

# L'OUVERT

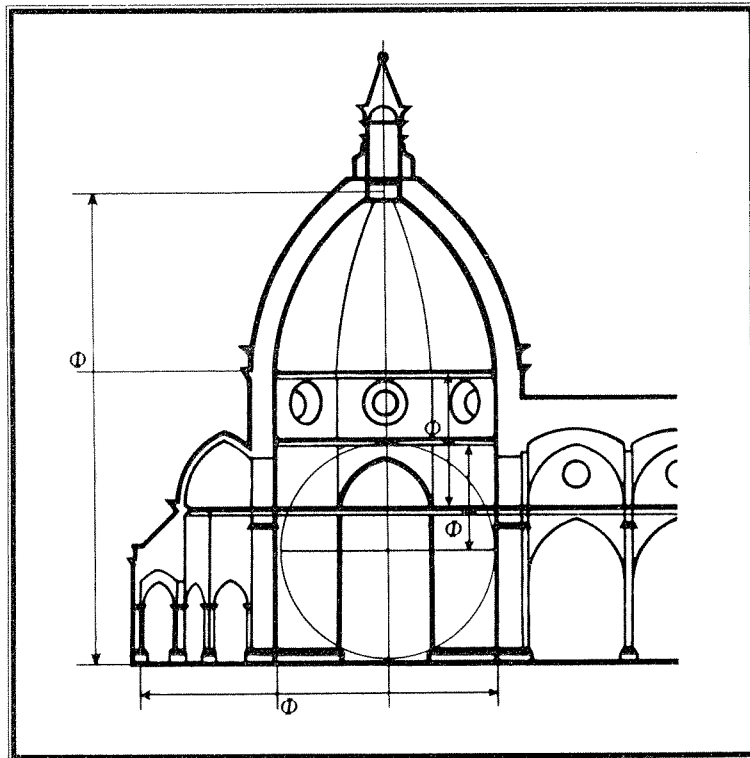
JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG  
n° 48 - SEPTEMBRE 1987

ISSN 0290 - 0068



## NOTRE COUVERTURE

*La cathédrale de Sainte Marie des Fleurs à Florence*  
intervention du nombre d'or  $\Phi$  en architecture  
(voir article page 19)



## USAGERS

Sans doute est-ce un signe des temps que de voir se multiplier, en marge des services publics, des associations d'usagers : il y a celle du téléphone, celle du chemin de fer ... Il se peut que ces grands services y gagnent en convivialité en écoutant les doléances de ces associations qui malgré leur nom ne représentent guère que quelques personnes. La plupart des usagers se contentent de subir, rouspétant plus ou moins fort selon leur degré d'insatisfaction et ne se sentant aucunement responsable du fonctionnement de l'entreprise publique ou parapublique qu'ils utilisent.

Personne ne niera le rôle de service public de l'Education Nationale. Mais qui en sont les usagers?

— Les élèves? Curieux usagers obligatoires : alors que l'on peut choisir de prendre ou non le train, d'avoir ou non le téléphone, ... si on est d'âge scolaire la fréquentation d'un établissement d'enseignement est obligatoire. Voici des usagers encore moins responsables que ceux du téléphone ou du chemin de fer.

— Les parents d'élèves? Mais il ne sont qu'usagers par personnes interposées. Cela ne semble pas sérieux et relève d'une conception pour le moins très large de la notion d'usager!

— Les chefs d'entreprise? Quelle idée? Ce sont pourtant bien eux qui utilisent les jeunes formés au sein des établissements scolaires et c'est bien en fonction de leurs besoins qu'est créée ou fermée telle ou telle filière.

Si l'Education Nationale a introduit des représentants des élèves, des parents d'élèves ou des socio-professionnels au sein des conseils d'administration des établissements c'est peut-être bien parce que ses usagers sont un peu particuliers et non pas parce que cette entreprise publique est à la pointe du progrès social.

Il y a cependant une autre catégorie d'usagers dans les établissements scolaires : les professeurs! Cela ressemble à un canular et pourtant ...

Au début de la présente année civile, l'inspection académique du Haut-Rhin a mis en place une "*commission de réflexion sur l'avenir des formations secondaires à Colmar*" dans le but de discuter des modalités d'accroissement des places dans les lycées colmariens. Dans un louable souci de concertation, cette commission comprenait outre l'inspecteur d'académie, des représentants de la ville, les divers chefs d'établissement, les représentants des associations de parents d'élèves et des représentants des syndicats. Comme toute commission trop importante, elle dut se scinder en groupes de travail. Il y eut donc le groupe des administratifs et celui des "*usagers*" (parents et syndicats) ainsi qu'il fut nommé par l'inspecteur et les proviseurs! Voilà les professeurs au même rang que les parents d'élèves : usagers de l'Education Nationale. Inutile de dire que les *bonnes* décisions furent prises dans le groupe des administratifs.

On savait déjà les professeurs sans grand pouvoir. Les voilà clairement désignés comme des usagers irresponsables. Sans doute y a-t-il une part de vérité dans cette irresponsabilité puisque tel syndicat ne s'est pas donné la peine de se faire représenter et que tel autre y a délégué un P.E.G.C. peu au fait des problèmes des lycées, mais il s'agit peut-être aussi d'une attitude volontaire des syndicats sachant bien que les décisions échapperaient aux *usagers*.

L'Education Nationale est ainsi le seul service public à rémunérer ses usagers. On comprend mieux dans cette optique la faiblesse des salaires des professeurs!

Jean LEFORT

## SOMMAIRE

N°48 – SEPTEMBRE 1987

◇ <i>Notre couverture :</i> <i>La cathédrale de Sainte Marie des Fleurs à Florence</i> .....	I
◇ <i>Editorial : Usagers</i> .....	II
◇ <i>L'étendue des jours</i> , par G. BOUVIER .....	1
◇ <i>L'informatique, objet d'enseignement au collège</i> .....	18
◇ <i>Des expositions de mathématiques</i> , par M. LACOMBE .....	19
◇ <i>Travaux pratiques en Terminales C, D, E</i> .....	24
◇ <i>Equations différentielles et nombres entiers</i> , par R. SEROUL .....	25
◇ <i>L'enseignement à la maison centrale d'Ensisheim</i> par M. BAUR et M. MAYOL .....	31
◇ <i>Génération simple de polyèdres remarquables</i> , par E. EHRHART .....	35
◇ <i>Racines de plus grand module d'un polynôme</i> , par J. LEFORT et F. DOUÉ ..	39
◇ <i>A vos stylos</i> , par 'L'Ouvert' .....	44
◇ <i>Sommaire</i> .....	III

### L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

- ◇ *Responsable de la publication* : J. LEFORT
- ◇ *Correspondance à adresser à* :  
Université Louis Pasteur  
Bibliothèque de l'I.R.E.M.  
10, rue du Général Zimmer  
67084 STRASBOURG Cédex  
Tél. : 88-41-63-00, poste 240
- ◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)* :  
90.-F pour l'Alsace  
120.-F pour les autres départements  
110.-F pour l'étranger  
(Chèque à l'ordre de Mr l'Agent  
Comptable de l'U.L.P. (IREM))
- ◇ *Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.*

# L'ÉTENDUE DES JOURS

Gépie BOUVIER

## L'ORDRE DU JOUR.

Sans doute l'avez-vous remarqué? Les jours sont plus ou moins longs; par exemple la veille de vos résultats à un examen, ou de façon plus générale, les jours d'été sont particulièrement longs, alors que votre anniversaire, Noël et autres journées hivernales paraissent un peu courtes ...

Comment expliquer cela?

L'hypothèse d'une dilatation de la durée du jour sous l'effet de la chaleur paraît assez séduisante, mais alors pourquoi les zones polaires bénéficient-elles de largesses peu en rapport avec le froid de phoque qui y règne ...?

Nous vous proposons d'adopter une vision *cosmique* du problème (n'ayons pas peur des mots) afin de pouvoir avancer une explication qualitative et (la maison ne recule devant aucun sacrifice) quantitative assez satisfaisante (sauf peut-être pour les jours d'anniversaire).

Pour cela, entendons-nous. Qu'appelle-t-on *jour*? Pour nous, ce sera le moment où le Soleil, réduit à un point pour l'occasion, se trouve au dessus du plan dit horizontal (nous expliquerons cela plus loin). Nous établirons alors, avec force arguments tant géométriques qu'algébriques, voire de bon sens, une formule, qui donnera *la hauteur* du Soleil au dessus de cet horizon et dépendra de la date, mais aussi de la latitude de l'endroit qui nous intéresse. Puis nous en déduirons, facilement, une autre formule, celle-ci donnant la durée du jour en fonction des ci-avant paramètres.

Il resterait alors à exploiter cette formule, mais ceci est une autre histoire.

## LE POINT DE VUE "COSMIQUE".

Voici nos principales hypothèses :

— La Terre tourne autour du Soleil, l'orbite étant située dans un plan *fixe* appelé écliptique, et la Terre est repérée par l'angle  $\varphi$  fait entre une direction fixe et la direction (Soleil  $\rightarrow$  Terre). (Voir figure 1).

— Cet angle  $\varphi$  dépend (uniquement) de la date  $T$  et varie de façon *discrète* : pour une date  $T_k$  donnée  $\varphi_k = \varphi(T_k)$  reste constant durant 24 heures avant de *sauter* à  $\varphi_{k+1}$ .

— La Terre tourne autour d'elle-même autour d'un axe, appelé axe des pôles, de direction fixe (Soleil  $\rightarrow$  étoile polaire) suivant une loi de rotation uniforme.

— La Terre est une sphère et les rayons solaires sont tous parallèles à la direction (Soleil  $\rightarrow$  Terre).

Notons que le plan équatorial est le plan orthogonal à l'axe des pôles, et passant par le centre  $O$  de la Terre.

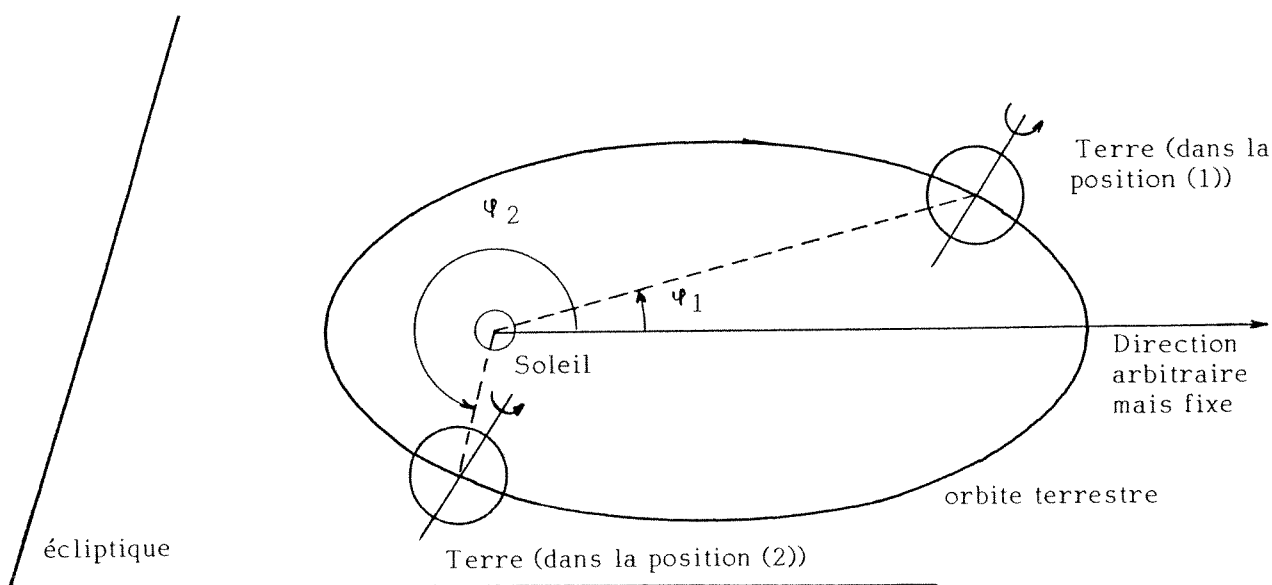


Figure 1

## LA DATE INTERVIENT

Fixons un point  $M$  sur la Terre, par exemple ici, et examinons d'un peu plus près la position marquée ( $M$ ) (Figure 2).

## L'ÉTENDUE DES JOURS

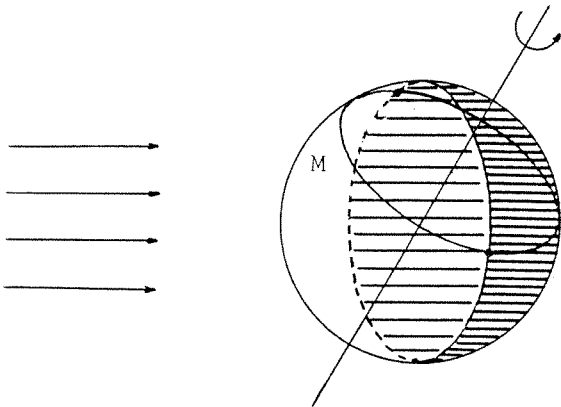


Figure 2

Le point  $M$  va décrire le cercle  $C$  à vitesse angulaire constante. Lorsqu'il est dans la zone claire, il fait jour, et inversement dans la zone grisée il fait nuit. La vitesse étant constante, on a ici (durée du jour)  $<$  (durée de la nuit) car ces durées sont proportionnelles aux longueurs des arcs de cercles de  $C$  situés dans la zone claire et la zone grisée respectivement.

Ainsi, pour cette date :

$$T_1 : J < N.$$

Que se passe-t-il dans la position (2)? L'examen de la figure 3 va ... nous éclairer!

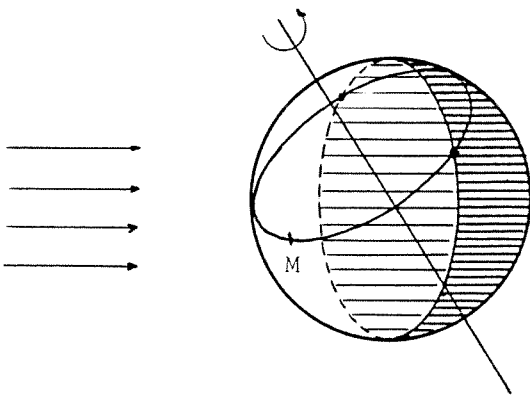


Figure 3

Ici on obtient

$$JOUR > NUIT$$

... nous semblons être sur la bonne voie!

### LA LONGITUDE ... N'INTERVIENT PAS.

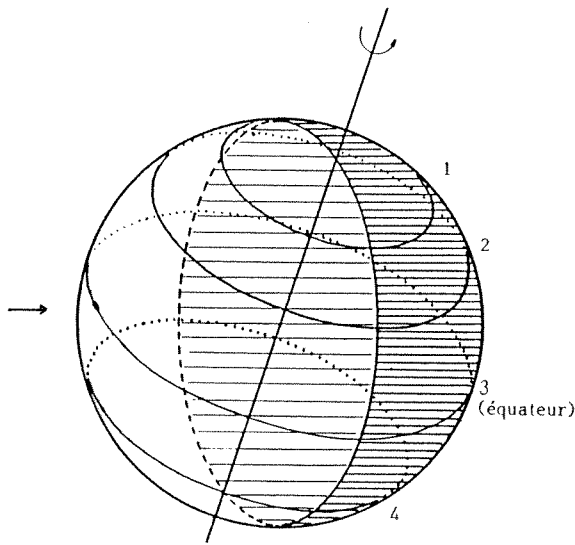
Voici mis en évidence le rôle de  $\varphi$  (donc de la date) dans la durée du jour. Remarquons que le cercle  $C$  est un cercle d'égale latitude (parallèle à l'équateur) et que si  $M'$  est un autre point de  $C$ , donc d'égale latitude mais de longitude différente, la durée du jour est la même pour  $M$  et  $M'$  car ils décrivent le même cercle.



**LA LATITUDE INTERVIENT.**

Que va-t-il se passer maintenant, si nous examinons l'influence de la latitude dans notre problème ?

Nous allons revenir à la position de la figure 2 en examinant la situation sous diverses latitudes : (cf. figure 4).



Pour une date donnée  
 en 1 JOUR << NUIT  
 (et on imagine qu'un peu plus haut, il n'y a pas de jour du tout !)  
 en 2 JOUR < NUIT  
 en 3 JOUR = NUIT  
 le plan équatorial passant par le centre de la Terre, l'équateur est coupé en deux demi-cercles.  
 Enfin, on retrouve la position 2, façon néo-zélandaise :  
 en 4 JOUR > NUIT.

Figure 4

**RETOUR SUR TERRE.**

Dorénavant, nous nous fixerons les deux paramètres  $\varphi$  et  $\theta$  et nous allons continuer l'étude du problème d'un point de vue plus terre à terre, en définissant le plan horizontal, et la déclinaison une notion liée à celle de hauteur au dessus de l'horizon, mais d'un usage plus commode.

Nous dirons que le plan horizontal en un lieu donné  $M$  est le plan tangent à la Terre (en ce point). La verticale est alors la direction (centre de la Terre  $\rightarrow M$ ) : elle prolonge le rayon terrestre  $OM$  (cf. figure 5).

$\delta$  (déclinaison) est alors l'angle (verticale en  $M \rightarrow$  Soleil) (cf. figure 6).

Le Soleil est au dessus de l'horizon si (et seulement si)

$$|\delta| \leq \pi/2 \text{ soit encore } \cos \delta \geq 0.$$

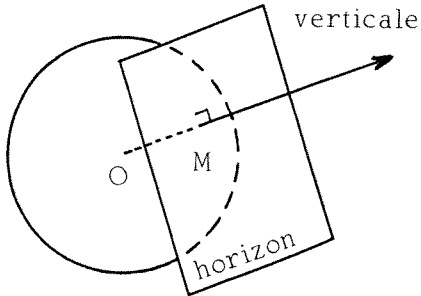


Figure 5

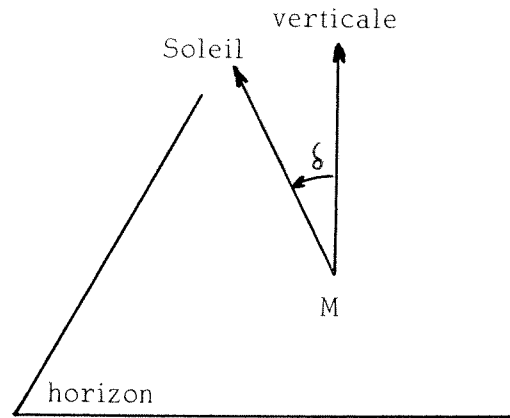


Figure 6

Notons que  $\delta$  dépend de  $\varphi$  et de  $\theta$  comme il a été dit, mais également du paramètre horaire  $t$  ( $M$  décrit le cercle  $\mathcal{C}$ ).

**VOUS MANQUEZ DE REPÈRES ?**

Calculer  $\cos \delta(t, \varphi, \theta)$  va nécessiter un petit peu de courage et deux repères orthonormés directs de l'espace, mettons

$$(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}) \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant un repère naturellement lié à la Terre (cf. figure 7) :

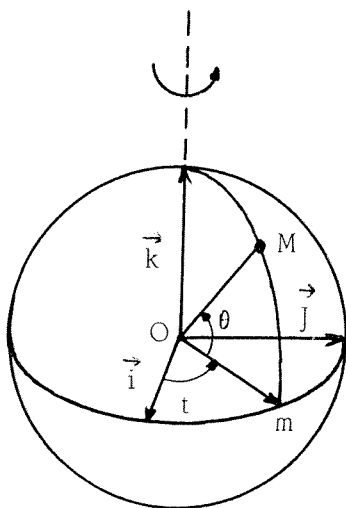


Figure 7

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \cos \theta \vec{om} + \sin \theta \vec{k} \\ &= \cos \theta (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \\ &\quad + \sin \theta \vec{k} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \cos \theta \cos t \vec{i} \\ &\quad + \cos \theta \sin t \vec{j} \\ &\quad + \sin \theta \vec{k}. \end{aligned}$$

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  étant lié au Soleil (cf. figure 8) :

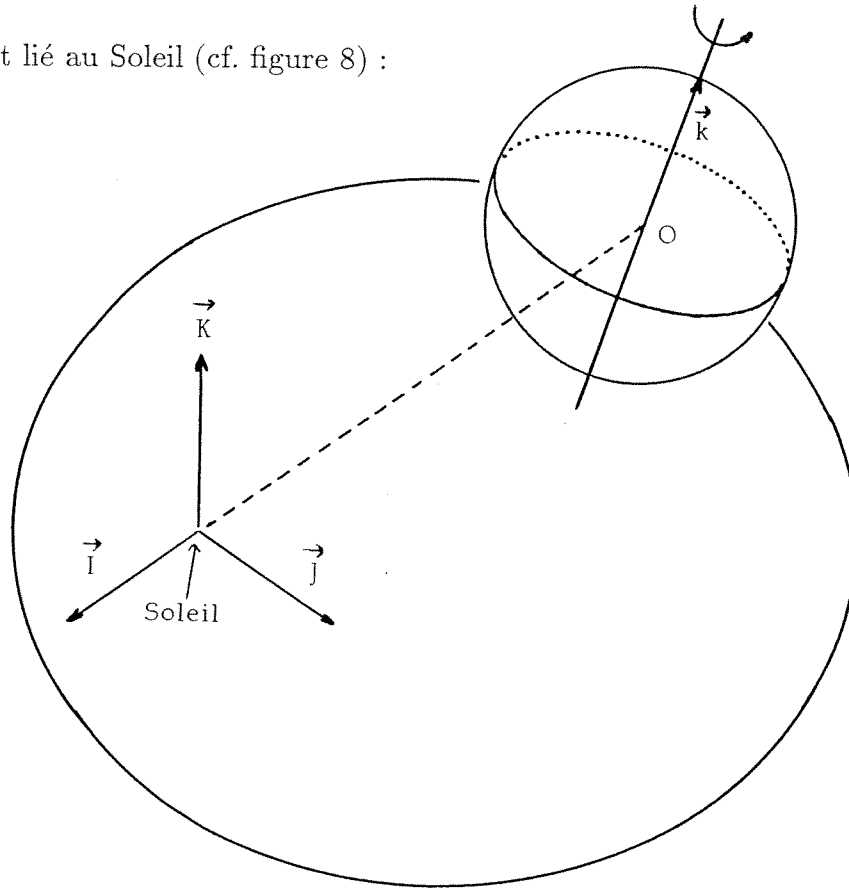


Figure 8

$\vec{I}$  : unitaire parallèle à Terre  $\rightarrow$  Soleil.

$\vec{I}, \vec{J}$  : repère orthonormé de l'écliptique.

$\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  : repère orthonormé de l'espace.

On prend  $\vec{k}$  parallèle à l'axe des pôles.

$(\vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan équatorial, arbitraire. On choisit alors  $\vec{i}$  de telle sorte que  $\vec{i}$  appartienne également à l'écliptique : cela simplifiera les calculs.

Notons à présent qu'avec ces notations :  $\cos \delta = \cos(\overrightarrow{OM}, \vec{I})$  car  $\overrightarrow{OM}$  représente la verticale en  $M$  et  $\vec{I}$  la direction du Soleil.

Ainsi si

$$\overrightarrow{OM} = X \vec{I} + Y \vec{J} + Z \vec{K} \quad \cos \delta = X$$

il ne reste plus qu'à calculer  $X$ .

L'ÉTENDUE DES JOURS

Comme  $\overrightarrow{OM} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{i} &= X_i \overrightarrow{I} + Y_i \overrightarrow{J} + Z_i \overrightarrow{K} \\ \overrightarrow{j} &= X_j \overrightarrow{I} + Y_j \overrightarrow{J} + Z_j \overrightarrow{K} \\ \overrightarrow{k} &= X_k \overrightarrow{I} + Y_k \overrightarrow{J} + Z_k \overrightarrow{K} \end{aligned}$$

on a  $X = xX_i + yX_j + zX_k$ .

**CLASSÉ X !**

Les lignes qui suivent sont déconseillées aux âmes innocentes ... Il faut (et cela suffira) calculer  $X_i, Y_i, Z_i, X_j, Y_j, Z_j, X_k, Y_k, Z_k$ . Commençons par tout calculer en fonction des coordonnées de  $\overrightarrow{k} : X_k, Y_k, Z_k$ .

$\overrightarrow{i}$  est dans l'écliptique donc  $Z_i = 0$ , perpendiculaire à  $\overrightarrow{k}$  donc  $X_i X_k + Y_i Y_k = 0$  soit  $X_i = \lambda Y_k$   $Y_i = -\lambda X_k$ , unitaire :  $\lambda^2 Y_k^2 + \lambda^2 X_k^2 = 1$  d'où  $X_i = (\sqrt{X_k^2 + Y_k^2})^{-1} Y_k$   $Y_i = -(\sqrt{X_k^2 + Y_k^2})^{-1} X_k$  et d'un !

Pour  $\overrightarrow{j}$ , on peut soit exprimer le fait que  $\overrightarrow{j}$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{i}$  et  $\overrightarrow{k}$ , unitaire et que  $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$  est direct, soit plus élégamment remarquer que  $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}$  d'où

$$\begin{aligned} X_j &= \mu X_k & Y_j &= \mu Y_k & Z_j &= -\mu(X_k^2 + Y_k^2)/Z_k \text{ avec} \\ \mu &= -\lambda \sqrt{Z_k^2 / (\lambda^2 + Z_k^2)} & (\lambda &= 1 / \sqrt{X_k^2 + Y_k^2}). \end{aligned}$$

Occupons nous maintenant de  $X_k, Y_k, Z_k : \overrightarrow{k}$  et  $\overrightarrow{K}$  sont fixes dans l'espace et  $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$  tourne autour de  $\overrightarrow{K}$ . Tout se passe donc comme si  $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$  était fixe et  $\overrightarrow{k}$  tournait autour de  $\overrightarrow{K}$  avec le mouvement (en fait avec le mouvement inverse, mais ça n'a pas d'importance) de  $(I, J)$  c'est-à-dire celui de la Terre autour du Soleil (cf. figure 9) :

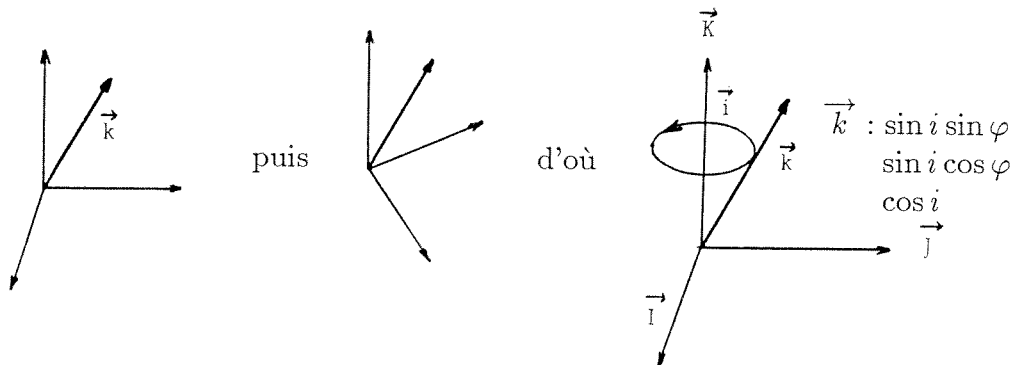


Figure 9

Soit finalement

$$X_k = \sin i \sin \varphi \quad X_i = \cos \varphi \quad X_j = -\cos i \sin \varphi.$$

Et donc (les âmes sensibles peuvent rouvrir les yeux) :

$$\cos \delta = \cos \theta \cos \varphi \cos T - \cos \theta \cos i \sin \varphi \sin t + \sin i \sin \varphi \sin \theta$$

( $i$  est l'angle — constant —  $(\vec{K}, \vec{k})$ ).

### UN DERNIER EFFORT.

Ce qui nous intéresse, c'est de savoir quand  $\cos \delta \geq 0$ . Or,  $\cos \delta$  est de la forme  $A \cos t + B \sin t + C$ , expression que le trigonomètre distingué qui sommeille en chacun de nos amis lecteurs transforme en  $\cos \delta = D \cos(t + t_o) + E$ . (\*)

D'où  $\cos \delta \geq 0$  devient  $\cos(t + t_o) \geq -E/D$ .

$t$  varie dans  $[0; 2\pi]$ , ou mieux, dans  $[0, 24]$  l'unité d'angle étant alors l'heure ( $1^h = \pi/12$ ); nous cherchons la durée du jour  $J$  c'est-à-dire la longueur de l'intervalle de  $[0; 24]$  où  $\cos(t + t_o) \geq -E/D$ , soit encore  $-\arccos(-E/D) \leq t + t_o \leq \arccos(-E/D)$  d'où enfin finalement pour conclure

$$J = 2 \arccos\left(-\frac{E}{D}\right)$$

ou plus explicitement :

$$J = \frac{24}{180} \arccos\left(\frac{-\sin \theta \sin i \sin \varphi}{\cos \theta (\sqrt{\cos^2 2\varphi + \cos^2 i \sin^2 \varphi})}\right) (**)$$

$J$  en heures, dixièmes, centièmes ... d'heures.

$\theta$  est la latitude en degré.

$\varphi$  la position angulaire de la Terre, en degré, fonction de  $T$  ( $i$  est une constante, chez nous  $i = 23^\circ 27'$ ).

Reste à donner une expression utilisable de  $\varphi$ , ce qui n'est pas si simple ...

### OU EST MA PLANÈTE ?

$\varphi$  est la position angulaire de la Terre à une date  $T$  donnée

— Si l'on suppose que la Terre décrit autour du Soleil un cercle, à vitesse constante, on obtient

$$\varphi = \frac{360}{365} T, \quad \varphi \text{ en degré, } T \text{ en jours.}$$

---

(\*) Voici le détail : on écrit  $A = D \cos t_o$   $B = -D \sin t_o$  pour se ramener à la formule d'addition des cosinus, ce qui permet d'évaluer  $D (= \sqrt{A^2 + B^2})$  et  $t_o$  (dont on n'a que faire) et on conclut par l'astucieux changement  $E = C$ .

(\*\*) Nom de la formule utilisée à la première ligne de l'alinéa "en guise de conclusion".

## L'ÉTENDUE DES JOURS

— Le lecteur épris de précision se reportera à la table numérique de l'annexe I, construite en admettant que la Terre décrit autour du Soleil une ellipse, suivant les lois de KÉPLER et NEWTON.

— Le lecteur maniaque des décimales pourra se farcir les calculs lui-même s'il veut tenir compte de la lune, des lois de la mécanique relativiste, de la non-ponctualité du Soleil, des marées, de la nutation, du principe d'incertitude de HEISENBERG, du prix du pain et bien sûr de l'âge du capitaine.

### EN GUISE DE CONCLUSION.

Revenons un instant à notre formule (\*) qui mérite bien un détour. Il peut être intéressant d'étudier pour différentes, ou même une seule, valeurs de  $\theta$  la fonction  $T \rightarrow J(T)$ . Pour cela nous recommandons l'usage d'une calculatrice programmable (essayez de dériver  $J(T)$  pour rire !). Une telle étude mettra en évidence les phénomènes de solstice, d'équinoxe etc ... Le fait de varier  $\theta$  permet d'expliquer les *Soleil de minuit* par exemple. Une possibilité d'une pareille étude, est donnée dans la suite de cet article sous le titre "*Des Canada-sinusoïdes*". Les résultats sont donnés dans l'annexe II. Le calcul de  $\cos \delta$  peut déboucher lui aussi sur une activité numérique intéressante, par exemple en rapport avec le phénomène des saisons.

Nous tenons enfin à ajouter que la formule donnant  $J$  ne tient compte qu'approximativement de la réalité, et que les personnes qui confronteront la théorie et l'expérimentation devront s'en souvenir avant de casser leurs montres.

Une courte discussion sur la qualité de cette approximation est donnée en annexe III.

## BIBLIOGRAPHIE

"*Ephémérides de l'Annuaire du Bureau des Longitudes*" (\*\*) (Gauthier-Villars).

## DES CANADA-SINUSOÏDES

Nous allons étudier numériquement la fonction  $J(T)$  dépendant du paramètre  $\theta$ , qui donne la durée du jour  $J$  en fonction de la date  $T$ , en un lieu de latitude  $\theta$ .

---

(\*\*) Document disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.

Rappelons :

$$J(T) = \frac{24}{180} \arccos \left( - \frac{\sin \theta \sin i \sin \varphi(T)}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \varphi(T) + \cos^2 i \sin^2 \varphi(T)}} \right)$$

$i = 23^\circ 27'$   $\varphi$  est fournie en annexe I.

Les résultats de l'annexe II sont calculés avec  $\varphi_3(T)$ .

### L'AIR DU JOUR.

En programmant  $J(T)$ , avec la possibilité de modifier facilement  $\theta$ , on peut construire la courbe  $(T, J(T))$  (exemple :  $\theta = 48^\circ 24'$ , annexe II, figure 10, trait gras) pour une latitude  $\theta$  fixée.

L'allure de cette courbe est assez sinusoïdale (mais ce n'est pas une sinusoïde) pour le tracé des courbes  $(T, J(T))$  pour différentes valeurs de  $\theta$ .

( $\theta = 0, 20, 40, 60, 80^\circ$  en annexe II, figure 1).

A partir d'une certaine valeur de  $\theta$ , nous remarquons un phénomène particulier (cela correspond au *Soleil de minuit*).

### L'AIR D'UNE SINUSOÏDE.

On peut facilement montrer que pour toute valeur de  $\theta$   $J(T)$  n'est pas de la forme  $A \sin(BT + C) + D$  :  $D$  est la valeur moyenne de  $J$  donc égale à 12,  $B$  correspond à la périodicité :  $B = 2\pi/1 \text{ an} = 360/365$  avec nos unités  $C = 0$  avec nos conventions sur  $T$ , enfin  $A$  est l'amplitude :  $A = J_{\max} - 12$  (on peut calculer exactement  $J_{\max}$  donc  $A$ ).

La figure 11 de l'annexe II est un tableau avec une première colonne où figure  $T$ , une seconde  $J(T)$ , une troisième  $A \sin(BT) + D$  une quatrième la différence  $|J - A \sin(BT) - D|$  pour  $\theta = 48^\circ 24'$ .

### LES QUATRE SAISONS.

L'étude des variations de  $J(T)$  va permettre de définir les équinoxes et les solstices. Plutôt que de dériver  $J$ , étudions  $D(T) = J(T + 1) - J(T)$  (pour un  $\theta$  fixé).

(La figure 12 est faite dans le cas  $\theta = 48^\circ 24'$  il y a le rappel de  $J(T)$  en gras,  $D(T)$  étant en pointillé.)

Le point où  $D(T)$  est maximum est l'équinoxe du Printemps.

Le point où  $J(T)$  est maximum est le solstice d'Été.

Le point où  $D(T)$  est minimum est l'équinoxe d'Automne.

Le point où  $J(T)$  est minimum est le solstice d'Hiver.

Notons que l'usage de la fonction  $\varphi_3$  conduit à des durées inégales pour les saisons (ce qui est conforme à la réalité).

**DES JOURNÉES INTERMINABLES.**

Nous allons revenir aux latitudes élevées.

Une étude rapide de la fonction  $x \rightarrow \arccos x$  montre que celle-ci n'est définie que pour  $x$  compris entre -1 et 1.

La condition

$$\left| \operatorname{tg} \theta \frac{\sin i \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \cos^2 i \sin^2 \varphi}} \right| \geq 1$$

traduit donc le fait que le Soleil ne se couche, ou ne se lève pas au cours d'une journée.

On transforme cette condition en

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \geq \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 i - \cos^2 i}$$

pour  $\varphi \in [0, 180]$  par exemple.

On transforme cette condition en  $\operatorname{tg}^2 \varphi \geq \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 i - \cos^2 \theta}$  pour  $\varphi \in [0; 180]$ . En introduisant les fonctions

$$\Phi_1 : \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 i - \cos^2 \theta}} \text{ et } \Phi_2 : 180 - \Phi_1.$$

On peut écrire :

$$\Phi_1 \leq \varphi \leq \Phi_2.$$

Par exemple pour  $\theta = 79^\circ$  on trouve :

$$28,65^\circ \leq \varphi \leq 151,35^\circ.$$

Puis on utilise l'annexe I (colonne  $\varphi_3$ ). Il fait donc jour du 19 avril au 23 août (approximativement), soit environ 126 jours.

Il peut être également intéressant de montrer que la durée maximale du jour est donnée par :

$$J_{\max} = \frac{24}{180} \arccos \left( -\operatorname{tg} \theta \frac{\sin i}{\cos i} \right)$$

obtenu pour  $\varphi = 90^\circ$  et valable pour  $\theta \leq 90 - i$ .

Voir figure 13 pour  $\theta \rightarrow J_{\max}(\theta)$ .



## ANNEXE I

La fonction  $\varphi(T)$ 

La table numérique suivante comprend 4 colonnes, la première donne la valeur de  $T$  pour la date indiquée (l'origine est fixée au 21 mars, équinoxe de printemps). La seconde colonne donne la valeur  $\varphi_1(T) = 360/365T$ , correspondant à l'assimilation du mouvement de la Terre à un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante.

La troisième colonne donne la valeur  $\varphi_2(T)$  calculée de la façon suivante : la Terre est soumise à un champ de forces centrales (de centre ... le Soleil) "en  $\frac{1}{p^2}$ " (l'intensité de la force attractive est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre), conformément aux lois de la mécanique Newtonienne. Un calcul, assez technique, permet d'obtenir une relation  $F(\varphi) = T$ , mais  $F^{-1}$  n'est pas explicitable

(<sup>1</sup>).

$\varphi_2(T)$  est alors une approximation de la racine de l'équation  $F(\varphi) - T = 0$  obtenue par la méthode de Newton (encore lui!). La quatrième colonne donne la valeur  $\varphi_3(T)$  calculée en corrigeant la valeur  $F_1(T)$  par une sinusoïde de sorte que  $\int_0^{365} |\varphi_2 - \varphi_3| dT$  soit le plus petit possible :  $\varphi_3(T) = \varphi_1(T) + 0,97 \cos[\varphi_1(T - 14)] - 0,94$ .

Date	T	$\varphi_1(T) = 360/365 T$	$\varphi_2(T)$	$\varphi_3(T)$	$\Delta$ ( <sup>2</sup> )
21 mars	0	0	0	0	
26 "	5	4,93	4,95	4,95	
31 "	10	9,86	9,89	9,89	
5 avril	15	14,79	14,82	14,82	
10 "	20	19,73	19,75	19,75	
15 "	25	24,66	24,67	24,67	
20 "	30	29,59	29,58	29,58	
25 "	35	34,52	34,48	34,49	1
30 "	40	39,45	39,38	39,39	1
5 mai	45	44,38	44,27	44,28	1
10 "	50	49,32	49,16	49,16	
15 "	55	54,25	54,04	54,04	
20 "	60	59,18	58,91	58,92	1
25 "	65	64,11	63,78	63,79	1
30 "	70	69,04	68,65	68,65	
4 juin	75	73,97	73,51	73,52	1
9 "	80	78,90	78,36	78,37	1
14 "	85	83,84	83,22	83,23	1
19 "	90	88,77	88,07	88,08	1
24 "	95	93,70	92,92	92,93	1

Table

$$^{(1)} F(\varphi) = \frac{73}{36} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{tg \varphi / 2}{w} + \omega \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2} \frac{tg \varphi / 2}{tg^2 \varphi / 2 \omega^2} \right) \right] \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \text{ où } e \text{ est l'excentricité de}$$

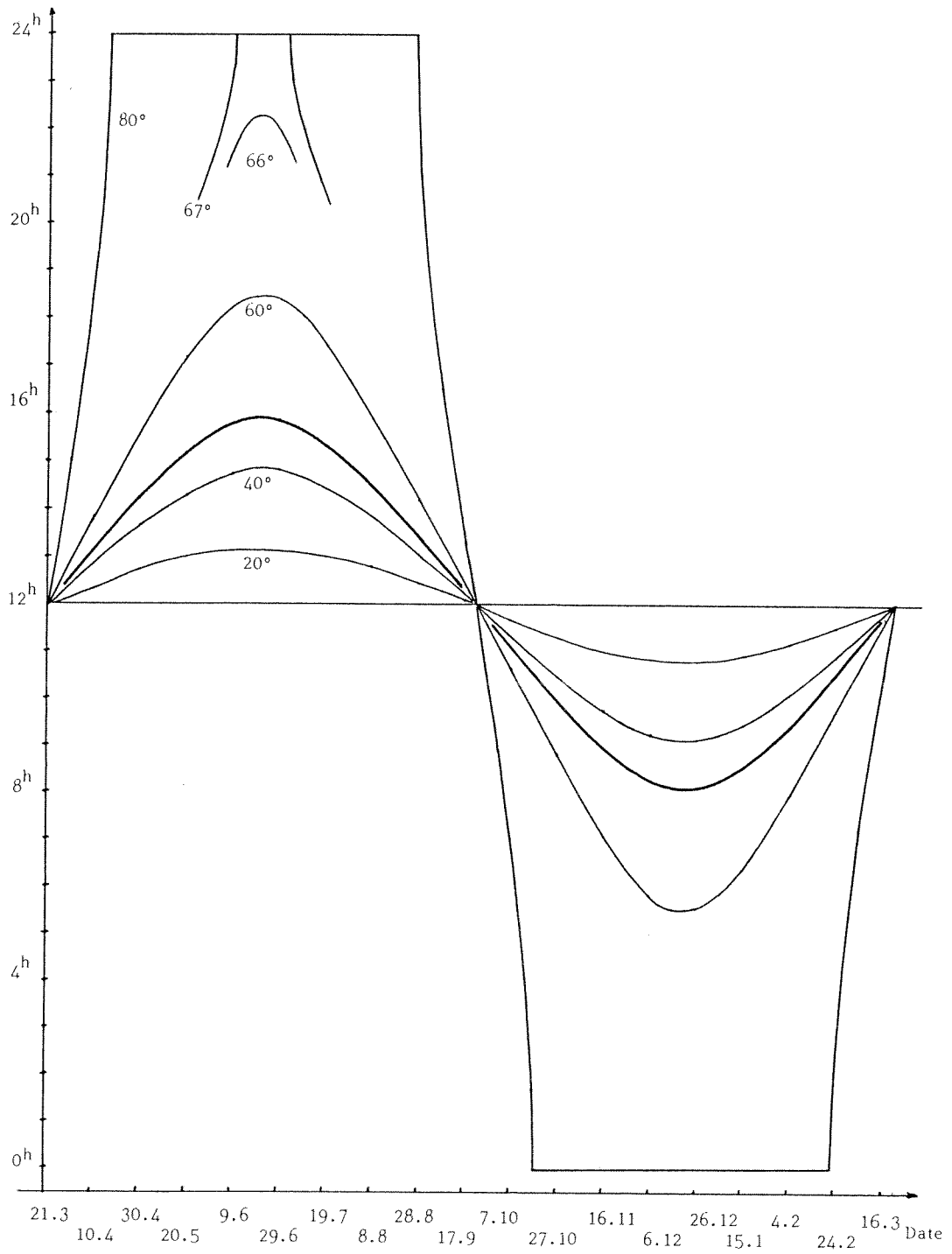
l'orbite.

$$^{(2)} \Delta = 100 |\varphi_2 - \varphi_3|.$$

## L'ÉTENDUE DES JOURS

29 "	100	98,63	97,77	97,78	1
4 juillet	105	103,56	102,62	102,63	1
9 "	110	108,49	107,47	107,47	
14 "	115	113,42	112,32	112,32	
19 "	120	118,36	117,17	117,17	
24 "	125	123,29	122,02	122,02	
29 "	130	128,22	126,88	126,88	
3 août	135	133,15	131,73	131,74	1
8 "	140	138,08	136,59	136,60	1
13 "	145	143,01	141,46	141,46	
18 "	150	147,95	146,33	146,33	
23 "	155	152,88	151,20	151,20	
28 septembre	160	157,81	156,08	156,08	
2 "	165	162,74	160,97	160,97	
7 "	170	167,67	165,86	165,86	
12 "	175	172,60	170,76	170,76	
17 "	180	177,53	175,66	175,66	
22 "	185	182,47	180,57	180,57	
27 "	190	187,40	185,49	185,49	
2 octobre	195	192,33	190,42	190,42	
7 "	200	197,26	195,35	195,35	
12 "	205	202,19	200,29	200,29	
17 "	210	207,12	205,24	205,24	
22 "	215	212,05	210,19	210,19	
27 "	220	216,99	215,15	215,15	
1 novembre	225	221,92	220,12	220,12	
6 "	230	226,85	225,09	220,10	1
11 "	235	231,78	230,07	230,08	1
16 "	240	236,71	235,06	235,06	
21 "	245	241,64	240,05	240,05	
26 "	250	246,58	245,05	245,05	
1 décembre	255	251,51	250,05	250,05	
6 "	260	256,44	255,05	255,05	
11 "	265	261,37	260,06	260,06	
16 "	270	266,36	265,07	265,07	
21 "	275	271,23	270,08	270,08	
26 "	280	276,16	275,10	275,10	
31 "	285	281,10	280,11	280,11	
5 janvier	290	286,03	285,12	285,12	
10 "	295	290,96	290,14	290,14	
15 "	300	295,89	295,16	295,15	1
20 "	305	300,82	300,17	300,17	
25 "	310	305,75	305,18	305,18	
30 "	315	310,68	310,19	310,18	1
4 février	320	315,62	315,19	315,19	
9 "	325	320,55	320,19	320,19	
14 "	330	326,48	325,19	325,18	1
19 "	335	330,41	330,18	330,18	
24 "	340	335,34	335,17	335,16	1
1 mars	345	340,27	340,15	340,14	1
6 "	350	345,21	345,12	345,12	
11 "	355	350,14	350,09	350,09	
16 "	360	355,07	355,05	355,05	
21 "	365	360	360	360	

Figure 10 :  $J_{\theta}(T)$



## L'ÉTENDUE DES JOURS

*Figure 11* : comparaison avec une sinusoïde

T	J(T)	A sin(BT )+D	écart
0	12,00	12,00	0
45	14,53	14,73	0,20
92	15,90	15,90	0
120	15,36	15,43	0,07
150	13,97	14,07	0,10
182	12,14	12,03	0,11
184	12,02	11,90	0,12

L'écart est faible mais c'est un écart.

(0,1 heure = 6 min).

L'emploi de  $\varphi_1$  à la place de  $\varphi_3$  rapproche  $J$  d'une sinusoïde, mais il subsiste un écart.

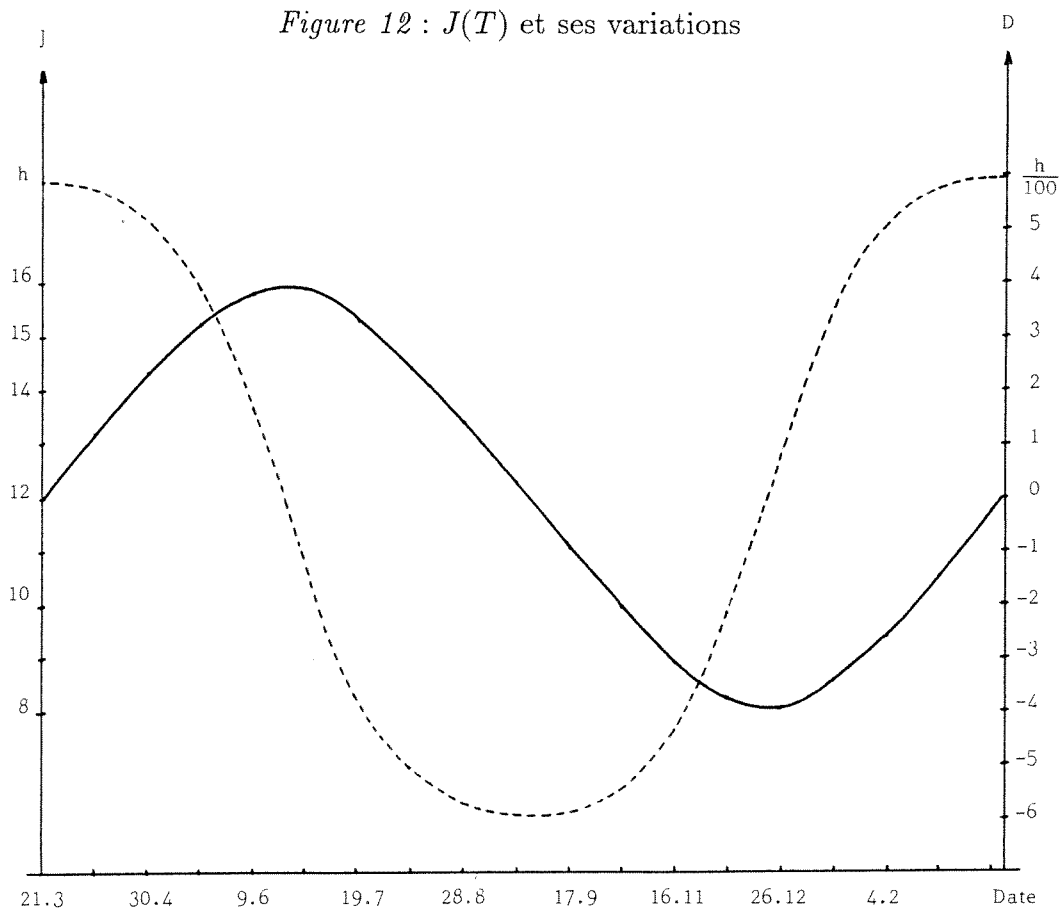
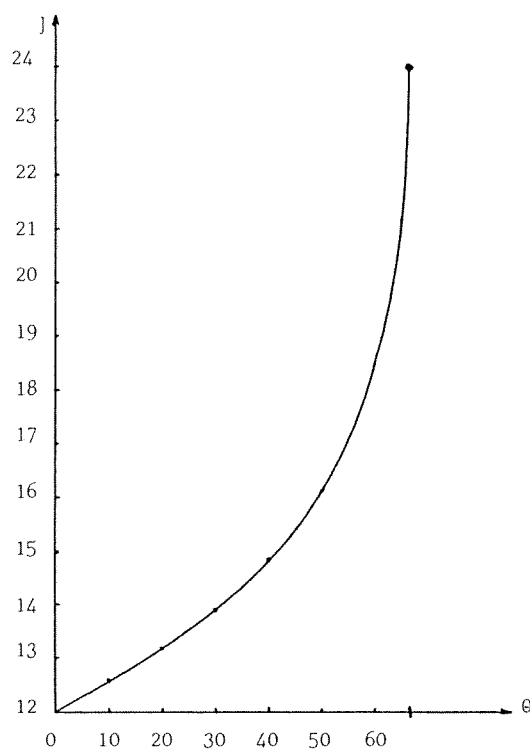


Figure 13 : le jour le plus long



ANNEXE III

Extrait des "Ephémérides"

Lever et Coucher du Soleil à Paris

$\theta = 48^{\circ}, 84.$

Date	Lever	Coucher	J	T
01.01.79	7 <sup>h</sup> 46	16 <sup>h</sup> 2	8,27	286
09.02.79	7 <sup>h</sup> 11	16 <sup>h</sup> 59	9,80	305
21.03.79	5 <sup>h</sup> 54	18 <sup>h</sup> 3	12,15	0
30.04.79	4 <sup>h</sup> 35	19 <sup>h</sup> 2	14,45	40
19.06.79	3 <sup>h</sup> 48	19 <sup>h</sup> 55	16,12	90
08.08.79	4 <sup>h</sup> 34	19 <sup>h</sup> 18	14,73	140
27.09.79	5 <sup>h</sup> 45	17 <sup>h</sup> 38	11,88	190
26.11.79	7 <sup>h</sup> 17	15 <sup>h</sup> 59	8,70	250

## L'ÉTENDUE DES JOURS

On constate un écart systématique de 0,1 à 0,2 heures (6 à 12 mn) :  $J$  observé  $> J$  calculé. Cet écart s'explique par le fait que l'on n'a pas tenu compte de la réfraction à l'horizon :

il fait jour si  $\cos \delta \geq -a$  et non zéro

d'où la formule corrigée :

$$J(T) = \frac{24}{180} \arccos \left( \frac{-\sin \theta \sin i \sin \varphi(T) - a}{\cos \theta \sqrt{\cos^2 \varphi(T) + \cos^2 i \sin^2 \varphi(T)}} \right)$$

avec  $a = \sin(36', 36'')$  valeur de la réfraction horizontale l'écart varie entre 0 et 5 minutes.

## L'INFORMATIQUE, OBJET D'ENSEIGNEMENT AU COLLÈGE

A l'initiative de Monsieur l'Inspecteur SILVESTRE, une première réunion a eu lieu le 3 juin 1987 au Centre Informatique et Enseignement. Son objet était de discuter de l'enseignement de l'informatique au collège. Des enseignants de cinq collèges de l'académie, dans lesquels un tel enseignement a été expérimenté, ont présenté leur travail.

Deux axes peuvent être retenus :

- cet enseignement a pour but de démythifier l'informatique et d'ouvrir l'esprit des élèves sur ses applications;
- l'accent est mis sur la démarche de résolution de problèmes, les exemples étant souvent pris dans le cours de mathématiques.

Plusieurs problèmes sont abordés par les participants :

- comment obtenir des heures pour cet enseignement optionnel de l'informatique, heures actuellement prises sur le contingent horaire global de l'établissement ?
- comment sélectionner les élèves parmi les nombreuses candidatures ?
- comment situer cette option dans le cadre général de l'enseignement de l'informatique qui existe déjà à l'école élémentaire, au collège en technologie et au lycée ?
- comment évaluer le travail des élèves ?

Ce groupe se propose de poursuivre sa réflexion pendant l'année scolaire 1987/88. Si ce sujet vous intéresse, veuillez vous faire connaître auprès du

Centre Informatique et Enseignement  
Université Louis Pasteur  
UFR de Mathématiques et Informatique  
7, rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex  
Tél. : 88.41.63.21

Nous pourrions ainsi vous inviter aux prochaines réunions, dont la première est fixée au mercredi 28 octobre 1987 à 14<sup>h</sup>, à l'adresse ci-dessus.

## DES EXPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES

Michèle LACOMBE

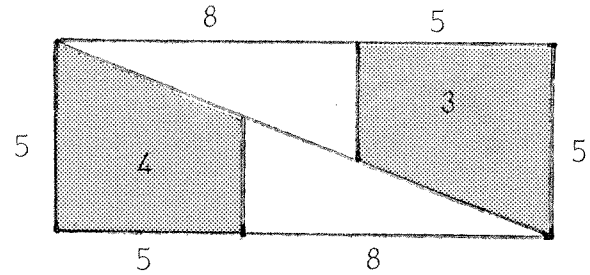
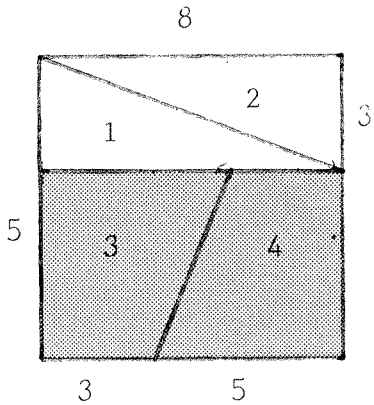
*Elles sont arrivées au collège de Herrlisheim, elles sont là : présentes, envahissantes. Elles occupent salles et couloirs, murs et tables. L'espace est à elles. Elles se présentent tantôt en noir et blanc, tantôt en couleurs. Elles proposent les profils les plus divers, fines et élancées comme des spirales, en pointe comme un triangle, élégamment arrondies comme une sphère en courbes harmonieusement dessinées. Elles s'expliquent en longues phrases savamment ordonnées, truffées de chiffres et de lettres. Elles s'offrent au jeu des mains, au plaisir des yeux en bulles rondes ou carrées. Concrètes ou abstraites, elles sont là à la portée de tous. Mais qui sont-elles donc pour ainsi nous séduire ? Ce sont les mathématiques exposées au collège Foch de Haguenau hier, au collège de Herrlisheim aujourd'hui. Qui l'eût cru possible, exposer des mathématiques, un défi devenu réalité. Une entreprise originale née dans la logique des choses, de la rencontre d'un homme et d'une femme, Madame LACOMBE et Monsieur BARTHELET, professeurs de mathématiques. Une idée qu'ils ont longtemps portée en eux et que leur rencontre a fait aboutir. Cette exposition est le travail d'une équipe d'enseignants stimulée par l'enthousiasme des élèves et très vite projetée en avant par la fièvre de la découverte et des enchaînements sans fin qu'appellent les mathématiques.*

---

C'est par ces quelques mots que les visiteurs ont été accueillis lors de l'inauguration d'une exposition de mathématique au collège de Herrlisheim. Impossible de tout décrire. Mais comme cette exposition a beaucoup voyagé : collège Foch de Haguenau, collège de Herrlisheim, hall du C.I.A.L. à Haguenau et qu'une plaquette a été réalisée pour la présenter, 'L'Ouvert' vous en propose ici un tout petit aperçu.



LE NOMBRE D'OR ET LE PARADOXE DE LEWIS CAROLL



Aire du carré :  $64 \text{ cm}^2$

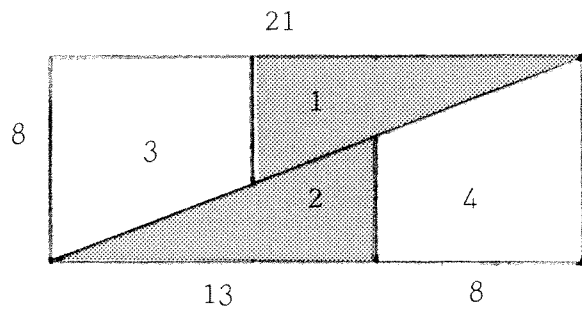
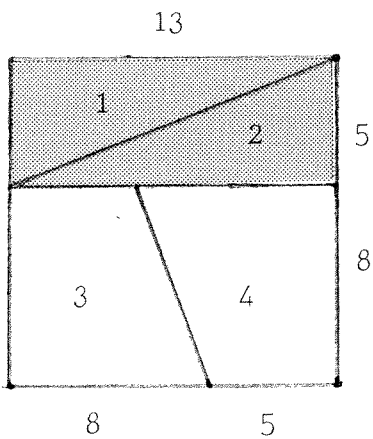
Aire du rectangle :  $65 \text{ cm}^2$

Voici un puzzle : avec les quatre morceaux du carré, nous avons reconstitué le rectangle ci-dessus!

OÙ EST PASSÉ LE  $\text{cm}^2$  MANQUANT???

Nous avons recommencé avec un autre puzzle :

NOUVELLE SURPRISE!!!



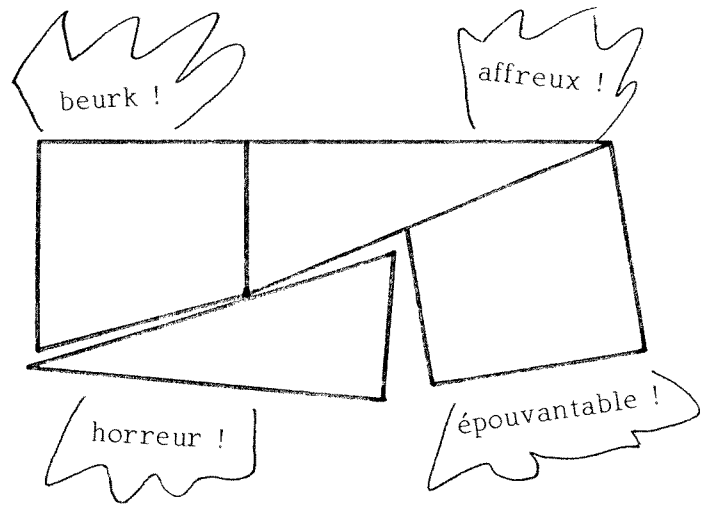
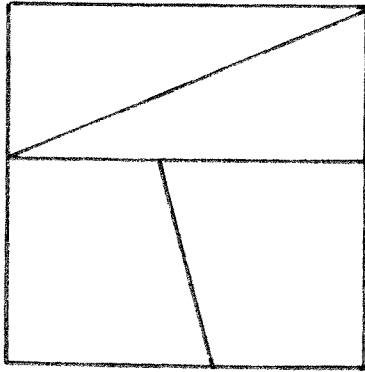
Aire du carré :  $169 \text{ cm}^2$

Aire du rectangle :  $168 \text{ cm}^2$

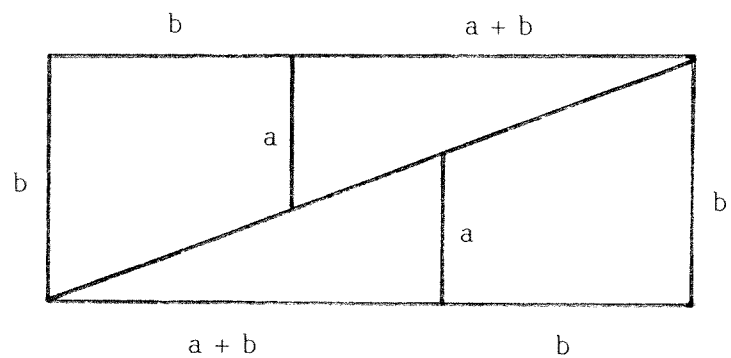
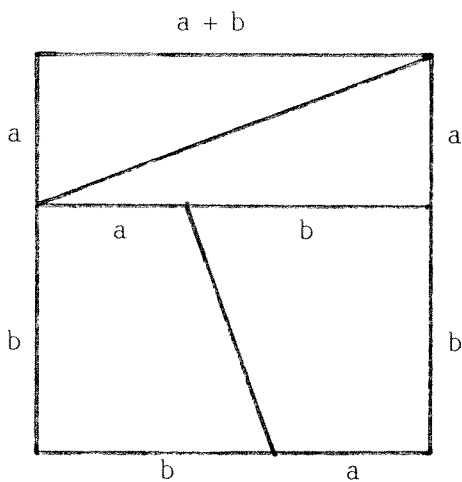
DES EXPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES

Peut-on réaliser ce puzzle avec n'importe quels nombres???

Essayons :



Mais au fait, peut-on fabriquer le rectangle avec les quatre morceaux du carré? Et avec quels nombres  $a$  et  $b$ ?



Aire du carré  
 côté  $\times$  côté  
 $= (a + b)^2$   
 $= a^2 + 2ab + b^2$

Aire du rectangle  
 longueur  $\times$  largeur  
 $= b(a + 2b)$   
 $= ab + 2b^2$

Pour que ce puzzle soit réalisable, il faut que :

$$ab + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

c'est-à-dire :

$$ab + 2ab^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 0$$

ou encore :

$$b^2 - ab - a^2 = 0.$$

Divisons les deux membres par  $a^2$  ( $a^2 \neq 0$ ).

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} - \frac{ab}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} &= 0 \\ \frac{b^2}{a} - \frac{b}{a} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

donc  $a$  et  $b$  doivent vérifier les relations :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= x \\ x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Les deux solutions sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi \\ x_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Il suffit que  $\frac{b}{a} = \phi$  pour que le puzzle soit possible.

### Où est passé le $cm^2$ dans les deux premiers puzzles ?

Dans les deux premiers puzzles les nombres  $a$  et  $b$  utilisés sont chaque fois ceux de la **suite de FINONACCI**.

• On sait que l'aire du carré est :

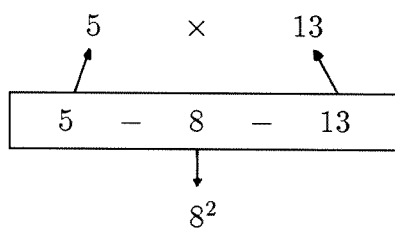
$$c \times c = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$$

et que l'aire du rectangle est :

$$L \times l = 13 \times 5 = 65 \text{ cm}^2$$

• Comme 5 – 8 et 13 sont trois nombres consécutifs de la **suite de FIBONACCI**, on a le schéma :

DES EXPOSITIONS DE MATHÉMATIQUES



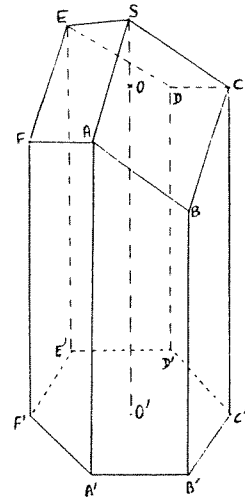
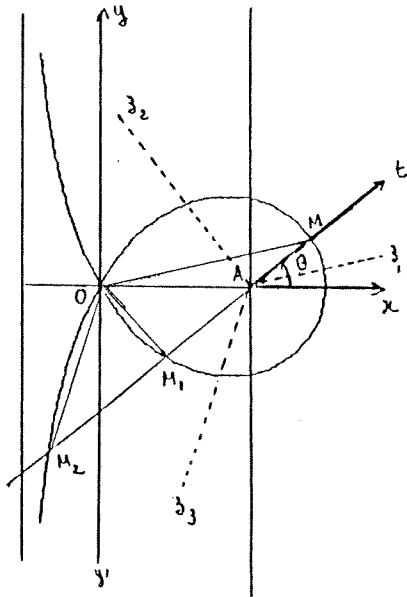
Il y a **toujours** une unité de différence dans cette configuration.

**Pourquoi trois nombres de la suite de FIBONACCI?**

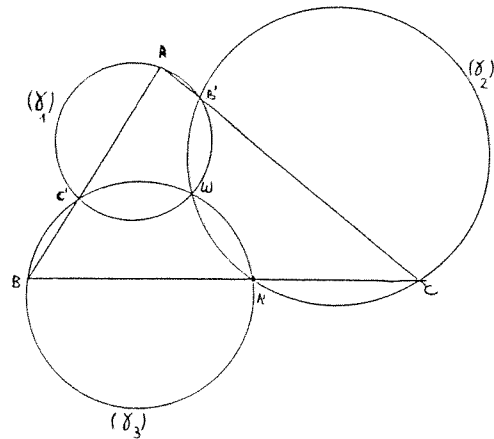
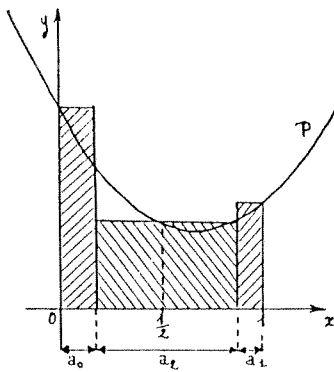
Rappelez-vous que :

$$\frac{5}{4}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8} \text{ etc } \dots$$

se rapprochent de " $\phi$ ".



Suite à la brochure  
de *Travaux Pratiques*  
en *Première Scientifique*,  
est parue depuis Juin 1987 une brochure de  
**TRAVAUX PRATIQUES en TERMINALES C, D, E.**  
Elle contient de nombreuses activités  
rédigées pour les élèves  
utilisant les nouveaux  
éléments du  
programme.



I.R.E.M. de STRASBOURG

GRUPE LYCÉE

70.- F

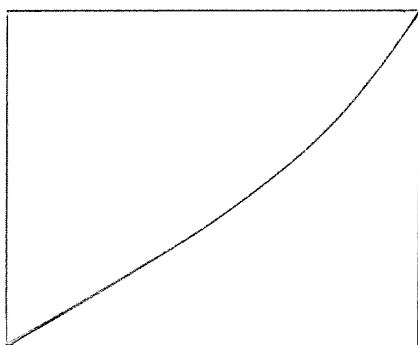
Veuillez adresser votre commande à la *Bibliothèque de l'I.R.E.M.*  
10, rue du Général Zimmer — 67084 STRASBOURG CEDEX, accom-  
pagnée du règlement à l'ordre de *Monsieur l'Agent Comptable de*  
*l'U.L.P. (IREM) — C.C.P. n° 550 644 LO 36.*  
Une facture peut être envoyée sur demande.

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET NOMBRES ENTIERS

ou

## LA MÉTHODE TRRU

Raymond SEROUL



### 0.— Introduction

Un écran bit-map est un moniteur où l'on peut allumer et éteindre le point de coordonnées  $(x, y)$ , avec  $x$  et  $y$  entiers compris entre 0 et  $N$ . Actuellement,<sup>(1)</sup> une valeur courante de  $N$  est 1024. Dans la suite, et pour simplifier, nous poserons

$$N = 1000.$$

Supposons que je veuille tracer sur cet écran et “en diagonale” la courbe  $x = e^t$  pour  $0 \leq t \leq 1$ .

Pour cela, je serai amené à écrire la boucle

```
for k := 0 to N do
  x := trunc (M * exp(k/N))
```

et à commander l'allumage des points  $(k, x - M)$ . (La constante entière  $M$  est choisie pour que l'on ait  $0 \leq x - M \leq N$ .)

Le calcul des mille exponentielles est long : 22 secondes.<sup>(2)</sup> Pourquoi une telle lenteur ?

- la machine code les réels sur 80 bits, même si vous ne l'avez pas demandé (soit des nombres de 19 à 20 chiffres). C'est du gâchis, vu que l'on n'a besoin que de 3 chiffres après la virgule.
- les calculs sur les réels sont beaucoup plus lents que les calculs sur les entiers. Or c'est précisément de nombres entiers que nous avons besoin...

---

©L'OUVERT 48 (1987)

<sup>(1)</sup> Le meilleur écran disponible sur le marché affiche  $4096 \times 3278$  points avec une résolution de 300 points par pouce, c'est à dire celle d'une imprimante laser!

<sup>(2)</sup> matériel utilisé : Macintosh Plus et LightSpeed Pascal toutes options inhibées.

Ce sont ces idées, combinées avec la philosophie non-standard, qui ont amené REEB, REVEILLÈS, TROESCH et URLACHER à publier un article que je voudrais raconter ici à ma manière.

### 1.— L'idée : calculer en virgule fixe.

Considérons le nombre  $x = 25.179,618\,775\,832\dots$  que nous décomposons dans la base  $N = 1000$

$$x = X_0 + \frac{X_1}{N} + \frac{X_2}{N^2} + \dots$$

( $X_0 = [x]$  est donc la partie entière de  $x$ ). Puisque ce sont les entiers qui nous fascinent, il est tentant d'utiliser l'approximation  $x = X_0$ . Mais cette approximation est trop grossière : nous devons effectuer quelques calculs ; lors d'une opération, les reports de retenue peuvent bousculer les derniers chiffres de  $X_0$ . Pour obtenir une meilleure précision, nous utiliserons les trois premiers chiffres après la virgule, ce qui signifie que nous utiliserons l'approximation

$$(1) \quad x = X_0 + \frac{X_1}{N}.$$

Mais il ne faut manipuler que des nombres entiers : nous représenterons donc dans la machine le nombre  $x$  par le couple d'entiers  $(X_0, X_1)$ .

Examinons le comportement de l'approximation (1) vis à vis des opérations arithmétiques. Commençons par une addition. Avec des notations évidentes, nous avons

$$x + y = \left( X_0 + Y_0 \right) + \left( \frac{X_1 + Y_1}{N} \right).$$

Pour obtenir la partie entière  $(x + y)_0$  de  $x + y$ , il faut tenir compte de la retenue éventuelle, soit

$$(2) \quad \begin{cases} (x + y)_0 = X_0 + Y_0 + (X_1 + Y_1) \mathbf{div} N \\ (x + y)_1 = (X_1 + Y_1) \mathbf{mod} N. \end{cases}$$

Continuons avec la multiplication. En procédant comme ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} xy &= \left( X_0 + \frac{X_1}{N} \right) \left( Y_0 + \frac{Y_1}{N} \right) \\ &= X_0 Y_0 + \frac{X_0 Y_1 + X_1 Y_0}{N} + \frac{X_1 Y_1}{N^2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, nous avons  $0 \leq X_1 Y_1 \leq (N-1)^2 < N^2$ . Comme la suite le montrera, nous manipulerons de très grands entiers. Si l'on ne prend pas de précaution particulière — mais cela pénalise la rapidité — des overflows seront monnaie courante lors du calcul du produit  $X_1 Y_1$ . Puisque la rapidité prime sur la précision, nous négligerons le terme  $X_1 Y_1 / N^2$  pour ne retenir que l'approximation

$$xy = X_0 Y_0 + \frac{X_0 Y_1 + X_1 Y_0}{N}.$$

La représentation en machine du produit  $xy$  est donc

$$(3) \quad \begin{cases} (xy)_0 = X_0 Y_0 + (X_0 Y_1 + X_1 Y_0) \mathbf{div} N \\ (xy)_1 = (X_0 Y_1 + X_1 Y_0) \mathbf{mod} N. \end{cases}$$

Ces formules se compliquent un tout petit peu plus s'il faut à tout prix tenir compte de la retenue fournie par le terme négligé  $X_1 Y_1$

$$(3') \quad \begin{cases} Z = (X_0 Y_1 + X_1 Y_0) + (X_1 Y_1) \mathbf{div} N \\ (xy)_0 = X_0 Y_0 + Z \mathbf{div} N \\ (xy)_1 = Z \mathbf{mod} N. \end{cases}$$

Il y a un cas très important où les formules (3) et (3') se simplifient et donnent le même résultat : multiplions en effet  $x$  par  $y = 1/N$ . Puisque  $Y_0 = 0$  et  $Y_1 = 1$ , on a tout de suite

$$(4) \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{N}\right)_0 = X_0 \mathbf{div} N \\ \left(\frac{x}{N}\right)_1 = X_0 \mathbf{mod} N. \end{cases}$$

**Remarque** : pourquoi tant de chichis et pourquoi ne pas plus simplement manipuler les nombres entiers  $E(Ux)$ , avec  $U = 10^{10}$  ou  $U = 10^{20}$ ? Ce serait tellement plus simple! Ces complications prennent leur source dans l'usage de l'ordinateur, qui n'accepte pas de rendre un entier quand on multiplie  $x$  par  $1/N$ , même si le résultat est un nombre entier.



2.— La méthode TRRU.<sup>(3)</sup>

Il s'agit de calculer  $N$  valeurs de la fonction  $x(t) = e^t$  pour  $t$  variant de 0 à 1. La précision des calculs doit être de trois chiffres après la virgule.

Pour obtenir la précision requise, nous calculerons les valeurs de la fonction  $y = Ux$ , où  $U$  est un entier qui sera convenablement choisi.

Et maintenant, la méthode : on intègre l'équation différentielle

$$y' = y, \quad y(0) = U$$

en se servant de la représentation (1) des nombres mis en jeu.

Pour intégrer cette équation, nous utiliserons la méthode la plus naïve qui soit : la méthode d'Euler. Rappelons en quoi elle consiste. Soit  $h = 1/N$  le pas de la méthode. La valeur de  $y$  en  $t+h$  est, en première approximation,

$$(5) \quad y(t+h) = y(t) + hy'(t) = y(t) + hy(t).$$

Cela nous conduit à construire la suite  $y_n$  telle que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{N}y_n, \quad y_0 = U.$$

Au lieu de mémoriser les formules (2) et (4), ce qui n'est pas de tout repos, recommençons les calculs qui nous ont amenés à ces formules. Posant  $y_n = Y_0(n) + Y_1(n)/N$ , nous avons facilement

$$\begin{aligned} Y_0(n+1) + \frac{Y_1(n+1)}{N} &= Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} + \frac{1}{N} \left( Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} \right) \\ &= Y_0(n) + \frac{Y_0(n) + Y_1(n)}{N} + \frac{Y_1(n)}{N^2}. \end{aligned}$$

En négligeant comme convenu le terme en  $1/N^2$ , nous sommes conduits à l'algorithme 1.

```

Y0 := U; Y1 := 0;
for n := 1 to N do begin
  Y1 := Y0 + Y1;
  Y0 := Y0 + Y1 div N;
  Y1 := Y1 mod N;
end.

```

Algorithme 1

- temps de calcul :  
1 seconde.
- comme on part de  $y_0$ ,  
la valeur calculée dans la  
boucle est bien  $y_n$ ,

Commentaires

<sup>(3)</sup> ce sont les initiales des auteurs de l'article. J'aurais aimé garder l'ordre alphabétique, mais n'étant pas FANTASIO, je n'arrive pas à prononcer facilement RRTU.

## EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET NOMBRES ENTIERS

Passons aux expérimentations : le temps de calcul est d'un peu moins d'une seconde et ne dépend pas de la valeur de  $U$  choisie ! L'accélération espérée est bien au rendez-vous (sinon, vous n'auriez entendu parler de rien). Mais quelle est la précision obtenue ? Pour  $U = 10^3$ , l'erreur maximum est de  $2 \cdot 10^{-3}$  et pour  $U = 10^4$ , elle est de  $1.4 \cdot 10^{-3}$ . Il ne sert à rien de donner à  $U$  des valeurs plus grandes. En effet, nous avons manifestement les inégalités

$$Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} \leq y_n \leq e^{n/N}.$$

Pour  $n = N$ , cela donne

$$e^1 - y_N = e^1 - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = 1.4 \cdot 10^{-3}.$$

Conclusion : si nous voulons réellement trois décimales exactes, il faut employer une méthode d'intégration un peu plus sophistiquée, capable d'une meilleure précision.

En voici une, qui est une méthode d'Euler améliorée. Le problème est de trouver une meilleure valeur que (5) pour  $y(t+h)$ . Pour cela, on, utilise les égalités

$$z = y(t) + \frac{h}{2}y'(t) = y(t) + \frac{h}{2}y(t) \quad y(t+h) = y(t) + hz,$$

ce qui est une manière déguisée d'utiliser le développement limité du second ordre  $y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{1}{2}h^2y''(t)$  sous la forme d'un schéma de Hörner. En passant aux représentations, on obtient

$$Z_0 + \frac{Z_1}{N} = Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} + \frac{1}{2N} \left( Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} \right)$$

$$Y_0(n+1) + \frac{Y_1(n+1)}{N} = Y_0(n) + \frac{Y_1(n)}{N} + \frac{1}{N} \left( Z_0 + \frac{Z_1}{N} \right).$$

Nous avons convenu de négliger les termes en  $1/N^2$ . Il en résulte que  $Z_1$  est inutile et l'on obtient l'algorithme 2.

```

Y0 := U ; Y1 := 0 ;
N2 := 2 * N ;
for n := 1 to N do begin
  Z0 := Y0 + (2 * Y1 + Y0) div N2 ;
  Y1 := Y1 + Z0 ;
  Y0 := Y0 + Y1 div N ;
  Y1 := Y1 mod N ;
end.
    
```

- le temps de calcul est de 1.5 secondes,
- les trois décimales exactes sont au rendez-vous pour  $U = 10^3$ .

*Algorithme 2*

*Commentaires*

### 3.— Quelques réflexions pour terminer.

Au début, je n'arrivais pas à retrouver tout seul les algorithmes de TTRU. Ne comprenant rien du tout à leur démarche, j'ai donc essayé de me débarrasser du non-standard.<sup>(4)</sup> C'est alors que je me suis aperçu qu'il s'agissait de calculer en virgule fixe.

Les informaticiens savent bien que l'on gagne en vitesse de calcul en représentant les nombres réels en format fixe. Dans le LightSpeed Pascal du Macintosh, pour ne citer que lui, il existe non pas un, mais *deux types* (Fixed et Frac) qui sont consacrés à cela. Autre exemple : les routines graphiques d'affichage sur un écran manipulent exclusivement des nombres entiers.

Et la nouveauté dans tout cela? Pris séparément, les calculs en virgule fixe et les équations différentielles paraissent bien classiques. Par contre, intégrer une équation différentielle — avec gestion "à la main" des retenues — amène de nouveaux résultats. Il est remarquable que TTRU aient redécouvert, en intégrant les équations  $y' = C$  et  $y'' + y = 0$ , les algorithmes classiques de BRESENHAM (tracé rapide de droite et de cercle).

Ce que je trouve de très satisfaisant dans leur démarche, c'est la simplicité et l'élégance des moyens mis en œuvre. Et puis c'est amusant et inattendu, cette rencontre d'objets *a priori* aussi antagonistes que sont les équations différentielles et les nombres entiers.

J'attends maintenant avec impatience les prochains résultats.

#### BIBLIOGRAPHIE

REEB, REVEILLÈS, TROESCH, URLACHER : *Équations différentielles et nombres entiers*. Publications de l'IRMA. 1987.

---

<sup>(4)</sup> une bonne manière d'évaluer l'intérêt d'une théorie est de voir si on peut s'en passer, comment et à quel prix.

## L'ENSEIGNEMENT À LA MAISON CENTRALE D'ENSISHEIM

Mme BAUR - Mr MAYOL

*La pédagogie peut apparaître partout. Il nous a semblé utile de faire connaître la situation pédagogique dans une prison — en l'occurrence la maison centrale d'Ensisheim — même s'il n'y est que peu question de mathématique faite, peut-être, de formateur (avis aux amateurs). Même si nous continuons à défendre nos conditions de travail et celles de nos élèves et avec raison, ce texte relativise beaucoup nos propres problèmes pédagogiques ou financiers.*

---

L'Administration Pénitentiaire assure sa mission par l'intermédiaire de trois types d'établissements :

- Les Maisons d'Arrêt où sont incarcérés les prévenus et les condamnés à courte peine de moins d'un an.
- Les Centres de Détention avec une population de jeunes qui purgent des peines moyennes ou des détenus de fin de peine.
- Les Maisons Centrales regroupant des condamnés à de longues peines jusqu'à la réclusion criminelle à perpétuité.

L'enseignement général est dispensé par deux instituteurs vacataires, et par un professeur de collège bénévole. Une formation professionnelle en informatique est assurée par le Centre d'Enseignement et de Recherche pour la Formation des adultes de Mulhouse.

Ces dernières années se déroulèrent deux autres cycles de formation professionnelle en cuisine et en soudure.

Les cours et le déroulement des examens sont organisés par l'équipe socio-éducative de l'établissement en l'absence d'un instituteur à temps complet. Cette équipe se compose de trois travailleurs sociaux pour une population pénale de 270. Outre l'enseignement, le service socio-éducatif s'occupe de la gestion et de l'animation des activités culturelles et sportives dans le cadre d'une association interne.

Nous présenterons dans cet article la situation actuelle de l'enseignement à la Maison Centrale d'Ensisheim ainsi que les objectifs fixés et les moyens à mettre en œuvre.

## 1. SITUATION ACTUELLE DE L'ENSEIGNEMENT À L'ÉTABLISSEMENT

Le niveau d'étude des détenus est très différent. La population pénale se compose pour sa majorité de personnes ayant un niveau d'étude primaire, une partie est illettrée dont un grand nombre d'étrangers, enfin, un faible pourcentage suit des études supérieures.

### A) De l'alphabétisation à l'Examen Spécial d'Entrée à l'Université (E.S.E.U.).

— *Alphabétisation* : deux heures par semaine dispensées par un professeur bénévole à six détenus.

— *Certificat de Formation Générale* : deux heures par semaines dispensées par un instituteur vacataire à cinq détenus.

— *Brevet des Collèges* : deux heures par semaine dispensées par un instituteur vacataire à cinq détenus.

— *Initiation à l'anglais* : deux heures par semaine dispensées par un instituteur vacataire à six détenus.

— *E.S.E.U.* : aucun soutien n'ayant pu être assuré cette année, il n'y a pas eu d'inscription pour cet examen.

### B) Les études supérieures.

— *Examen Européen de Langues* : trois inscrits pour l'espagnol, cinq pour l'anglais. La préparation se fait par correspondance.

— *Etudes de droit* : un inscrit en 2<sup>e</sup> année de Capacité, un inscrit en 2<sup>e</sup> année de D.E.U.G. Trois maîtres-assistants de la Faculté de Droit de Strasbourg dispensent un cycle de soutien de douze heures.

— *Etudes de philosophie* : un inscrit en 1<sup>ère</sup> année de D.E.U.G. par correspondance à la Faculté de Reims.

### C) La formation professionnelle.

— *Diplôme de Technicien en Informatique de Gestion* : un cycle de formation étalé sur dix-huit mois vient de débiter avec dix-huit stagiaires.

Hormis les cinquante-deux personnes préparant des examens ou suivant des cours, une quarantaine de détenus travaillent avec des organismes de cours par correspondance tels qu'AUXILIA et le C.N.E.C. pour une remise à niveau de culture générale.

## 2. PERSPECTIVES D'AVENIR DE L'ENSEIGNEMENT À LA MAISON CENTRALE

### A) La légitimité de l'enseignement en prison

Les motivations des étudiants visent les aménagements de leur temps et de leur peine ainsi que leur enrichissement personnel. Généralement issus d'un milieu défavorisé et en échec scolaire, les détenus mettent à profit le temps de leur détention pour acquérir un niveau scolaire ou professionnel leur facilitant une

réadaptation sociale. Il faut savoir que l'obtention d'un diplôme permet à la commission d'application des peines d'octroyer des réductions sur le temps de la peine. La reprise des études permet à de nombreux détenus une revalorisation d'eux-mêmes.

Les motivations de l'Administration Pénitentiaire recourent celles vues précédemment, une de ces missions est d'éviter la désocialisation des incarcérés. Une formation professionnelle peut permettre une réinsertion de meilleure qualité. L'Administration qui a le souci d'éviter la récidive favorise et encourage les actions de formation et d'enseignement. Un enseignement adapté crée un centre d'intérêt qui aide les détenus à canaliser leur énergie; et de cette façon facilite la tâche de la direction de l'établissement.

### **B) Objectifs et moyens à mettre en œuvre**

Nous sommes persuadés qu'avec un soutien plus important, l'effectif des détenus étudiant serait plus étoffé. Il faut savoir que ces gens, souvent d'un niveau très faible, ont des difficultés à suivre des cours par correspondance car il leur manque les bases essentielles pour approcher les matières. L'avantage d'avoir des professeurs est de fournir à des groupes d'élèves les méthodes nécessaires à l'apprentissage.

Nous sommes en ce moment en négociation avec l'Institut BARTHOLDI de Colmar qui devrait débiter des cycles d'alphabétisation, notamment pour les détenus étrangers. Cette formation serait financée par le Fonds d'Action Sociale pour les Etrangers.

La Maison Centrale d'Ensisheim vient d'obtenir, après plusieurs années d'interruption, un poste d'instituteur détaché par l'Education Nationale. Le poste sera pourvu à la rentrée de Septembre 1987. Cet instituteur à temps complet, préparera les détenus aux examens du C.F.G. et du Brevet des Collèges. Le professeur de collège bénévole assurera un soutien pour les personnes se préparant à l'E.S.E.U. Il enseignera certaines matières de l'E.S.E.U. A, c'est-à-dire le français, l'histoire et la géographie.

En ce qui concerne les matières spécifiques à l'E.S.E.U. B telles que les sciences et les mathématiques, aucun enseignant ne peut encadrer des cours. Les étudiants, pour la plupart, ne choisissent pas cet examen pour cette raison.

Les participants au stage informatique ont un programme de mathématiques à étudier, certains ont un niveau qui nécessite des cours supplémentaires pour pouvoir suivre dans de bonnes conditions cette formation.

Nous serions intéressés par l'intervention de professeurs bénévoles auxquels nous sommes en mesure de rembourser les frais de déplacement. Nous savons qu'il est difficile de demander à des professeurs de s'engager fermement dans une longue durée. Maintenant, ce qui serait envisageable est la constitution de cycles de quelques heures sur quelques semaines qui permettent de traiter une question particulière posant problème à un groupe de détenus.

La Maison Centrale d'Ensisheim possède une bibliothèque scolaire qui est un instrument de travail pour les détenus sans moyens financiers et soutien extérieur. Toutefois, les ouvrages que nous possédons ne sont pas d'une très grande actualité, et ne répondent pas toujours aux besoins. Nous avons déjà reçu des livres de la part d'institutions scolaires qui nous ont beaucoup aidés. Nous sommes à la recherche de donateurs d'ouvrages mathématiques et scientifiques.

---

La prison ne doit pas être simplement un lieu d'exclusion, elle n'est qu'un lieu de passage qui ne doit pas détruire complètement le dynamisme d'un individu. Nombre de personnes incarcérées recherchent des moyens d'expression qu'elles n'avaient pas ou plus l'habitude d'exercer. Les études sont un de ces moyens essentiels de restructuration de la personnalité, elles sont importantes à encourager et à développer dans une Maison Centrale.

Le citoyen oublie souvent qu'un détenu redeviendra aussi un homme libre et que l'aider dans son temps de détention c'est aussi l'aider à plus long terme à une réinsertion dans des conditions acceptables pour le détenu et la société.

Pour tout contact, veuillez vous adresser au service socio-éducatif de la  
Maison Centrale d'Ensisheim  
49, rue de la Première Armée  
68190 ENSISHEIM  
Tél. 89 81 02 03

qui est prêt à répondre à toutes les questions que vous vous posez.

# GÉNÉRATION SIMPLE DE POLYÈDRES REMARQUABLES

Eugène EHRHART

## 1. POLYÈDRES RÉGULIERS.

Donnons-nous au départ le tétraèdre régulier, le cube et le dodécaèdre régulier avec ses faces pentagonales. Les nombres  $S, A, F$  de leurs sommets, arêtes et faces sont :

	F	A	S
tétraèdre :	4,	6,	4
cube :	6,12,	8	
dodécaèdre :	12,30,	20.	

Par polaires réciproques, à partir du centre de gravité d'un polyèdre, un sommet donne un plan facial et inversement. On obtient ainsi les duaux des trois polyèdres précédents : le tétraèdre (autodual), l'octaèdre et l'icosaèdre réguliers. En échangeant  $F$  et  $S$  dans le tableau précédent avec conservation de  $A$ , on trouve :

	F	A	S
octaèdre :	8,12,	6	
icosaèdre :	20,30,	12.	

Comme un sommet du dodécaèdre a trois branches, une face de l'icosaèdre dual a trois côtés : elle est donc un triangle équilatéral.

C'est le moment de rappeler l'un des plus beaux résultats géométriques de l'antiquité grecque :

**Théorème 1 de PLATON.** *Il existe juste cinq polyèdres réguliers.*

## 2. POLYÈDRES RHOMBIQUES.

On appelle ainsi tout polyèdre convexe dont les faces sont des losanges égaux.

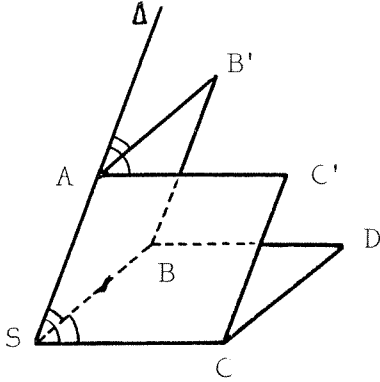
Accolons à chaque face  $f$  d'un polyèdre régulier  $R$ , de dièdre  $\alpha$ , une pyramide dont les faces sont inclinées sur sa base  $f$  de  $\beta = (\pi - \alpha)/2$ . Chaque arête de  $R$  est alors une diagonale d'une face d'un polyèdre rhombique. Ainsi le tétraèdre régulier, le cube et le dodécaèdre régulier ( $A = 6, 12, 30$ ) donnent respectivement le cube, le **dodécaèdre et le triacontaèdre rhombiques** ( $F = 6, 12, 30$ ).

Le cube, considéré comme assemblage d'arêtes articulées, n'est pas rigide. Il n'est qu'un cas particulier d'une famille d'hexaèdres rhombiques : les **rhomboèdres**.



**Théorème 2.** *Tout polyèdre rhombique, dont chaque sommet réunit des angles faciaux tous aigus ou tous obtus, a 12 ou 30 faces.*

*Lemme.* Si un sommet  $S$  d'un polyèdre rhombique  $P$  réunit juste trois angles faciaux aigus  $\alpha$ , le solide est un rhomboèdre.



Considérons la figure formée par les trois faces de  $P$  réunies en  $S$ . La translation de vecteur  $\overrightarrow{SA}$  du trièdre  $SABC$  donne un trièdre  $A\Delta B'C'$ , tel que les angles  $\widehat{\Delta AB'}$  et  $\widehat{\Delta AC'}$  égaux à  $\alpha$  sont situés respectivement dans les plans  $SAB$  et  $SAC$  et ne peuvent donc donner des faces de  $P$ . Il en résulte que si on appliquait contre  $\widehat{B'AC'}$  plus de deux angles  $\alpha$ ,  $P$  ne serait pas convexe. Il en serait de même si on y appliquait un angle  $\alpha$  et un angle  $\pi - \alpha$  ou deux angles  $\pi - \alpha$ . Le triangle  $B'AC'$  est donc nécessairement la moitié d'une face  $B'AC'A'$  de  $P$  et impose  $A'D$  comme arête complétant un rhomboèdre.

Soient alors  $\mathcal{P}$  le polyèdre rhombique de l'énoncé,  $\alpha$  l'angle aigu d'une face et  $\beta$  son angle obtus. L'angle  $\beta$  est inférieur à  $2\pi/3$ , car la somme des angles  $\beta$  réunis en un sommet de  $\mathcal{P}$  est inférieure à  $2\pi$ , et donc  $\alpha > \pi/3$ . Par suite il y a moins de 6 angles aigus faciaux réunis en un sommet. Il y en a donc 4 ou 5, car 3 donnerait un rhomboèdre. Si en un sommet de  $\mathcal{P}$  sont réunis 4 angles aigus, on ne peut appliquer au bord de la corolle faciale ainsi formée une chaîne de 4 faces, que si les faces sont celles d'un triacontaèdre rhombique ( $\alpha = \arccos 1/3 \simeq 70^\circ 32'$ ). De même si en un sommet de  $\mathcal{P}$  sont réunis 5 angles aigus, on ne peut appliquer au bord de la corolle faciale correspondante les angles obtus d'une chaîne de 5 faces, que si les faces sont celles d'un triacontaèdre rhombique ( $\alpha = \arctan 2 \simeq 63^\circ 30'$ ). On en déduit que seuls le dodécaèdre et le triacontaèdre rhombiques vérifient le théorème.

**Conjecture.** *Tout polyèdre rhombique a 6, 12 ou 30 faces.*

Pour tout polyèdre convexe (ou même seulement homéomorphe à une sphère) à faces quadrangulaires

$$A = 2F \quad S = F + 2.$$

La première égalité est immédiate, car les  $F$  faces ont ensemble  $4F$  côtés, chacun commun à deux faces. Elle entraîne la seconde par la relation d'EULER  $S - A + F = 2$ .

D'où le tableau :

	F	A	S
dodécaèdre rhombique:	12	24	14
triacontaèdre rhombique :	30	60	32.

Notons que les deux polyèdres admettent une sphère inscrite et une autre sphère tangente à toutes les arêtes.

### 3. DEUX POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS D'ARCHIMÈDE.

Un polyèdre convexe est dit semi-régulier, si ses faces, semblablement disposées, sont toutes égales à l'un ou l'autre de deux polygones réguliers.

Par polaires réciproques on obtient les deux du dodécaèdre et du triacontaèdre rhombiques. Ce sont respectivement **le cuboctaèdre** et **l'icosidodécaèdre**. Les faces du premier sont 6 carrés et 8 triangles équilatéraux, celles du second 20 triangles équilatéraux et 12 pentagones réguliers. En renversant les lignes du tableau précédent on trouve :

	F	A	S
cuboctaèdre	: 14,	24,	12
icosidodécaèdre	: 32,	60,	30.

### 4. POLYÈDRES CERFIQUES.

Nous appelons ainsi des polyèdres convexes dont les faces, toutes égales, sont des "*cerfs-volants*" (un cerf-volant est un quadrilatère convexe dont juste une diagonale est axe de symétrie).

**Théorème 3.** *Il existe deux polyèdres cerfiques de 24 ou 60 faces.* Ils sont circonscrits respectivement au dodécaèdre ou au triacontaèdre rhombiques.

Comme  $A = 2F$  et  $S = F + 2$ , ils vérifient le tableau :

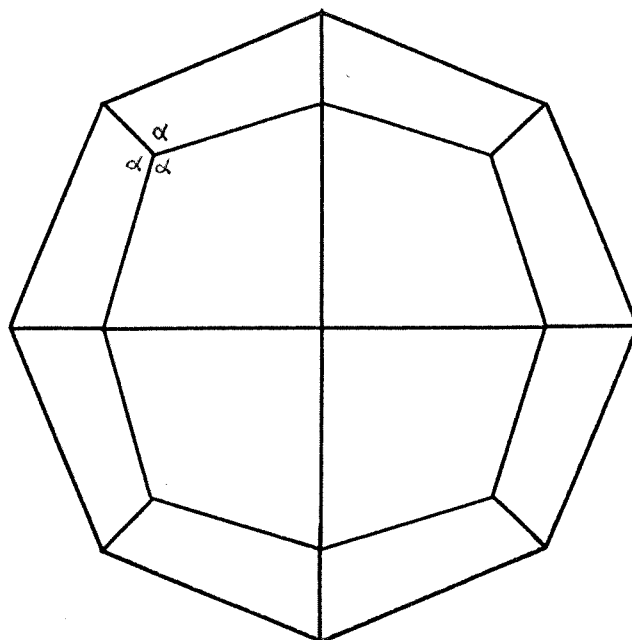
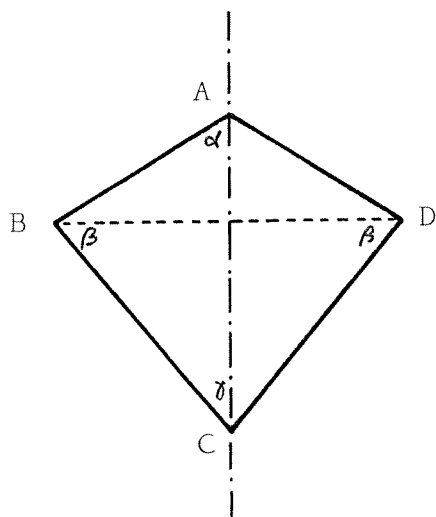
	F	A	S
<b>icositétraèdre</b>	: 24,	48,	26
<b>hexacontaèdre</b>	: 60,	120,	62.

Pour démontrer le théorème 3, remarquons que par raison de symétrie les angles dièdres du dodécaèdre ou du triacontaèdre rhombiques sont égaux. Soit  $P$  un tel polyèdre, de dièdre  $\Phi$ . Accolons à chacune de ses faces  $f$  une pyramide, dont les faces sont inclinées sur sa base  $f$  de  $\Psi = (\pi - \Phi)/2$ . Chaque arête de  $P$  est alors l'axe d'une face d'un polyèdre cerfique. Le dodécaèdre et le triacontaèdre rhombiques ( $A = 24, 60$ ) donnent ainsi respectivement des polyèdres cerfiques de 24 et 60 faces.

**L'icositétraèdre cerfique.** Précisons la forme de son cerf-volant facial d'axe  $AC = a$ . Du fait que l'angle dièdre du dodécaèdre rhombique est  $2\pi/3$  et que l'angle aigu de ses faces est  $\arccos 1/3$ , on déduit par un calcul facile que

$$HA = \frac{a}{3} \quad BD = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 1,09a.$$

Parmi les neuf plans de symétrie du polyèdre il en est trois, perpendiculaires deux à deux, qui le coupent suivant des octogones réguliers. Le voici vu face à un de ces plans :



**Polyèdres cerfiques bipyramidaux.** *Un antiprisme* est un polyèdre formé à partir de deux polygones réguliers égaux de même axe, les côtés de chacun étant reliés aux sommets de l'autre par des triangles équilatéraux. Par polaires réciproques on obtient son dual. C'est un polyèdre constitué d'une corolle de cerfs-volants égaux de même sommet, accolée bord à bord sur une corolle égale.

Il y a évidemment une infinité de ces polyèdres cerfiques bipyramidaux. Ils admettent une sphère inscrite et un axe de rotation.

**Conjecture.** *A part les polyèdres bipyramidaux, il n'y a que deux polyèdres cerfiques. Ils ont 24 ou 60 faces.*

# RACINES DE PLUS GRAND MODULE D'UN POLYNÔME

Jean LEFORT et Frédéric DOUÉ

*'L'Ouvert' se veut toujours un moyen d'échange entre collègues. C'est pourquoi nous sommes heureux qu'une discussion entre J. LEFORT et F. DOUÉ à propos de l'article du premier sur la résolution des équations polynomiales, aboutisse aujourd'hui à une publication commune qui répond en partie à la question que se posait J. LEFORT sur la recherche des arguments des racines de plus grand module.*

## 1. Pour trouver les racines il faut de la suite dans les idées.

On sait que si on veut chercher l'ensemble  $E$  des suites satisfaisant à :

$$u_{n+p} = \alpha_1 \cdot u_{n+p-1} + \dots + \alpha_p \cdot u_n$$

on est amené à chercher les suites géométriques qui en sont solutions, c'est-à-dire à résoudre l'équation :

$$x^p = \alpha_1 \cdot x^{p-1} + \dots + \alpha_p.$$

Si ce polynôme a  $p$  racines distinctes  $|r_1| > |r_2| \geq \dots \geq |r_p|$ , alors toute suite de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire des suites  $(r_i^n)$ . Plus exactement les  $(r_i^n)$  forment une base de l'espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  et les coordonnées d'une suite particulière sont parfaitement définies par la donnée des  $p$  premières valeurs de la suite.

Par exemple, la suite  $s$  de  $E$  définie par :

$$s_0 = s_1 = s_2 = \dots = s_{p-2} = 0 \quad \text{et} \quad s_{p-1} = 1$$

s'écrit :

$$s_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (r_i^n) \quad \text{avec} \quad x_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (r_i - r_j)}.$$

Il est clair que, puisque  $r_1$  est la racine de plus grand module, pour  $n$  grand,  $s_n$  est équivalent à :

$$\frac{r_1^n}{\prod_{j \neq 1} (r_1 - r_j)}$$

et par conséquent  $s_{n+1}/s_n$  converge vers  $r_1$ . On démontre même que la convergence est géométrique en ce sens que  $s_{n+1}/s_n - r_1 \sim A \cdot k^n$  où  $|k| = |r_2|/|r_1|$  donc les calculs sont d'autant plus rapides que  $|k|$  est plus petit, c'est-à-dire qu'il y a un grand écart entre  $|r_1|$  et  $|r_2|$ .

## 2. Un exemple pour mieux comprendre.

Considérons le polynôme  $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3$ . En dérivant deux fois et en remontant on voit que  $P(x)$  admet deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$  avec  $4 < r_1 < 5$  et  $-3 < r_2 < -2$  et deux racines complexes conjuguées dont le module  $\rho$  est tel que  $r_1.r_2.\rho^2 = -3$  donc  $\sqrt{5}/5 < \rho < \sqrt{6}/4$ . La racine de plus grand module est bien  $r_1$ .

L'étude de la suite  $s$  définie par :

$$s_{n+4} = 3.s_{n+3} + 6.s_{n+2} - 8.s_{n+1} + 3.s_n$$

avec

$$s_0 = s_1 = s_2 = 0 \quad \text{et} \quad s_3 = 1$$

conduit au tableau suivant :

$n$	$S_n$	$S_n/S_{n-1}$
0	0	
1	0	
2	0	
3	1	
4	3	3
5	15	5
6	55	3,66666667
7	234	4,254545455
8	921	3,935897436
9	3772	4,095548317
10	15135	4,012460233
11	61371	4,054905847
12	247510	4,033012335
13	1000992	4,044248717
14	4042473	4,038466841
15	16337404	4,041438001
16	66001644	4,039910135
17	266692548	4,040695532
18	1077515695	4,040291726
19	4353701433	4,040499320
20	1,759066 10 <sup>10</sup>	4,040392593
21	7,107415 10 <sup>10</sup>	4,040447461
22	2,871694 10 <sup>11</sup>	4,040419259
23	1,160289 10 <sup>12</sup>	4,040433754
24	4,688061 10 <sup>12</sup>	4,040426299
25	1,894178 10 <sup>13</sup>	4,040430133
26	7,653292 10 <sup>13</sup>	4,040428161
27	3,092258 10 <sup>14</sup>	4,040429176
28	1,249405 10 <sup>15</sup>	4,040428653
29	5,048131 10 <sup>15</sup>	4,040428922
30	2,039661 10 <sup>16</sup>	4,040428783

On en déduit que  $r_1 \simeq 4,040\ 428\ 8$ . Pour cette valeur  $P$  est voisin de  $-2,3.10^{-6}$ .

### 3. Suivons une nouvelle suite.

Imaginons que l'on ait  $|r_1| = |r_2| > |r_3| \geq \dots$  et  $r_1 \neq r_2$ ; c'est le cas générique quand on a un polynôme à coefficients réels admettant deux racines conjuguées comme racines de plus grand module.

L'étude précédente peut encore être utilisée, mais cette fois si  $s_n$  est équivalent à  $s'_n$  définie par :

$$s'_n = \frac{(r_1)^n}{\prod_{j \neq 1} (r_1 - r_j)} + \frac{(r_2)^n}{\prod_{j \neq 2} (r_2 - r_j)}$$

Mais  $s'$  s'exprime comme une suite récurrente à deux termes puisqu'elle dépend de deux suites géométriques; on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} s'_{n+1} &= (r_1 + r_2)s'_n - r_1 r_2 s'_{n-1} \quad \text{ou encore} \\ s'_n &= (r_1 + r_2)s'_{n-1} - r_1 r_2 s'_{n-2}. \end{aligned}$$

Et en considérant  $(r_1 + r_2)$  et  $(r_1 r_2)$  comme des inconnues, on voit que :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{s'_{n+1} \cdot s'_{n-2} - s'_n \cdot s'_{n-1}}{s'_n \cdot s'_{n-2} - (s'_{n-1})^2} \\ r_1 \cdot r_2 &= \frac{s'_{n+1} \cdot s'_{n-1} - (s'_n)^2}{s'_n \cdot s'_{n-2} - (s'_{n-1})^2}. \end{aligned}$$

On peut donc espérer qu'asymptotiquement on retrouve  $(r_1 + r_2)$  et  $(r_1 r_2)$  en remplaçant  $s'$  par  $s$ . Dans la pratique, on pose :

$$\begin{aligned} y_n &= s_n \cdot s_{n-2} - (s_{n-1})^2 \\ z_n &= s_{n+1} \cdot s_{n-2} - s_n \cdot s_{n-1} \end{aligned}$$

et en étudiant des équivalents géométriques simples de  $y_n$  et  $z_n$  on démontre que  $(y_{n+1})/y_n$  converge vers  $r_1 r_2$  et  $z_n/y_n$  converge vers  $r_1 + r_2$ .

### 4. Un exemple guère nouveau.

Considérons le polynôme  $Q(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 3x + 1$  qui n'est autre que le polynôme aux inverses de  $P$ . D'après l'étude déjà faite, les racines de plus grand module de  $Q$  sont donc complexes et conjuguées. Posons  $r_1 = \rho \exp(i\theta)$  et  $r_2 = \rho \exp(-i\theta)$ . Alors  $r_1 r_2 = \rho^2$  et  $r_1 + r_2 = 2 \cdot \rho \cdot \cos(\theta)$ .

L'étude de la suite  $s$  définie par :

$$s_{n+4} = 8/3 s_{n+3} - 2 \cdot s_{n+2} - s_{n+1} + 1/3 s_n$$

avec  $s_0 = s_1 = s_2 = 0$  et  $s_3 = 1$  conduit au tableau de la page suivante :

$n$	$S_n$	$y_n = S_n S_{n-2} - S_{n-1}^2$	$y_n/y_{n-1}$	$z_n = S_{n+1} S_{n-2} - S_n S_{n-1}$	$Z_n/y_n$
0	0				
1	0				
2	0	0		0	2,66666667
3	1	0		0	3,16666667
4	2,666667	-1	2	-2,666667	2,83333333
5	5,111111	-2	3,33333333	-6,333333	2,92222222
6	7,296296	-6,6667	2,69444444	-18,888889	2,92222222
7	6,901235	-17,9630	2,81855697	-52,490756	2,89709977
8	-0,411523	-50,6296	2,796634968	-146,679013	2,900746790
9	-20,492456	-141,5926	2,796634968	-410,724280	2,900784845
10	-58,292638	-395,9520	2,796417397	-1148,571561	2,900461629
11	-111,750191	-1107,9959	2,798309675	-3213,699593	2,900620396
12	-161,059950	-3099,4957	2,797389136	-8990,460445	2,900568158
13	-154,530999	-8671,4389	2,797693516	-25152,09956	2,900578990
14	2,356548	-24259,3750	2,797618166	-70366,28544	2,900581134
15	439,156011	-67868,7703	2,797630616	-196858,7292	2,900578990
16	1267,213949	-189871,7518	2,797630648	-550738,0133	2,900578986
17	2447,058295	-531190,834	2,797629605	-1540761,064	2,900579162
18	3552,690394	-1486075,475	2,797630117	-4310479,431	2,900579078
19	3458,895848	-4157489,264	2,797629955	-12059126,48	2,900579103
20	93,687827	-11631116,65	2,797629990	-33736973,84	2,900579098
21	-9404,961792	-32539560,70	2,797629985	-94383569,68	2,900579100
22	-27541,93948	-91033650,76	2,797629986		

On en déduit que  $\rho^2 \simeq 2,797\,629\,986$  et  $2 \cdot \rho \cdot \cos(\theta) \simeq 2,900\,579\,100$ . D'où  $\rho$  et  $\theta$ , avec par exemple :

$$r_1 = 1,450\,289\,550 + 0,833\,240\,802i \quad \text{et} \quad r_2 = 1,450\,289\,550 - 0,833\,240\,802i.$$

## 5. Conclusion.

Cette méthode nous a permis d'obtenir toutes les solutions de l'équation :

$$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$$

puisque l'on peut facilement obtenir la dernière en utilisant, entre autre le produit des racines. On trouve :

$$4,040\,428\,8 ; -2,077\,227\,5 ; 0,518\,399\,331 \pm i0,297\,838\,101$$

ce qui donne la factorisation réelle :

$$(x - 4,040\,428\,8)(x + 2,007\,227\,5)(x^2 - 1,036\,798\,7x + 0,357\,445\,4).$$

Mais elle a nécessité une étude préalable sérieuse et soignée de ce polynôme. L'application de la même technique à un polynôme de degré élevé se révèle laborieuse, mais on sait qu'aucune méthode n'est simple quand le degré est élevé.

Il resterait à étudier le cas d'une racine multiple de plus grand module. On sait qu'alors la suite associée au polynôme n'est plus combinaison linéaire de suites géométriques mais qu'il y intervient un terme en  $n$ . Des méthodes analogues permettent d'aboutir.



## A VOS STYLOS !

Sécher un peu, mais pas trop, sur une question à la fois élémentaire et astucieuse est un plaisir d'esthète; c'est pourquoi chaque numéro de 'L'Ouvert' vous propose désormais un problème. Vos contributions à cette rubrique (énoncés nouveaux, solutions ingénieuses ou élégantes, commentaires, etc ...) sont bien sûr vivement sollicitées. Compte-tenu des délais d'impression et de routage, qui ne laissent finalement que peu de temps entre le moment où vous lisez 'L'Ouvert' et celui où le numéro suivant est bouclé, et pour nous permettre de prendre en compte vos éventuelles réactions, la solution de chaque problème ne paraîtra que deux numéros plus tard; le numéro intermédiaire fournira une indication, coup de pouce à d'éventuels égarés. A vos stylos!

---

### PROBLÈME 1 :

Pour toute famille de réels positifs  $c_1, \dots, c_p$  tels que  $c_1^3 + \dots + c_p^3 \geq 7$ , motrer que le cube unité (fermé, d'équation  $0 \leq x, y, z \leq 1$  est inclus dans une réunion de  $p$  cubes fermés, parallèles aux axes, de côtés respectifs  $c_1, \dots, c_p$ . Etablir aussi que 7 ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

### INDICATION (Problème 1) :

Même problème à deux dimensions, avec des carrés et la condition  $c_1^2 + \dots + c_p^2 \geq 3$ .

### PROBLÈME 2 : (proposé par D. DUMONT)

Pour  $n \geq 1$ , on appelle  $u_n$  le nombre égal à  $n$  si  $n$  est impair, et à  $-3p(n)$  si  $n$  est pair, où  $p(n)$  désigne le plus grand diviseur impair de  $n$ . Posant

$$s_n = u_1 + \dots + u_n,$$

montrer que  $|s_n| \leq n$ , et trouver tous les  $n$  pour lesquels  $|s_n| = n$ .