'adaptant aux entiers. Je me contenterai d'un exemple, avec $a = 35$ et $b = 22$.
On part de la matrice 2×3

(**) Le lecteur intéressé par ce problème pourra lire avec profit un article très intéressant de Roger CUCULIÈRE dans le N° 102 d'Avril 1986 de "POUR LA SCIENCE", article consacré à ce théorème.

$$\begin{pmatrix} 35 & 1 & 0 \\ 22 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On choisit 22 comme pivot, et on enlève à la première ligne de cette matrice E(35/22)=1 fois la deuxième ligne, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 13 & 1 & -1 \\ 22 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On choisit 13 comme pivot et on enlève à la deuxième ligne E(22/13)=1 fois la première ligne, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 13 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On continue ainsi à jouer au ping-pong jusqu'à ce que l'un des éléments de la première colonne soit nul. Les matrices obtenues sont

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 22 & -35 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Dans la deuxième ligne de la dernière matrice obtenue, on trouve le pgcd $1 = (35,22)$ puis $x = -5$ et enfin $y = 8$. Vérification : $-5 \times 35 + 8 \times 22 = 1$.

6.3. Liste des 30 premières formules à la Machin.

(pour simplifier les notations, nous avons remplacé Arctg (n) par (n) seulement)

$$\begin{array}{ll}
(3) = 3(1) - (2) & (18) = 3(1) - 2(2) + (5) \\
(7) = -(1) + 2(2) & (21) = 2(1) + (4) - (5) \\
(8) = 5(1) - (2) - (5) & (30) = 7(1) - (2) - (4) - (23) \\
(13) = 5(1) - (2) - (4) & (31) = 2(1) + (5) - (6) \\
(17) = (1) + 2(2) - (12) & (32) = (1) + 2(2) - (9) \\
(38) = -(2) + 2(4) & (50) = 2(1) + (9) - (11) \\
(41) = (1) - 2(2) + 2(12) & (55) = 4(1) + (4) - (5) - (34) \\
(43) = 3(1) - 2(2) + (6) & (57) = -4(1) + 3(2) + (5) \\
(46) = 3(1) + 2(2) - (12) - (27) & (68) = 8(1) - 3(2) - (6) \\
(47) = 4(1) + (2) - (4) - (5) & (70) = -2(1) - (2) + 2(5) + (12) \\
(72) = -3(1) + (2) + (4) + (11) & (91) = 2(1) + (9) - (10) \\
(73) = 7(1) - (2) - (5) - (9) & (93) = 5(1) - 2(2) + (6) - (80) \\
(75) = 3(1) + 2(2) - (12) - (22) & (98) = 7(1) - (2) - (4) - (15) \\
(76) = 2(1) + (23) - (33) & (99) = 5(1) - (2) - 2(5) + (12) \\
(83) = 5(1) - 2(2) + (5) - (23) & (100) = 2(1) + (27) - (37).
\end{array}$$

6.4. Quelques questions naturelles.

La formule (M) peut se généraliser dans deux directions.

Tout d'abord, on peut se demander ce qui se passe lorsque n est un nombre *rationnel*. Par exemple, on a l'égalité

$$\mathrm{Arctg}\,(100/17) = \mathrm{Arctg}\,(6) + \mathrm{Arctg}\,(290) - \mathrm{Arctg}\,(4836),$$

et on peut démontrer que toute fraction a/b fournit une formule *à la* MACHIN. On se reportera à l'article de TODD pour y trouver un algorithme très simple.

On peut aussi prendre pour les c_i des nombre rationnels. La formule de GAUSS, citée au début, est un exemple. Cette formule peut cependant s'obtenir comme combinaison linéaire de formules *à la* MACHIN (essayez !). Dans son article, TODD affirme que l'on n'obtient rien de nouveau, mais il ne donne pas de justification. Un lecteur perspicace saura-t-il répondre?

Il en a enfin une dernière question inévitable. Un entier décomposable n peut donner naissance à plusieurs formules *à la* MACHIN. Telle quelle, cette question est mal posée. Nous avons en effet obtenu les formules

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctg}\,(342) &= -\mathrm{Arctg}\,(1) + 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) - \mathrm{Arctg}\,(5) + \mathrm{Arctg}\,(44) - \mathrm{Arctg}\,(129)\\ &= -3\,\mathrm{Arctg}\,(1) + 2\,\mathrm{Arctg}\,(2) - \mathrm{Arctg}\,(5) + \mathrm{Arctg}\,(28) + \mathrm{Arctg}\,(44)\end{aligned}$$

parce que 129 est décomposable. Soyons plus précis : peut-on obtenir deux formules (M) ne faisant intervenir que des entiers i indécomposables? Autrement dit, la famille des entiers indécomposables est-elle libre sur $\mathbf{Q}$? Je ne sais pas répondre à cette question. Là encore, les lecteurs de "*L'OUVERT*" sont sollicités...

Bibliographie

John TODD : *A problem on Arctangent Relations* — American Math. Monthly 56(1949) 517 - 528.

(Cet article contient beaucoup d'autres résultats dont je n'ai pas le temps de parler ici.)

W.-A. BLANKINSHIP : *A New Version of the Euclidean Algorithm* — American Math. Monthly 70(1963) 742 - 745.

VOYAGES DE GULLIVER

DANS LES CONTRÉES LOINTAINES

VOYAGE À LAPUTA

CHAPITRE II bis

D. SAL

Ayant le privilège de transmettre à des élèves une interprétation du monde physique imaginée par des phares de l'humanité nommés ARCHIMÈDE, NEWTON, PLANCK, ..., je me heurte en permanence, chez mes élèves, à ce que j'appelle : *le mépris des unités*. Le dernier devoir que j'ai donné en Terminale m'a apporté, malheureusement, une nouvelle moisson d'exemples : *force* $\overrightarrow{F}$ = *énergie* (scalaire) ; $\overrightarrow{g_o} + m\,\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$ (où $\overrightarrow{g_o}$ et $\overrightarrow{g}$ désignent un champ de pesanteur et m une masse).

C'est pourquoi, j'aimerais que les collègues, matheux ou physiciens, accordent plus d'importance au problème des unités, le plus tôt possible dans le cursus scolaire. Je ne voudrais pas donner uniquement l'impression de critiquer le travail des collègues aussi je profite de l'occasion pour signaler une méthode apparemment peu usitée (dont je n'ai pas retenu l'auteur) pour effectuer un changement d'unités : elle consiste à multiplier par une fraction égale à UN. Exemples :
a) Ecrire en km/h la valeur d'une vitesse v égale à $7m.s^{-1}$.

$$v = 7\cancel{m}.\cancel{s}^{-1} \times \frac{1km}{1000\cancel{m}} \times \frac{3600\cancel{s}}{1h} = 25,2km.h^{-1}$$

b) La relation de PLANCK entre l'énergie E d'un photon et la longueur d'onde λ (dans le vide) associée est :

$$E = \frac{h.c}{\lambda};$$

h = constante de PLANCK $\simeq 6,62 \times 10^{-34}$ J.s.
c = célérité dans le vide de la lumière $\simeq 3 \times 10^8 m.s^{-1}$.

Exprimer le produit $h.c$ en $\mu m.eV$:

$$hc = 6,62 \times 10^{-34}\ J.\cancel{s} \times 3 \times 10^{8} m.\cancel{s}^{-1} \times \frac{1eV}{1,6 \times 10^{-19}J} \times \frac{1\mu m}{10^{-6}m} \simeq 1,24\mu m.eV$$

(les fractions $1eV/1,6.10^{-19}J$ et $1\mu m/10^{-6}m$ valent chacune 1).

Au mois de mars dernier, j'ai lu l'énoncé (correct) d'exercice d'un collègue : dans cet énoncé, un rectangle de surface s cm ^{2} et de périmètre p cm était tel que $P = S$, etc ... J'avoue avoir lu (trop vite) qu'une surface pouvait être égale à une longueur (mais bien des élèves de 3^{e}qui liront ce sujet le comprendront effectivement ainsi) ce qui m'a poussé à écrire le texte ci-après.

Jonathan SWIFT, que j'ai parodié, n'aurait probablement pas renié ce texte, lui qui écrivait dans son appendice au voyage à Lilliput : *"... les maîtres doivent bien plus s'appliquer à former l'esprit des jeunes gens pour la conduite de la vie, qu'à l'enrichir de connaissances curieuses, presque toujours inutiles. "*

Ceux qui me connaissent ne seront pas surpris de ce que j'apprécie cet auteur subversif.

Où l'auteur découvre des facultés peu ordinaires aux mathématiciens du pays.

Comme je l'ai précédemment expliqué,les Laputiens conçoivent imparfaitement tout ce qui ne tient pas aux mathématiques et à la musique et leurs maisons se remarquent en ce qu'elles sont fort mal bâties car ce peuple est maladroit dans tout ce qui regarde les actions communes de la vie.

Mais il est une chose remarquable que j'ai omise de signaler, ce que le lecteur voudra bien me pardonner, car elle ne m'est point apparue immédiatement.

L'avenue principale menant au Palais du Roi est bordée de maisons qui, de tous temps, ont été habitées par les grands mathématiciens du royaume : ces maisons, outre qu'elles ne possèdent aucun angle régulier, comme les autres maisons de Laputa, ont une largeur, une hauteur mais pas d'épaisseur. Ce prodige tient à ce que ces mathématiciens sont les seuls habitants du pays à pouvoir rendre une surface égale à un volume et une longueur à une surface. Eux seuls sont capables de vivre dans ces maisons et, pour cette raison, ne peuvent y recevoir que des confrères : d'ailleurs, on serait bien en peine d'imaginer quelles autres créatures seraient en mesure de les comprendre et de les fréquenter.

La faculté qu'ont ces mathématicien de rendre une longueur égale à une surface a une curieuse conséquence. Lorsque les intempéries ont par trop terni le revêtement de leur maison, ils commandent à un peintre de venir donner un coup de pinceau unique sur tout le pourtour. L'usage impose à ce peintre d'exécuter ce travail par une nuit sans lune car il est interdit au peuple de voir comment la façade se colore pendant que le pinceau décrit le pourtour de la maison. Il semble que le procédé soit particulièrement économique car le peuple prétend n'avoir jamais ouï dire qu'un de ces mathématiciens ait jamais acheté un seul pot de peinture : ce serait le même qui est utilisé depuis la nuit des temps, si bien que la couleur des maisons est devenue un signe distinctif de la dynastie de mathématiciens qui l'habite.

Bien que le talent des Laputiens soit faible en géométrie appliquée et en mécanique, leurs habitations reçoivent l'eau courante, laquelle est taxée ainsi qu'il convient à toute nation civilisée. Aussi, des appareils, appelés débit-mètres, mesurent-ils la consommation d'eau des habitants sauf pour les grands mathématiciens chez lesquels la consommation est mesurée à l'aide d'une règle graduée, un filet d'eau suffisant à les désaltérer, eux et leur famille.

Leur alimentation est tout aussi économique d'ailleurs, ce qui est fort heureux car étant incapables d'exercer aucune tâche pratique utile au royaume, ils sont, avec leur famille, à la charge de l'Etat. De plus, ainsi que l'attestent les chroniques du royaume, leur nombre ne varie pratiquement pas : adonnées qu'ils sont aux méditations profondes, leur descendance est peu nombreuse quoique certaines dynasties de mathématiciens se révèlent prolifiques, ce que le peuple attribue, aussi, à la distraction. Comme quoi, de mêmes causes peuvent provoquer des effets contraires.

De façon exceptionnelle et inexpliquée, il arrive qu'un de leurs descendants s'intéresse à appliquer les mathématiques aux activités des artisans et des ingénieurs. Alors sa famille et ses confrères le considèrent avec mépris et l'invitent à ne plus résider dans leur quartier réservé. Lorsque, de surcroît, ce renégat se fait batisseur de sa maison, celle-ci, outre que les angles y sont plus réguliers qu'à l'habitude, possède une épaisseur.

Aussi, lorsque la chance me permettra de retourner dans ma chère patrie, je compte suggérer aux directeurs de nos écoles de faire enseigner les mathématiques générales et les mathématiques appliquées par des maîtres différents, ces deux domaines semblant être résolument incompatibles.

INVITATION À DES RÉFLEXIONS
SUR LA
RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS

Olivier GEBUHRER

Avertissement :

C'est de propos délibéré que l'on a exclu de cet article tout développement de technique mathématique : cette dimension n'éclairait pas notre propos; elle mériterait naturellement une étude en soi (maîtrise des notations, condensation des expressions, virtuosité de calcul, conduite du calcul . . .). Quelques termes mathématiques sont brièvement expliqués en fin d'article (rubrique Glossaire).

Le Mémoire de LAGRANGE (1770 – 1771) à l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin occupe, on le sait, une place charnière dans le développement des idées modernes sur la théorie algébrique des équations. Dans "*L'Ouvert*" n° 44, J.P. FRIEDELMEYER a mis en évidence la conjoncture mathématique dans laquelle va s'inscrire le travail de LAGRANGE.

Nous voudrions ici revenir sur la **démarche mathématique concrète** de LAGRANGE, esquisser sa mise en perspective dans son époque, peut-être la situer dans quelques problèmes historiques d'aujourd'hui.

1. — Une mathématique nouvelle

Citons LAGRANGE d'entrée de jeu :

> "*Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir* a priori [1] *pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour* **les** [2] *degrés ultérieurs. Cet examen aura un double avantage : d'un côté, il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré; de l'autre il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution* **des** *degrés supérieurs en* **leur fournissant différentes vues** *pour cet objet et en leur épargnant* **surtout un grand nombre de pas inutiles.**"

Cette introduction du Mémoire de LAGRANGE constitue une trace marquante du

(1) caractères droits = passages soulignés par LAGRANGE
(2) caractères gras = passages soulignés par l'auteur

passage à une nouvelle époque mathématique, à plusieurs titres :

a) Ce n'est pas l'objet de LAGRANGE de présenter ici un Mémoire d'exposé de résultats et des méthodes qui y conduisent. Il s'agit bien de l'exposé **de tout un mouvement de pensée** conduisant à **l'expression de problématiques** et à la mise en évidence **d'un champ explicite de recherches nouvelles.**

b) LAGRANGE énonce ici clairement les lignes directrices d'un processus de recherche mathématique nouveau : faire **le bilan critique** complet de toute l'expérience empirique et technologique accumulée antérieurement, dégager les points nodaux des impasses mises en évidence par cette expérience empirique, concevoir et énoncer ce qui est général dans le particulier, permettre ainsi de dégager la nécessité **d'outils nouveaux** (conceptuels et technologiques) pour la connaissance de ce qui est particulier.

(Loin d'être un cercle vicieux, cette démarche dégage l'horizon tout en éclairant la première phase d'une lumière nouvelle.) On aura noté que LAGRANGE n'a pas en vue l'éventualité de l'équation du 5^e degré mais bien l'étude **des** degrés ultérieurs.

c) LAGRANGE manifeste ici une conscience explicite du fait que la recherche mathématique est le fruit d'une **activité collective** dans laquelle les problèmes nouveaux ouverts à l'investigation sont potentiellement plus riches que les problèmes résolus.

d) Conscient des limites de son propre travail, loin d'en tirer des conséquences pessimistes quant aux possibilités cognitives de l'esprit humain, **ou de ruser avec l'énoncé du problème fondamental,** LAGRANGE entend explicitement reconstituer les éléments de la démarche historique elle-même pour " *épargner un grand nombre de pas et de tentatives inutiles*".

e) Enfin — mais peut-être n'est-ce pas l'aspect le moins novateur de cette étonnante introduction — l'indication apparemment dépourvue de tout complexe dans son audace, de l'existence de "*différentes vues*" pour **cet** objet. Il s'agit ici d'angles d'attaque divers éclairant l'objet d'étude d'une multiplicité possible de dimensions **non directement** soupçonnables lorsqu'on ne s'intéresse qu'au résultat du calcul.

2. — "Science sans conscience n'est que ruine de l'âme".

Passons brièvement en revue les différentes parties du Mémoire : les deux premières parties examinent en détail les méthodes connues de résolution des équations algébriques du troisième et du quatrième degré.

Cet examen détaillé a un sens profond et rien n'est plus étranger à la pensée de LAGRANGE que l'idée d'aligner des calculs "*pour le plaisir*" : en témoigne cette indication désolée qui ouvre la Première Section (De la résolution des équations du troisième degré) :

"*C'est dans cet état* ($x^3 + nx + p = 0$) *que les équations du troisième*

> *degré ont été d'abord traitées par Scipio* FERREO *et* TARTAGLIA *à qui l'on doit leur résolution;* **mais on ignore le chemin qui les y a conduits**".

Or, ce parcours des différentes méthodes utilisées pour résoudre les équations dont il s'agit est de part en part un parcours **critique**, attaché à découvrir non seulement ce qui est essentiel aux méthodes diverses **mais ce que l'on peut en attendre a priori** par une étude qualitative : par exemple, §15 : "*Voyons* a priori,*et indépendamment de la théorie de l'élimination que nous venons d'expliquer*, **la raison pourquoi** *cette méthode conduit directement à une réduite* (*) *du second degré, tandis que la méthode ordinaire mène à une réduite du sixième*". Passons sur le fait (qui mériterait un développement en soi) que LAGRANGE utilise sans hésitation le calcul différentiel pour traiter de problèmes algébriques. Il conclut pour le troisième degré à **l'abaissement nécessaire** du degré de la réduite (§20).

Citons encore à l'appui de ce qui précède l'introduction de la section seconde (De la résolution des équations du quatrième degré) :

> "*Cette méthode (*de Louis FERRARI — contemporain et **même** disciple de CARDAN*) qu'on peut regarder comme la plus ingénieuse de toutes celles qui ont été inventées pour le même objet, a été adoptée par tous les Analystes qui ont précédé* DESCARTES*; mais cet illustre Géomètre a cru devoir lui en substituer une autre,* **moins simple à la vérité,** *et* **moins directe, mais à quelques égards plus conforme à la nature des équations.**"

Aux paragraphes 34-35-36, on retrouve le fil conducteur de la pensée de LAGRANGE :

> "*Voyons maintenant la raison pourquoi la méthode de* DESCARTES *conduit à une réduite du sixième degré...* "

et plus haut,

> "*Telle est la méthode de* DESCARTES *pour les équations du quatrième degré. Il est vrai que cet Auteur suppose d'abord que les équations composantes soient représentées par ...* — suivent des formes particulières par opposition aux calculs propres de LAGRANGE — **mais il est naturel** *de croire qu'il n'a trouvé ces formules* **que par une analyse semblable à celle que nous venons de donner,** *comme on peut le voir dans le "commentaire " de* SCHOOTEN *et dans la lettre de* HUDDE *sur la réduction des équations. Ainsi, les principales remarques qu'on a faites sur la solution de* FERRARI *pourront s'appliquer aussi à celles de* DESCARTES*, sans qu'il soit nécessaire d'entrer là-dessus dans un nouveau détail; mais il est bon, de plus, d'examiner en particulier* **le principe** *de cette dernière solution et de chercher* **a priori** *les conséquences qui peuvent en résulter*".

(*) L'astérisque renvoie au Glossaire.

Nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, traiter en détail de la deuxième partie du Mémoire (c'est là une invitation non équivoque à d'autres études) : de ce volcan en activité, nous nous bornerons à cerner la démarche de LAGRANGE dans l'oscillation évidente entre la formulation d'une conjecture, le refus (**incompréhensible hors de "l'esprit du temps"**) d'admettre la possibilité d'un théorème d'impossibilité mais seulement la limite théorique **des méthodes jusque là employées**, et l'aboutissement de la réflexion en un résultat fondamental mais partiel, acte de naissance d'une théorie nouvelle, à l'aube d'une période de bouleversements fondamentaux auxquels LAGRANGE donnera sa totale adhésion **en revendiquant la nationalité française**; théorie nouvelle dont on sait qu'il reviendra à E. GALOIS d'écrire des pages décisives (mais qui, à la différence de LAGRANGE, devra l'accomplir dans le bruit et la fureur des luttes populaires pour la République, esquissant ainsi les traits d'une citoyenneté concrète : sur ce sujet auquel il faudra bien revenir nolens, volens, on trouvera quelques échos actuels à la fin de cet article).

Suivons LAGRANGE dans son introduction de la Troisième Partie du Mémoire. Evoquant les considérations de BEZOUT, il écrit :

> *"Ce savant Auteur pense à la vérité que cette réduite du cent-vingtième degré, regardée comme un équation du vingt-quatrième degré ne doit renfermer que les difficultés des degrés inférieurs au cinquième et ses raisons sont : ...*

Mais cette conclusion, si j'ose le dire,*me paraît un peu forcée, car j'avoue que je ne vois pas bien clairement ce qui pourraît empêcher que l'expression des racines de l'équation du vingt-quatrième degré dont il s'agit ne contînt encore des radicaux cinquièmes : du moins,* **il n'est pas démontré** *que cela ne puisse absolument avoir lieu; ainsi il pourrait bien arriver que cette équation du vingt-quatrième degré renfermât encore toutes les difficultés de l'équation proposée du cinquième degré; auquel cas, après avoir trouvé cette équation par* **des calculs très pénibles**, *on n'en serait que plus éloigné de la résolution de l'équation proposée.*

Il résulte de ces réflexions qu'il est très douteux que les méthodes dont nous venons de parler puissent donner la résolution complète des équations du cinquième degré, **et à plus forte raison**, *celle des degrés supérieurs.* **Et cette incertitude, jointe à la longueur des calculs** *que ces méthodes exigent* **doit rebuter d'avance** *tous ceux qui pourraient être tentés d'en faire usage pour résoudre un des Problèmes les plus célèbres et les* **plus importants** *de l'Algèbre.*

> **Il serait donc** *fort* **à souhaiter** *que* **l'on pût juger a priori du succès que l'on peut se promettre dans l'application de ces méthodes aux degrés supérieurs au quatrième".**

Enfin, à la Section Quatrième, LAGRANGE franchit le pas décisif conduisant à la formulation d'hypothèses précises et d'un théorème. Citons le § 86 :

> *"On a dû voir par l'Analyse que nous venons de donner ... que ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général, à savoir :*

> *trouver* **des fonctions des racines** *de l'équation proposée, lesquelles soient telles :*
>
> 1) *Que l'équation (ou les équations) par lesquelles elles seront données (les réduites), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou décomposables en équations de degré moindre.*
>
> 2) *Que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.*
>
> **L'art de résoudre les équations** *consiste donc à découvrir des fonctions des racines, qui aient les propriétés énoncées;* **mais est-il toujours possible de trouver de telles fonctions** *? C'est sur quoi il paraît très difficile de pouvoir se prononcer en général."*

Plus loin ,

> *"... il semble donc qu'on pourrait conclure de là* **par induction** *que toute équation, de quelque degré qu'elle soit, sera aussi résoluble à l'aide d'une réduite dont les racines ... Mais d'après ce que nous avons démontré on a, ce semble, lieu de se convaincre d'avance que cette conclusion se trouvera en défaut dès le cinquième degré. D'où il s'ensuit que, si la résolution algébrique des équations des degrés supérieurs au quatrième* **n'est pas impossible,** *elle doit dépendre ... "*

Ayant noté au passage que c'est avec un prononcé dégoût que LAGRANGE envisage l'éventualité d'une telle possibilité, on retiendra de ce qui précède le raisonnement qualitatif profond par lequel LAGRANGE abandonne (non sans en avoir caressé l'espoir) **l'idée d'un raisonnement par récurrence.**

Suivons LAGRANGE dans l'aboutissement de l'exposé de son projet :

> *"Comme jusqu'ici nous n'avons fait que chercher ces sortes de fonctions* **a posteriori** *et d'après les méthodes connues pour la résolution des équations, il est nécessaire de voir maintenant comment il faudrait s'y prendre pour les trouver* **a priori** *et sans supposer d'autres principes que ceux qui suivent immédiatement de la nature même des équations : c'est l'objet que je me propose principalement dans cette Section.*
>
> *Je donnerai d'abord des règles directes et générales pour déterminer le degré et la nature de l'équation d'où une fonction quelconque proposée des racines d'une équation de degré donné devra répondre; quoi que cette matière ait déjà été traitée par d'habiles Géomètres, je crois qu'elle peut l'être encore d'une manière plus directe et plus générale ...*
>
> *Je ferai voir ensuite quelles sont les conditions nécessaires pour que l'équation dont il s'agit puisse admettre la résolution en supposant uniquement celle des équations des degrés inférieurs à celui de l'équation proposée;* **et je donnerai à cette occasion les vrais principes et pour ainsi dire la métaphysique de la résolution des équations**

du troisième et du quatrième degré."

(Cf. sur ce retour à l'objet particulier de la première phase, ce qui a été dit au début de cet article.)

3. — Aboutissement et nouveau départ.

Pour décrire maintenant la situation, il nous semble difficile de faire mieux que de citer l'analyse magistrale que l'on trouvera dans "*Galois Theory*" par Harold M. EDWARDS dans la collection "*Graduate texts in Maths*" (Springer Verlag), malheureusement disponible seulement en langue anglaise :

> "*La résolvante* (*) *d'une équation a pour* LAGRANGE *trois propriétés cruciales :*
>
> 1) *Elle est rationnellement exprimable en termes de racines de l'équation et de quantités connues (nombres rationnels, coefficients de l'équation, racines de l'unité ...).*
>
> 2) *Réciproquement, chacune des racines de l'équation peut s'exprimer rationnellement en termes de la résolvante et de quantités connues.*
>
> 3) *La résolvante est solution d'une équation* **résoluble.**
>
> LAGRANGE *détermine* **quelles quantités satisfaisant la première condition satisfont la seconde** *et prouve l'important théorème qui suit; l'idée fondamentale de* GALOIS *peut alors s'exprimer en disant qu'il réalise* **l'existence dans tous les cas** *d'une résolvante satisfaisant aux deux conditions précédentes et que cette résolvante peut s'utiliser pour décrire la forme des solutions, assez complètement pour prouver qu'il* **n'existe pas** *de résolvante possédant les* **trois** *propriétés pour le degré ≥ 5."*

Voici le théorème de LAGRANGE (§104 du Mémoire) :

> "*Donc*
>
> 1°) *Si l'on a deux fonctions quelconques t et y des racines $x', x'', \ldots$ de l'équation $x^{\mu}+mx^{\mu-1}+nx^{\mu-2}+px^{\mu-3}+\cdots=0$ et que ces fonctions soient telles que toutes les permutations entre les racines $x', x'', \ldots$ qui feront varier la fonction y, fassent aussi varier la fonction t, on pourra, généralement parlant,* **avoir la valeur** *de y en t et en $m, n, p, \ldots$* **par une expression rationnelle,** *de manière que connaissant la valeur de t, on connaîtra immédiatement la valeur correspondante de y; nous disons "généralement parlant" car s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double, triple, ... de l'équation en t, alors la valeur correspondante de y dépendra d'une équation carrée ou cubique, ... dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de $t, m, n, p, \ldots$"*

(*) L'astérisque renvoie au Glossaire.

Plutôt que de demander si **toutes les racines** peuvent s'exprimer rationnellement en termes de t et de quantités connues, LAGRANGE demande si une fonction y des racines peut s'exprimer en termes de t. Si tel est le cas, une permutation des racines n'altérant pas t, n'altèrera pas y; le théorème dit que **cette condition évidemment nécessaire** est "en général" **suffisante** pour que y puisse s'exprimer rationnellement en termes de t.

Harold M. EDWARDS adjoint au théorème original de LAGRANGE le "*corollaire*" suivant :

> "*Si on peut trouver un polynôme t en les racines $x', x'', x''', \ldots$ avec la propriété que si $n!$ permutations différentes sont non seulement* FORMELLEMENT *distinctes (cela serait facile à accomplir : poser $t = x' + 2x'' + 3x''' + \cdots$) mais aussi* **numériquement** *distinctes, alors, toute permutation des racines change la valeur de t et la condition du théorème de* LAGRANGE *est remplie par* TOUS *les polynômes y. Alors* **tout** *polynôme en les racines de l'équation s'exprime rationnellement en fonction d'une quelconque valeur numérique de t.*"

Nous sommes, avec ce corollaire, déjà chez Evariste GALOIS.

Comme conclusion provisoire, indiquons le vaste chantier que constitue l'étude COMPARÉE des réflexions **des différents auteurs succédant** à LAGRANGE; donnons quelques pistes :

α) On peut exclure délibérément l'idée que CAUCHY pouvait **ne pas percevoir la portée du problème général**; voir pourtant ses allusions alambiquées dans le Mémoire du Journal de l'Ecole Polytechnique (Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme).

β) Pour ce qui est **du problème général**, voici une note incidente du grand K.F. GAUSS dans "*Recherches arithmétiques, § 359*" :

> "*On sait que tous les travaux des plus grands géomètres ont échoué contre la résolution générale des équations qui passent le premier degré, ou, pour mieux définir l'objet de la recherche, contre la réduction des équations complètes à des équations à deux termes, et* **il est à peine douteux si ce problème ne renferme pas quelque chose d'impossible,** plutôt qu'il ne surpasse les forces **actuelles de l'Analyse**".

γ) Sujet connexe que celui des conditions comparées du travail scientifique (France, Allemagne, Italie) : Bibliothèques, accès aux documents, échanges, confrontations; pourvoir d'état et travail scientifique ... Qu'est-ce donc que les mathématiques modernes? Relisez et faites (re)lire LAGRANGE!...

Glossaire

Réduite :
Etant donnée une équation algébrique, LAGRANGE appelle réduite une équation algébrique de degré strictement inférieur à la précédente, obtenue par des substitutions algébriques et permettant de résoudre l'équation donnée par radicaux : pour l'équation du second degré, la réduite donne les solutions : $X = \sqrt{(s/2)^2 - p} + s/2 \qquad y = s - X$, pour le troisième degré, $(X^3 + px + q = 0)$ on trouve $27a^6 + 27qa^3 - p^3 = 0$ (équation du second degré en a^3 où $X = a - b$ et $3ab = p$). La réduite de l'équation du quatrième degré s'exprime plus malaisément.

Le terme de "*réduites*" a disparu pour des raisons évidentes : les "*réduites*" des équations algébriques de degré ≥ 5 sont de degrés bien supérieurs à celui de l'équation donnée, sans bénéfice. Voir les développements de l'article.

Résolvante de Lagrange :
On se borne ici à l'exemple du degré troisième; contrairement à la "*réduite*", on peut ici généraliser, au moins en principe. Si x, y, z sont les racines de l'équation donnée, posons $t = x + \alpha y + \alpha^2 z$ où $\alpha^3 = 1 (\alpha \neq 1)$. L'expression t peut prendre six valeurs, solutions d'une équation du 6e degré $f(X) = (X - t_1) \ldots (X - t_6) = 0$, dont les coefficients sont des quantités calculables **à l'aide des seuls coefficients de l'équation donnée** (les coefficients de f sont en effet symétriques en t, les t_i sont symétriques en les racines ...). Cette équation s'appelle la résolvante de LAGRANGE qui est soluble bien que de degré supérieur à l'équation donnée car c'est une **équation quadratique** en X^3.

Post-scriptum Ante-scriptum

Nous proposons aux lecteurs de "*L'Ouvert*" la juxtaposition de deux textes : le premier est de Harold M. EDWARDS (op. cité) :

> "**The mathematical establishment ignored, mislaid, lost,** *and* **failed to understand his treatises.** *Meanwhile, he was persecuted for* **his political activities and speat many months in jail as a political prisoner.** *At the age of 20 he was killed in a duel involving, in some mysterious way, honor and a woman*"(1)

Le second est de Peter M. NEUMANN, The Queen's College Oxford England, dans *American Mathematical Monthly* N° Juin 1986, où à l'occasion d'un commentaire critique sur le livre de Harold M. EDWARDS il écrit (traduction de l'anglais par l'auteur) :

> "[POISSON *et* LACROIX] *concluent leur rapport en conseillant d'attendre que l'oeuvre complète de l'auteur soit à disposition avant de se*

(1) Traduction approximative : La haute hiérarchie mathématique ignora, égara, perdit et ne comprit pas ses traités. Entre temps, il fut persécuté pour ses activités politiques et passa plusieurs mois en prison comme prisonnier politique. A vingt ans, il fut tué dans un duel impliquant de façon mystérieuse l'honneur et une femme.

former une opinion définitive, puisque l'auteur disait que sa proposition principale était partie d'une théorie plus générale, et qu'il était fréquent qu'une théorie complète soit plus facile à comprendre que des parties isolées [2]*; mais en l'état, la partie soumise à appréciation n'était pas* **en condition convenable** *(suitable state)* **pour pouvoir être recommandée à l'approbation de l'Académie.**

Avec arrière pensée, on peut avoir le sentiment que ce rapport était érroné (wrong). **Mais je ne peux penser ainsi** *: il me semble le modèle d'un bon refereeing. L'un de nous est-il sûr de ne pas réagir aujourd'hui de la même façon devant une semblable situation? J'en doute : c'est un admirable rapport, sympathique mais ferme. Ce qui ne va pas, c'est qu'il a affaire à l'œuvre d'un homme exceptionnellement brillant et insupportable (awkward man).* GALOIS **n'avait pas de directeur de recherche qui lui aurait montré comment ses découvertes auraient dû être écrites proprement.** *De plus,* GALOIS *ne prenait pas facilement conseil. Un autre jeune mathématicien eût pris la critique à coeur, réécrit son ouvrage, l'aurait publié, et serait devenu célèbre.*

GALOIS *s'offensa,* **retourna à l'agitation polique, mourut jeune et devint célèbre."**

Dans le manuscrit retourné par l'Académie, GALOIS découvrit une note de POISSON trouvant insuffisante la démonstration d'un lemme; GALOIS écrivit au sujet de cette note : "*on jugera*". En effet!

CONCOURS :

Le jeu du portrait

Nous proposons à la sagacité de nos lecteurs le jeu du portrait pour un objet mathématique. La première réponse correctement argumentée qui nous parviendra donnera à son auteur un abonnement gratuit d'un an à "*L'Ouvert*" .

Si c'était un nombre?	Ce serait 2, 3 ou 4.
Si c'était un élément?	Ce serait la terre.
Si c'était un monument?	Ce serait la Kaaba.
Si c'était une ville?	Ce serait New-York.
Si c'était un personnage?	Ce serait Picasso ou Braque.
Si c'était une date?	Ce serait 1907.
Si c'était un jeu?	Ce serait le 421.
Si c'était un bijou?	Ce serait un diamant.

[2] (!! par POISSON, LACROIX, CAUCHY et d'autres.)

ACTIVITÉ HEURISTIQUE
EN CLASSE DE SIXIÈME

Tania KABBAB (*)

Une activité de construction d'un carré inscrit dans un triangle a été proposée en mai 1985 aux élèves de trois classes de sixième (âge des élèves : environ 12 ans) du collège d'Ostwald. Cette activité était présentée par un *film* de construction, analogue à un autre *film*, montrant un partage en trois d'un rectangle, antérieurement étudié. Au mois de janvier, une évaluation en géométrie avait permis d'identifier des difficultés de coordination (entre les éléments d'une instruction), de perception et de désignation. En annexe, on trouvera les énoncés.

Les élèves de sixième ne manquent ni d'initiative, ni d'intuition, comme le fait ressortir l'analyse de leurs démarches que nous avons effectuée; un bon choix d'activités heuristiques devrait suffire pour stimuler leurs aptitudes.

Une production correcte isolée ne permet pas d'être assuré que l'élève a bien atteint les objectifs visés, et l'échec demande une identification de ses causes. C'est pourquoi nous avons demandé aux élèves de fournir des explications à l'appui de leurs construction; et l'examen de ces explications s'est avéré indispensable pour identifier certaines des démarches mises en œuvre par les élèves.

Activités proposées (voir énoncés en annexe).

Dans les deux activités de construction présentées par un *film de la construction* :
— partage d'un rectangle en trois rectangles superposables,
— détermination d'un carré inscrit dans un triangle donné,
il s'agit pour les élèves de reprendre la construction dans des conditions qui leur sont données (par les figures initiales, fournies sur les feuilles-réponses). Ces activités exigent une interprétation correcte de chaque étape, une coordination entre les étapes, de l'étape initiale à l'étape finale.

Le partage en trois d'un rectangle peut être effectué de façon satisfaisante grâce à des mesures et des calculs, même si cette procédure n'est pas une construction géométrique en bonne et due forme. Il en résulte deux inconvénients : la motivation des élèves pour l'utilisation de l'algorithme de construction présenté reste limitée et il y a recours à la procédure de mesure dès que l'élève se bloque. En choisissant la construction d'un carré inscrit dans un triangle, nous avons espéré éviter ces inconvénients : en effet, il est à peu près exclu de réussir à tracer une

(*) En raison des difficultés d'expression en français de l'auteur, Monsieur F. PLUVINAGE a revu cet article.

figure satisfaisante non seulement par recours à des mesures, mais même par approximation.

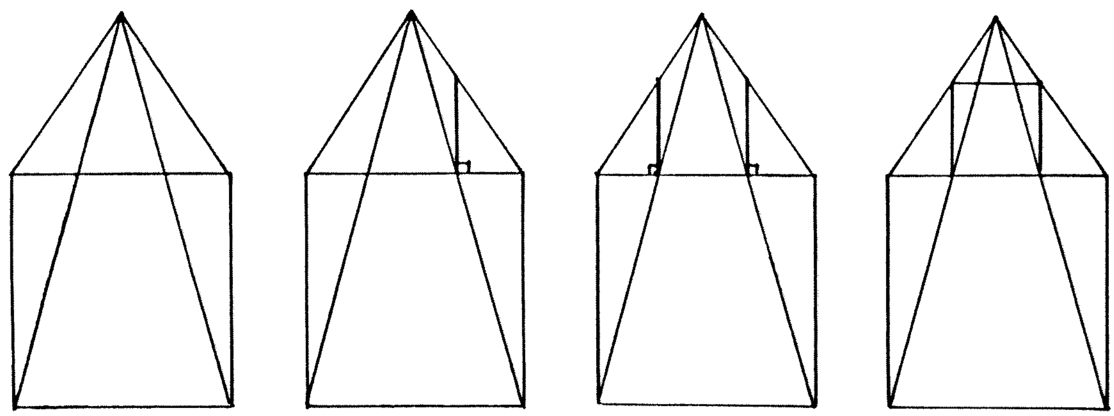
Résultats de l'analyse des démarches employées pour la construction de carré.

Nous avons été conduits à distinguer quatre principaux types de démarches utilisées par les élèves (entre parenthèses, nous indiquons l'effectif concerné, l'effectif total étant 76) :

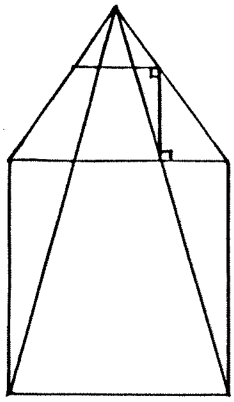
1°. Algorithme de construction bien intégré et recours à des initiatives (36).
2°. Algorithme servant d'outil pour conduire à une construction automatisée de carré (16).
3°. Algorithme mis en œuvre sans servir à construire le carré (4).
4°. Interférences entre l'algorithme et les données (15).

Avant d'entrer dans le détail de ces démarches, il convient de remarquer que la construction exige une assez bonne précision du tracé, faute de quoi l'obtention d'un carré inscrit dans le triangle est problématique.

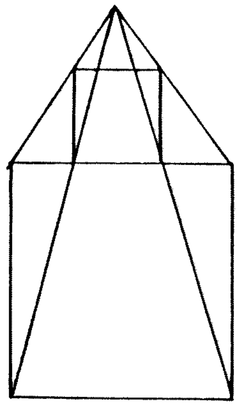
1°. La première catégorie est celle des élèves qui ont été les plus sensibles aux contraintes de la situation, et c'est justement par rapport au respect de ces contraintes qu'ils ont fait preuve d'initiative. A l'exception d'un élève, ils ont procédé comme suit pour tracer le carré :



Situation après le tracé des obliques	1ᵉétape	2ᵉétape	3ᵉétape



2^{e}étape



3^{e}étape

L'élève qui fait exception a procédé par perpendiculaires et intersections avec les côtés du triangle, comme illustré ci-contre (les deux premières figures sont les mêmes que ci-dessus). Il s'agit donc d'un parcours du carré, sommet après sommet.

On peut parler pour les élèves de cette première catégorie de comportement heuristique, aboutissant à un algorithme bien adapté aux contraintes de la situation.

En effet, le tracé usuel d'un carré se fait en prenant en compte la longueur du côté. Ici, les élèves ont réussi à ne pas faire intervenir cette longueur mais uniquement des tracés de perpendiculaires et des déterminations de points d'intersection. L'exercice a donc déterminé un changement de stratégie de construction; la part d'initiative des élèves a consisté en l'obtention d'un nouvel algorithme de construction du carré, adapté à l'objectif final à atteindre.

2°. Pour les élèves de la deuxième catégorie, la construction usuelle d'un carré reste présente, et prioritaire par rapport à la condition d'inscription dans le triangle. C'est ainsi qu'après le tracé des obliques, ces élèves, ayant la possibilité de mesurer le côté du futur carré, vont faire intervenir cette mesure de longueur (éventuellement arrondie lors de la lecture sur la graduation de la règle) ainsi que des tracés de perpendiculaires pour se ramener à la construction habituelle. Le tracé ainsi obtenu peut être correct ou approximatif et le carré inscrit ou non dans le rectangle.

3°. La troisième catégorie est constituée de quatre élèves qui, après l'obtention correcte des obliques qu'il fallait tracer, n'ont pas découvert qu'ainsi se trouve déterminé un côté du carré.

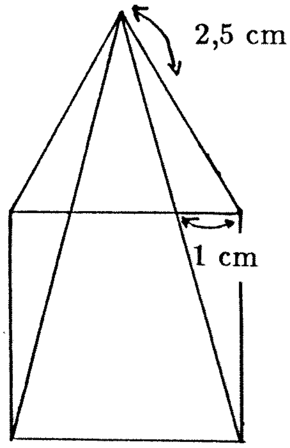


Figure réduite dans le rapport 3/5

Comme le triangle de la feuille-réponse se trouvait être équilatéral, trois de ces élèves ont été attirés par la symétrie de la figure. Par exemple, l'un d'eux dit : *"J'ai pris 2,5 cm de chaque côté du triangle et j'ai pris 1 cm de chaque côté du carré"*. Le dernier élève a procédé par tâtonnement : *"J'ai mesuré plusieurs fois et j'ai trouvé 2,4 cm pour faire le carré qui est dans le triangle"*.

4°. La dernière catégorie est constituée des élèves qui ont cherché à faire intervenir non seulement l'algorithme de construction, mais des données de l'exemple qui était montré dans le *film*. Neuf d'entre eux ont procédé ainsi dès la première étape : le carré de la première étape de l'exemple ayant un côté de 4 cm, ils ont reporté 4 cm perpendiculairement à la base du triangle équilatéral; mais comme la base du triangle équilatéral a une longueur de 5cm, le résultat qu'ils obtiennent est un rectangle (qu'ils disent être un carré). Les quadrilatères construits dans le triangle à la suite de cela sont souvent des rectangles, prétendus carrés. Les six autres élèves effectuent les étapes 1 et 2 de l'algorithme présenté, de façon correcte, mais utilisent ensuite la distance qui sépare, dans l'exemple, le sommet du triangle de l'un des sommets supérieurs du carré inscrit; ils doublent (?) cette distance pour effectuer alors le report.

Pour les cinq élèves non pris en compte dans les catégories précédentes, les tracés qui succèdent aux deux premières étapes (correctement effectuées) sont entachés de divers défauts : orthogonalité ou mesure sont erronées ou *oubliées*.

Dans cette présentation succinte, nous espérons avoir mis en évidence qu'il existe déjà pour le professeur le moyen de repérer certaines compétences (ou incompétences) en géométrie, sur des exercices qui, pour beaucoup, ne font pas encore partie de la panoplie de *vraies* questions de géométrie.

ANNEXE

Janvier 1985

Un programme de construction

Sur la feuille jointe, on a tracé un cercle $\mathcal{V}$ de centre J et on a placé un point I.

1°. Tracer le cercle de centre I et de rayon 58 mm (ou : 5,8 cm). Désigner par $\mathcal{U}$ ce cercle.

2°. Construire la perpendiculaire en I à la droite (IJ) et la perpendiculaire en J à la droite (IJ).

3°. Noter K et L les points d'intersection du cercle $\mathcal{U}$ et de la perpendiculaire en I à (IJ) ; placer L au dessus de K sur la feuille.
Noter M et N les points d'intersection du cercle $\mathcal{V}$ et de la perpendiculaire en J à (IJ) ; placer N au dessus de M sur la feuille.
Noter O le point d'intersection des droites (KM) et (LN).

4°. Tracer le cercle de diamètre $[IO]$; noter A et B ses points d'intersection avec le cercle $\mathcal{U}$.

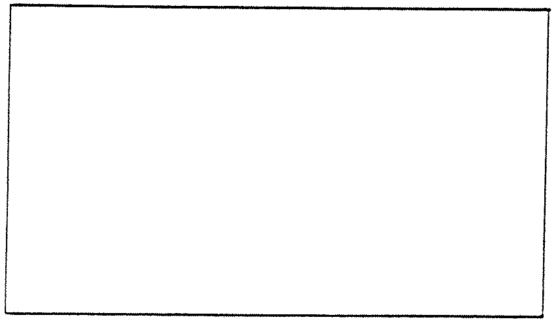
5°. Tracer les droites (OA) et (OB).

Au bas de la feuille de construction, une place a été prévue pour écrire tes observations sur les droites (OA) et (OB).

Nom : ____________________

Prénom : ____________________

1°. Partage le rectangle ci-dessous en trois rectangles de mêmes dimensions, en suivant la construction illustrée.



2°. Explique comment tu as fait.

____

____

____

____

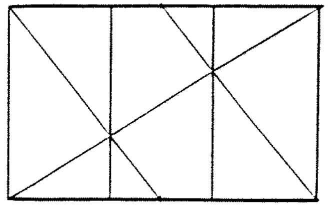
____

____

____

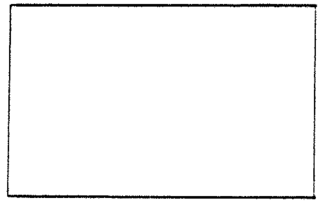
____

Partage d'un rectangle en trois rectangles

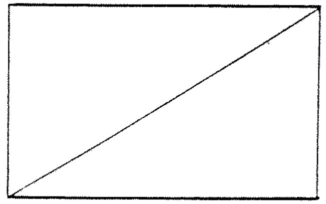


Le rectangle partagé

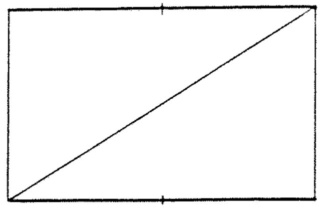
Et les étapes de la construction :



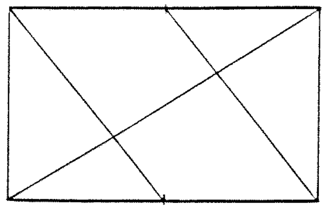
Le rectangle de départ



Etape 1



Etape 2



Etape 3

Etape 4 : le rectangle partagé (figure du haut)