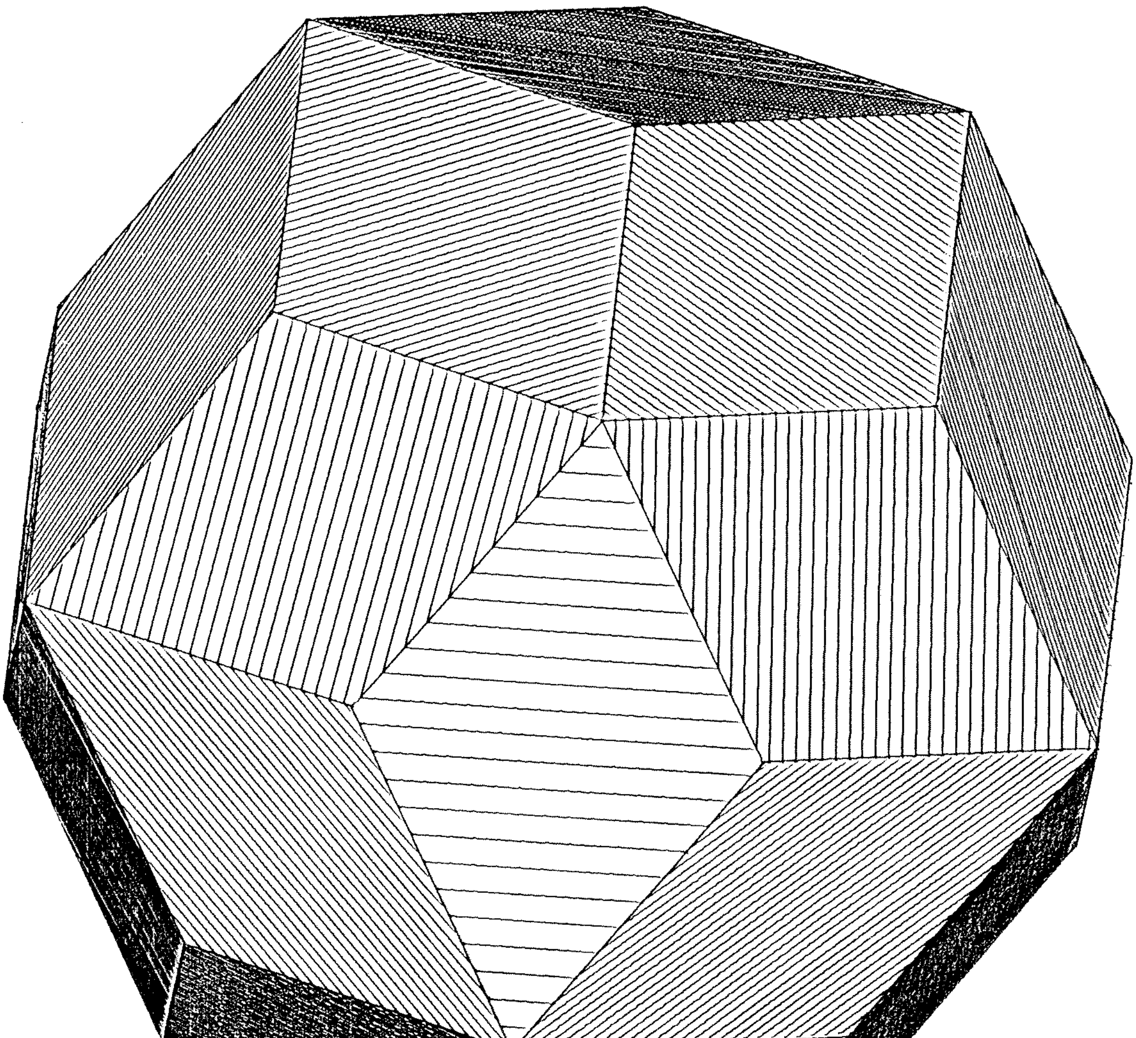
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n°46 - MARS 1987 ISSN 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

Un *triacontaèdre rhombique* illustrant l'article de E. EHRHART. Ce dessin a été exécuté sur table traçante grâce à un logiciel réalisé par N. VOGEL (voir "*L'Ouvert*" n° 37).

ÉCONOMIE ET PÉDAGOGIE

Il est de bon ton de se plaindre du manque de moyens : "*Si les classes étaient moins chargées ... Si les crédits étaient plus importants ... Si la réglementation était moins tatillonne ... Si les programmes ... Si les examens ...*" Un tas de bonnes raisons pour s'accomoder du statu-quo en en rejetant la faute sur l'État.

L'économie intervient dans toutes les activités humaines y compris dans les activités éducatives et/ou pédagogiques, ne serait-ce qu'à travers le temps ("*Ah! si les élèves comprenaient tout de suite ...* ").

Il ne s'agit donc pas d'évacuer l'économie ou d'accuser l'État de tous les maux, mais de subordonner, dans notre métier, l'économie à la pédagogie. Il faut établir un projet pédagogique avec des choix, des priorités, en tenant compte de tous les aspects de la personnalité humaire (le corps, l'esprit, l'art, l'intellect ...) et voir ensuite ce qui est réalisable avec les moyens dont on dispose en fonction des priorités qu'on s'est fixé.

Malheureusement, c'est le contraire qui se produit car ce sont plus souvent des gestionnaires que des pédagogues qui nous dirigent (du ministre au chef d'établissement). On ventile les moyens en fonction de traditions, de corporations, de modes, d'intérêts de classe (voir, par exemple, au niveau de l'établissement la répartition des heures de soutien) et si cela ne suffit pas on crée une réforme soit-disant pédagogique pour camoufler une diminution du budget.

Les progrès de productivité existent en pédagogie, comme le montre l'histoire de l'éducation. Cela justifie des réformes progressives et la formation permanente des enseignants, mais sans doute pas une réforme par ministre et une formation ne permettant qu'avec peine de suivre les modifications incessantes des programmes.

P.S. : La loi MONORY est suspendue mais son application ne l'est pas. Elle se fait par voie de circulaire et de notes de service que certains chefs d'établissement s'empressent d'anticiper avec zèle. Exit les options, les langues rares, l'éducation artistique. A quand notre tour?

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N° 46 — 1987

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : J. LEFORT.
◇ *Correspondance à adresser à* :
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex.
(Tél. : 88-41-63-00, poste 240)
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)* :
80.–F pour l'Alsace
106.–F pour les autres départements français
95.–F pour l'étranger.
(Chèque à l'ordre de Mr l'Agent Comptable de l'U.L.P. (IREM))
◇ *Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.*

LE BOULIER JAPONAIS ([1])

Toshio SAWADA ([2])

Aussi surprenant que cela puisse paraître dans un pays où beaucoup d'entreprises sont informatisées et où les micro-ordinateurs sont fort répandus, tant à l'école qu'à la maison, le *soroban*, l'abaque japonais, demeure au Japon un auxilliaire de calcul et un instrument pédagogique irremplaçable.

Originaire de Chine, le *soroban* fut introduit au Japon il y a environ 450 ans. Les Japonais en mirent au point une version améliorée qui fut bientôt utilisée dans tout le pays. On en enseigna le maniement aux enfants dans les écoles élémentaires, les *tera-ko-ya*, et on peut affirmer sans exagérer que les trois fondements de l'enseignement au Japon devinrent alors la lecture, l'écriture et le calcul sur le *soroban.*

Comment expliquer qu'à une époque où les ordinateurs sont de moins en moins chers et de plus en plus performants, le *soroban*, non content de continuer à exister, fait son apparition dans les programmes de formation d'un certain nombre d'entreprises japonaises — l'une d'entre elles, une grande société de fabrication de matériel informatique, allant même jusqu'à organiser des concours de *soroban* parmi ses employés?

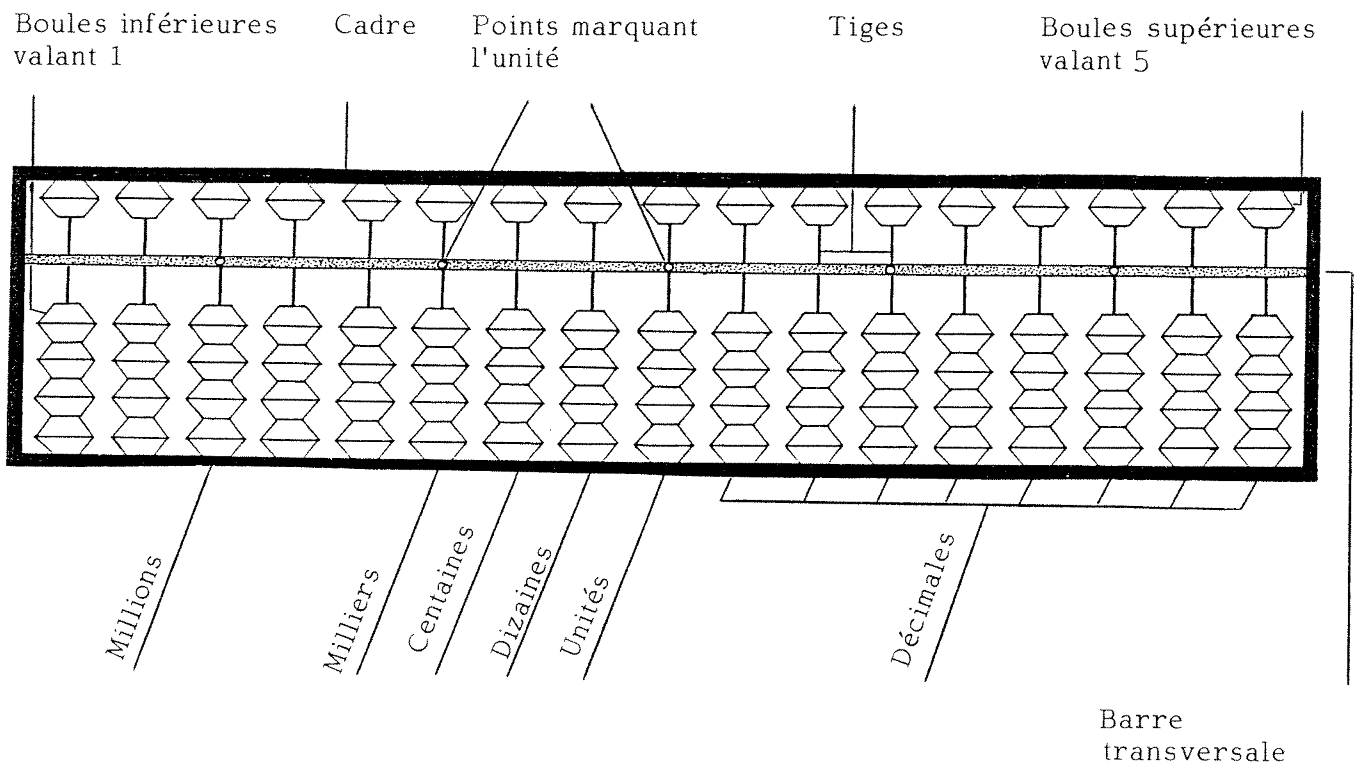
Il y a à cela diverses raisons. Tout d'abord, celui qui maîtrise le *soroban* a toutes les chances d'être fort habile à repérer sur-le-champ les erreurs de calcul et d'acquérir une capacité de calcul mental qui lui permettra de réaliser des estimations rapides, un atout précieux lorsqu'il s'agit d'analyser une affaire et de prendre une décision. Un autre avantage du *soroban* est que son maniement contribue à développer les capacités psychomatrices nécessaires à l'utilisation de machines à clavier.

Aujourd'hui, le maniement du *soroban* est enseigné dans les écoles primaires japonaises à partir de la troisième année et figure en bonne place dans les programmes d'étude des écoles secondaires et commerciales. Diverses caractéristiques du *soroban* en font un bon outil pédagogique. La manipulation des boules permet aux élèves de visualiser les opérations de calcul et les aide à se familiariser avec les chiffres, à prendre du plaisir dans l'apprentissage de l'arithmétique. Il facilite par ailleurs la compréhension de la numération décimale. Etant donné que les chiffres les plus élevés sont posés en premier (voir dessin), il présente en outre l'avantage de rendre plus évidente la proximité des nombres et, incidemment, de permettre des opérations sur des chiffres non seulement écrits, mais aussi dictés.

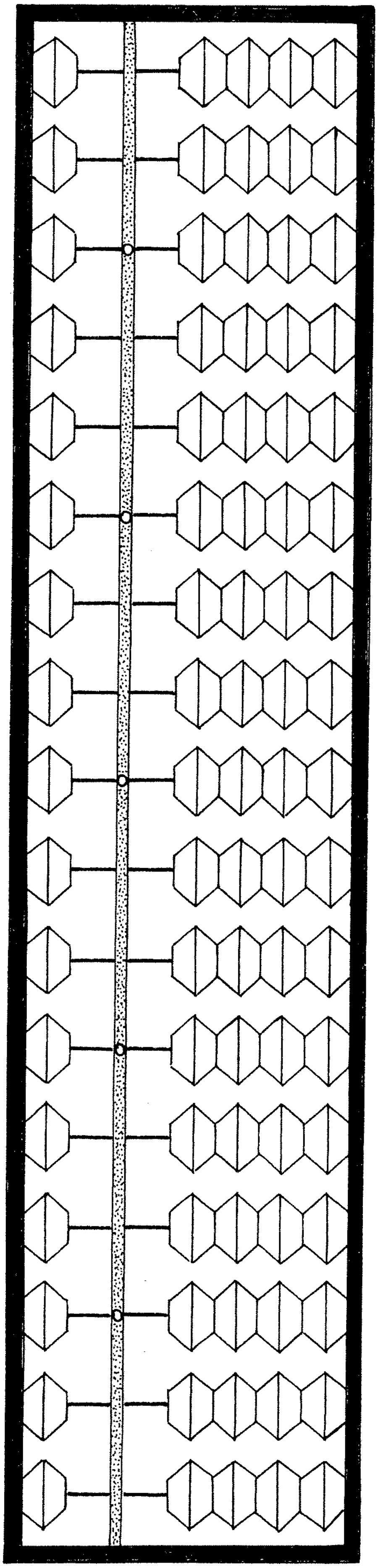
On a pu constater que le maniement du *soroban* développait certaines facultés de calcul bien particulières. Ainsi, le Japon s'est classé premier, il y a quelques

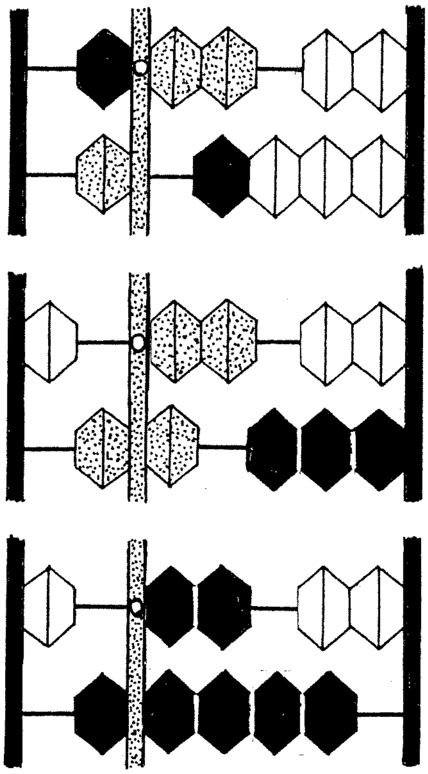
([1]) Reproduit du Courrier de l'Unesco de novembre 1986.
([2]) Toshio SAWADA, pédagogue japonais, est actuellement l'un des principaux responsables des programmes d'éducation à la Division de l'enseignement technique du Service de l'enseignement primaire et secondaire du ministère de l'éducation au Japon.

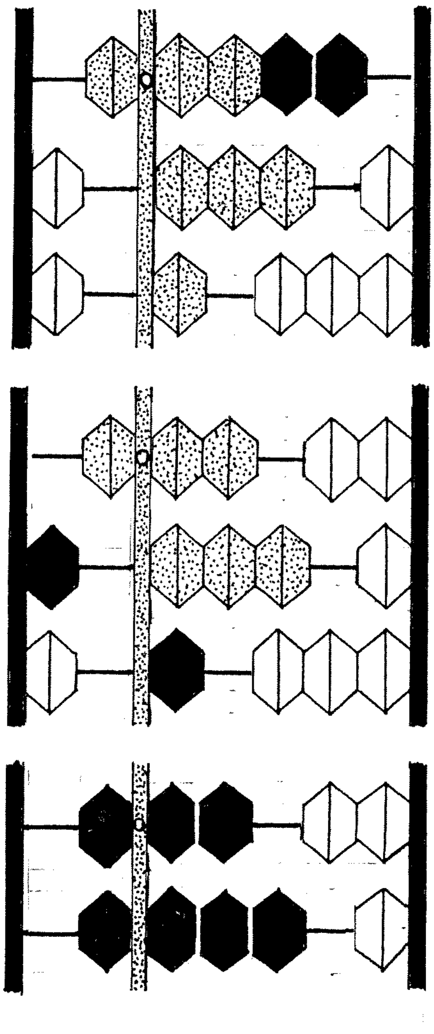
années, à un congrès international de mathématique. Des recherches plus poussées montreront peut-être que cette victoire était due dans une large mesure au maintient de l'usage du *soroban*.

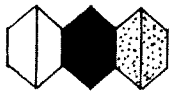


Le *soroban*, l'abaque japonais, est une machine à calculer formée d'un cadre rectangulaire contenant un certain nombre de boules qui coulissent sur des tiges. Une barre transversale divise l'instrument en deux parties : la partie supérieure comprend un rang de boules d'une valeur égale à 5 et la partie inférieure quatre rangs de boules d'une valeur égale à 1. Sur la barre transversale figure, toutes les trois tiges, un point pour marquer l'unité ou la virgule. Les boules de gauche ont toujours une valeur supérieure à celles de droite, et le calcul sur des nombres de plus de deux chiffres se fait toujours de gauche à droite. Enfin, la valeur des boules est déterminée par leur position : elles ne "prennent" leur valeur que lorsqu'elles sont poussées vers la barre transversale.







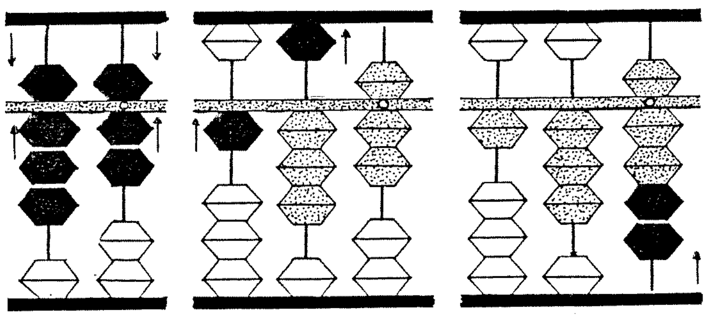


LE BOULIER JAPONAIS

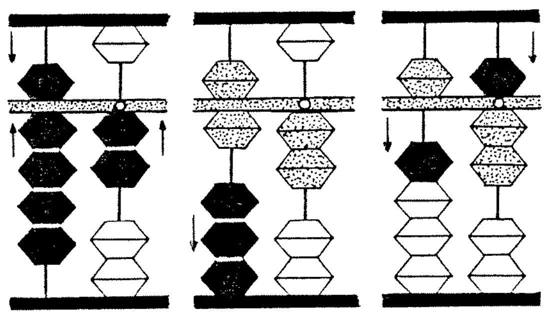
Deux exemples d'opérations arithmétiques simples
sur le *soroban* :

A. Une addition : $87 + 52 = 139$.
(1) Poser 87.
(2) Ajouter 50 (sur les 52) à 80 (de 87) en repoussant vers le haut la boule de valeur 5 et en plaçant une boule de valeur 1 sur la tige de gauche. Le chiffre indiqué sur le *soroban* est alors 137.
(3) Ajouter 2 au 7 de la dernière tige. Le résultat est 139.

B. Une soustraction : $92 - 35 = 57$.
(1) Poser 92.
(2) Retirer 30 (de 35) de 90 (de 92), ce qui donne 62.
(3) On ne peut soustraire 5 de 2. On doit donc emprunter 10 à la tige de gauche qui vaut 60. $10 - 5 = 5$. On ôte donc 10 de 60 et on ajoute 5 sur la tige de droite, qui porte déjà le chiffre 2. Le résultat est 57.



1 2 3



1 2 3

Boule conservée à sa place ou remise à zéro.
Boule déplacée en vue des calculs.
Boule déjà "comptée" ou "placée".

Le 'groupe lycée' vous propose ses deux brochures :
'*Activités Géométriques de la 6e à la Terminale*' (45.– F)
'*Travaux Pratiques en Premières Scientifiques*' (50.– F)
(A noter : la parution au mois de juin de *Travaux Pratiques en Terminale C.D.E.*)
Pour obtenir ces brochures, adressez-vous à la bibliothèque.

DES ÉQUATIONS

QUI DÉTERMINENT LES SECTIONS CIRCULAIRES

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

C'est par ce titre que GAUSS ouvre le dernier chapitre de ses mémorables '*Recherches arithmétiques*'. Son objet est la résolution **algébrique** de l'équation $X^n - 1 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes, algébrique signifiant que les solutions devaient être exprimées uniquement à l'aide des opérations de l'algèbre : somme, produit, quotient, extraction de racines $n^{\text{ième}}$. On sait que les n solutions ont pour images dans le plan complexe les n sommets d'un polygone régulier convexe et l'on comprend que ce problème soit étroitement lié à la construction géométrique de ces polygones.

La construction de polygones réguliers, convexes ou étoilés, est un problème très ancien. L'école de PYTHAGORE (VI$^{\text{e}}$ siècle avant J.-C.) connaissait déjà le pentagone étoilé, le fameux pentagramme, signe de ralliement des pythagoriciens, et dont la construction à la règle et au compas ouvrait la voie à toute une mystique autour du nombre d'or. Mais, pour en rester à un plan strictement mathématique, la mesure de la longueur de la circonférence — autrement dit, le calcul de π — fut aussi très longtemps liée à ce problème. Tant en Grèce, qu'en Inde ou chez les arabes, le nombre π était calculé par approximation, en encadrant un cercle donné par des polygones réguliers inscrits et circonscrits. Dans la mesure où ces polygones étaient construits à la règle et au compas, on savait calculer la longueur de leur côté à l'aide de radicaux carrés, grâce à un emploi judicieux du théorème de PYTHAGORE.

Ainsi ARYABHATTA ($\sim$ 500 après J.-C.) donne $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416$ à l'aide de polygones à 12, 24, 48, 96, 192, 284 côtés, dont il calcule le périmètre en utilisant la relation liant les côtés des polygones ayant n et $2n$ côtés (*cf : 'Mathématiques* 2^{de}' - I.R.E.M. de Strasbourg - ISTRA 1981 (suite convergente vers π)) :

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}.$$

Adrien ROMAIN (1561-1615) calcule 15 décimales avec un polygone de 15×2^{24} côtés.

> Mais, remarquera GAUSS : *"Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties ayant été connue dès le temps d'*EUCLIDE*, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de*

deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent (les divisions en 2^μ , 15 , 3.2^μ , 5.2^μ , 15.2^μ *parties) on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques".* [§ 365] *(*)*

GAUSS, en effet, va complètement révolutionner la question, non seulement en démontrant la possibilité de construire à la règle et au compas le polygone régulier de 17 côtés (et plus généralement de $2^{2^n} + 1$ côtés) mais il va mettre en place des méthodes précises et rigoureuses pour résoudre par radicaux l'équation dite *cyclotomique* pour un entier n quelconque $\frac{X^n-1}{X-1} = 0$, équation directement liée, comme on va le voir, à ce problème. Cette découverte, GAUSS la fit tout jeune, très exactement le 29 mars 1796 à 18 ans, comme il le raconte lui-même dans une lettre datée du 6 janvier 1819 à Chr. L. GERLING :

"C'était le 29 mars 1796 et le hasard n'y avait aucune part ... Une réflexion intense ... me permit, pendant des vacances à Brunswick, le matin de ce jour (encore avant que je me sois levé) de voir la solution avec une clarté totale, de sorte que je pus en faire sur-le-champ l'application particulière au polygone de 17 côtés et la confirmation numérique". [Correspondance entre GAUSS et Chr. L. GERLING, p. 187.]

GAUSS allait mettre sa théorie au point dans les années suivantes et la publier en 1801 (en latin) dans son premier ouvrage qui est aussi un des chefs d'œuvre de la littérature mathématique, sous le titre :

'*Disquisitiones arithmericae*' traduit en
'*Recherches arithmétiques*'

En réalité, seule la section VII et dernière est concernée directement par le problème qui nous occupe, les six premières sections traitant de l'arithmétique que GAUSS appelle transcendante, c'est-à-dire pour l'essentiel des congruences du 2^e degré :

$$aX^2 + 2bxy + cy^2 \equiv N[mod.p].$$

GAUSS remarque lui-même que "*le lecteur pourrait s'étonner de rencontrer une semblable recherche* (— sur les polygones réguliers —) *dans un ouvrage consacré à une doctrine qui paraît au premier abord absolument hétérogène; mais l'exposition fera voir bien clairement quelle est la liaison de ce sujet et de l'Arithmétique transcendantale*".[§355]

L'équation cyclotomique (c) $\frac{X^n-1}{X-1} = 0$ avant GAUSS.

Dès le début du XVIII^e siècle, la résolution de $X^n - 1 = 0$ est ramenée par COTES et DE MOIVRE à la division du cercle en n parties égales. DE MOIVRE remarque

(*) Les citations repérées par [§...] renvoient aux '*Recherches Arithmétiques*'.

en particulier que la substitution

$$Y = X + \frac{1}{X} = 2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

réduit la résolution de $X^n - 1 = 0$ à la résolution par radicaux d'une équation de degré $\frac{n-1}{2}$. Par exemple $X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = 0$ donne pour le second facteur :

$$X^2\left[X^2 + \frac{1}{X^2} + X + \frac{1}{X} + 1\right] = 0 \text{ soit } Y^2 + Y - 1 = 0.$$

Malheureusement, dès que n est premier et dépasse 7 on se heurte à une difficulté incontournable : l'impossibilité de résoudre en général une équation de degré supérieur ou égal à 5, par radicaux. Cette impossibilité n'était bien sûr pas établie au XVIII^e siècle : nous avons vu les efforts de LAGRANGE pour la cerner, dans ses '*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*' (1770) [Voir '*L'Ouvert*' n°44 (sept. 1986)et n° 45 (déc. 1986)] où il est amené à constater :

> *"On pourra résoudre ... toute équation*
>
> $$X^n - 1 = 0$$
>
> *lorsque n ne contiendra d'autres facteurs simples que 2, 3 et 5, c'est-à-dire lorsque n sera de la forme $2^\lambda \,.\, 3^\mu \,.\, 5^\nu$. En admettant la résolution des équations du 3^e degré on pourra encore résoudre l'équation*
>
> $$X^7 - 1 = 0$$
>
> *et par conséquent toute équation*
>
> $$X^n - 1 = 0$$
>
> *lorsque n sera de la forme $2^\lambda.3^\mu.5^\nu.7^\omega$.*
> *Mais on ne saurait aller plus loin, puisque le nombre premier qui suit 7 étant 11 il faudrait pouvoir résoudre l'équation*
>
> $$X^{11} - 1 = 0$$
>
> **ce qui demanderait la résolution d'une équation du cinquième degré**". [§ 22]

Cela situe bien les deux niveaux d'attaque du problème de la résolution de l'équation cyclotomique (c) par radicaux :

1. ramener l'équation (c) à des équations que l'on sait résoudre, c'est-à-dire de degré inférieur à cinq;

2. trouver une méthode de résolution **propre** à ce type d'équation, et valable si possible quel que soit le degré, en jouant sur les propriétés spécifiques des racines de cette équation.

La même année où LAGRANGE publiait ses '*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*' un autre mathématicien français VANDERMONDE ouvrait une brèche sur le deuxième front, en résolvant effectivement l'équation (c) dans le cas $n = 11$.

VANDERMONDE : 'Mémoire sur la résolution des équations'.

Cette résolution par VANDERMONDE mérite qu'on s'y arrête un peu, car elle contient en germe la méthode qu'utilisera GAUSS, calculant avant lui des fonctions des racines invariantes par permutation circulaire.

Soit donc l'équation $\frac{X^{11}-1}{X-1} = 0$ qui devient, avec $u = -(X + \frac{1}{X})$,

(1) $u^5 - u^4 - 4u^3 + 3u^2 + 3u - 1 = 0$ et dont les racines sont les nombres $(-2\cos\frac{2k\pi}{11})$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarquons que, à cause de la relation $2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 - 2$, on a intérêt à ranger ces cinq racines dans l'ordre a, b, c, d, e avec

$$a = -2\cos\frac{2\pi}{11} \qquad b = -2\cos\frac{4\pi}{11} \qquad c = -2\cos\frac{8\pi}{11}$$
$$d = -2\cos\frac{16\pi}{11} = -2\cos\frac{6\pi}{11} \qquad e = -2\cos\frac{32\pi}{11} = -2\cos\frac{10\pi}{11}.$$

De sorte que

$$\begin{array}{lllll} a^2 = -b+2 & b^2 = -c+2 & c^2 = -d+2 & d^2 = -e+2 & e^2 = -a+2 \\ ab = -a-d & bc = -b-e & cd = -a-c & ac = -d-e & bd = -a-e \\ ce = -b-a & ad = -b-c & be = -c-d & de = -d-b & ae = -c-e. \end{array}$$

Alors le nombre $\Delta^5 = (a + rb + r^2c + r^3d + r^4e)^5$ — où r est l'une quelconque des racines 5^e de l'unité $(r \neq 1)$ — s'exprime à l'aide des fonctions symétriques des racines et est donc calculable à l'aide des coefficients de l'équation (1).

En effet : $\Delta^2 = (-2r + 2r^2 - r^3)(a + r^2b + r^4c + r^6d + r^8e)$ et en utilisant la permutation des r^p définie par $r \to r^2$:

$$\Delta^4 = (2r - 2r^2 - r^3)^2(2r^2 - 2r^4 - r^6)(a + r^4b + r^3c + r^2d + re),$$

d'où

$$\Delta^5 = -11(6r + 41r^2 + 16r^3 + 26r^4).$$

Si l'on prend par exemple

$$r = e^{\frac{2i\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

on obtient

$$\Delta^5 = \frac{11}{4}\left[89 + 25\sqrt{5} + (20\sqrt{10+2\sqrt{5}})i - (25\sqrt{10-2\sqrt{5}})i\right]$$

ou encore

$$\Delta^5 = \frac{11}{4}\left[89 + 25\sqrt{5} - 5i\sqrt{5+2\sqrt{5}} - 45i\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right]$$

en remarquant que

$$\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \pm \sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Vandermonde ne donne pas le détail du calcul dans son mémoire; il indique simplement que

$$\Delta' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 + 25\sqrt{5} - 5q + 45p)}$$

avec $q = \sqrt{-5+2\sqrt{5}}$ et $p = \sqrt{-5-2\sqrt{5}}$ et des valeurs semblables, pour les autres valeurs de r :

$$\Delta'' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} + 5q - 45p)}$$

$$\Delta''' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} - 5q - 45p)}$$

$$\Delta'''' = \sqrt[5]{\frac{11}{4}(89 - 25\sqrt{5} + 5q - 45p)}$$

et l'expression d'une racine

$$X = \frac{1}{5}(1 + \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta'''').$$

Le lecteur d'aujourd'hui peut s'étonner de voir écrit ces derniers radicaux portant sur des nombres négatifs, voire imaginaires; cela n'avait rien de choquant à l'époque puisque jusqu'à Gauss le nombre i était noté $\sqrt{-1}$.

Le projet avoué de Vandermonde était plus ambitieux que simplement la résolution de l'équation cyclotomique. Il pensait que sa méthode devait pouvoir s'appliquer à n'importe quelle équation du 5$^{\text{e}}$ degré, en trouvant une fonction correcte (calculable) des cinq racines.

> *"Il faudrait, si le 5$^{\text{e}}$ degré est résoluble généralement qu'on arrivât en dernière analyse à des équations qui eussent des facteurs rationnels, du 4$^{\text{e}}$ degré au plus; et que dans l'usage à faire des racines de ces facteurs égalés à zéro, on ne fut obligé de passer que par des équations d'un degré*

> *moindre que le 5^e ! Mais nous pouvons suivre le fil de ces recherches sans calculer les équations même (...) et* **si quelque chose nous empêche d'épuiser successivement par ce moyen toutes les possibilités, ce ne sera que la longueur des calculs**". [VANDERMONDE § XXXIV, p. 412—413.]

ABEL et GALOIS nous ont appris depuis, que loin d'être seulement une question de longueur de calcul, il y avait une impossibilité '*structurelle*' pour résoudre l'équation générale du 5^e degré.

LEBESGUE qui était très préoccupé des questions historiques en mathématiques, a voulu cependant rendre justice à VANDERMONDE :

> "*Certes le travail de* GAUSS *est un chef-d'œuvre : chef-d'œuvre d'exposition élégante, rigoureuse et complète, chef-d'œuvre de compréhension et d'intelligence mais où la part d'invention personnelle est en réalité fort mince (...).* GAUSS *dans l'un ou l'autre de ses calculs suit pas à pas* VANDERMONDE*; mais bien entendu, il le perfectionne beaucoup (...). De* VANDERMONDE *est la méthode, de* GAUSS *sont les résultats. Il ne s'agit pas de diminuer* GAUSS*, mais de rendre justice* à VANDERMONDE ". [Cité dans '*Message d'un mathématicien*', p. 120, par Lucienne FÉLIX.]

Pour savoir si LEBESGUE a raison, il faudrait étudier ligne par ligne le texte de VANDERMONDE et le comparer à celui de GAUSS. Nous nous contenterons ici de présenter le texte de ce dernier lors du prochain numéro de '*L'Ouvert*'.

EH TEL INEGAL PALINDROME NE MORD NI LA PLAGE NI LE THE

$$356 + 875 = 578 + 653$$
$$38 + 72 = 27 + 83$$
$$2375 + 4841 = 1484 + 5732$$
$$x^2 a + a^2 x$$
$$23 \times 54 + 876 = 678 + 45 \times 32$$
$$24 \times 35 + 76 \times 87 = 78 \times 67 + 53 \times 42$$
$$343 = (3+4)^2(5+2) = (2+5)^2(4+3) = 343$$
$$(38+72)^2(29+81) = (18+92)^2(27+83)$$

Remarque : Ceci n'est en aucune façon l'illustration de la commutativité des différentes opérations.

TOUTE FONCTION DÉRIVABLE EST L'INTÉGRALE DE SA DÉRIVÉE

Michel EMERY

Il est toujours fascinant d'assister à la diffusion d'une idée nouvelle : d'abord, pendant assez longtemps, connue seulement d'un petit nombre, la nouveauté paraît ne gagner que lentement, jusqu'au point où elle semble, presque instantanément, conquérir de façon explosive la grande masse. Le non-standard a fourni il y a dix ans un exemple d'une telle explosion; les intégrales de RIEMANN généralisées vont probablement en fournir un autre.

Ces intégrales ont fait leur apparition à Strasbourg durant l'hiver 1985/1986, à l'occasion d'une conférence donnée par le Professeur Jean MAWHIN (Université de Louvain). Il s'agit d'un procédé d'intégration très simple, inventé en 1957 par le tchécoslovaque J. KURZWEIL, et qui se trouve être, en fin de compte, très puissant (équivalent à l'intégrale de PERRON).

Soit $[a, b]$ un intervalle compact, avec $a < b$. On désigne par *partition de* RIEMANN de $[a, b]$ la donnée d'un entier $n \geq 1$, de $n + 1$ nombres

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

et de n nombres $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Si σ est une telle partition de RIEMANN et f une fonction sur $[a, b]$, on appelle *somme de* RIEMANN le nombre

$$S(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Rappelons que l'intégrale de RIEMANN de f est le nombre I, s'il existe, caractérisé par la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute partition de RIEMANN σ de pas $|\sigma| = \sup_i(t_i - t_{i-1})$ plus petit que δ, on ait $|I - S(f, \sigma)| < \epsilon$. L'idée géniale de KURZWEIL est de faire varier δ en fonction de x_i.

DÉFINITIONS.

1°) *Soit δ une fonction strictement positive sur $[a, b]$. On dit que la partition de* RIEMANN *σ est contrôlée par δ si, pour tout i, on a*

$$[t_{i-1}, t_i] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)].$$

2°) *Soient f une fonction sur $[a, b]$ et I un nombre. On dit que I est l'intégrale de f si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\delta > 0$ sur $[a, b]$ telle que, pour toute partition de* RIEMANN *σ contrôlée par δ, on ait*

$$|I - S(f, \sigma)| < \epsilon.$$

Cette définition n'a d'intérêt que par la remarque suivante, sans laquelle tout nombre serait l'intégrale de toute fonction!

LEMME.— *Soit δ une fonction strictement positive sur $[a, b]$. Il existe une partition de* RIEMANN *contrôlée par δ.*

Démonstration.
Soit E l'ensemble des réels c de $]a, b]$ tels qu'il existe une partition de RIEMANN de $[a, c]$ contrôlée par δ (ou, plus exactement, par la restriction de δ à $[a, c]$). Cet ensemble E n'est pas vide, car il contient les c assez proches de a pour que $c - a \leq \delta(a)$. Il admet donc une borne supérieure s. Puisque E contient un élément d dans $[s - \delta(s), s]$, il est facile de voir que s est dans E (en rajoutant si nécessaire l'intervalle $[d, s]$ à la partition de $[a, d]$), et que $s = b$ (sinon, en rajoutant encore l'intervalle $[s, inf(b, s + \delta(s))]$, on verrait que s n'est pas la borne supérieure de E). Donc b est dans E.

Ce lemme donne un sens à la définition, et permet de montrer immédiatement l'unicité de l'intégrale I (quand elle existe). Il est aussi très facile de vérifier que les fonctions qui admettent une intégrale forment un espace vectoriel, que l'intégrale est linéaire et positive, et vérifie la relation de CHASLES $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$.

En outre, en considérant des fonctions δ constantes, on constate que cette intégrale généralise celle de RIEMANN (si f a une intégrale de RIEMANN, celle-ci est son intégrale). En réalité, ce procédé est même plus général que l'intégrale de LEBESGUE : on peut montrer que f est intégrable au sens de LEBESGUE sur $[a, b]$ si et seulement si f et $|f|$ ont toutes deux une intégrale. Je ne vais pas le faire ici, me contentant de trois remarques.

Premièrement, il n'est pas difficile de vérifier que ce procédé d'intégration généralise strictement celui de RIEMANN. L'exemple classique de fonction intégrable pour LEBESGUE mais pas pour RIEMANN est la fonction de DIRICHLET qui vaut 1 aux points rationnels et 0 aux points irrationnels. Je laisse au lecteur l'exercice amusant et instructif consistant à vérifier que l'intégrale de cette fonction est nulle.

Deuxièmement, il est des fonctions que l'on a bien envie d'intégrer, mais qui ne sont pas prises en compte par la théorie de LEBESGUE : les fonctions dérivées. Par exemple si $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, avec $f(0) = 0$, la fonction f est dérivable sur $[-1, 1]$, mais sa dérivée f' possède en 0 une singularité suffisante pour que $\int_{-1}^1 |f'(x)|dx = +\infty$; donc f' n'est pas intégrable pour LEBESGUE.

Bien sûr, des théories sophistiquées (DENJOY, PERRON) permettent d'intégrer toute fonction dérivée. Mais ce qui est remarquable, avec cette "nouvelle" théorie (elle frise quand même la trentaine!), c'est la dérisoire facilité avec laquelle elle parvient à ce résultat.

THÉORÈME.— *Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$. Sa dérivée f' admet une intégrale, qui n'est autre que $f(b) - f(a)$.*

Démonstration.
Soit $\epsilon > 0$. Pour $u \in [a, b]$, il existe $\delta(u) > 0$ tel que $0 < |v - u| \leq \delta(u)$ entraîne

$$\left|\frac{f(v) - f(u)}{v - u} - f'(u)\right| \leq \epsilon \;;$$

c'est la définition de $f'(u)$.

Soit σ une subdivision contrôlée par la fonction δ ainsi construite. On peut écrire

$$|f(t_i) - f(x_i) - (t_i - x_i) f'(x_i)| \leq (t_i - x_i)\, \epsilon$$

car $0 \leq t_i - x_i \leq \delta(x_i)$, et

$$|f(x_i) - f(t_{i-1}) - (x_i - t_{i-1}) f'(x_i)| \leq (x_i - t_{i-1})\, \epsilon$$

car $0 \leq x_i - t_{i-1} \leq \delta(x_i)$.
Par addition, on obtient

$$|f(t_i) - f(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1}) f(x_i)| \leq (t_i - t_{i-1})\, \epsilon,$$

et donc

$$|f(b) - f(a) - S(f', \sigma)| = \left|\sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1}) - (t_i - t_{i-1}) f'(x_i)]\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\, \epsilon = (b - a)\, \epsilon.$$

Le théorème est démontré.

Enfin, je voudrais faire observer combien cette modification de la définition de RIEMANN est naturelle. Lorsqu'on fait calculer numériquement par une machine l'intégrale d'une fonction qui présente des singularités, on est amené à utiliser des subdivisions à pas variable, qui deviennent plus fines dans les régions où la fonction est moins régulière. C'est exactement ce que fait le procédé de KURZWEIL : au lieu d'utiliser, comme RIEMANN, les mêmes subdivisions pour toutes les fonctions, il autorise, par l'intermédiaire des fonctions δ, un choix des subdivisions adapté à la fonction à intégrer. La définition de RIEMANN, avec des fonctions δ constantes, marche bien pour les fonctions continues parce qu'elles sont uniformément continues.

Espérant avoir suffisamment éveillé la curiosité du lecteur, je n'en dirai pas plus. Il trouvera des démonstrations élémentaires des propriétés de convergence monotone ou dominée dans l'article de E. J. MCSHANE (*Amer. Math. Monthly*, Avril 1973; n'imposant pas la condition $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, MCSHANE obtient une intégrale un peu moins générale, qui se trouve équivaloir à celle de LEBESGUE). Enfin, des références bibliographiques sur la question figurent à la fin de l'article de S. LEADER (*Amer. Math. Monthly*, Mai 1986; plus difficile à lire, mais une bibliographie nombreuse).

LE CONTINU ET L'ORDINATEUR

Jacques HARTHONG

1.— Les systèmes de numération et les nombres.

Le système romain de numération ne permet pas d'écrire un nombre tel que un milliard. Par conséquent, l'ensemble des nombres susceptibles d'une écriture romaine est entièrement majoré par un milliard. Un théorème connu de l'arithmétique nous assure que cet ensemble possède dès lors un plus grand élément N. Quel est ce nombre N, le plus grand qui puisse s'écrire en chiffres romains?

Tout mathématicien sent qu'il y a là quelque chose qui ne vas pas; mais quoi? Supposons qu'un élève nous pose la question. Attention, ne répondez pas à la légère ou par un argument d'autorité, car un élève qui pose une telle question pourrait bien être la réincarnation de STENDHAL (voir "*L'Ouvert*" n°23, fév. 81, page 2). Mais trouvez vous-même la réponse car je ne la fournirai pas ici.

Il est couramment admis que le système arabe de numération permet, lui, d'écrire n'importe quel nombre; bien entendu, il n'en est rien : il est aussi difficile d'écrire 10 puissance un milliard en chiffres arabes que un milliard en chiffres romains. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a inventé l'écriture exponentielle $10^{1000000000}$. On pourra, certes, rétorquer que cette écriture exponentielle n'est qu'une variante, une extension évidente de l'écriture décimale; mais il n'est guère difficile de trouver un nombre trop grand pour pouvoir être écrit même sous forme exponentielle, et cela simplement en introduisant une nouvelle écriture, la notation de KNUTH : on pose $a \uparrow b = a^b$ puis $a \uparrow\uparrow b = a \uparrow (a \uparrow b), a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow^3 b = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow b)$ et ainsi de suite par récurrence $a \uparrow^n b = a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^{n-1} b)$. Essayez maintenant d'écrire le nombre $10 \uparrow^{1000000000} 10$ en notation exponentielle! Pour donner une idée concrète de la puissance d'une telle notation, voyons les premiers exemples :

$$2 \uparrow 2 = 4$$
$$2 \uparrow\uparrow 2 = 16$$
$$\text{mais } 2 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 2^{65536} \simeq 2.10^{19728}$$

on peut montrer que

$$2 \uparrow^2 2 = 2^{2^2},\ 2 \uparrow^3 2 = 2^{2^{2^2}} \quad \text{(4 exposants successifs)}$$

et par récurrence :

$$2 \uparrow^n 2 = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \quad (2^{n-1}\text{exposants successifs}).$$

Ainsi pour écrire $2 \uparrow^{30} 2$ en notation exponentielle il faudrait (avec les caractères typographiques de cette page) une feuille de papier de 2 000 km de côté : les exposants successifs occuperaient toute la longueur de la diagonale. Pour écrire $2 \uparrow^{100} 2$, il faudrait une feuille de deux cent milliards d'années-lumière de côté!

Peut-on trouver des nombres qui ne peuvent pas être écrits dans la notation de KNUTH? Rien de plus facile, direz-vous, il suffit d'inventer une notation encore plus puissante. D'ailleurs, celle-ci existe déjà (cela s'appelle la procédure de GRAHAM) :

$$\begin{aligned} \text{on pose } a\Gamma\, b &= a \uparrow b \\ a\Gamma^2 b &= a \uparrow^{a\Gamma b} b \\ a\Gamma^3 b &= a \uparrow^{a\Gamma^2 b} b \\ \text{et par récurrence } a\Gamma^n b &= a \uparrow^{a\Gamma^{n-1} b} b. \end{aligned}$$

Rien ne nous empêche de continuer ainsi pendant des heures, si ce n'est peut-être une vague éthique qui nous fait soudain songer aux populations déshéritées du tiers-monde dont l'étalage de ces chiffres vertigineux, affublés d'unités telles que le dollar ou — encore plus désopilant — la mégatonne, ne peut qu'accroître la souffrance.

Toute cette multiplicité de procédés d'écriture nous donne le sentiment qu'en perfectionnant progressivement le langage numérique, nous pouvons couvrir des domaines de plus en plus vastes; il suffirait pour cela d'enrichir le langage de l'arithmétique, qui au départ ne comporte dans son alphabet que les 10 chiffres décimaux et les cinq symboles algébriques $+, -, \times$, : et $=$, en lui adjoignant successivement $\uparrow$, puis $\uparrow^n$, puis Γ^n. Or, en réalité, nous ne couvrons pratiquement rien ainsi. *Il se trouve qu'il y a une différence essentielle entre l'écriture décimale et les extensions que nous venons de présenter* : lorsqu'un nombre (par exemple mille milliards) est écrit en notation décimale, tous les nombres plus petits peuvent également être écrits, sans plus de peine puisqu'ils ne comportent pas plus de chiffres, mais ce n'est plus le cas pour un nombre tel que $10 \uparrow^{10} 10$. Ainsi, écrire 1 480 768 066 051 (nombre de 13 chiffres pris au hasard) n'est pas plus pénible que d'écrire 1 000 000 000 000 (nombre de 13 chiffres qui n'est pas pris au hasard). Par contre, un nombre tel que $10 \uparrow^3 10$, comporterait en écriture décimale $10^{10^{10^{10}}}$ chiffres; notez bien que si nous remplissions de chiffres les pages de "*L'Ouvert*" et si nous remplissions complètement, avec de tels numéros de "*L'Ouvert*" , un cube de un milliard d'années-lumière de côté, nous pourrions stocker 10^{84} chiffres environ. On peut donc soumettre au Directeur de l' I.R.E.M. un projet consistant à écrire un nombre de 10^{84} chiffres puisqu'il y a la place dans l'univers pour archiver les numéros de "*L'Ouvert*" que cette opération nécessite, mais vous voyez bien que pour un nombre de $10^{10^{10^{10}}}$ chiffres, ce ne serait pas réaliste. La notation de KNUTH permet d'écrire de très grands nombres, mais parmi les très grands nombres, **très peu peuvent être écrits en notation de** KNUTH. Cela montre que s'il est facile d'écrire (en notation de KNUTH) le nombre $10 \uparrow^4 10$, il est impossible d'écrire un nombre "au hasard" de l'ordre de $10 \uparrow^3 10$, qui est pourtant bien plus petit. Mais qu'est-ce qu'un "nombre au hasard" ?

2.— Les nombres et les algorithmes.

Le concept de nombre au hasard (ou plus techniquement : nombre aléatoire) n'est pas évident; ainsi vous ne pouvez pas dire qu'un nombre est au hasard simplement du fait que ses chiffres binaires (par exemple) ont été tirés à pile ou face : il se pourrait en effet qu'en tirant $10 \uparrow^4 10$ fois de suite, vous obteniez par malchance 0 fois face et $10 \uparrow^4 10$ pile, vous donnant ainsi le nombre 0 qui n'est pas au hasard.

Fort heureusement ce concept a fait l'objet d'une étude absolument magistrale par Emile BOREL (1905). Emile BOREL dit qu'un nombre est aléatoire s'il ne peut pas être défini par un algorithme; plus exactement : un nombre est aléatoire s'il ne peut pas être défini par un algorithme plus simple que la simple donnée de ses décimales successives. Selon cette définition les nombres de base 0, 1, 2, ... 9 sont forcément aléatoires (mais cela est peu intéressant). Par contre le nombre suivant : 123456789101112131415... (Vous écrivez tous les entiers naturels à la suite les uns des autres dans l'ordre croissant et sans laisser de blanc, jusqu'à l'entier un milliard) est non aléatoire car tout le monde conviendra que les instructions entre parenthèses, qui constituent l'algorithme, sont bien plus courtes que la donnée directe des 8 888 888 899 décimales du nombre. Toutefois, pour que cette définition soit effectivement opératoire, on doit pouvoir mesurer de façon précise la complexité d'un algorithme, afin de décider sans ambiguïté si oui ou non un algorithme donné est "plus simple que la donnée directe des décimales". Or aujourd'hui cela n'est plus un problème; les langages de programmation sont des langages impeccablement codifiés, et la complexité d'un programme sera (par définition) la quantité d'information qu'il contient, comptée en bits : c'est donc toujours un entier. La complexité ainsi définie dépend évidemment du langage utilisé, du microprocesseur, du système d'exploitation, etc. Mais sur une calculatrice donnée, avec un langage donné, elle est toujours bien définie (et affichée après compilation). Pour les besoins de cet article, un langage extrêmement simple suffit amplement, et pour fixer les idées, nous choisirons le langage de la T.I. 66. Avant de poursuivre, voici cependant une remarque importante :

> *Dans tout cet article, l'analyse que nous ferons des nombres, des algorithmes, ou des programmes fait totalement abstraction des limites techniques de la calculatrice, telles que les capacités de mémoires, le nombre de décimales affichées ou retenues, etc. Seul est pris en compte le langage lui-même, alphabet et syntaxe*

En adoptant ces hypothèses de travail, la complexité d'un algorithme (ou programme) est maintenant une grandeur parfaitement définie : c'est le nombre de pas du programme; bien entendu, quoique la T.I. 66 ne puisse enregistrer plus de

512 pas de programme, son langage permet néanmoins d'écrire des programmes de 1 000, 10 000, ou (si on en a la patience) 100 000 pas, et c'est bien cela qui nous intéresse. Si nous voulons désigner un nombre quelconque nous pouvons indiquer la liste de ses décimales : cela constitue bien un programme T.I., il suffit d'appuyer successivement sur les touches numériques correspondant à chacune de ces décimales. La complexité d'un tel programme est alors le nombre de décimales du nombre. Soit par exemple le nombre 10 000 000 000 (dix milliards); désigné sous cette forme décimale il comporte onze chiffres et le programme correspondant commande d'appuyer une fois sur la touche 1 puis dix fois sur la touche 0 : sa complexité est égale à 11. Mais nous pouvons écrire ce même nombre sous la forme 10^{10}, et, puisque nous avons une touche "puissance" (notée ici $\uparrow$) nous pouvons désigner le même nombre dix milliards par le programme 10 $\uparrow$ 10 qui comme vous le voyez vous-même, ne comporte que cinq pas (autrement dit, sa complexité est 5). Par conséquent, le nombre dix milliards n'est pas aléatoire, puisqu'il a pu être désigné par un programme plus simple (de complexité égale à 5) que la donnée directe de ses décimales (dont la complexité est 11). Si nous avions pris le nombre 10 460 353 203, il pourrait sembler à première vue qu'il est pris au hasard, mais ne vous y fiez pas : il est obtenu par le programme 3 $\uparrow$ 21 (de quatre pas). Lorsqu'un nombre est tiré au hasard,il est donc en général très difficile de s'assurer qu'il est aléatoire selon la définition d'Emile BOREL, mais peu importe car là n'est pas la question.

En plus du concept de nombre aléatoire, introduisons encore un autre concept qui clarifiera nos discussions ultérieures : *l'entropie d'un nombre.* C'est tout simplement le rapport :

$$\text{entropie de N} = \frac{\text{complexité du plus simple programme donnant N}}{\text{nombre de chiffres décimaux de N}}$$

Nous voyons immédiatement que l'entropie est toujours ≤ 1, et qu'elle est *égale* à 1 précisément pour les nombres aléatoires; les nombres aléatoires sont donc les nombres dont l'entropie est maximale. Bien sûr, si vous me donnez, comme ça, un nombre de cinquante chiffres "pris au hasard" (par exemple les résultats des matches de foot de ce week-end dans le Bas-Rhin) il me sera impossible de calculer son entropie : le dénominateur de la fraction vaut évidemment 50, mais le numérateur (sauf hasard miraculeux) sera absolument non-évaluable. Cela n'enlève cependant rien à l'intérêt de ce concept, comme nous ne tarderons pas à le voir.

L'entropie dépend du langage de programmation, mais cette dépendance est inessentielle : les valeurs exactes de l'entropie changeraient, certes, avec le langage de programmation, mais ces valeurs exactes sont presque toujours inconnaissables; tandis que les propriétés qualitatives (les seules à nous être utiles) sont pratiquement indépendantes de ce choix.

Nous voici maintenant mieux armés théoriquement pour poursuivre notre discussion.

Nous avons vu plus haut que si on peut écrire un milliard en notation décimale, il n'est pas plus difficile d'écrire n'importe quel autre nombre à neuf chiffres, tandis que si on peut écrire $10 \uparrow^3 10$ en notation de KNUTH, on ne peut, notation de KNUTH ou pas, écrire n'importe quel nombre de cet ordre. Reprenons cela en termes d'entropie. Parmi les nombres à neuf chiffres, il en est (la plupart, d'ailleurs) qui sont aléatoires; mais quant aux autres, leur entropie ne peut guère devenir inférieure à $1/3$, un cas optimum étant par exemple le nombre $387\,420\,489 = 9^9$: il peut être obtenu par le programme $9 \uparrow 9$ dont la complexité est 3, soit une entropie de $3/9 = 1/3$. Par contre l'entropie de $10 \uparrow^3 10$ est pratiquement nulle; en effet le programme suivant calcule $10 \uparrow^3 10$:

4
$x \sim t$
0
STO 1
10
STO 0
LBL 0
10
$\uparrow$
RCL 0
$=$
STO 0
1
STO + 1
RCL 1
INV 2nd $x \leq t$
GTO 0
RCL 0

ce programme comporte 20 pas, mais n'essayez pas de l'exécuter sur votre T.I. 66, qui n'est pas prévue pour afficher des nombres de cet ordre! Ce programme étant vraisemblablement le plus court possible, nous obtenons pour l'entropie de $10 \uparrow^3 10$:

$$\frac{20}{10^{10^{10^{10}}}}$$

c'est-à-dire un nombre si prodigieusement petit que cette fois nous n'aurions guère de scrupules à l'affubler de mégatonnes.

Nous pouvons donc conclure de ces considérations que, parmi les très grands nombres, ceux que nous pouvons désigner ont tous une entropie quasi-nulle. Par ailleurs, nous avons calculé tout à l'heure qu'il est matériellement impossible d'écrire des textes de plus de 10^{84} signes. Il est donc certain que tous les programmes que nous écrirons jamais auront une complexité inférieure à 10^{100} (vous voyez : je compte large). Le nombre de tous les programmes de complexité $\leq 10^{100}$ est donc inférieur au nombre total de textes pouvant être écrits avec les 25 touches de programmation et comportant au plus 10^{100} lettres, autrement dit inférieur à $25^{10^{100}+1} - 1$. (En fait le nombre de programmes, quoique immense, est bien inférieur à cela, puisque très peu de ces textes respectent la syntaxe et possèdent le sens nécessaire pour constituer un programme; mais puisque nous comptons large ...) Cet argument nous prouve que parmi tous les nombres compris entre 0 et $10 \uparrow^3 10$, très peu sont programmables : la densité de ces derniers est en tous cas inférieure à

$$\frac{25^{10^{100}}+1}{10 \uparrow^3 10}$$

c'est-à-dire, là encore, quasi nulle. *Conclusion : presque tous les nombres sont non programmables* (synonyme ancien : non assignables).

A l'inverse, nous appellerons entiers assignables ou *entiers standard* tous les nombres qui peuvent être effectivement programmés, tandis que nous appellerons entiers accessibles ceux qui peuvent être effectivement écrits en écriture décimale. D'après ce que nous avons déjà dit plus haut (et qui est néanmoins vrai) tout entier inférieur à un entier accessible est accessible; mais $10 \uparrow^3 10$ est non accessible et par conséquent supérieur à tous les entiers accessibles. Pourtant, de même que "le plus grand nombre pouvant être écrit en chiffres romains", le plus grand nombre accessible n'existe pas.

3.— Que pouvons-nous savoir des très grands nombres?

Imaginez que je vous présente un nombre de 37 chiffres et que je vous demande : "est-il divisible par 7?" Vous n'aurez aucun mal à me répondre, puisqu'il vous suffira par exemple d'effectuer la division.

La situation n'est pas du tout la même pour les nombres inaccessibles. Je ne parle même pas des nombres qui ne sont ni accessibles ni programmables (notez en passant que accessible $\Rightarrow$ programmable) car ceux-là je ne peux même pas vous les donner, donc vous ne risquez pas de vous faire coller. Mais prenons un nombre programmable et non accessible, par exemple $10 \uparrow^3 10 - 1$. Je peux affirmer : "ce nombre est divisible par 9", mais pas question d'effectuer la division ou toute autre vérification directe. Le seul moyen en ma possession pour prouver une telle affirmation est de prouver d'abord par un raisonnement algébrique abstrait un théorème de la forme $\forall n P(n)$ et de dire ensuite "si $P(n)$ est vrai pour tout n, il est donc vrai aussi pour n inaccessible". Pour le nombre indiqué, je procéderai de la manière suivante :

1. Pour tout n, $10^n - 1$ est divisible par 9.
2. Or, $10 \uparrow^3 10 - 1$ est de la forme $10^n - 1$.
3. Donc, $10 \uparrow^3 10 - 1$ est divisible par 9.

Prouver un théorème de la forme $\forall n P(n)$ se ramène toujours en dernière analyse à une (ou plusieurs) démonstration(s) par récurrence; les prémisses qui sont à notre disposition pour déduire notre théorème sont évidemment toutes contenues dans les instructions du programme : nous ne savons rien d'autre sur le nombre que ce qui est dit dans le programme qui le définit. Ainsi, dans la mineure du syllogisme précédent, le seul renseignement que nous utilisions, à savoir que $10 \uparrow^3 10$ est une puissance de 10, nous l'avons puisé dans la construction par exponentiations successives, c'est-à-dire dans le programme. Quant à la majeure, de la forme $\forall n P(n)$ ("tous les hommes sont mortels") elle se prouve par récurrence :

a) $10^1 - 1 = 9$ est divisible par 9,

b) supposons que $10^n - 1$ soit divisible par 9; alors $10^{n+1} - 1 = 10^{n+1} - 10^n + 10^n - 1 = 10^n \times 9 + 10^n - 1$ est aussi divisible par 9.

Nous venons de rencontrer la loi fondamentale de l'arithmétique des nombres inaccessibles :

> "Tout ce que nous pouvons savoir sur un nombre est obtenu par une récurrence, suivie d'un syllogisme sur le modèle ci-dessus."

De façon plus précise : la récurrence sert à prouver la majeure du syllogisme, et la mineure se déduit des informations contenues dans le programme. Il n'existe aucun autre moyen de connaître quoi que ce soit sur un nombre inaccessible.

4. Et les nombres décimaux?

Un nombre décimal n'est, au fond, rien d'autre qu'un nombre entier accompagné d'une indication d'échelle : la virgule. Lorsque nous additionnons, multiplions, ou divisons des nombres décimaux, nous faisons la même chose que pour des entiers, avec juste quelques règles supplémentaires concernant la place de la virgule. Et d'ailleurs, lorsque nous divisons deux entiers, nous obtenons un quotient qui est entier ou décimal selon que nous retenons ou pas les chiffres après la virgule.

Tout ce que nous avons dit sur les entiers, la complexité des algorithmes, l'entropie, les nombres aléatoires, etc, marche aussi bien pour les nombres décimaux, avec toutefois quelques détails nouveaux dont nous allons parler.

La principale différence concerne le nombre de chiffres : lorsque nous indiquons un nombre entier en donnant un programme, le nombre de chiffres du nombre est également donné : le nombre de chiffres peut être un nombre compliqué ou difficile à calculer, mais il est implicitement contenu dans le programme,sans aucune ambiguïté. Au contraire, si par exemple nous effectuons la division 3 : 7, nous n'obtiendrons jamais un reste nul, donc nous ne rencontrerons jamais une indication d'arrêt. Une telle indication d'arrêt doit être ajoutée au programme : on peut y mettre une instruction signifiant "arrêtez-vous au 12^{e} chiffre après la virgule", ou bien "arrêtez-vous au 3 588 232 121 441 862 657^{e} chiffre après la virgule", ou encore "arrêtez-vous au $10 \uparrow^3 10^{e}$ chiffre". On remarquera que pour pouvoir parler du nombre de chiffres d'un nombre décimal il faut une telle indication d'arrêt; à cette condition seulement, nous pourrons définir l'entropie d'un nombre décimal comme nous l'avions fait pour les nombres entiers. Sans indication d'arrêt, on ne parlera donc pas de l'entropie, mais on pourra néanmoins mesurer la complexité d'un nombre décimal par la complexité du plus court programme qui le définit; en outre, cette dernière considération, qui est quantitative, induit automatiquement la distinction qualitative que voici : comme pour les entiers, on peut constater que parmi les nombres décimaux certains sont plus égaux que les autres; il y a l'élite (les nombres non aléatoires) et la masse anonyme des nombres aléatoires. Comme il se doit, l'élite est peu nombreuse; en effet, le raisonnement que nous avons tenu plus haut à propos des nombres entiers en majorant l'entropie peut être reproduit pour les nombres décimaux tronqués à un ordre n (tronqués, c'est-à-dire qu'on ne retient que les n premières décimales en oubliant les autres); on voit alors que quel que soit l'ordre n de la troncature, pourvu qu'il soit grand, les nombres non aléatoires sont rares.

La définition de l'aléatoire selon Emile Borel est un outil conceptuel remarquable, dont on n'a pas fini d'assimiler le mode d'emploi. Toutefois, bien que très opératoire sur le plan théorique, elle ne décrit pas exactement l'aléatoire tel qu'on le rencontre en pratique. Voyons cela de plus près.

Supposons un nombre comportant beaucoup de chiffres, de quoi remplir par exemple une page de "*L'Ouvert*", soit deux mille chiffres environ. Il se peut que ce nombre puisse être déterminé par un programme de mille cinq cent pas, mais par aucun programme plus court. De tels nombres, il y en a assurément plein, comme on peut s'en convaincre facilement avec un argument de dénombrement analogue à celui qui nous avait servi à prouver la rareté des nombres non aléatoires ([1]). Un tel nombre est non aléatoire si on s'en tient à *la lettre* de la définition; mais il y a aussi l'esprit de la définition : Borel nous a légué une certaine vision du hasard et de la chose numérique qui d'une manière ou d'une autre va à l'encontre d'une lecture trop étroite ou trop formaliste. Ainsi l'esprit de cette vision du hasard pourrait s'exprimer par la traduction suivante : "*le hasard, c'est ce qui n'est déterminé par aucun algorithme accessible*". La définition de Borel, lue à la lettre, est un artifice théorique commode pour l'analyse mathématique (par exemple pour démontrer des théorèmes), mais il est visiblement peu naturel de tenir pour remarquable, c'est-à-dire non aléatoire, un nombre comme celui qui vient d'être envisagé. Autrement dit, les nombres remarquables sont les nombres déterminés par des programmes simples. Le mot "simple" ayant un sens trop subjectif, on comprend que Borel ait créé de toutes pièces la définition que nous discutons. Dans le langage de la mathématique non-standard, on dirait que la définition "*un nombre est aléatoire s'il ne peut être calculé par un programme plus court que la donnée directe de ses décimales*" est interne, tandis que la définition "*un nombre est aléatoire s'il ne peut être calculé par aucun programme accessible*" est externe. Mais bien entendu, **elles ne sont pas équivalentes!**

Il ressort de ces considérations que la définition suivante, interne elle aussi, est en tout cas très pertinente :

Définition .— *On appelle complexité (ou degré de complexité) d'un nombre la complexité du plus court programme qui le calcule.*

([1]) Evidemment, il est difficile d'en exhiber un avec la preuve qu'il ne peut être défini par un programme plus court. Si un programme connu est réputé le plus court connu à ce jour, en trouver un plus court est déjà une gageure. Mais montrer *qu'il n'en existe pas* de plus court...

On évitera, pour une raison que tout lecteur de "*L'Ouvert*" comprendra spontanément, d'appeler nombre complexe un nombre dont le degré de complexité est élevé; on dira plutôt : nombre compliqué, ou nombre non-standard. On évitera également de l'appeler nombre aléatoire, malgré ce qui a été dit ci-dessus; il vaut mieux réserver cette appellation pour les nombres qui répondent à la définition *interne*. A l'inverse, les nombres dont le degré de complexité est bas pourront être appelés nombres *simples* ou (mieux) *remarquables*, ou *standard*. Tout cela s'applique d'ailleurs indifféremment aux nombres entiers ou aux nombres décimaux.

5.— Les nombres vus en perspective.

Emile BOREL nous a ainsi montré que les nombres ne sont pas simplement des choses en soi que le mathématicien étudie : les connaissances que nous pouvons acquérir sur eux ne dépendent pas seulement de leurs propriétés intrinsèques (que je pourrais appeler objectives), mais aussi de la perception que nous en avons, de par nos limites intellectuelles à nous, les observateurs. De même que nous connaissons mieux la géologie de la Terre que celle de Vénus, de même que nous connaissons mieux la morphologie du Soleil que celle d'Alpha du Centaure, nous connaissons mieux les nombres simples que les nombres compliqués. Nous ne voyons pas tous les nombres : ceux que nous voyons sont les nombres standard ou assignables, mais comme il a été démontré plus haut, cela fait très peu : l'immense majorité sont des nombres que nous ne voyons pas ([2]). La mathématique héritée des anciens grecs classait les nombres selon une nature : entier, rationnel, irrationnel, comme l'astronomie disposait les astres sur une sphère. La mathématique à l'ère de l'ordinateur (conformément à la vision du génial précurseur BOREL) perçoit les nombres dans une perspective où la distance est le degré de complexité, tout comme l'astronomie à l'ère du télescope a révélé que le firmament avait une profondeur et que la majorité des astres sont trop obscurs et éloignés pour être visibles.

Je ne discuterai pas le problème de savoir si cette perspective sous laquelle nous voyons les nombres est objective ou absolue, ou au contraire due seulement à notre manière de concevoir les nombres, car ce problème est trop métaphysique. (Il cesserait d'être métaphysique si on découvrait une arithmétique autre que celle que nous connaissons et réellement efficiente, mais qui modifierait complètement cette perspective; comme nous ne connaissons pas une telle arithmétique, nous ne pouvons que spéculer sur son existence, ce qui est assez stérile.) Par contre, il est instructif d'examiner quelques propriétés évidentes de cette perspective, particulièrement celle que voici.

Appelons $c(x)$ la complexité du nombre x. Lorsqu'on effectue entre deux nombres x et y une opération de l'arithmétique $+$, $-$, $\times$ ou $\cdot/\cdot$ on en obtient un troisième,

([2]) Un sophisme répandu (mais ceux qui le professent n'y croient évidemment pas plus que tout un chacun) affirme que seuls existent les nombres que l'on peut définir, c'est-à-dire ceux "qu'on voit". Cependant, si on admet ce sophisme on doit admettre que entre les nombres $10 \uparrow^3 10$ et $10 \uparrow^4 10$ il y a plein de trous, ce qui conduit à abandonner l'axiome de récurrence. Or, je n'ai jamais rencontré un adepte de ce sophisme qui récuse — en conséquence — l'axiome de récurrence. Pour être conséquent le sophiste doit professer qu'aucun nombre n'existe (mais curieusement ces sophistes savent combien ils gagnent).

noté $x * y$, où $*$ désigne génériquement l'un des quatre symboles précédents. Or, il est bien clair que si on a un programme qui calcule x et un autre qui calcule y, on obtient un programme qui calcule $x * y$ en juxtaposant simplement les deux premiers ([3]). Ce qui conduit à l'inégalité :

$$C(x * y) \leq c(x) + c(y).$$

En outre, chacune des quatre opérations a son inverse parmi les quatre, ce qui permet d'écrire aussi les inégalités :

$$\begin{aligned} c(x) &\leq c(y) + c(x * y) \\ c(y) &\leq c(x) + c(x * y) \end{aligned}$$

Comme tout professeur de mathématiques le sait, ces trois inégalités signifient qu'on peut faire un triangle avec trois segments de longueurs $c(x), c(y)$ et $c(x * y)$; ce qui peut se résumer aussi par les inégalités :

$$|c(x) - c(y)| \leq c(x * y) \leq c(x) + c(y).$$

Pour chacune des quatre valeurs possibles du signe $*$ on peut en déduire des propriétés de l'opération arithmétique correspondante; comme je ne peux pas tout raconter ici, je dirai juste quelques mots au sujet de l'opération $-$, mais rien ne vous empêche de chercher vous-même autre chose.

A vrai dire, ce que nous pouvons trouver ainsi, ce sont des propriétés de l'opération non en elle-même, mais relativement à la perspective que donne la complexité.

Soit donc x un nombre standard (c'est-à-dire dont la complexité est faible) et supposons qu'on veuille approcher x par des nombres y successifs; on aura toujours l'inégalité

$$c(y) \geq c(x - y) - c(x).$$

Or, on ne peut atteindre des valeurs de plus en plus petites de $x - y$ (c'est-à-dire se rapprocher indéfiniment de x) sans que la complexité de $x - y$ croisse au-delà de toute limite : quoique je ne l'aie pas encore dit pour les petits nombres (mais je l'ai dit au début pour les entiers grands), vous l'avez maintenant bien compris. L'inégalité ci-dessus nous dit alors que la complexité de y va elle aussi croître au delà de toute limite. Il est donc impossible d'approcher un nombre simple par d'autres nombres simples. Ou encore, si vous préférez : un nombre simple

---

([3]) Je néglige là quelques petits détails peu importants. En toute exactitude, la juxtaposition exige quelques pas de programme en plus, à titre d'interface. Par exemple si le programme P calcule x et si Q calcule y on obtient un programme R qui calcule $x + y$ en enregistrant P, puis $STO0$, puis Q, suivi de $+RCL0$ (ce qui fait cinq pas d'interface). On peut toujours dire que ces pas d'interface sont si peu nombreux qu'on peut les négliger (surtout si P et Q sont longs). On peut dire aussi qu'en juxtaposant deux programmes il y a toujours moyen de mettre en commun cinq instructions, ce qui compense l'interface.

(standard) est toujours isolé dans un halo de nombres infiniment proches de lui mais tous inassignables.

La grosseur de ce halo dépend évidemment de l'intensité du mot "inassignable", c'est-à-dire en dernière instance de la richesse du langage de programmation qui sert de référence. Ainsi, si on peut programmer la procédure de GRAHAM dont il a déjà été question, ces halos seront d'une petitesse inimaginable (et sans la moindre incidence pratique). Par contre, avec des langages très rudimentaires une grosse exponentiation comme $10 \uparrow\uparrow 10$ est déjà inaccessible (n'oublions pas que le langage de référence n'est pas forcément le langage de programmation qu'on utilise pour travailler : on peut programmer en PASCAL tout en mesurant la complexité avec un langage extrêmement rudimentaire) et alors les halos pourront être vus ([4]).

De toute façon l'inégalité que nous étudions peut donner des renseignements plus quantitatifs : soit par exemple le nombre a calculé par le premier programme donné en annexe : $c(a) \leq 29$; soit maintenant ϵ le plus petit nombre pouvant être calculé par un programme de 100 pas (ou moins). Par définition de ϵ, si $|a-y| \leq \epsilon$, alors $c(a-y) \geq 100$, donc d'après notre inégalité $c(y) \geq c(a-y) - c(a) \geq 100 - 29 = 71$. Ce qui veut dire que tous les nombres compris entre $a-\epsilon$ et $a+\epsilon$ et différents de a ont une complexité supérieure à 71. De même si ϵ' est le plus petit nombre programmable en moins de 1 000 pas, alors tous les nombres compris entre $a-\epsilon'$ et $a+\epsilon'$ (et distincts de a) ont une complexité supérieure à 971. Bien sûr, ϵ et ϵ' sont des nombres très petits : leur définition même montre qu'ils sont très peu aléatoires, donc bien plus petits que 10^{-100} (pour ϵ)ou 10^{-1000} (pour ϵ').

Une dernière remarque pour en finir avec la Perspective : supposons que notre langage de référence soit le plus pauvre de tous; dépourvu de toutes les opérations arithmétiques, il se réduirait aux dix touches numériques 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Dans ce cas (dégénéré) la complexité d'un nombre serait simplement le nombre de ses décimales; en particulier, les nombres décimaux assignables seraient nécessairement tronqués et par exemple les nombres a ou b de l'annexe seraient des nombres inaccessibles. Tous les nombres seraient aléatoires et la Perspective complètement aplatie. Autrement dit, ce qui fait que les nombres a ou b de l'annexe sont remarquables, c'est l'existence des opérations de l'arithmétique.

6.— La vieille controverse sur le continu n'était pas épuisée.

Il n'y a pas que les nombres; il y a aussi les fonctions; et les fonctions aussi

([4]) Je ne veux pas entrer ici dans une discussion détaillée sur la mesure de la complexité : il faudrait un livre. On s'en tiendra donc aux conventions retenues pour cet article : choix d'un langage pour fixer les idées. Il peut cependant être utile ici de préciser ce qui suit. Supposons que nous cherchions à programmer la procédure de GRAHAM sur T.I. 66; on devrait commencer par traduire la construction récursive de KNUTH, ce qui est possible en imbriquant des sous-programmes (touche SBR ou avec GTO). Alors le calcul de $a \uparrow^n b$ appellerait le sous-programme qui calcule $a \uparrow^{n-1} b$; il faudrait donc n sous-programmes pour calculer $a \uparrow^n b$. On voit ainsi pourquoi la procédure de GRAHAM ne peut pas être programmée, même de manière purement syntactique : elle pourrait l'être si on disposait de plusieurs touches $x \sim t$ indépendantes. Un problème analogue se pose si on veut programmer des puissances en itérant des additions (mais sa difficulté est bien moins radicale).

peuvent être calculées par des programmes. De même que pour les nombres, on peut distinguer les fonctions programmables ou standard, et les fonctions non programmables. Un programme qui calcule une fonction diffère des programmes qui calculent un nombre uniquement en ce qu'il appelle une mémoire libre, c'est-à-dire une mémoire que l'utilisateur devra charger avant l'exécution du programme (remarquez que dans les programmes A et B de l'annexe il n'y a pas de mémoire libre : toutes les mémoires appelées ont été chargées par des instructions du programme) ; cette mémoire libre reçoit la valeur de la variable, et le programme calcule alors la valeur correspondante de la fonction. Pour une fonction de n variables, il y aurait n mémoires libres. La complexité $c(f)$ d'une fonction f sera alors la longueur du plus court programme qui la calcule. Si x est un nombre non assignable rien n'empêche de *parler* de $f(x)$, mais pas question de le *calculer* même si $c(f) = 5$: si f est standard et x non standard, alors $f(x)$ est forcément non standard : en effet, si $y = f(x)$ était standard, on pourrait construire un programme résolvant l'équation $f(x) = y$, donc x serait programmable. De façon plus précise, on peut écrire des inégalités analogues à celles du paragraphe précédent :

$$c(f(x)) \leq c(f) + c(x).$$

Autrement dit : les lois de la Perspective s'étendent aux fonctions. Je ne peux m'étendre plus longuement sur les fonctions, mais je voudrais finir en reparlant d'une vieille chose : l'infini selon CANTOR et DEDEKIND. Comme vous le savez (vous avez dû apprendre cela à l'université), DEDEKIND a prétendu donner la première définition mathématique rigoureuse de l'infini, et pour cela il a fait appel à la notion de fonction, plus fondamentale selon lui. Son idée était simplement qu'un ensemble est infini si (et seulement si) il existe une *bijection* entre cet ensemble et une de ses parties. Or, considérons l'ensemble des entiers entre 0 et $10 \uparrow^4 10$:

$$E = \{0, 1, \ldots 10 \uparrow^4 10\}.$$

Nous avons vu au paragraphe 2 que presque tous les éléments de E étaient non programmables. Soit alors l'application f de E dans E ainsi définie :

$$f(n) = \begin{cases} 2n \text{ si } n \text{ est programmable} \\ n \text{ si } n \text{ est non programmable.} \end{cases}$$

Cette application est injective : en effet, soient n et p deux éléments de E tels que $f(n) = f(p)$:

– si n et p sont tous deux programmables, $2n = 2p$, donc $n = p$;

– si n et p sont tous deux non programmables, $n = p$;

– le cas où n serait programmable et p non programmable, ou l'inverse, ne peut pas se produire, car si n est programmable, $2n$ l'est également et vice versa.

Donc f est injective.

Mais f n'est pas surjective, car 3, 5 ou 73 ne sont pas des valeurs que f peut prendre.

Il n'y a donc que deux conclusions possibles : ou bien E est, selon DEDEKIND, un ensemble infini (ce qui n'est choquant que si on a acquis trop de certitudes), ou bien f n'est pas une application (idem). Peut-être penchez-vous déjà, spontanément, en faveur de la seconde solution, mais réfléchissez bien avant de dire une sottise : vous ne trouverez chez DEDEKIND aucune définition qui exclue f de la confrérie des applications; si on est porté à l'exclure, c'est en vertu d'un pressentiment, non d'un argument dûment éprouvé. D'ailleurs pour achever de vous convaincre que cette exclusion n'a rien d'une évidence, je pourrais vous dire que dans la mathématique non standard, qui fournit un modèle axiomatique du phénomène que nous sommes en train de discuter, on envisage expressément des applications telles que f (elles sont dites *externes*) et ce sont bien de "véritables" applications au sens le plus orthodoxe de la théorie des ensembles.

Bien sûr, la fonction f ci-dessus est non programmable (on ne peut pas traduire sa définition en algorithme, car elle comporte un test d'assignabilité), mais DEDEKIND n'a jamais dit que les vraies applications sont les applications programmables : cela, on en est certain, car POINCARÉ pensait, lui, que les vraies applications sont les applications programmables, et il y a eu une polémique à ce sujet entre lui et la bande à CANTOR-DEDEKIND. Visiblement DEDEKIND n'avait pas songé à ce paradoxe; s'il y avait été confronté, par un contradicteur par exemple, il aurait probablement cherché à affiner le concept de fonction afin d'exclure f. Mais peut-être aurait-il finalement préféré considérer que E est un ensemble infini.

Vous voyez donc que l'univers des nombres et des fonctions n'était pas aussi bien connu qu'on a pu le croire. CANTOR, DEDEKIND et HILBERT n'avaient pas remarqué cette Perspective qui n'est devenue sensible qu'avec l'ordinateur.

Plusieurs théories sont apparues et se sont fortement développées ces derniers temps, qui abordent le monde numérique dans l'esprit que j'ai essayé de vous faire partager. Ce sont notamment : la théorie des fonctions calculables, l'analyse non-standard, et la théorie de la complexité. On peut être sûr que sans l'avènement de l'ordinateur elles seraient restées des curiosités vite oubliées.

ANNEXE

Voici deux programmes que vous pouvez exécuter sur une calculatrice programmable Texas Instruments (ils sont exécutables tels quels sur les 57 II, 62, 66).

PROGRAMME A

```
0
STO 0
2
STO 1
4
÷
3
=
STO 2
1
STO 3
LBL 0
RCL 1
+
RCL 2
=
÷
RCL 3
=
STO + 0
4
+/-
STO ÷1
9
+/-
STO ÷2
2
STO + 3
GTO 0
```

(29 pas; 4 mémoires vives)

Ce programme calcule un nombre a dont la complexité est donc ≤ 29.

PROGRAMME B

```
1
STO 0
STO 1
STO 2
LBL 0
RCL 2
STO ÷1
RCL 1
STO + 0
1
STO + 2
GTO O
```

(12 pas; 3 mémoires vives)

Ce programme calcule un nombre b dont la complexité est donc ≤ 12.

Remarques

1.— Ces programmes ne comportent aucune instruction d'arrêt; vous devrez donc les arrêter manuellement au bout de quelques secondes, et vous lirez alors la valeur du nombre calculé (a ou b) dans la mémoire 0. Rien ne vous empêche d'ajouter de telles instructions pour vous amuser, mais il y a, relativement à la discussion développée dans l'article, un enjeu théorique. En effet, les nombres a et b sont irrationnels et ont donc une suite infinie (et pas du tout aléatoire) de décimales : si vous ajoutez des instructions d'arrêt, le programme ne calculera plus le même nombre, mais un autre nombre proche (même si la différence entre les deux n'affecte pas les huit chiffres affichés). Par ailleurs, conformément à ce qui a été dit au § 5, ajouter des instructions d'arrêt allonge le programme; les approximations de a ou b seront des nombres *rationnels*, contrairement aux nombres a et b eux-mêmes, mais leur complexité sera plus élevée : elle sera même grande si vous voulez que l'erreur soit extrêmement petite, ou inaccessible si vous voulez que l'erreur soit plus petite que tout ce qui est accessible (voir les inégalités du § 5).

PROGRAMME A'

```
4
STO 0
1
STO 1
LBL 0
2
STO + 1
1
-
RCL 1
x²
1 : x
=
STO × 0
GTO 0
```

(15 pas; 2 mémoires vives)

2.— Le programme B est vraisemblablement le plus court qui calcule b (mais on ne sait jamais ...). Par contre, il y a des programmes plus courts que A pour calculer a, par exemple celui qui est listé ci-dessus : la complexité de a est donc 15 (peut-être 14 ou 13, mais je crois qu'il est difficile de faire moins) car dans la définition de la complexité nous disons simplement "la longueur du plus court programme" sans spécifier aucune condition sur ce programme; or le programme A', quoique deux fois plus court, converge infiniment plus lentement que A : pour avoir huit chiffres exacts, nous devons répéter près de 80 000 000 fois la boucle de A', alors qu'il suffit de répéter 13 fois celle de A. Cela inclinera peut-être le lecteur à penser que la notion de complexité retenue ici manque de pertinence : un nombre peut-il être considéré comme simple si le seul programme simple qui le calcule est aussi lent que A' et que les programmes rapides sont tous longs? Cette critique est extrêmement juste, mais je répondrai que tout dépend de ce que vous voulez analyser avec votre complexité; selon le cas une définition incluant la rapidité peut être préférable.

UN POLYÈDRE UTILE EN MÉTALLURGIE

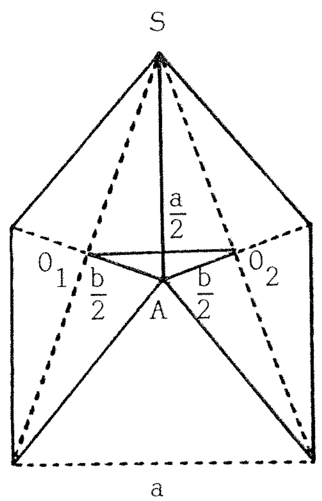
Eugène EHRHART

En novembre 1986 cinq chercheurs du groupe Péchiney ont publié dans la revue scientifique anglaise '*Nature*' un article intitulé '*Large $A_l C_u L_i$ simple quasi-crystals*'. Ils y annoncent la première élaboration directe de mono-quasi-cristaux massifs, laissant prévoir des retombées industrielles importantes pour la mise au point et l'utilisation d'alliages dans les domaines aéronautique, informatique et électronique.

Découvert il y a seulement deux ans, le quasi-cristal a une morphologie intéressante, défiant toutes les lois de la cristallographie : c'est un **triacontaèdre rhombique**, c'est-à-dire un polyèdre convexe dont les 30 faces sont des losanges égaux. Ses 60 arêtes sont donc égales et il a 32 sommets.

Mathématiquement, ce polyèdre remarquable pose trois problèmes : préciser la forme du losange facial, prouver l'existence du triacontaèdre en le construisant, indiquer ses principales propriétés.

1. Forme du losange facial.



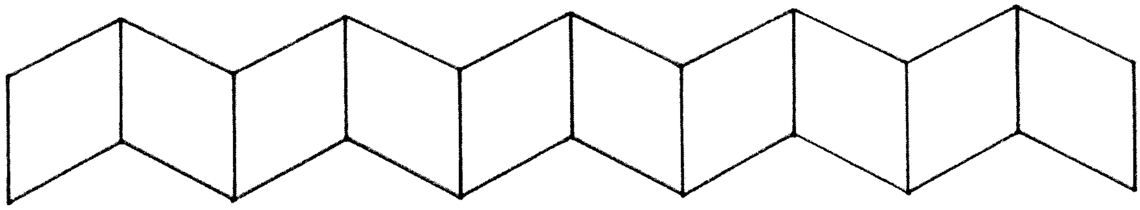
Appelons L tout losange dont la grande et la petite diagonale ont pour longueurs respectives a et b. Considérons une corolle de sommet S, dont les cinq pétales sont des L adjacents. On peut placer entre deux pétales consécutifs L_1 et L_2 un nouveau losange L, si la distance de leurs sommets libres est **a** et donc la distance de leurs centres $O_1O_2 = a/2$. Soit SA le côté commun de L_1 et L_2. Comme les petites diagonales des pétales forment un pentagone régulier, un angle à la base du triangle isocèle $A\ O_1O_2$ vaut $\pi/5$.

Donc **le rapport des diagonales du losange est le 'nombre d'or'** :

$$\frac{a}{b} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62.$$

2. Construction du polyèdre.

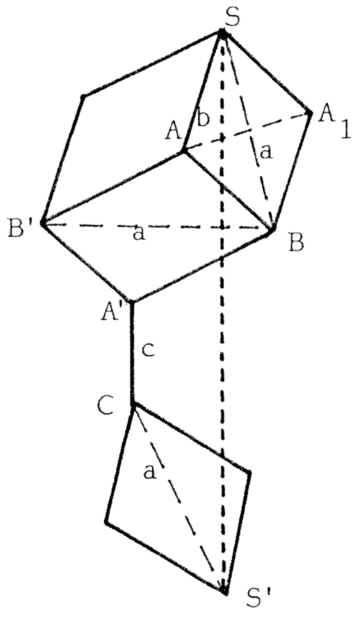
En intercalant entre chaque couple de pétales consécutifs de la corolle un nouveau losange L, on forme une coupole de 10 losanges. A deux telles coupoles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de sommets S et S' donnons le même axe vertical SS', leurs concavités se faisant face. Nous allons montrer qu'on peut les relier par une couronne d'axe SS', formée par 10 losanges L adjacents, telle que son développement plan ait la forme suivante :

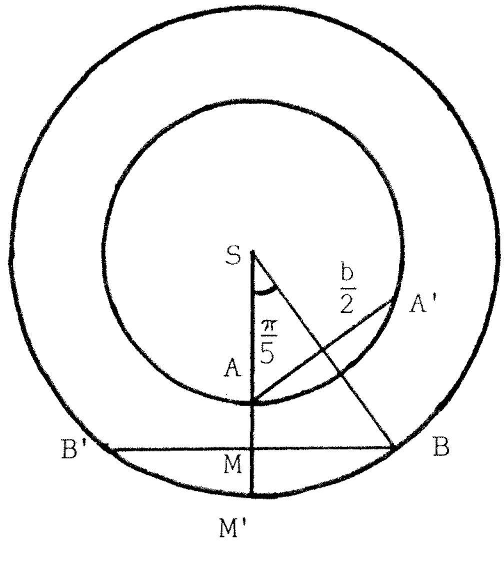


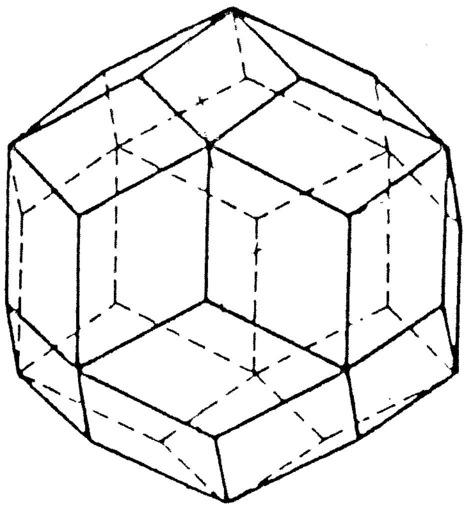
Soit SA une arête de $\mathcal{C}$ et $ABA'B'$ le losange intercalaire correspondant. Amenons par rotation autour de SS' la diagonale $S'C$ dun pétale de $\mathcal{C}'$ dans la plan vertical passant par SA. Nous montrerons plus loin que $A'C$ est vertical et nous le rendrons égal au côté c des losanges L. Par raison de symétrie tout segment joignant un sommet du bord de $\mathcal{C}$ au sommet du bord de $\mathcal{C}'$ situé en face de lui sera alors également vertical et égal à c : les deux coupoles composent donc bien avec la couronne qui les joint un triacontaèdre rhombique.

Démontrer que $A'C$ est vertical revient à montrer que A' et C ou, cela est équivalent, A' et B ont même distance à l'axe SS'. La diagonale $BB' = a$ est le côté d'un pentagone régulier d'axe SS', de même que $AA_1 = b$. Projetons parallèlement à SS' sur un plan horizontal, en conservant la même lettre pour désigner un point et sa projection. Dans la figure obtenue les rayons des cercles de centre S passant respectivement par B ou A sont

$$R = SB = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}} \quad et \quad r = SA = \frac{b}{2\sin\frac{\pi}{5}}.$$







Pour que $A'S = BS$, il suffit que A' coïncide avec M', donc que $AM = MM'$:

$$SM - r = R - SM$$
$$2SM = R + r$$

ou successivement, car $SM = \frac{a}{2tg\frac{\pi}{5}}$,

$$\frac{a}{tg\frac{\pi}{5}} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{5}} + \frac{b}{2\sin\frac{\pi}{5}}$$
$$2\cos\frac{\pi}{5} = 1 + \frac{b}{a}$$
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

qui est bien vérifié.

3. Propriétés du polyèdre.

Par simple observation d'un modèle matériel, on voit que ce polyèdre esthétique a 12 sommets **s** à cinq branches et 20 sommets **s'** à trois branches (chaque **s** est centre d'une corolle C à 5 pétales, chaque **s'** centre d'une corolle C' à 3 pétales). Les **s** sont situés sur une sphère, les **s'** sur une sphère concentrique plus petite. On observe aussi que le polyèdre a :
— **un centre de symétrie** O;
— **15 axes de symétrie**, chacun reliant les centres de deux faces opposées;
— **10 axes de rotation à** $2\pi/3$, chacun reliant deux **s'** opposés;
— **6 axes de rotation à** $2\pi/5$, chacun reliant deux **s** opposés.

En géométrie le triacontaèdre rhombique est classique. On sait l'obtenir par **troncature du dodécaèdre ou de l'icosaèdre réguliers** (*). Une transformation par polaires réciproques de centre O montre **sa dualité avec l'icosidodécaèdre**, un solide semi-régulier d'ARCHIMÈDE à 32 faces (20 triangles équilatéraux égaux et 12 pentagones réguliers égaux), 30 sommets (dont chacun a quatre branches) et 60 arêtes égales.

Remarques.

1) A propos de **polyèdres convexes à arêtes toutes égales**, Jean LEFORT me signale qu'il y en a avec un nombre d'arêtes arbitrairement grand : prismes dont les côtés de la base sont égaux aux arêtes latérales.

2) Il existe aussi un **dodécaèdre rhombique**. Ses 12 faces sont des losanges

(*) Voir par exemple Alan HOLDEN, '*Formes, espace et symétrie*' (Cédic, 1977).

égaux, dont l'angle aïgu est de 70°32'. Il a 24 arêtes égales et 14 sommets. **Son dual est le cuboctaèdre**, autre solide semi-régulier d' ARCHIMÈDE, dont les faces sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux; il a naturellement aussi 24 arêtes, toutes égales.

RÉPONSE A UNE QUESTION DE R. SEROUL

FORMULES A LA MACHIN

(suite)

Eric KERN

N.D.L.R. : A la fin de son article "*Formules à la* MACHIN " ("*L'Ouvert*" n°45), R. SEROUL posait la question : "*La formule des entiers indécomposables est-elle libre sur* **Q**?" Nous avons reçu la réponse suivante de E. KERN :

PROPOSITION. — *Soit $n \geq 2$ un entier indécomposable. Il n'existe pas de relation de la forme*

$$(M_1) \qquad s \operatorname{Arctg}(n) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \operatorname{Arctg}(i)$$

avec $s \geq 1$ entier et $c_i \in \mathbf{Z}$ pour $1 \leq i \leq n-1$. En particulier, la famille composée de $\operatorname{Arctg}(1)$ *et des* $\operatorname{Arctg}(r)$*, où r parcourt l'ensemble des entiers indécomposables ≥ 2 est **Q**-libre.*

DÉMONSTRATION.— Posons

$$(1+in)^s = \alpha_s + i\beta_s.$$

Si $\alpha_s = 0$, multiplions la relation (M_1) par 2, ce qui ne change rien au problème. Cela donne

$$(1+in)^{25} = [(1+in)^s]^2 = (i\beta_s)^2 = -\beta_s^2.$$

Par conséquent $\alpha_{2s} = -\beta_s^2 \neq 0$. Il résulte de cela que l'on peut supposer $\alpha_s \neq 0$.

En procédant comme dans "*L'Ouvert*" n°45, page 15, nous pouvons écrire

$$\left(1+i\right)^{c_1}\left(1+2i\right)^{c_2}\cdots\left(1+(n-1)i\right)^{c_{n-1}} = \frac{a+ib}{u+iv}$$

$$\left(1+i\right)^{|c_1|}\left(1+2i\right)^{|c_2|}\cdots\left(1+(n-1)i\right)^{|c_{n-1}|} = (a+bi)(u+iv).$$

La formule (M_1) montre que $(1+in)^s$ et $\left(1+i\right)^{c_1}\ldots\left(1+(n-1)\right)^{c_{n-1}}$ ont même argument. Il en résulte que $(a+ib)/(u+iv)(1+in)^s$ est un nombre réel. Après un bref calcul, on obtient

$$(*) \qquad \alpha_s^2\left(1+1^2\right)^{|c_1|}\cdots\left(1+(n-1)^2\right)^{|c_{n-1}|} = (au+bv)^2(1+n^2)^s.$$

Comme $n \geq 2$ est supposé indécomposable, il existe un nombre premier p qui divise $1+n^2$ mais qui ne divise aucun des $1+k^2$ pour $1 \leq k < n$. Il résulte de (*) que p divise α_s. Mais on a

$$\alpha_s = 1 - \binom{s}{2} n^2 + \binom{s}{4} n^4 - \binom{s}{6} n^6 + \cdots$$

Sachant que $n^2 \equiv -1$ *mod p*, on a *mod p*

$$\begin{aligned} \alpha_s &\equiv 0 \\ &\equiv 1 + \binom{s}{2} + \binom{s}{4} + \binom{s}{6} + \cdots \\ &\equiv 2^{s-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, p divise $2^{s-1} \geq 2$, ce qui exige $p = 2$. Cette dernière conclusion est absurde, car p divise $1+k^2$ pour $k = 1$.

Soit $(\mathrm{Arctg}(n_\alpha))_{\alpha \geq 1}$ la famille formée de 1 et des indécomposables, rangés dans l'ordre croissant. Cette famille est $\mathbf{Q}$-libre. Pour montrer cela, supposons que l'on ait

$$c_1 \,\mathrm{Arctg}(n_1) + \cdots + c_k \,\mathrm{Arctg}(n_k) = 0,$$

avec $c_k \neq 0$ et $c_i \in \mathbf{Z}$. Puisque n_k est indécomposable, on ne peut pas avoir $|c_k| = 1$ (cela fournirait une formule *à la* MACHIN). Mais on ne peut pas avoir non plus $|c_k| > 1$, car cela fournirait une formule du type (M_1).

REMARQUE.— Cette démonstration montre aussi que TODD a raison lorsqu'il affirme que l'on n'obtient rien de 'nouveau' en prenant des c_i rationnels pour définir une formule *à la* MACHIN. En effet, soit n un entier décomposable. Il fournit donc une formule

$$(M) \qquad \mathrm{Arctg}(n) = \sum_{n_\alpha < n} k_\alpha \,\mathrm{Arctg}(n_\alpha)$$

où les k_α sont des entiers. Supposons d'autre part que l'on ait

$$\mathrm{Arctg}(n) = \sum_{n_\alpha < n} c_\alpha \,\mathrm{Arctg}(n_\alpha)$$

Retranchons ces deux égalités. Il vient

$$0 = \sum_{n_\alpha < n} (k_\alpha - c_\alpha) \,\mathrm{Arctg}(n_\alpha).$$

Vu l'indépendance linéaire des $\mathrm{Arctg}(n_\alpha)$, on a $c_\alpha = k_\alpha$.

EXAMENS D'APPEL — SESSION 1986

Niveau 5^e admission en 4^e collège
Durée : 1 h 30

I - Calculer :

a) $0,01 - 3,78 + 0,32 - 2,24 + 2,56 + 3,78 - 0,15 =$ (1 pt)

b) $(-6) \times (-7) \times (-8) \times (-9) \times 11 =$ (1 pt)

c) $-8 - [-4 - (-3+6-9) - (2-7-5+4)] =$ (1 pt)

d) $13^2 + 5^2 - 12^2 =$ (1 pt)

e) $(-5+9) \times 0,5^2 \times (0,5 - 2) \times (-2)^5 =$ (1 pt)

II - Développer et simplifier :

a) $2a - (10 - 3a) + (-4a + 11) =$ (1 pt)

b) $3x - [10 - (x - 20) + y] - [-20 + (-x + y - 10)] =$ (1 pt)

c) $x^5 \times (x \times y)^6 \times x^7 \times (y^8)^9 =$ (1 pt)

d) $60 \times (a - 4b + 0,25) =$ (1 pt)

e) $(2x + 3) \times (0,5x - 2,5) =$ (1 pt)

III - a) Décomposer 450, 600 et 750 en produits de facteurs premiers (3 pts)

b) Trouver le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun de 450, 600 et 750 (1,5 pts)

c) Une fleuriste dispose de 750 marguerites, 600 anémones rouges et 450 oeillets roses.

1- Trouver le nombre maximum de bouquets identiques que peut confectionner la fleuriste. (0,5 pt)

2- Quelle est la composition d'un bouquet ? (1 pt)

IV - a) Une "brique" a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 17cm, 9cm et 6 cm.

Cette "brique" peut-elle contenir <u>un</u> litre de jus de pommes ? (justifier) (1 pt)

b) 1- Une boîte cubique a 15 cm d'arête ; calculer son volume en cm^3. (1 pt)

2- Une bille en acier a 3cm de rayon ; calculer son volume en cm^3 (on prendra $\pi = 3,1$ et on rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule : $V = (4 \times \pi \times R^3) : 3$). (1,5 pts)

3- On laisse tomber (doucement) la bille dans la boîte cubique remplie d'eau ; quel est en cm^3 le volume de l'eau qui déborde ? (0,5 pt)

SESSION 1986

Niveau 3^e admission en 1re année de BEP/CAP 2 ans
Durée : 1 h 30

I - On considère les applications f et g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par :

$$f(x) = (2x - 3)(x + 7) + 4x^2 - 9 - (2x - 3)^2$$

et $g(x) = (x + 1)^2 - (7 - 3x)^2$

1) Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$ (2 pts)
2) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$ en un produit de facteurs du 1er degré. (2 pts)
3) Calculer : $f(\sqrt{2})$; $g\left(\frac{3}{2}\right)$ (1 pt)
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   $f(x) = 0$; $g(x) = -48$ (2 pts)

II - Représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les applications f et g, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que : (4 pts)

$f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$

Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux représentations graphiques.

III - Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan euclidien.
Le centimètre est choisi comme unité.

On considère les points $A(2, 1)$; $B\left(5, \frac{5}{2}\right)$; $C(8, 1)$

1) Faire une figure soignée que l'on complétera au fur et à mesure des questions. (1 pt)
2) Montrer que le triangle A B C est isocèle. (2 pts)
3) Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AC]$ (1 pt)
4) Soit D le symétrique du point B par rapport au point I ; calculer les coordonnées du point D. (1 pt)
5) Quelle est la nature du quadrilatère A B C D ? (justifier) (1 pt)
6) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux. (1 pt)
7) Montrer que le point B est sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre I et de rayon $\frac{3}{2}$; en déduire que le cercle $(\mathcal{C})$ passe par le point D. (2 pts)

EXAMENS D'APPEL

Niveau 3^e admission en seconde
Durée : 1 h 30

Exercice 1 :

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$f(x) = x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2$

1) Calculer $f(0)$; $f(\sqrt{3} - 1)$; $f(\sqrt{3})$; $f(\sqrt{3} + 1)$ (0,5+1 pts 0,5+1 pts)

2) f est-elle une bijection ? (1 pt)
Déduire la réponse des résultats de la question 1.

Exercice 2 :

Soit g la fonction affine par intervalles définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = |x - 1|$

1) Ecrire $g(x)$ sans valeur absolue (1,5 pts)

2) Dans un repère orthonormé représenter graphiquement la fonction g. (1pt)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 1| = 3$ (1,5 pts)

4) Représenter graphiquement dans le repère précédent la fonction affine h définie par $h(x) = 3$ (0,5 pt)

5) Retrouver graphiquement les résultats de la question 3). (1pt)

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne les points (1 pt)

A $(-2 ; 4)$; B $(4 ; 2)$; C $(-4 ; -2)$

1) Calculer AB ; AC ; BC (1,5 pts)

2) Nature du triangle ABC ? Justifier (0,5+1 pts)

3) Que représente le point O pour $[BC]$? Justifier. (0,5 pt)
Que représente la droite (AO) pour ce segment ? Justifier (1 pt)

4) Trouver les coordonnées du point D tel que
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (0,5pt X 3)
Nature du quadrilatère ADBO ? Justifier (1 pt)

5) En déduire que les points O,A,D,B sont situés sur un cercle $\mathscr{C}$ dont on donnera les coordonnées du centre I et le rayon r. (0,5pt X 3)

6) Que représente la droite (AC) pour le cercle $\mathscr{C}$. Justifier (1 pt)

SESSION 1986

Niveau 2^{nde} admission en 1^{re} E
Durée : 2 h 00

I - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{x-2}{x+1} < \frac{x}{x-3}$$ (4 pts)

II - On considère les droites D et Δ définies par les équations suivantes : (5 pts)

D : $4x - 3y + 4 = 0$

$$\Delta : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1) Construire ces droites dans un repère orthonormé
2) Préciser pour chacune un vecteur directeur
3) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de D et de Δ

III - Ecrire plus simplement l'expression f(t) et g(t)

$f(t) = (\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2$

$g(t) = \cos(\pi + t) - \sin(\pi + t) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ (3 pts)

IV- 1) Soient M et N deux points distincts du plan P. (8 pts)
A tout point A du plan on fait correspondre le point A', barycentre des points pondérés :
M (1) N(–1) A (2).
Démontrer que A' se déduit de A par une translation dont on déterminera le vecteur

2) A tout point A du plan on associe le point A'', barycentre des points pondérés :
M (1) N (–2) A (–2)
Démontrer que A'' se déduit de A par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.
(On pensera à utiliser un barycentre partiel)

EXAMENS D'APPEL

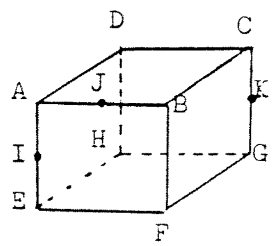
Niveau 2^{nde} admission en 1^{re} S
Durée 2 h 00

I - Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points :

A $(-1\ ,\ 3)$ B $(2\ ,\ 0)$ C $(0,\ -1)$ D $(1\ ,\ 2)$

1. Quelles sont les coordonnées de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$. (0,5 pt)
2. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\|\vec{AB}\|$, $\|\vec{AC}\|$ en déduire, une approximation de la mesure de l'angle $(\vec{AB}\ ,\ \vec{AC})$ (en degrés avec la précision de la minute) (0,5ptX3
3. Déterminer une équation cartésienne des droites (AB) et (CD) (0,5ptX2
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection (0,5 pt)
4. Déterminer un système d'équations Paramétriques des droites (AD) et (BC) (0,5ptX2
Quelles sont les coordonnées du point d'intersection (0,5 pt)
5. Quelles sont les coordonnées du barycentre G de (A ; 4) , (B ; 2) , (C ; 3) (1 pt)
6. Quelles sont les coordonnées des transformés de A, B, C dans
   a) la symétrie de centre O. Soient A1, B1, C1 ces transformés (0,5 pt)
   b) l'homothétie de centre D et de rapport $-3/2$. Soient A2,B2,C2 (1 pt)
   c) la symétrie d'axe Oy (0,5 pt)
7. Déterminer la transformation qui transforme A1,B1,C1 en A2,B2,C2 (1,5 pts)
8. Représenter sur une figure le triangle ABC et chacun de ses transformés (0,5 pt)

II - Soit ABCDEFGH un cube (figure ci-contre), I le milieu de AE, J le milieu de AB et K le milieu de CG.
Quelle est la nature du triangle IJK ? (5pts)



III - Démontrer que la fonction $x \longmapsto x^2 + 2x - 3$ est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Quelle est la nature du point d'abscisse (-1) ? (4 pts)
Tracer la courbe d'équation $y = x^2 + 2x - 3$ (1 pt)

SESSION 1986

Niveau 2^{nde} admission en 1^{re} B G H
Durée : 2 h 00

I - Soient un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$ et $g(x) = x^2 - 4x + 3$
Cf et Cg sont les courbes représentatives de f et g dans R.

1) Déterminer Df, ensemble de définition de f. (0,5 pt)
Etudier la parité de f, et en déduire un intervalle d'étude If. (1,5 pts)

2) a. Etudier les variations de g (2 pts)
b. Construire Cg (3 pts)

3) a. Déduire de Cg la courbe Cf et la construire. (1+1 pts)
b. Déterminer graphiquement Cf $\cap$ (x'x) (1 pt)
((x'x) : droite définie par O et $\vec{i}$)
c. Retrouver ce résultat par le calcul (2 pts)
(on écrira $f(x)$ sous la forme $f(x) = (|x| - 2)^2 + a$
a, étant un réel à déterminer, et on factorisera $f(x)$)

II - Dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soient les points
A (-2 ; 2) B (2 ; 5) C (4 ; -3) D (-2 ; -1)

1) Déterminer une équation de chaque droite (AB), (BC), (CD), (DA). (4 pts)

2) Caractériser par un système d'inéquations l'intérieur et le bord du triangle (A, B, C) (1,5 pts)

III - Des chasseurs rapportent des lapins et des faisans,
on compte 30 têtes et 86 pattes.
Combien y a-t-il d'animaux de chaque espèce ? (2,5 pts)

LE JEU DU PORTRAIT

Jean LEFORT

Nous avons proposé dans le numéro **45** l'énigme suivante :

Si c'était un nombre?	Ce serait 2, 3 ou 4.
Si c'était un élément?	Ce serait la terre.
Si c'était un monument?	Ce serait la Kaaba.
Si c'était une ville?	Ce serait New-York.
Si c'était un personnage?	Ce serait Picasso ou Braque.
Si c'était une date?	Ce serait 1907.
Si c'était un jeu?	Ce serait le 421.
Si c'était un bijou?	Ce serait un diamant.

Nous avons reçu de M. François APÉRY la réponse que voici :

... *"je pense qu'il s'agit d'un cube, en effet :*

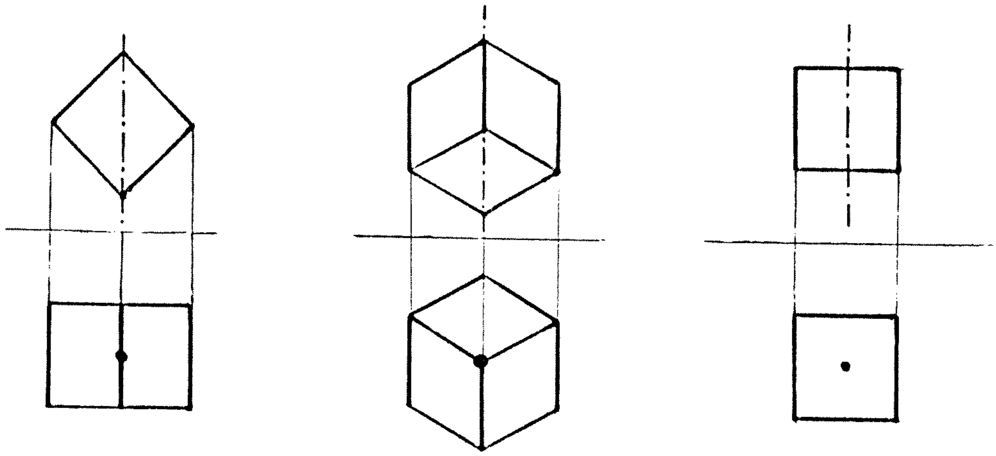
* *2, 3, 4 sont les ordres des symétries que l'on rencontre dans un cube.*
* *La terre est représentée symboliquement par un cube chez* PLATON.
* *Kaaba signifie cube.*
* *J'imagine que l'aspect des gratte-ciels de New-York n'est pas sans rappeler le cube.*
* PICASSO *et* BRAQUE *sont deux des leaders du mouvement cubiste.*
* *Le mouvement cubiste démarre en 1907 avec "Les demoiselles d'Avignon" de* PICASSO.
* *le 421 se joue avec des dés cubiques.*
* *Le réseau atomique du diamant est cubique centré.*

J'espère que je ne suis pas trop loin de l'objet recherché."

Notre collègue a parfaitement justifié sa réponse et gagne donc un abonnement au profit de qui il voudra.

Illustrons davantage la réponse.

1) Pour les ordres de symétrie du cube, ces trois épures de descriptive montrent bien ce qu'il en est :



axe d'ordre 2
il y en a 6

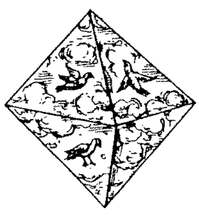
axe d'ordre 3
il y en a 4

axe d'ordre 4
il y en a 3

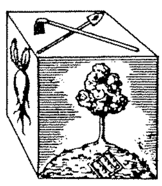
Nous obtenons ainsi toutes les isométries directes conservant le cube; il y en a 24 en comptant l'identité.

2) Dans la Grèce antique, on attribuait une signification aux polyèdres réguliers. Aux 4 connus dans les temps les plus reculés étaient associés les 4 éléments. Au **tétraèdre** et à l'**icosaèdre** ayant respectivement le plus petit et le plus grand volume pour une aire latérale donnée correspondent respectivement la sécheresse, c'est-à-dire le **feu**, et l'humidité, c'est-à-dire l'**eau**. Au **cube**, en raison de sa stabilité, correspond la **terre**, tandis qu'à l'**octaèdre** qui paraît tourner facilement autour d'un axe passant par deux sommets opposés est associé l'**air**. La découverte du cinquième polyèdre régulier, le **dodécaèdre**, permis de faire intervenir la **quintessence** et plus tard, KÉPLER, remarquant que ce solide a 12 faces, l'associa à l'**univers** en liaison avec les douze signes zodiacaux.

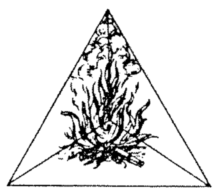
Voici une reproduction des dessins de KÉPLER.



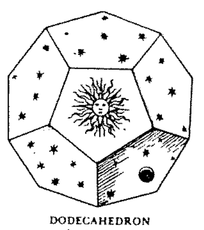
OCTAHEDRON
Air



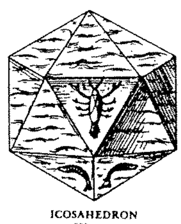
CUBE
Earth



TETRAHEDRON
Fire



DODECAHEDRON
the Universe

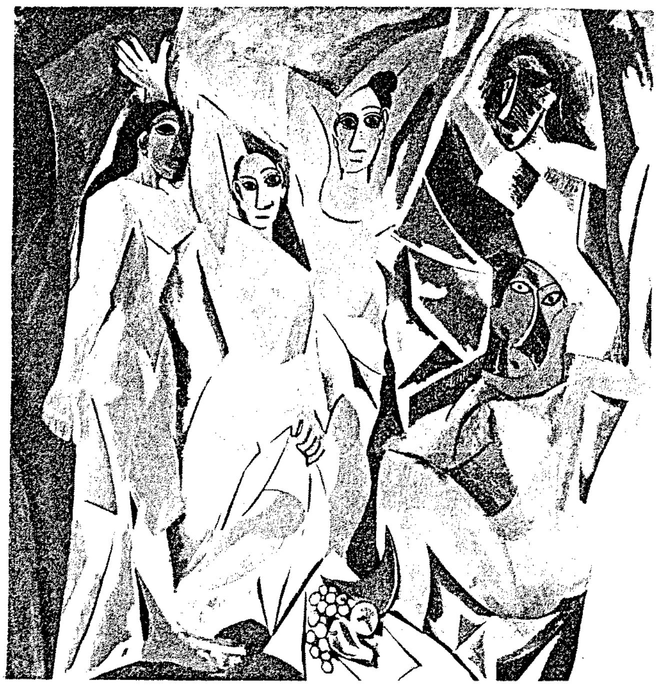


ICOSAHEDRON
Water

3) On trouve dans '*L'Ouvert*' n° 44 un compte-rendu d'une conférence de A. DJEBBAR sur l'algèbre arabe. On y lit que x^3 était noté ك (lettre K de l'alphabet arabe) en raison du mot كعب qui est le cube-objet, mot qu'on retrouve dans كعبة, la Kaaba qui a justement la forme d'un cube. Notre collègue Michel EMERY a cependant attiré notre attention sur un article paru dans "Le Monde" du 16-17 novembre 1986. On y lit :

> ... *"C'est en effet dans le Haram al Charif, le sanctuaire sacré, que se trouve la Kaaba, édifice cubique de 15 mètres de haut et de 12 de large qui contient cette fameuse pierre noire que l'archange Gabriel a, selon la tradition, apportée à* ABRAHAM *pour parachever la construction du temple."* Sic!

4) S'il est difficile de définir le **cubisme**, mouvement pictural du début du siècle, tous les historiens des arts s'accordent pour dire que "Les demoiselles d'Avignon", peintes au printemps 1907 par PICASSO, sont l'acte officiel de naissance du cubisme. BRAQUE fut le premier à percevoir l'importance de cette oeuvre qui doit à CÉZANNE et surtout aux arts primitifs : art ibérique, art nègre, ... dont la géométrisation des formes a fourni à PICASSO le répondant plastique qui lui était nécessaire. Le mot même de **cubisme** aurait pour origine une boutade de MATISSE à propos d'un tableau de BRAQUE, boutade qui fut reprise par toute la presse.



(D'après "le Dictionnaire Universel de la Peinture" - ROBERT.)

5) On sait que le carbone peut cristaliser de plusieurs façons : deux manières pour le graphite (système hexagonal ou système rhomboèdrique); une manière pour le diamant (système cubique à faces centrées). La figure 1 ci-dessous montre la disposition des atomes de carbone, chacun d'entre eux étant relié à 4 autres placés au sommet d'un tétraèdre régulier dont il est le centre. La distance entre deux atomes voisins est de 1,54 A et la la maille cubique a donc une dimension de 3,56 A.

Dans la terminologie des cristalographes, le groupe de symétrie du diamant est Fd3m.

- F pour cubique à faces centrées;
- d pour indiquer que les plans des faces sont des plans de symétrie- glissée (le vecteur ayant une norme de 1/2 si l'arête du cube vaut 1)
- 3m pour indiquer que les trois plans diagonaux sont plans de symétrie.

Il y a des axes de symétrie d'ordre 2 parallèles aux arêtes de la maille et passant par les atomes. Il n'y a pas d'axes de symétrie d'ordre 4 mais des axes de déplacement hélicoïdaux d'angle /2 et de vecteur de norme 1/4.

Projettons une maille sur une de ses faces et indiquons l'altitude des atomes. On obtient la figure 2

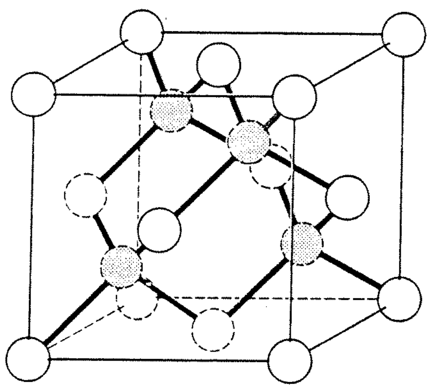


Figure 1

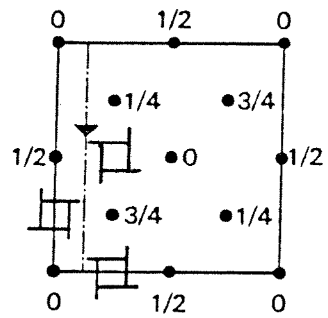


Figure 2

où les symbolisent quelques axes verticaux de déplacements hélicoïdaux.

Cette énigme sur le cube nous a fait parcourir bien des disciplines et nous sommes revenus aux mathématiques. Il y aurait des volumes à écrire sur chacun des points précédents et sur le cube en général. D'autres y pourvoiront.