RESOLUTION PAR LE PLIAGE DE L'EQUATION DU TROISIEME DEGRE ET APPLICATIONS GEOMETRIQUES

par Jacques JUSTIN

1. INTRODUCTION

Il est bien connu que si on amène par pliage un point A sur une droite D, le pli obtenu est tangent à la parabole de foyer A et de directrice D. Si on répète l'opération de nombreuses fois, on voit se dessiner la parabole comme "enveloppe" des plis marqués. Amener un point sur une droite pouvant se faire d'une infinité de façons, l'idée vient naturellement d'imposer une autre condition. Par exemple, si l'on impose au pli de passer par un certain point B, on obtient les tangentes menées de B à la parabole. Mais on peut aussi bien imposer la condition suivante : amener en même temps un certain point A' sur une certaine droite D'. Le pli obtenu sera alors tangent à la fois à la parabole précédente et à la parabole de foyer A' et de directrice D'. Nous venons de résoudre le problème suivant : construire les tangentes communes à deux paraboles données. Or, ceci est une construction impossible, en général, avec la règle et le compas car elle correspond à la résolution d'une équation du troisième degré.

Nous allons voir que l'opération "amener au moyen d'un seul pli deux points donnés, respectivement, sur deux droites données" permet de résoudre l'équation générale du troisième degré. Nous donnerons quelques applications et examinerons enfin d'une façon un peu plus systématique les constructions possibles par pliage.

2. ETUDE ANALYTIQUE

Pour simplifier les calculs nous supposerons que les droites sont perpendiculaires et nous les prendrons comme axes de coordonnées. Nous verrons en 3. comment passer sans calculs au cas de droites faisant un angle quelconque. Quant au cas particulier où les droites sont parallèles, nous verrons en 8. à quoi il se ramène.

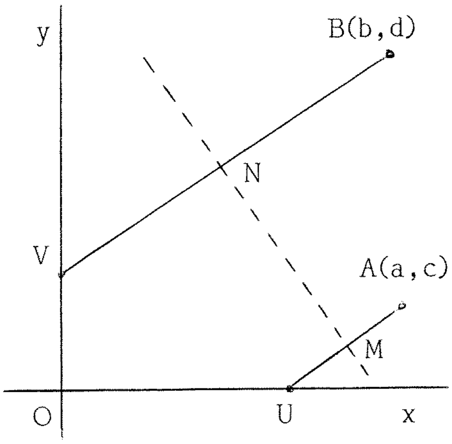


Fig. 1

Soit donc, figure 1, à amener A(a,c) sur Ox et en même temps B(b,d) sur Oy. Après pliage, A vient en U et B en V. Si M et N sont les milieux de AU et de BV, le pli est la médiatrice MN de AU et de BV. Prenons comme inconnue la pente commune de AU et de BV, soit t.
En calculant les coordonnées de M et de N, puis en écrivant que la pente de MN est $-1/t$, on obtient l'équation :
$$bt^3 + (c - 2d)t^2 + (2a - b)t - c = 0 \qquad (1)$$
L'équation (1) peut s'identifier à l'équation générale du troisième degré, disons $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$.
Il suffit de poser :
$$a = \frac{q+1}{2}\ ,\ b = 1,\ c = -r,\ d = -\ \frac{p+r}{2} \qquad (2)$$
Par conséquent, l'opération de pliage considérée permet de résoudre, très simplement, l'équation générale du troisième degré.

Remarque : L'équation du 3e degré (à coefficients réels) ayant une ou trois racines réelles, il y aura, à part les cas dégénérés, une ou trois façons de faire le pli.

3. ANGLE QUELCONQUE

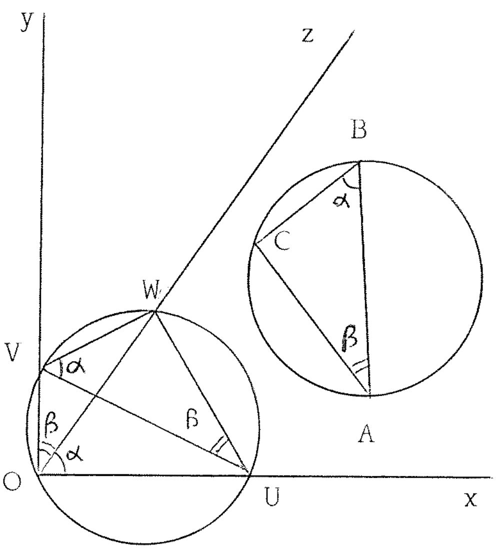


Fig. 2

Reprenons sur la figure 2 les éléments de la figure 1, et soit Oz une droite quelconque passant par O. Traçons le cercle circonscrit au triangle OUV. La droite Oz recoupe ce cercle en W. Posons $\widehat{xOz} = \alpha$ et $\widehat{yOz} = \beta$. Les propriétés des angles inscrits donnent $\widehat{UVW} = \alpha$ et $\widehat{VUW} = \beta$.
Il est alors facile de construire le point C qui vient en W par le pliage. Il est en effet donné par $\widehat{BAC} = \beta$ et $\widehat{ABC} = \alpha$.
Au lieu de faire le pli en amenant A sur Ox et B sur Oy, on aurait obtenu le même résultat en amenant A sur Ox et C sur Oz.
On aurait même pu substituer aussi à Ox une autre droite quelconque passant par O et à A un point convenablement construit. D'une façon réciproque, l'opération que nous pourrons noter ($A \rightarrow D$, $A' \rightarrow D'$), avec les droites D et D' quelconques, se ramène à une opération analogue avec des droites perpendiculaires. On peut en tirer deux conclusions :

a) L'emploi de droites formant un angle quelconque n'augmente pas la puissance de l'opération, qui reste la capacité de résoudre l'équation du troisième degré.

b) Si l'on a trouvé une certaine construction utilisant une opération ($A \longrightarrow D$, $A' \longrightarrow D'$) on peut trouver d'autres constructions ayant le même résultat en remplaçant D et D' par d'autres droites ayant le même point d'intersection.

Remarque : L'étude géométrique que nous venons de faire est apparentée au Théorème de LA HIRE (1640-1718) :

"Si un cercle mobile de rayon R/2 roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon R, tous les points du cercle mobile décrivent des diamètres du cercle fixe."

Revenons à la figure 2. Lorsqu'on retourne la partie du papier contenant A et B, dans le but de faire le pli, on fait glisser A sur Ox et B sur Oy jusqu'à ce que le pli puisse se former. Pendant ce mouvement, le cercle de diamètre AB, retourné, est le cercle mobile du théorème de La Hire. Lorsque A est en U et B en V, sa position est le cercle circonscrit à OUV. Tous ses points, décrivent des segments de droites passant par O. Par exemple C décrit un segment de la droite Oz.

4. TRISECTION DE L'ANGLE

4.1 Diviser un angle en trois parties égales avec la règle et le compas est un problème célèbre. Depuis l'Antiquité on a cherché à le résoudre, jusqu'à ce que WANTZEL, en 1837, démontre que c'est impossible.

Par contre, il existe de nombreuses méthodes utilisant des courbes, des instruments ou des mécanismes particuliers. Nous allons voir que le pliage, grâce à l'opération étudiée ci-dessus est un de ces moyens.

4.2 Si m est la tangente d'un angle θ, la tangente t de $\theta/3$ vérifie l'équation

$$t^3 - 3mt^2 - 3t + m = 0.$$

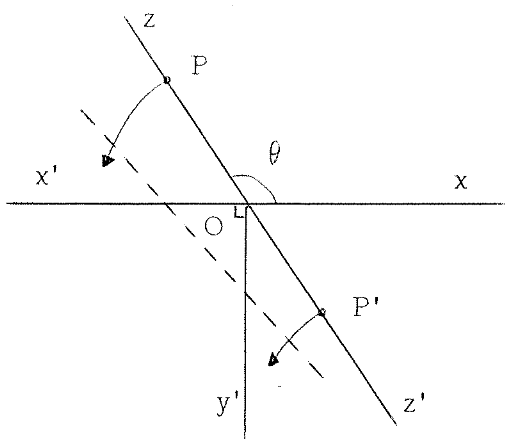


Fig. 3

En identifiant avec l'équation (1) au moyen des formules (2) on obtient pour les points A et B de la figure 1 les coordonnées A(-1, -m) et B(1,m). D'où la construction pour diviser en trois l'angle $\theta = \widehat{xOz}$ de la figure 3: prolonger Ox et Oz et Ox' et Oz'. Tracer Oy' perpendiculaire à Ox. Marquer P sur Oz et P' sur Oz' à égale distance de O. Faire ($P \rightarrow Ox'$, $P' \rightarrow Oy'$).

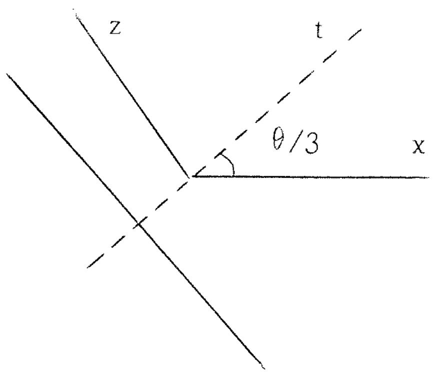


Fig. 4

Mener de O la perpendiculaire Ot au pli obtenu. On a $\widehat{xOt} = \theta/3$ (Fig. 4).
Il peut être intéressant de donner une preuve géométrique.

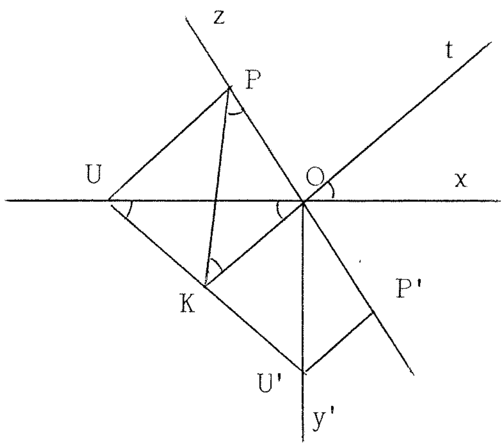


Fig. 5

Soient U et U' les positions de P et P' après pliage (figure 5) et soit K le milieu de UU'. Le triangle UOU' étant rectangle, on a $\widehat{UOK} = \widehat{KUO} = \alpha$.
Le trapèze PUU'P' admettant le pli (non dessiné) comme axe de symétrie, tous les autres angles indiqués ont pour valeur α .
On a donc, dans le triangle KPO
$\widehat{KPO} + \widehat{POK} + \widehat{OKP} = \pi$, c'est-à-dire
$3\alpha + \widehat{UOP} = \pi$, c'est-à-dire
$3\alpha = \widehat{xOz} = \theta$, d'où $\widehat{xOt} = \theta/3$.

4.3 En utilisant la méthode géométrique indiquée en 3., on peut, en partant de la trisection ci-dessus, trouver d'autres méthodes, par exemple la suivante (Fig. 6).

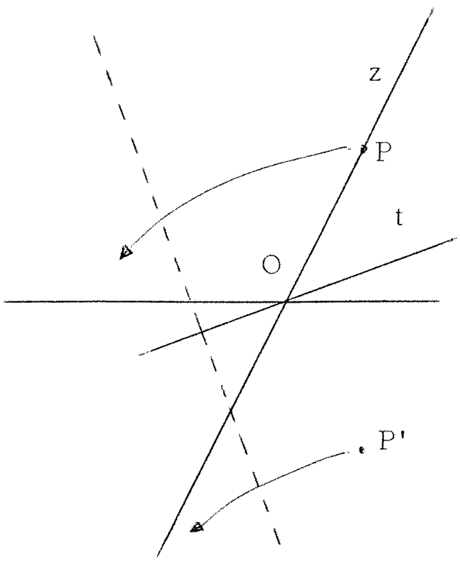


Fig. 6

Choisir un point P arbitraire sur le côté Oz de l'angle à trisecter $\widehat{xOz}$. Prendre le symétrique P' de P par rapport à Ox.
Effectuer
($P \rightarrow Ox$, $P' \rightarrow Oz$).
La ligne Ot telle que
$\widehat{xOt} = \widehat{xOz}/3$ est la perpendiculaire menée de O au pli obtenu.

5. RACINES CUBIQUES

L'équation donnant la racine cubique de m est $t^3 - m = 0$. En identifiant à (1) au moyen des formules (2), on obtient les coordonnées $A(\frac{1}{2}, m)$ et $B(1, \frac{m}{2})$ (Fig. 7).

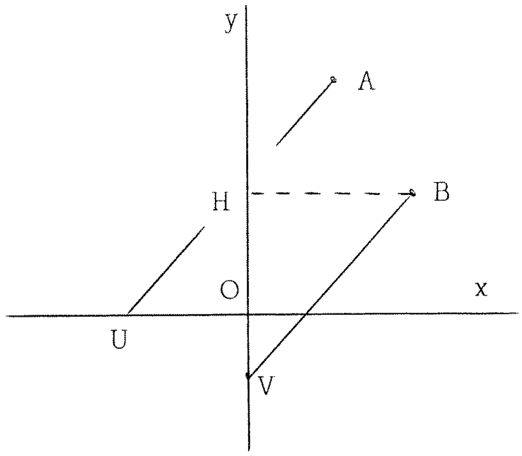


Fig. 7

On effectue ($A \rightarrow Ox$, $B \rightarrow Oy$).
Soit V la position occupée par B après pliage et soit H la projection de B sur Oy. La racine cubique t cherchée est égale à la longueur VH puisque
$t = \frac{VH}{HB} = \frac{VH}{1}$.

6. HEPTAGONE REGULIER

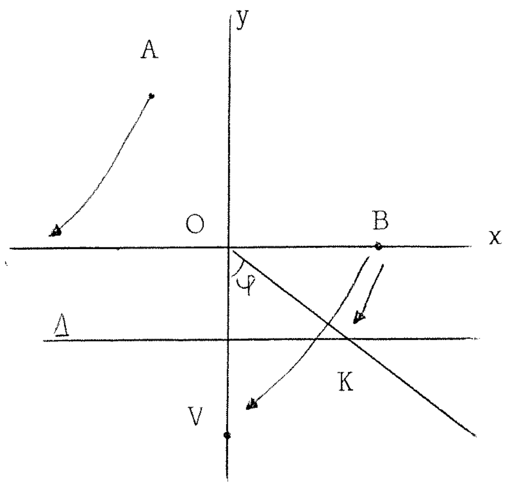


Fig. 8

Soit $\varphi = \frac{2\pi}{7}$ l'angle au centre de l'heptagone régulier. On sait que $x = e^{i\varphi}$ vérifie l'équation $x^7 - 1 = 0$. L'étude de cette équation conduit à poser $t = x + \frac{1}{x} = 2\cos\varphi$ et montre que t est solution de l'équation du 3e degré
$t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$.
En identifiant à (1) comme précédemment on trouve $A(-\frac{1}{2}, 1)$ et $B(1, 0)$.

L'opération ($A \rightarrow Ox$, $B \rightarrow Oy$) amène B en V (figure 8). On a $OV = t = 2\cos\varphi$. Traçons la médiatrice Δ de OV. Amenons B sur Δ au moyen d'un pli passant par O. Soit K la position de B après pliage. On obtient $\widehat{VOK} = \varphi$.

7. EQUATION DU QUATRIEME DEGRE

On sait, depuis FERRARI (1522-1565), que l'équation générale du 4e degré peut se résoudre en utilisant une équation du troisième degré appelée la résolvante. Par conséquent on peut, par le pliage, résoudre l'équation du 4e degré. Par exemple, on peut trouver les points d'intersection de deux coniques, ou encore leurs tangentes communes. Cela sera très laborieux.

Nous avons rappelé en 1. que les plis obtenus en amenant un point sur une droite sont tangents à une parabole. De même si on amène un point A sur un cercle (C), le pli obtenu est tangent à la conique admettant A comme foyer et (C) comme cercle directeur relatif à l'autre foyer. Par conséquent si l'on amène par un pli A sur (C) et en même temps un autre point A' sur un autre cercle (C') on obtiendra une tangente commune à deux coniques connues. On aura ainsi résolu de façon simple une équation du 4e degré.

En conclusion, si l'on utilise en plus du pliage un compas pour tracer des cercles, on ne résoudra pas plus d'équations qu'avec le pliage seul, mais on gagnera en simplicité.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les équations avaient leurs coefficients réels. Montrons maintenant que le pliage permet de résoudre les équations du 3e degré (et du 4e) à coefficients complexes. Naturellement, déterminer par pliage un nombre complexe voudra dire trouver sa partie réelle et sa partie imaginaire ou, ce qui revient au même, trouver son module et son argument.

Soit donc une équation du 3e degré à coefficients complexes. On la résout au moyen des formules de CARDAN (1501-1576) qui expriment les solutions par des sommes de racines cubiques. Soit donc à calculer les racines cubiques d'un nombre complexe $z = r\,e^{i\varphi}$, de module r et d'argument φ . Le module d'une racine est tout simplement $\sqrt[3]{r}$ que l'on sait obtenir (voir 5.) et son argument est tout simplement $\varphi/3$ que l'on sait aussi obtenir (voir 4.).

8. <u>OPERATIONS ELEMENTAIRES DE PLIAGE</u>

8.1 Pour étudier les constructions géométriques possibles par pliage, il faut fixer de façon précise les opérations autorisées. Ceci nécessite des conventions dont le détail serait fastidieux et qui sont susceptibles de variantes. Nous résumerons en disant que les opérations élémentaires sont celles qui consistent à faire un pli puis à déplier. Le résultat est une ligne droite, la marque du pli. Le pli sera déterminé par une ou deux conditions, par exemple amener un point P sur un point P' ou sur une droite D, etc... En utilisant une notation inspirée de Peter MESSER, dressons une liste des opérations élémentaires. Les lettres P représentent des points et les lettres D des droites. La colonne <u>Contrainte</u> indique les conditions à respecter pour que le pli ne puisse se faire que d'un nombre fini de façons (indiqué dans la colonne <u>Nombre</u>).

Opération	Contrainte	Résultat en général	Nombre
1 $(P \to P,\ P' \to P')$	$P \neq P'$	Droite PP'	1
2 $(P \to P')$	$P \neq P'$	Médiatrice de PP'	1
3 $(P \to P,\ D \to D)$		Perpendiculaire menée de P à D	1,2
4 $(P \to D,\ D' \to D')$	$\neg(P \in D \text{ et } D \,//\, D')$	Projection de P sur D parallèlement à D'	0,1
5 $(D \to D')$	$D \neq D'$	Bissectrices de $\widehat{D, D'}$	1,2
6 $(P \to D,\ P' \to P')$	$\neg(P = P' \in D)$	Solution équation du 2e degré	0,1,2
7 $(P \to D,\ P' \to D')$	$\{P, P'\} \not\subset D \cap D'$ et $\{P, D\} \neq \{P', D'\}$ et $(P \notin D$ ou $P' \notin D'$ ou $D \cap D' = \emptyset)$	Solution équation 3e degré	0,1,2,3

Remarques :

a) Certaines opérations peuvent dégénérer dans des cas particuliers. Par exemple, si $P' \in D'$, l'opération 7 se décompose en $(P \to D,\ P' \to P')$, c'est-à-dire 6 et en $(P \to D,\ D' \to D')$, c'est-à-dire 4 . On peut si on le souhaite imposer des conditions pour éviter ces dégénérescences.

b) Si D // D', 5 donne la parallèle équidistante de D et D'.

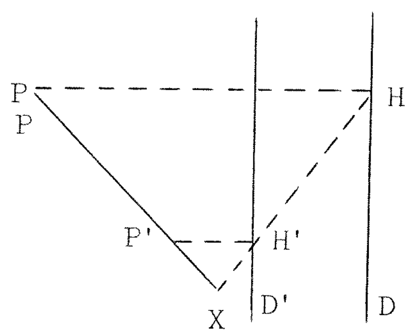


Fig. 9

c) Nous avons vu en 2. et 3. que l'opération 7 résout l'équation du 3e degré si D et D' sont concourantes. Si D // D' (fig. 9), menons les perpendiculaires PH à D et P'H' à D'. HH' rencontre PP' en X. L'opération 7 donne le même pli que l'opération $(P \to D,\ X \to X)$ qui est du type 6 . En effet on voit facilement que X appartient au pli.

8.2 Nous pouvons maintenant définir les constructions réalisables par pliage. Ce seront celles qui respectent les règles suivantes :

a) On part d'un certain nombre de points et de droites considérés comme déjà construits (ou connus).

b) Tout pli obtenu par une opération 1 à 7 à partir d'éléments déjà construits sera considéré comme une droite construite.

c) L'intersection de deux droites construites sera considérée comme un point construit.

Il est à remarquer que l'on n'utilise pas les facilités suivantes : marquer avec un crayon les positions de points ou de droites après pliage, plier plusieurs épaisseurs du papier ensemble. Ces facilités peuvent simplifier certaines constructions mais n'apportent aucune possibilité nouvelle.

Une façon d'apprécier la puissance du pliage en matière de constructions consiste à étudier les nombres "constructibles par pliage". Un nombre sera constructible par pliage s'il est la coordonnée x ou y d'un point que l'on peut construire en partant des seuls points (0,0) (origine des coordonnées) et (1,0). Cette définition est analogue à celle des nombres constructibles avec la règle et le compas.

a) Supposons d'abord que les seules opérations autorisées soient 1 à 4 . Dans ce cas, les seuls nombres constructibles sont ceux de la forme $\frac{a}{2^n}$, avec a entier entre 0 et 2^n, et n entier positif. Si toutefois on ajoute le point (0,1) aux deux points de départ, on peut construire tous les rationnels (les fractions).

b) Avec les opérations 1 à 5 les nombres constructibles constituent un "corps", K_1.

c) Avec 1 à 6 on obtient un corps, K_2, qui est celui des nombres constructibles avec la règle et le compas. Cela s'explique parce que 6 correspond à l'intersection du cercle de centre P' et de rayon P'P avec la droite D.

d) Avec 1 à 7 on obtient un corps encore plus gros, K_3. Les corps K_1, K_2, K_3 sont les plus petits sous-corps du corps des réels ayant la propriété suivante :

- pour K_1 : $x \in K_1$ et $y \in K_1 \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \in K_1$,
- pour K_2 : $x \in K_2$ et $x > 0 \Longrightarrow \sqrt{x} \in K_2$,
- pour K_3 : si $p \in K_3$ et $q \in K_3$, les racines réelles de $x^3 + px + q = 0$ appartiennent à K_3.

Remarque : Les groupes d'opérations mentionnés plus haut sont redondants. Par exemple, il suffit de 1 2 et 5 pour obtenir tous les nombres de K_1.

8.3 En ce qui concerne leur réalisation physique, les opérations (1) à (7) sont de deux types :
- pour réaliser (1) ($P \rightarrow P$, $P' \rightarrow P'$), on courbe le papier au voisinage de PP' puis on pince progressivement de façon à obtenir le pli PP'. Cela exige de surveiller ce qui se passe dans la partie courbée du papier. Les opérations (3) et (6) qui imposent au pli de passer par un point donné sont du même type.
- par contre, pour réaliser (2) ($P \rightarrow P'$) on amène P sur P' et on aplatit en maintenant la coïncidence des deux points. Les opérations (4) , (5) et (7) sont du même type, elles se réalisent en imposant certaines conditions de position relative à deux parties du papier qui reposent à plat l'une sur l'autre. Le pli se forme automatiquement dans la bonne position quand on aplatit l'ensemble de la feuille. Ceci serait facile à réaliser mécaniquement en munissant les points de tétons et les droites de glissières. Par exemple, pour (2) une simple épingle suffit.

Les opérations du second type sont donc, en un certain sens plus simples que celles du premier. Il est assez curieux que toutes les opérations (1) à (7) puissent être remplacées par deux opérations seulement, du second type, à savoir (2) ($P \rightarrow P'$) $P \neq P'$ et une restriction de (7) :

(7bis) : ($P \rightarrow D$, $P' \rightarrow D'$) $P \not\in D$, $P' \not\in D'$, $P \neq P'$.

9. CONCLUSION

9.1 A la suite de l'annonce en Juin 1984 des résultats qui précèdent, nous avons reçu du Professeur K. HUSIMI une solution par pliage pour la trisection publiée en 1980 par K. ABE dans une revue japonaise. Le bruit de cette découverte était déjà parvenu en Europe mais aucune précision ni sur l'auteur ni sur la méthode n'avait pu être obtenue, de sorte que la chose avait été considérée avec scepticisme. La solution de Mr ABE est celle que nous donnons en 4.2, avec en plus une adaptation pratique au carré traditionnel.

Un peu plus tard, en Juillet 1984, Peter MESSER (U.S.A.) nous envoyait un papier donnant l'équation du pli pour les diverses opérations élémentaires, ainsi qu'une méthode élégante pour diviser le côté d'un carré dans le rapport $\sqrt[3]{2}$.

9.2 Le fait que le pliage permette de résoudre l'équation générale du 3e degré prouve que le pliage est un procédé plus puissant que la règle et le compas pour faire des constructions géométriques. Ceci est remarquable pour deux raisons :
- d'abord parce que le pliage ne met en jeu que des moyens très simples,

- mais surtout parce que pendant très longtemps personne ne semble s'être intéressé à l'opération 7 , ou en tout cas n'a jugé utile de publier ses résultats. Une fois venue l'idée d'étudier cette opération, son étude s'effectue sans difficulté. L'opération 7 est en fait peu utilisée en pliage. Le seul exemple que nous en ayons vu se trouve dans "The Silver Rectangle", page 25 (BOS Booklet n° 21). Une réflexion systématique aurait cependant dû conduire à cette opération.

9.3 En fait la croyance commune était que le pliage permet exactement les mêmes constructions que la règle et le compas. Pourtant certains éléments auraient dû inciter à la réflexion :
- une remarque de Steven BARR disant qu'il serait aussi facile de diviser un angle en trois qu'en deux par pliage si l'on avait plusieurs paires de mains,
- la possibilité connue depuis longtemps d'obtenir tout polygone régulier ayant un nombre impair de côtés en faisant un noeud avec une bande de papier.

En réalité, ces deux cas ne correspondent pas à des opérations élémentaires, mais à des opérations avec plis simultanés, où des conditions compliquées sont imposées aux plis (soit à l'aide des mains multiples, soit, dans le cas du noeud, mécaniquement par le fait que le papier ne peut pas se traverser). Peut-on définir de telles opérations ? Peut-on émettre la conjecture qu'avec elles, toute équation algébrique peut être résolue par pliage ?

10. BIBLIOGRAPHIE

- ABE K. - Angle trisection possible by origami (en japonais), Science of Origami, p. 8, supplément à Saiensu, Oct. 1980 (édition japonaise de Scientific American)
- BARR S. - Origametry defined, The Origamian 6,3 (1966), p. 4
- CARREGA J.C. - Théorie des Corps, la Règle et le Compas, Hermann, 1981 (*)
- JOHNSONN D.A. - Paperfolding for the Mathematics Class, National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A., 1971
- JUSTIN J. - Exact angle trisection by Origami (1/6/84)
- MESSER P. - Summary of all irreductible cases of simultaneous superimpositions of elements in a folding plane...
- ROW S. - Geometric exercices in paper folding (1901) Dover, 1966
- MURRAY W. - RIGNEY F. - Paperfolding for beginners, Dover, 1960 (*)

(*) à la bibliothèque de l'I.R.E.M.

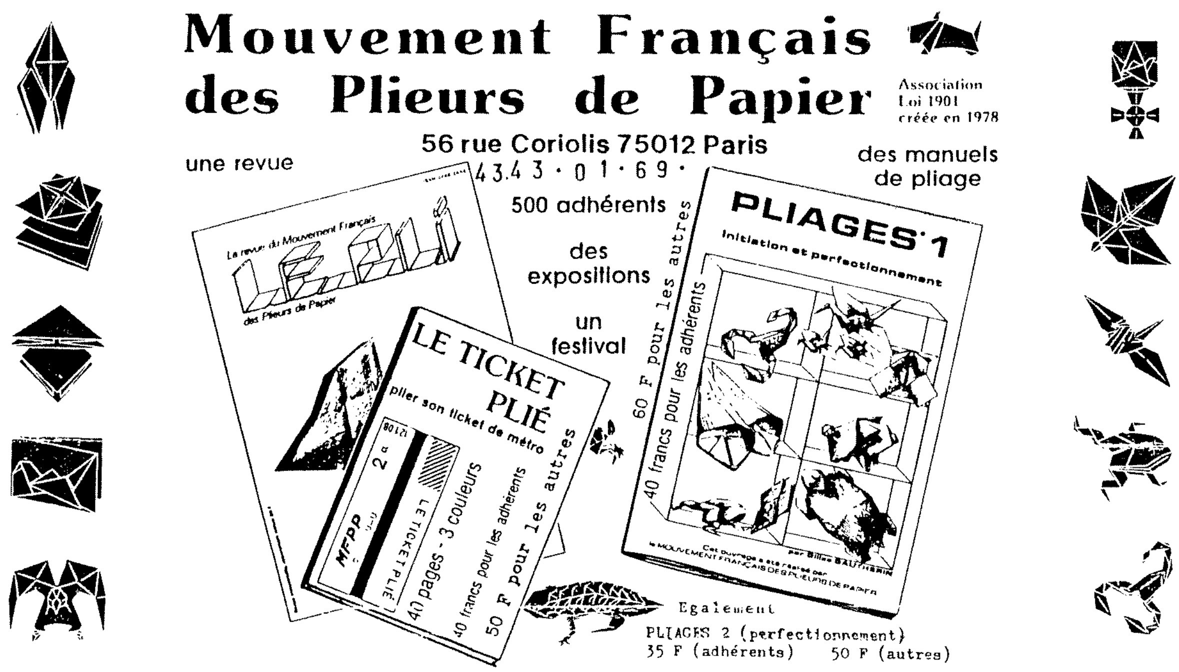
11. ADDITIF

Des recherches récentes du Professeur HUZITA (un Japonais, enseignant en Italie) viennent de déceler un article vieux de cinquante ans qui donne déjà la propriété du pliage étudiée ici. Il s'agit de :

"Sul metodo del ripiegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici", par M. PIAZOLLA BELLOCH, dans Periodico di Mat. IV, XVI, n° 2 (1936) p. 104-108.

La méthode par pliage y apparaît comme apparentée à un procédé de résolution graphique de l'équation du 3e degré dû à LILL et exposé à la fin du livre de Félix KLEIN :

"Elementarmathematik von höheren Standpünkte aus", Bd II (Springer, Berlin, 1926).



Je désire adhérer au M.F.P.P. et recevoir "LE PLI". Je joins à ce bulletin dûment rempli, un chèque de 150 francs (170 frs pour l'étranger) à l'ordre du M.F.P.P., et 5 timbres à 2,10 francs.

TARIF 86

Mlle ☐ Nom : ....

Mme ☐ Prénom : ....

Mr ☐ Né(e) le : ....

Adresse : ....

....

Code postal : Ville : ....

Tél. : .... Pays : ....

Profession : ....

Ecrire en lettres capitales

Bulletin d'adhésion

Je m'engage à ne faire qu'un usage privé et non commercial des documents qui me seront prêtés ou fournis par le M.F.P.P. conformément aux règles concernant le copyright et la protection des droits des auteurs.

date :

Signature :

....

Précédée de la mention "lu et approuvé"

Signature des parents pour les mineurs.