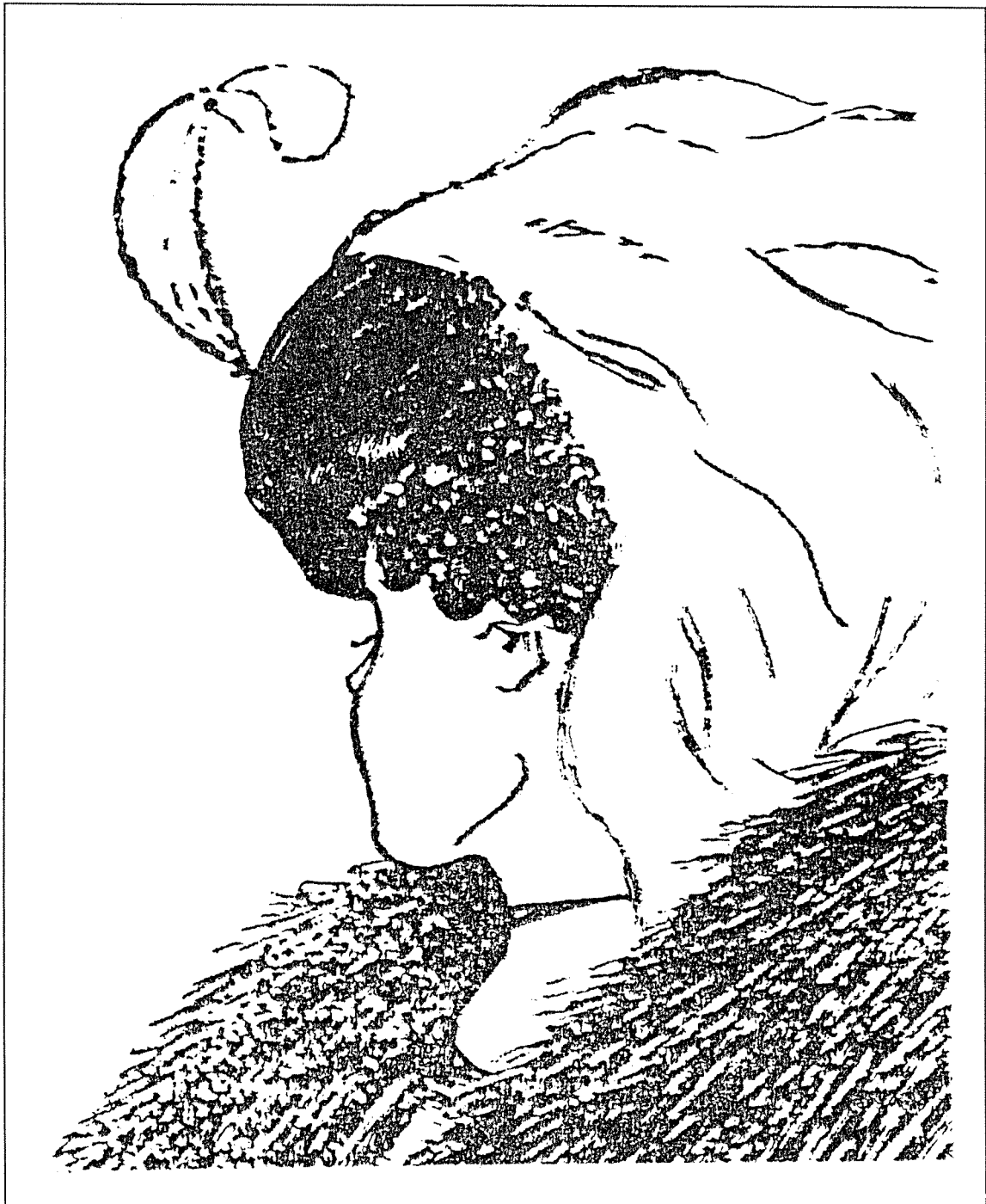


L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 47 - JUIN 1987

ISSN 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE

Une figure équivoque du dessinateur W.- E. HILL, intitulée '*Ma Femme et ma Belle-mère*'. La joue et le menton de la jeune femme vue de 3/4 arrière est en même temps le nez de la vieille qui est vue de 3/4 face. C'est un exemple de perception instable qui joue un si grand rôle dans la représentation des objets de l'espace.

ÉVALUATION

Dans cet établissement de province, monsieur P. professeur de maths avait une grande réputation de sévérité. Avoir plus de 10/20 à un devoir relevait paraît-il de l'exploit. Et pourtant au dire de ses collègues, c'était un monsieur charmant ayant une grande connaissance des mathématiques mais aussi très exigeant.

X était élève dans le même établissement. Elève intelligent très perturbé par des problèmes familiaux, il obtenait des résultats moyens malgré un redoublement. Quand il s'avéra, à la rentrée, qu'il avait monsieur P. comme professeur de maths, ses camarades, comme bien d'autres, parièrent qu'il n'aurait jamais la moyenne.

Surprise de tous; X obtint 14/20 comme note de trimestre. Miracle? Brusque révélation des possibilités intellectuelles de X? Rien de cela. X avait un truc pour juger ses professeurs. Il leur posait une question piège, question dont il ne connaissait certes pas la réponse mais qui lui permettait de savoir si le professeur s'intéressait à lui, si lui X, était reconnu en tant qu'individu différent des autres et non pas comme un élève anonyme juste bon à ingurgiter et regurgiter des leçons. Bien sûr, c'était aussi sa manière de crier à tout son entourage qu'il existait. N'est-ce pas assez naturel pour un adolescent?

Je n'ai su que beaucoup plus tard quel '*examen*' X avait fait passer à son professeur. En l'occurrence, la question avait été la suivante :

*“Monsieur, vous nous parlez du théorème de PYTHAGORE,
mais en troisième, on nous parlait de l'axiome de PYTHAGORE.
Pourquoi ?”*

Eh bien, monsieur P. avait interrompu son cours et expliqué pendant près d'une demi-heure pourquoi certains énoncés pouvaient passer du statut d'axiome au statut de théorème et vice-versa. L'élève X en avait surtout conclu qu'avec ce professeur cela valait la peine d'écouter et de travailler!

Je repense souvent à cette anecdote quand les élèves me posent des questions, me demandant toujours si je ne suis pas en train de subir un examen de passage qui n'aurait rien à voir avec le sujet posé!

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N°47 – JUIN 1987

◇ <i>Notre couverture : La figure équivoque de W.-E. HILL :</i> <i>'Ma femme et ma belle-mère'</i>	I
◇ <i>Editorial</i>	II
◇ <i>Aspects mathématiques du pliage de papier</i> par J. JUSTIN	1
◇ <i>Résolution des équations polynomiales : une ancienne méthode</i> par J. LEFORT	15
◇ <i>Des équations qui déterminent les sections circulaires</i> par J.-P. FRIEDELMEYER	21
◇ <i>Un test élémentaire de primalité, par M. MIGNOTTE</i>	31
◇ <i>TEX , un an après, par R. SEROUL</i>	33
◇ <i>A vos stylos, par 'L'Ouvert'</i>	39
◇ <i>Erratum, par J. HARTHONG</i>	40
◇ <i>A propos du 'Livre du Problème', par G. GLAESER</i>	41
◇ <i>Sommaire</i>	III

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication : J. LEFORT*
- ◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
Tél. : 88-41-63-00, poste 240
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels) :*
80.-F pour l'Alsace
106.-F pour les autres départements
95.-F pour l'étranger
(Chèque à l'ordre de Mr l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM))
- ◇ *Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.*

ASPECTS MATHÉMATIQUES DU PLIAGE DE PAPIER (*)

Jacques JUSTIN

Le fait que le pliage de papier ait des rapports avec les mathématiques est évident puisque le papier prend naturellement une forme plane et le pli une forme de ligne droite. En France, le pliage a eu sa part dans l'initiation des écoliers aux notions simples de calcul et de géométrie (loi de 1882). Nous voudrions passer en revue ici, de façon un peu informelle, les différents aspects mathématiques du pliage et montrer qu'ils soulèvent parfois des problèmes non triviaux, voire non résolus.

I.— PLIAGES ET SYMÉTRIES.

1. En matière de géométrie plane d'abord, tout se ramène à ce que CHOQUET appelle l'axiome du pliage : “*étant donnée une droite D d'un plan P , il existe une isométrie de P qui échange les deux demi-plans définis par D et qui conserve les points de D* ”.

Plier une feuille en deux selon une droite D revient ainsi à effectuer la symétrie axiale d'axe D , ceci sert parfois à introduire cette notion dans les petites classes de collège. Les choses deviennent plus intéressantes si l'on trace sur une feuille de papier deux droites D et D' ne se coupant pas sur la feuille. Il est facile de voir que si l'on plie selon D et D' , en laissant fixe une des parties extrêmes, le déplacement subi par l'autre partie extrême *correspond* à la composition des symétries par rapport à D et D' , c'est-à-dire tout simplement à une rotation. Nous y reviendrons plus loin, mais la conclusion est qu'on peut en géométrie substituer le pliage à la manipulation des symétries axiales dans certaines démonstrations.

2. Un cas familier des plieurs est ce qu'on appelle l'oreille de lapin : plier un triangle ABC selon les bissectrices intérieures AI , BI et le segment CI . Un quatrième pli se forme naturellement (**) et une étude attentive du pliage montre :

- a) que ce 4^e pli est perpendiculaire à l'un des côtés du triangle;
- b) que CI est la 3^e bissectrice intérieure et donne les propriétés du cercle inscrit (voir figure 1).

3. Des théorèmes moins triviaux, ceux de PONCELET sur les tangentes aux coniques, donnent lieu à des démonstrations assez curieuses par le pliage.

Théorème : Soient T et T' les points de contact des tangentes issues d'un point P à une conique à centre de foyer F et F' . Alors :

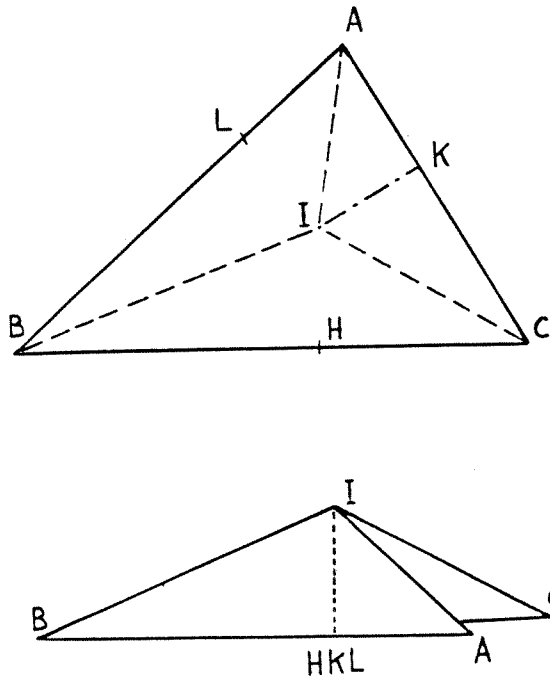
© L'OUVERT 47 (1987)

(*) Conférence donnée le 15 octobre 1986 à Strasbourg.

(**) D'une façon générale, si on plie une feuille selon 3 demi-droites de même origine, il se forme un quatrième pli dont la position dépend de façon très simple des angles des trois demi-droites (voir plus loin).

- 1) FP est une bissectrice de $\widehat{TFT'}$ et $F'P$ est une bissectrice de $\widehat{TF'T'}$.
- 2) Les angles $\widehat{TPT'}$ et $\widehat{FPF'}$ ont même bissectrice (figure 2).

4. Donnons la démonstration pour l'ellipse. Pour l'hyperbole c'est un peu plus délicat (deux cas à considérer) et on pourra se reporter au 'PLOT' n° 27 (2^e trimestre 1984).

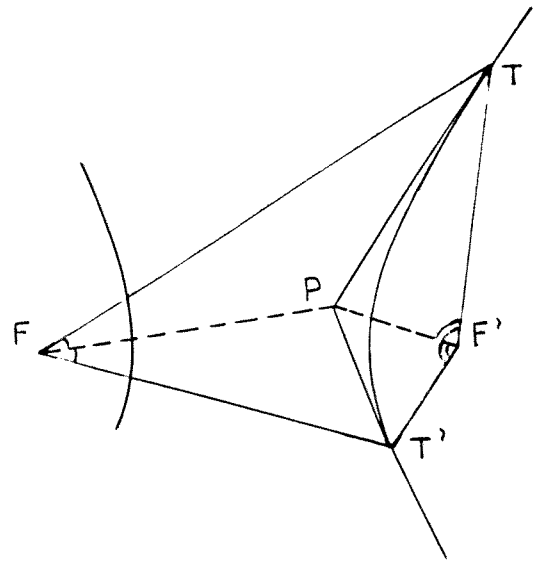


$$IH = IK = IL$$

$$\begin{cases} KA - KC = BA - BC \\ KA + KC = AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow KA = AB + AC - BC$$

Figure 1



THÉORÈME de PONCELET
 $\widehat{FPF'}$ et $\widehat{TPT'}$
 mêmes bissectrices

Figure 2

Soit AB un segment de droite tracé sur une feuille de papier de forme quelconque. Pour simplifier un peu les dessins et faciliter le pliage nous supposons que AB est un bord du papier (figure 3). Soit XX' une droite qui coupe AB en un point M entre A et B . Plions par un pli vallée selon XX' , ce qui amène A en A' (figure 4).

On a $MA' + MB = AB$. Donc M appartient à l'ellipse (E) de foyers A' et B dont le grand axe a pour longueur AB . En raison du pliage, MX est bissectrice extérieure de BMA' , donc MX est tangente en M à (E).

Remarque. On peut se passer de cette propriété de la tangente. En effet si P est un point quelconque de XX' , autre que M , en dépliant le papier on constate que $PA' + PB > AB$, donc XX' est totalement à l'extérieur de l'ellipse à l'exclusion du point M qui est sur l'ellipse. C'est dire que XX' est la tangente en M (figure 4).

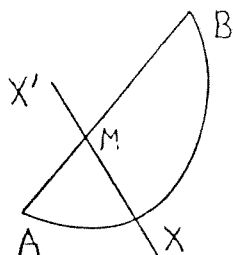


Figure 3

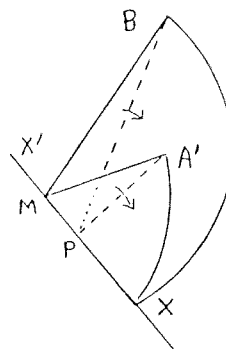


Figure 4

Prenons maintenant un point quelconque P sur MX , et plions la couche supérieure du papier par un pli le long de PA' et la couche inférieure par un pli le long de PB . Quand on aplatit, le pli PM s'ouvre et il apparaît un nouveau pli, PN' . La figure 5 représente l'ancienne et la nouvelle disposition (en supposant le papier transparent). La figure 6 montre les plis sur le papier déplié. Dans ces figures, N et N' représentent l'intersection du nouveau pli avec le côté AB .

Comme le côté AB est maintenant plié dans la position $A'N'B'$ et pour la même raison que plus haut, N' appartient à l'ellipse (E) et PN' est la tangente en N' . En raison du pliage selon BP , BP est bissectrice de $\widehat{MBN'}$ et, de même, $A'P$ est bissectrice de $\widehat{MA'N'}$: c'est la première partie des théorèmes de PONCELET!

Pour établir la seconde partie, observons que le papier est plié en définitive selon les demi-droites PB , PN , PA , PX . L'application de la relation (2) donne alors $\widehat{MPB} = \widehat{APN}$ dans la figure 6, c'est-à-dire $\widehat{MPB} = \widehat{A'PN'}$ dans la figure 5. Par conséquent les angles $\widehat{BPA'}$ et $\widehat{MPN'}$ ont bien les mêmes bissectrices, c'est la seconde partie des théorèmes.

On pourrait épiloguer sur la nature de ces démonstrations, disons simplement qu'elles auraient été parfaitement acceptées au siècle dernier!

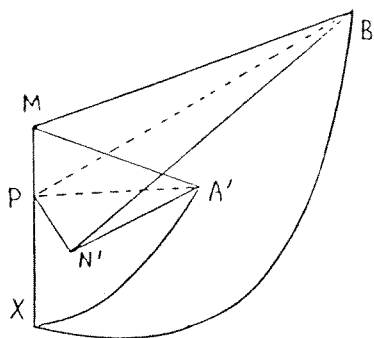


Figure 5

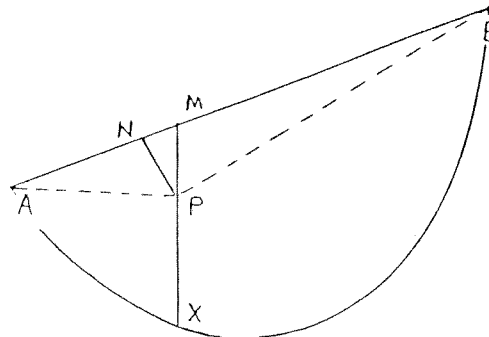


Figure 6

II.— CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

1. Le pliage permet de faire des constructions. Ceci a été utilisé (et pourrait l'être plus) dans l'enseignement. On peut voir facilement que le pliage permet de construire les mêmes points que la règle et le compas. On trouve toutefois, chez certains auteurs, l'affirmation que certaines constructions possibles avec la règle et le compas ne le sont pas par le pliage. La raison est qu'ils limitent le pliage aux deux opérations suivantes :

- a) faire le pli passant par deux points connus (= règle),
- b) déterminer la bissectrice de deux droites en les amenant l'une sur l'autre par pliage (= bissecteur).

Avec règle et bissecteur le corps des nombres constructibles est le plus petit sous-corps *pythagoricien* de \mathbb{R} (pythagoricien veut dire que s'il contient x et y il contient $\sqrt{x^2 + y^2}$). Ce corps est strictement inclus dans celui des nombres constructibles avec règle et compas.

Ceci est intéressant mais il est abusif de limiter le pliage aux opérations a) et b). L'opération c) ci-dessous qui réalise l'intersection d'une droite avec un cercle est en effet courante et indispensable en pliage :

- c) amener un point A donné sur une droite donnée au moyen d'un pli passant par un point B donné.

Mais on peut envisager l'opération suivante, peu courante mais facile :

- d) amener deux points donnés respectivement sur deux droites données au moyen d'un pli unique.

Avec ces quatre opérations le pliage permet de résoudre l'équation générale du 3^e degré et aussi du 4^e. (On consultera "L'Ouvert" n° 42).

2. Les plieurs se sont intéressés au problème de la division d'un segment en parties égales. La division en 2^n est triviale. Pour les autres rapports on s'y ramène en utilisant la similitude des triangles ou le théorème de THALÈS (figure 7).

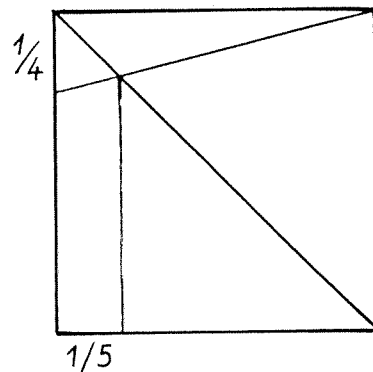
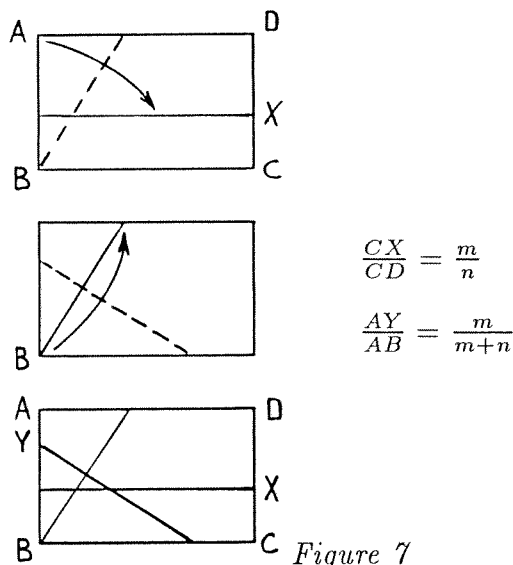


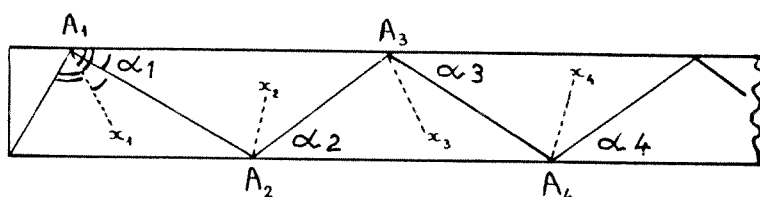
Figure 8

Certaines méthodes sont élégantes (figure 8). Il est possible aussi d'utiliser une méthode itérative pour diviser les segments ou les angles. Ceci est à peu près évident, a été retrouvé plusieurs fois, mais n'a guère d'intérêt pratique. Une variante mérite toutefois d'être signalée. Elle permet de faire d'une façon efficace la division d'un angle plat en utilisant une longue bande de papier (figure 9).

3. Concrètement, les plieurs ont réalisé de nombreuses constructions géométriques, notamment les polygones réguliers de 3 (figure 10), 4, 5, 6, 8 côtés. A ce propos, il faut noter le pliage d'une bande de papier selon un nœud simple, qui donne un pentagone régulier (figure 11). Ceci est connu et démontré depuis 1682. Il est remarquable qu'on puisse faire par le même procédé tout polygone régulier d'ordre impair, par exemple l'heptagone qui n'est pas réalisable avec la règle et le compas. Ce paradoxe s'explique par le fait qu'en pliant un nœud avec une bande de papier, on ne fait pas seulement de la géométrie plane, mais on utilise la propriété topologique que le papier ne peut pas se croiser lui-même quand on le déforme.

Une autre jolie construction est celle de la parabole qui s'étend aux coniques bifocales (figure 12). On amène par pliage F sur la droite D . Le pli T est tangent à la parabole (P). En répétant l'opération pour plusieurs plis on obtient la génération tangentielle de la parabole.

Au lieu d'avoir une droite D , on peut prendre un cercle C ; la même construction donne, selon que F est intérieur ou extérieur à C , une ellipse ou une hyperbole.



$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{4}(\pi - \alpha_n); \alpha_n \rightarrow \frac{\pi}{5}$$

Figure 9

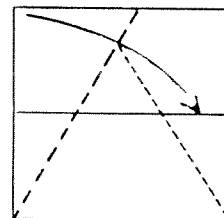


Figure 10

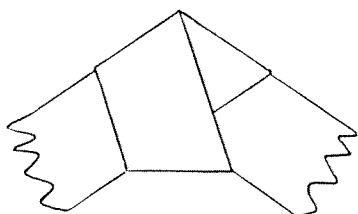


Figure 11

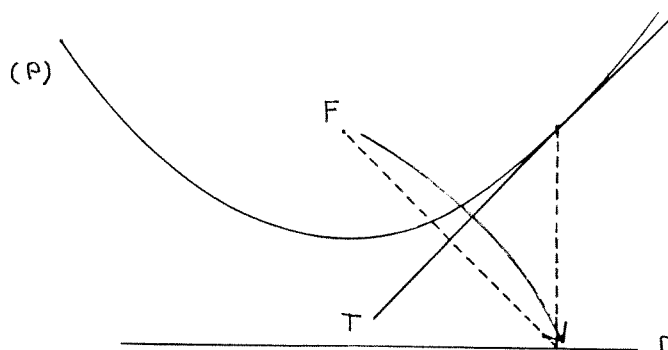


Figure 12

III.— SURFACES DÉVELOPPABLES.

1. Il est difficile de parler de pliage sans envisager sous leur aspect général les déformations d'une feuille de papier, en effet le papier s'incurve souvent au cours du processus de pliage. Si on déforme une feuille de façon à obtenir une surface lisse, celle-ci est une surface réglée développable. Il apparaît en général un pli courbe — la ligne de striction —. Plus généralement, on peut considérer que la déformation d'une feuille de papier donne des portions de surfaces développables lisses qui se raccordent selon des lignes correspondant à des plis courbes. Le problème de savoir quelles conditions doivent remplir ces plis et ces surfaces est un exercice de géométrie différentielle et présente un intérêt technologique en matière de pliage de tôles (figure 13).

Par exemple, les machines à emballer les poudres nécessitent des feeders qui peuvent s'obtenir en roulant et en pliant des tôles selon la figure 13.

L'étude des pliages courbes comme le feeder peut se faire en remplaçant la courbe par une ligne brisée voisine et en se ramenant ainsi au pliage selon des droites, avec des faces planes, mais le résultat n'est pas plan.

En origami, il arrive parfois qu'on arrondisse à la fin. Un bel exemple en est la boîte chinoise [Lazy Susan] représentée figure 14.

2. Un autre problème de déformation mérite d'être signalé. Etant donné une surface cylindrique inextensible de diamètre D et de hauteur H , peut-on la retourner sans faire de pli ni de déchirure? Plus précisément existe-t-il une isotropie isométrique lisse entre le plongement naturel et le plongement antipodal du cylindre dans \mathbb{R}^3 ? Si l'on accepte que la surface puisse se traverser au cours de la déformation on parlera d'homotopie au lieu d'isotopie. La réponse est la suivante pour les isotopies :

si $H < \pi D / (\pi + 2)$: oui
 si $H \geq D$: non.

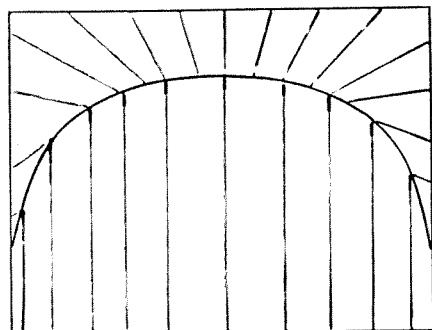
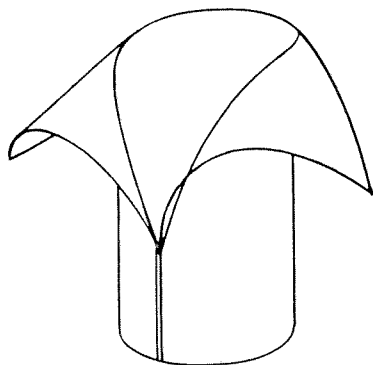


Figure 13

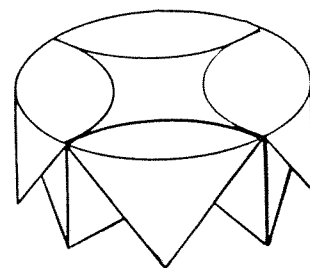


Figure 14

Il reste donc une zone d'incertitude (dans cette zone, la réponse est oui pour les homotopies). La partie négative se prouve par la topologie algébrique. La partie affirmative se prouve en utilisant des techniques de pliage mais en remplaçant les plis par des arrondis (ou pseudo-plis).

Par exemple, la figure 15 donne un cylindre lorsqu'on colle A' sur A . On peut le retourner par des pseudo-plis selon les lignes indiquées. L'étape centrale est indiquée au-dessous.

Un cylindre très allongé ne peut donc pas être retourné dans les conditions indiquées. Par contre, en pliage, on admettrait parfaitement de retourner n'importe quel cylindre *comme une chaussette*. Des retournements du même genre sont souvent effectués par les plieurs. Ils ont l'inconvénient d'abîmer le papier mais paraissent difficilement évitables. En ce qui concerne le cas précis du cylindre, on peut d'ailleurs toujours le retourner en le mettant à plat et en ne faisant que des plis rectilignes en nombre fini. La figure 16 donne une étape du travail (patience et papier mince!). Ces remarques montrent que la représentation mathématique du pli et des opérations de pliage est moins simple qu'on ne pourrait le croire.

Un problème voisin : avec quels rectangles peut-on faire une bande de MOEBIUS?

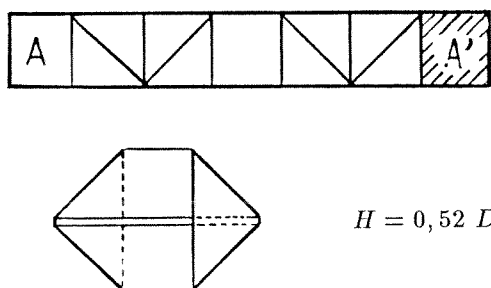


Figure 15

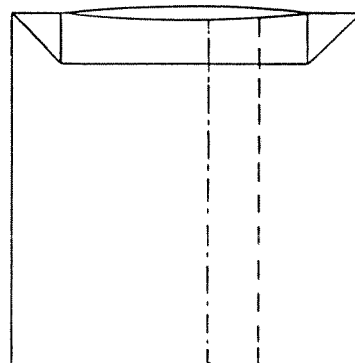


Figure 16

IV.— UN PEU DE THÉORIE.

1. En origami, on part d'un certain nombre de pliages classiques appelés bases. Voici par exemple la base de l'oiseau dans ses deux positions et l'aspect du carré déplié (figure 17).

Cette base possède de nombreuses propriétés qui donnent lieu à une foule de problèmes quand on veut les généraliser à un autre polygone que le carré. Voici un exemple : la base du carré possède les trois propriétés suivantes :

- on peut plier les pointes vers le bas,
- on peut plier autour d'un axe vertical,
- les bords du carré se rejoignent exactement.

La figure 18 donne une base pentagonale ayant les mêmes propriétés. On dit qu'elle est **parfaite**. Les triangles, les quadrilatères circonscrits à un cercle admettent une unique base parfaite.

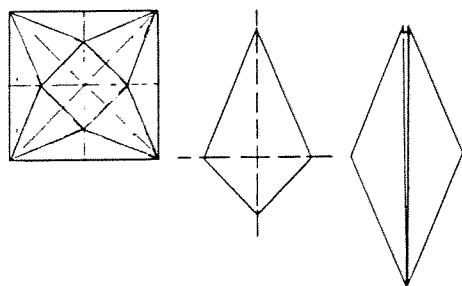


Figure 17

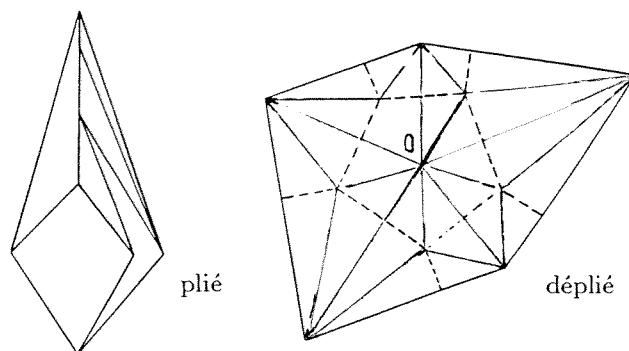


Figure 18

Les conditions géométriques, tant sur le polygone que sur le point de LOISEAU O sont assez restrictive. La figure 19 montre la détermination du point de Loiseau pour un quadrilatère en forme de cerf-volant.

Voici un exemple de propriété combinatoire rencontré en origami. (On ne s'étonnera pas de rencontrer des graphes qui ne sont autres que les plis du papier.)

Théorème : Soient un graphe complet non orienté fini dont les sommets seront appelés $1, 2, \dots, n$ et une partition de l'ensemble des arêtes en deux classes X et Y , telle que :

- a) $\forall i, j, k, q, 1 \leq i < j < k < q \leq n :$
 $ik \in X \text{ et } j \in X \Rightarrow ij \in X \text{ ou } jk \in X \text{ ou } kq \in X$
- b) $\forall i, 1 \leq i \leq n - 1 : i(i + 1) \in Y.$

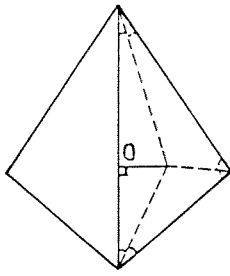
Alors il existe un sommet dont toutes les arêtes incidentes appartiennent à Y .

Tout ce qui précède conduit à envisager la possibilité d'une théorie mathématique du pliage, qui pourrait comporter trois chapitres, l'un sur les déformations générales d'une feuille de papier, le second concernant le pliage où le papier reste plan par morceaux mais donne une forme à trois dimensions. Le troisième serait la particularisation au pliage à plat, en voici une ébauche :

Plier un papier à plat se traduit par des déplacements dans le plan des diverses parties de la feuille et par certaines superpositions de couches de papier. Cela amène la définition suivante :

Un c -réseau (c pour crease : pli marqué) est la figure consistant en un domaine D (la feuille) du plan P limité par une ou plusieurs courbes de JORDAN, un ensemble N de points (les nœuds) intérieurs à D , un ensemble C de segments (les plis) ouverts, disjoints, inclus dans D , dont les extrémités sont des nœuds ou des points du contour. Tout nœud est l'extrémité d'un nombre pair non nul de plis.

La question est : à quelles conditions la feuille D peut-elle être pliée selon les plis de C ? On peut même demander : pour quels choix du sens (vallée ou montagne) donné aux plis le pliage est-il possible? Il est entendu que C correspond aux seuls plis qui existent dans le pliage réalisé et pas à ceux qui peuvent apparaître et disparaître au cours des opérations de pliage.



Appelons c -faces les parties connexes de D délimitées par les plis. Si l'on plie en laissant fixe une c -face, disons f_1 , les déplacements subis par les autres faces se traduisent par une application continue $\mu : \overline{D} \rightarrow P$ définie ainsi : soit f une face, soient c_1, \dots, c_t les plis traversés par un chemin allant de f_1 à f et soient σ_i les symétries axiales associées à ces plis. Alors
$$\mu|f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_t|f.$$

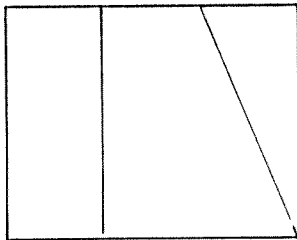
Figure 19

Une condition nécessaire et suffisante de cohérence est que pour tout circuit tracé sur D les symétries associées aux plis rencontrés satisfassent $\prod \sigma_i = 1$. Si le papier n'a pas de trous (D simplement connexe) cette condition se réduit à :

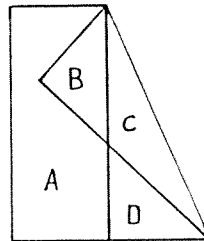
$$\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{n-1} = \gamma_2 + \gamma_4 + \dots + \gamma_n = \pi,$$

γ_i désignant les angles formés par les plis issus d'un nœud quelconque.

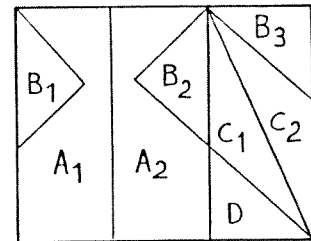
L'image par μ du c -réseau est appelée f -réseau (*f pour folded : plié*). Elle représente le pliage en supposant le papier translucide. L'image inverse du f -réseau est le s -réseau (*s pour superposition*). C'est un raffinement du c -réseau. Les figures 20, 21 et 22 représentent ces trois réseaux dans un cas très simple.



c -réseau



f -réseau



s -réseau

Figure 20

Figure 21

Figure 22

On peut imaginer qu'on réalise le pliage en découpant les s -faces, en les empilant de façon à former le f -réseau, puis en les raccordant avec du ruban adhésif pour reconstituer la continuité de la feuille de papier. Cela ne sera possible que si ces rubans ne se traversent pas. Cela revient à dire qu'on a muni l'ensemble des s -faces d'un ordre partiel qui doit satisfaire certaines conditions combinatoires de non-croisement. Il est conjecturé que, si le papier n'a pas de trou, le pliage est possible si ces conditions sont satisfaites.

Si le papier a des trous, les conditions de non-croisement ne sont pas suffisantes. Par exemple, une rondelle perforée au centre ne pourra jamais faire un nœud non trivial, ni devenir un ruban torsadé. Une conjecture générale, énoncée de façon imagée, pourrait être :

Conjecture : Un pliage est possible s'il est possible en supposant que le papier devient provisoirement élastique au cours de la déformation.

Cette conjecture, qui correspond à l'intuition des plieurs, est rendue plausible par le fait que l'élasticité du papier peut être en partie simulée par du pliage en accordéon. Elle a été prouvée dans des cas simples : pliage d'une planche de $m \times n$ timbres-poste, pliage d'un nœud unique. Dans ce dernier cas une formule simple permet de déterminer tous les sens, vallées et montagnes, possibles pour les plis.

3. Revenons au cas du pliage d'un seul nœud. La théorie en a été complètement élucidée. Nous avons vu que la condition géométrique est simple : la somme des angles de 2 en 2 vaut π . Cette condition exige bien entendu que les plis soient en nombre pair. Soient, comme dans l'exemple, $c_1 c_2 \dots c_6$ ceux-ci. La condition topologique s'exprime ainsi : écrivons les plis à la suite : $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$. Alors il existe un système de parenthèse qu'on peut déterminer connaissant les angles entre les plis et qui conduit à une équation symbolique. Celle-ci indique les diverses façons de choisir vallée ou montagne pour les plis. Dans cet exemple, on voit qu'il y a $8 = 2 \times 2 \times 2$ choix possibles.

L'équation ci-dessus paraît mystérieuse mais elle ne fait que traduire une technique de pliage du nœud. Dans la figure 23, le plus petit angle est α_2 entre c_2 et c_3 . Ces deux plis seront donc, l'un vallée, l'autre montagne. On peut donc imaginer de les plier puis de coller les 3 épaisseurs de papier, d'où une nouvelle face fictive qui va de c_1 à c_4 , et on recommence.

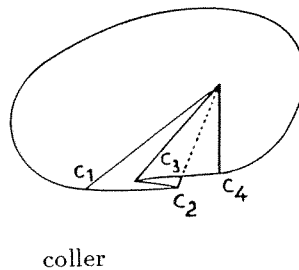
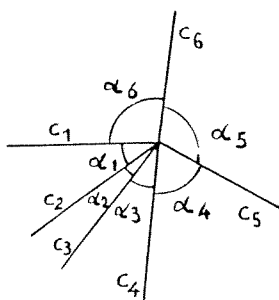
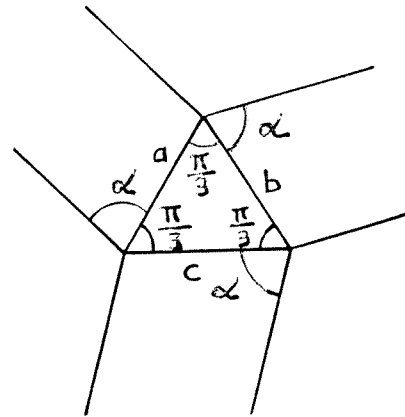


Figure 23



$$\alpha \leq \frac{\pi}{6} : \text{possible } a, b, c \text{ libres.}$$

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{3} : \text{possible } a, b, c \text{ non tous de même sens.}$$

$$\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \frac{\pi}{2} : \text{impossible.}$$

Figure 24

Dans le cas de cet exemple on arrive à la condition topologique

$$(c_1(c_2c_3)c_4)c_5c_6 = \pm 2$$

qui signifie :

c_1 et c_4 sont de sens différents; c_2 et c_3 sont de sens différents;
 c_5 et c_6 sont de même sens.

La figure 24 est un exemple de pliage vissé comportant trois nœuds formant un triangle équilatéral. Pour son étude mathématique, voir la page précédente.

V.— DANS L'ESPACE

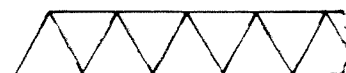
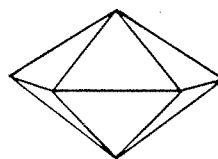
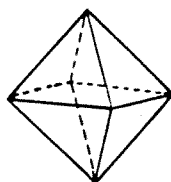
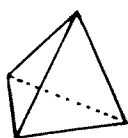
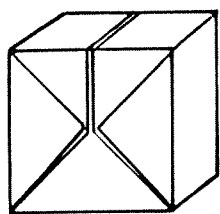
Le pliage ne se limite pas à la réalisation d'objets plats. Restant dans le cadre où les plis sont rectilignes et où le papier reste plan par morceaux, nous allons évoquer la construction des polyèdres. La plupart des plieurs créatifs ne sont essayés à plier des polyèdres, réguliers, partiellement réguliers, ou intéressants d'un autre point de vue. Certains sont devenus des spécialistes.

1. On peut d'abord procéder par pliage pur à partir d'une feuille unique. Tous les polyèdres de PLATON, et bien d'autres, ont été réalisés, à commencer par la classique bombe à eau ou marmite qui n'est autre que le cube. Citons seulement le Jackstone ou étoile du matin spectaculaire tant par la technique que par le résultat (figure 25).

2. Il est très courant aussi de procéder par assemblage de modules qui sont des éléments simples pliés que l'on emboîte.

3. J. PEDERSEN a utilisé le tressage de longues bandes rectilignes. Des problèmes concernant les symétries de ces assemblages de bandes peuvent se poser. Ils ont surtout été étudiés pour le tressage des bandes dans le plan (figures 26 et 27).

On peut aussi utiliser des bandes de forme plus compliquée (figure 28).



$30+1$

Figure 25

Figure 26

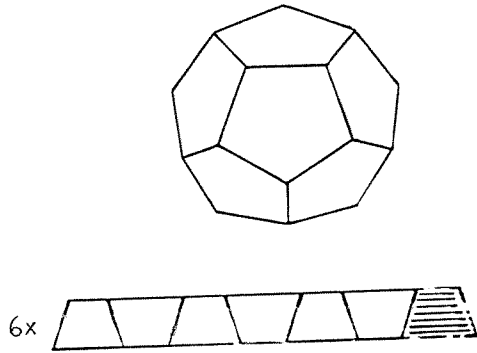


Figure 27

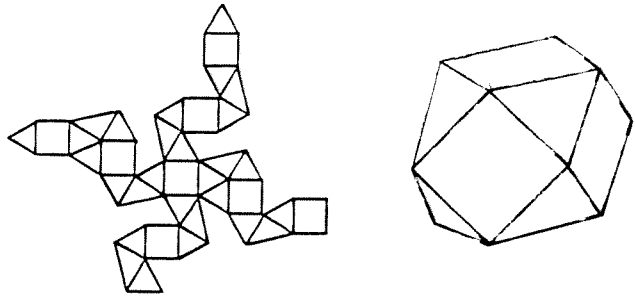


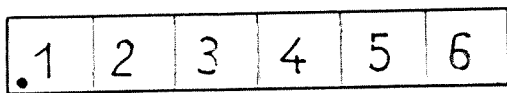
Figure 28

4. Enfin, la méthode la plus simple consiste à dessiner sur un papier ou carton la surface développée du polyèdre et à former celui-ci par découpage et collage. C'est en fait la plus utile pour le mathématicien puisqu'elle permet de construire à peu de frais des modèles géométriques ou topologiques intéressants. Voir par exemple la surface de BOY ou le polyèdre flexible de STEPHEN.

VI. PLIAGES DE BANDES

1. Le pliage des timbres qui é été évoqué plus haut est un problème assez ancien. Le nombre $P(n)$ de façons de superposer les n timbres d'une bande, par pliage selon les perforations, peut s'obtenir par des formules de récurrence compliquées. Les conditions de non-croisement auxquelles satisfont les permutations des timbres correspondant aux pliages possibles sont analogues à celles qui régissent l'usage des parenthèses ou les lois de simplification dans le groupe libre. Par diverses méthodes, notamment en concaténant des pliages convenablement choisis, il a été montré que $P(n)$ est de l'ordre de a^n avec a compris entre 3,3868 et 3,6102. Il semble que le sujet soit loin d'être épuisé.

Un exemple d'opération possible : faire passer dessous le timbre du dessus (figure 29). A partir du pliage 356412 on peut comprendre le principe d'association de parenthèse (figure 30).



356412



564123

Figure 29

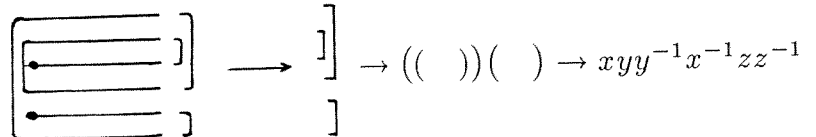


Figure 30

Si on fixe le sens relatif des plis, alors l'évaluation est plus facile et est déterminée de façon exacte dans plusieurs cas comme ceux de la figure 31.

2. Si l'on plie une longue bande en deux, puis encore en deux un certain nombre de fois, et qu'on déplie, on obtient une configuration intéressante (figure 32). On peut imaginer faire systématiquement des plis vallés mais une fois dépliée il apparaîtra des plis vallées et des plis montagnes. Si on note 0 un pli vallée et 1 un pli montagne, à un pliage indéfiniment continué on peut associer le développement en base deux d'un nombre qu'on démontre être transcendant. On peut passer d'une étape à la suivante en intercallant alternativement un pli V et un pli M dans les plis déjà obtenus.

Quand on plie la bande plusieurs fois de suite, on n'est pas obligé de travailler toujours dans le même sens. Dans tous les cas, si on déplie en partie de manière à ce que tous les plis soient à angle droit on obtient une *courbe du dragon* qui ne se croise jamais et qui remplit tout un quadrillage (figures 33 et 34).

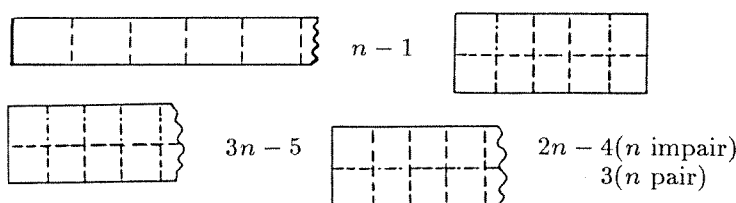


Figure 31

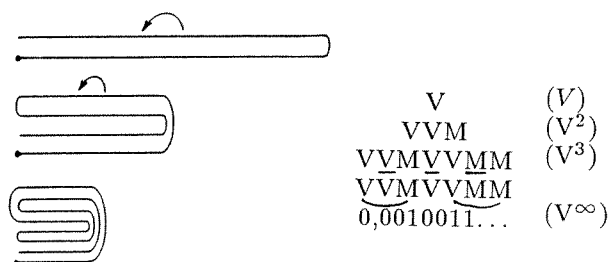


Figure 32

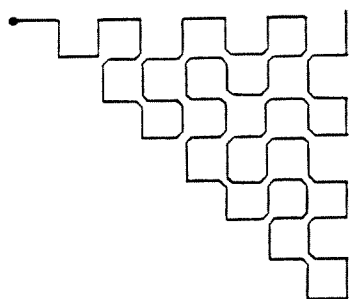


Figure 33

Aspect semi-déplié d'un pliage alternativement vallée et montagne (trois fois) (c'est un quadrillage triangulaire).

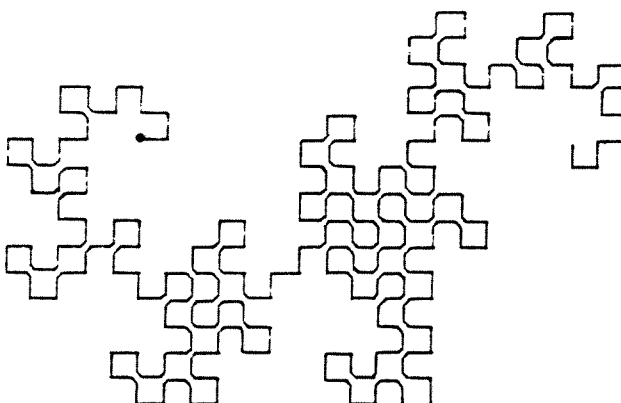


Figure 34

Aspect semi-déplié d'un pliage systématiquement vallée (sept fois).

L'étude des courbes du dragon présente des liens avec : les systèmes de numération, les suites arithmétiques, les nombres transcendants, la théorie des automates, la théorie des courbes planes.

VII.— LES FLEXAGONES

Voici pour terminer un sujet populaire parmi les plieurs et qui relève des mathématiques par ses inventeurs et par la théorie qui en a été faite : les flexagones. Ce sont des gadgets en papier plié qui, lorsqu'on les manipule, révèlent de nouvelles faces tandis que celles qui étaient visibles disparaissent. Le plus simple se fait avec une bande de dix triangles équilatéraux (figure 35) qu'on plie pour avoir l'hexagone de la figure 36. Celui-ci est constitué de six *tas* qui sont des empilements de un ou deux triangles comme indiqué par les chiffres (les deux triangles numérotés 1 doivent être collés ensemble). Dans les flexagones compliqués, les tas contiennent beaucoup plus de triangles. La manipulation consiste à pincer selon trois rayons et à faire basculer comme indiqué par les flèches, ce qui échange des triangles entre les tas et fait apparaître une nouvelle face. La théorie représente un flexagone par un couple de *tas abstraits* qui sont certaines permutations d'entiers, ou même, en poussant un peu plus l'abstraction, des arborescences binaires. Cette théorie permet de construire les flexagones, de les dénombrer et de décrire leur fonctionnement.

Il existe un autre façon de représenter les flexagones. Soit (figure 37) un polygone convexe partitionné en triangles par des diagonales. Tout flexagone peut être représenté de cette façon. Les sommets A, B, \dots représentent les faces. Les côtés des triangles représentent les diverses configurations (paire de faces visibles en dessus et en dessous) du flexagone et la ligne en pointillé indique les diverses façons de parcourir l'ensemble des configurations. Réciproquement tout polygone ainsi triangulé décrit le fonctionnement d'un flexagone.

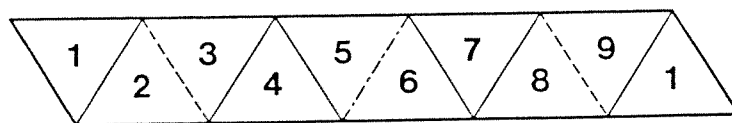


Figure 35

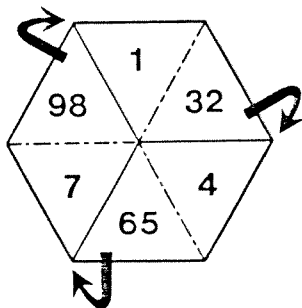


Figure 36

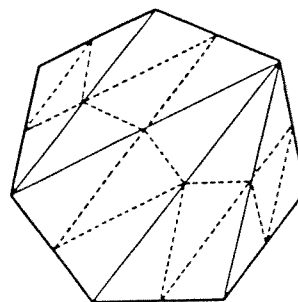


Figure 37

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS POLYNOMIALES :
UNE ANCIENNE MÉTHODE (1)

Jean LEFORT

Premier exemple :

Soit à résoudre l'équation

$$x^3 - x^2 - 1 = 0.$$

Modifions un signe sur deux (on tient compte de l'existence de $0x$) :

$$x^3 + x^2 + 1 = 0$$

et multiplions membre à membre :

$$x^6 - x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

c'est manifestement une équation en x^2 . Divisons tous les exposants par 2 :

$$x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Recommençons, en modifiant un signe sur deux ($x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$) en multipliant membre à membre ($x^6 - 5x^4 + 2x^2 - 1 = 0$) puis en divisant tous les exposants par deux ($x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = 0$).

On obtient ainsi la construction suivante :

Étape 0	x^3	-	x^2		x	-	1
	x^3	+	x^2		x	+	1
1	x^3	-	x^2	-	$2x$	-	1
	x^3	+	x^2	-	$2x$	+	1
2	x^3	-	$5x^2$	+	$2x$	-	1
	x^3	+	$5x^2$	+	$2x$	+	1
3	x^3	-	$21x^2$	-	$6x$	-	1
	x^3	+	$21x^2$	-	$6x$	+	1
4	x^3	-	$453x^2$	-	$6x$	-	1
	x^3	+	$453x^2$	-	$6x$	+	1
5	x^3	-	$205221x^2$	-	$870x$	-	1...

Dans le tableau ci-dessus, au fur et à mesure des multiplications on a divisé tout de suite les exposants par deux. Alors $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{205\ 221}}}}$ est une valeur approchée d'une solution de l'équation proposée (avec cinq radicaux, car il y a 5 étapes).

Sur une calculatrice on trouve $(205\ 221)^{1/32} \simeq 1,465571231$ qui, reporté dans le polynôme $x^3 - x^2 - 1$ donne $-3,1 \cdot 10^{-9}$, alors que pour obtenir zéro il faudrait prendre $1,465571232\dots$ C'est une bonne précision.

Comme il est facile d'étudier la fonction

$$x \longmapsto x^3 - x^2 - 1$$

et de se rendre compte qu'elle n'a qu'un seul zéro, on obtient ainsi une valeur approchée de la solution. Plus exactement, en prenant à chaque fois l'opposé du coefficient de x^2 et en en extrayant la racine carrée autant de fois qu'il y a eu d'étapes on obtient une suite de nombres qui converge vers la solution. Ici :

$$\sqrt{1} \ ; \ \sqrt{5} \simeq 1,4953 \ ; \ \sqrt{\sqrt{21}} \simeq 1,4631 \ ; \ \sqrt{\sqrt{\sqrt{453}}} \simeq 1,465568$$

et enfin le nombre obtenu ci-dessus.

Deuxième exemple

Appliquons la même méthode à :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

On me dira que cela ne présente aucun intérêt puisqu'il est facile de calculer les deux solutions avec **un seul** radical et que de toute façon on obtient le nombre d'or ... etc ...

Essayons quand même :

0	x^2	-	x	-	1
	x^2	+	x	-	1
1	x^2	-	$3x$	+	1
	x^2	+	$3x$	+	1
2	x^2	-	$7x$	+	1
	x^2	+	$7x$	+	1
3	x^2	-	$47x$	+	1
	x^2	+	$47x$	+	1
4	x^2	-	$2207x$	+	1\dots

On trouve la suite :

$$\sqrt{3} \simeq 1,732; \sqrt{7} \simeq 1,6266; \sqrt{\sqrt{47}} \simeq 1,618126; \sqrt{\sqrt{\sqrt{2207}}} \simeq 1,618034\dots$$

Il est, de plus, très facile de connaître la loi de formation du coefficient de x , c'est tout simplement à l'étape n :

$$u_n = +(u_{n-1})^2 - 2 \text{ et } u_1 = +3.$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS POLYNOMIALES

Les résultats précédents conduisent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (+u_n)^{1/2^n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On reconnaîtra qu'il eût été difficile de trouver de but en blanc cette limite **(2)**.

Un peu de théorie

Considérons un polynôme $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ dont les racines sont a_1, a_2, \dots, a_n . Si nous développons ce polynôme, nous trouvons :

$$x^n - \sum_{i=1}^n a_i x^{n-1} + \sum_{i \neq j} a_i a_j x^{n-2} - \dots + (-1)^n (a_1 a_2 \dots a_n).$$

Il est clair que le polynôme $Q(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n)$ dont les racines sont les opposés du précédent se développe en :

$$x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-1} + \sum_{i \neq j} a_i a_j x^{n-2} + \dots + (a_1 a_2 \dots a_n)$$

et nous remarquons qu'il a suffi de changer un signe sur deux dans le développement.

Le produit $P(x).Q(x)$ donne alors, sous forme factorisée, $(x - a_1)(x + a_1)(x - a_2)(x + a_2) \dots (x - a_n)(x + a_n)$ ou bien $\prod_{i=1}^n (x^2 - a_i^2)$ et la réduction de x^2 en x conduit à $\prod_{i=1}^n (x - a_i^2)$ qui est un polynôme dont les racines sont les carrés des racines du polynôme P initial.

En itérant le processus p fois nous obtenons un polynôme dont les racines sont les puissances $N = 2^p$ du polynôme de départ.

Lemme : *Supposons maintenant que les a_i , réels ou complexes satisfassent à $|a_1| > |a_2| \geq |a_3| \geq \dots \geq |a_n|$, alors :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k|} = |a_1|.$$

En effet, pour $2 \leq i \leq n$ $|a_i|/|a_1| < 1$, donc $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_i|^k / |a_1|^k = 0$ et par suite $|a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k|$ est équivalent à $|a_1^k|$, d'où le résultat.

Dans les deux exemples précédents, nous avons a_1 réel et positif, il était donc naturel de retrouver cette racine par le procédé utilisé.

Troisième exemple

Considérons le polynôme $x^3 + 3x^2 + x + 3$ et résolvons-le de même.

0	$x^3 +$	$3x^2 +$	$x +$	3
	$x^3 -$	$3x^2 +$	$x -$	3
1	$x^3 -$	$7x^2 -$	$17x -$	9
	$x^3 +$	$7x^2 -$	$17x +$	9
2	$x^3 -$	$83x^2 +$	$163x -$	81
	$x^3 +$	$83x^2 +$	$163x +$	81
3	$x^3 -$	$6563x^2 +$	$13123x -$	6561
	$x^3 +$	$6563x^2 +$	$13123x +$	6561
4	$x^3 -$	$43046723x^2 -$...

On trouve alors, comme valeur approchée :

$$(43\ 046\ 723)^{1/16} \simeq 3,000\ 000\ 009.$$

Or, 3 n'est manifestement pas un zéro du polynôme proposé, (ni même une valeur approchée à très peu près). Bien sûr, la méthode ne permet d'obtenir que le module de la racine de plus grand module. Ici, on remarque que c'est -3 qui est zéro de $x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x + 3)(x^2 + 1)$. D'ailleurs, à extraire des racines carrées à la queue-leu-leu comme nous le faisons depuis le début de l'article, nous ne pouvons trouver que des nombres positifs.

Il est donc indispensable d'effectuer une étude préalable pour savoir où se trouve à peu près la racine de plus grand module.

Cas de racines multiples

Imaginons que la racine de plus grand module ait une multiplicité α . Comme dans le lemme, on trouve :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|\alpha a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k|} = |a_1|.$$

Mais cette fois-ci la convergence est beaucoup plus lente. Elle peut être accélérée si on connaît α à l'avance (d'où toujours le même intérêt à effectuer une petite étude préalable). Vérifions-le sur un exemple simple :

$$(x - 2)^2(x + 1) = x^3 - 3x^2 + 4$$

qui conduit successivement à :

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^2 + 24x - 16 \\ x^3 - 33x^2 + 288x - 256 \\ x^3 - 513x^2 + \dots \end{aligned}$$

or $\sqrt[2^3]{513} \simeq 2,18154\dots$ mais $\sqrt[2^3]{\frac{513}{2}} \simeq 2,00048\dots$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS POLYNOMIALES

On voit donc qu'en divisant par l'ordre de multiplicité la convergence devient aussi bonne que dans le cas d'une racine simple.

Retour à la théorie

Nous venons de voir que la méthode proposée permet de calculer le module de la racine de plus grand module quel que soit son ordre de multiplicité. Mais on peut démontrer que si il y a deux ou plus racines distinctes de plus grand module, la méthode ne marche pas (3).

Reste à trouver l'argument. Or, ceci est un problème d'une toute autre difficulté et, sauf dans les cas où le polynôme de départ est de degré faible, l'argument est le plus souvent inaccessible. Il est donc important, un polynôme étant donné, de pouvoir montrer que la racine de plus grand module est réelle.

ANNEXES

(1) La méthode proposée a été publiée en 1834 dans '*L'Algèbre*' par LOBAČEVSKIĪ. Mais elle a été trouvée de façon indépendante par DANDELIN en 1826 et GRAEFFE en 1837. L'idée essentielle est due à BERNOULLI.

(2) Pour la suite $u_n = u_{n-1}^2 - 2$ il peut être assez naturel de poser $u_n = 2\operatorname{ch} v_n$ ce qui conduit à $\operatorname{ch} v_n = \operatorname{ch} 2v_{n-1}$ d'où $v_n = 2^{n-1} \operatorname{argch} \frac{3}{2}$. Cela permet de revenir à u_n et de calculer sa racine $2^{n^{\text{ième}}}$. On trouve bien que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{2^{-n}} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{argch} \frac{3}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Une autre façon, strictement équivalente, consiste à poser $u_n = \frac{1}{t_n} + t_n$ alors $\lim u_n^{2^{-n}} = \frac{u_0 + \sqrt{u_0^2 - 4}}{2}$.

(3) L'exemple élémentaire de $x^3 - 1 = 0$ qui fournit 0 montre effectivement la faillite de la méthode dans le cas de trois racines de même module.

M. EMERY à qui j'avais parlé de cette méthode s'est penché sur le cas de deux racines de même module (ce qui est le cas général pour les polynômes à coefficient réel et les racines de plus grand module complexe).

On part du polynôme $x^2 - 2x \cos \theta + 1$, de sorte que l'algorithme fournit $\lim 2^n \sqrt{|\cos 2^n \theta|}$. Bien que le module des racines soit 1, il est possible de choisir θ tel que la limite ci-dessus ne soit pas 1. Prenons par exemple $\theta = \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} 2^{-f(n)}$, où $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante d'entiers qui tend suffisamment vite vers l'infini pour que l'on ait $\frac{f(k+1) - f(k)}{2^{f(k)}} \rightarrow +\infty$ (par exemple $f(0) = 2, f(k+1) = f(k) + k 2^{f(k)}$).

On peut écrire

$$\begin{aligned} 2^{f(k)} \theta &= \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} 2^{f(k) - f(n)} \\ &= \frac{\pi}{2} (\text{entier impair} + \sum_{n \geq 0} 2^{f(k) - f(k+1+n)}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |\cos 2^{f(k)}\theta| &= \left| \sin \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} 2^{f(k)-f(k+1+n)} \right| \\ &< \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} 2^{f(k)-f(k+1+n)} \\ &\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n \geq 0} 2^{f(k)-[f(k+1)+n]} = \pi 2^{f(k)-f(k+1)} \end{aligned}$$

et

$$2^{f(k)} \sqrt[2^{f(k)}]{|\cos 2^{f(k)}\theta|} < \pi^{(2^{-f(k)})} 2^{\frac{f(k)-f(k+1)}{2^{f(k)}}};$$

comme cette dernière expression tend vers $1 \times 0 = 0$, on a $\liminf_n \sqrt[2^n]{|\cos 2^n \theta|} = 0$.

J'ignore s'il existe des θ tels que

$$\lim_n \sqrt[2^n]{|\cos 2^n \theta|} < 1,$$

mais il est très facile de vérifier que pour LEBESGUE — presque — partout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\lim \sqrt[2^n]{|\cos 2^n \theta|} = 1$.

DES ÉQUATIONS QUI DÉTERMINENT LES SECTIONS CIRCULAIRES

(suite et fin)

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Nous avons vu dans le précédent numéro de 'L'Ouvert' (n° 46) comment VANDERMONDE avait préparé le terrain de la résolution de l'équation cyclotomique

$$(c) : \frac{X^n - 1}{X - 1} = 0$$

en traitant complètement le cas $n = 11$. On ne dispose d'aucune information qui indiquerait que GAUSS ait été influencé par le mémoire de VANDERMONDE, mais il est très probable qu'il l'ait lu. Il y a cependant une différence entre les deux auteurs caractérisée par une clarté et une rigueur exemplaire, déjà très moderne chez GAUSS. C'est pourquoi je laisserai souvent la place au texte même des '*Recherches Arithmétiques*' tant celui-ci est une merveille d'exposition mathématique.

L'équation (c) chez GAUSS.

Soit donc l'équation (c) dans laquelle on peut supposer n premier $n = 2m + 1$. L'ensemble (Ω) des $(n - 1)$ racines x_k peut être engendré par l'une d'entre elles, soit r^g où r est l'une des racines de (Ω) et g une racine primitive selon le module n . Rappelons que g est racine primitive selon le module n si g engendre le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z} / n\mathbb{Z})^*$. Supposons donc la racine primitive g fixée. Puisque $n = 2m + 1$, $n - 1$ n'est pas premier. Posons avec GAUSS

$$n - 1 = e \cdot f; h = g^e; [\lambda] = r^\lambda \\ (f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda h] + [\lambda h^2] + \dots + [\lambda h^{f-1}]$$

appelée période (*). GAUSS démontre que si λ n'est pas divisible par n , l'ensemble Ω se partage en e classes qui sont les périodes $(f, 1); (f, g); \dots; (f, g^{e-1})$ et cette partition est indépendante de la racine primitive g choisie. Prenons par exemple $n = 19$ $g = 2$ est racine primitive selon le module 19 comme le montre le tableau qui suit :

©L'OUVERT 47 (1987)

(*) GAUSS utilise délibérément le même terme '*période*' pour la somme et pour l'ensemble des éléments constitutifs de cette somme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2^k	1	2	4	8	16	13	7	14	9	18	17	15	11	3	6	12	5	10	1

Alors :

$$\begin{aligned} (6,1) &= [1] + [8] + [7] + [18] + [11] + [12] \\ (6,2) &= [2] + [16] + [14] + [17] + [3] + [5] \\ (6,4) &= [4] + [13] + [9] + [15] + [6] + [10] \end{aligned}$$

Si f est lui-même composé, la période (f, λ) se décompose à son tour en ‘*sous-périodes*’.

Par exemple : $(6,1)$ est composée des périodes

$$(2,1) = [1] + [18] \quad (2,8) = [8] + [11] \quad \text{et} \quad (2,7) = [7] + [12]$$

Ainsi, par une intuition extraordinaire, GAUSS est tout simplement en train d’utiliser toutes les ressources et propriétés du groupe cyclique des racines de l’unité. L’utilisation de la racine primitive $g = 2$ détermine une permutation circulaire sur Ω .

$$p = (1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10)$$

et les périodes $(6,1)$; $(6,2)$; $(6,4)$ sont les parties stables de Ω par p^3 — les périodes $(2,1)$; $(2,8)$ et $(2,7)$ des parties stables de Ω par $(p^3)^3 = p^9$.

Appelant ‘*semblables*’ des périodes formées du même nombre d’éléments GAUSS démontre alors plusieurs résultats permettant le calcul des périodes :

“345. (*) Théorème : Soient $(f, \lambda), (f, \mu)$ deux périodes semblables, identiques ou différentes, et $[\lambda], [\lambda'], [\lambda''] \dots$ les racines qui composent (f, λ) ; le produit de (f, λ) par (f, μ) sera la somme des f périodes semblables, c’est-à-dire,

$$= (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda' + \mu) + (f, \lambda'' + \mu), \text{ etc } = w.$$

346. Théorème : Si l’on suppose que λ est un nombre non divisible par n , et que pour abrégé on fasse $(f, \lambda) = p$, toute autre période semblable (f, μ) où μ est aussi non-divisible par n , peut être mise sous la forme

$$\alpha + \beta p + \gamma p^2 + \dots + \theta p^{e-1}$$

de manière que les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$ soient rationnels et déterminés.”

(*) Rappelons que ces numéros sont ceux-là même du texte de GAUSS.

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction (cf. 'L'Ouvert' n° 46) l'exemple le plus remarquable — celui qui représente un des premiers et des plus beaux titres de gloire de GAUSS — est sa démonstration de la possibilité de construire à la règle et au compas le polygone régulier de 17 côtés. Citons GAUSS pour l'application des idées développées ci-dessus à ce cas.

“354. Exemple II. Pour $n = 17$.

On a ici $n - 1 = 2.2.2.2$, ainsi le calcul des racines Ω peut se ramener à quatre équations du second degré. Nous choisirons 3 pour racine primitive; ses puissances fournissent, suivant le module 17, les résidus minima suivants :

$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \\ 1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6, \end{array}$$

d'où résulte la distribution suivante en deux périodes de huit termes, quatre périodes de quatre termes et huit de deux termes :

$$\Omega = (16, 1) \left\{ \begin{array}{l} (8, 1) \left\{ \begin{array}{l} (4, 1) \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \quad \dots \quad [1], [16] \\ (2, 13) \quad \dots \quad [4], [13] \end{array} \right. \\ (4, 9) \left\{ \begin{array}{l} (2, 9) \quad \dots \quad [8], [9] \\ (2, 15) \quad \dots \quad [2], [15] \end{array} \right. \end{array} \right. \\ (8, 3) \left\{ \begin{array}{l} (4, 3) \left\{ \begin{array}{l} (2, 3) \quad \dots \quad [3], [14] \\ (2, 5) \quad \dots \quad [5], [12] \end{array} \right. \\ (4, 10) \left\{ \begin{array}{l} (2, 10) \quad \dots \quad [7], [10] \\ (2, 11) \quad \dots \quad [6], [11]. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

L'équation (A) dont les racines sont les sommes (8,1),(8,3), se trouve être

$$x^2 + x - 4 = 0, (*)$$

(*) En effet :

$$\begin{aligned} (8, 1) &= [1] + [9] + [13] + [15] + [16] + [8] + [4] + [2] \\ (8, 3) &= [3] + [10] + [5] + [11] + [14] + [7] + [12] + [6] \\ (8, 1) + (8, 3) &= (16, 1) = -1 \end{aligned}$$

et par le § 345

$$\begin{aligned} (8, 1) \times (8, 3) &= (8, 4) + (8, 12) + (8, 16) + (8, 1) + (8, 2) + (8, 11) + (8, 7) + (8, 5) \\ &= 4[(8, 1) + (8, 3)] = -4. \end{aligned}$$

et ses racines sont :

$$-1/2 + 1/2\sqrt{17} = 1,5615528128 \text{ et } -1/2 - 1/2\sqrt{17} = -2,5615528128;$$

nous supposons que la première soit $(8,1)$, l'autre sera nécessairement $(8,3)$.

L'équation (B) , dont les racines sont les sommes $(4,1)$ et $(4,9)$, est

$$x^2 - (8,1)x - 1 = 0,$$

et ses racines sont

$$x = 1/2(8,1) \pm 1/2\sqrt{4 + (8,1)^2} = 1/2(8,1) \pm 1/2\sqrt{12 + 3(8,1) + 4(8,3)}$$

nous supposons égale à $(4,1)$ celle de ces deux racines dans laquelle le radical est affecté du signe plus; on aura ainsi

$$(4,1) = 2,0494811777, \quad (4,9) = 0,4879283649.$$

Les autres périodes de quatre termes, $(4,3)$ et $(4,10)$ peuvent être calculées de deux manières, savoir :

1° Par la méthode du n° 346, qui donne les formules suivantes, en faisant, pour abrégé, $(4,1)=p$,

$$(4,3) = -\frac{3}{2} + 3p - \frac{1}{2}p^3 = 0,3441507314,$$

$$(4,10) = \frac{3}{2} + 2p - p^2 - \frac{1}{2}p^3 = -2,9057035442.$$

La même méthode donne aussi la formule

$$(4,9) = -1 - 6p + p^2 + p^3,$$

d'où l'on tire la même valeur que plus haut.

2° En résolvant l'équation dont $(4,3),(4,10)$ sont les racines; cette équation est

$$x^2 - (8,3)x - 1 = 0$$

et donne

$$x = \frac{1}{2}(8,3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 + (8,3)^2},$$

$$\text{ou } \dots x = \frac{1}{2}(8,3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{12 + 4(8,1) + 3(8,3)},$$

$$\text{et } \dots x = \frac{1}{2}(8,3) - 1/2\sqrt{12 + 4(8,1) + 3(8,3)};$$

nous déciderons, par l'artifice suivant annoncé au n° 352, laquelle (*) de ces deux racines doit être prise pour (4,3). Faisons le produit de (4,1) – (4,9) par (4,3) – (4,10), il est, calcul fait, = 2(8,1) – 2(8,3). Or la valeur de cette expression est positive, puisqu'elle est = $2\sqrt{17}$; d'ailleurs le premier facteur (4,1) – (4,9) est aussi positif, comme égal à $\sqrt{12 + 4(8,1) + 3(8,3)}$ donc le second facteur doit aussi être positif, et partant (4,3) doit être racine dans laquelle le radical est positif, et (4,10) l'autre racine (*). Au reste, il en résulte les mêmes valeurs que plus haut.

Connaissant toutes les sommes de quatre termes, nous passons maintenant à la recherche des sommes de deux termes. L'équation (C) dont les racines sont (2,1), (2,13), périodes contenues dans (4,1), est

$$x^2 - (4,1)x + (4,3) = 0,$$

qui donne

$$\begin{aligned} x &= 1/2(4,1) \pm 1/2\sqrt{-4(4,3) + (4,1)^2} \\ &= 1/2(4,1) \pm 1/2\sqrt{4 + (4,9) - 2(4,3)}; \end{aligned}$$

nous prendrons pour valeur de (2,1) celle de ces deux racines dans laquelle le radical est positif, et il en résulte

$$(2,1) = 1,8649444588, \quad (2,13) = 0,1845367189.$$

(...) Et GAUSS termine.

En calculant de la même manière les autres racines, on trouve les valeurs numériques suivantes, dans lesquelles le signe supérieur appartient à la première, et le signe inférieur à la seconde.

$$\begin{aligned} [1], [16] \dots & [0,9324722294] \pm [0,3612416662] i, \\ [2], [15] \dots & [0,7390089172] \pm [0,6736956436] i, \\ [3], [14] \dots & [0,4457383558] \pm [0,8951633914] i, \\ [4], [13] \dots & [0,0922683595] \pm [0,9957341763] i, \\ [5], [12] \dots & -[0,2736629901] \pm [0,9618256432] i, \\ [6], [11] \dots & -[0,6026346364] \pm [0,7980172273] i, \\ [7], [10] \dots & -[0,8502171357] \pm [0,5264321629] i, \\ [8], [9] \dots & -[0,9829730997] \pm [0,1837495178] i. \end{aligned}$$

Plus loin (...)

(*) Le fond de cet artifice consiste dans une propriété facile à prévoir, d'après laquelle le développement de ce produit ne contient plus de périodes de quatre termes, mais se trouve exprimé par des périodes de huit termes; les gens instruits en découvriront facilement la raison que l'envie d'abrégé nous force d'omettre.

“365. Nous avons ainsi réduit par les recherches précédentes la division du cercle en n parties, si n est un nombre premier, à la solution d'autant d'équations qu'il y a de facteurs dans le nombre $n - 1$, et dont le degré est déterminé par la grandeur des facteurs. Ainsi, toutes les fois que $n - 1$ est une puissance de 2, ce qui arrive pour les valeurs de n

3, 5, 17, 257, 65537, etc ...

la division du cercle est réduite à des équations du second degré seulement, et les fonctions trigonométriques des angles $\frac{P(*)}{n}$, $\frac{2P}{n}$, etc peuvent être exprimées par des racines carrées plus ou moins compliquées, suivant la grandeur de n ; donc, dans ces différents cas, la division du cercle en n parties, ou la description du polygone régulier de n côtés, peut s'exécuter par des constructions géométriques. Par exemple, pour $n = 17$, on tire facilement des n° 354, 361

$$\begin{aligned} \cos \frac{P}{17} = & -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ & + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

Au reste on prouve facilement que si un nombre premier n est $= 2^m + 1$, le nombre m lui-même ne peut avoir d'autres diviseurs que 2, et qu'il est par conséquent de la forme 2^ν . En effet, si m était divisible par un nombre impair plus grand que l'unité, et qu'on eût ainsi $m = \xi\eta$, $2^m + 1$ serait divisible par $2^\eta + 1$, et partant composé. Toutes les valeurs de n qui ne conduisent qu'à des équations du second degré, sont donc contenues sous la forme $2^{2^6} + 1$; ainsi les cinq nombres 3, 5, 17, 257, 65537 s'en déduisent en faisant $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ ou $m = 1, 2, 4, 8, 16$. Mais la réciproque n'est pas vraie, et la division du cercle n'a lieu géométriquement que pour les nombres premiers compris dans cette formule. A la vérité FERMAT, trompé par l'induction, avait affirmé que tous les nombres compris sous cette forme étaient nécessairement premiers; mais EULER a remarqué le premier que cette règle était en défaut dès la supposition $\nu = 5$ ou $m = 32$, qui donne

$$2^{32} + 1 = 4294967297,$$

nombre divisible par 641.

Toutes les fois que $n - 1$ renferme des facteurs différents de 2, on est toujours conduit à des équations plus élevées, par exemple, à une ou plusieurs équations du troisième degré, si 3 est une ou plusieurs fois

(*) $P=2\pi$.

facteur; à des équations du cinquième degré, quand $n-1$ est divisible par 5, etc ... et **NOUS POUVONS DÉMONTRER EN TOUTE RIGUEUR QUE CES ÉQUATIONS NE SAURAIENT EN AUCUNE MANIÈRE ÊTRE ÉVITÉES NI ABAISSÉES**, et quoique les limites de cet ouvrage ne nous permettent pas de développer ici la démonstration de cette vérité, nous avons cru devoir en avertir, pour éviter que quelqu'un ne voulût essayer de réduire à des constructions géométriques d'autres divisions que celles données par notre théorie, et n'employât inutilement son temps à cette recherche.

(...) **366.** Il suit de là généralement que pour que la division géométrique du cercle en n parties soit possible, n doit être 2 ou une puissance de 2, ou bien un nombre premier de la forme $2^m + 1$ ou encore le produit d'une puissance de 2 par un ou plusieurs nombres premiers différents de cette forme; ou d'une manière plus abrégée, il est nécessaire que n ne renferme aucun diviseur impair qui ne soit de la forme $2^m + 1$, ni plusieurs fois un même diviseur premier de cette forme.

On trouve de cette manière, au dessous de 300, les trente huit valeurs suivantes pour le nombre n :

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48,
51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192,
204, 240, 255, 256, 257, 272."

Pour les valeurs de n qui ne sont pas de cette forme, il se pose pourtant un problème; si $(n - 1)$ contient un facteur premier supérieur ou égal à 5, on sera en présence d'une équation d'un degré tel qu'on ne sait pas **en général** la résoudre. Or un des autres résultats remarquables de GAUSS est que, dans le cas particulier étudié ici, ce sera **toujours** possible.

"**359.** Les recherches précédentes avaient pour but de trouver les équations auxiliaires; nous allons maintenant exposer sur leur résolution une propriété digne de remarque. On sait que tous les travaux des plus grands géomètres ont échoué contre la résolution générale des équations qui passent le premier degré, ou pour mieux définir l'objet de la recherche, contre la réduction des équations complètes à des équations à deux termes, et il est à peine douteux si ce problème ne renferme pas quelque chose d'impossible, plutôt qu'il ne surpasse les forces actuelles de l'analyse. (Voyez ce que nous avons dit sur ce sujet dans le Mémoire intitulé '*Demonstratio nova*', etc p. 22). Il est certain néanmoins qu'il y a une infinité d'équations composées dans chaque degré, qui admettent une telle réduction, et nous espérons faire plaisir aux géomètres, **en prouvent que nos équations auxiliaires sont toujours dans ce cas.** Mais à cause de l'étendue du sujet, nous ne présenterons que les principes les plus importants qui sont nécessaires pour démontrer cette

possibilité, différant à un autre temps l'exposition plus complète. Nous mettrons en avant quelques observations générales sur les racines de l'équation $x^e - 1 = 0$ en comprenant le cas où e est un nombre composé."

Je ne citerai pas ces 'principes les plus importants' car ce sont ceux-là même que ABEL va développer et étendre dans le mémoire "Sur une classe particulière d'équations résoluble par radicaux". Signalons simplement que GAUSS indique (§ 360) que pour certaines puissances

$$T = t^\beta = (a + Rb + \dots + R^{\beta-1}m)^\beta$$

est rationnel où a, b, \dots, m sont les périodes de longueur déterminée et R une racine $\beta^{\text{ième}}$ de l'unité. Par là, il généralise vraiment le résultat et la méthode utilisée par VANDERMONDE pour le cas $N = 11$ (voir 'L'Ouvert' n° 46).

Mais il m'a paru intéressant de présenter de très larges extraits de cette section VII des 'Recherches arithmétiques', d'abord à cause de leur beauté et de leur rigueur, ensuite parce que GAUSS y développe des idées et des méthodes qui anticipent de façon extraordinaire sur ce qu'on appelle la théorie de GALOIS — au moins en ce qui concerne l'équation cyclotomique. Reprenons en effet l'exemple II pour $n = 17$ et les diverses décompositions en périodes (voir p. 23) :

$$\Omega = (16, 1) \left\{ \begin{array}{l} (8, 1) \left\{ \begin{array}{l} (4, 1) \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \dots [1], [16] \\ (2, 13) \dots [4], [13] \end{array} \right. \\ (4, 9) \left\{ \begin{array}{l} (2, 9) \dots [8], [9] \\ (2, 15) \dots [2], [15] \end{array} \right. \end{array} \right. \\ (8, 3) \left\{ \begin{array}{l} (4, 3) \left\{ \begin{array}{l} (2, 3) \dots [3], [14] \\ (2, 5) \dots [5], [12] \end{array} \right. \\ (4, 10) \left\{ \begin{array}{l} (2, 10) \dots [7], [10] \\ (2, 11) \dots [6], [11]. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On y associe sans peine les deux suites

$$C_{16} \supset C_8 \supset C_4 \supset C_2 \supset \{Id\}$$

et

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[(8, 1)] \subset \mathbb{Q}[(4, 1)] \subset \mathbb{Q}[(2, 1)] \subset \mathbb{Q}[[1]]$$

en notant C_n le groupe cyclique d'ordre n et $\mathbb{Q}[a]$ l'extension de \mathbb{Q} obtenue par l'adjonction du nombre a .

• C_{16} est le groupe cyclique engendré par la permutation (cyclique d'ordre 16) :

$$p = (1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6)$$

définie par l'automorphisme de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^* : h \rightarrow 3^h = \varphi(h)$. Tous les éléments de ce groupe C_{16} conservent la période $(16, 1) = \Omega$ somme de toutes les racines de $(X^{17} - 1)/(X - 1) = 0$. Cette somme est connue, égale à (-1) et appartient au corps \mathbb{Q} .

• C_8 est le groupe cyclique, sous-groupe d'indice 2 de C_{16} , engendré par $p^2 = (1, 9, 13, 15, 16, 8, 4, 2)$ et les éléments de C_8 laissent invariantes les périodes $(8, 1)$ et $(8, 3)$, donc aussi tout élément de l'extension $\mathbb{Q}[(8, 1)]$. Cette extension est en fait le corps de rupture de l'équation $x^2 + x - 4 = 0$ dont les racines sont ainsi **adjointes** au corps \mathbb{Q} .

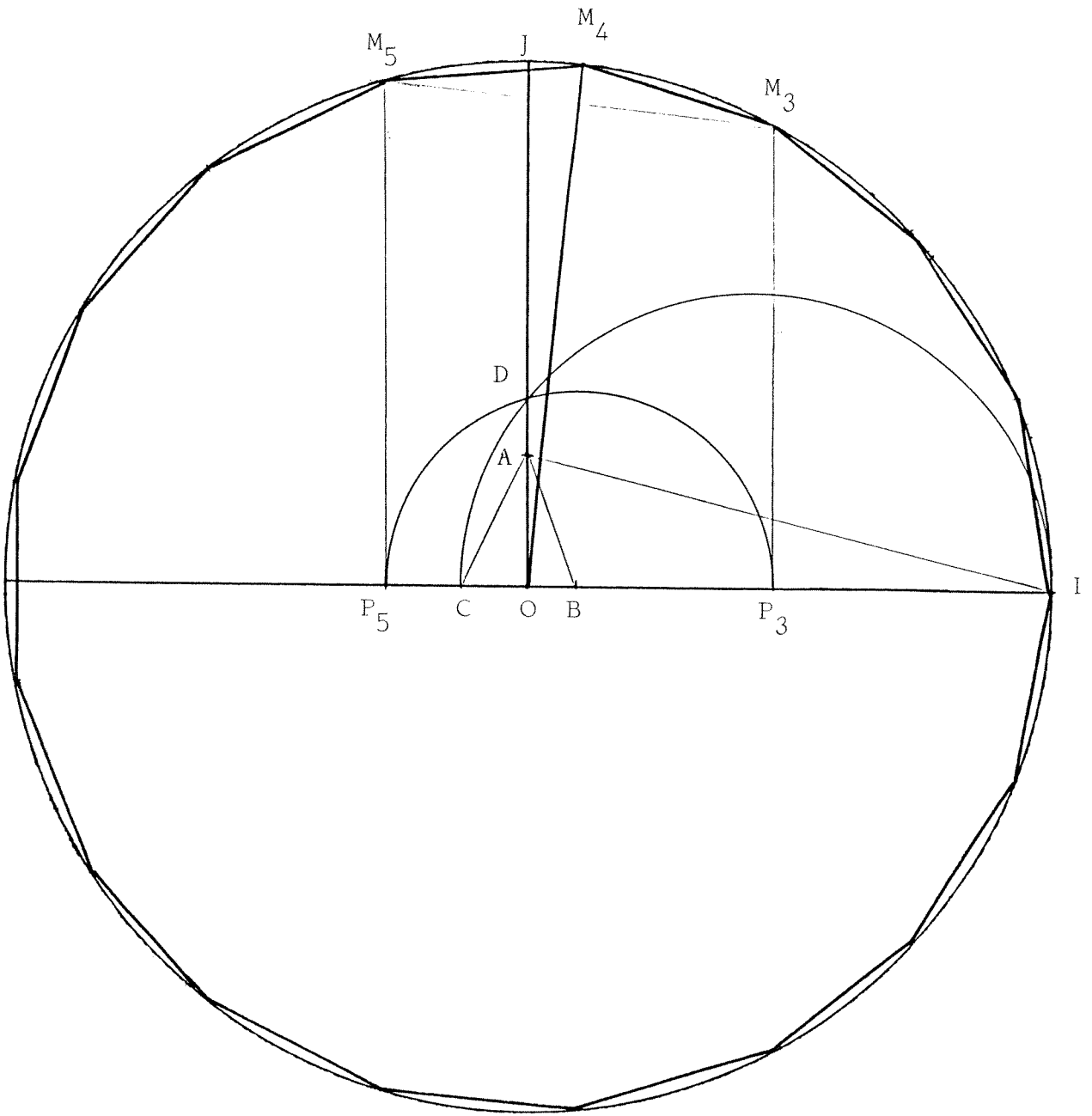
• C_4 est le groupe cyclique engendré par $(1, 13, 16, 4)$ etc (pour une présentation complète de la question en liaison avec la théorie de GALOIS, voir par exemple J.-Cl. CARREGA 'Théorie des corps - La règle et le compas', Chap. X § 4).

On comprend que ce texte ait marqué les contemporains de GAUSS, donnant pour la première fois une méthode de résolution pour une classe d'équations d'un degré quelconque, ou du moins montrant comment abaisser leur degré par l'adjonction de racines auxiliaires à l'ensemble des rationnels. Si LAGRANGE a posé les principes généraux et les lieux de recherche pour l'équation générale, GAUSS a exhibé une situation où ces principes deviennent opérants. Il a dégagé un modèle qui servira de référence et de levier dans la recherche, jusque là quasi aveugle, de ce qui fait qu'une équation est résoluble algébriquement ou ne l'est pas. Une première brèche est ainsi ouverte dans laquelle ABEL va s'engager et qu'il va élargir en montrant que la méthode de GAUSS s'applique dans bien d'autres cas. Et GALOIS à son tour s'appuiera sur le texte de GAUSS qui lui servira d'exemple pour illustrer ses propres découvertes.

La méthode de GAUSS, si elle justifie la possibilité de construire le polygone régulier à 17 côtés, n'est guère pratique pour la construction effective. H.-W. RICHMOND en a proposé une en 1893 dont on trouvera la justification complète dans le livre déjà cité de CARREGA, et une réalisation ci-après.

Les rayons OI, OJ sont perpendiculaires. $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OJ}$, $\widehat{OAB} = \frac{1}{4}\widehat{OAI}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.

Le cercle de diamètre IC coupe OJ en D . Le cercle de centre B passant par D coupe la droite (OI) en P_3 et P_5 qui sont les projections orthogonales des points M_3 et M_5 qui représentent les 3^e et 5^e sommets d'un polygone régulier à 17 côtés dont I est le 17^e sommet.



UN TEST ÉLÉMENTAIRE DE PRIMALITÉ

Maurice MIGNOTTE

Le test présenté ici n'est probablement pas nouveau, bien que je ne l'aie pas trouvé dans la littérature. L'originalité de cette note est le caractère très élémentaire de sa démonstration. Contrairement aux tests usuels qui reposent sur la loi de réciprocité quadratique ou sur l'existence d'un élément primitif modulo un nombre premier, je n'utilise ici que le théorème de FERMAT, le fait que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps lorsque p est un nombre premier et le théorème chinois.

Dans toute la suite n est un nombre impair ≥ 3 , et on cherche à savoir si n est premier ou non. On considère les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} F(n) : (a, n) = 1 &\Rightarrow a^{n-1} \equiv 1(\text{mod } n), \\ E(n) : (a, n) = 1 &\Rightarrow a^{(n-1)/2} \equiv \pm 1(\text{mod } n), \end{aligned}$$

où la notation $(a, n) = 1$ signifie que a et n sont premiers entre eux.

Le critère annoncé est le suivant.

THÉORÈME .— Soit n un entier impair, $n \geq 3$. Alors, on a l'équivalence

$$n \text{ premier} \Leftrightarrow E(n) \text{ et } (\exists a, a^{(n-1)/2} \equiv -1(\text{mod } n)).$$

Démontrons d'abord le résultat auxiliaire suivant.

LEMME.— Un entier n qui vérifie $F(n)$ n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier (on dit alors que n est *quadratfrei*).

On raisonne par l'absurde. Supposons que n soit de la forme $n = p^\alpha n'$, p premier, $\alpha \geq 2$ et $(p, n') = 1$. Alors l'entier

$$x = 1 + p^{\alpha-1}$$

est d'ordre p modulo p^α , ce qui signifie que l'on a

$$x^p \equiv 1(\text{mod } p^\alpha) \text{ et } (x^k \equiv 1 \text{ mod } p^\alpha \Rightarrow p \text{ divise } k),$$

(exercice facile). D'après le théorème chinois, il existe un entier a qui vérifie

$$a \equiv x(\text{mod } p^\alpha) \text{ et } a \equiv 1(\text{mod } n').$$

Alors a est un élément d'ordre p modulo n et, comme p est premier avec $n - 1$, on a

$$a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}.$$

D'où la conclusion.

Démonstration du théorème.

\implies :

Supposons que n soit un nombre premier, $n = p$. On sait que p vérifie le théorème de FERMAT, donc pour tout entier a premier avec p , l'entier $y = a^{(n-1)/2}$ vérifie

$$y^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

soit encore

$$(y - 1)(y + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

et comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, cette relation implique $y \equiv \pm 1 \pmod{p}$, donc $E(p)$ est vrai.

De plus, l'équation $X^{(p-1)/2} = 1$ possède au plus $(p-1)/2$ solutions dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il existe donc un y comme ci-dessus qui vérifie $y \equiv -1 \pmod{p}$. D'où la seconde assertion.

\impliedby :

Supposons maintenant que n soit un entier impair ≥ 3 qui vérifie la condition $E(n)$ et tel qu'il existe un entier x vérifiant $x^{(n-1)/2} \equiv -1 \pmod{n}$.

Il est clair que la propriété $E(n)$ implique $F(n)$, donc le lemme montre que n est *quadratifrei*. Supposons que n ne soit pas premier, alors $n = pn'$ où p est un nombre premier et $n' > 1$, p premier avec n' .

On a

$$x^{(n-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Le théorème chinois montre qu'il existe un entier a tel que

$$a \equiv x \pmod{p} \text{ et } a \equiv 1 \pmod{p}.$$

Il est clair que a est premier avec n mais ne vérifie pas la condition $a^{(n-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{n}$. D'où la conclusion.

La partie directe du théorème est classique. On peut noter que la preuve de la réciproque n'utilise que le théorème chinois.

Remarque : Il existe des nombres qui vérifient la propriété $E(n)$ sans être premiers, les deux plus petits sont $1729 = 7 \times 13 \times 19$ et $2465 = 5 \times 17 \times 29$.

TEX, UN AN APRÈS...

Raymond SEROUL

Je commencerai par préciser deux mots de vocabulaire : *éditeur de texte* et *traitement de texte*.

Un éditeur de texte est un programme qui vous permet d'écrire sur une disquette ce que vous avez tapé sur le clavier. Il vous fournit en général des commodités : recherche d'un mot dans un texte, remplacement d'un mot par un autre, copie ou déplacement d'un bloc de texte, *etc.*

Un traitement de texte est un programme qui vous permet d'imprimer un document sous sa forme définitive. Selon sa puissance, votre texte sera justifié à droite et à gauche, il comprendra différentes sortes de caractères (les fontes), qui pourront être en outre en gras, en italique. Vous pourrez aussi incorporer des mathématiques, des figures ou des photos.

Il existe deux types de traitement de texte:

- les WYSIWYG (**W**hat **Y**ou **S**ee **I**s **W**hat **Y**ou **G**et). En français : ce que tu vois sur ton écran est exactement ce que tu obtiendras (*) sur ta feuille de papier.
- les autres, dont TEX fait partie.

Les traitements de texte de la première partie sont ceux que l'on trouve sur un Macintosh (MacWrite, Writer +, Microsoft Word).

L'oreille humaine est un organe d'une très grande sensibilité. Elle est capable de détecter une fausse note dans une masse orchestrale touffue. De manière analogue, l'œil est capable de performances extraordinaires. Des variations infinitésimales au niveau du tracé des caractères peuvent donner l'impression qu'il s'agit d'un nouveau jeu de caractères. Alors, que dire de la répartition des blancs dans un texte !

Si j'écris cela, c'est pour vous dire que la lisibilité, le confort, l'harmonie, la beauté d'un texte dépendent pour une très grande part d'infinités petits. Autrement dit, il faut incorporer énormément d'informations dans un texte pour arriver à un résultat satisfaisant. Pour vous en convaincre, essayez mentalement de décrire une belle page typographique au téléphone, votre correspondant imaginaire devant vous fournir une copie indiscernable de l'original.

© L'OUVERT 47 (1987)
(*) enfin, presque!

C'est pour cette raison que les traitements de texte *actuels* du type WYSIWYG ne peuvent fournir (jusqu'à preuve du contraire) que des résultats du style " amateur éclairé". Un blanc de 0.1 millimètre est très difficile à apprécier sur un écran. . . Il y a deux ans, je trouvais les productions de MacWrite très satisfaisantes. Entre temps, je me suis intéressé à la typographie et ma vision a changé. A l'heure actuelle, un texte MacWrite me met mal à l'aise. J'ai la sensation d'un chaos : les fontes (disons Times) sont agréables, flattent l'œil, mais les blancs sont très mals répartis. Et la situation s'aggrave considérablement lorsqu'il est question de formules mathématiques.

C'est pour remédier à la dégringolade vertigineuse de la qualité typographique des textes scientifiques que Donald E. KNUTH a écrit un traitement de texte qu'il a baptisé T_EX. Maintenant, c'est la machine qui choisit les fontes appropriées et qui calcule au centième de millimètre la disposition des caractères sur la feuille de papier.

Cela ne résoud pour autant pas *tous* les problèmes. Il faut décider (combien de blanc entre deux paragraphes, de combien dois-je indenter, *etc*). Et surtout, il faut apprendre à parler à la machine. Puisque T_EX n'est pas un WYSIWYG, on truffe le texte de commandes de formatage : on travaille en aveugle, il faut être capable d'*imaginer* le document final. C'est aussi agréable que conduire une voiture les yeux bandés! Ce n'est qu'après avoir codé tout son texte que l'on peut enfin voir et juger. Ceux qui programment me comprendront mieux si je leur dit que T_EX est un *compilateur*. Pour reprendre un terme à la mode, T_EX n'est pas du tout, mais alors pas du tout convivial!!!

Ceci dit, des efforts sont entrepris partout dans le monde pour donner à T_EX un "visage humain". Strasbourg a apporté sa contribution avec le logiciel STRATEC. Ainsi, pour obtenir la formule

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu!} \right] \sqrt[3]{1 + \xi^2} e^{-2i\pi(\xi f_\xi + \eta f_\eta)} d\xi$$

on code, très naturellement et sans maux de tête

$$[[E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu!} \right] \sqrt[3]{1 + \xi^2} e^{-2i\pi(\xi f_\xi + \eta f_\eta)} d\xi]]$$

Voici la même formule codée en T_EX *pur et dur*.

$$\begin{aligned} \$E(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \\ &\Bigl[1 + \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu!} \Bigr] \\ &\sqrt[3]{1 + \xi^2} e^{-2i\pi(\xi f_\xi + \eta f_\eta)} d\xi \end{aligned}$$

C'est beaucoup plus difficile à lire! Comparez enfin la formule ci-dessus avec la

même formule composée avec le logiciel MacEquation. (Il m’a fallu autant de temps pour la dessiner avec MacEquation que pour la coder en STRATEC).

$$E(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \sum_{v=0}^{+\infty} \frac{\xi^v}{v!} \right] \sqrt[3]{1+\xi^2} e^{-2i\pi(\xi^2 + \eta\xi)} d\xi$$

Vous voyez la différence de qualité? Regardez en particulier la répartition des blancs dans les deux formules. Dans la formule créée par T_EX, la gestion des blancs est *automatique*. Par contre, j’ai fait ce que j’ai pu avec MacEquation.

On peut distinguer trois niveaux d’utilisation de T_EX :

- utilisateur ordinaire (cela comprend 90% des articles composés dans cette maison),
- utilisateur confirmé (c’est le niveau requis pour composer ‘L’Ouvert’),
- utilisateur professionnel.

Les américains, grands amateurs de titres, appellent “Grand Maître” et “Grand Sorcier” les personnes des niveaux deux et trois.

L’expérience nous a montré qu’il est difficile à un profane de savoir quelle est la compétence requise pour coder son texte en T_EX. Pour situer le problème, il faut réaliser que vous donnez à T_EX une *très longue* chaîne de caractères (disons longue d’un kilomètre). Vous avez donc en entrée une structure *unidimensionnelle*. Et cette structure doit décrire un objet *bidimensionnel* (la feuille de papier).

- Si votre texte ne contient que des “lignes” (maths ou pas, peu importe), vous vous situez au niveau un. Le codage est simple, naturel et la frappe se fait au *kilomètre*. Cela s’apprend en quelques heures.

- Si votre texte ressemble à ceux qui sont soumis à ‘L’Ouvert’ (c’est-à-dire s’il comprend des tableaux, des structures bidimensionnelles, une mise en page “magazine”), vous vous situez au niveau deux. Il faudra que vous indiquiez vous même à T_EX comment gérer la feuille de papier. Le codage est d’autant plus complexe que l’on ne sait jamais à l’avance à quel endroit de la page sera située telle partie du texte.

- Il se peut que vous ayez besoin un jour de numéroté automatiquement les lignes du texte imprimé (où *commencera* la ligne 110?), vous pouvez avoir besoin de notes de bas de page qui font elles-mêmes appel à d’autres notes, ou vous voulez encore des notes de bas de page sur plusieurs colonnes. Bref, vous voulez que T_EX vous sorte quelque chose qui ne fait pas partie du *format standard*. C’est possible, car contrairement aux autres traitements de texte, T_EX n’est pas un programme figé : *c’est un langage de programmation*. On peut enrichir T_EX en lui ajoutant de nouvelles *macros*. Mais pour cela, vous devrez trouver un Grand Sorcier qui voudra bien s’occuper de vous. . .

L’accès aux niveaux un et deux est assez facile. Si Mme LE GUYADER et moi avons

autant peiné au début, c'est qu'il nous a fallu démarrer directement au niveau deux. Par contre, $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ considéré comme langage de programmation, est excessivement difficile. Cela fait un an que je fréquente $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ à raison d'une heure par jour en moyenne. Il me faudra encore un ou deux ans pour arriver au troisième niveau. Les Grands Sorciers eux-mêmes ont beaucoup de mal. Voici un exemple : KNUTH a écrit une macro qui permet de travailler en deux colonnes. Malheureusement, cette macro comporte deux erreurs qui la rendent inutilisable. Je connais deux autres versions de cette macro, où les erreurs sont parait-il réparées. Il n'en est rien, hélas! Et pourtant, le texte de cette macro tient sur une simple page.

Quelles sont les qualités et les défauts de $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$?

Commençons par les qualités.

- Tout d'abord, ce qui frappe au premier abord est la qualité du document produit. KNUTH a gagné son pari : il voulait un traitement de texte capable de sortir des pages de typographie capables de soutenir la comparaison avec les meilleures productions de la typographie au plomb.

- Une autre réussite éclatante de $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ est le codage des formules de mathématique. Ce codage est tellement naturel qu'il s'apprend en quelques minutes! (Ne pas confondre l'apprentissage du codage avec celui du clavier et de l'ordinateur.) Je n'ai encore jamais vu quelqu'un hésiter devant le codage d'une formule, aussi complexe soit elle. Autre point important : c'est le programme qui se charge de la gestion des blancs, des espacements entre les caractères, de leur taille dans une formule de mathématiques. La frappe d'un texte mathématique "qui ne contient que des lignes" se fait donc au kilomètre, comme on dit. KNUTH a optimisé tout ce qui concerne les mathématiques : coder une matrice est aussi facile que de taper ce texte.

- $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ est un programme qui est dans le domaine public (le source PASCAL est édité par Addison-Wesley). Vous n'avez à payer que le prix de l'implantation sur la machine de votre choix. Vu la qualité du programme, les prix sont dérisoires.

- Corollaire de la remarque précédente : $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ est maintenant disponible sur tous les micro-ordinateurs courants : IBM PC et compatibles, Macintosh, Atari et Amiga.

- Enfin, $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ a été choisi comme standard par l'American Mathematical Society.

Passons maintenant aux défauts.

- J'en ai signalé déjà un : le manque total d'interactivité et de convivialité de $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

- $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ est un produit démodé : ce programme a été conçu au début des années 70. C'est le reflet de l'informatique pure et dure de l'époque. On ne communique, péniblement, avec la machine que via le clavier et par codes ésotériques. Pas question d'un quelconque langage visuel, ce qui est un handicap très lourd quand on veut faire de la mise en page. Pire encore, $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ a été écrit par KNUTH pour

son propre usage. L'embêtant, c'est que ce monsieur a une pensée compliquée. En outre, on a l'impression que T_EX, en tant que langage de programmation, est un assemblage de bouts de ficelles et de sparadrap. C'est pour ces raisons que le niveau trois est si difficile à maîtriser.

- Il est illusoire de constituer une bibliothèque de macros. Une macro est écrite pour un usage très particulier. Dès qu'on la sort du contexte où elle a été écrite, on est sûr d'avoir des accidents. Le recours aux Grands Sorciers est inévitable.

- T_EX n'est compatible avec aucun des standards qui se dégagent à l'heure actuelle en micro-édition. Le langage de description de page POSTSCRIPT prend de plus en plus d'importance : c'est déjà un standard de fait. Mais T_EX produit sa propre description de page (dvi), qu'il faut ensuite traduire en POSTSCRIPT pour se servir d'une Laserwriter.

- T_EX ne possède qu'un jeu très pauvre de fontes. Et en plus, les fontes existantes ne sont pas très belles. Elles ont un air vieillot et elles aggrèssent l'œil. La raison de cette pénurie est que T_EX n'accepte que des fontes fabriquées par un autre programme qui s'appelle METAFONT. Pas question donc de se servir d'un jeu de fontes du commerce. Vous me direz : il n'y a qu'à redessiner les fontes classiques à l'aide de ce programme. Seulement, il y a un os, et de taille : le programme METAFONT est encore plus dur à maîtriser que T_EX lui-même ! Peu de personnes en sont capables à l'heure actuelle.

Alors T_EX, pour qui et pour quoi ?

Commençons par répondre à la deuxième question. Ce programme a été conçu pour composer un texte mathématique. Ce type de texte ne pose pas de problème, les formules mises à part. Puisque T_EX résoud magnifiquement le problème des formules et de la gestion des blancs, je ne peux que le conseiller chaudement. Ma seule réserve concerne les diagrammes (T_EX est incapable de tracer un trait oblique). Plus généralement, T_EX peut s'occuper de tout texte qui ne nécessite pas de mise en page compliquée. Là où les ennuis commencent, c'est lorsque l'on demande à T_EX de s'occuper de mise en page. Ce programme peut **tout** faire, c'est vrai, mais à quel prix ! La loi de Peter s'applique aussi aux programmes. MacWrite a manifestement été conçu pour rédiger une lettre, voire un petit rapport. On lui demande de composer des livres entiers, des textes mathématiques et j'en passe. La même chose est aussi valable pour T_EX : composer '*L'Ouvert*' avec ce programme, c'est déjà le pousser dans son domaine d'incompétence. Mais que faire d'autre ?

Qui a intérêt à se servir de T_EX ? En premier lieu, les mathématiciens, pour qui il a été écrit. Plus généralement, pour tous les amoureux de la belle typographie qui n'ont que des rectangles à composer. T_EX est aussi irremplaçable pour une personne qui veut écrire un livre. Les épreuves à corriger, connaît plus ! On apporte à l'éditeur un ouvrage de qualité professionnelle déjà composé. Vous aurez vraisemblablement quelques problèmes : l'éditeur vous demandera de modifier tel ou tel formatage, ce qui nécessitera un recours à un Sorcier. Enfin, on peut aussi faire de T_EX un but en soi. Sa programmation est tellement complexe qu'elle

remplace avec bonheur les échecs.

Je suis un peu triste concernant l'avenir de l'édition des textes mathématiques. L'adoption comme standard de \TeX par l'AMS est redoutable, car cela fige le paysage pour longtemps. Nous avons besoin d'un traitement de texte moderne, \TeX ne doit être qu'un premier pas. Mais qui aura le courage et le génie de dépasser \TeX ? J'ai bien peur que KNUTH ne nous ait fait le coup du FORTRAN et que \TeX reste un produit universitaire en marge de l'édition professionnelle actuellement en plein bouillonnement.

A VOS STYLOS!

Sécher un peu, mais pas trop, sur une question à la fois élémentaire et astucieuse est un plaisir d'esthète; c'est pourquoi chaque numéro de '*L'Ouvert*' vous proposera désormais un problème. Vos contributions à cette rubrique (énoncés nouveaux, solutions ingénieuses ou élégantes, commentaires, etc ...) sont bien sûr vivement sollicités. Compte-tenu des délais d'impression et de routage, qui ne laissent finalement que peu de temps entre le moment où vous lisez '*L'Ouvert*' et celui où le numéro suivant est bouclé, et pour nous permettre de prendre en compte vos éventuelles réactions, la solution de chaque problème ne paraîtra que deux numéros plus tard; le numéro intermédiaire fournira une indication, coup de pouce à d'éventuels égarés. A vos stylos!

PROBLÈME 1 :

Pour toute famille de réels positifs c_1, \dots, c_p tels que $c_1^3 + \dots + c_p^3 \geq 7$, montrer que le cube unité (fermé, d'équation $0 \leq x, y, z \leq 1$) est inclus dans une réunion de p cubes fermés, parallèles aux axes, de côtés respectifs c_1, \dots, c_p . Etablir aussi que 7 ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

— ERRATUM —

Jacques HARTHONG

Dans mon article “*Le continu et l’ordinateur*” (voir “*L’Ouvert*” précédent) un passage a dû semer le trouble :

“dans l’ensemble $E = \{0, 1, \dots, 10 \uparrow^4 10\}$ l’application

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ est programmable} \\ n & \text{si } n \text{ est non programmable} \end{cases}$$

prend des valeurs à l’extérieur de E , ce qui est gênant.”

Ceci a lieu parce que le dernier élément, $10 \uparrow^4 10$, est programmable, au sens donné à ce mot dans l’article. Voici ce qui s’est passé : j’avais déjà donné cet exemple il y a quelques années, mais dans un contexte où le langage de programmation était plus faible de sorte que $10 \uparrow^4 10$ y était non programmable ; c’est le cas par exemple si vous ne disposez que de l’addition $+$ (mais ni \times ni \uparrow) et une seule touche de test $x \rightleftharpoons t$. J’ai simplement oublié ce détail en reprenant le même exemple.

Certains lecteurs auront corrigé d’eux-mêmes ; j’ai des scrupules pour ceux qui auront cherché longtemps LE truc en croyant que l’auteur, par définition très intelligent, ne pouvait pas se tromper : je les prie de me pardonner, et les incite à se méfier de tout ce qu’ils lisent en général.

En bref : Ce qui fait marcher l’argument du § 6, c’est que le dernier élément soit trop grand pour être programmable (mais il peut être programmé avec un langage plus puissant). C’est cela qui est essentiel, le reste est accessoire.

A PROPOS DU LIVRE DU PROBLÈME

Georges GLAESER

C'est de 1970 à 1976 que l'I.R.E.M. de Strasbourg rédigea les six fascicules du '*Livre du Problème*' (éditions Cédic), inaugurant ainsi une formule d'**auxiliaires d'enseignement** et de **formation des maîtres** : ce genre d'ouvrages — qui ne sont pas des manuels — suscite beaucoup d'émulation parmi tous les I.R.E.M., qui réalisent de nombreux livres d'accompagnement sur des sujets variés.

Certes, on publie depuis 1825 des recueils d'énoncés, des *solutionnaires*, des guides de préparation à divers examens, des méthodologies de résolution de problème. Toute une littérature récréative, d'exposés historiques, de vulgarisation, permet à l'élève curieux et au maître de compléter individuellement sa culture.

La nouveauté du '*Livre du Problème*' est — semble-t-il — d'attirer l'attention sur la diversité des activités qu'un enseignant peut susciter en classe.

Apprendre des maths ce n'est pas ingurgiter chaque semaine sa ration de cours magistral. Il faut en outre développer beaucoup d'habitudes : se documenter, raisonner rigoureusement, imaginer et combiner, manipuler, lire, rédiger, ... apprendre à appliquer des connaissances théoriques et théoriser des situations pratiques.

Le '*Livre du Problème*' propose de montrer comment un enseignant peut gérer cette diversité d'objectifs et montrer comment une même idée mathématique peut être traitée selon des *dialectiques* diverses.

Ainsi, le fascicule 1 élabore une classification des énoncés, qui a reçu un bon accueil de la part de ceux qui s'intéressent à l'évaluation des énoncés d'exercices proposés dans les manuels, et permettre de juger si une *diététique équilibrée* y est proposée (Brochure A.P.M. n°30 — Manuels Scolaires de Mathématiques).

L'ouvrage — qui s'adresse à un public restreint — connut un bon succès de librairie. Il fut même traduit partiellement en allemand, et édité par Vieweg en 1980. L'I.R.E.M. de Strasbourg collabora aussi avec des collègues physiciens à la réalisation du '*Livre du Problème*' de Physique.

Pourtant, il semble que le '*Livre du Problème*' est encore ignoré par beaucoup de jeunes collègues, qui n'ont pas eu l'occasion d'étudier l'ouvrage en détail, lorsqu'ils étaient élèves-professeurs.

L'I.R.E.M. de Strasbourg serait heureux d'engager un nouveau dialogue à propos de l'utilité de la formation donnée dans le Livre du Problème, dans l'enseignement quotidien auprès de ceux qui ne se contentent pas d'un manuel "*prêt-à-enseigner*".

Vous pouvez vous procurer, directement à la Bibliothèque de l'I.R.E.M., les trois fascicules encore disponibles et désormais épuisés chez Cédic, au prix de 25.- F l'unité :

Volume 3 : La parité

La parité, ce n'est pas seulement le nombre pair et le nombre impair, c'est "oui-non", c'est "+ -", c'est "noir-blanc", etc. Un fascicule pour tous ceux qui cherchent à comprendre.

Volume 4 : La convexité

La convexité est un domaine très proche de ce que l'on enseigne dans les classes secondaires. En exerçant sa sagacité sur l'étude d'objets convexes, l'élève ne disperse pas ses efforts : au contraire, il assimile les quelques notions essentielles du noyau des connaissances exigées.

Volume 5 : Calcul barycentrique

L'histoire du calcul barycentrique est liée essentiellement à deux noms : ARCHIMÈDE MOEBIUS. **La portée de la théorie apparaît mieux, et l'on résout plus élégamment les exercices et problèmes** qui s'y rapportent, lorsqu'on a réfléchi sur le changement complet de point de vue que le second savant a apporté aux conceptions de son illustre devancier.