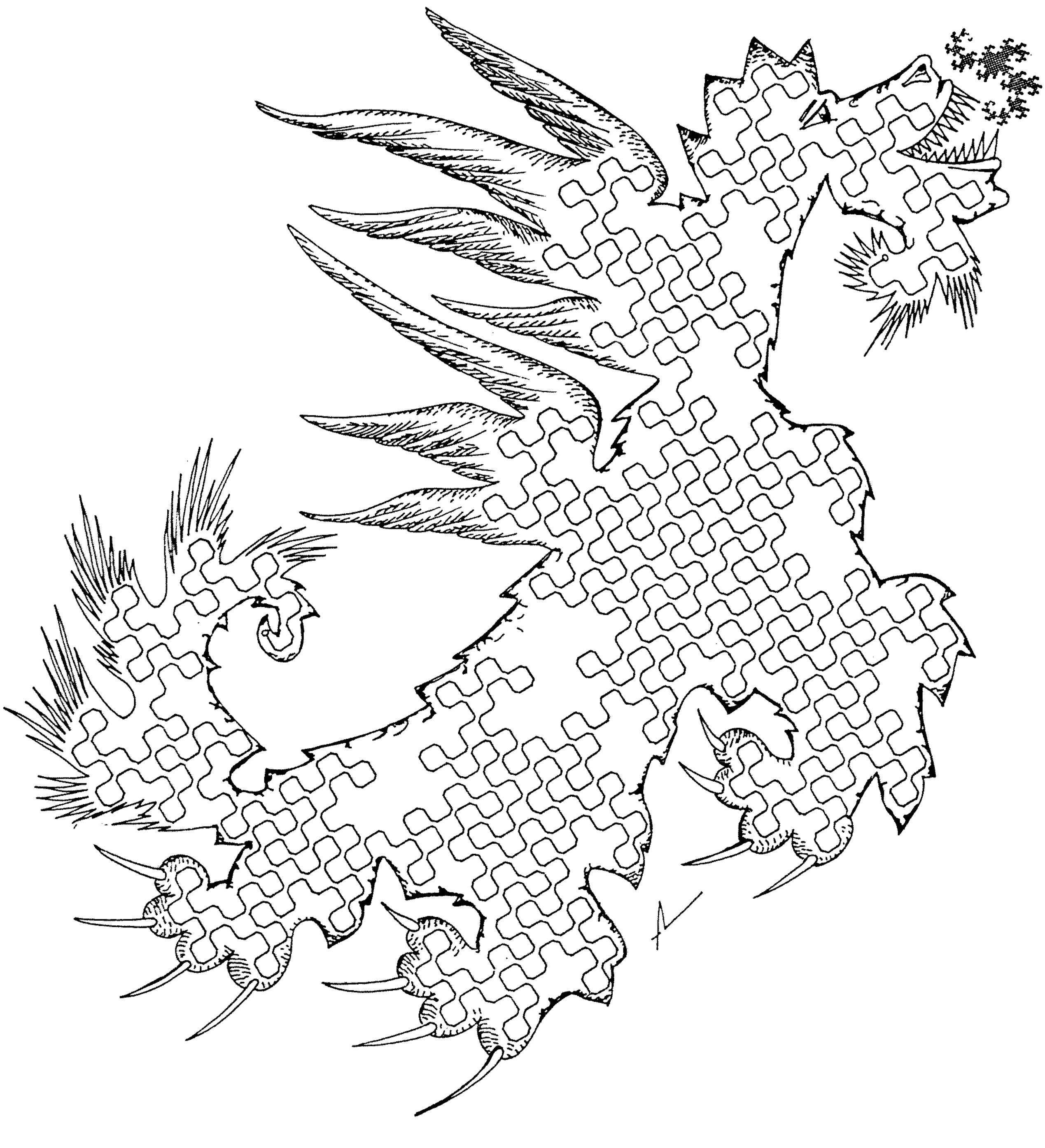
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n°49 - DÉCEMBRE 1987 ISSN 0290-0068



NOTRE COUVERTURE

Un *dragon et sa courbe* obtenu par le pliage dix fois de suite dans le même sens d'une bande de papier. On déplie ensuite à angle droit.
Voir l'article de M. Mendès France, page 14.

Les merveilles des mathématiques

A l'image des contes de notre enfance, les mathématiques sont peuplées de monstres et de merveilles. Les lecteurs de *'L'Ouvert'* ont l'habitude de les rencontrer sur la couverture mais aussi au détour des pages de la revue.

Aujourd'hui, Michel MENDÈS FRANCE nous offre un magnifique dragon, mis en scène par Francine LEFORT. Ce dragon a dévoré tous les nombres algébriques irrationnels mettant à nu le lien entre rationnels et transcendants.

Aujourd'hui encore, Francis JAMM nous propose une promenade au musée de la Villette, antre (in)contesté des merveilles mathématiques.

Au hasard de votre cheminement dans les pages de *'L'Ouvert'* vous pourrez assiter à la naissance des groupes grâce à un montage d'Etienne KOEHLER.

N'oublions pas cette merveilleuse informatique dont Claude PAIR nous retrace l'histoire et qu'il nous demande de manier avec précaution (le démon informatique aurait-il des réactions imprévisibles ?).

Dans ce numéro vous trouvez beaucoup de plaisirs pour les yeux et pour l'esprit ; amis lecteurs, profitez pleinement de votre lecture.

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N°49 – 1987

◇ *Notre couverture : Un dragon et sa courbe* I

◇ *Editorial : Les merveilles des mathématiques* II

◇ *Informatique et enseignement : hier, aujourd'hui, demain*, par C. PAIR 1

◇ *Principes de la symétrie perturbée*, par Michel MENDÈS FRANCE 14

◇ *Une classe Villette*, par F. JAMM 24

◇ *Des quatre opérations à la notion de groupe — Mémoire fondateur de* CAUCHY, par E. KOEHLER 32

◇ *A vos stylos*, par "*L'Ouvert*" 40

◇ *Les publications* I.R.E.M. 42

◇ *Sommaire* III

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : J. LEFORT
◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
Tél. : 88-41-63-00, poste 240
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)* :
90.-F pour l'Alsace
120.-F pour les autres départements
110.-F pour l'étranger
(Chèque à l'ordre de Mr l'Agent Comptable de l'U.L.P. (IREM))
◇ *Disponible à la bibliothèque de l'I.R.E.M.*

INFORMATIQUE ET ENSEIGNEMENT :

HIER, AUJOURD'HUI ET DEMAIN

Claude PAIR

Centre de Recherche en Informatique de Nancy

Propos recueillis et retranscrits par Ghislaine DUFOURD *et Michel* ZURBACH, *lors de l'assemblée générale de la régionale EPI-ALSACE, le 28 mars 1987. Une conférence du Professeur* PAIR *sur un thème proche a été publiée dans un livre "De la didactique à l'évaluation" au CRDP de NANCY.*

Après un voyage dans le temps sur l'histoire de la rencontre de l'informatique avec l'enseignement, nous pourrons nous promener dans l'espace pour voir ce qu'il en est, autant qu'on puisse le dire, de l'informatique dans l'enseignement des autres pays, et terminer, en une troisième partie, par quelques éléments de réflexion sur ce qu'on peut espérer de l'informatique en réponse aux besoins de l'école et aux besoins des élèves. Ce sera là ma conclusion. En effet, trop souvent on s'interroge sur le mode "*qu'est-ce que l'informatique peut apporter à l'enseignement ?* ". Or, il faut plutôt se demander "*quels sont les besoins de l'enseignement ?* " et, à partir de là, "*qu'est-ce que l'informatique peut faire pour satisfaire ces besoins ?* ".

1.— HISTOIRE DE LA RENCONTRE DE L'INFORMATIQUE AVEC L'ENSEIGNEMENT FRANÇAIS

Je citerai quatre étapes : 1970, 1980, 1981, 1985. Remarquons que 1970, c'est il y a plus de 15 ans, c'est la moitié de l'histoire de l'informatique (1948 : premier ordinateur, 1952 : son introduction en France); on a pourtant toujours l'idée que l'informatique dans l'enseignement, c'est tout neuf!

Première étape : 1970

C'est la date du colloque de l'OCDE à Sèvres sur "*L'Enseignement de l'informatique à l'école secondaire*" ; l'introduction de l'informatique dans l'enseignement se place donc dans un cadre international. Dans le rapport de ce colloque, on peut lire : "*Introduire l'enseignement de l'informatique à l'école secondaire permettrait de développer chez les élèves des aptitudes algorithmiques, opérationnelles, organisatrices*". Ce texte, certes, tombe quelque peu dans le travers que je dénonçais

© L'OUVERT 49 (1987)

tout à l'heure : non pas se demander "*est-ce que les élèves ont besoin de capacités algorithmiques ?* ", mais "*l'informatique va introduire à l'école quelque chose de nouveau que sont les capacités algorithmiques ...*" Mais en même temps, je note que son point de vue est culturel, plus que technique : on va développer des aptitudes générales chez les élèves, algorithmiques, opérationnelles, organisatrices. Et ces capacités peuvent d'ailleurs s'opposer à celles qui sont traditionnellement développées à l'école.

En France, la balle est reprise au bond par le Ministère de l'Education Nationale qui crée une mission à l'informatique dont le responsable est Vladimir MERCOUROFF. On se lance assez vite : 1970, sous la présidence de Georges POMPIDOU, c'est la grande période de développement et de modernisation; on ne sait pas encore qu'on va entrer dans une crise économique.

La discussion menée est : "*est-ce que l'informatique doit être une nouvelle discipline ou est-ce qu'elle doit passer à travers les disciplines existantes ?* ". Créer une nouvelle discipline, c'est assez simple en théorie : on crée en CAPES, une agrégation, un corps d'inspection générale, des programmes inspirés de la recherche et de l'enseignement supérieur et on les enseigne. Ne pas en faire une nouvelle discipline, au contraire, permet à l'informatique de pénétrer l'ensemble des disciplines, mais on ne sait pas très bien qui s'en occcupe, on ne sait pas très bien ce qu'on va faire, c'est donc beaucoup plus difficile.

C'est pourtant cette seconde voie qui est choisie. Je crois que, pour des raisons philosophiques, on ne voulait pas former des informaticiens à l'école secondaire, et que, pour des raisons matérielles, on ne voulait pas introduire encore une discipline de plus à laquelle il faudrait attribuer des horaires au détriment de l'histoire, des sciences naturelles, etc...

On définit alors un plan restreint, mais cohérent. Puisqu'on doit introduire l'informatique dans toutes les disciplines, on va chercher comment le faire, et pour bien partir des besoins de l'enseignement, confier cette tâche aux enseignants eux-mêmes. Donc il faut donner à certains enseignants une formation de base : on met au point des formations d'un an, chez les constructeurs, puis dans quatre centres universitaires; on crée aussi une formation légère par l'intermédiaire du CNTE. La recherche pédagogique menée par les enseignants est coordonnée par une cellule informatique de l'INRP.

Se posait aussi le problème de l'équipement, problème difficile parce qu'on ne disposait pas du matériel actuel. Bien sûr, on commençait à avoir des matériels conversationnels — c'étaient des consoles branchées sur un ordinateur qu'on appelait "*mini*" parce que moins énorme que les précédents, mais bien plus gros que les ordinateurs d'aujourd'hui —, mais ils coûtaient relativement cher. De sorte qu'on n'a réussi à équiper que 58 lycées entre 1972 et 1976; cela paraît ridicule maintenant, mais, à l'époque, c'était une expérience importante. D'ailleurs on avait l'idée, sans doute naïve, que l'informatique pouvait aussi se faire sans ordinateur parce que, après tout, les capacités "*algorithmiques, opérationnelles* *et organisatrices*" peuvent s'acquérir en écrivant des programmes sans qu'il soit absolument nécessaire de les passer sur machine. En théorie, parce qu'en pratique, écrire des programmes sans les faire tourner, maintenant personne n'aurait la naïveté de croire que cela va motiver les élèves.

Il fallait enfin un langage adapté aux diverses applications de l'enseignement, c'est-à-dire un langage qui permette de faire du calcul numérique, mais aussi du travail sur des textes : on a inventé le LSE qui existe toujours, qui n'est pas plus mauvais qu'un autre, qui est assez bien structuré mais qui a l'inconvénient d'être limité à l'Education Nationale.

Donc, de 1970 à 1976, un plan tout à fait cohérent avec quelques naïvetés et notamment une sous-estimation très forte de la difficulté à produire des logiciels, sous-estimation d'ailleurs générale en informatique à cette époque : on ne s'était pas encore rendu compte combien il est difficile, non pas d'écrire des logiciels, mais d'obtenir des logiciels qui puissent être utilisés par d'autres.

A partir de 1976, les difficultés commencent à apparaître : difficulté de généraliser, étant donné le coût de l'équipement; difficulté d'évaluer, parce que, selon les établissements, les choses sont extrêmement diverses : ici, club informatique, là, enseignement assisté par ordinateur, etc... Cependant, comme toujours, je crois, dans les innovations pédagogiques, on se fait l'illusion qu'il faut évaluer avec précision avant de généraliser. Mais évaluer quoi? Qu'est-ce que cela veut dire dans un domaine aussi vaste que celui des aptitudes "*algorithmiques, opérationnelles, organisatrices*", étant donné qu'on ne peut pas mettre les élèves sous une cloche où l'on ne ferait que de l'informatique, et que ces capacités, on peut espérer qu'il y a d'autres disciplines, d'autres moyens, pour les développer?

On constate surtout une certaine dérive de l'expérience par rapport à la conception de départ : "*l'informatique est là pour communiquer des capacités générales*", une dérire vers l'EAO, c'est-à-dire un outil d'aide à l'enseignement des diverses disciplines. Je ne prends pas le mot "*dérive*" de façon péjorative, mais tout de même, à l'époque, l'EAO n'est pas de très bonne qualité. Je ne dis d'ailleurs pas qu'il le soit devenu, même si d'importantes améliorations ont eu lieu. Peut-être n'y avait-il pas une réflexion suffisante sur la fécondation réciproque entre l'informatique d'une part, et les disciplines d'autre part. On se contentait trop de transposer sur machine ce qu'on faisait en classe. Ceci est un travers très général de l'informatique : quel que soit le domaine où on l'applique, on commence toujours par essayer de faire faire à l'ordinateur ce qu'on faisait auparavant à la main — c'est ce qui est arrivé par exemple pour l'informatique de gestion —. C'est seulement plus tard qu'on se rend compte qu'en effectuant cette transposition, on ne fait qu'appauvrir les pratiques; cette remarque est particulièrement vraie pour l'enseignement.

Ces difficultés conduisent en 1976 à une mise en veilleuse de cette expérience; on arrête notamment les formations d'un an. Peut-être faut-il dire aussi qu'il y a, à cette époque, une certaines méfiance vis-à-vis de la recherche pédagogique et que, d'autre part, commence la crise économique qui réduit les budgets.

Deuxième étape : 1980

Si on se réfère à la situation du pays et du monde, c'est l'époque des premiers efforts pour dominer la crise et pour voir le rôle que peut jouer l'informatique, pas seulement dans l'enseignement, mais dans l'économie et la société en général. L'informatique est un des éléments qui a provoqué cette crise, parce que, d'une part, elle diminue le nombre d'emplois à cause de toutes les automatisations qu'elle permet, mais surtout, parce qu'elle les transforme, faisant passer d'emplois d'exécution à des emplois de surveillance, de maintenance, de conception.

En même temps que cette crise générale, économique et sociale, se produit la transformation des techniques informatiques, la modification du matériel avec l'arrivée du micro-ordinateur, c'est-à-dire d'un ordinateur beaucoup moins encombrant, beaucoup plus facile à utiliser, beaucoup moins cher, ne nécessitant pas de climatisation, donc qu'on peut mettre beaucoup plus facilement à la disposition du grand public.

Liés à tout cela, le rapport NORA-MINC "*Informatisation de la Société*" — demandé par le Président Giscard d'ESTAING en 1978 — et le rapport de J.C. SIMON "*L'éducation et l'informatique dans la Société*", en 1980. Ces rapports ont plus une vue socio-économique des choses qu'une vue culturelle, au contraire du colloque de Sèvres : l'informatique, c'est très important pour la Société, donc il faut former des gens à l'informatique, ce qui incite à faire de l'informatique une discipline. Le rapport SIMON préconise très précisément une informatique-discipline : autrement dit, il prend le contre-pied du choix qui avait été fait en 1970. C'est d'ailleurs à ce moment que s'est élevée une querelle entre "*informatique-discipline*" et "*informatique, outil d'enseignement*".

Remarquons cependant que si le rapport SIMON (1980) insiste sur "*informatique-discipline*", l'opération "*10 000 micro-ordinateurs*" (1979) accorde une priorité à l'E.A.O.! Les conditions de mise en place de cette opération pilotée par le Ministère de l'Industrie, et notamment la part réduite réservée à la formation des enseignants par rapport aux ressources consacrées au matériel, ont à l'époque provoqué un certain mécontentement. C'est pourquoi les centres universitaires ont été réouverts au début de 1981 pour la formation d'enseignants qui, à leur tour, formeront leurs collègues des établissements équipés, en quatre fois 3 jours. Nous vivons encore largement sur cette idée qui n'est pas sans rappeler le plan Informatique Pour Tous.

Troisième étape : juin 1981

Le Ministre Alain SAVARY gèle l'opération et demande un rapport à Yves LE CORRE et à moi-même. Ce rapport insiste sur la formation des professeurs. Dès 1981, on rétablit donc les stages d'un an, et progressivement on les étend à un centre par académie. On organise les équipes académiques de formateurs qui existent encore aujourd'hui. Nous avions aussi recommandé, entre la formation d'un an pour les formateurs et les concepteurs de logiciels d'une part et une formation légère d'une centaine d'heures pour les utilisateurs, une formation intermédiaire à l'animation; mais cela n'a pas vu le jour. Nous avions aussi insisté sur le fait que les projets devaient venir des établissements. Il ne s'agissait pas de parachuter cette informatique, c'est-à-dire qu'il fallait que les établissements sachent ce qu'ils voulaient faire de leur informatique. C'est donc en fonction de tels choix qu'une formation devait être diversifiée, par exemple, sur 100 heures, 50 heures communes et 50 heures plus modulaires.

Nous avons aussi essayé de désarmorcer cette fameuse querelle "*est-ce que l'informatique est une discipline ou un outil d'enseignement?*" en disant "*cela doit être l'un et l'autre; il faut que l'un appuie l'autre*". Du côté d'une informatique-discipline, on a créé une option informatique en classes de seconde, première et terminale, qui est pilotée par un Comité Scientifique National. Nous avons également recommandé d'introduire l'informatique à tous les niveaux de l'enseignement du second degré, en particulier dans les LEP qui n'en avaient pas bénéficié jusqu'à cette époque. Nous avons été plus prudents quant à l'introduction de l'informatique à l'école primaire.

Nos recommandations sur la fabrication des logiciels ont été appliquées en partie seulement. Il s'agissait de partir des idées des enseignants et de mettre en place un organisme d'industrialisation : c'est le CNDP qui a joué ce rôle, mais de manière imparfaite. Nous avons également été peu suivis lorsque nous avons souligné la nécessité de développer la recherche pédagogique.

L'esprit du rapport, c'est un développement progressif et concerté qui reflète bien l'esprit qui régnait au Ministère de l'Education Nationale en 1981 et pendant les quelques années qui ont suivi. Cette idée de développement progressif et concerté heurtait cependant un certain nombre de gens qui protestaient : "*l'école prend du retard, on n'y fait pas suffisamment d'informatique*". Parallèlement, la baisse des prix se poursuivait, le développement de l'informatique dans les foyers devenait explosif, on passait des micro-ordinateurs aux nano-ordinateurs ou ordinateurs domestiques. Aussi, en 1983, le Ministère annonce-t-il son intention d'implanter 100 000 micro-ordinateurs et de former 100 000 enseignants entre 1983 et 1988.

Quatrième étape : 1985

En 1985, le plan Informatique Pour Tous confirme l'implantation massive de micro-ordinateurs et la formation des enseignants, mais en décidant de tout faire, tout de suite et partout. Avec peut-être, toujours, la naïveté de penser que l'important c'est de mettre en place du matériel et qu'on peut se contenter de formations extrêmement courtes, pour des enseignants qui n'auraient qu'à utiliser des produits tout faits.

Etait-ce raisonnable de décider d'équiper tous les établissements en même temps?

N'aurait-il pas mieux valu concentrer les efforts sur un niveau d'enseignement, le collège par exemple, ce qui aurait permis de mieux former les enseignants et d'acquérir un matériel plus fiable? Si le plan IPT appelle quelques réserves, il est pourtant très positif, surtout par la mise en place de réseaux dont les ressources pédagogiques pourraient être mieux exploitées.

Pour le présent et l'avenir, il est difficile de porter un jugement, car ils se dessinent peu clairement. J'ai quelques inquiétudes quand j'entends déclarer qu'en dehors de quelques types d'utilisation de l'informatique, il n'y a rien de bon. C'est faux et ce n'est pas le rôle de l'administration de fermer des portes. L'organisation d'un concours d'idées de logiciels me semble également un peu naïve, au point où nous en sommes aujourd'hui.

II.— L'INFORMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE DIVERS PAYS

Il n'est pas facile d'en parler. La première difficulté est l'extraordinaire diversité des situations. C'est essentiellement dans les pays d'Europe de l'Ouest et d'Amérique du Nord que l'informatique s'est développée dans l'enseignement. Dans les pays de l'Est, on trouve des projets, assez importants, notamment en URSS, mais on n'a guère dépassé le stade des intentions. Dans les pays en voie de développement, il y a quelques réflexions et énormément de besoins, mais l'informatique risque d'être un miroir aux alouettes du genre "*s'il n'y a pas d'enseignants, mettons des machines à leur place*", alors que pour utiliser des techniques de pointe, il faut au contraire des enseignants mieux formés.

Dans les pays comparables au nôtre, et c'est là une deuxième difficulté, l'organisation de l'enseignement est en général décentralisée, et on trouve, notamment aux USA et au Canada, des situations très variées. Dans la plupart des pays, on a démarré à partir d'initiatives locales et c'est seulement ensuite, quand on s'est aperçu que cette initiative locale ne répondait pas parfaitement à la question, qu'elle était corrigée par des plans nationaux. Les décisions sont en général prises au niveau des districts scolaires et l'Etat est là pour orienter et pour aider. En France, on a plutôt travaillé en sens inverse, mais au bout du compte, il y a une certaine convergence.

Autre caractéristique de ces divers pays : les disciplines jouent un rôle différent de ce qui se passe chez nous; elles sont moins séparées. Il a donc été peut-être plus facile de faire le choix d'une informatique-discipline, souvent liée aux mathématiques, parce que cela n'entraînait pas les mêmes conséquences sur la création de corps de professeurs et d'horaires spécifiques. On a donc fait, plus que chez nous, ce choix d'une informatique-discipline. Cependant, un certain nombre de pays, comme le Danemark par exemple, après avoir fait ce choix, sont revenus à une informatique introduite à travers les disciplines.

La plupart des pays ont commencé par le lycée comme c'était le cas chez nous; ils sont en général beaucoup moins avancés dans le premier degré que nous le sommes. Mais commencer par le lycée et s'en tenir là, cela veut dire "*pas* *d'informatique pendant la scolarité obligatoire*", et aussi "*l'informatique est une matière optionnelle*", avec, en général, la perspective de parvenir, à terme, à une discipline obligatoire.

Aux Etats-Unis et au Canada, il y a pas mal de matériel, mais pas beaucoup plus que chez nous (50 élèves par ordinateur aux USA, 44 au Canada et 60 à 70 en France). Il y a aussi un marché très ouvert de didacticiels, où on trouve de tout, des produits très béhavioristes jusqu'aux produits d'excellente qualité. La vue de l'enseignement y est peut-être moins formelle, plus empirique qu'en France et les qualités extérieures, notamment graphiques, sont un peu meilleures que chez nous. Il faut noter qu'une certaine crainte s'est exprimée aux USA ces derniers temps de voir les enseignants et les étudiants servir de cobayes de l'industrie. Quant à la formation des enseignants, elle semble moins développée : la qualité des enseignants, extrêmement variable, beaucoup moins homogène qu'en France, ne rend pas toujours facile l'introduction de l'informatique.

En Europe, la France me paraît aujourd'hui le pays le mieux placé pour l'extension de l'informatique sur l'ensemble des niveaux d'enseignement, sur la mise en place du matériel et sur la formation des enseignants. Le seul pays comparable est la Grande-Bretagne.

En Grande-Bretagne, pays décentralisé, la décision appartient aux établissements, et les Pouvoirs Publics apportent une aide à l'équipement, d'où un équipement un peu émietté. Au plan national, on trouve une définition de l'offre de formation aux enseignants et un rôle relativement important dans la fabrication des didacticiels. C'est sur ce dernier point que l'Angleterre nous devance : sur les 2000 didacticiels disponibles en Europe, 1200 ont été développés en Angleterre et 700 en France. Nous avons aussi peut-être trop insisté sur des didacticiels "*questions-réponses*", "*communication de connaissances*", alors que les Anglais ont mis l'accent sur des outils comme la simulation, sur des explorations plus diversifiées.

Quant aux autres pays européens, s'il y a une bonne réflexion en Allemagne et en Suisse, cela s'est moins concrétisé qu'en France. Aux Pays-Bas se passent aussi des choses interessantes.

Cependant, presque tous les gouvernements s'interrogent actuellement sur les apports de l'informatique, qu'ils voudraient plus spectaculaires, surtout qu'ils sont confrontés à des problèmes économiques. On est peut-être un peu au creux de la vague. C'est pourquoi cela vaut la peine de récapituler les différents aspects de l'informatique à l'école et de réfléchir aux résultats des interactions de l'informatique et de l'enseignement.

III.— LES DIVERS ASPECTS DE L'INTRODUCTION DE L'INFORMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT

1.— La formation professionnelle à l'informatique

Ce n'est pas l'essentiel du débat d'aujourd'hui : nous allons donc l'écarter rapidement. Je me bornerai à deux observations.

La première : le niveau de recrutement, en informatique comme ailleurs, s'élève rapidement. Ainsi le Bac H, par exemple, a de moins en moins de sens en termes de recrutement immédiat par les entreprises. Même au niveau des techniciens supérieurs (BTS ou DUT), il commence à y avoir une certaine saturation du marché. Il faudra probablement former davantage les professionnels de l'informatique au niveau Bac+4 ou Bac+ 5.

La deuxième : l'informatique fait partie de la compétence de la plupart des métiers, que ce soit du secrétariat, de la gestion ou de la fabrication. Il n'y a pas de doute que tout métier a maintenant peu ou prou une dimension informatique.

2.— Quel rôle peut jouer l'informatique dans l'enseignement général?

On dit volontiers à ce sujet : "*Il faut que tout le monde connaisse l'informatique parce que l'informatique, il y en a partout!*". Il faut bien dire que ce discours, moderniste, un peu triomphaliste, n'est pas tout à fait inattaquable. Après tout, automobile et imprimerie sont aussi partout, et pourtant, dans la formation générale, on n'apprend ni à conduire, ni à imprimer des livres.

C'est cependant un peu plus vrai pour l'informatique, qui est à la fois un auxilliaire de pensée et d'action. Il est donc très important que tout le monde ait une idée sur le "*savoir utiliser*" l'informatique. Mais cela ne va pas de soi, et l'exemple du traitement de texte le montre bien : utiliser ce type de logiciel n'est pas très difficile, mais cela oblige à changer sa manière de concevoir les textes, de façon non linéaire, de raffiner ses plans, non plus à un ou deux niveaux, mais à n niveaux ... Cette efficacité impose qu'on l'apprenne à nos jeunes, et quand je dis "*apprendre*", c'est les mettre dans une situation où ils ont besoin de savoir le faire, puis observer et en tirer des conseils pour les générations suivantes.

Donc tout le monde devrait apprendre "*l'informatique des utilisateurs*", et celle-ci, il nous faut encore beaucoup l'inventer. En disant cela, je sais que je risque de heurter les professeurs, qui n'aiment pas beaucoup enseigner ce qu'ils ne savent pas, et surtout, enseigner les choses à moitié. Or, tous ces logiciels, il faut apprendre à les utiliser sans savoir exactement comment ils sont faits.

Prenons l'exemple de l'analyse de données : son utilisation en histoire ou en économie, dans cette Académie notamment, montre bien qu'on peut apprendre à l'élève la manière dont réagit un logiciel sans pour autant être obligé de démontrer tout ce qu'il y a derrière! Il me semble que cette manière d'apprendre un peu systématique, un peu "*boîte noire*", est fondamentale. Il faut arriver à enseigner des choses sans les analyser complètement, et c'est ce point de vue que la technique apporte par rapport à la science : apprendre à manipuler des outils sans avoir à les analyser en détail.

Ceci dit, une objection surgit, qu'il ne faut pas rejeter d'emblée. Ne risque-t-on pas de conditionner l'élève, en allant trop loin dans cette direction, de le conditionner à réagir en fonction de la machine? Tout dépend du type de logiciel utilisé. Il ne faut pas que l'élève serve la machine, mais au contraire que la machine soit insérée dans le développement de l'élève : elle est un moyen de formation.

On rencontre ici le renversement de perspective annoncé plus haut : ne pas se demander "*ce que l'informatique peut apporter*", mais "*de quoi avons-nous besoin ?*" et "*est-ce que l'informatique peut satisfaire ces besoins ?*".

3.— Où sont les besoins? L'informatique peut-elle contribuer à les satisfaire?

Les besoins sont très largement nés de l'informatique et de tous les "*tiques*" qui sont en train de supprimer des emplois ou de remplacer des emplois d'exécution par des emplois d'une autre nature (surveillance, maintenance, conception ...) qui demandent d'autres qualités : passage du concret à l'abstrait, travail en équipe, sens des responsabilités, autonomie. Toutes ces qualités ne sont pas forcément celles qu'on donne à l'école dans la majorité des cas.

Ce défi considérable — qui conduit à transformer la formation et à en élever le niveau — renvoie à un profond problème de société : notre société pourrait-elle résister à l'augmentation du chômage, à l'allongement de sa durée, au fait que des milliers de gens n'auraient pas d'emploi stable au cours de leur vie active? Si nous ne remédions pas à l'échec scolaire précoce, je ne donne pas cher de notre société : c'est cela le besoin primordial de notre enseignement !

Quels sont les ingrédients de l'échec? Bien sûr, on dit volontiers "*le milieu social*". Certes, mais au niveau des ingrédients cognitifs de l'échec, on peut relever trois choses :
— un retard dans le développement des capacités de raisonnement et de manipulation de la langue écrite;
— un manque d'autonomie et de capacité à résoudre des problèmes;
— enfin, très liée aux précédents, la démotivation.

Tout cela est très imbriqué et nous devrions aujourd'hui confronter les diverses disciplines à cela : telles qu'on les enseigne, aident-elles à remédier à l'échec, ou en aggravent-elles les éléments? Pour la plupart d'entre elles, il y a prescription ... Faisons-le au moins pour l'informatique : que peut-elle apporter en ce sens?

Faisons-le à la lumière des sciences cognitives, ces sciences qui s'intéressent à l'acquisition, à la représentation, à l'organisation, à l'emploi des connaissances. Leurs résultats sont — devraient être ! — bien connus : le savoir n'est ni un ensemble de réflexes, ni un simple stockage de connaissances, c'est une construction structurée d'éléments de connaissances reliés entre eux, et, d'autre part, de stratégies d'emploi. Il se construit par activités et conflits, par étapes successives qu'il ne faut pas brusquer. Résultats indiscutables, mais trop peu connus.

Revenons donc aux ingrédients de l'échec envisagés plus haut et partons de la motivation.

3.1.— Informatique et motivation

Là, je peux être formel : toutes les expériences montrent que lorsque l'on introduit l'informatique dans une classe, on observe un très grand changement dans la motivation, et notamment auprès des élèves en échec et des élèves de milieu modeste — ce sont souvent les mêmes d'ailleurs ! — Il y a trois raisons à cela :
— l'ordinateur, objet moderne, est valorisant en lui-même;
— c'est un objet que l'on peut commander, et ces élèves qui sont en échec, quand ont-ils l'occasion de commander quelqu'un ou quelque chose?
— enfin, avec l'ordinateur, et c'est là le plus important, la faute change de caractère : ce n'est plus une faute au sens moral du terme — le terme même de "*faute*" est révélateur — mais plutôt une erreur qu'on a à découvrir et qu'on peut alors corriger aisément, sans qu'elle laisse de trace matérielle.

Tout le problème est de maintenir cette motivation. Cet intérêt est tout à fait lié à l'activité et à l'autonomie de l'élève, donc au type de didacticiel. Si ce sont des didacticiels où il suffit d'écrire des mots dans des trous, on peut penser que la motivation va disparaître rapidement.

Autre problème : quel transfert de cette motivation aux autres disciplines? Il est très lié à l'articulation des activités qu'on va faire exécuter aux élèves. Il ne faut pas avoir peur dans un premier temps de faire réaliser des activités qui n'apparaissent pas comme scolaires, des jeux par exemple, qui permettent aux élèves d'avoir cette motivation forte et de prendre la machine en main. Et puis on passe à des jeux visant à développer des capacités précises, et, progressivement, si possible à la demande des élèves eux-mêmes, à des didacticiels liés aux disciplines qu'on enseigne. Il y a une très bonne manière d'y parvenir : il suffit de mettre sur la disquette des jeux et des didacticiels; l'élève voyant s'afficher sur le menu tout ce qu'il peut faire, aura, dans beaucoup de cas, la curiosité d'aller y voir.

3.2.— Informatique et langue écrite

Partons d'une constatation : les élèves en échec, s'ils ont souvent des difficultés par rapport à la langue écrite, n'ont pas en général une compétence linguistique orale bien différente de celle des élèves qui réussissent. Pourquoi cela? Quelle est la différence entre l'écrit et l'oral?

L'écrit est un objet qui existe en dehors du scripteur et sur lequel on peut agir. L'une des choses qui manquent aux élèves en échec, c'est ce sentiment qu'ils peuvent agir sur des textes et que cela peut être intéressant; qu'un texte, ce n'est pas quelque chose qu'on écrit et auquel on ne touche plus, mais aussi quelque chose qu'on regarde et par rapport auquel on prend de la distance. Ce qui manque souvent à l'élève en échec, c'est la distance par rapport à la langue : il utilise la langue pour agir plus que pour communiquer de manière réfléchie. De fait, avec les moyens traditionnels, toute action sur le texte se traduit par des ratures, et il faut recommencer, ce qui n'est pas motivant.

Il me semble que l'ordinateur peut apporter beaucoup. Il y a là un outil, notamment avec le traitement de texte, qui permet de transformer un texte sans que cela se voie. On peut déplacer un paragraphe, corriger des fautes d'orthographe sans tout recopier. Traditionnellement, le seul outil que nous pouvons donner à nos élèves est le cahier de brouillon : ils peuvent corriger une fois, mais pas vingt ! Quant à construire un texte à partir d'un plan, c'est possible si on ne le raffine qu'à un seul niveau, mais le plan qu'on raffine et qu'on raffine encore, cela devient infaisable avec les moyes habituels, alors que c'est bien davantage faisable avec les outils de traitement de textes. Cela l'est plus encore avec des outils qu'on connaît encore peu, qui sont des outils de recherche et d'organisation d'idées, qui permettent de travailler de la manière dont vous voudriez sûrement que vos élèves travaillent, c'est-à-dire de manière descendante en affinant petit à petit leurs idées.

3.3.— Informatique et lecture

Le problème de la lecture se matérialise, lui, d'abord au niveau de l'école maternelle et de l'école primaire. On sait bien que là aussi, il y a un retard de nature sociale : toutes les familles n'ont pas la même familiarité avec l'écrit. On n'a pas dans toutes les familles autant de livres, on ne fait pas autant lire les enfants, on ne leur montre pas autant de mots. Or, avant d'apprendre à lire, il est clair qu'il faut déjà savoir quelque chose sur l'activié de lecture. On n'apprend pas à lire si on n'a pas l'idée qu'on lit de gauche à droite (dans notre pays, du moins ...), qu'il existe des mots, qu'ils sont séparés par des espaces ... Toutes choses qui paraissent totalement évidentes et qui ne le sont pas pour des enfants qui n'ont pas été familiarisés avec l'écrit.

L'ordinateur peut-il faire quelque chose pour cette activité de lecture qui consiste à associer un texte, une signification, un son, et à relier cela à l'écriture? Je crois que oui. Inventons des solutions motivantes. Vous mettez par exemple sur écran d'ordinateur une liste de quatre mots, et lorsque l'enfant montre l'un de ces mots apparaît le dessin correspondant, ou l'ordinateur fait de la musique, ou toute autre action liée aux mots. Quatre mots, ce n'est pas autre chose que quatre commandes; vous voyez bien la motivation et l'association de l'écrit à la signification, parce que là, la signification est une action.

Quant au son, je pense que dans quelques années on aura dans les classes des ordinateurs qui feront de la synthèse vocale de qualité acceptable, et on pourra jouer sur l'aspect du son.

Pour l'écriture de gauche à droite : si l'élève tape sa commande sur le clavier, il verra bien qu'elle s'inscrit sur l'écran de gauche à droite. Si sa commande comporte deux mots, il verra bien qu'il faut mettre un espace : cela aura une signification opératoire. Et quand je disais que l'on apprend par l'action, j'espère vous avoir montré qu'il y a de nombreuses idées pour que la lecture devienne une action, ce qui, vous l'avouerez, n'est pas si facile avec les méthodes habituelles d'apprentissage.

3.4.— Informatique et formation au raisonnement

C'est déjà plus difficile. En particulier, on dit beaucoup que "*la programmation forme le raisonnement*". Je suis assez persuadé que c'est vrai, mais je dois dire que je n'en ai jamais eu de preuve. Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas essayer, mais je crois qu'il faut faire très attention. Actuellement, aucune étude sérieuse n'a été réalisée; la raison en est sans doute que le développement des capacités logiques ne se fait pas en quelques dizaines d'heures. Or, les expériences sont faites sur un très court laps de temps et il est alors très difficile de prouver quoi que ce soit. Il y a une certaine plausibilité des apports de l'informatique au développement du raisonnement, mais je n'irai pas au-delà.

Dans certains cas, n'y a-t-il pas même un certain danger à vouloir sauter trop vite les étapes? Il y a tout intérêt, par exemple, à décomposer la programmation, de l'observation du programme existant à l'écriture de programmes simples, puis plus complexes. Les instructions officielles de 1985 ont un peu de quoi effrayer — programmes du cours moyen, par exemple — en ce qu'elles comportent le risque de creuser encore plus les écarts entre les élèves qui possèdent les capacités logiques adéquates et ceux qui ne les possèdent pas. Donc je conseillerais une certaine prudence. Avant de faire — même du LOGO — très vite, à l'école primaire, à l'école maternelle, j'aimerais qu'on étudie à quelles capacités cela correspond chez les enfants.

3.5.— Informatique, autonomie, résolution de problèmes

L'informatique va dans le sens d'une activité de l'élève, et on n'apprend que par l'activité. Toutefois, la qualité des didacticiels et la manière dont ils sont intégrés à la pédagogie ont une importance primordiale.

Prenons l'exemple des premiers didacticiels, dans la tradition behavioriste : il s'agissait de développer des réflexes (un stimulus — une réponse), en s'arrangeant pour que la réponse soit presque toujours juste, parce que la théorie veut qu'autrement on ne renforce pas le réflexe. De tels didacticiels ne sont pas toujours inutiles, mais ils ne sont pas conformes à l'idée d'un savoir structuré qui se construit par une exploration active de l'élève.

Utilisons plutôt des logiciels d'exploration, ce que certains appellent des "*micromondes*". Par exemple, en mathématiques, vous avez, au collège, besoin d'apprendre à transformer des expressions, à factoriser, à faire des développements, etc ... C'est à la fois un peu de nature réflexe, mais aussi de nature exploratoire. Quelle est la manière standard de l'apprendre à l'école? C'est d'analyser tout en détail — on enseigne la commutativité, l'associativité, etc ... — ce qui permet alors de justifier des transformations plus complexes. C'est ainsi que l'on apprend à résoudre des équations, par exemple, et puis, en désespoir de cause, cela se traduit en fin d'année par "*tu fais passer un nombre d'un membre dans un autre et tu changes de signe*", c'est-à-dire la recette.

A mon avis, la démarche inverse devrait être expérimentée : l'ordinateur peut aider en mettant à disposition des transformations de niveaux divers, de moins en moins globales, de plus en plus analysées, permettant de justifier les transformations de niveau plus élevé utilisées précédemment. Voilà donc un endroit où l'informatique pourrait renouveler complètement la pédagogie.

IV.— CONCLUSION

Finalement, ce que l'informatique apporte le plus, c'est la nécessité de réfléchir à la pédagogie et la possibilité d'avoir des pédagogies beaucoup plus variées. Ce n'est pas étonnant : quand on a introduit l'informatique en calcul numérique, cela a remis en cause les méthodes de calcul; lorsqu'on l'a introduite dans les entreprises, cela a amené à revoir les méthodes de gestion et l'organisation du travail.

Tant qu'il s'agit de faire des didacticiels transposant le rôle du professeur, on n'y gagne rien. Un ordinateur est beaucoup moins intelligent qu'un professeur : on dit volontiers que dans un cerveau il y a 10 puissance 14 ou 10 puissance 15 bits alors que sur un très gros disque il y en a 10 milliards. En gros, un cerveau de professeur, c'est 100 000 fois plus fort qu'un ordinateur. Et ce n'est pas tout ! Sentir qu'un élève ne comprend pas, c'est vraiment en dehors des possibilités des capteurs les plus intelligents!

On est gagnant, au contraire, si on invente des situations pédagogiques nouvelles. L'élève est aujourd'hui dans deux situations possibles : ou bien il est en classe avec 30 copains, et il ne peut pas beaucoup parler ni agir, ou bien il est seul devant sa feuille, et il ne bénéficie d'aucune réaction ! Essayons d'inventer des situations intermédiaires : pour un élève ou un petit groupe d'élèves. Essayons de construire les logiciels utiles dans cette situation. C'est à ce moment là que l'informatique aura tout son effet.

Ce ne sera pas forcément facile à mesurer : ou bien on évalue des "*queues de cerises*", ou bien on évalue des choses déterminées par de très nombreux facteurs, de telle sorte que toute évaluation scientifique est exclue. Que faire? Beaucoup d'expériences, dont on tirera une plausibilité suffisante. Faire des choses, les échanger, c'est vraiment ainsi que nous progresserons.

PRINCIPES DE LA SYMÉTRIE PERTURBÉE

Michel MENDES FRANCE

LA SYMÉTRIE ET SES PERTURBATIONS

J'ai toujours été impressionné par le tableau amusé que dépeint Pol KRANF du Monsieur qui n'a pas d'habitudes :

> *"Il déposa symétriquement son couteau et sa fourchette, plaça son assiette et son verre dans l'axe des boutons de son gilet, s'assura que la bouteille et la carafe étaient à égale distance du moutardier ..."*

Depuis la lecture de ce court passage, j'ai acquis une sorte de méfiance, voire d'horreur de la symétrie. Je me propose de montrer ici qu'en perturbant légèrement la symétrie, on obtient des structures riches en potentialité.

Tout d'abord, quelques définitions. Les mathématiciens appellent "*mot*" toute suite finie de lettres. Un mot M n'est donc pas nécessairement signifiant, comme par exemple

$$aax\ ,\ tfcfgg.$$

Un mot est lu naturellement de gauche à droite et si on veut insister sur le sens de lecture, on pourra adopter une notation fléchée. Si M désigne le mot aax, on écrira indifféremment

$$M = aax \quad ou \quad \overrightarrow{M} = aax,$$

mais aussi

$$\overleftarrow{M} = xaa.$$

M et $\overrightarrow{M}$ représentent donc le même mot alors que $\overleftarrow{M}$ désigne le mot lu à l'envers. Un mot tel que $\overrightarrow{M} = \overleftarrow{M}$ s'appelle un palindrome ("*été*"; "*tu l'as trop écrasé, César, ce port salut*").

L'opérateur de symétrisation S que nous définissons maintenant agit comme un miroir sur un mot $\overrightarrow{M}$:

$$S(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}.$$

$S(\overrightarrow{M})$ est donc un mot deux fois plus long que $\overrightarrow{M}$ et est obtenu en juxtaposant $\overrightarrow{M}$ et son opposé $\overleftarrow{M}$. Ainsi

$$S(aax) = aaxxaa.$$

On peut appliquer l'opérateur S deux fois consécutivement

$$S(S(\overrightarrow{M})) = S(\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}.$$

En abrégé on écrit $S^2(\overleftarrow{M})$. Une troisième application donne

$$S^3(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}$$

et une infinité d'applications conduit à une suite infinie périodique

$$S^\infty(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\overrightarrow{M}\overleftarrow{M}\dots$$

Répétition oppressante de l'ordre préétabli. C'est le NO FUTURE des punks qui fait écho aux paroles désabusées de QOHÈLÈT :

> "Ce qui a été sera
> Ce qui s'est fait, se fera
> Rien du tout de neuf sous le soleil."

Pour casser la symétrie et rompre l'obsédante répétition, il suffit de "*perturber*" l'opérateur S. On se donne un mot $P = \overrightarrow{P}$ fixé une fois pour toute et on considère l'opérateur S_p qui transforme $\overrightarrow{M}$ en

$$S_p(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}.$$

P s'appelle la perturbation. Appliquez S_p deux fois

$$S_p^2(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}\overrightarrow{P}\overrightarrow{M}\overleftarrow{P}\overleftarrow{M}$$

puis une infinité de fois

$$S_p^\infty(\overrightarrow{M}) = \overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}\overrightarrow{P}\overrightarrow{M}\overleftarrow{P}\overleftarrow{M}\overrightarrow{P}\overrightarrow{M}\overrightarrow{P}\overleftarrow{M}\dots$$

Les symboles M et P alternent régulièrement, mais observez la suite des flèches. Elles suivent une loi plus complexe. La structure semble absente. Le reste de l'article est consacré à l'étude de cette suite.

PAPIERS PLIÉS

Plier du papier est l'activité traditionnelle du fonctionnaire qui, selon une croyance bien ancrée, passe son temps à confectionner des cocottes. C'est aussi un art très développé au Japon sous le nom d'origami, et qui se répand en France sous l'impulsion du mouvement français des plieurs de papiers – M.F.P.P. – (voir figure 1).

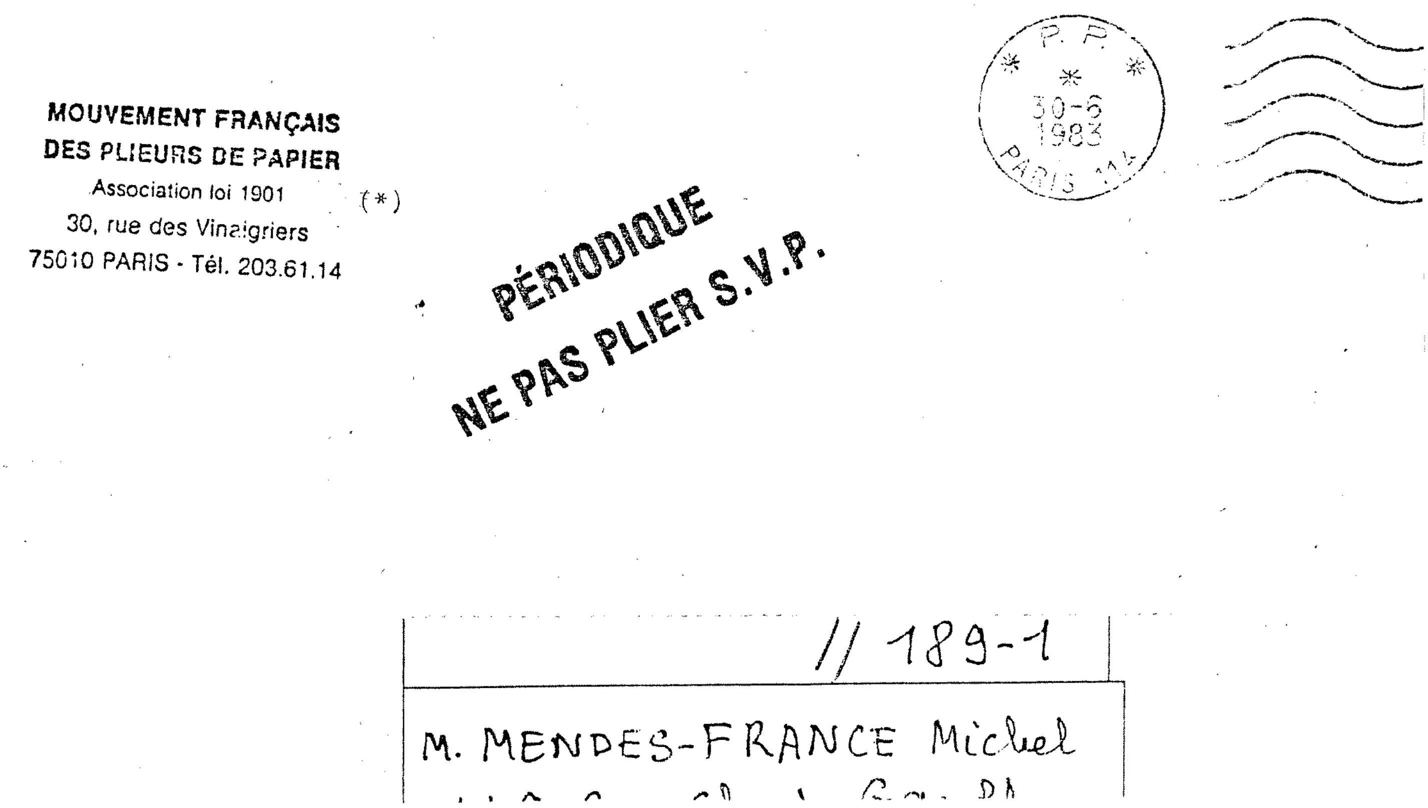


Figure 1

(*) L'adresse actuelle du Mouvement Français des Plieurs de Papiers est : 56 rue Coriolis 75012 Paris.

Notre propos est autre. Nous voulons illustrer un aspect mathématique moins bien connu et qui pourtant ne manque pas de charme.

Pliez une feuille de papier en deux en rabattant la moitié droite sur la moitié gauche comme on l'a indiqué sur la figure 2 où seule est représentée la tranche de la feuille.

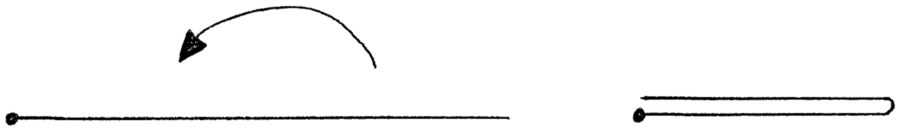


Figure 2

Répétez l'opération une seconde fois (figure 3) et maintenant dépliez la feuille à angle droit. Vous obtenez alors une ligne brisée contenant $2^2 = 4$ côtés (figure 4).

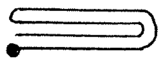


Figure 3

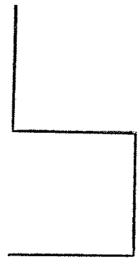


Figure 4

Revenons à la situation de la figure 3 et repliez la feuille une 3ᵉ fois sur elle-même (figure 5). Par dépliage à angle droit,

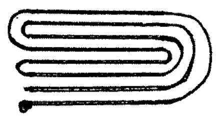


Figure 5

on obtient maintenant une ligne brisée constituée de $2^3 = 8$ côtés, chaque côté mesurant la moitié de ceux obtenus à la seconde étape. En multipliant toutes les longueurs par 2, on aboutit à la figure 6.

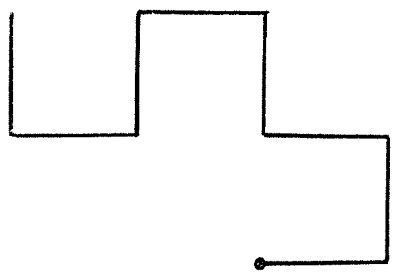


Figure 6

Imaginons un mobile qui décrit la ligne brisée de la figure 6. Partant du point O, on le voit tourner successivement deux fois à gauche, une fois à droite, deux fois à gauche, puis enfin deux fois à droite. Son parcours peut donc être symbolisé (codé) par la suite finie

$$ggdggdd$$

(g = gauche; d = droite). Remplaçez la lettre g par la flèche $\rightarrow$ et la lettre d par la flèche $\leftarrow$. Vous obtenez la suite

$$\rightarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow$$

qui coïncide avec la suite des flèches du mot $S_p^2(\overrightarrow{M})$ du premier paragraphe.

Une fois convaincu de ce fait et de son extension, nous pouvons replier la feuille de papier quatre fois sur elle-même, cinq fois, ... et pourquoi pas, une infinité de fois. Même si physiquement cela est impossible, rien ne nous empêche de faire l'opération mentalement dans un monde idéal.

Cette feuille infiniment grande, infiniment mince et infiniment repliée sur elle-même peut maintenant être dépliée à angle droit. Apparaît alors une ligne brisée infinie d'allure très complexe et dont on a représenté les 1024 premiers côtés sur la figure 7. Cette courbe, appelée courbe du dragon semble avoir été découverte par le physicien HEIGHWAY et a été étudiée par les deux mathématiciens américains Ch. DAVIS et D. KNUTH.

Imaginons un mobile qui décrirait la courbe. Il suivrait exactement les instructions fournies par la suite des flèches $S_p^\infty(\overrightarrow{M})$ à condition de remplacer "$\rightarrow$" par g et "$\leftarrow$" par d :

$$ggdggddgggd\ldots$$

Voici donc interprétée (expliquée?) la suite des flèches en termes de pliage de papier. Où est le gain pourra-t-on demander? Le gain réside en ce que nous avons maintenant une représentation visuelle de la suite des flèches qui nous permettra de voir certaines propriétés jusque là cachées.

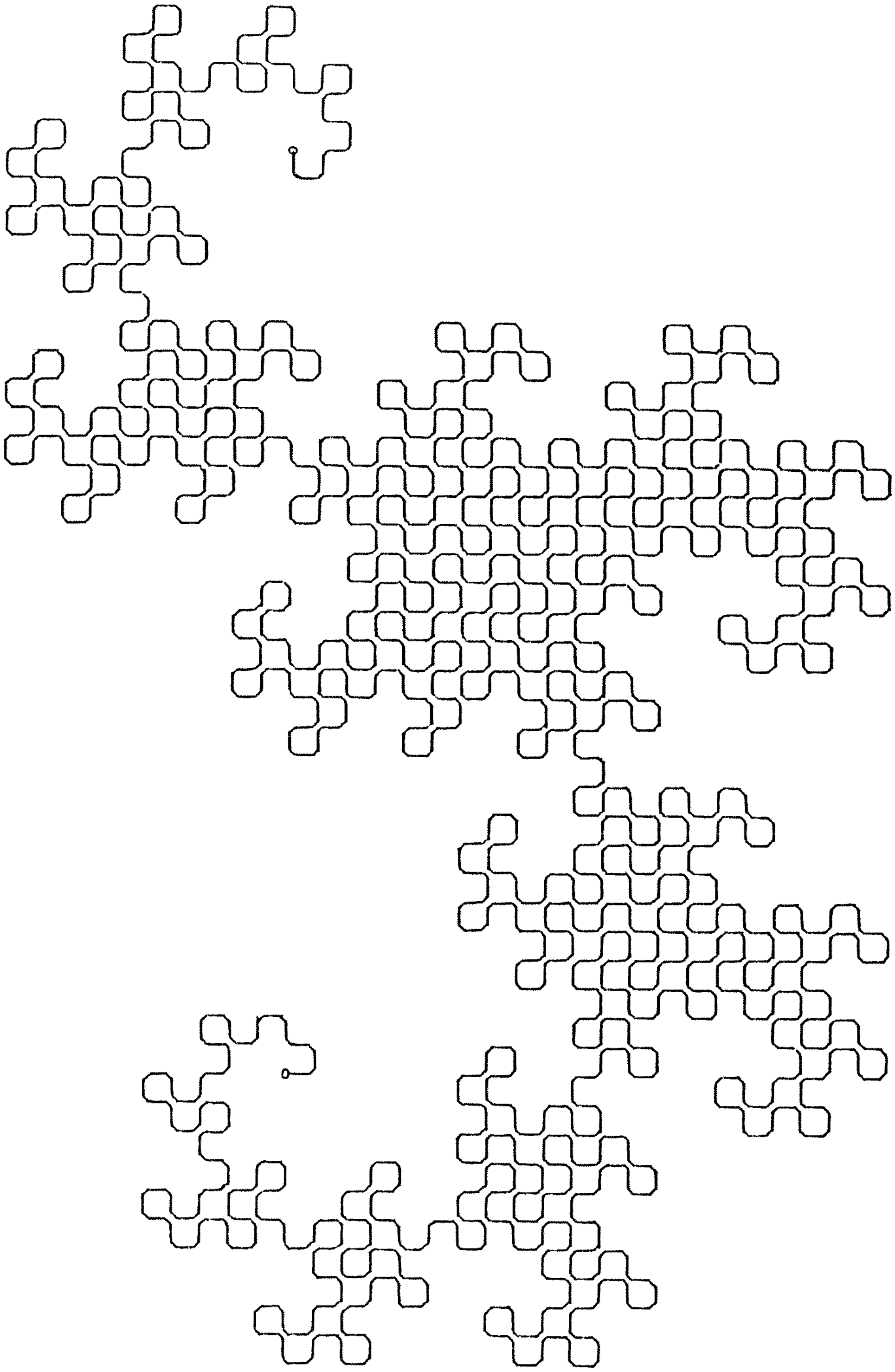


Figure 7

LES COURBES DU DRAGON

La figure 7 nous a donné un exemple de courbe du dragon. Mais il y en a d'autres dont nous étudierons globalement les propriétés. Rappelez-vous, à la toute première étape, nous avons rabattu la moitié droite de la feuille de papier **par dessus** la moitié gauche. Nous dirons que nous avons fait un pliage **positif**. Nous aurions tout aussi bien pu plier la feuille par en **dessous**, ce que nous appellerons un pliage **négatif** (figure 8).

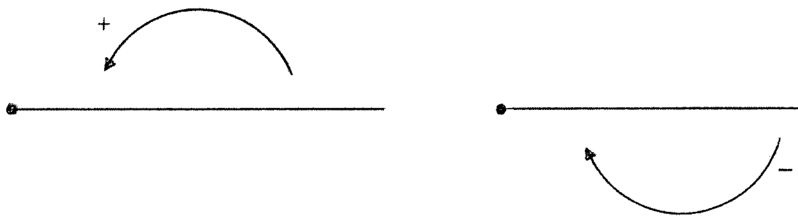


Figure 8

Maintenant à chaque étape, nous avons le choix entre pliage positif ou pliage négatif. Après 1, 2, 3, ... ou une infinité de pliages dans un sens ou dans l'autre, et par dépliage à angle droit, on aura engendré une nouvelle courbe du dragon d'allure différente. Ainsi par exemple, si vous pliez alternativement la feuille dans le sens positif puis dans le sens négatif, trois fois de suite vous aurez engendré la ligne polygonale représentée sur la figure 9, codée par la suite :

$$dggdddggdgggddg\dots$$

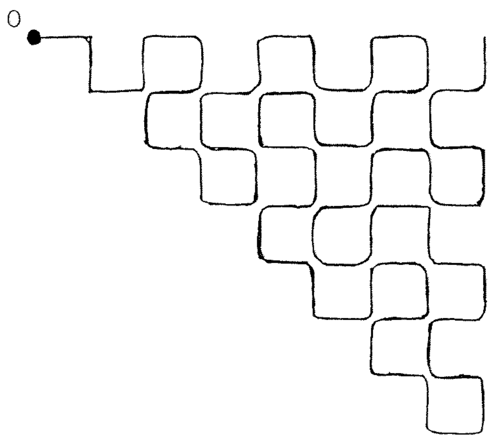


Figure 9

Faites votre choix de pliages et construisez vous-même votre propre courbe du dragon. Elles ont toutes la même propriété à savoir qu'elles sont non intersectantes. Chaque côté de la ligne brisée n'est parcouru qu'une seule fois par un mobile qui décrirait la courbe. Cette propriété est tout-à-fait remarquable et illustre bien le fait que la suite des flèches de $S_p^\infty(\overrightarrow{M})$ n'est pas du tout au hasard. Tout ceci bien entendu se démontre et ceux qui seraient intéressés par les preuves devraient consulter l'article de Ch. Davis et D. Knuth [Number Representations and Dragon

Curves I, II. Journal Recreational Mathematics, vol. 3, 1970, p. 61-81 et 133-149]. Ils y trouveront entre autres une mine de courbes curieuses. On pourra aussi consulter un article plus récent auquel j'ai contribué et qui tout en étendant et précisant les résultats précédents établit un lien inattendu entre pliage et nombres transcendants [F. M. DEKKING, M. MENDES FRANCE, A.J. van der POORTEN. Folds! Mathematical Intelligencer, vol. 4, 1982, p. 130-138, 173-181, 190-195].

NOMBRES TRANSCENDANTS

On sait qu'un nombre algébrique est un nombre réel ou complexe x qui annule un polynôme à coefficients entiers $a_0, a_1, \ldots, a_d$ non tous nuls

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

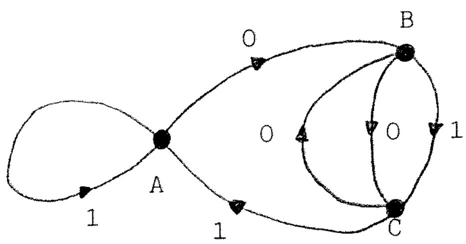
Ainsi sont algébriques les nombres entiers, les nombres rationnels, les nombres quadratiques ($\sqrt{2}$ par exemple), $i = \sqrt{-1}$, etc ... Il existe cependant des nombres non algébriques. On les appelle transcendants. Tels sont $\pi, e, \ell n(2)$,... Il est difficile de montrer qu'un nombre donné est transcendant bien que "*presque tous les nombres*" le sont (l'ensemble des nombres transcendants a la puissance du continu alors que l'ensemble des nombres algébriques n'est que dénombrable).

Considérons une courbe du dragon arbitraire. Notons la suite infinie des instructions g et d qui décrivent la courbe. En codant g par 1 et d par 0, on obtient une suite infinie de 0 et de 1, qu'on peut interpréter comme le développement binaire d'un nombre réel. Ainsi que l'ont prouvé J. LOXTON et A. van der POORTEN, ce nombre est transcendant.

Ce dernier résultat est un cas particulier d'une conjecture liée aux automates et que nous décrivons maintenant.

AUTOMATES

Nous ne décrirons ici qu'une sous-classe d'automates. Un automate est défini par la donnée d'un nombre fini d'états notés $A, B, C, \ldots$. L'un des états est l'état initial, disons A.



$A \to a$
$B \to b$
$C \to a$

Figure 10

De chaque état partent deux flèches 0 et 1 qui convergent sur 2 autres états pas nécessairement distincts de l'état d'origine. Enfin une fonction de sortie applique l'ensemble des états sur un ensemble fini $\{a, b, \ldots\}$. Dans l'exemple de la figure 10, A et C sont envoyés sur a et B sur b.

L'automate transforme tout entier $n \geq 0$ en l'un des symboles $a, b, \ldots$ de la façon suivante. Prenons par exemple le nombre "*dix neuf*" qu'on écrit en base 2 : 10011. Partant de l'état initial, on suit les instructions 1,0,0,1,1 qui envoient successivement l'automate de l'état A aux états A, B, C, A, A. L'état final étant A, on lit a. Ainsi l'automate envoie "*dix neuf*" sur a. Plus généralement, l'entier n s'envoie sur $a(n)$ où $a(n)$ est l'un des symboles a, b. On dit que la suite $\big(a(n)\big)$ est automatique. Toute suite engendrée par un automate est dite automatique. On montre aisément que les suites ultimement périodiques sont automatiques. Mais elles ne sont pas les seules. La suite engendrée par l'automate de la figure 11 coïncide avec la suite des flèches $S_p(\overrightarrow{M})$, (a est la flèche $\rightarrow$, b est la flèche $\leftarrow$).

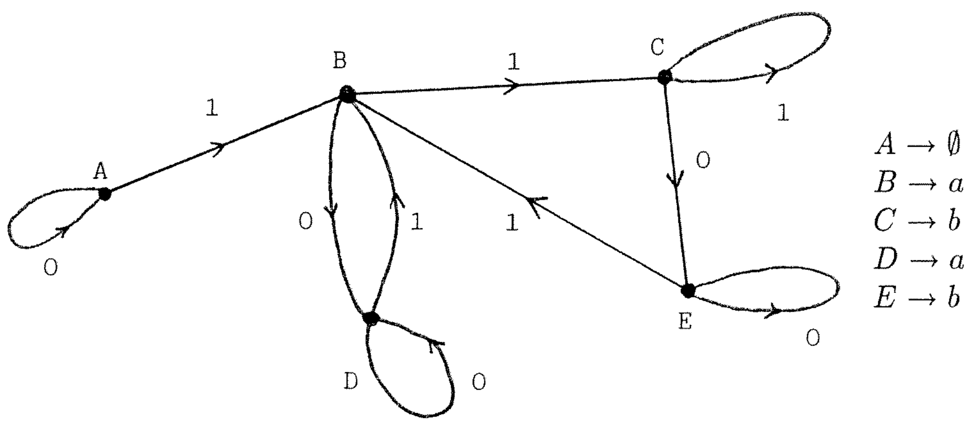


Figure 11

Un automate est donc essentiellement un ordinateur sans mémoire.

La conjoncture à laquelle nous faisions allusion à la fin du paragraphe précédent est la suivante : un nombre réel dont le développement binaire (ou décimal) est automatique est soit un nombre rationnel (développement ultimement périodique), soit un nombre transcendant. Cette conjecture est partiellement démontrée puisqu'elle a été établie pour une grande classe d'automates qui contient en particulier l'automate de la figure 11. Pliez une feuille de papier une infinité de fois et vous aurez un nombre transcendant. Une des conséquence frappante de la conjecture est que les décimales de $\sqrt{2}$ (ou de tout autre nombre réel algébrique irrationnel) ne peuvent s'obtenir par un automate. En d'autres termes, une machine "*simple*" ne pourrait calculer les décimales de $\sqrt{2}$. Ces décimales seraient "*au hasard*".

UNE PREUVE PAR L'ABSURDE

L'histoire ne s'arrête pas là et il y a encore beaucoup de développements possibles ainsi qu'on pourra le lire dans l'article précité Folds. Mais je crains d'abuser de la patience du lecteur; il est temps de conclure.

Nous étions parti du concept statique de symétrie. La perturbation en a enrichi la structure par l'introduction d'une certaine irrégularité certes limitée, et qui s'est révélée extrêmement féconde. Désordre créateur, c'est bien là le thème défendu par le philosophe Umberto Eco dans son Œuvre Ouverte : la simplicité et l'évidence ne valent rien, tout du moins dans le domaine artistique et littéraire. Une œuvre doit nécessairement être mystérieuse, mal définie, peut-être même inachevée, comme en devenir perpétuel. Elle doit être trouble.

Permettez-moi d'apporter, si besoin est, une dernière et ultime preuve à la thèse selon laquelle le désordre est riche. Il s'agit d'une preuve par l'absurde, une preuve *a contrario*. Ecoutez le Professeur Kitaïgoroski, physicien soviétique qui conclut son livre "*L'Ordre et le Désordre dans le Monde des Atomes*" par la sentence suivante :

> "*L'auteur s'est même risqué à affirmer que toute déviation de la vérité artistique dans les œuvres littéraires des auteurs médiocres peut être considérée comme une notable déviation de l'ordre.*"

RÉFÉRENCES

[1] Davis (Ch.) - Knuth (D.). — Number representations and dragon curves, *J. Recreational Math.*, t. **3**, 1970, p. 61–81; 133–149.

[2] Dekking (F.M.) - Mendes France (M.) - van der Poorten (A.). — Folds, *Mathematical Intelligencer*, t. **4**, 1982, p. 130–138; 173–180; 190–195.

[3] Eco (U.). — *L'Œuvre Ouverte - Coll. Points.* — Paris, Seuil—1965.

[4] Kitaïgoroski (A.). — *L'ordre et le désordre dans le monde des atomes.* Moscou, Mir—1980.

[5] Kranf (P.). — Le Monsieur qui n'a pas d'habitudes, in Humour 1900, présenté par Carrère (J.C.), J'ai Lu 1963, p. 90.

UNE CLASSE VILLETTE

Francis JAMM

La Cité des Sciences et de l'Industrie (C.S.I.) de la Villette accueille des classes pour une durée de une à deux semaines. C'est la classe Villette de la Première S (option informatique) du L.E.G.T. Jean Mermoz de Saint-Louis que présente cet article.

Le thème en était : les mathématiques, outil pour mesurer le monde.

Il s'agissait de voir comment l'outil mathématique permet de modéliser une situation. Il y avait un autre fil directeur; montrer aux élèves diverses approches de la science : conférences, films, manipulations, expériences, jeux, art, recherche documentaire, utilisation de logiciels.

Le séjour (cinq jours) était encadré par les professeurs de mathématiques et de sciences physiques. Chaque jour les élèves avaient un programme précis de ce qu'ils devaient voir ou faire.

Voici les principaux sujets traités.

MIROIRS PARABOLIQUES

Deux grands paraboloïdes se font face, espacés de vingt mètres. Expliquer par un graphique pourquoi deux personnes situées chacune au foyer d'un paraboloïde et se tournant le dos peuvent, dans le brouhaha, dialoguer sans élever la voix. Expliquer également pourquoi une personne située entre les deux paraboloïdes entend assez bien le dialogue des deux autres. La définition focale de la parabole avait été donnée en classe et les élèves avaient démontré que les rayons parallèles à l'axe de symétrie se concentraient au foyer. Sur le site de la Villette se trouve un radiotélescope qui aurait permis une application de cette propriété. Malheureusement il n'était pas accessible.

TRIGONOMÉTRIE

Triangulation

Un appareil (hors d'usage) permet de mesurer la parallaxe des étoiles. Utiliser cette idée pour mesurer la distance de l'observateur (situé sur une plateforme) à un poteau situé au loin. Vérifier le résultat en mesurant au sol la distance séparant les projections orthogonales des deux points.

Harmoniques

Un dispositif permet d'additionner des sinusoïdes en faisant varier l'amplitude et en choisissant des périodes multiples l'une de l'autre. La courbe résultante apparaît sur un écran et on entend le son correspondant.

INTRODUCTION AU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Le chemin le plus court n'est pas le plus rapide

Deux billes parcourent deux trajectoires différentes (ci-contre). Ayant observé que celle qui parcourt le chemin le plus long arrive la première, l'élève devait :
— donner une explication qualitative du phénomène
— tenter de mesurer la longueur de la trajectoire courbe en l'assimilant à une succession de segments. Puis, en calculant le temps mis par la bille pour parcourir chaque segment retrouver le résultat par le calcul.

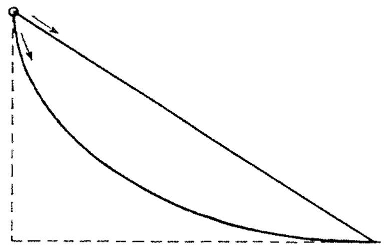


Figure 1

Calcul de l'aire d'une surface quelconque

Un logiciel permet de construire une courbe fermée quelconque et ensuite il montre à l'aide de découpages rectangulaires de plus en plus fins comment en évaluer l'aire.

LES FRACTALES

Un logiciel présente les principales fractales et permet d'en fabriquer. L'élève devait trouver la formule permettant de calculer la longueur d'une courbe à chaque étape et étudier sa limite.

BULLES DE SAVON

La base technique permet (en principe) de réaliser des polyèdres par soudure de fils de laiton. On plonge ces polyèdres dans de l'eau savonneuse (le mélange glycériné de la Villette est remarquable) et on admire le résultat.

Ultérieurement les élèves durent démontrer que, dans le cas du cube, la forme obtenue (voir dessin n° 2) a des dimensions qui minimisent son aire.

Si l'on enferme une bulle d'air dans la pellicule savonneuse, on obtient la configuration suivante (voir dessin n° 3). Les élèves durent également déterminer l'aire de cette pellicule en fonction du côté du petit cube central.

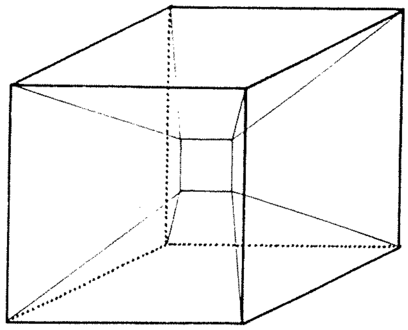


Figure 2

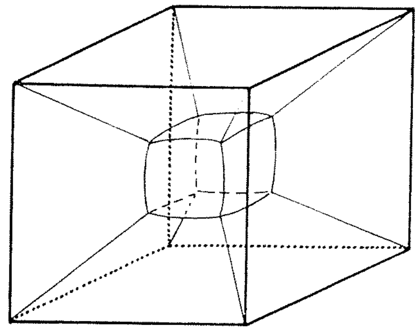


Figure 3

On constate que, dans le cas d'un polyèdre approchant la sphère, la surface obtenue correspond simplement aux faces du polyèdre.

En plongeant dans l'eau savonneuse deux plaques transparentes reliées par trois chevilles (ou plus) on fait résoudre par la nature le problème des autoroutes de FERMAT. La question a été reprise en classe, avec l'outil mathématique et le point de TORICELLI retrouvé.

PYTHAGORE

Admirer la démonstration du théorème de PYTHAGORE par le principe des vases communicants.

L'INFINI

Visionnement d'un court dessin animé sur le paradoxe d'ACHILLE et de la tortue (revu à la sauce d'UDERZO & GOSCINY). Ceci faisait suite à une présentation en classe de l'évolution de la notion d'infini (grand et petit) au cours des âges.

MORPION TRIDIMENSIONNEL

Il s'agit tout simplement de jouer au morpion en dimension trois, grâce à une structure cristallographique cubique où des boules s'allument quand un joueur introduit leurs coordonnées. Les élèves devaient noter les coordonnées des boules jouées et, en cas de victoire, montrer par la géométrie analytique, que les quatre boules gagnantes étaient alignées sur une droite intersection de deux plans.

PAVAGES DU PLAN

Comme illustration du cours sur les isométries j'ai profité de la classe Villette pour montrer des diapositives présentant les dix-sept manières de paver le plan.

Une application des pavages de l'espace à la cristallographie aurait été possible mais nous avons manqué l'occasion.

D.A.O. (Dessin Assisté par Ordinateur)

La C.S.I. possède un intéressant logiciel de D.A.O. qui a été présenté aux élèves tant dans ses possibilités professionnelles que dans ses possibilités géométriques (construction de la droite d'EULER ou des tangentes à deux cercles par exemple).

LOGIQUE BINAIRE

Les fonctions logiques ET, OU, NON sont présentées sous forme de circuits hydroliques. Un additionneur binaire (basé sur le même principe des circuits hydroliques) permet de voir comment un ordinateur réalise une addition à l'aide des seules opérations logiques ET, OU, NON. On propose deux nombres, et la suite des opérations élémentaires nécessaires à leur addition se déroule sous vos yeux.

FILMS

Les élèves ont vu plusieurs films : planétarium de la C.S.I., un petit film sur les galaxies et l'histoire de l'univers, le film de la Géode sur la tectonique des plaques et un montage réalisé à partir de prises de vues scientifiques (ralenti sur le vol des insectes, accéléré sur la croissance des plantes, films en infrarouge en lumière rasante, endoscopies, etc ...). Notons également une série de quatre films, présentant l'évolution de l'idée que les hommes se sont faite de l'atome à travers des dialogues contradictoires mettant en scène des personnages historiques (depuis DÉMOCRITE jusqu'à Jean PERRIN). Des professeurs de physique assistaient à cette projection qui fut suivie d'une discussion. Il fut intéressant pour les élèves de découvrir que la science progresse par des débats aussi passionnés, houleux et indécis que ceux liés aux autres activités humaines.

Citons encore en vrac : la robotique, les problèmes de projection (belle présentation des anamorphoses), les coniques. Notons également en physique, deux belles illustrations du principe de conservation de la quantité de mouvement : on peut manipuler un fauteuil spatial, et un logiciel permet de diriger une fusée pour un voyage Terre-Lune. Les élèves ont également pu suivre une présentation du manège inertiel.

La C.S.I. possède une fort belle médiathèque, avec un système de recherche informatisé très bien fait (quand il fonctionne). Nous avions prévu de faire effectuer une telle recherche par les élèves, malheureusement le système était en panne.

Naturellement, les élèves avaient également la possibilité de déambuler à leur guise dans la C.S.I. pour voir ce qui les intéressait et qui n'entrait pas dans le cadre du thème choisi.

Bien entendu certaines de ces activités pouvaient être réalisées en classe; mais j'ai profité de la classe Villette pour tout concentrer et lui donner ainsi un côté séminaire intensif.

On ne peut pas donner un emploi du temps type; mais en moyenne les élèves étaient à la C.S.I. cinq à six heures par jour. Un jour ils ont même travaillé jusqu'à une heure du matin à la M.J.C. où nous logions pour terminer la construction des polyèdres dont on avait besoin le lendemain. Seulement trois demi-journées furent consacrées à Paris, car ces élèves y étaient déjà venus l'an passé lors d'un voyage de classe au cours duquel germa l'idée de cette classe Villette.

Comme on le voit les activités furent très variées, nécessitant une plus ou moins grande participation des élèves. On peut dire que l'un des objectifs, montrer de multiples approches de la science, a été atteint. Pour ce qui est d'avoir montré que les mathématiques imprègnent toute activité scientifique le bilan est naturellement plus difficile à réaliser.

Il était demandé aux élèves de se débrouiller avec les outils mathématiques à leur disposition pour essayer d'appréhender les situations auxquelles ils étaient confrontés. Dans certains cas, l'explication était simplement qualitative dans d'autres cas leur bagage mathématique leur permettait (seuls ou avec mon aide) de maîtriser le problème. Faire fonctionner les mathématiques en situation pour montrer leurs possibilités d'utilisation est, me semble t-il, dans l'esprit actuel des programmes. Cette démarche fort intéressante est exigeante, car elle nécessite d'une part, de posséder un savoir-faire mathématique et d'autre part d'arriver à extraire d'une situation concrète le mécanisme mathématique sous-jacent. Cela dit, il n'est pas dans mon propos de réduire les mathématiques à n'être que la servante des autres disciplines en gommant totalement la construction axiomatique; mais durant la classe Villette c'est plutôt le côté pragmatique qui a prévalu.

Quelques mots à propos de la C.S.I.

Laissons parler les gens de la Villette :

> *"La Cité des Sciences et de l'Industrie a pour vocation de sensibilier la population dès son plus jeune âge au développement de la science, aux applications technologiques et aux perspectives industrielles".*
> *"La Villette : une nouvelle façon d'ouvrir les yeux, d'apprendre, de s'étonner, d'écouter et de s'émouvoir. Un lieu de création et de loisirs, de surprises et de jeu".*

La Villette n'est pas le Palais de la Découverte du XX^{e} siècle. Elle n'a pas de but spécifiquement pédagogique. La réaction première de l'enseignant voyant la façon dont sont présentées certaines notions est souvent négative. Il n'y a en général guère d'explications. On met les gens face à une situation qui pose un problème scientifique mais sans leur donner les clefs pour l'élucider. Les gens repartent alors soit sans avoir vu le problème posé, soit avec leur propre explication (ou avec celle de leur progéniture); et lorsque l'on tend l'oreille le résultat n'est parfois pas triste!

On est également obligé de noter que de nombreux stands (*) sont hors service ou n'ont jamais fonctionné.

D'autre part, certains choix sont surprenants. Pour les surfaces de tension minimale reliant les arètes d'un polyèdre, le cube, pourtant spectaculaire, n'est pas présenté. Les pavages d'ESCHER sont présentés uniquement dans le cas hyperbolique et non pas dans le cas du plan euclidien où il a pourtant fait de forts belles choses. Les

(*) Environ 30 %, juste milieu entre les dires du Ministre de la Recherche (59 %) et ceux du Président de la C.S.I., Mr. LEVY (15 à 20 %). Voir l'article du "*Monde*" dans son numéro du 4 septembre 1987.

lois de KEPLER sur le mouvement des planètes sont représentées par une bille se déplaçant en spirale sur la face interne d'un entonnoir (d'où le commentaire d'un visiteur : "*C'est un trou noir*"). Les coniques sont présentées comme intersection d'un demi-cône avec un plan ce qui fait que l'hyperbole n'a qu'une branche.

En fait, les élèves ont détourné de leur objectif initial certains stands pour réaliser une activité liée au projet. Un tel détournement est tout à fait dans l'esprit de la C.S.I., et il est quasiment inévitable pour une classe Villette.

D'UN POINT DE VUE PRATIQUE

Pour tout renseignement :

Cité des Sciences et de l'Industrie
Service Education
75930 PARIS Cedex 19
Tél. : 40 05 74 11

La classe Villette est précédée d'une session de formation pour les accompagnateurs (durant les vacances). Cette session est indispensable à l'élaboration du projet avec l'équipe pédagogique de la Villette dont un membre parraine la classe. Chaque classe peut venir avec son projet.

A titre indicatif le coût de la classe Villette a été de 940 F par élève. Cette somme se décompose ainsi :

voyage + carte orange .... 295 F
entrées (C.S.I. (80 F), théâtre, exposition) .... 120 F
hébergement (4 nuits) .... 200 F
repas (sauf deux dîners) .... 200 F
(les repas de midi peuvent être pris à la cantine de la C.S.I.)
encadrement (2 professeurs – 1020 F/24) .... 45 F
stage de préparation (2 professeurs – 1680 F/24) .... 70 F
divers (téléphone, matériel) .... 10 F

La participation directe de chaque famille a été ramenée à 325 F grâce aux actions entreprises par les élèves (2 lavages de voitures, 4 ventes de pâtisseries au marché, vente de 84 kg de pralinés). La classe Villette fut également l'objet d'un P.A.E.

Nous avons tout organisé par nous-même, mais la Fédération des Œuvres Laïques propose un forfait tout compris qui est environ 30 % plus cher et qui offre des prestations, qu'après un examen détaillé nous n'avons pas cru devoir retenir.

En avril 87 les classes Villette pouvaient accéder à la C.S.I. en dehors des heures d'ouverture au grand public; d'ailleurs la fréquentation hors congés scolaires est raisonnable. Notons que la médiathèque offre un remarquable lieu de travail. Des activités à la base technique ou à l'extérieur de la C.S.I. (musées, entreprises) peuvent être organisées par l'équipe pédagogique de la Villette.

Commentaires de la rédaction

La Cité des Sciences et de l'Industrie (C.S.I.) suscite des commentaires largement contradictoires. En fait tout dépend du plan sur lequel on se place.

Pour Monsieur tout-le-monde qui visite en touriste et en famille la cité, le gigantisme des manipulations et l'absence de commentaire explicatif frappent son imagination et lui permettent de trouver une quelconque explication au phénomène constaté sans risque d'être contredit. Pour lui, si certaines expériences sont en panne, cela importe peu puisqu'il est venu à la Villette sans but défini.

Pour le collègien, le lycéen ou l'amateur éclairé qui se posent des questions, il n'est pas facile de trouver une réponse. Les guides ou hôtesses d'accueil ne connaissent guère autre chose qu'un commentaire appris par cœur.

Pour l'enseignant venant avec sa classe, il est rageant de constater que de nombreuses expériences sur lesquelles il comptait sont en panne, l'obligeant ainsi à des accrobaties pour tenir ses élèves.

Or, c'est sur l'accueil, la longueur des queues, la qualité de la restauration, le pourcentage de manipulations en état de marche ... que le public juge la C.S.I. Des progrès ont été faits mais beaucoup reste à faire.

Par ailleurs, au sein de la C.S.I. le meilleur côtoie le pire. Si, par exemple, tout le monde tombe d'accord pour louer la Géode tant au niveau architectural, qu'au niveau des programmes présentés, nombreux sont ceux qui déplorent la pauvreté intellectuelle des objets proposés à la vente dans la boutique.

Cet état actuel n'est qu'une lointaine conséquence des décisions initiales :

* Il n'y a jamais eu explicitation de la finalité du projet, chaque gouvervement nommant un nouveau responsable qui avait tout juste le temps de modifier l'organisation avant d'être remplacé.

* La création de la C.S.I. a été imposée contre l'avis de spécialistes des musées scientifiques (Palais de la Découverte, Muséum d'Histoire Naturelle, Musées Zoologiques et Centres Scientifiques de province) dont on a refusé ensuite d'entendre les conseils.

* L'argent a coulé à flots pour les études et la création. L'unité financière était la dizaine de kilo-francs. Une manipulation proposée à moins de 10 000 francs était acceptée sans discussion; des contrats d'étude ont été payés sur des sujets qui avaient déjà fait l'objet d'études.

* Initialement, il ne devait pas y avoir de démonstrateurs. Il a fallu l'expérience de JANUS et le taux important de vandalisme pour qu'on revienne à une conception plus saine.

* La politique de sous-traitance pour la fabrication s'est traduite par une absence de contacts entre les concepteurs et les réalisateurs. Un certain nombre d'expériences sont de ce fait incomplètes ou réduites à des manipulations presse-

bouton (alors que l'idée initiale était l'interactivité).

On comprend que la Cour des Comptes ait beaucoup trouvé à redire. L'expérience étant bonne conseillère, on peut espérer que les responsables sauront intervenir pour que ces erreurs de jeunesse disparaissent et que la C.S.I. s'ouvre plus largement sur la province (par exemple dans l'accueil des groupes ou dans le prêt de documents de la médiathèque). Une saine gestion financière, une volonté de l'Etat et une équipe de responsables œuvrant dans la durée sont des conditions nécessaires pour faire du musée de la Villette un succès éclatant sur tous les points.

DES QUATRE OPÉRATIONS À LA NOTION DE GROUPE

Mémoire fondateur de CAUCHY

Etienne KOEHLER

Si la théorie des groupes est une découverte des temps modernes, elle est néanmoins l'héritière directe d'une longue ligne d'évolution. Son émergence est étroitement imbriquée entre la théorie des nombres et la résolution algébrique des équations, qui en est une des premières applications. En retour, la généralisation de la théorie de GALOIS *sera une importante voie de recherche en théorie des groupes.*

Les problèmes de calcul font partie, à côté des problèmes géométriques, des thèmes fondateurs des mathématiques. Au fil des temps, la notion de nombre s'est considérablement agrandie : les grecs ne concevaient pas les rapports comme des nombres. Néanmoins, l'insuffisance des nombres entiers à décrire le monde avait été prouvée, marquant l'échec du Pythagoricisme — la rumeur publique déclare même que la révélation de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ était frappée de la peine de mort (ce qui laisse songeur quand on pense au flot actuel des publications en théorie des nombres).

Pour des raisons essentiellement commerciales, à partir du Moyen Age, fut développée l'écriture décimale et la pratique des quatre opérations; celles-ci maîtrisées, les frontières furent élargies du côté des nombres et on vit apparaître les nombres négatifs et fractionnaires pour calculer des parts d'héritage, des bilans entre pertes et profits, des rentes ... Les nombres "*imaginaires* " apparurent à la même époque pour des extractions de racine et les quatre opérations s'étendirent naturellement à ces nouveaux nombres sans qu'on en comprenne toujours très bien les fondements. L'exploration des nouveaux territoires prit deux cents ans.

GAUSS fut le premier à en sortir, tout d'abord en faisant des calculs sur les congruences (déjà esquissés par EULER) puis, étape fondamentale, en définissant une opération qui ne portait plus sur des nombres, mais sur des classes de formes quadratiques.

CAUCHY, lecteur assidu des '*Disquisitiones arithmeticae*' dont GAUSS est l'auteur, fut le second à définir une opération non-numérique et posa à cette occasion les fondations de la théorie des groupes finis. Cette opération, la composition des substitutions, fut étudiée dans un double mémoire présenté à l'Institut en 1812 et publié en 1815 dans le journal de l'Ecole Polytechnique : '*Mémoire sur le* *nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*'.

L'intérêt de ce mémoire est double. Outre qu'il étend la notion d'opération à des objets mathématiques qui ne sont pas des nombres, il apporte une contribution importante au problème de la résolution par radicaux des équations de degré supérieur à 4.

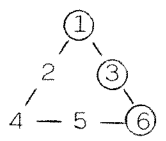
Pourtant, l'origine de ce mémoire se trouve dans les recherches de CAUCHY afin de démontrer un théorème de FERMAT, à savoir que "*tout nombre entier est la somme de n nombres n-gonaux*" (*). LAGRANGE avait prouvé que tout nombre était la somme de quatre carrés et GAUSS avait réglé le cas des nombres triangulaires grâce à sa théorie des formes trinaires. CAUCHY s'efforça de généraliser certains résultats de la théorie des formes, en particulier ceux concernant les déterminants. Il établit en général la formule $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, ainsi que d'autres sur des déterminants extraits, trouvées indépendamment par BINET. Ces résultats sont présentés en relation avec le calcul des substitutions dans la deuxième partie du mémoire déjà cité. Mais c'est la première partie qui prend toute son importance dans une perspective historique, tant pour la généralisation de la notion d'opération que pour les travaux futurs de GALOIS.

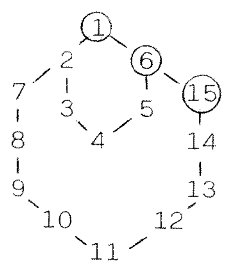
Dans cette première partie, CAUCHY démontre le théorème suivant : "*Le nombre des valeurs différentes d'une fonction non-symétrique de n quantités, ne peut s'abaisser au dessous du plus grand nombre premier p contenu dans n, sans devenir égal à 2* ". C'est une généralisation du cas particulier $n = 5$ démontré par RUFFINI qui avait pour cela explicité les cent vingt éléments de $\mathfrak{S}_5$ (**).

L'idée directrice de CAUCHY est d'étudier $\mathfrak{S}_n$ muni de la composition des substitutions et la méthode qui lui permet ensuite de conclure a été utilisée par GAUSS : former une partition d'un groupe selon un de ses sous-groupes. C'est ainsi qu'en

(*) Un nombre n-gonal est un nombre de la forme $p + (1/2)p(p-1)(n-2)$ avec p entier. Cette appellation résulte d'une disposition géométrique des naturels successifs sur le pourtour de n-gones emboîtés :

n=3 :1, 3, 6, 10 ...sont des nombres triangulaires
n=6 :1, 6, 15, 28 ...sont des nombres hexagonaux.





(**) $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de n éléments. Cet ensemble contient $n!$ éléments.

préliminaire CAUCHY redémontre le théorème de LAGRANGE, à savoir qu'une fonction K de n variables étant donnée, le nombre de valeurs différentes de la fonction ne peut être qu'un diviseur du produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (*cf.* annexe 1). Puis CAUCHY définit ensuite ce qu'il appelle une substitution (*cf.* annexe 2). La démonstration du théorème s'organise alors en trois temps. Pour faciliter l'exposé, nous utiliserons les notations modernes suivantes : nous noterons σ une substitution, $< \sigma >$ l'ensemble des puissances successives de σ (donc le sous-groupe engendré par σ), Inv K l'ensemble des substitutions laissant K invariante et I la substitution identique.

a) Dans un premier temps, CAUCHY énonce le fait qu'il existe m tel que $< \sigma >= \{I, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{m-1}\}$ avec $\sigma^m = I$, m étant appelé le degré de σ. Représentant alors les puissances successives de σ sur un cercle, il établit que si m et r sont premiers entre eux, $< \sigma^r >=< \sigma >$ et qu'en général $< \sigma^r > \subset < \sigma >$. Il compare ensuite deux partitions de $\mathfrak{S}_n$ d'une part au moyen des classes d'équivalence de la relation $\mathfrak{R}$:

$$\sigma_1 \, \mathfrak{R} \, \sigma_2 \Longleftrightarrow \sigma_1^{-1}\sigma_2 \in \text{Inv } K$$

(et soit M le nombre d'éléments d'une classe), d'autre part au moyen de celles de la relation $\mathfrak{R}'$:

$$\sigma_1 \, \mathfrak{R}' \, \sigma_2 \Longleftrightarrow \sigma_1^{-1}\sigma_2 \in < \sigma > .$$

Il suppose que σ est de degré p premier, donc qu'il y a $n!/p$ classes pour $\mathfrak{R}'$. Alors : $M > n!/p \Longrightarrow \exists r, \sigma^r \in \text{Inv } K$ donc $\sigma \in \text{Inv } K$, d'où sa conclusion. Si le nombre de valeurs différentes prises par K (c'est-à-dire $n!/M$) est strictement inférieur à p, alors K est invariante par toute substitution de degré p.

b) Dans un deuxième temps, il montre que toute substitution circulaire d'ordre p $(a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} a_3 \xrightarrow{\sigma} a_4 \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\sigma} a_p \xrightarrow{\sigma} a_1)$, notée $(a_1 a_2 \ldots a_p)$, est de degré p; que toute substitution d'ordre 3 est le produit de deux substitutions d'ordre p (dont nous noterons l'ensemble S_c^p) et que si K est invariante par toute substitution de S_c^p elle l'est aussi par toute substitution de S_c^3.

c) Dans un troisième temps, il remarque que $(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta)(\beta\gamma)$ et que $(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\beta\gamma)(\beta\gamma\delta)$ c'est-à-dire, en langage moderne, que $\mathfrak{A}_n$ (ensemble des substitutions paires que CAUCHY déterminera dans la deuxième partie de son mémoire) est engendré par S_c^3, résultat déjà prouvé par RUFFINI pour $\mathfrak{S}_5$. Il en déduit que si $S_c^3 \subset \text{Inv } K$ alors $\mathfrak{A}_n \subset \text{Inv } K$ et, en faisant agir la transposition (1 2), que K prend alors deux valeurs différentes si K est non-symétrique et si le nombre de ses valeurs est inférieur à p.

Pour terminer cette première partie, CAUCHY établit le cas $n = 6$ d'un théorème que présentera en 1845 J. BERTRAND : "*Si $n \geq 5$, toute fonction de n quantités ayant plus de deux valeurs distinctes en admet au moins n*". La relation d'équivalence que CAUCHY envisage pour cela porte sur les indices $1, 2, \ldots n$ et non plus sur les substitutions, ce qui le conduit à une démonstration par exhaustion des cas nettement moins simple que celle qui précède.

Ce mémoire est essentiel pour les travaux de GALOIS dont les résultats sont trouvés, exprimés et montrés avec des groupes de substitution. En outre GALOIS, exprimant ses résultats dans ce qu'on appelle '*le premier mémoire*' cite explicitement CAUCHY : "*Or un groupe de permutations d'un nombre premier n de lettres ne peut se réduire à n permutations, à moins que l'une de ces permutations ne se déduise de l'autre par une substitution (circulaire) de l'ordre n (voir le mémoire de M.* CAUCHY — *Journal de l'école, 17)*". On voit ici que GALOIS est pressé par le temps : le terme circulaire a été rajouté et la *circularité* n'est nullement évidente.

CAUCHY cite simplement le fait qu'une substitution circulaire d'ordre n (n entier quelconque) est de degré n et (*cf.* annexe 3) que les orbites d'une substitution de degré n comportent n permutations.

Néanmoins, le résultat annoncé par GALOIS se déduit du texte de CAUCHY : dans la seconde partie CAUCHY montre que toute substitution est le produit de substitutions circulaires à supports disjoints, c'est-à-dire portant sur des ensembles disjoints d'indices, qui permutent donc entre elles. On voit alors (n étant premier) que chaque substitution circulaire est de degré n. Ces substitutions portant sur n lettres, elles ont toutes le même support (ces n lettres) et puisqu'elles ont aussi des supports disjoints, il n'y en a qu'une, c'est la une c'est-à-dire la substitution initialement donnée.

Les recherches en théorie des groupes ne commenceront à se développer qu'à partir de 1845. CAUCHY reprend vers cette époque ses travaux abandonnés depuis trente ans. LIOUVILLE publie en 1846 les manuscrits de GALOIS, jusque là restés inédits et à partir de 1861 commencent les travaux de JORDAN, pour la plupart réunis dans son '*traité des substitutions*'.

Quant à la théorie de GALOIS, il faut attendre les années 1910 pour que E. STEINITZ lui donne sa forme actuelle et mette en évidence les notions de séparabilité et de clôture algébrique. "*La théorie de* STEINITZ *permet aussi de représenter pour des corps quelconques la théorie de* GALOIS *comme l'avait déjà fait* DEDEKIND *pour les corps de nombres algébriques, le groupe de* GALOIS *devenant un groupe d'automorphismes d'un corps au lieu d'un groupe de permutations des racines*" (J. GUÉRINDON et J. DIEUDONNÉ, dans '*Abrégé d'histoire des mathématiques*').

ANNEXE 1

Théorème de LAGRANGE

Cela posé, K étant une fonction quelconque de l'ordre n, désignons par N le produit $1 . 2 . 3 \ldots n$, et par

$$A_1, \; A_2, \; A_3 \ldots\ldots A_N,$$

les diverses permutations en nombre égal à N que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3 \ldots n$, N sera le nombre total des valeurs de la fonction K relatives à ces diverses permutations.

Supposons que, parmi les valeurs possibles

$$K_1, \; K_2, \; K_3 \ldots\ldots K_N$$

de la fonction donnée, plusieurs deviennent égales entre elles, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \&c\ldots.$$

Désignons par M le nombre total des valeurs K_α, K_β, K_γ, &c.... que l'on suppose ici égales entre elles. Les permutations relatives à ces valeurs, ou A_α, A_β, A_γ, &c..., seront aussi en nombre égal à M. Pour déduire toutes ces permutations d'une seule, par exemple, de A_α, il suffira d'échanger entre eux, d'une certaine manière, les indices qui, dans cette permutation, occupent certaines places; et l'on conçoit facilement que si ces changemens n'altèrent en rien la valeur correspondante K_α de la fonction K, cela tient non pas à la valeur même des indices, mais à la place que chacun d'eux occupe dans la permutation dont il s'agit.

Cela posé, soit K_λ une nouvelle valeur de K, qui ne soit pas égale à K_α; et désignons toujours par A_λ la permutation relative à K_λ. Si l'on fait subir simultanément aux indices qui occupent les mêmes places dans les permutations A_α et A_λ les changemens dont on vient de parler, la seconde permutation A_λ se trouvera successivement changée en plusieurs autres A_μ, A_ν, &c...., pendant que la première A_α deviendra successivement A_β, A_γ, &c.... ; et d'après le principe énoncé ci-dessus, il est évident que l'équation

$$K_\alpha = K_\beta = K_\gamma = \&c\ldots.;$$

entraînera celle-ci,

$$K_\lambda = K_\mu = K_\nu = \&c\ldots.$$

Il est aisé d'en conclure que, parmi les valeurs de K relatives à toutes les permutations possibles, savoir,

$$K_1,\ K_2,\ K_3\ldots\ldots K_N,$$

le nombre de celles qui seront équivalentes à K_λ, sera le même que le nombre des valeurs équivalentes à K_α. Par suite, si l'on représente par R le nombre total des valeurs essentiellement différentes de la fonction K, M étant le nombre des valeurs équivalentes à K_α, RM sera le nombre total des valeurs relatives aux diverses permutations. On aura donc $RM = N$, et par suite

$$R = \frac{N}{M}.$$

Ainsi R, ou le nombre des valeurs différentes de la fonction K ne peut être qu'un diviseur de N, c'est-à-dire, du produit $1.2.3\ldots n$.

ANNEXE 2

Voici les notations de CAUCHY concernant les substitutions et les permutations :

Soient A_1 et A_2 deux permutations de $1, 2, 3, \ldots n$; la substitution $\binom{A_1}{A_2}$ consiste à "*remplacer respectivement les indices compris dans la permutation* A_1*, par les indices correspondans compris dans la permutations* A_2" c'est-à-dire qu'en confondant A_i et la bijection associée, la substitution précédente vaut en notation actuelle $A_2A_1^{-1}$ — puis il définit le produit (c'est-à-dire la composition) de deux substitutions, son sens d'écriture étant l'inverse de celui adopté actuellement; ainsi :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [A_3A_2^{-1}](A_2A_1^{-1}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

ANNEXE 3

Supposons que l'on applique plusieurs fois de suite à la permutation A_1 la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, en sorte que cette substitution étant appliquée à la permutation A_1, donne pour résultat la permutation A_2; qu'étant appliquée à la permutation A_2, elle donne pour résultat la permutation A_3, &c...... La série des permutations

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \&c......$$

sera nécessairement composée d'un nombre fini de termes; et si l'on représente par m ce même nombre, et par A_m la dernière des permutations obtenues, la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ appliquée à cette dernière permutation reproduira de nouveau le terme A_1. Cela posé, si l'on range en cercle, ou plutôt en polygone régulier, les permutations

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3\ .....\ A_{m-1},\quad A_m$$

de la manière suivante,

$$\begin{array}{ccc} & A_m\ A_1\ A_2 & \\ A_{m-1} & & A_3 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

toutes les substitutions que l'on pourra former avec deux permutations prises à la suite l'une de l'autre et d'orient en occident dans le polygone dont il s'agit, seront équivalentes entre elles et à $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$: et toutes celles que l'on pourra former avec deux permutations séparées l'une de l'autre par un nombre r de côtés dans ce même polygone, seront équivalentes à la puissance r de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$.

Il suit de ces considérations, 1.° que la puissance m de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ est équivalente à la substitution identique $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$; 2.° que x étant un nombre entier quelconque, $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx}$ sera encore une substitution identique; 3.° que, dans la même hypothèse, les substitutions $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^{mx+r}$ et $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^r$ sont équivalentes; 4.° que la notation $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}^0$ indique une substitution identique; 5.° que, parmi les substitutions dérivées de $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$, les seules qui soient différentes entre elles sont les puissances dont l'exposant est plus petit que m, ou, ce qui revient au même, les substitutions équivalentes à ces puissances, savoir;

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix} \ldots\ldots \begin{pmatrix} A_1 \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Le nombre de ces substitutions est comme celui des permutations A_1, A_2, A_3 ..... A_m égal à m. Ce nombre sera appelé le *degré* de la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$. Si l'on applique plusieurs fois de suite la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ à la permutation A_1, on commencera par obtenir la suite des permutations A_1, A_2, A_3..... A_m; et lorsqu'on sera parvenu à ce point, les mêmes permutations se reproduiront dans le même ordre d'une manière périodique. C'est pourquoi je dirai que les permutations précédentes forment une période qui correspond à la substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$. Cela posé, le degré d'une substitution $\begin{pmatrix} A_s \\ A_t \end{pmatrix}$ indique à-la-fois la plus petite de ses puissances positives qui soit équivalente à une substitution identique, et le nombre des permutations comprises dans la période qui résulte de l'application de la substitution donnée à une permutation déterminée.

PROBLÈME 1

Enoncé

Pour toute famille de réels positifs $c_1, \ldots, c_p$ tels que $c_1^3 + \cdots + c_p^3 \geq 7$, montrer que le cube unité (fermé, d'équation $0 \leq x, y, z \leq 1$) est inclus dans une réunion de p cubes fermés, parallèles aux axes, de côtés respectifs $c_1, \ldots, c_p$. Etablir aussi que 7 ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

Solution

Monsieur Cyril MÉHÈME nous a proposé l'excellente solution que voici.

On supposera tous les nombres donnés c_i plus petits que 1 (sans quoi le problème est trivial). Posez sur une table le plus gros des cubes donnés, puis, sur celui-ci, le plus gros des cubes restants, etc ...; construisez ainsi une pile de cubes de plus en plus petits. Arrêtez-vous dès que la hauteur atteint ou dépasse 1, et recommencez une deuxième pile, etc ...; vous rangez ainsi les p cubes donnés en q piles dont chacune, sauf peut-être la dernière, a une hauteur au moins égale à 1. Soient $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_q$ les côtés des plus petits cubes de chacune des piles, ou plutôt les épaisseurs des piles mesurées à l'altitude 1 : a_q doit être pris nul si la dernière pile est moins haute que 1. Grâce à cette convention il est clair que la $k^{i\grave{e}me}$ pile contient un parallélépipède de dimensions $a_k \times a_k \times 1$. **Le problème sera donc résolu si l'on montre que des carrés de côtés $a_1, \ldots, a_q$ peuvent toujours être arrangés de façon à recouvrir le carré unité**. Or le volume total de la $k^{i\grave{e}me}$ pile est majoré par $a_{k-1}^2 + a_k^2$ (avec la convention $a_0 = 1$, le premier terme a_{k-1}^2 majore le volume de la partie de la pile située au dessous de l'altitude 1; le volume restant est majoré par a_k^3 et *a fortiori* par a_k^2). Donc le volume total des cubes est majoré par $1 + 2(a_1^2 + \cdots + a_q^2)$. Comme il est aussi minoré par 7 (c'est l'hypothèse), on obtient $a_1^2 + \cdots + a_q^2 \geq 3$. Il reste donc à vérifier que cette inégalité entraîne la possibilité de recouvrir le carré unité par des carrés de côtés $a_1, \ldots a_q$; procédant à l'aide de piles comme ci-dessus on descend encore d'une dimension et on est ramené à la trivialité suivante : le segment unité peut être recouvert par des segments donnés pourvu que la somme de leurs longueurs soit au moins 1!

Plus généralement, une récurrence étend ce résultat à la dimension n, la constante 7 étant remplacée par $2^n - 1$.

Enfin, la valeur 7 ne peut être améliorée : sept cubes égaux, de côté $1 - \epsilon$, ont un volume total $7(1 - \epsilon)^3$ arbitrairement voisin de 7; cependant, chacun d'eux recouvre au maximum un des huit sommets du cube unité et l'un au moins des sommets n'est donc pas couvert.

PROBLÈME 2

(Proposé par D. Dumont)

Enoncé

Pour $n \geq 1$, on appelle u_n le nombre égal à n si n est impair, et à $-3p(n)$ si n est pair, où $p(n)$ désigne le plus grand diviseur impair de n. Posant

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n,$$

montrer que $|s_n| \leq n$, et trouver tous les n pour lesquels $|s_n| = n$.

Indication

$s_{2n-1} = s_{4n-1}$; $s_{2n} = s_{4n}$.

PROBLÈME 3

Enoncé

Vrai ou faux ?

> Tout ensemble de parties de $\mathbb{N}$ qui est totalement ordonné par inclusion (ceci signifie que, deux éléments quelconques de cet ensemble étant donnés, l'un des deux est toujours inclus dans l'autre) est fini ou dénombrable.

Donner une démonstration ou un contre exemple.

LES NOUVELLES PUBLICATIONS DE L'I.R.E.M.

S. 122.— Calculs numériques en classe de 4^e- Calcul mental – Calcul écrit – calcul machine — *Etude pour le D.E.A. de didactique des mathématiques*, par Bernard BLOCHS (111 pages; 25 F)

Le travail a été conduit sous l'hypothèse suivante : si le fait de savoir mettre en œuvre une technique de calcul n'est l'aboutissement que d'une formation étroitement limitée, celui de choisir entre plusieurs techniques, la plus efficace pour un traitement donné, est la marque d'une formation mathématique réelle. On présente un scénario d'enseignement construit à partir de cette hypothèse, et l'observation de la mise en œuvre de ce scénario dans une classe de collège français, auprès d'élèves de 13 à 14 ans environ. La crainte fréquente que l'usage de machines n'aille à l'encontre de l'acquisition des techniques de calcul numérique apparaît comme injustifiée, mais l'idée que cet usage puisse se passer d'apprentissage systématique est tout aussi injustifiée. L'étude faite est une contribution à la mise au point d'un enseignement mathématique intégrant cet apprentissage, parmi d'autres, et non en le détachant d'autres acquisitions.

S. 123.— Perception de relations dans le plan repéré – Evaluation entreprise auprès d'élèves de 14 à 16 ans — *Thèse de 3^e cycle en didactique des mathématiques*, par Hamza HAJRI (166 pages; 35 F)

Une évaluation a été entreprise auprès d'élèves de 14 à 16 ans sur les traitements de graphiques. Un ensemble d'items ont été élaborés qui sont susceptibles d'éclairer des questions didactiques. Ces items portent sur des tâches variées : 1°- Repérage de coordonnées; 2°- Identification d'un texte algébrique avec un graphique; 3°- Organisation du plan repéré; 4°- Liaison entre proportionnalité et parallélisme; 5°- Liaison entre une situation concrète et un graphique.

S. 124.— Lecture et compréhension des textes – Modèles théoriques et exigences didactiques, par Raymond DUVAL (115 pages; 30 F)

Il existe maintenant de nombreux modèles de compréhension des textes, en psychologie cognitive comme en A.I. Ils peuvent être classés selon la façon dont ils déterminent les trois opérations constitutives de toute lecture. Cette classification permet une évaluation de leur intérêt didactique. La validation d'un modèle de compréhension d'un texte soulève des problèmes méthodologiques abordés dans le dernier chapitre. Un système de caractérisation des questions, en fonction de la distance entre les références de la question et l'organisation explicite du texte, permet de résoudre en partie ces problèmes.

S. 125.— Eléments de psychologie pour l'apprentissage des mathématiques, par Jean-Paul FISCHER (90 pages; 30 F)

Ce texte présente quelques éléments de psychologie à propos de notions mathématiques — nombre, calcul, ...— à des niveaux élémentaires. Mais, surtout, il présente un panorama (mondial) des théories de l'apprentissage mathématique. Des points de vue aussi différents que ceux de PIAGET et GALPERIN se trouvent ainsi illustrés — par des exemples précis et centraux dans l'œuvre de l'auteur concerné —, commentés et critiqués. Ecrit à l'intention des étudiants du D.E.A. de didactique des mathématiques, il devrait aussi intéresser les pédagogues confrontés à l'enseignement des mathématiques et/ou à de jeunes élèves; en particulier ceux qui ne veulent pas se limiter à la psychologie piagétienne.

S. 126.— Rapport sur l'expérimentation "Pédagogiqe différenciée" conduite au collège d'Ostwald en 1985-1986 (60 pages; 20 F)

Il s'agit d'une mise en pratique de pédagogie différenciée au collège, entreprise dans plusieurs disciplines conformément à un projet du Professeur Louis LEGRAND de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Le collège d'Ostwald a accueilli l'expérimentation en mathématique en 6^e. (Ce document est paru à la suite du tome relatif à l'expérimentation en 1984-1985, qui est encore disponible au prix de 17 F.)

S. 127.— La didactique expérimentale des mathématiques — *Cours de 3e cycle (Chapitre IV : 2e partie : la conception génétique)*, par Georges GLAESER (190 pages; 45 F)

C'est une étude des processus de longue durée, qui conduisent à la genèse de l'intelligence et de la compréhension mathématique. Les fondements de la théorie de PIAGET et les premiers stades sont présentés ici d'une façon classique. Mais l'existence même d'un stade des opérations formelles est mise en doute à la lumière de recherches expérimentales.

S. 128.— Expérience réalisée en collège : Mathématiques et informatique en 3^e, par Michel RUAL (25 pages; 8 F)

L'étude se situe entre l'informatique considérée comme discipline et l'informatique outil, intervenant dans l'enseignement d'une discipline et est conforme au nouveau programme 86/87 : "Exemples élémentaires d'algorithmes; applications numérique sur ordinateur". Elle permet d'apprendre une méthode structurée de programmation en révisant les notions mathématiques acquises (ou qui devraient l'être), et à l'élève d'effectuer une différence entre informatique et jeux vidéo notamment pour son inscription éventuelle en seconde, option informatique.

S. 129.— LOGO 3 — programmation structurée : présentation et analyse de situations, par Claire DUPUIS, Marie-Agnès EGRET et Dominique GUIN (88 pages; 35 F)

Cette brochure contient la description et l'analyse d'une expérimentation menée avec des élèves de 4^e sur un enseignement de base du langage LOGO orienté vers l'apprentissage de la programmation structurée (il a été suivi par une introduction de la récursivité qui fera l'objet d'une brochure à paraître). Les enseignants pourront trouver, s'ils le souhaitent, des thèmes d'activités dans la partie "Présentation des différentes séances" avec leurs objectifs et nos commentaires. La partie "Présentation des différents tests" permet d'estimer les acquis et les difficultés des élèves au cours de cet apprentissage.

S. 130.— Travaux pratiques en Terminales scientifiques, par le groupe Lycée (180 pages; 70 F)

Cette brochure été élaborée dans le but de faire travailler les élèves sur des documents qui leur permettent de mettre en jeu les notions du programme, de progresser dans la maîtrise des concepts et d'acquérir des méthodes de démonstration; de résoudre de vrais problèmes mathématiques (dont certains sont historiques, d'autres liés aux sciences expérimentales); de développer leur culture scientifique, si modestement que ce soit.

S. 131.— Décalages cognitifs dans le problème de proportionnalité (préalable à toute séquence didactique pour des élèves de 10 à 12 ans) — *Thèse de Doctorat en didactique des mathématiques*, par Eugénie ADAM-KOLEZA (300 pages; 80 F)

La proportionnalité est sans doute le premie thème mathématique d'intérêt général incontestable dont l'acquisition se heurte à des difficultés d'enseignement non surmontées aujourd'hui : beaucoup d'élèves au sortir de la scolarité ne dominent pas les traitements linéaires. C'est pourquoi ce thème a été l'objet de nombreuses études et observations didactiques récentes; cela permet d'entreprendre à présent des expériences d'enseignement. Nous présentons de telles expériences construites pour des classes de la fin de l'enseignement primaire et du début de l'enseignement secondaire. Volontairement, l'intervention a été limitée à la donnée aux professeurs de lignes directrices de présentation et d'exploitation du thème par des exercices appropriés. Ainsi ces classes sont par ailleurs conduites selon les schémas d'enseignement habituels de leurs professeurs. C'est pourquoi surtout le rôle sémantique des variables en jeu dans une situation-problème qui apparaît déterminant quant à la classification des activités et au choix d'une progression génératrice d'apprentissage. L'analyse des résultats obtenus montre un parallélisme frappant entre la hiérarchie ainsi élaborée et les acquisitions, importantes, chez les élèves observés.

A NOTER :

La brochure "Activités géométriques de la 6^{e} à la Terminale" est définitivement épuisée.

Celle concernant les "Travaux Pratiques en 1ères scientifiques" est épuisée aussi : un manuel de 1ère devrait être publié au printemps prochain par les éditions Casteilla.

LES NOUVELLES PUBLICATIONS I.R.E.M.

"SUIVI SCIENTIFIQUE 1985 - 1986"

Nouveaux programmes de sixième

270 pages 35.– F

SOMMAIRE

Préface

Avertissement

Introduction

I. REPERAGE

IREM Lyon	1 - Aide Pédagogique	1
IREM Lyon	2 - Repérage dans le plan à l'aide d'un ordinateur	7
IREM Lyon	3 - Course d'orientation (activité pluridisciplinaire)	14

II. REPRODUCTION DE FIGURES PLANES SIMPLES

IREM Paris Sud	1 - Construction de triangles (une situation de communication - compte-rendu)	18
IREM Rennes	2 - Le Cercle. Programmes de construction (compte-rendu)	27
IREM Rennes	3 - Le Chien au bout de sa chaîne	34
IREM Rennes	4 - C'est pas rond, mais ça tourne (deux activités d'approfondissement - compte-rendus)	41
IREM Lyon	5 - Vers la médiatrice (une situation-problème)	46

III. SYMETRIE ORTHOGONALE

F. Marchivie	1 - Aide pédagogique	52
IREM Dijon	2 - Exemples d'activités	60
IREM Poitiers	3 - Une proposition complète d'enseignement	79
IREM Poitiers	4 - Difficultés rencontrées par les élèves	114
	5 - Visionnement du film "effet miroir"	118

IV. LES AIRES

IREM Paris	1 - Aires de surfaces planes	124
IREM Paris	2 - Variation de l'aire d'un rectangle	142

V. REPRESENTATION ET ORGANISATION DES DONNEES

B. COSTE	1 - Aide pédagogique	149
IREM Nice	2 - Propositions d'activité	164

VI. NOMBRES ET CALCULS

G. ANFRE	1 - Utilisation de calculatrices	175
R. DOUADY	2 - Aide pédagogique	185
R. DOUADY, M.J. PERRIN	3 - Les fractions	191
M. PEZARD	4 - Proportionnalité	199
M. PHILIPPON	5 - Sports et Musique (compte-rendu d'activité)	213

VII. ELEMENTS POUR UNE REFLEXION

R. CHARNAY	1 - Conception de l'apprentissage	218
M. MANTE	a. Apprendre par la résolution de problèmes	219
R. DOUADY	b. Autour de la notion de situation-problème	226
A. BODIN	c. Hypothèses pour la construction de séquences d'apprentissage	239
IREM Besançon	2 - Le problème de l'évaluation	245

LES NOUVELLES PUBLICATIONS I.R.E.M.

Bulletin inter-I.R.E.M. : Activités en Première

202 pages; 35 F

SOMMAIRE

PREFACE

INTRODUCTION EN FORME D'AVERTISSEMENT

REFERENCES AUX BROCHURES IREM

PARTIE I : LES SUITES

I.1 - ACTIVITES CONDUISANT A DES SUITES 1
I.2 - FRACTIONS POUR DES IRRATIONNELS 10
I.3 - DES SUITES POUR APPROCHER π 16
I.4 - LIMITE D'UNE SUITE 21

PARTIE II : A PROPOS D'EQUATIONS

II.1 - QUELQUES TEXTES HISTORIQUES 29
II.2 - RECHERCHE DE RACINES APPROCHEES 35
II.3 - ACTIVITES DIVERSES 49

PARTIE III : FONCTIONS

III.1 - ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE 53
III.2 - MAJORER - MINORER - ENCADRER 58
III.3 - A PROPOS DE LIMITES 65
III.4 - A PROPOS DE DERIVATION 75
III.5 - AVEC DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES 88
III.6 - VARIATIONS ET RESOLUTIONS DE PROBLEMES 105

PARTIE IV : STATISTIQUES

MA COMMUNE EST-T-ELLE UNE VILLE OU UN VILLAGE ? 111

PARTIE V : DANS LE PLAN

V.1 - CONSTRUIRE 131
V.2 - PLUSIEURS DEMONSTRATIONS POUR UN MEME ORTHOCENTRE 142
V.3 - TRANSFORMATIONS 144
V.4 - GEOMETRIES ET COURBES 156
V.5 - LIGNES DE NIVEAU 163

PARTIE VI : DANS L'ESPACE

VI.1 - REPRESENTATION 167
VI.2 - EXERCICES DIVERS 174
VI.3 - CHEMIN MINIMUM 181
VI.4 - CONSTRUCTION ET ORTHOGONALITE 188
VI.5 - SOLIDES REGULIERS 196
VI.6 - ECONOMIE ET GEOMETRIE DANS L'ESPACE 201

Les prix s'entendent frais de port compris. Adressez-vous à la Bibliothèque pour toute commande accompagnée si possible du règlement.

DERNIÈRE ARRIVÉE, LA BROCHURE :

"SUIVI SCIENTIFIQUE 1986 - 1987"

Nouveaux programmes de cinquième

295 pages 35.– F

Avant propos: 3

TEXTES GENERAUX DE PRESENTATION:

Réflexion sur les objectifs, la réalisation et l'historique de ce bulletin.(F.MARCHIVIE) 5
Enquête à propos des nouveaux programmes (F.Coste) 8

PREMIERE PARTIE: AIDES PEDAGOGIQUES.

1) Travaux géométriques:

♦ A.GEOMETRIE PLANE: 15
- Géométrie plane en cinquième (F.Marchivie) 16
- Présentation des documents (F.Marchivie) 26
- Symétrie centrale(Groupe de Castelnaudary) 29
- Symétrie centrale en 5ème (IREM de POITIERS) 41
- A propos de la symétrie centrale (IREM de NANTES) 53
- Vers une pédagogie différenciée (J.Laurent - Dijon) ... 68
- A propos d'aires ....(IREM de NANTES) 96
- Aire du triangle et ordinateur (R.Genet - Lyon) 107
- Autour de la somme des angles d'un triangle (M.Philippon - Lyon) 112
- Le développement de compétences pour la géométrie (IREM de STRASBOURG) 125
- Des symétries pour démontrer (H.BAREIL) 139

♦ B.GEOMETRIE DANS L'ESPACE: 153
- Géométrie dans l'espace (synthèse par J.Guibert à partir des travaux des IREM de BESANCON, LILLE, MONTPELLIER, NANTES et POITIERS) 154

2) Fractions et proportionnalite: 167
- Fractions et proportionnalité:(Synthèse réalisée à partir des travaux des IREM de POITIERS et ORLEANS) .. 169

3) Gestion de données: 189
- Organisation et gestion de données: (Synthèse de B.Coste sur des travaux des IREM de NICE, NANTES, ROUEN, RENNES, MONTPELLIER, LIMOGES) 191
- Voyelles et gestion de données (C.Brunetton) 201
- Représentation graphique. Réflexions et compte rendu de lectures. (M.Seco et J.P.Giovanelli) . 207

DEUXIEME PARTIE:TEXTES GENERAUX DE REFLEXION 215
- Statut didactique des transformations(F.Marchivie) ... 216
- A propos de la mise en oeuvre des nouveaux programmes.(Groupe Apprentissage et raisonnement de l'IREM de GRENOBLE) 225
- Apprentissage de la démonstration(IREM de POITIERS) .. 235
- Le jeu de la boîte-noire(M.Clinard-Orléans) 247
- L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme du collège (M.Mante - Lyon) 259
- Evaluation diagnostique(J.Laurent - Dijon) 279

ADRESSES DES IREM 296