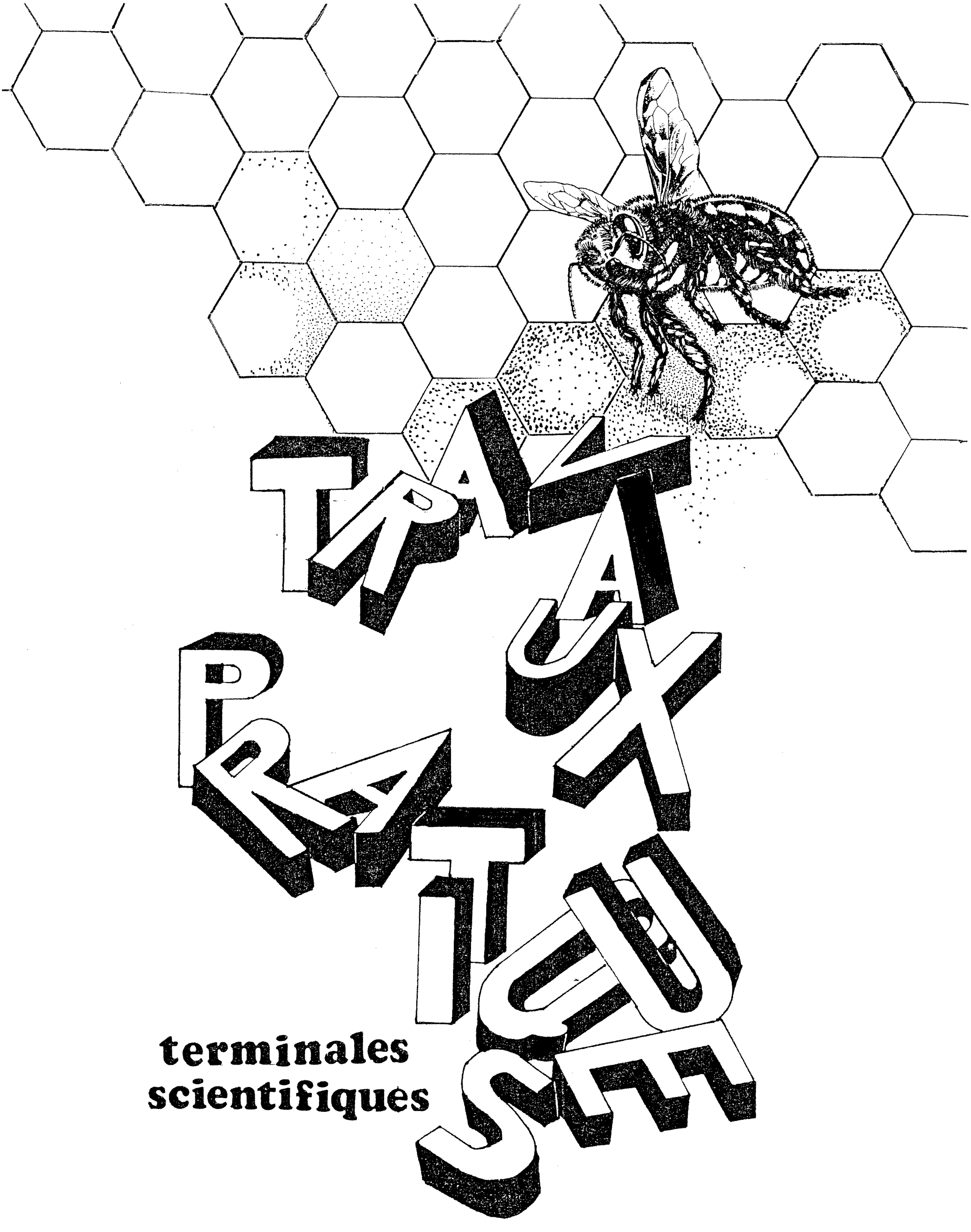


terminales scientifiques

I.R.E.M. DE STRASBOURG

mai 1987

TRAVAUX PRATIQUES
EN
TERMINALES SCIENTIFIQUES

par

Elisabeth BUSSER

Michel DE COINTET

Claudine KAHN

Jean MARTINET

Jean SAMSON

Odile SCHLADENHAUFEN

– 1987 –

I.R.E.M. de STRASBOURG

PRÉFACE

Un peu plus d'un an après la brochure consacrée aux '*Travaux Pratiques en Premières Scientifiques*', voici celle destinée aux élèves de Terminales Scientifiques. Elle a été élaborée par la même équipe et dans le même but : faire travailler les élèves sur des documents qui leur permettent de :
— mettre en jeu les notions du programme, progresser dans la maîtrise des concepts et acquérir des méthodes de démonstration;
— résoudre de vrais problèmes mathématiques (dont certains sont historiques, d'autres liés aux sciences expérimentales);
— développer leur culture scientifique, si modestement que ce soit.

L'équipe de rédaction, composée de professeurs enseignant en Terminales C ou Terminales D, y a été vivement encouragée par les utilisateurs de la brochure publiée l'an dernier. Les Travaux Pratiques relatifs aux parties communes aux programmes (Analyse, Algèbre, Géométrie, mettant en œuvre les acquis de Première) de Terminales C, D ou E ont été conçus à l'intention des élèves de ces **trois** sections.

On trouvera dans cette brochure des documents :
— rédigés pour les élèves;
— directement utilisables dans le cadre des travaux pratiques inscrits explicitement aux programmes;
— expérimentés, pour quelques-uns, dans une cinquantaine de classes;
— couvrant bon nombre de rubriques;
— faisant une place de choix aux activités graphiques et aux problèmes et méthodes numériques, comme le demandent les commentaires;
— visant, pour certains, un aspect spécifique du programme, alliant, pour les autres, plusieurs points de vue : algèbrique, géométrique, historique, graphique, numérique ...

Ces documents sont de difficultés et de longueurs très variées. Chacun peut être étudié partiellement ou dans sa totalité. Chacun peut être complété, modifié, amélioré, rejeté ... Comme ceux de Première, ils ne prétendent nullement être exhaustifs. Puissent-ils encourager les collègues à en confectionner d'autres !

N.B. : Ces '*Travaux Pratiques*' ont été rédigés pour être utilisés **en classe** avec l'aide orale du professeur. Si celui-ci veut donner l'un ou l'autre en travail à la maison, il sera nécessaire d'apporter des compléments à la rédaction. Ajoutons que ces '*T.P.*' n'ont pas été conçus pour être donnés à faire en temps limité.

Le lecteur appréciera, de nouveau, la qualité de la dactylographie, présentation et mise en pages de ces documents. Nous la devons à Madame Renée ROHFRITSCH. La diffusion, elle, est assurée par Madame Evelyne LE GUYADER, avec compétence et dévouement. Que ces collaboratrices trouvent ici nos plus vifs remerciements.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

1. Trajets en temps minimum.

Des recherches de minimum pour trois problèmes semblables. Ils sont résolus par une étude de fonction qui traduit un calcul de distance; dans chacune figure une ou deux fonctions racines de polynôme du second degré.

Le dernier problème est celui de la réfraction de la lumière et conduit à la loi de DESCARTES étudiée en Physique.

* **Prérequis de cours** : Image d'un intervalle par une fonction continue. Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

2. Les autoroutes de Monsieur FERMAT.

Il s'agit ici d'un problème d'extremum ayant un support géométrique concret : pour quatre villes situées en carré, rechercher le tracé d'autoroute de longueur totale minimale permettant de se rendre de l'une quelconque des villes à chacune des trois autres.

A la différence de la Fiche n° 30 de la brochure '*Travaux Pratiques en Premières Scientifiques*', le problème est ici traité analytiquement.

* **Prérequis de cours** : Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

3. La duplication du cube.

Le vieux problème de la recherche de l'arête d'un cube de volume double de celui d'un cube donné est ramené à l'étude d'une courbe (cissoïde droite).

* **Prérequis de cours** : Aucun de Terminale.

4. Problème des abeilles.

Ce T.P. est inspiré d'un article paru dans '*Le Petit Archimède*'. Les abeilles sont connues comme de bonnes ouvrières économes et les mathématiques sont là pour le confirmer.

Ce problème est une occasion pour revoir et remettre en place bien des connaissances de la géométrie de Première — géométrie plane et géométrie dans l'espace

— et pour faire un peu de géométrie avec les élèves de Terminale D comme cela est indiqué dans le programme. Sa résolution fait appel aussi à l'analyse car la recherche du minimum se fait par l'étude d'une fonction.

* **Prérequis de cours** :
— Géométrie de Première,
— Calcul de la dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ où u est une fonction polynôme du second degré.

5. Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ par la méthode du point fixe.

6. Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ par la méthode de Newton.

7. Un problème d'échelles.

Il s'agit, ici, d'illustrer les alinéas suivants :
"Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique."
"Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite." "Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre."

Dans le premier de ces T.P., les deux façons de transformer l'équation donnée en équation du type $x = f(x)$ conduisent chacune à l'approximation de certaine(s) solution(s) et pas d'autre(s).

Le second montre la rapidité de convergence de la méthode de Newton. L'étude de la suite utilisée est plus difficile dans le second T.P. (convergence quadratique) que dans le premier (convergence *géométrique*).

Dans le troisième T.P., la même méthode du point fixe permet de résoudre le premier exemple, mais n'aboutit pas dans le second. Il faut alors procéder à un *ajustement linéaire*.

***Prérequis de cours** : Suites numériques — Inégalité des accroissements finis.

8. Exemple d'itération d'une fonction trinome du second degré.

"Prendre une fonction trinome du second degré (ici : $f : x \mapsto 1 - ax^2$), choisir un nombre x_0 puis calculer successivement $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, etc ..." Voilà une activité a priori toute simple qui conduit à des résultats surprenants (Voir le Bulletin de l'A.P.M. n° 337, fév. 83, pages 43–49).

Ce document étudie le comportement de la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ pour $0 < a < \frac{3}{4}$ puis pour $\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$. L'expérimentation numérique, à la calculatrice, est largement utilisée.

* **Prérequis de cours** : Fonctions polynomes, somme et produit des racines d'une équation du second degré, dérivée de la composée de deux fonctions, inégalité des accroissements finis, suites géométriques.

Remarques
1) Le cas $a = \frac{3}{4}$ n'a pas été envisagé dans le document : dans ce cas, la suite (x_n) converge très lentement vers la racine positive de l'équation $f(x) = x$.
2) A l'heure où ces lignes sont écrites vient de paraître un article de vulgarisation dans '*Sciences et Avenir*' (Avril 1987) qui fait entrevoir l'intérêt contemporain de l'étude d'une telle situation. La revue '*Paradrome*' a également consacré une suite d'articles fort intéressants sur ce sujet.

9. Paradoxe.

(D'après un article de J. LEFORT dans '*L'Ouvert*', journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg, n° 39, juin 1985.)

Le résultat démontré ici, est le suivant :
"on peut inscrire dans tout cylindre un polyèdre d'aire latérale arbitrairement grande".

Des considérations de géométrie élémentaire et un calcul de limite permettent d'établir ce résultat surprenant (en principe!). Il montre aux élèves les limites (c'est le cas de le dire) de l'intuition.

* **Prérequis de cours** : Langage des limites.

10. Un calcul d'aire dans l'évolution historique des mathématiques.

Une fiche qui peut inciter à parler un peu de l'Histoire des mathématiques puisqu'elle fait référence à une méthode proposée par FERMAT pour calculer certaines aires, avant que le calcul intégral ne prenne son essor.

Des rectangles servent dans ces calculs d'aire mais ce ne sont pas ceux de la méthode de RIEMANN car il ne s'agit pas d'un partage du segment en n parties égales.

* **Prérequis de cours** : Suites géométriques.

11. Calcul d'aires : Méthode de SIMPSON.

12. Calcul d'aires : Méthode de HERMITE.

Deux méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales sont exposées sur des exemples. Elles sont basées respectivement sur l'un et l'autre des résultats suivants :
— une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à deux est déterminée par ses valeurs en trois points;
— une fonction polynôme de degré trois est déterminée par les valeurs que cette fonction et sa dérivée prennent en deux points.

* **Prérequis de cours** : Calcul intégral.

13. Trois utilitaires classiques pour calculatrices programmables.

On propose, dans ce document, trois algorithmes, d'utilisation fréquente.
- La résolution d'une équation par dichotomie.
- La détermination d'un extremum d'une fonction.
- Le calcul approché d'une intégrale par la méthode de SIMPSON.

Les algorithmes sont présentés de façon structurée et illustrés de programmes en BASIC.

Il n'est malheureusement pas possible de livrer des programmes tout faits, utilisables directement sur toutes les machines. Aucune question n'est posée dans cette fiche : l'activité essentiellement personnelle de l'élève est de comprendre d'où viennent et comment fonctionnent les algorithmes donnés et de les transformer en programmes utilisables sur sa calculatrice.

14. Intégrations par parties répétées.

Le travail à réaliser dans cette fiche a un double but :
— confectionner une *table d'intégrales* facilitant l'application répétée de la formule d'intégration par parties;
— utiliser l'itération du procédé d'intégration par parties au calcul de valeurs approchées de fonctions.

* **Prérequis de cours** :
— Primitives de fonctions usuelles;
— intégration par parties.

15. Encadrements de fonctions par des fonctions rationnelles.

"Contrairement à une idée répandue, les valeurs de certaines fonctions transcendantes sont calculées par des calculatrices électroniques à l'aide d'approximations rationnelles non polynomiales ... Ces méthodes sont, en général, basées sur le développement en fractions continues de fonction" (D. Reisz – Bulletin Inter I.R.E.M. : "L'Enseignement de l'Analyse" – Décembre 1981).

Ce sont de telles approximations qui sont proposées ici pour les fonctions : $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \int_o^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Les démonstrations sont, en particulier, l'occasion :
— d'intégrer des inégalités;
— d'étudier des familles de droites ou de paraboles à un paramètre.

* **Prérequis de cours** : Calcul intégral.

16. Circuit oscillant

Il s'agit d'une application directe de la résolution des équations différentielles du second ordre des programmes de Terminale. Les situations numériques étudiées conduisent aux trois cas bien connus.

Le cas le plus souvent traité par les physiciens est celui où la résistance du circuit est (quasiment) nulle.

* **Prérequis de cours** : Equations différentielles du second ordre, linéaires, à coefficients constants et sans second membre.

17. Calcul numérique et fonction exponentielle

Des seules équations différentielles explicitement aux programmes, il ne faudrait pas que les élèves en concluent que toute équation différentielle a une solution explicite. On sait que ceci est exceptionnel, ce qui justifie l'intérêt de l'étude d'une résolution approchée d'une telle équation.

Deux méthodes simples sont décrites : celle d'Euler qui revient à calculer une intégrale par la méthode des rectangles et une autre *issue* de la méthode des trapèzes.

L'emploi de ces méthodes avec la fonction exponentielle permet d'en contrôler expérimentalement l'efficacité. On les utilise ensuite dans le calcul d'une intégrale; on pourra comparer les résultats obtenus à l'aide d'autres méthodes (SIMPSON, HERMITE, ...).

Ce travail est peut-être aussi l'occasion pour les élèves de découvrir ou d'appréhender des liens qui existent entre calcul différentiel et calcul intégral.

(Pour approfondissement, voir l'article de D. REISZ dans le Bulletin A.P.M.E.P. — n° 349 de juin 85.)

* **Prérequis de cours** :
— Fonctions logarithmiques et exponentielles;
— Calcul intégral;
— Equation différentielle $y' = y$.

18. Dérangements

Les dérangements d'un ensemble fini E_n de cardinal n sont les permutations sans point fixe de E_n.

Le but de ce document est d'obtenir diverses expressions du nombre d_n de dérangements de E_n, en particulier d'établir que d_n est l'entier le plus proche de $\frac{n!}{e}$ où e désigne la base des logarithmes népériens.

Cette étude permet d'établir un lien entre deux domaines à première vue disjoints : les dénombrements et l'analyse.

Les diverses expressions de d_n rencontrées sont illustrées par des programmes écrits en BASIC.

* **Prérequis de cours** : Dénombrements, suites et récurrence, fonction exponentielle.

19. Somme de puissances entières des p premiers naturels non nuls.

Deux procédés sont étudiés dans ce document :
— Le premier est numérique et établit le résultat cherché par récurrence.
— Le second est un exemple d'utilisation d'une *méthode continue* à la résolution d'un problème *discret*. Il conduit, en outre, à un algorithme simple et rapide.

* **Prérequis de cours** :
— Énoncés du principe de récurrence;
— Calcul intégral.

20. Un procédé de calcul numérique de logarithmes népériens.

Voilà un calcul simple et astucieux à partir d'opérations arithmétiques élémentaires de $\ln 2, \ln 3, \ln 5$ en utilisant des encadrements de $\ln(1+u)$, au *voisinage* de zéro. La méthode conduit à la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues.

* **Prérequis de cours** :
— Logarithme népérien ;
— Somme des premiers termes d'une suite géométrique.

21. Équations du troisième degré.

22. Résolution de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ à l'aide de la trigonométrie.

Ces deux documents se proposent de déterminer explicitement, par l'algèbre et la trigonométrie, les solutions d'équations particulières du troisième degré.

Le premier montre l'intérêt de résoudre une équation "dans $\mathbb{C}$" pour calculer ses solutions, même lorsqu'elles sont toutes réelles. Pour cela, on utilise une *extenstion* de la méthode de CARDAN.

Le second expose une méthode connue. La construction géométrique des solutions résout le problème de la trisection de l'angle à l'aide de la règle, du compas et d'une bande de papier.

* **Prérequis de cours** : Les nombres complexes pour le T.P. n°21.

23. Construction (à la règle et au compas) de polygones réguliers.

Sont exposées ici, la construction du pentagone et celle du polygone régulier à dix-sept côtés.
— La première résulte de calculs dans l'ensemble des racines cinquième de l'unité.
— La seconde est décrite par J.- C. CARREGA dans "*Théorie des Corps, la Règle et le Compas*" (Hermann). Les calculs dans l'ensemble des racines dix-septièmes de l'unité sont dûs à GAUSS (1796) et les calculs trigonométriques qui conduisent alors à la construction sont dûs à H.- W. RICHMOND (1893).

* **Prérequis de cours** : Les nombres complexes.

24. Construction d'un polygone régulier : "solution approchée".

Cette construction a été décrite dans le bulletin '*Mathématique et Pédagogie*' de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française. Elle est particulièrement simple et performante. L'étude de l'erreur relative faite dans ce bulletin fait appel à un développement limité de la fonction *Arctg*. Aussi, le cheminement proposé ici est-il différent.

Une étude de majoration (erreur absolue) se fait grâce à l'étude d'une fonction dont la dérivée a le signe d'un polynôme du second degré en sinus.

Une étude de minoration est indispensable pour étudier le signe d'une dérivée *impraticable* (erreur relative). Cette minoration demande de la méthode mais ne présente pas de difficultés techniques et se révèle efficace pour résoudre le problème posé.

* **Prérequis de cours** :
— Dérivées; étude d'une fonction.
— Majorant; minorant.

Utilisation d'un résultat acquis dans un autre T.P. "*Intégrations par parties répétées*" :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], X - \frac{X^3}{6} \leq \sin X \leq X.$$

(Résultat que l'on peut démontrer, en exercice.)

25. Où l'on retrouve l'angle des abeilles.

L'idée de la rédaction de ce document provient du compte-rendu que nous a fait parvenir un collègue à la suite de l'expérimentation dans la classe de la fiche "*le problème des abeilles*". Un élève, en effet, constatait que l'angle obtenu dans cette fiche semblait le même qu'un angle qui apparaît dans la molécule de méthane.

Nous proposons ici deux situations où l'on retrouve cet angle.

Cette fiche s'inscrit bien aussi dans la pratique de la géométrie dans l'espace en Terminale D.

26. Étude d'une configuration à l'aide des barycentres.

27. Étude d'une configuration à l'aide des nombres complexes.

On donne un triangle ABC. Soit M un point de son plan et A', B' et C' les projections orthogonales de M sur $(BC), (CA)$ et (AB). Le résultat que l'on démontre est le suivant :

L'aire du triangle $A'B'C'$ ne dépend que de la distance de M au centre du cercle circonscrit au triangle ABC et des données (aire de ABC et rayon du cercle circonscrit).

On peut, pour cela, utiliser les nombres complexes ou le calcul barycentrique. C'est l'occasion d'apprendre à bien mener un calcul en fonction de l'outil utilisé et d'en vérifier les propriétés et les qualités.

* **Prérequis de cours** :
— Le calcul barycentrique pour le T.P. n° 25;
— Les nombres complexes pour le T.P. n° 26.

28. Plusieurs méthodes pour un même problème de construction.

L'énoncé est simple. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées en Seconde ou en Première. L'intérêt du travail réside dans la multiplicité des solutions : c'est l'occasion, en Terminale, de faire le point sur des acquis simples mais utiles de géométrie au lycée.

* **Prérequis de cours** (de Terminale) :
— Calcul barycentrique;
— Composée d'homothéties.

29. Alignement et cocyclicité.

A la rentrée 1986 les angles de vecteurs ont vu leur statut légèrement modifié. Afin d'éviter la notion d'angles de droites on introduit le théorème : "Pour que quatre points A, B, C, D soient cocycliques ou alignés, il faut et il suffit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + k\pi$".

Nous ne voulons pas accorder à ce chapitre plus d'importance qu'il ne mérite, mais nous avons conscience que ce problème reste difficile pour nos élèves. Nous avons essayé de mettre en œuvre une stratégie efficace qui consiste en :

1) La recherche d'une démonstration à l'aide d'un cas particulier en tirant parti au mieux de la figure.
2) La rédaction d'une démonstration avec des angles de vecteurs indépendante du cas de figure.

Notre point de vue n'a pas fait l'unanimité parmi nos collègues qui l'on testé dans leurs classes, mais une majorité s'est déclarée satisfaite : les élèves n'écrivent plus la relation de CHASLES au hasard, mais trouvent un fil conducteur pour passer des hypothèses à la conclusion.

* **Prérequis de cours** :
— Effet des isométries sur les angles orientés;
— Somme des angles d'un triangle;
— Condition d'alignement ou de cocyclicité.

30. La trisection de l'angle.

On donne dans un repère orthonormé direct d'axes $x'Ox, y'Oy$ le point $A(2,0)$ et on recherche, afin de construire les trois trisectrices d'un angle, l'ensemble des points M tels que l'on ait $(Ax, \overrightarrow{AM}) = 3(Ox, \overrightarrow{OM}) + k2\pi$.

Cette étude conduit à une représentation paramétrique puis à une équation cartésienne de la trisectrice de Mac-LAURIN.

L'étude effectuée permet, étant donné un point M de cette trisectrice, de construire les trois trisectrices de l'angle $(Ax, \overrightarrow{AM})$.

* **Prérequis de cours** : Angles, trigonométrie, dérivée de la composée de deux fonctions. Cette méthode trouve sa place dans le cadre des travaux pratiques sur les courbes parametrées.

31. A propos de trisection.

Cette fiche vise à donner un aperçu historique de différentes méthodes de construction, point par point, d'une trisectrice.

* **Prérequis de cours** : Transformations géométriques planes.

32. Problème de réservoir.

33. Inverses de coniques.

Ce sont deux travaux pratiques sur les courbes paramétrées.

Le premier peut montrer l'intérêt de l'usage d'un paramètre lorsqu'on veut étudier les variations d'une grandeur en fonction de celles d'une autre.

Le second est l'occasion d'étudier de *jolies* courbes. En outre, il est intéressant de *voir géométriquement* comment deux points inverses l'un de l'autre décrivent leurs courbes respectives.

* **Prérequis de cours** :
— Courbes paramétrées;
— Coniques.

34. Réflecteurs "micro-ondes".

35. Zone d'audibilité.

36. A la recherche d'un triangle rectangle.

37. Coniques, constructions et lieux géométriques.

Ce sont là quatre travaux pratiques d'applications directes du cours sur les coniques, les deux premiers concernant la physique et les deux derniers des problèmes de construction et de lieux géométriques.

* **Prérequis de cours** : Les coniques.

38. Solution approchée d'un système.

De la résolution d'un système d'équations à la méthode des moindres carrés, en passant par la géométrie vectorielle à trois dimensions.

* **Prérequis de cours** : Projection ponctuelle, projection vectorielle associée.

39. Un peu de trigonométrie sphérique.

(Sur une idée de Monsieur P. Fuhr, professeur au lycée Kléber de Strasbourg.)

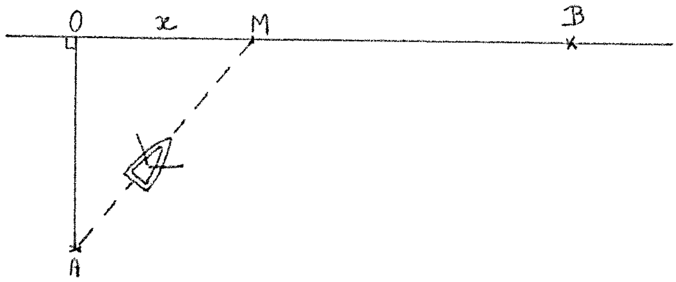
L'emploi du produit scalaire et du produit vectoriel conduit à deux formules simples, celle des cosinus d'abord, puis celle des sinus, en géométrie sphérique.

* **Prérequis de cours** : Produit vectoriel.

1. TRAJETS EN TEMPS MINIMUM

① EXERCICE 1 : Un bateau est au mouillage à 9 km du point le plus proche d'une côte rectiligne. Un message doit parvenir au plus vite à une localité située sur la côté à 15 km du point de la berge le plus proche du bateau. Etant donné que le messager parcourt 6 km à l'heure à pied et 4 km à l'heure en canot, en quel point de la berge doit-il accoster pour arriver au plus vite à la localité. ?

(On notera OM = x)

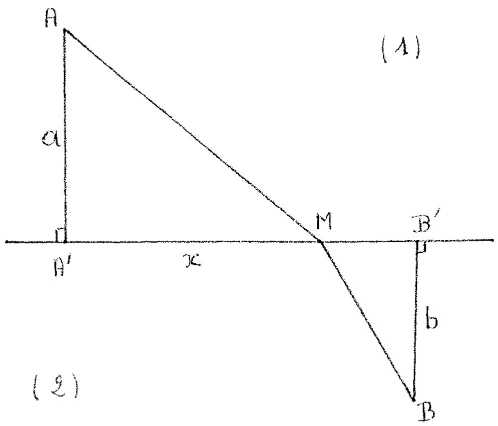


② PROBLEME DE LA REFRACTION

La réfraction est le passage de la lumière d'un milieu homogène (1) dans un autre milieu homogène (2) : la vitesse de la lumière est C_1 dans le premier milieu et C_2 dans le second ($C_1 \neq C_2$).

En appliquant le principe de Fermat nous allons retrouver une des lois de Descartes.

> Principe de FERMAT : Le chemin optique suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B est le plus court dans le temps de tous les chemins possibles.



En appliquant ce principe ont trouve que pour aller d'un point à un autre en milieu homogène le chemin optique est rectiligne. Donc en réfraction le rayon lumineux va suivre la ligne brisée AMB qui correspond au temps de parcours minimum.

On pose AA' = a, BB' = b, A'B' = d et A'M = x

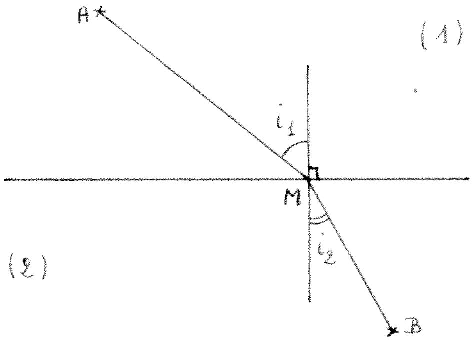
Question 1 : Quel est le temps nécessaire pour parcourir AM ?
Quel est le temps nécessaire pour parcourir BM ?

Question 2 : En déduire le temps t(x) mis par la lumière pour parcourir AMB.
Calculer t'(x) et t"(x)
Quel est le signe de t'(x) pour x = 0 ? Pour x = d ?
En déduire que t admet un minimum unique sur l'intervalle [0 ; d].

Question 3 : Montrer que le minimum de $t(x)$ est obtenu pour x tel que

$$\frac{A'M}{v_1 x AM} = \frac{B'M}{v_2 x BM}$$

Question 4 : Les angles d'incidence i_1 et i_2 sont définis par le dessin ci-contre.



Vérifier que l'égalité précédente s'écrit aussi :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

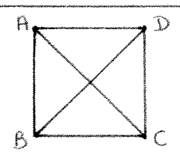
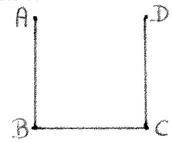
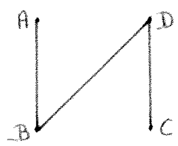
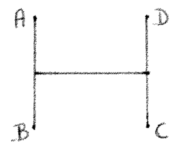
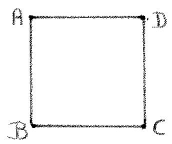
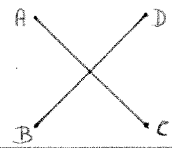
On pose $n_1 = \frac{C}{C_1}$ et $n_2 = \frac{C}{C_2}$ où C est la vitesse de la lumière dans le vide et on retrouve la loi de DESCARTES :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

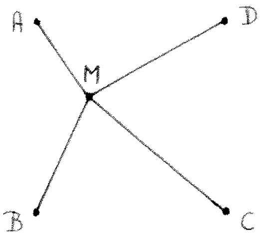
2. AUTOROUTES DE MONSIEUR FERMAT

Considérons quatre villes que l'on veut relier par un réseau autoroutier. Pour des raisons naturelles et financières on souhaite construire le réseau correspondant à une longueur totale d'autoroute minimum. Supposons pour résoudre ce problème que les quatre villes sont disposées aux sommets d'un carré, et notons les A, B, C et D.

Question 1: Voici quelques tracés d'autoroutes reliant les quatre villes. Calculer les longueurs correspondantes (on note a le côté du carré)

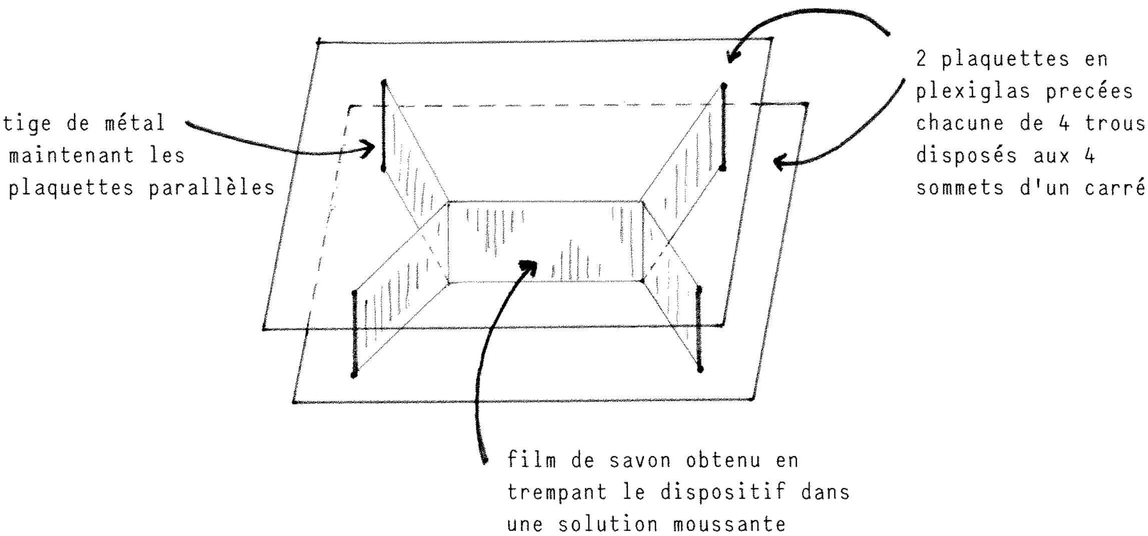
1°  $L_1 =$	4°  $L_4 =$
2°  $L_2 =$	5°  $L_5 =$
3°  $L_3 =$	6°  $L_6 =$

Question 2 : Le tracé numéro 6 correspond à un réseau ayant un seul croisement appelé aussi "noeud".
Prenons un réseau ayant un seul "noeud" en M.
Démontrer que MA + MB + MC + MD est minimum lorsque M est en O, point d'intersection des diagonales du carré.

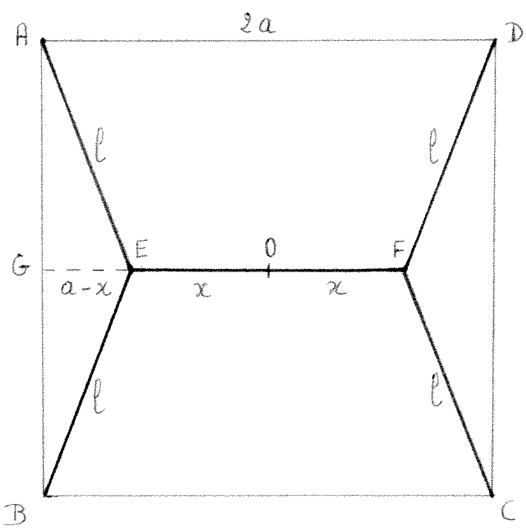


Indication : (MA + MB + MC +MD) = (MA + MC) + (MB + MD).

Existe-il cependant un tracé possédant plus d'un noeud et donnant un chemin de longueur inférieure à L 6 ?
L'expérimentation physique peut ici nous aider. En effet, en utilisant la propriété des films de savon qui se disposent d'eux mêmes de manière à minimiser leur surface on peut construire un dispositif permettant de mettre en évidence le chemin minimum dans le cas du problème des autoroutes.



En réalisant l'expérience on obtient un tracé à deux noeuds présentant certaines symétries. On peut mathématiser la situation. On utilisera dans la suite les notations données sur la figure ci-dessous :



Remarque : **Si $x = 0$ alors on retrouve le tracé numéro 6°**
Si $x = a$ alors on retrouve le tracé numéro 5°.

Soit L la longueur totale du tracé d'autoroute

$$L = 4\ell + 2x$$

C'est L qu'on cherche à minimiser.
Pour simplifier les calculs posons : $y = \frac{L}{2} = 2\ell + x$
L est minimum lorsque y est minimum.

Question 3 : Exprimer y en fonction de x et de a.

Etant donné que a est fixé on peut alors considérer la fonction

$$f : x \longmapsto y = f(x)$$

Question 4 : a) Etudier les variations de f pour $0 \leqslant x \leqslant a$

b) Montrer que f(x) admet un minimum sur l'intervalle $[0 ; a]$

c) Quelle est la valeur de x qui donne ce minimum et quelle est la longueur du tracé d'autoroute correspondant ?

Question 5 : Donner les mesures des angles $\widehat{AEG}$, $\widehat{AEB}$, $\widehat{BEF}$ et $\widehat{FEA}$ correspondant à ce minimum.

3. LA DUPLICATION DU CUBE

Un vieux problème... On part d'un cube d'arête 1 et on cherche à construire un cube de voulume double. Cela revient à chercher son arête a, telle que $a^3 = 2$, donc à chercher une construction -si possible géométrique- de $\sqrt[3]{2}$.

DIOCLES (VIe siècle avant J.C.) a imaginé une courbe permettant la construction plus générale de $\sqrt[3]{n}$, n étant un réel non nul donné.

A/ Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j},)$ est orthonormé.

On considère deux droites, d1 passant par l'origine, de pente $\sqrt[3]{n}$ et d2, passant par le point A(1,0) et le point P(0, n).

<u>Question 1</u> : Donner en fonction de n les équations de chacune de ces droites.

Prouver que d1 et d2 sont sécantes en un point M dont l'abscisse est strictement comprise entre 0 et 1.

<u>Question 2</u> : Montrer que les coordonnées (x,y) du point M vérifient la relation

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe d'équation $y^2 = \frac{x^3}{1-x}$

<u>Question 3</u> : Montrer que $(\mathscr{C})$ est la réunion des deux courbes

$(\mathscr{C}_1)$ d'équation $y = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et

$(\mathscr{C}_2)$ d'équation $y = -x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Par quelle transformation géométrique passe-t-on de $(\mathscr{C}_1)$ à $(\mathscr{C}_2)$?

<u>Question 4</u> : Etudier la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

Construire $(\mathscr{C})$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

B/ Réciproquement, soit un point M(x,y) quelconque sur ($\mathscr{C}$).

Désignons par λ la pente de la droite (OM) et μ celle de la droite (AM).

Question 5 : Montrer que $\lambda^3 = -\mu$

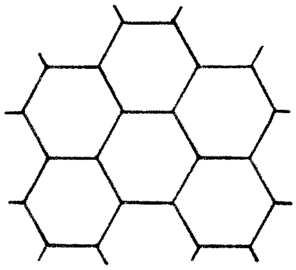
Soit P(0,n) intersection de (AM) et de Oy.
Montrer alors que $\lambda = \sqrt[3]{n}$.

CONCLUSION :

L'ensemble des intersections des droites d1 et d2 est donc la courbe ($\mathscr{C}$). C'est une cissoïde droite.

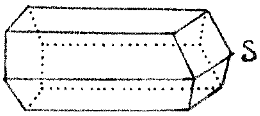
Question 6 : Expliquer comment, n étant donné, on peut utiliser la cissoïde ($\mathscr{C}$) pour construire $\sqrt[3]{n}$.

4. LE PROBLEME DES ABEILLES

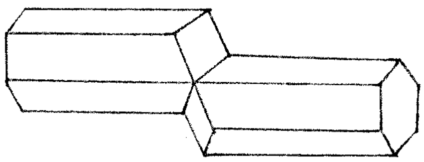


I- DESCRIPTION

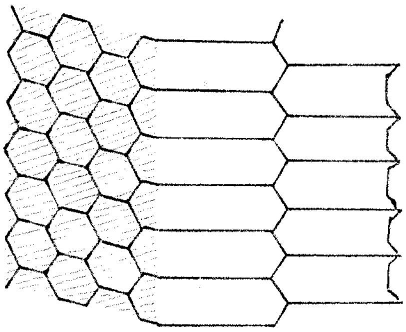
Lorsqu'on examine un gâteau de cire construit par les abeilles pour y dépo- leur miel, on constate qu'il est constitué par des alvéoles (ou cellules) juxtaposés dont l'axe est horizontal et dont l'ouverture a la forme d'un hexagone régulier (figure ci-dessus). Il est formé de deux séries de ces cellules qui se rejoignent par leur fond au milieu du gâteau.



Alvéole isolé



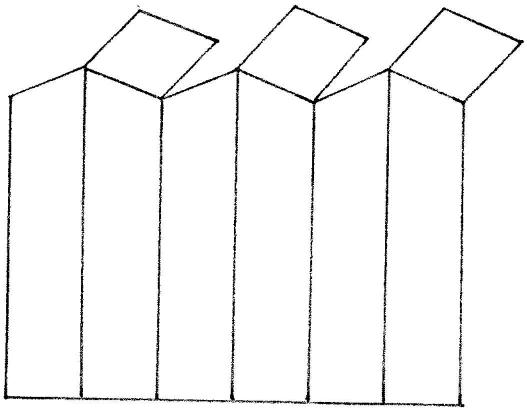
Adossement de deux alvéoles



Coupe d'un gâteau de miel

Le corps de l'alvéole se compose d'un prisme hexagonal droit. Le fond n'est pas un plan mais une surface concave formée de 3 losanges égaux, ayant un sommet commun S. Ainsi sur une cellule s'adossent trois autres cellules ayant chacune avec la première un losange en commun. L'ouverture de la cellule est renforcée par un rebord de cire et est formée par une plaque hexagonale de même nature pour empêcher le miel de couler.

Patron d'un alvéole



II- ECONOMIE DE L'ABEILLE

Lorsqu'on analyse l'architecture du gâteau de miel on constate que l'abeille cherche entre autre à économiser la cire.

1° Tout prisme hexagonal du gâteau, qui ne se trouve pas en bordure, a chacune de ses faces commune à deux alvéoles. Ainsi l'abeille réalise une économie de cire en choisissant une forme géométrique qui permet un emboitement sans interstice (voir l'étude mathématique du paragraphe III).

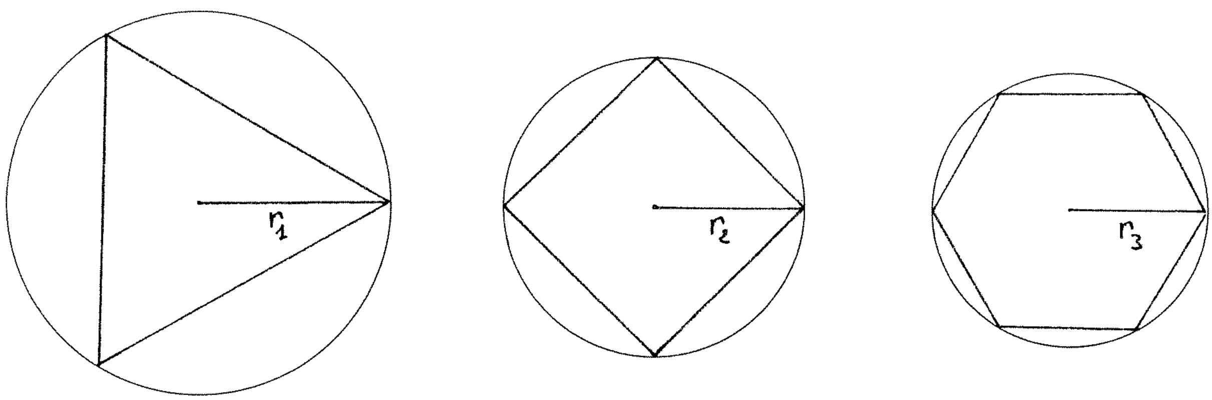
2° L'ouverture d'un alvéole est un hexagone régulier. Parmi les polygones réguliers qui peuvent se juxtaposer sans laisser de vides l'abeille a choisi celui qui pour une aire donnée a le plus petit périmètre et qui par conséquent exige moins de cire pour les parois (voir paragraphe III).

3° La forme choisie pour le fond d'un alvéole permet l'adossement en utilisant chaque losange pour deux cellules et permet aussi de rendre minimum la surface totale des parois d'un alvéole par rapport à un volume donné : nouvelle économie de cire pour l'abeille (voir paragraphe IV). Une structure à fond plat aurait rendu l'ensemble moins rigide mais aurait aussi nécessité plus de cire.

III- RESOLUTION DU PROBLEME PLAN

1° On veut carreler une surface plane avec des carrelages en forme de polygones réguliers tous identiques. En considérant successivement des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers, des heptagones, ... etc, trouver les polygones réguliers qui permettent de réaliser un pavage..

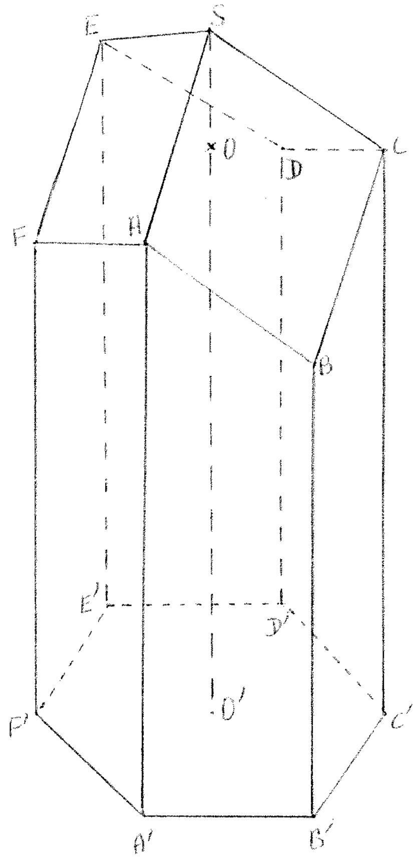
2° On considère un triangle équilatéral, un carré et un hexagone régulier qui définissent des surfaces de même aire A.



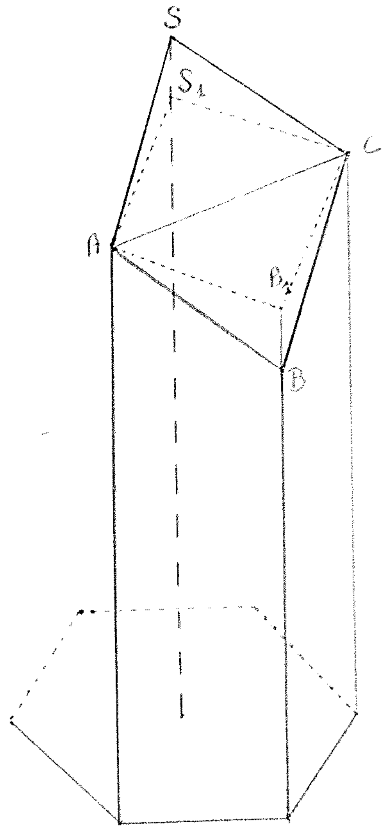
Calculer les rayons des cercles circonscrits à chacun de ces polygones, en fonction de A. Puis comparer les périmètres de ces polygones.
Ces résultats concordent-ils avec la constatation faite au II, 2° ?

IV- RESOLUTION DU PROBLEME DE L'ESPACE

Voici le dessin d'un alvéole isolé posé sur son ouverture. (Ce dessin peut sembler incorrect ; on pourra alors étudier les règles de construction en se reportant au paragraphe V)



(fig. 1)



(fig. 2)

Le prisme hexagonal (A'B'C'D'E'F'FABCDES) a pour base un hexagone régulier. L'axe O'S est orthogonal au plan de base. Les points A, C et E sont dans un plan parallèle au plan (A'B'C'D'E'F'), ainsi que les points B, D et F. Les arêtes AA', BB', CC' ... sont parallèles à l'axe O'S. Le fond est formé de trois faces planes (SABC), (SCDE), (SEFA).

1° Démontrer que (SABC) est un losange et que les trois losanges (SABC), (SCDE), (SEFA), sont isométriques.
Comparer les distances SO', AA' et BB'.

2° Considérons un alvéole -peu différent du premier- tel que les points A, C et E restent à la même place et que les trois losanges se rejoignent en un sommet S_1 de l'axe O'S ($S_1 \neq S$).

En utilisant les notations de la figure 2, montrer que les tétraèdres $ACBB_1$ et $ACSS_1$ ont même volume et en déduire que les alvéoles (A'B'C'D'E'F'FABCDES) et $(A'B'C'D'E'F'F_1AB_1CD_1ES_1)$ ont même volume.

Remarque : en particulier, le volume est encore le même lorsque S_1 est dans le plan (ACE), le prisme ayant alors un fond hexagonal plan, isométrique à l'ouverture.

3° Les deux alvéoles considérés ci-dessus ont même volume mais leur surface latérale n'est pas la même.
Etudions en l'aire.
Soit O le point d'intersection du plan (ACE) avec l'axe (SO'). On pose SO = x et OO' = h et on choisit la mesure du côté de l'hexagone de base comme unité de longueur : A'B' = 1.

(a) Calculer AC

(b) Calculer SB en fonction de x

(c) La surface de l'alvéole est constituée de six trapèzes et de trois losanges.
Calculer l'aire du trapèze ABB'A'
Calculer l'aire du losange ABCS.

(d) En déduire l'aire S(x) de la surface latérale de l'alvéole (S est une fonction de x et de h)

(e) On a vu à la question 2° que seule la distance h détermine le volume de l'alvéole, car quand x varie le volume ne change pas.
En supposant h fixé, montrer que S(x) admet un minimum pour une valeur x_0 que l'on précisera.

4° Soit α l'angle $\widehat{SCB}$ du losange ABCS

(a) Calculer tg $\frac{\alpha}{2}$ dans la cas de l'aire minimale

(b) En déduire une bonne valeur approchée de α en degrés, minutes et secondes.

Les mesures d'un alvéole (prises dans un livre) sont les suivantes :

2,71 mm pour le côté de l'hexagone, 11,3 mm pour sa profondeur, 109°28' et 70°32' pour les angles du losange.

V- ANALYSE DU DESSIN DE L'ALVEOLE

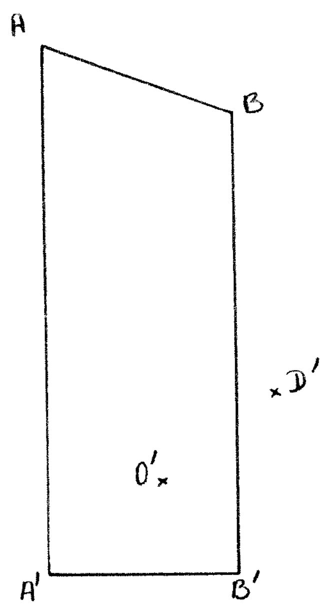
Le dessin est fait selon les règles de la perspective cavalière : on effectue une projection du solide considéré sur le plan de la feuille de papier, parallèlement à une droite.

- Des droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles sur la feuille.
- Sur des droites de même direction, des longueurs égales sont représentées par des longueurs égales

  exemples : * E'E = A'A = C'C , FA = ES = DC , AC = A'C' ...

  * La propriété de milieu est conservée : O' est milieu de [A'D'], de [B'E'], de [C'F'].
- Les segments situés dans un plan face à nous sont en vraie grandeur.

Ci-dessous on ne donne que quelques points en conservant les notations de la figure 1. Compléter le dessin de l'alvéole.



5. RESOLUTION DE L'EQUATION $x^3 - 3x - 1 = 0$ PAR LA METHODE "DU POINT FIXE"

On remarque d'abord qu'aucune des "petites" valeurs entières -2, -1, 0, 1, 2 n'est solution de cette équation.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Question 0 : Etudier les variations de f.
Construire la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé (unité 4 cm).
Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de chacune des trois solutions ($x_1 < x_0 < x_2$) de l'équation $f(x) = 0$.

METHODE 1

Soit x un nombre réel. On a $x^3 - 3x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$.

On considère la suite (u_n) défine par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^3 - 1) \end{cases}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 1)$ et G sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 3cm).

Question 1 : Représenter G ainsi que la droite d d'équation $y = x$.
Quelles sont les abscisses des points d'intersection de G et de d.
Utiliser ce graphique pour construire les premiers termes de la suite (u_n) dans le cas où $\alpha = 2$. Que constate-t-on ?
Faire de même dans le cas où $\alpha = 0$ pouis dans le cas où $\alpha = -2$?

Question 2 : On étudie le cas où $x_1 < \alpha < x_2$.

a) Démontrer par récurrence que :
Si $x_1 < \alpha < x_0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_1 < u_n < x_0$.
Si $x_0 < \alpha < x_2$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 < u_n < x_2$.

b) Etudier le sens de variation de (u_n) dans chacun des cas précédents. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Cette question n'a que peu d'intérêt car elle ne précise pas la rapidité avec laquelle cette suite converge. Au contraire la question suivante fournit cette précision.

Question 3 : Montrer que $-\frac{1}{2} < x_0 < 0$. On choisit $\alpha = 0$

Démontrer que : $\forall\ n \in N,\ -\frac{1}{2} < u_n \leqslant 0$.

Démontrer que : $\forall\ n \in N,\ |u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{1}{4}|\ u_n - x_0|$

En déduire que : $\forall\ n \in N,\ |u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{4})^n$ et conclure.

Donner la valeur affichée par votre calculatrice de x_0, obtenue par ce procédé.

N.B. Cette question peut être résolue :

- soit par un calcul direct : $u_{n+1} - x_0 = \varphi(u_n) - \varphi(x_0)$ ...
- soit par application de l'inégalité des accroissements finis.

METHODE 2

Soit x un nombre réel. On a : $x^3 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3x + 1$.

Question 4 : Montrer que la fonction $x \longmapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que si b est un nombre réel l'équation "$x^3 = b$" admet une unique solution. On la note $\sqrt[3]{b}$. Ainsi :
$x^3 = b \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{b}$. On a donc $x^3 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 3x + 1 \Leftrightarrow$
$x = \sqrt[3]{3x+1}$

On considère la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt[3]{3v_n+1} \end{cases}$

Soit γ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\gamma(x) = \sqrt[3]{3x + 1}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 3 cm).

Question 5 : Montrer que le point M(a;b) appartient à Γ si et seulement si le point P(b;a) appartient à G (définie dans la méthode 2).
Représenter Γ et la droite d'équation $y = x$.

Questions 6 et 7 : Les poser dans des termes analogues à ceux des questions 1 et 2 de la méthode 1, en les adaptant. Puis les résoudre.

Question 8 : a) On choisit $\alpha = 2$

On sait que $x_2 > 1$. Montrer, par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n > 1$.

Démontrer alors que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - x_2| \leqslant \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^2} |v_n - x_2|$

En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |v_n - x_2| \leqslant \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^{2n}}$

Conclure . Donner la valeur, affichée par la calculatrice, de x_2 donnée par ce procédé.

b) On choisit $\alpha = -2$

On sait que $x_1 < -1$, montrer, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n < -1$.

Démontrer alors que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, |v_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2} |v_n - x_1|$.

En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |v_n - x_1| \leqslant \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^{2n}}$.

Conclure. Donner la valeur, affichée par la calculatrice, de x_1 donnée par de procédé.

N.B. Cette question peut être résolue :

- soit par un calcul direct : $v_{n+1} - x_1 = \gamma(v_n) - \gamma(x_1) = \ldots.$

  on utilisera la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ donc $a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$
- soit par application de l'inégalité des accroissements finis si on connaît la dérivée de la fonction $X \longmapsto \sqrt[3]{X}$.

Remarques : • Pour répondre à la question 3 (et à la question 8, si on connaît la dérivée de la fonction $X \longmapsto \sqrt[3]{X}$), on peut :

- soit procéder à l'aide d'un calcul "direct", à partir de l'égalité : $|u_{n+1} - x_i| = |\varphi(u_n) - \varphi(x_i)|$ où x_i désigne l'une des solutions de l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$.
- soit utiliser l'inégalité des accroissements finis.

Il s'agit, en fait, de la même démonstration. En effet, la première façon de faire consiste à mettre en facteur $|u_n - x_i|$ dans le calcul de $|\varphi(u_n) - \varphi(x_i)|$, puis à majorer le quotient $\left| \frac{\varphi(u_n) - \varphi(x_i)}{u_n - x_i} \right|$

c'est-à-dire la valeur absolue d'un taux d'accroissement.

D'autre part, l'inégalité des accroissements finis dit que :

> Etant donné une fonction φ dérivable sur un segment $[a;b]$, $(a < b)$
> si $|\varphi'| \leqslant M$ alors $\left|\dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}\right| \leqslant M$

- D'après le résultat démontré à la question 5, les deux courbes G et Γ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
  A toute sécante de l'une on peut associer la sécante de l'autre qui lui est symétrique par rapport à la première bissectrice.

<u>**Question 9**</u> : Faire une figure et démontrer que les coefficients directeurs de droites symétriques par rapport à la première bissectrice sont inverses l'un de l'autre.

On appelle M_0, M_1 et M_2 les points d'abscisses x_0, x_1 et x_2, communs à G, à Γ et à la première bissectrice.
Le succès de la méthode 1 pour le calcul de x_0 tient au fait qu'au voisinage de M_0 les sécantes à G ont un coefficient directeur compris entre 0 et 1.

<u>**Question 10**</u> : Que peut-on dire des coefficeints directeurs des sécantes à G au voisinage des points M_1 et M_2 ?
Que peut-on dire des coefficients directeurs des sécantes à Γ au voisinage de M_0, au voisinage de M_1 et de M_2 ?

6. RESOLUTION DE L'EQUATION $x^3-3x-1 = 0$ PAR LA METHODE DE NEWTON

On remarque d'abord qu'aucune des "petites" valeurs entières -2, -1, 0, 1, 2 n'est solution de cette équation.

(1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Question 1 : Etudier les variations de f.
Construire la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé (unité 4 cm).
Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de chacune des trois solutions ($x_1 < x_0 < x_2$) de l'équation $f(x) = 0$.

Soit α un nombre réel, M le point C_f d'abscisse α et T la tangente à C_f en M.

Question 2 : La droite T coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse β .
Ecrire l'équation de T et calculer β en fonction de α .

(2) On pose $\dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 - 3} = \varphi(x)$ pour tout nombre réel x, et on considère la suite (α_n) définie par $\alpha_0 = \alpha$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$

Question 3 : On construit géométriquement les points M, M_1, M_2, ..., M_n,... de C_f d'abscisses α , α_1, α_2, ..., α_n, ... dans chacun des cas suivants : $\alpha = 2$; $\alpha = 0$; $\alpha = -2$.
Que constate-t-on dans chaque cas ?

Question 4 : Dans chacun des cas précédents, donner les valeurs de α_1, α_2,... affichées par votre calculatrice.
Que constate-t-on ?

Question 5 : a) Etudier les variations de la fonction φ .
Pour quelles valeurs de x a-t-on $\varphi(x) = x$?
b) On étudie le cas où $\alpha = 2$.
Utiliser le sens de variation φ sur $[x_2, +\infty[$ pour démontrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n > x_2$, et que la suite (α_n) est décroissante. Conclure à la convergence de (α_n).

c) Etudier de façon analogue les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = -2$

d) Donner les valeurs affichées par votre calculatrice de x_0, x_1 et x_2, obtenues par ce procédé.

(3) Complément

Question 6 : Soit r l'une des racines (x_1, x_0 ou x_2) de l'équation $f(x) = 0$, et α un nombre réel différent de 1 et de -1.

a) Montrer que : $\varphi(\alpha) - r = \dfrac{2\alpha^3 - 3r\alpha^2 + r^3}{3\alpha^2 - 3}$

b) Vérifier que : $2\alpha^3 - 3r\alpha^2 + r^3 = (\alpha - r)^2 (2\alpha + r)$

Donc que : $\varphi(\alpha) - r = \dfrac{2\alpha + r}{3\alpha^2 - 3} (\alpha - r)^2$

Question 7 : a) Vérifier que $\frac{7}{4} < x_2 < 2$

En déduire que $0 < \dfrac{2\alpha + x_2}{3\alpha^2 - 3} < 1$ pour tout $\alpha \geq x_2$

b) Soit (α_n) la suite définie à la question 2, avec $\alpha = 2$.

Montrer que : $0 < \alpha_{n+1} - x_2 < (\alpha_n - x_2)^2$

c) On a donc : $0 < \alpha_1 - x_2 < (\alpha_0 - x_2)^2$

$0 < \alpha_2 - x_2 < (\alpha_1 - x_2)^2 < (\alpha_0 - x_2)^4$

$0 < \alpha_3 - x_2 < (\alpha_2 - x_2)^2 < (\alpha_0 - x_2)^8$

....

Déterminer l'entier p tel que :

$$0 < \alpha_n - x_2 < (\alpha_0 - x_2)^p$$

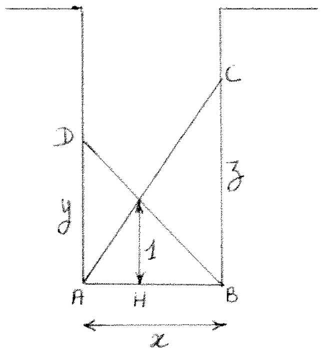
On justifiera la réponse.

Conséquence : L'erreur $\alpha_{n+1} - x_2$ est inférieure au carré de l'erreur $\alpha_n - x_2$.
Or l'erreur de départ $\alpha_0 - x_2 = 2 - x_2$ est inférieure à $\frac{1}{4}$.
Les erreurs aux pas suivants vont donc être inférieures successivement à $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4^4}$, $\frac{1}{4^8}$, $\frac{1}{4^{16}}$, $\frac{1}{4^{32}}$, ... et donc décroître très rapidement.

7. UN PROBLEME D'ECHELLES

I- PROBLEME 1 :

Deux échelles de longueurs respectives 2 et 3 mètres sont placées au fond d'une tranchée comme l'indique le dessin en vue de profil.
Elles se croisent à 1 mètre du sol.
On demande de calculer la largeur de la tranchée.



On a AC = 3, DB = 2, IH = 1.
On pose AB = x, AD = y, BC = z

Question 1 : Etablir les relations $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ et $z^2 - y^2 = 5$

Sachant que $(z + y)^2 - (z - y)^2 = 4yz$, montrer que S = y + z est solution de l'équation :

$$X^4 - 4X^3 - 25 = 0$$

Question 2 : Montrer que $S = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{9-x^2}$
Calculer x en fonction de S.

Question 3 : On résoud l'équation $X^4 - 4X^3 - 25 = 0$ par approximations c'est-à-dire en construisant une suite qui converge vers S.

$$X^4 - 4X^3 - 25 = 0 \Longleftrightarrow X = 4 + \frac{25}{X^3}$$

a) Soit la fonction $\varphi : x \longmapsto 4 + \frac{25}{x^3}$ de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$
Représenter sur un même graphique la courbe représentative C_φ de la fonction φ ainsi que la droite d d'équation y = x.
C_φ et d se coupent en un point dont l'abcisse est S. Encadrer S par deux entiers consécutifs.

b) Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 4 + \dfrac{25}{u_n^3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1- Construire graphiquement les premiers termes de u.

2- Démontrer par récurrence que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $4 \leqslant u_n < 5$

c) Chercher un nombre réel $k (0 < k < 1)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$|u_{n+1} - S| \leqslant k \; |u_n - S|$
(on utilisera pour cela les encadrements de u_n et S précédents).

d) Démontrer que la suite u converge vers S

e) Quelle valeur de S obtient-on par ce procédé à l'aide de la calculatrice ?

Question 4 : Donner une valeur approchée de la largeur de la tranchée au cm près.

II- **PROBLEME 2** : Le problème est semblable au précédent. Les échelles ont cette fois des longueurs de 5 et 7 mètres, et sont disposées dans une rue. Elles se croisent à 1 mètre du sol.
On veut connaître la largeur de la rue.

A/ Reprendre les questions 1 , 2 , 3 a), b), c) du problème 1, en les adaptant aux nouvelles données numériques.
Montrer qu'ici la méthode n'aboutit pas.

B/ On construit une autre suite v.

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; on pose $f_\lambda(x) = \dfrac{\varphi(x) + \lambda x}{1 + \lambda}$

$f_\lambda(x)$ est barycentre de $(x ; \lambda)$ et $(\varphi(x), 1)$ et pour $\lambda > 0$, $f_\lambda(x)$ est compris entre x et $\varphi(x)$

On supposera donc : $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

Question 5 : Démontrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $x = f_\lambda(x)$ ont les mêmes solutions.

Question 6 : Montrer que l'on a : $f_\lambda(6) - 6 > 0$ et $f_\lambda(7) - 7 < 0$.
Que peut-on en déduire pour l'équation $f_\lambda(x) = x$?

Question 7 : Trouver λ_0 tel que l'on ait $f'_{\lambda 0}(6) = 0$

Démontrer que $f_{\lambda 0}$ est une fonction croissante sur l'intervalle $[6 ; 7]$

Question 8 : Soit v la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = f_{4/3}(v_n), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad 6 \leq v_n < 7$

b) Chercher un nombre réel k $(0 < k < 1)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$|v_{n+1} - S| \leq k\,|v_n - S|$

c) Démontrer que la suite v converge vers S.
Quelle valeur obtient-on par ce procédé à l'aide de la calculatrice ?

Question 9 : Donner une valeur approchée de la largeur de la rue au cm près.

8. EXEMPLES D'ITERATION D'UNE FONCTION TRINOME DU SECOND DEGRE

I- Introduction

L'étude suivante est l'amorce de la résolution d'un problème mathématique d'intérêt contemporain.

Position du problème, vocabulaire :

Etant donné une fonction f il est intéressant, en partant d'un réel x_0 donné, de calculer $f(x_0)$, puis $f(f(x_0)$, puis $f(f(f(x_0)))$, etc..

L'activité consistant à calculer successivement $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$, etc... s'appelle itérer f. La suite des nombres $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$, $x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))$ etc... s'appelle l'orbite de x_0.

Les fonctions utilisées ici sont les fonctions f définies par $f(x) = 1-ax^2$ où a est un paramètre réel donné.

Dans toute la suite on prend $x_0 = 0$.

Les programmes suivants permettent d'observer les termes successifs x_0, x_1, x_2...

Le nombre a est emmagasiné en mémoire 0 dans le programme TI, dans la variable A dans le programme basic.

Langage TI
x^2
x
RCL 0
+/-
+
1
=
R/S
RST

Basic

```
1 : PRINT X : X = 1-A*X*X : GOTO 1
```

II- Expérimentation numérique et observation graphique

Question 1 : A l'aide d'une calculatrice, observez la suite des termes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ pour les valeurs suivantes de a :

$a = 0{,}1$; $a = 0{,}2$; $a = 0{,}5$; $a = 0{,}99$; $a = 1$

La représentation graphique de f permet également d'observer le comportement de la suite (x_n).
On a représenté ci-dessous la fonction f pour $a = -0{,}2$ et tracé la droite d d'équation $y = x$ (le repère choisi est orthonormé).

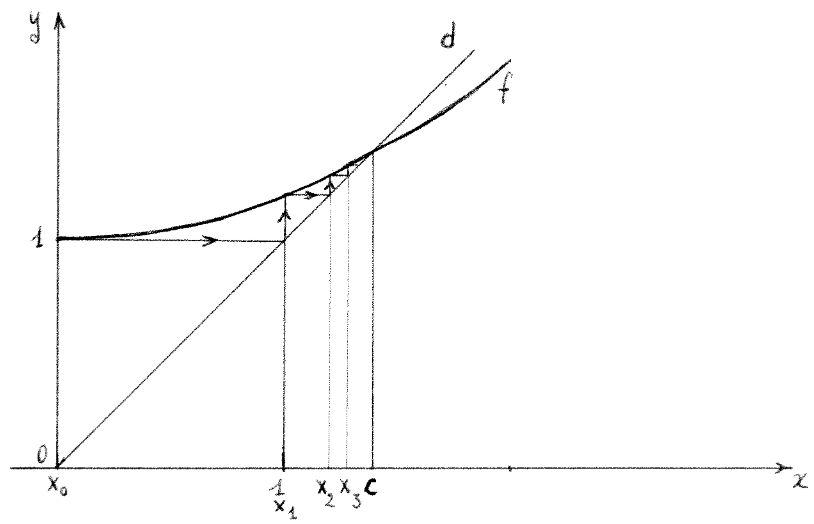


fig. 1

Question 2 : Expliquer ce graphique et montrer comment le graphique permet de prévoir que la suite (x_n) est croissante.
L'observation du graphique précédent permet de prévoir que la suite (x_n) converge vers un nombre c qui vérifie $f(c) = c$.
Toute solution de l'équation $f(x) = x$ est appelée point fixe de f.

Question 3 : Ecrire l'équation donnant les points fixes de f.
Pour quelles valeurs de a la fonction f admet-elle des points fixes ? Exprimer, en fonction de a, les points fixes de f.

On suppose, dans toute la suite de cette étude, que l'on a $a > 0$.

Question 4 : Démontrer que, dans ce cas, f admet deux points fixes de signes contraires.
On note c_0 et c_1 (avec $c_1 > 0$) les points fixes de f.

III- Approche mathématique de l'étude de la suite des x_n.

Les nombres x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ... sont les termes successifs de la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
L'observation numérique précédente montre que cette suite présente différents comportements selon la valeur de a. Il s'agit ici d'expliquer rigoureusement, dans un certain nombre de cas, les phénomènes observés.

1 Examen d'un cas particulier

On suppose a = 0,5.

Question 5 : a) Etudier et représenter graphiquement f dans ce cas (on prendra 10 cm comme unité sur chaque axe).
A l'aide de la représentation graphique obtenue, placer, sur l'axe des abscisses x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ... ainsi que c_1.

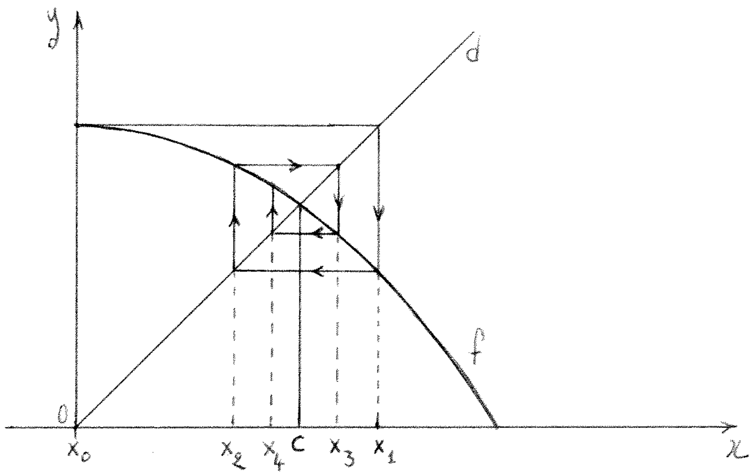


fig. 2

Question 6 : a) Démontrer que pour tout x de [0,1] f(x) appartient à [0,1].
En déduire que tous les termes de la suite (x_n) appartiennent à [0,1].

b) En utilisant les variations de la fonction f et en remarquant que $f(c_1) = c_1$ établir que pour tout entier p on a :

$$x_{2p} \leqslant c_1 \leqslant x_{2p+1}$$

c) Etablir que l'on a $x_0 \leqslant x_2$; en déduire, en utilisant les variations de f, que l'on a $x_3 \leqslant x_1$ puis $x_2 \leqslant x_4$ et, de façon générale, établir que la sous-suite (x_{2p}) formée des termes d'indices pairs de (x_n) est croissante et que la sous suite (x_{2p+1}) formée des termes d'indices impairs de (x_n) est décroissante.

d) En déduire que quel que soit l'entier $n \geqslant 2k+1$ (k entier donné) x_n appartient à l'intervalle $[0, x_{2k+1}]$

Question 7 : a) Calculer $f'(x_3)$ puis démontrer que quel que soit l'entier $n \geqslant 3$ on a : $|x_{n+1} - c_1| \leqslant k|x_n - c_1|$, k est un nombre réel vérifiant $0 < k < 1$ que l'on précisera.

b) En déduire pour tout entier $n \geqslant 3$ l'inégalité

$|x_n - c_1| \leqslant k^{n-3}$

Conclure quant à la convergence de la suite (x_n).

c) Comparer la limite de la suite (x_n) obtenue à la calculatrice, et c_1.

2 Généralisation

On fait maintenant varier a de façon à voir si on peut généraliser l'étude du cas particulier précédent.

Question 8 : Démontrer que les résultats de la question 6 restent vérifiés tant que le nombre a ne dépasse pas 1.

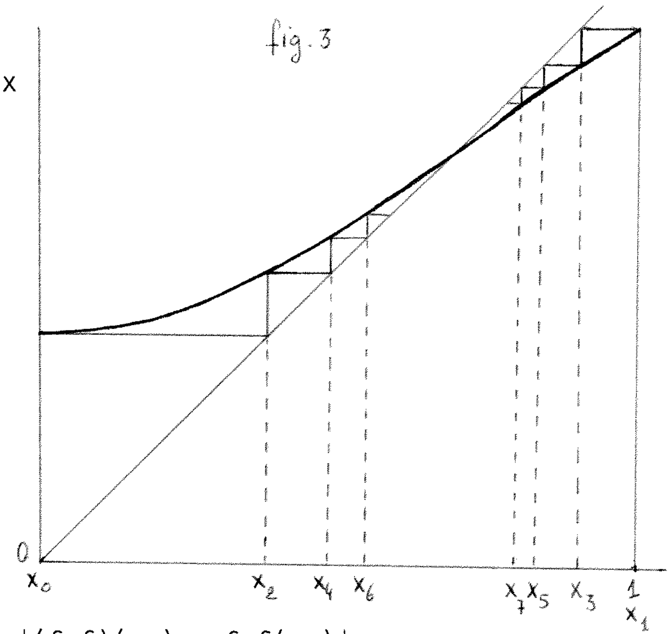
Si la question 6 se généralise aisément il n'en va pas de même pour la question 7. Dès qu'on a trouvé un entier n impair tel que $|f'(x_n)| < 1$ (l'analogue de x_3 dans le cas particulier $a = 0,5$) on peut reprendre le raisonnement de la question 7 et prouver que la suite (x_n) converge vers c_1.

<u>Question 9</u> : Trouver un tel entier impair pour a = 0,6 ; a = 0,62

Lorsque a augmente, la recherche d'un tel entier impair, qui ne peut se faire, en pratique, qu'avec la calculatrice, devient vite longue et peut même conduire à des résultats erronés. En effet, les erreurs d'arrondi effectuées à chaque pas d'itération augmentent et peuvent devenir suffisamment grandes pour donner des résultats parfaitement faux.
Les expérimentations numériques faites pour a = 0,6 et a = 0,62 montrent que les deux sous-suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) semblent toutes deux converger vers la même limite c_1.
On y voit plus clair en étudiant séparément ces deux sous-suites.
Remarquons que $x_2 = fof(x_0)$, $x_4 = fof(x_2)$, etc.

et que $x_3 = fof(x_1)$, $x_5 = fof(x_3)$ etc.

On peut alors effectuer un schéma analogue à celui de la figure 1 en remplaçant la représentation graphique de f par celle de fof.
On a représenté ci-contre la fonction fof pour a = 0,62 et la droite d d'équation y = x sur [0,1]. Une construction analogue à celle de la figure 2 fait appararaître graphiquement les termes successifs des sous-suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}).
Pour décrire mathématiquement la situation rencontrée on recherchera maintenant des inégalités de la forme
$|x_{n+2} - c_1| \leqslant k|x_n - c_1|$ avec $0 \leqslant k < 1$



<u>Question 10</u> : a) Démontrer que $|x_{n+2} - c_1| = |(fof)(x_n) - fof(c_1)|$

b) En utilisant la dérivée de la composée de deux fonctions exprimer (fof)'(x) en fonction de a et de x.

c) On pose g(x) = (fof)'(x). Etudier les variations de la fonction g dans $[0, +\infty[$

d) En déduire que (fof)' admet dans $[0, +\infty[$ un maximum égal à $\frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$ et que dans $[0,1]$ on a $|(f\circ f)'(x)| \leqslant \frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$

e) Pour quelle valeur de a ce maximum est-il égal à 1 ?

<u>**Question 11**</u> : On suppose $0 < a < \frac{3}{4}$

a) Démontrer qu'on peut trouver un nombre k vérifiant $0 < k < 1$ tel que, pour tout entier n on ait :
$|x_{n+2} - c_1| \leqslant k \ |x_n - c_1|$

b) En déduire que les deux sous-suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) puis la suite (x_n) convergent vers c_1.

Il est intéressant de faire une étude comparée des fonctions qui donnent, suivant les valeurs de a, le maximum de (fof)' (x) et $f'(c_1)$ et de représenter ces fonctions dans un même repère.

<u>**Question 12**</u> : Exprimer $|f'(c_1)|$ en fonction de a. Tracer, dans un même repère les courbes représentatives des fonctions qui à a associent $|f'(c_1)|$ et $\frac{8a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}$. Vérifier que ces courbes se coupent au point de coordonnées $(\frac{3}{4}, 1)$ et que le maximum de (fof)'(a) est inférieur à 1 si et seulement si $|f'(c_1)| < 1$.

<u>En conclusion</u> : <u>Si $|f'(c_1)| < 1$ c'est-à-dire si $a < \frac{3}{4}$ la suite (x_n) converge vers c_1.</u>

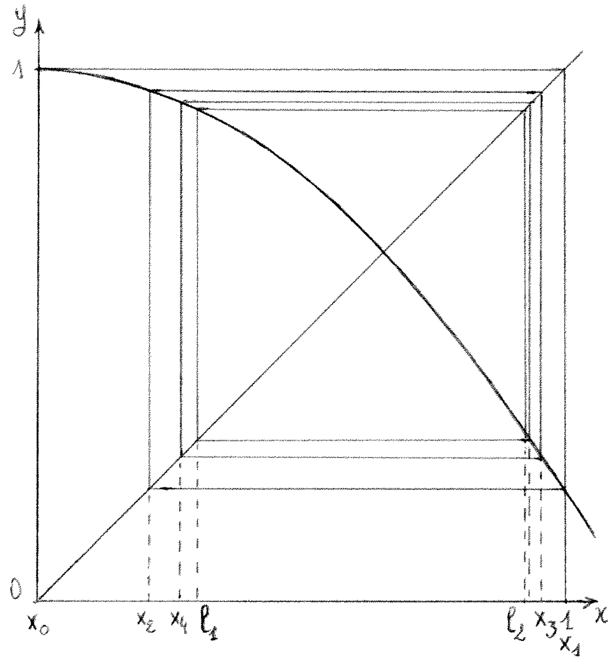
IV- Amorce de l'étude de la suite (x_n) pour $a > \frac{3}{4}$.

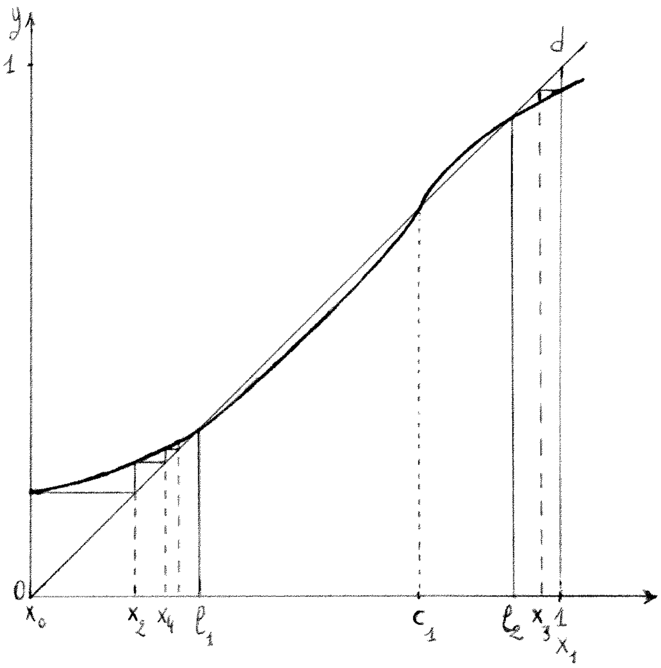
1 Introduction

Si $a > \frac{3}{4}$ le raisonnement précédent ne s'applique plus. On procède à l'expérimentation numérique.

Question 13 : A l'aide d'une calculatrice étudier la suite (x_n) pour de grandes valeurs de n lorsque a = 0,95.
On remarque que les décimales de x_n se "stabilisent", selon la parité de n. Les valeurs affichées par la calculatrices pour n pair $n \geqslant 24$ sont figées à 0,05556463619 et celles obtenues pour n impair sont figées pour $n \geqslant 25$ à 0,9970669427.
On observe alors la situation suivante : les sous-suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) convergent vers des limites distinctes λ_1 et λ_2.
La suite (x_n) n'est bien sûr pas convergente.

Les représentations graphiques de f et fof expliquent bien la situation rencontrée. On a pris ici a = 0,8. L'expérimentation numérique et les graphiques montrent que les deux sous-suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) convergent vers deux limites l_1 et l_2 distinctes et que l_1 et l_2 sont deux points fixes de fof. De plus le graphique ci-dessous montre que $l_1 = f(l_2)$ et $l_2 = f(l_1)$ donc que f échange l_1 et l_2.





Pour a quelconque supérieur à $\frac{3}{4}$ on recherche systématiquement les nombres l_1 et l_2 distincts échangés par f.

Question 14 : a) Démontrer que l_1 et l_2 sont des racines de l'équation fof(x) = x c'est-à-dire des points fixes de fof.

b) Démontrer que les points fixes de f sont également des solutions de l'équation fof(x) = x.

c) Démontrer que les racines que l'équation fof(x) = x autres que les points fixes de f sont distinctes et échangées par f.

d) Calculer fof(x) et mettre l'équation fof(x) = x sous la forme P(x) = 0 où P est un polynôme du quatrième dégré en x.

Question 15 : Vérifier que, pour tout réel x on a

$$P(x) = (ax^2 + x - 1)(a^2x^2 - ax - a + 1)$$

Question 16 : Déduire de la question précédente les expressions, en fonction de a, de l_1 et l_2 puis les valeurs numériques de l_1 et l_2 dans le cas où a = 0,95.

Comparer avec les valeurs trouvées par l'expérimentation numérique. Un raisonnement analogue a celui utilisé pour prouver la convergence de (x_n) dans le cas où $a < \frac{3}{4}$ permettrait d'établir, en remplaçant f par fof, que la configuration formée d'un cycle à deux éléments (l_1 et l_2) persiste tant que l'on a $|(fof)'(l_1)| < 1$ et $|(fof)'(l_2)| < 1$.

Question 17 : En utilisant la dérivée de la composée de deux fonctions et en remarquant que f échange l_1 et l_2 établir que $(fof)'(l_1) = (fof)'(l_2) = f'(l_1)\cdot f'(l_2)$.

Question 18 : En utilisant les résultats de la question précédente trouver l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la configuration (l_1, l_2) persiste.

Indication : Pour éviter des calculs inutiles on remarquera que le calcul de $f'(l_1)\cdot f'(l_2)$ ne fait intervenir que le produit des racines de l'équation

$$a^2 x^2 - a x - a + 1 = 0$$

et, par conséquent, qu'il est inutile et maladroit d'expliciter l_1 et l_2.

COMMENTAIRES

Lorsque a a franchi la valeur $\frac{3}{4}$ la suite (x_n) qui était convergente s'est mise à diverger mais les deux sous-suites (x_{2p}) et (x_{2p+1}) convergeaient vers deux valeurs distinctes l_1 et l_2 échangées par f . On dit qu'il y a lorsque a dépasse $\frac{3}{4}$ formation d'un cycle (l_1, l_2) à deux éléments et que $\frac{3}{4}$ est une valeur de bifurcation.

La valeur de bifurcation suivante est $\frac{5}{4}$. Si a dépasse $\frac{5}{4}$ la configuration formée d'un cycle à deux éléments ne subsiste plus.
Et si $a > \frac{5}{4}$:
On voit apparaître une configuration formée d'un cycle à 4 éléments puis lorsque a augmente, une nouvelle valeur de bifurcation, puis en franchissant cette nouvelle valeur de bifurcation un cycle à 8 éléments etc... Le nombre a augmentant encore on dépasse la "zone" dans laquelle existe un cycle à 2^n éléments pour rencontrer une situation fort complexe qui est au coeur de recherches actuelles.

9. PARADOXE

On considère un cylindre de révolution $\mathscr{C}$, de rayon R et de hauteur H.

Question 1 : Calculer l'aire de la surface latérale de $\mathscr{C}$.
(Précision : dans la surface latérale on ne compte pas le "fond" et le "couvercle").

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat connu sous le nom de paradoxe de H.A. SCHWARTZ (1890) :

> On peut inscrire dans $\mathscr{C}$ un polyèdre d'aire latérale arbitrairement grande.

1) Soit C_1 et C_2 deux cercles parallèles de $\mathscr{C}$ et h la distance entre les plans de ces deux cercles.
On se donne un entier n et on inscrit dans chacun de ces deux cercles un polygone régulier de n côtés tournés de $\frac{\pi}{n}$ radians l'un par rapport à l'autre ; on joint alors chaque sommet de l'un des polygones à ses deux plus proches voisins de l'autre. On obtient ainsi ce qu'on appelle un antiprisme (figure 1) caractérisé par R, n et h.

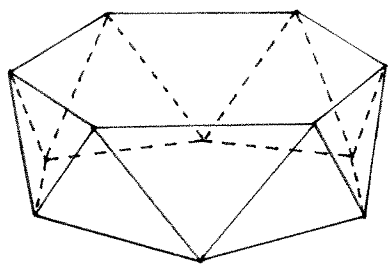


figure 1

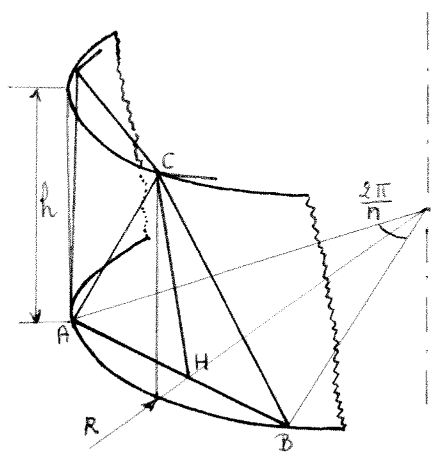


figure 2

(2) Surface latérale d'un antiprisme :
Soit ABC un des triangles (figure 2) de la surface latérale de l'antiprisme décrit précédemment.

Question 2 : a) Calculer AB puis la hauteur CH du triangle ABC en fonction R, n et h.

b) En déduire l'aire de la surface latérale de l'antiprisme.

(3) Soit p un entier naturel. On partage H en p parties égales et on pose $h = \frac{H}{p}$.
On "empile" p antiprismes identiques à celui étudié précédemment, de façon que deux antiprismes adjacents aient un polygone commun. On obtient ainsi un polyèdre P inscrit dans $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire dont tous les sommets appartiennent à $\mathcal{C}$).

Question 3 : Démontrer que l'aire latérale $\mathcal{A}_n$ de P est :

$$\mathcal{A}_n = 2n\, R \sin\frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + 4p^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

Question 4 : a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n\, R \sin\frac{\pi}{n}$

b) Pour n très grand $\sin\frac{\pi}{2n}$ est voisin de $\frac{\pi}{2n}$ donc $\sin^4 \frac{\pi}{2n}$ est voisin de $(\frac{\pi}{2n})^4$

Choisissons $p = n^3$ donc $p^2 = n^6$

On a alors :

$$\mathcal{A}_n = 2n\, R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + 4R^2\, n^6 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}$$

Calculer dans ce cas : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n$

Question 5 : Donner en fonction de n des valeurs de p pour lesquelles on ait :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{A}_n = 2\pi RH$$

10. UN CALCUL D'AIRE DANS L'EVOLUTION HISTORIQUE DES MATHEMATIQUES

NEWTON (1642-1727) et LEIBNIZ (1646-1716) sont les deux fondateurs du calcul intégral mais un grand mathématicien qui les précède Pierre FERMAT (1601-1665) obtint quelques résultats dans des calculs d'aires. En utilisant des suites géométriques il réussit à évaluer l'aire comprise entre la courbe représentant la fonction $f : x \mapsto x^n (n \in \mathbb{Z} / \{-1\})$, l'axe des abscisses et certaines frontières verticales.

Il débute l'exposé de ses résultats sur ce sujet ainsi :

> *"Archimède n'a employé la progression géométrique que pour la seule quadrature de la parabole ; .... j'ai reconnu et éprouvé cette progression comme très féconde en quadratures, et je communique volontiers aux géomètres modernes mon invention qui permet de carrer, par une méthode absolument identique, et paraboles et hyperboles".*

Nous allons utiliser les suites géométriques avec un langage simplifié et moins géométrique qu'à l'époque et si vous avez déjà étudié le calcul intégral, vous pourrez contrôler ou même prévoir vos résultats.

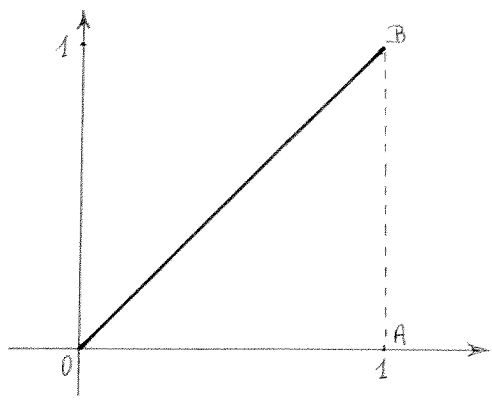
Dans toute la fiche nous utiliserons des repères orthonormés.

I- Supposons $n \geqslant 0$ et x compris entre 0 et 1

1) Pour $n = 1$ nous n'allons pas utiliser le procédé car une formule connue depuis longtemps donne :

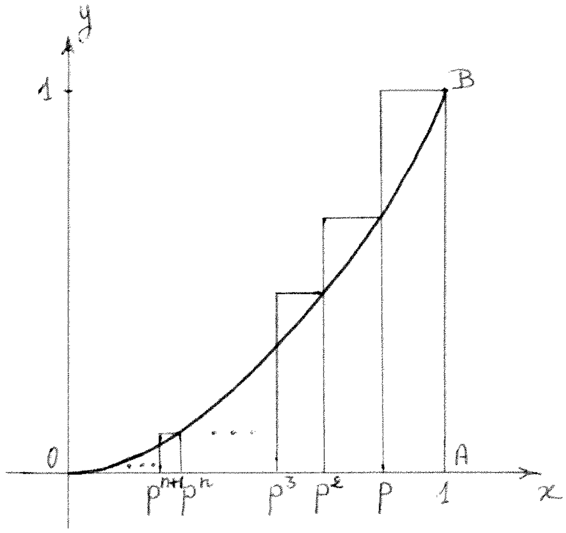
$$\frac{OA \times AB}{2} = \frac{1}{2}$$

pour l'aire du triangle OAB.



(2) Soit n = 2. Cherchons une valeur approchée de l'aire comprise entre la courbe représentant $f : x \mapsto x^2$, l'axe des abscisses et la droite x = 1
Soit p un réel tel que : $0 < p < 1$.

A/ Les points d'abscisses 1, p, p^2, p^3... p^n sont des sommets de rectangles construits comme l'indique la figure ci-dessous. Chaque rectangle a aussi un sommet sur la courbe.



La somme des aires de ces rectangles est :

$(1-p)\times 1^2 + (p-p^2)\times p^2 + (p^2-p^3)\times(p^2)^2 + \ldots . + (p^n - p^{n+1})\times(p^n)^2 + \ldots$

et peut s'écrire

$(1-p)\times 1 + (1-p)\times p^3 + (1-p)\times(p^3)^2 + \ldots . + (1-p)\times(p^3)^n + \ldots .$

Soit $S_n(p)) = (1-p)\times 1 + (1-p)p^3 + (1-p)(p^3)^2 + \ldots . + (1-p)(p^3)^n$

S_n est la somme des termes u_i d'une suite géométrique de premier terme (1-p) et de raison p^3 pour i allant de 0 à n

<u>**Question 1**</u> : a) Calculer $S_n(p)$

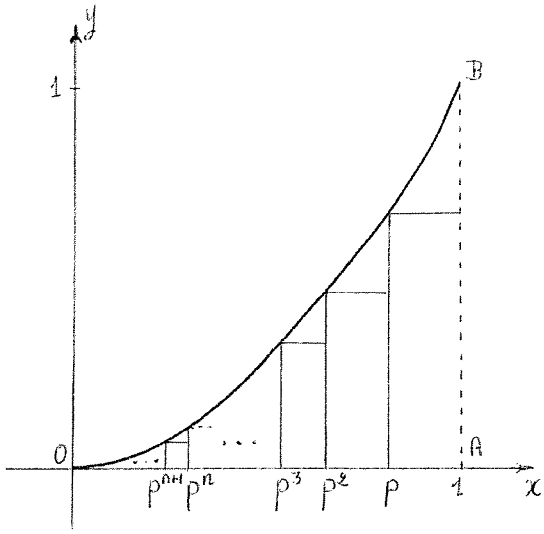
b) En utilisant l'égalité $1 - p^3 = (1-p)(1+p+p^2)$ transformer $S_n(p)$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(p)$.

Soit S(p) la limite obtenue.

B/ Les rectangles choisis au A/ et l'observation nous conduisent à dire que S(p) est un majorant de l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et la droite d'abscisse 1. En prenant des rectangles contenus dans cette partie nous pouvons obtenir un minorant de cette aire.

Le dessin ci-contre correspond à cette situation. Le premier rectangle a pour largeur (1-p) et pour hauteur $f(p)=p^2$, le deuxième a pour largeur $(p-p^2)$ et pour hauteur $f(p^2) = (p^2)^2$, etc....

Soit $S'_n(p)$ la somme des aires de ces rectangles, le dernier rectangle considéré étant celui de largeur $(p^n - p^{n+1})$



Question 2 : a) Calculer $S'_n(p)$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n(p)$. Soit S'(p) la limite obtenue

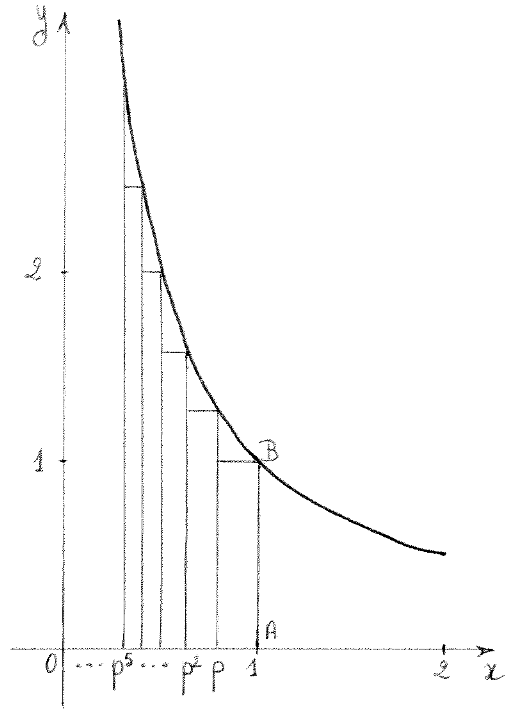
C/ Maintenant si nous faisons tendre p vers 1, la largeur de chacun des rectangles tend vers 0

Question 3 : a) Calculer $\lim\limits_{p \to 1} S(p)$ et $\lim\limits_{p \to 1} S'(p)$.

b) Que peut-on en déduire pour l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses la courbe et la droite d'équation x = 1 ?

3 Soit n = 3.

Question 4 : Dessiner la représentation graphique de $f : x \mapsto x^3$ pour $x \in [0 ; 1]$ et utiliser le même procédé qu'au I, 2 pour trouver l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation x = 1.



II- Supposons $n \leqslant -1$ et x compris entre 0 et 1.

(1) Soit $n = -1$, et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

On prend un réel p vérifiant : $0 < p < 1$

On pose

$$S_n(p) = (1-p)+(p-p^2)x\frac{1}{p} + (p^2-p^3)x \frac{1}{p^2} + \dots + (p^n-p^{n+1}) x \frac{1}{p^n}$$

Question 5 : a) Que représente cette somme $S_n(p)$?

b) Calculer $S_n(p)$

c) Pour $p = 0{,}999$ calculer $S_n(p)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(p)$

On considère l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe et la droite d'équation $x = 1$. Remarquer que tous les rectangles dessinés sont contenus dans cet ensemble et comparer cette situation à celles étudiées au paragraphe I.

(2) Soit $n = -2$

On considère donc la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$

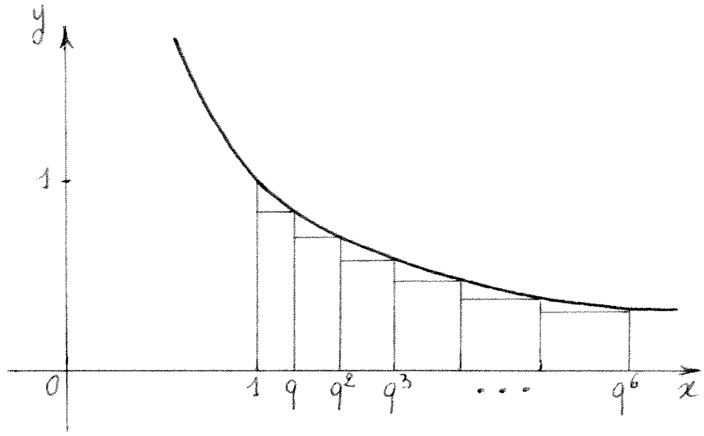
Question 6 : a) Dessiner la représentation graphique de f sur $]0 ; 1]$.

b) Reprendre le calcul de $S_n(p)$ dans ce cas et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(p)$

c) Quelle conclusion peut-on tirer de ce résultat ?

Question 7 : En donnant les représentations graphiques de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0 ; 1]$ dans un même repère, confirmer le résultat précédent.

III- Supposons $n \leqslant -1$ et $x \geqslant 1$.



1) Soit $n = -1$

On considère de nouveau la fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ mais en s'intéressant aux valeurs de x supérieures à 1.
Soit un réel $q > 1$
Les points d'abscisses $1, q, q^2 ...$ nous permettent de définir des rectangles comme précédemment et la somme des aires de ces rectangles est :

$$(q-1) \times \frac{1}{q} + (q^2 - q) \times \frac{1}{q^2} + (q^3 - q^2) \times \frac{1}{q^3} + ... + (q^{n+1} - q^n) \times \frac{1}{q^{n+1}} + ...$$

<u>**Question 8**</u> : a) Définir $S_n(q)$ et calculer $S_n(q)$ en fonction de q.

b) Pour $q = 1,1$, calculer $S_n(q)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(q)$

c) Que peut-on en déduire pour l'ensemble des points du plan situés entre la courbe, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et ayant une abscisse supérieur à 1.

2) Soit $n = -2$

On considère la courbe représentant $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ pour $x \geqslant 1$, et un réel q strictement supérieur à 1.
On peut définir une série de rectangles contenus dans la partie située sous la courbe comme au paragraphe précédent et correspondant à une somme $S_n(q)$.

<u>**Question 9**</u> : a) Calculer $S_n(q)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n(q)$

b) On note S(q) la limite obtenue. Que représente S(q) pour l'ensemble des points du plan compris entre la courbe, l'axe des abscisses, la droite d'abscisse $x = 1$ et ayant une abscisse supérieure à 1.

Cette fois-ci $S(q)$ n'est pas infinie. Il ne suffit plus d'avoir un minorant de l'aire mais on peut obtenir un majorant en prenant les rectangles qui "débordent" de la partie considérée.

Question 10 : a) Dessiner ces rectangles et calculer la somme $S'_n(q)$ correspondante.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n(q)$. On la note $S'(q)$.

Question 11 : Calculer $\lim\limits_{q \to 1} S(q)$ et $\lim\limits_{q \to 1} S'(q)$

Que peut-on déduire de ces résultats ?

(3) Reprendre les calculs pour $n = -3$.

IV- Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$

Utilisons la même méthode qu'en I pour calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

Question 12 : a) Dessiner la représentation graphique de f pour $x \in [0 ; 1]$ ainsi que les rectangles définis comme en I par les abscisses $1, p, p^2, \ldots$ pour $0 < p < 1$

b) Reprendre les calculs de I 2. pour cette fonction.

c) Comment lier le résultat de vos calculs à celui de I2 ?

11. CALCUL D'AIRES
METHODE DE SIMPSON

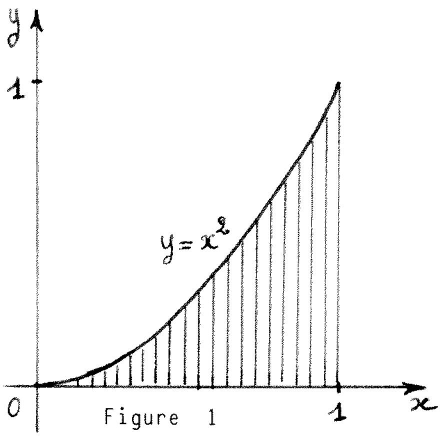


Figure 1

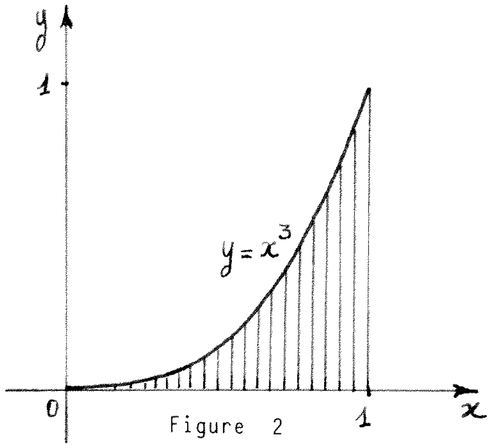


Figure 2

On sait que l'aire de $\{M(x,y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$ est égale à $\frac{1}{3}$ (fig 1) et que l'aire de $\{M(x,y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x^3\}$ est égale à $\frac{1}{4}$ (fig 2).

(1) Soit P une parabole d'axe parallèle à l'axe des ordonnées. On sait que l'équation de P est de la forme : $y = ax^2 + bx + c$.
Pour déterminer les coefficients a, b et c de cette équation, il suffit de connaître trois points de P : $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$. Les nombres a, b et c vérifient, en effet, les trois égalités :

$$\begin{cases} x_0^2\ a + x_0 b + c = y_0 \\ x_1^2\ a + x_1 b + c = y_1 \\ x_2^2\ a + x_2 b + c = y_2 \end{cases}$$

Ces égalités suffisent à déterminer les nombres a, b et c.

Question 1 : Déterminer l'équation de la parabole P passant par les trois points $M_0(0;2)$, $M_2(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4})$ et $M_1(1;5)$. Représenter P.

(2) Soit $\mathcal{A}_p$ l'aire de la surface comprise entre la parabole P, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. (figure 3)

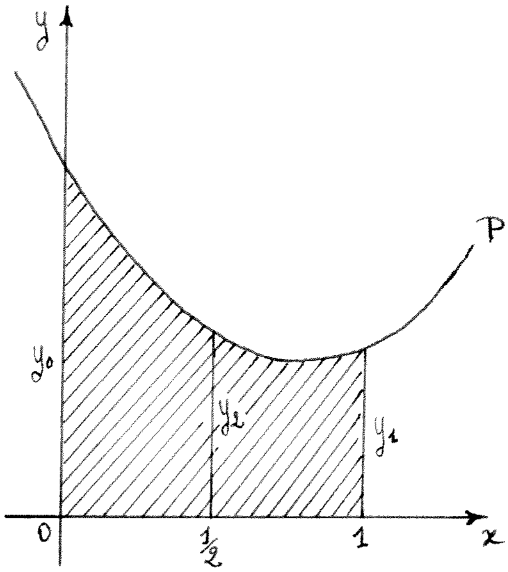


Figure 3

Notons que dans ce cas de figure, où l'arc de P est situé "au-dessus" de l'axe des abscisses, $\mathcal{A}_p$ est l'aire de l'ensemble :

$\{M(x,y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant ax^2 + bx + c\}$

On a dans ce cas :

$$\mathcal{A}_p = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx$$

La parabole P étant déterminée par la donnée des trois ordonnées y_0, y_1 et y_2 des points d'abscisses 0, 1 et $\frac{1}{2}$, il en est donc de même de $\mathcal{A}_p$. On cherche, par conséquent, à calculer $\mathcal{A}_p$ uniquement à l'aide de y_0, y_1 et y_2 et sans utiliser l'équation de P.

3 a) On regarde d'abord ce qui se passe dans le cas d'une droite d (figure 4). La droite d est entièrement déterminée par les deux points d'abscisses 0 et 1 ; et d est la représentation graphique d'une fonction affine f.

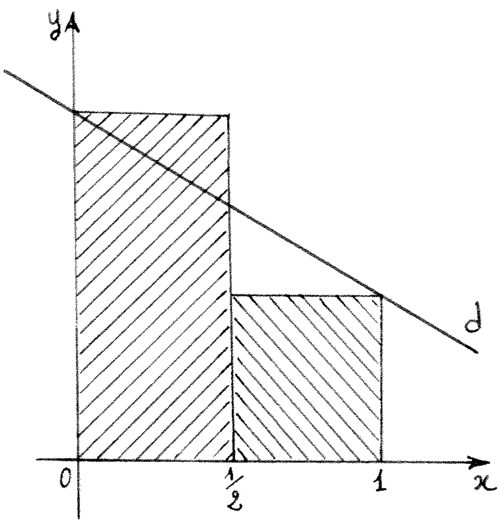


Figure 4

L'aire du trapèze

$\{M(x,y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

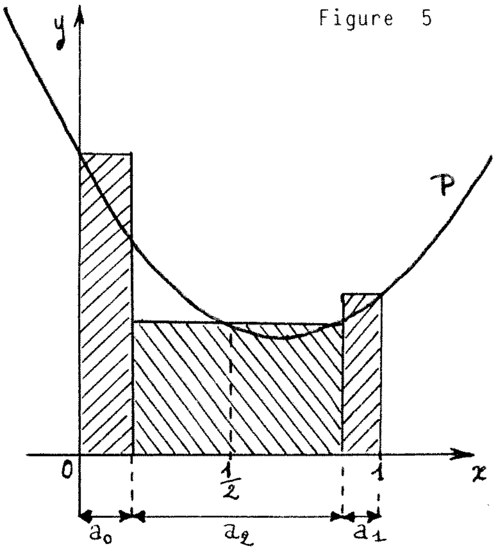
est égale à :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(o) + f(1)] = \frac{1}{2}\ f(o) + \frac{1}{2}\ f(1)$$

Ainsi pour toute fonction affine f, l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ peut s'interprêter comme la somme des aires de deux rectangles de "bases" $\frac{1}{2}$ et de "hauteurs" respectives $y_0 = f(o)$ et $y_1 = f(1)$.

b) Revenons à la parabole P, d'equation $y = f(x)$, où cette fois f est une fonction polynôme du second degré. (figure 5).

Figure 5



On cherche à exprimer l'aire du trapèze "mixtiligne"

$\{M(x,y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

comme somme des aires de trois rectangles de "hauteurs" respectives $y_0 = f(o)$, $y_1 = f(1)$ et $y_2 = f(\frac{1}{2})$.

> Autrement dit, on cherche trois nombres a_0, a_1 et a_2 (de somme égale à 1) tels que :
>
> $$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(o) + a_1 f(1) + a_2 f(\tfrac{1}{2}) \qquad (1)$$
>
> pour toute fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 2.

c) Nous procédons en deux temps :

1. Analyse :

Si a_0, a_1 et a_2 sont trois nombres qui vérifient l'égalité (1) pour toute fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors ils la vérifient en particulier pour chacune des fonctions $x \longmapsto 1$, $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$.

Question 2 : Ecrire l'égalité (1) pour chacune de ces trois fonctions.
Montrer que a_0, a_1 et a_2 sont déterminés de façon unique ; les calculer.

2. Synthèse :

Question 3 : Montrer que si l'on donne à a_0, a_1 et a_2 les valeurs trouvées à la question 2, alors l'égalité (1) est vérifiée pour toute fonction polynôme $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$.

d)

Question 4 : Montrer que si l'on donne à a_0, a_1 et a_2 les valeurs trouvées à la question 2, alors l'égalité (1) est vérifiée pour toute fonction polynôme $f : x \longmapsto dx^3 + ax^2 + bx + c$

Conclusion :

> Pour toute fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois on a :
> $$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}(f(o) + 4\, f(\tfrac{1}{2}) + f(1))$$
> Cette formule est connue sous le nom de formule de SIMPSON.

Question 5 : a) Appliquer la formule de SIMPSON

1- Au cas de la parabole P de la question 1. Soit $y = f(x)$ son équation.

2- Au calcul de l'intégrale $\int_0^1 g(x)\,dx$ où $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5x + 2$. On représentera f et g sur un même grphique.

b) On pose $h(x) = g(x) - f(x)$.
Représenter h graphiquement. Factoriser $h(x)$. Vérifier que le point $\Omega(\frac{1}{2}\ ;\ 0)$ est centre de symétrie pour la courbe représentative de h. Retrouver ainsi le résultat de a) :
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

c) Donner au moins un autre exemple de fonction g du troisième degré qui vérifie : $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$.

d) Montrer qu'à toute fonction polynôme g du troisième degré, on peut faire correspondre une fonction f du second degré telle que : $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

(4) On considère maintenant une fonction quelconque φ définie sur $[0;1]$.

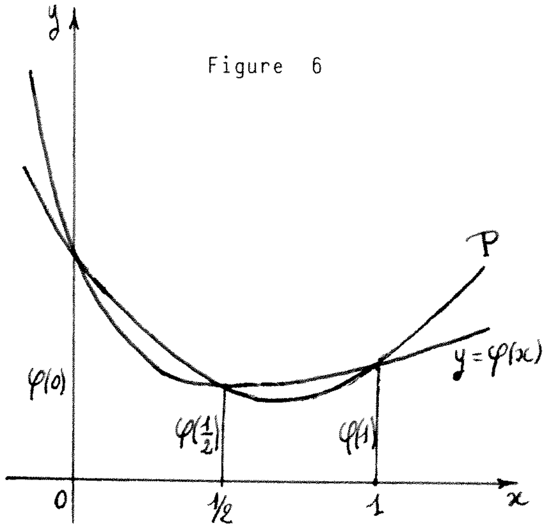


Figure 6

Soit P la parabole d'axe parallèle à l'axe des ordonnées passant par les points
$M_0(0, \varphi(0))$, $M_1(1, \varphi(1))$ et $M_2(\frac{1}{2}, \varphi\frac{1}{2}))$

Soit $y = f(x)$ l'équation de P.
Le nombre $S = \frac{1}{6}(\varphi(0) + 4\varphi(\frac{1}{2}) + \varphi(1))$ est la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ et constitue une valeur "approchée" de l'intégrale $\int_0^1 \varphi(x)dx$ (figure 6)

Question 6 : Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2$ sur $[0;1]$.

a) Représenter graphiquement la fonction φ dans un repère orthonormé.

b) Représenter dans le même repère la parabole P passant par les points $M_0(0, \varphi(0))$, $M_1(1, \varphi(1))$ et $M_2(\frac{1}{2}, \varphi(\frac{1}{2}))$.

c) Calculer par la formule de SIMPSON une valeur S "approchée" de $\int_0^1 \varphi(x)dx$.

d) Calculer une valeur S_1 approchée de $\{M(x,y),\ 1 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x)\}$, en utilisant une méthode analogue.

e) Montrer que $\varphi(x) = 1 - \frac{4}{x + 1} + \frac{4}{(x + 1)^2}$; calculer alors $\int_0^1 \varphi(x)dx$ et évaluer l'erreur commise en utilisant la formule de SIMPSON.

(5) Exercice

1- Soient A et B deux points d'une parabole P d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
La tangente à P en A coupe en C la parallèle à Oy passant par B (figure 7).

Question 7 : Démontrer que l'aire du domaine limité par la parabole P et la corde [AB] est égale au tiers de l'aire du triangle ABC.

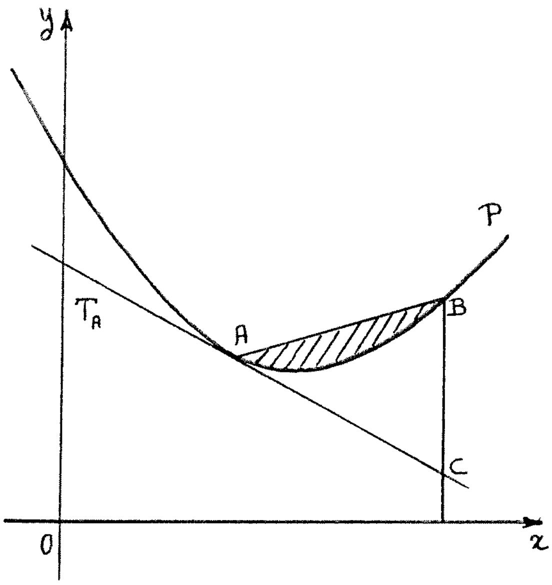


Figure 7

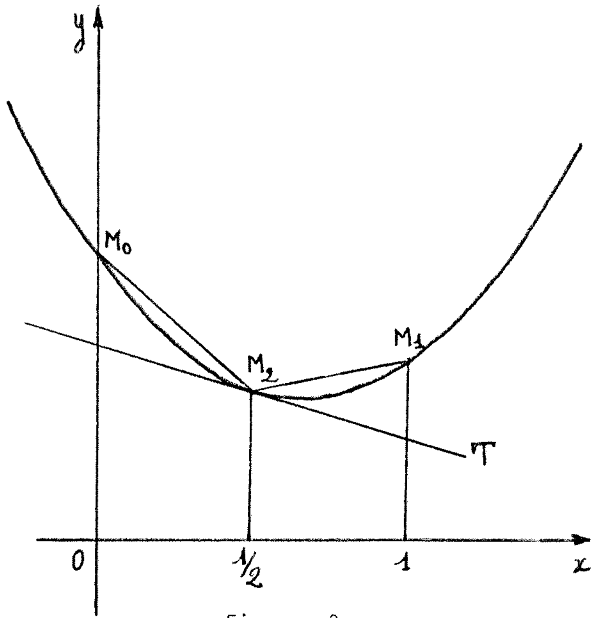


Figure 8

2- Soit P la parabole d'axe parallèle à l'axe des ordonnées, passant par les points $M_0(0,\ y_0)$, $M_1(1,\ y_1)$ et $M_2(\frac{1}{2},\ y_2)$. (Figure 8).

Soit T la tangente à P en M_2, et m son coefficient directeur.
Les cordes $[M_0M_2]$ et $[M_1M_2]$ et T font apparaître sur la figure deux triangles et deux trapèzes.

<u>Question 8</u> : a) Calculer uniquement à l'aide des nombres m, y_0, y_1 et y_2 les aires de ces deux trapèzes et de ces deux triangles.

b) Utiliser le résultat de la question 7 pour calculer l'aire de la surface limitée par P, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.
Retrouver ainsi la formule de SIMPSON.

12. CALCUL D'AIRES METHODE DE HERMITE

(1) Soit f, une fonction polynôme du troisième degré :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Pour déterminer les coefficients a, b, c, d il suffit de connaître
* les valeurs de f(x) pour x = 0 et x = 1 : $f(o) = y_0$; $f(1) = y_1$
** les valeurs de f'(x) pour x = 0 et x = 1 : $f'(0) = y'_0$; $f'(1) = y'_1$
Les nombres a, b, c et d vérifient, en effet, les égalités :

$$\begin{cases} d = y_0 \\ a + b + c + d = y_1 \\ c = y'_0 \\ 3a + 2b + c = y'_1 \end{cases}$$

Question 1 : Déterminer la fonction polynôme f du 3e degré telle que :
$f(o) = 2$; $f(1) = 5$; $f'(o) = -5$; $f'(1) = 13$.
Représenter f graphiquement.

(2) Soit f, une fonction polynôme du troisième degré.
On cherche à calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$ uniquement à l'aide des valeurs f(o), f(1), f'(o), f'(1) et sans déterminer f(x) explicitement.

> On cherche quatre nombres α_0, α_1, β_0, β_1 tels que :
> $$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha_0 f(o) + \alpha_1 f(1) + \beta_0 f'(o) + \beta_1 f'(1) \qquad (2)$$
> pour toute fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3.

Nous procédons en deux temps :

1. Analyse

Si α_0, α_1, β_0, β_1 quatre nombres qui vérifient l'égalité (2) pour toute fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois, alors ils la vérifient en particulier pour chacune des fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$.

Question 2 : Ecrire l'égalité (2) pour chacune de ces quatre fonctions. Montrer que α_0, α_1, β_0 et β_1 sont déterminés de façon unique ; les calculer.

2. Synthèse

Question 3 : Montrer que si l'on donne à α_0, α_1, β_0 et β_1 les valeurs trouvées à la question 2, l'égalité (2) est vérifiée pour toute fonction polynôme $f : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.

CONCLUSION

Pour toute fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois, on a :

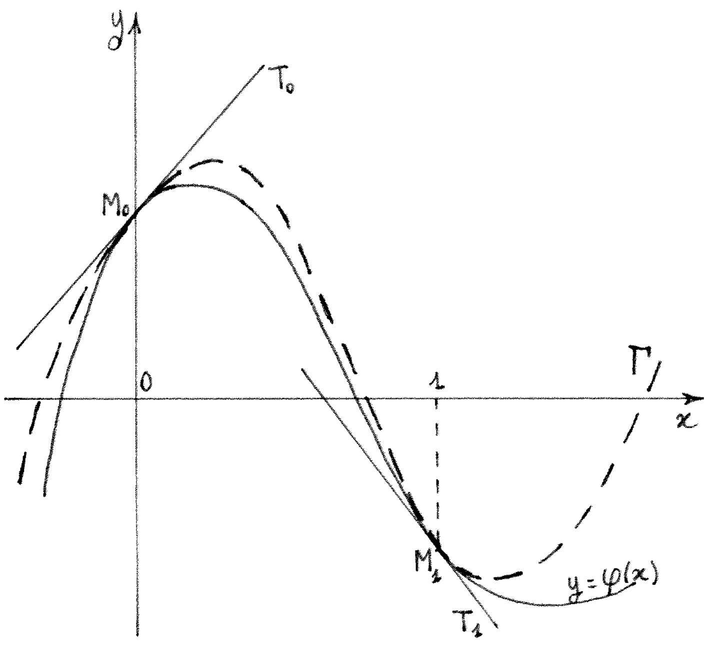
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(o) + f(1)) + \frac{1}{12}(f'(o) - f'(1))$$

Cette formule est connue sous le nom de formule de HERMITE

Question 4 : a) Appliquer la formule de Hermite au calcul de $\int_0^1 f(x)dx$, où f est la fonction donnée à la question 1.

b) Faire de même pour la fonction g définie par $g(x) = (2x - 1)^3$. Représenter g graphiquement. Que constate-t-on ?

3 On considère maintenant une fonction quelconque φ dérivable sur [0;1].



On considère la courbe Γ représentative d'une fonction polynôme f du troisième degré passant par les points $M_0(0; \varphi(0))$ et $M_1(1, \varphi(1))$ et ayant en ces points les mêmes tangentes T_0 et T_1 que la courbe représentative de la fonction φ.

Le nombre $H = \frac{1}{2}(\varphi(o) + \varphi(1)) + \frac{1}{12}(\varphi'(o) - \varphi'(1))$ est la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ et constitue une valeur "approchée" de $\int_0^1 \varphi(x)dx$.

Question 5 : 1) Calculer à l'aide de la formule de Hermite une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\,dx$

2) Calculer cette intégrale en cherchant une primitive de

$$\varphi(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

Evaluer l'erreur commise en utilisant ce procédé

Remarque : La méthode de Hermite n'a vraiment d'intér^t que si on ne sait pas calculer une primitive de la fonction à intégrer sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Question 6 : Calculer à l'aide de la méthode de Hermite une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

(4) Application

On considère la fonction c définie sur $[0;1]$ par $c(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de c dans un repère orthonormé (unité 20 cm).
On appelle A, B,C,D, E les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives, les nombres :
$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ et 1.

Question 7 : 1) Représenter $\mathcal{C}$

2) Calculer l'aire de la surface polygonale OABCDE

3) Soit P la parabole d'axe parallèle à l'axe des abscisses qui passe par A, C et E.

   a) tracer P sur le même graphique, après avoir déterminé son équation.

   b) calculer à l'aide de la formule de Simpson l'aire S de la surface comprise entre P, l'axe des **ordonnées**, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

4) Soit Γ la courbe représentative de la fonction polynôme du troisième degré passant par A et E et ayant en ces points les mêmes tangentes que $\mathcal{C}$.

   a) tracer Γ sur le même graphique, après avoir déterminé son équation.

   b) calculer à l'aide de la formule de Hermite l'aire **H de** la surface comprise entre Γ, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

13. TROIS UTILITAIRES CLASSIQUES POUR CALCULATRICES PROGRAMMABLES

On propose ici trois algorithmes faciles à programmer et utiles pour obtenir ou vérifier des résultats numériques.
Ces trois algorithmes concernent :

(1) La résolution d'une équation par dichotomie
(2) La recherche d'un extremum d'une fonction
(3) Le calcul approché d'une intégrale par la méthode de Simpson

Avant tout il est nécessaire de préciser trois points.

- Devant le nombre sans cesse croissant de calculatrices programmables il n'est pas possible de rédiger des listes de programmes tout faits pour chaque modèle de machine. Il est nécessaire, pour se servir d'une calculatrice programmable, de lire au préalable son mode d'emploi (des programmes illustrant les algorithmes étudiés ici y figurent souvent).

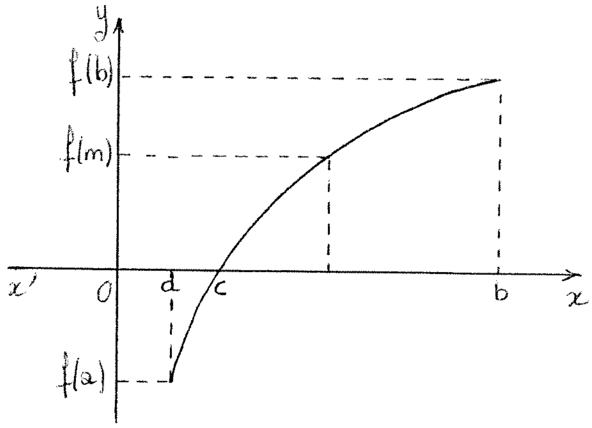
- Les machines n'ont pas toutes les mêmes possibilités (ainsi les algorithmes (1) et (2) nécessitent des tests). La programmation de ces algorithmes sera d'autant plus difficile que le nombre de mémoires et de pas de programmes sera restreint, mais chacun d'eux "tient" dans une TI 57, et bien sûr dans toute machine programmable en basic.

- Les algorithmes sont présentés sous leur forme minimale : aucun test n'est fait pour vérifier la validité des données introduites. Il est possible à chacun de "raffiner" le programme qu'il obtiendra compte tenu de la place dont il dispose sur sa machine.
  Chaque algorithme obtenu sera accompagné d'un programme en basic.

I- RESOLUTION DE L'EQUATION f(x) = 0 PAR DICHOTOMIE

On suppose la fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$ choisi de façon que f(a) et f(b) soient de signes contraires, c'est-à-dire tels que l'on ait $f(a)\cdot f(b) \leqslant 0$.

On sait que dans ce cas l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[a,b]$ une racine unique c. On cherche à encadrer c.



Soit $m = \dfrac{a+b}{2}$

Si $f(a)\cdot f(m) \leqslant 0$ alors la racine c appartient à $[a,m]$ et on peut recommencer le calcul précédent en remplaçant $[a,b]$ par $[a,m]$, c'est-à-dire b par m.

Sinon c appartient à $[m,b]$ et on peut recommencer le calcul précédent en remplaçant $[a,b]$ par $[m,b]$ c'est-à-dire a par m. On arrête le programme lorsque la largeur de l'encadrement obtenu est inférieure à 10^{-6}.

L'algorithme obtenu s'écrit

LIRE a,b

TANT QUE $b - a \geqslant 10^{-6}$ **REPETER**

  $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

  si $f(a)\cdot f(m) \leqslant 0$ **ALORS** $b \leftarrow m$

  SINON $a \leftarrow m$

ECRIRE a,b

```
10:INPUT A,B
20:IF B-A<1E-6
   PRINT A,B:END
30:M=(A+B)/2
40:X=A:GOSUB 100:
   Z=Y
50:X=M:GOSUB 100
60:IF Z*Y<=0LET B
   =M:GOTO 20
70:A=M:GOTO 20
100:Y=X^3-3*X+1:
   RETURN
```

Dans le prgramme basic ci-dessus on a pris (ligne 100) la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Le sous-programme (ligne 100) met dans la mémoire Y l'image du réel contenu dans la mémoire X. L'instruction GOSUB est un appel à ce sous-programme.

Pour changer de fonction f il suffit de modifier la ligne 100.

II- RECHERCHE D'UN EXTREMUM D'UNE FONCTION

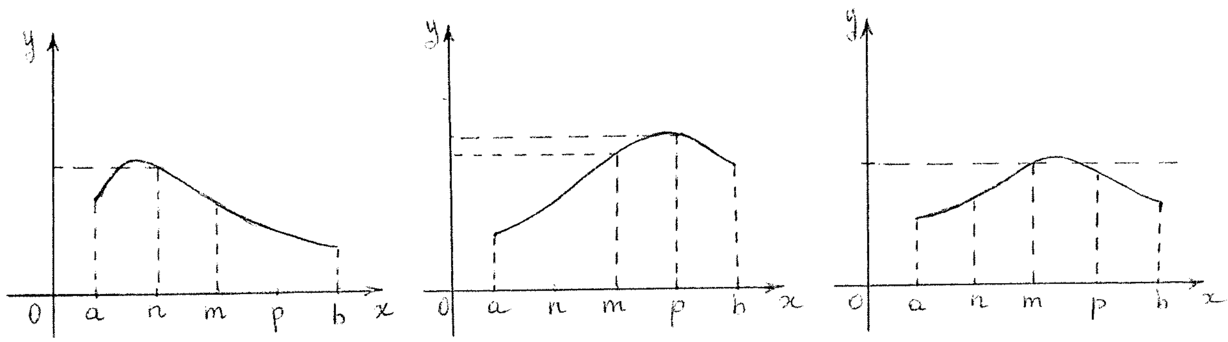
a) Recherche d'un maximum.

Soit f une fonction dont le tableau de variations sur l'intervalle [a,b] a l'aspect suivant :

x	a		c		b
	f(a)	↗		↘	f(b)

On cherche un encadrement de c.

Soit $m = \frac{a+b}{2}$, $n = \frac{a+m}{2}$, $p = \frac{m+b}{2}$



Si f(n) > f(m) alors c appartient à [a,m] ; on peut alors recommencer l'étude précédente en remplaçant l'intervalle [a,b] par [a,m] c'est-à-dire b par m. (figure 1)

Sinon :

si f(p) > f(m) alors c appartient à [m,b] et on peut recommencer l'étude précédente en remplaçant a par m. (figure 2).

Si aucune des deux conditions n'est réalisée (figure (3)) alors c appartient à [n,p] on peut alors recommencer en remplaçant a par n et b par p.

On refait alors les opérations précédentes tant que l'intervalle encadrant c est supérieur ou égal à 10^{-6}.

A chaque opération la longueur de l'intervalle encadrant c est divisée par 2.

On obtient alors l'algorithme suivant.

<u>LIRE</u> a,b

<u>TANT QUE</u> $b - a \geq 10^{-6}$ <u>REPETER</u>

$m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

$n \leftarrow \dfrac{a+m}{2}$

$p \leftarrow \dfrac{m+b}{2}$

<u>SI</u> $f(n) > f(m)$ <u>ALORS</u> $b \leftarrow m$

<u>SINON</u>

<u>SI</u> $f(p) > f(m)$ <u>ALORS</u> $a \leftarrow m$

<u>SINON</u> $a \leftarrow n$, $b \leftarrow P$

<u>ECRIRE</u> m, f(m)

Le programme basic ci-contre permet de trouver le maximum de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ sur $[-2, 0]$ il donne ici exactement $c = -1$ et $f(c) = 3$.
Pour changer de fonction f il suffit de modifier la ligne 100.

```
10:INPUT A,B
20:IF B-A<1E-6
   PRINT M,Z:END
30:M=(A+B)/2:N=(A
   +M)/2:P=(M+B)/
   2
40:X=M:GOSUB 100:
   Z=Y
50:X=N:GOSUB 100
60:IF Y>ZLET B=M:
   GOTO 20
70:X=P:GOSUB 100
80:IF Y>ZLET A=M:
   GOTO 20
90:A=N:B=P:GOTO 2
   0
100:Y=X^3-3*X+1:
   RETURN
```

b) <u>Recherche d'un minimum.</u>

Pour rechercher le minimum sur $[a,b]$ d'une fonction dont le tableau de variation a l'aspect suivant :

x	a		c		b
f(n)		↘		↗	

il suffit de remplacer f par -f et de chercher le maximum de -f.

c) Application à la recherche d'une racine de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a,b]$.

Si dans $[a,b]$ l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique c. On l'obtient en remarquant que c est la valeur de x pour laquelle $|f(x)|$ est minimale.
Il suffit donc d'appliquer le programme précédent à la fonction $-|f|$.

III- CALCUL APPROCHE D'UNE INTEGRALE PAR LA METHODE DE SIMPSON

Soit f une fonction définie sur intervalle $[\alpha ,\beta)]$.

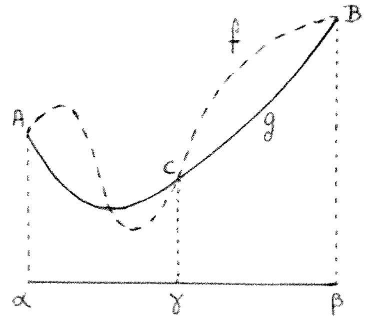
On pose $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{}$ et on désigne par A,B et C les points de coordonnées respectives $(\alpha, f(\alpha)$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma , f(\gamma))$.

Soit P la parabole d'équation $y = g(x) = mx^2 + n x + p$ qui passe par les points A,B,C.

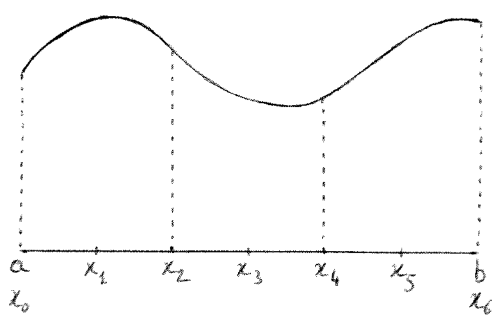
Un calcul analogue à celui effectué dans le T.P. "Calcul d'aires . Méthode de Simpson", montre que

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx = \frac{\beta - \alpha}{6} [f(\alpha) + f(\beta) + 4f(\gamma)]$$

Si sur $[\alpha ,\beta]$ la représentation graphique de f est "voisine" de P on obtient ainsi une valeur approchée de $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. (Et même une valeur exacte si f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3).



Cependant la représentation graphique de f sur $[\alpha,\beta]$ peut etre suffisamment "tourmentée" pour que l'approximation obtenue soit mauvaise.
On procède alors de la façon suivante.
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$.
On se propose de calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$.



On divise le segment [a,b] en un nombre <u>pair</u> 2n de segments égaux.
On note $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{2n} = b$ la subdivision de [a,b] ainsi obtenue puis on applique l'approximation de Simpson rappelée ci-dessus en remplaçant successivement l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$,... $[x_{2n-2}, x_{2n}]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx.$$

La valeur approchée de l'intégrale cherchée est alors :

$$I = \frac{x_2-x_0}{6}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{x_4-x_2}{6}\,[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x_{2n} - x_{2n-2}}{6}\,[f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]$$

Soit, en posant $h = \frac{b-a}{2n}$ et en remarquant qu'alors les différences $x_2 - x_0$, $x_4 - x_2$, ..., $x_{2n} - x_{2n-2}$ sont toutes égales à 2h.

On obtient :

$$I = \frac{h}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + f(x_{2n})].$$

L'algorithme suivant est obtenu en remarquant que

$$I = \frac{h}{3}\,[f(a) + f(b) + (4f(x_1) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{2n-1})) + (2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{2n-2}))]$$

et que pour tout i de [1,2,..., 2n-2] $x_i = a + ih$.

LIRE a, b, n

$m \leftarrow 2n$, $h \leftarrow \frac{b-a}{m}$, $s \leftarrow 0$.

$s \leftarrow f(a)$, $s \leftarrow s + f(b)$

<u>POUR</u> i = 1 <u>JUSQU'A</u> m-1 <u>PAS</u> 2

<u>FAIRE</u>

$S \leftarrow S + 4f(a + ih)$

<u>REFAIRE</u>

<u>POUR</u> i = 2 <u>JUSQU'A</u> m-2 <u>PAS</u> 2

FAIRE

$S \leftarrow S + 2f(a + ih)$

<u>REFAIRE</u>

$i \leftarrow \frac{h}{3} S$

<u>AFFICHER</u> i

```
10:INPUT A,B,N
15:S=0:M=2*N:H=(B
   -A)/M
20:X=B:GOSUB 100:
   S=S+Y
25:X=A:GOSUB 100:
   S=S+Y
30:FOR I=1TO M-1
   STEP 2
35:X=A+I*H:GOSUB
   100;S=S+4*Y:
   NEXT I
45:FOR I=2TO M-2
   STEP 2
50:X=A+I*H:GOSUB
   100:S=S+2*Y:
   NEXT I
60:I=S*H/3
70:PRINT I:END
100:Y=SIN X:RETURN
```

14. INTEGRATIONS PAR PARTIES REPETEES

Les intégrales de la forme $I = \int_a^b u(x)\ v'(x)dx$ peuvent se transformer par la méthode d'intégration par parties. Il existe de nombreux cas où la formule doit être appliquée plusieurs fois, ce qui conduit à des calculs souvent longs. On peut, dans certaines situations, faciliter le travail en confectionnant une table permettant l'utilisation répétée de la formule.

I- FABRICATION ET MODE D'EMPLOI DE LA TABLE

(1)
$$\int_a^b u(x)\ v'(x)dx = [u(x)\ v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\ v(x)dx$$

- Désignons par v_1 une primitive de v,
  par v_2 une primitive de v_1,
  ....
  par v_n une primitive de v_{n-1}, en supposant toutes les primitives de v et toutes les dérivées de u définies sur l'intervalle $[a,b]$.

- Si on applique (1) une deuxième fois, on obtient :

(2)
$$I = \int_a^b u(x)\ v'(x)dx = [u(x)\ v(x)]_a^b - [u'(x)\ v_1(x)]_a^b + \int_a^b u''(x)\ v_1(x)dx$$

puis une troisième fois

(3)
$$I = [u(x)\ v(x)]_a^b - [u'(x)\ v_1(x)]_a^b + [u''(x)\ v_2(x)]_a^b - \int_a^b u^{(3)}(x)v_2(x)dx$$

Question 1 : Démontrer par récurrence sur n que, après n applications de la formule, on obtient :

(n)
$$I = [u(x)\ v(x)]_a^b - [u'(x)\ v_1(x)]_a^b + [u''(x)\ v_2(x)]_a^b + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}\ [u^{n-1}(x)\ v_{n-1}(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x)\ v_{n-1}(x)dx$$

On peut donc imaginer la disposition suivante :

	Signe des produits +	$u(x)$	$v'(x)$	signe du terme intégral complémentaire	
	$-$	$u'(x)$	$v(x)$	$-$	
dérivées	$+$	$u''(x)$	$v_1(x)$	$+$	primitives
successi-ves	$-$	$u^{(3)}(x)$	$v_2(x)$	$-$	successives
	.			.	
	.	...		.	
	.			.	
	.	$u^{n-1)}(x)$	$v_{n-2}(x)$	.	
		$u^{(n)}(x)$	$v_{n-1}(x)$		
		....			

D'après la table précedemment construite, l'intégrale I est donc la somme alternée - le premier signe étant + - des produits des fonctions de la $n^{\text{ième}}$ ligne de la 1ère colonne , et de celles de la $(n+1)^e$ ligne de la 2e colonne, pris entre a et b, et éventuellement d'un terme intégral complémentaire.

II- EXEMPLES D'UTILISATION : CALCULS EXACTS D'INTEGRALES

1

Question 2 : a) Compléter le tableau à quatre lignes permettant le calcul de :

$$I_1 = \int_b^a (x^2 + 2x) \sin x \, dx$$

$u(x)$	$v'(x)$
$x^2 + 2x$	$\sin x$
$2x + 2$	$-\cos x$
.	.
.	.

b) Utiliser ce tableau pour le calcul de I_1. On mettra le résultat sous la forme $[F(x)]_a^b$

2

Question 3 : a) Compléter le tableau à trois lignes permettant le calcul de

$$I_2 = \int_b^a e^{3x} \sin 2x \, dx$$

u(x)	v(x)
e^{3x}	sin 2x
...	...

b) En déduire la valeur de I_2 sous la forme $[F(x)]_a^b$

3

Question 4 : Après avoir complété à un nombre suffisant de lignes le tableau permettant le calcul de :

$$I_3 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \quad \ln(1 + \sin x) \, dx$$

donner la valeur de I_3.

III- CALCUL DE VALEURS APPROCHEES DE FONCTIONS

A/ Fonction sinus

Question 5 : a) Soit $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$. En utilisant $\sin a = \int_0^a \cos x \, dx$ compléter le tableau à cinq lignes ci-dessous

u(x)	v(x)
cos x	1
-sin x	x - a ← primitive judicieusement choisie
⋮	⋮

b) Donner la formule obtenue après 4 intégrations par parties successives, et en déduire que :

$$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \int_0^a \frac{(x-a)^4}{4!} \cos x \, dx.$$

c) Démontrer que :

$$0 \leqslant \int_0^a \frac{(x-a)^4}{4!} \cos x \, dx \leqslant \frac{a^5}{5!}$$

En déduire un intervalle $[0, \alpha]$ sur lequel on est sûr de ne pas commettre une erreur supérieure à 10^{-6} en remplaçant sin a par $a - \frac{a^3}{3!}$.

Question 6 : Utiliser les résultats de la question 5 pour donner une valeur approchée à 10^{-6} près de $\sin 3°$.

B/ Fonction Logarithme

Question 7 : a) Comme $\ln(1 + a) = \int_0^a \frac{dx}{1+x}$ pour $a > 0$,

Compléter le tableau à 5 lignes ci-dessous :

u(x)	v'(x)	
$\frac{1}{1+x}$	1	
$\frac{-1}{(1+x)^2}$	x-a	primitive particulière
⋮	⋮	.

b) Donner la formule obtenue après 4 intégrations par parties, et établir que :

$$\ln(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{1}{5} \int_0^a \frac{(x-a)^5}{(x+1)^5}\, dx$$

On ne sait pas calculer le reste intégral, mais on peut démontrer qu'il reste petit quand a est petit.

Question 8 : a) Montrer que $\displaystyle\int_0^a \frac{(x-a)^5}{(x+1)^5}\, dx \leqslant \frac{a^6}{6}$

b) Evaluer avec cette méthode ln(1,05) et comparer avec le résultat fourni par la calculatrice.

c) Quelle est l'erreur maximum commise ?

15. ENCADREMENTS DE FONCTIONS PAR DES FONCTIONS RATIONNELLES

Dans tout ce qui suit, x désigne un réel positif ou nul.

Préliminaire :

On considère deux fonctions u et v dérivables sur $[0, +\infty[$.

Question : Montrer que si $u(o) = v(o)$ et si $u'(x) \leqslant v'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$, alors $u(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

Conséquence : Pour comparer sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$ deux fonctions u et v dérivables, qui prennent la même valeur en zéro, il suffit de comparer leurs fonctions dérivées.
C'est ce résultat que nous utilisons systématiquement dans ce document.

I- **EXEMPLE 1.**

Soit ℓ la fonction définie $[0, +\infty[$ par $\ell(x) = \ell n(1 + x)$.

On a : $\ell'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\ell(o) = 0$.

Ainsi comparer $\ell n(1 + x)$ à une fonction rationnelle revient à comparer deux fonctions rationnelles. C'est ce que nous allons faire.

Question 1 : Montrer que $\boxed{\ell n(1 + x) \leqslant x.}$ (1)

1) Soit k un réel positif et f_k la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f_k(x) = \frac{x}{1 + kx}$

On a $f_k(o) = 0$; on cherche pour quelles valeurs de k, on a : $f_k \leqslant \ell$.

Question 2 : a) Montrer que $f_k' \leqslant \ell' \iff \forall x \in [0, +\infty[\qquad k^2x + (2k-1) \geqslant 0.$

b) La fonction φ_k définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_k(x) = k^2x + (2k-1)$ est une fonction affine dépendant du paramètre k.

Déterminer à quelle condition sur k, on a :

$k^2x + (2k - 1) \geqslant 0$, pour tout x positif.

On choisit $k = \frac{1}{2}$. On a donc : $\dfrac{x}{1 + \frac{x}{2}} < \ln(1 + x)$

Par conséquent, en tenant compte de (1), on a :

$$\boxed{\dfrac{x}{1 + \frac{x}{2}} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x} \qquad (2)$$

(2) Soit k un réel positif et g_k la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$g_k(x) = \dfrac{x}{1 + \frac{x}{2 + kx}}$$

on a $g_k(0) = 0$; on cherche pour quelles valeurs de k, on a : $\ell \leqslant g_k$.

Question 3 : a) Montrer que $\ell' \leqslant g'_k \Longleftrightarrow \forall x \in [0, +\infty[, \quad k(k+1)x + 3k-1 \geqslant 0$

b) Déterminer à quelle condition sur k, on a :
$k(k + 1)x + 3k - 1 \geqslant 0$ pour tout x positif

On choisit $k = \frac{1}{3}$.

Question 4 : Montrer que l'on a :

$$\boxed{\dfrac{x}{1 + \frac{x}{2}} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant \dfrac{x}{1 + \dfrac{x}{2 + \frac{x}{3}}} \leqslant x} \qquad (3)$$

(3) On pose $r_1(x) = \dfrac{x}{1 + \frac{x}{2}} = \dfrac{2x}{x + 2}$ $\qquad r_2(x) = \dfrac{x}{1 + \dfrac{x}{2 + \frac{x}{3}}} = \dfrac{x(x + 6)}{4x + 6}$

Question 5 : a) Etudier les variations de la fonction ℓ sur $[0, +\infty[$.

b) Etudier les variations de la fonction r_1 sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer que $r_2(x)$ peut se mettre sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{4x+6}$
Etudier les variations de la fonction r_2 sur $[0 ; +\infty[$.

d) Représenter sur un même graphique les fonctions r_1 et r_2 (repère orthonormé, unité 2 cm, x variant de 0 à 13) ainsi que la fonction r_0 définie par $r_0(x)=x$, et la fonction ℓ.

e) Calculer $r_0(x) - r_1(x)$ et majorer l'expression obtenue par une fonction de la forme $\alpha\, x^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Faire de même pour $r_2(x) - r_1(x)$.

f) Représenter les restrictions à $[0,1]$ des fonctions r_0, r_1, r_2 et ℓ dans un repère orthonormé en prenant comme unité 20 cm.

4 On peut poursuivre l'étude d'encadrements de $\ln(1 + x)$ par le même procédé. On obtient ainsi :

II- EXEMPLE 2.

Soit I la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $I(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

on a $I'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $I(0) = 0$.

Question 6 : Montrer que $I(x) \leqslant x$

1 Soit k un réel positif et F_k la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$F_k(x) = \frac{x}{1 + kx^2}$$

on a : $F_k(0) = 0$; on cherche pour quelles valeurs de k, on a : $F_k \leqslant I$.

Question 7 : Procéder de façon analogue au paragraphe I, question 2.
La fonction Φ_k est ici une fonction polynôme du second degré dépendant du paramètre k.
On choisit alors la plus petite valeur de k qui convient ; on la note $\frac{1}{\alpha}$.

(2) Soit k un réel positif et G_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$G_k(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{\alpha + kx^2}}$$

On a : $G_k(0) = 0$; on cherche pour quelles valeurs de k, on a : $I \leqslant G_k$.

<u>**Question 8**</u> : Procéder de façon analogue au paragraphe I, question 3. On choisit alors la plus petite valeur k qui convient.

(3) Procéder de façon analogue au (3) du paragraphe I et répondre après les avoir adaptées aux questions 5 à l'exception, bien sûr, de a).

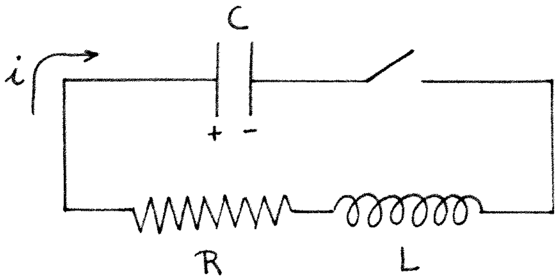
(4) On peut poursuivre l'étude d'encadrements de $I(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt$ par le même procédé. On obtient ainsi :

$$\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2}} < \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4}}}} < \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\cfrac{3^2x}{6}}}}}} < \ln(1+x) < \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5}}}}} < \cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3}}} < x$$

$$\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3}} < \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5+\cfrac{3^2x^2}{7}}}} < \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5+\cfrac{3^2x^2}{7+\cfrac{4^2x^2}{9+\cfrac{5^2x^2}{11}}}}}} < \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} < \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5+\cfrac{3^2x^2}{7+\cfrac{4^2x^2}{9}}}}} < \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{2^2x^2}{5}}} < x$$

16. CIRCUIT OSCILLANT

On réalise le montage représenté par la figure ci-dessous



C désigne la capacité du condensateur (exprimée en Farads), R la résistance (exprimée en ohms), L l'inductance de la bobine (en Henrys).
On appelle q la charge du condensateur (en coulombs) et i l'intensité du courant dans le circuit (en ampères) à l'instant t.

Notation : $\frac{di}{dt}$ et $\frac{d^2i}{dt^2}$ désignent les dérivées première et seconde de la fonction i par rapport au temps t ; $\frac{dq}{dt}$ désigne la dérivée première de la fonction q par rapport au temps t.

A/ MATHEMATISATION DU PROBLEME

Les lois d'Ohm et de Lenz permettent d'écrire :

$$V_A - V_B = \frac{q}{c}$$

$$V_B - V_A = Ri + L\frac{di}{dt}$$

avec $$i = \frac{dq}{dt}$$

Question 1 : Démontrer la relation

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = 0$$

Question 2 : On appelle instant initial t = 0, l'instant où l'on ferme le circuit. La charge du condensateur est alors un nombre q_o connu.
Calculer i et $\frac{di}{dt}$ à l'instant initial, en fonction des données.

CONCLUSION

La fonction i est l'unique solution de l'équation différentielle (E) : $Ly'' + Ry' + \frac{1}{C} y = 0$, vérifiant les conditions initiales déterminées à la question 2.

B/ RESOLUTION MATHEMATIQUE DE TROIS CAS PARTICULIERS

Question 3 : a) Résoudre l'équation différentielle E et déterminer la fonction i ;

b) Etudier la fonction i ($t \geqslant 0$) et représenter graphiquement cette fonction en prenant comme unités :
1 cm pour un millième de seconde en abscisse ;
5 cm pour un centième d'ampère, en ordonnée.
dans chacun des cas suivants :

1° cas : $R = 3 \times 10^3$; $L = 2$; $C = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$; $q_0 = 10^{-4}$

2° cas : $R = 2 \times 10^3$; $L = 2$; $C = 2 \cdot 10^{-6}$; $q_0 = 10^{-4}$

3° cas : $R = 2 \times 10^3$; $L = 2$; $C = 1 \cdot 10^{-6}$; $q_0 = 10^{-4}$

C/ INTERPRETATION PHYSIQUE DES CAS ETUDIES

Dans le premier cas, on parle de régime apériodique ;
dans le second cas, on parle de régime critique ;
dans le troisième cas, on parle de régime pseudo-périodique.

N.B. On dit aussi que la fonction i est dans le troisième cas par une fonction sinusoïdale "amortie".
Lorsque la résistance est nulle, la fonction i est une fonction sinusoïdale.
Lorsque la résistance n'est pas nulle (elle ne l'est jamais totalement) la fonction i est "d'autant plus amortie" que la résistance est grande.

17. CALCUL NUMERIQUE ET FONCTION EXPONENTIELLE

I- La fonction exponentielle est la solution de l'équation différentielle $\boxed{y' = y}$ qui vérifie la condition initiale $\boxed{y(o) = 1}$.
C'est cette propriété caractéristique de la fonction exponentielle qui va guider l'étude numérique proposée ci-dessous.

A/ (1) Soit $[a\ ;\ b]$ un intervalle.
En tout point x_o de $[a;b]$, on a : $(\exp)'(x_o) = \exp x_o$.
Autrement dit, $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{e^x - e^{x_o}}{x - x_o} = e^{x_o}$

Par conséquent, si x_1 est "voisin" de x_o, on peut dire que
$\dfrac{e^{x_1} - e^{x_o}}{x_1 - x_o}$ est peu différent de e^{x_o}.

(2) Soit n un entier naturel fixé (suffisamment grand, par exemple $n \geqslant 10$).

On partage l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n parties de même longueur.
On obtient ainsi la subdivision : $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ de $[0;1]$.
La remarque faite en (1) permet de dire que :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } k \text{ compris entre } 0 \text{ et } n-1, \\ \dfrac{e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n}} \text{ est "peu différent" de } e^{\frac{k}{n}} \end{cases}$$

on sait, en outre, que : $e^0 = 1$.

Nous nous proposons de procéder à une étude des nombres u_k définis par :

$$\begin{cases} u_o = 1 \\ \forall k \in [0;\ n-1],\quad \dfrac{u_{k+1} - u_k}{\frac{1}{n}} = u_k \end{cases}$$

L'objectif est de voir si les valeurs de u_k "approchent bien" celles de $e^{\frac{k}{n}}$,et en particulier si la valeur de u_n "approche bien" celle de $e^1 = e$.

Question 1 : Exprimer u_{k+1} en fonction de u_k et de n, puis u_k en fonction de k et de n, enfin u_n en fonction de n.

(3) L'entier naturel n varie

Question 2 : a) Donner, sous forme de tableau, les valeurs de u_n affichées par la calculatrice, dans les cas suivants :
$n = 10$; $n = 100$; $n = 2^{10}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. On pourra, pour cela, calculer d'abord $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln u_n)$.

B/ (1) Soit $[a,b]$ un intervalle. On a :

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

La valeur de cette intégrale est comprise entre :

- l'aire d'un rectangle (figure 1) : $(b-a)e^a$;
- l'aire d'un trapèze (figure 2) : $(b-a)\,\frac{e^a+e^b}{2}$.

Si la longueur de l'intervalle $[a,b]$ est "petite", ces deux aires fournissent des valeurs "approchées" de $\int_a^b e^x dx$.

(2) On reprend la même subdivision de [0;1] qu'au paragraphe **A/**

En utilisant l'aire du rectangle approprié sur chaque intervalle de cette subdivision, on peut dire que :

Pour tout k compris entre 0 et n-1,
$e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}$ est "peu différent " de $\frac{1}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}}$.

Question 3 : Vérifier, qu'en procédant de façon analogue au paragraphe **A/**, on est conduit à étudier la même suite de nombres u_k.

(3) En utilisant, cette fois, l'aire du trapèze approprié sur chaque intervalle de la même subdivision de [0;1], on peut dire que :

Pour tout k compris entre 0 et n-1,
$e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}$ est "peu différent " de $\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{k+1}{n}}}{2}$

Question 4 a) Vérifier, qu'en procédant de façon analogue au paragraphe **A/**, on est conduit à étudier la suite des nombres v_k définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall k \in [0 \ ; \ n-1], \ v_{k+1} = \dfrac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} v_k \end{cases}$$

b) Exprimer v_k en fonction de k et de n, puis v_n en fonction de n.

Question 5 : On fait varier l'entier n.

a) Donner, sous forme de tableau, les valeurs de u_n affichées par la calculatrice, dans les cas suivants :
$n = 10$; $n = 100$; $n = 2^{10}$.
Comparer les résultats obtenus à ceux de la question 2.a).

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. On pourra, pour cela, calculer d'abord $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln v_n)$.

4 Etude du quotient $\dfrac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}$

Question 6 : Soit r un nombre réel différent de 1 ; on écrit :

$$\frac{1}{1-r} = \frac{(1-r)+r}{1-r} = 1 + r \cdot \frac{1}{1-r}$$

a) Vérifier qu'en remplaçant alors $\frac{1}{1-r}$ par $1 + r \cdot \frac{1}{1-r}$

dans la dernière expression obtenue puis dans celle que l'on obtiendra, on a :

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \frac{r^3}{1-r}$$

b) Montrer que l'on a :

$$\frac{1+r}{1-r} = 1 + 2r + 2r^2 + \frac{2r^3}{1-r}$$

Question 7 : Appliquer ce dernier résultat pour démontrer que :

$$\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + e_n \quad \text{avec} \quad 0 < e_n < \frac{1}{2n^3}$$

Question 8 : On pose $w_n = (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})^n$

a) Calculer w_{10} ; w_{100} ; w_{210} . Comparer les résultats obtenus à ceux des questions 2 a) et 5 a).

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. On pourra, également, calculer d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln w_n)$

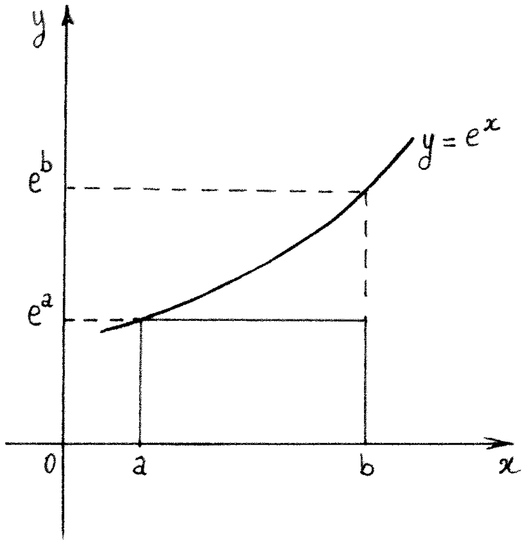


figure 1

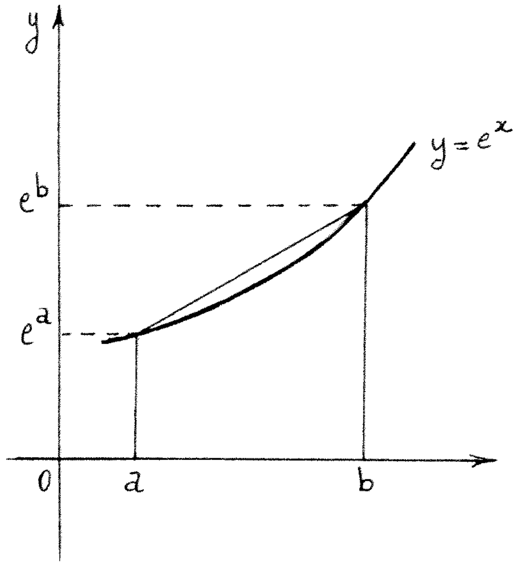


figure 2

II- On s'intéresse maintenant à la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

A/

<u>**Question 1**</u> : Calculer la fonction F', dérivée de F.
Etudier et représenter F' dans un repère orthonormé.
Que représente géométriquement F(x) ?

On se propose d'évaluer F(0,5) (par exemple).
Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

<u>**Question 2**</u> : a) Montrer que G est solution de l'équation différentielle $\boxed{y' = 1 + 2xy}$ et vérifie la condition initiale $\boxed{y(o) = 0.}$

b) Vérifier que si l'on connaît G(x), on peut en déduire simplement F(x).

Les méthodes du paragraphe I nous ont permis, à partir de l'équation différentielle $y' = y$ (et de la condition initiale $y(o) = 1$) d'approcher le nombre $\exp 1 = e$.

On va procéder de la même façon ici à partir de l'équation différentielle $y' = 1 + 2xy$ (et de la condition initiale $y(o) = 0$) pour trouver des valeurs approchées de $G(0,5)$. On en déduira alors des valeurs approchées de $\int_0^{0,5} e^{-t^2} dt$.

B/ 1) On partage le segment $[0 ; 0,5]$ en n parties égales.
On définit pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, la suite des valeurs U_k par :

$$\begin{cases} U_o = 0 \\ \dfrac{U_{k+1} - U_k}{\frac{0,5}{n}} = 1 + 2(k \cdot \frac{0,5}{n})U_k \end{cases}$$

Question 3 : a) Exprimer U_{k+1} en fonction de U_k, k et n.

b) Donner la valeur de U_n affichée par une calculatrice programmable dans chacun des cas suivants :
$n = 32$; $n = 64$; $n = 256$; $n = 512$.

c) En déduire les valeurs correspondantes de $U_n \times e^{-0,25}$

2) On partage, également $[0 ; 0,5]$ en n parties égales.
On définit pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, la suite des valeurs V_k par :

$$\begin{cases} V_o = 0 \\ V_{k+1} - V_k = \dfrac{0,5}{n} \cdot \dfrac{V'_k + V'_{k+1}}{2} \end{cases}$$

avec $V'_k = 1 + 2(k \cdot \frac{0,5}{n}) V_k$ et $V'_{k+1} = 1 + 2\left((k+1) \frac{0,5}{n}\right) . V_{k+1}$

Question 4 : a) Vérifier que :

$$V_{k+1} = \frac{1 + \frac{k}{4n^2}}{1 - \frac{k+1}{4n^2}} V_k + \frac{\frac{1}{2n}}{1 - \frac{k+1}{4n^2}}$$

b) Donner la valeur de V_n affichée par une calculatrice programmable dans chacun des cas suivants :

$n = 32$; $n = 64$; $n = 256$; $n = 512$.

c) En déduire les valeurs correspondantes de $V_n \times e^{-0,25}$;
Comparer les résultats obtenus à ceux de la question 3.

18. DERANGEMENTS

I- NOTATIONS

Soit $E_n = \{1,2,3,4,\ldots,n\}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels non nul et f une bijection de E_n sur E_n.

On dit que $p \in E_n$ est un point fixe de f si $f(p) = p$.

Exemple : soit $E_2 = \{1,2\}$. Les bijections de E_2 sont les applications

$$f_1 : \left| \begin{array}{l} 1 \longmapsto 1 \\ \\ 2 \longmapsto 2 \end{array} \right. \qquad \text{et } f_2 : \left| \begin{array}{l} 1 \longmapsto 2 \\ \\ 2 \longmapsto 1 \end{array} \right.$$

Les entiers 1 et 2 sont deux points fixes de f_1, la bijection f_2 n'a pas de point fixe.

On appelle **dérangement** de E_n toute bijection sans point fixe de E_n sur E_n.

On note D_n le nombre de dérangements de E_n, ainsi $D_1 = 0$, $D_2 = 1$.

On se propose de calculer, par diverses méthodes, les D_n.

II- PREMIERE METHODE :

Dénombrer toutes les bijections de E_n sur E_n et retrancher le nombre de telles bijections ayant au moins un point fixe.

Question 1 : Trouver toutes les bijections de E_3 dans E_3, trouver D_3.

Question 2 : Compter les bijections de E_4 dans E_4 comportant :

a) un seul point fixe qui est 1

b) un seul point fixe

c) exactement deux points fixes

d) exactement k points fixes $1 \leq k \leq 4$

En déduire D_4.

Question 3 : Exprimer en fonction de D_1, D_2, D_3, ..., D_{n-1} le nombre de bijections de E_n sur E_n comportant

a) exactement un point fixe

b) exactement deux points fixes

c) exactement k points fixes ($1 \leq k \leq n$)

d) déduire des questions précédentes et des propriétés des C_n^p

l'égalité :

$$\boxed{D_n = n! - 1 - C_n^1\, D_1 - C_n^2\, D_2 - \ldots - C_n^k\, D_k - \ldots - C_n^{n-1}\, D_{n-1}} \quad (1)$$

Calculer à l'aide de (1), les nombres D_3, D_4, D_5, D_6.

III- DEUXIEME METHODE :

Question 4 : Exprimer en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}

$$\begin{array}{|ccc} 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ n & & \cdot \end{array}$$

a) le nombre de dérangements de E_n qui échangent 1 et 2

b) le nombre de dérangements de E_n qui transforment 1 en 2 et 2 en un autre élément p que 1.
On pourra, pour compter les dérangements du b, se ramener au dénombrement des dérangements de l'ensemble $\{2,\ldots,n\}$ en échangeant les éléments 1 et 2 du but.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & p \neq 1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \ell & \longmapsto & 1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ n & & \cdot \end{array}$$

Pour trouver D_n on constate que les dérangements de E_n sont de deux sortes.

* Ceux qui échangent 1 et k $(1 < k \leq n)$

* Ceux qui transforment 1 en k et k en un autre élément que 1.

Question 5 : En exprimant en fonction de D_{n-1} et D_{n-2} le nombre de dérangements de E_n de chacune des deux sortes établir que si $n \geq 3$ on a :

$$\boxed{D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})} \quad (2)$$

Les égalités $D_1 = 0$, $D_2 = 1$ et (2) permettent de calculer les D_n de proche en proche, comme le fait le programme ci-contre.

```
1:A=0,B=1,N=3
2:C=(N-1)*(A+B)
3:LPRINT "D(";N;
  ")=";C
4:A=B,B=C,N=N+1:
  GOTO 2
```

```
D( 3)= 2
D( 4)= 9
D( 5)= 44
D( 6)= 265
D( 7)= 1854
D( 8)= 14833
D( 9)= 133496
D( 10)= 1334961
D( 11)= 14684570
D( 12)= 176214841
D( 13)= 2290792932
```

IV- TROISIEME METHODE :

La méthode précédente exprime D_n en fonction de D_{n-1}, D_{n-2} et n. Il est possible d'exprimer D_n uniquement en fonction de n et de D_{n-1}.

Question 6 : En utilisant l'égalité (2) et un raisonnement par récurrence établir que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$\boxed{D_n = nD_{n-1} + (-1)^n} \quad (3)$$

```
1:D=1,N=3,C=-1
2:D=N*D+C
3:LPRINT "D(";N;
  ")=";D
4:C=-C,N=N+1:
  GOTO 2
```

Le programme ci-contre calcule les D_n en utilisant l'égalité (3). Il donne bien sûr les mêmes résultats que le précédent.

V- OÙ APPARAIT LE NOMBRE e

```
1:D=1,N=3,C=-1,A
  =6
2:D=N*D+C,F=A/D
3:LPRINT N;"!/D(
  ";N;"):";
  LPRINT F
4:C=-C,N=N+1,A=A
  *N:GOTO 2
```

Il peut être intéressant de comparer le nombre D_n au nombre de permutations de E_n.
Le programme ci-contre calcule pour les diverses valeurs de n ($n \geqslant 3$) le rapport $\frac{n!}{D_n}$.
On constate que $\frac{n!}{D_n}$ "se rapproche" de e si n est assez grand : $\frac{14!}{D_{14}}$ donne ici 9 décimales exactes de e.
Pour préciser cela on s'intéressera maintenant à $\frac{Dn}{n!}$. On posera $U_n = \frac{Dn}{n!}$

```
3!/D( 3):
                 3
4!/D( 4):
       2.666666667
5!/D( 5):
       2.727272727
6!/D( 6):
       2.716981132
7!/D( 7):
       2.718446602
8!/D( 8):
       2.718263332
9!/D( 9):
       2.718283694
10!/D( 10):
       2.718281658
11!/D( 11):
       2.718281843
12!/D( 12):
       2.718281827
13!/D( 13):
       2.718281829
14!/D( 14):
       2.718281828
```

La méthode (3) donne les égalités :

$$D_2 = 2\,D_1 + 1$$
$$D_3 = 3\,D_2 - 1$$
$$D_4 = 4\,D_3 + 1$$
$$D_5 = 5\,D_4 - 1$$
$$\vdots$$
$$D_n = n\,D_{n-1} + (-1)^n$$

Question 7 : En divisant les égalités ci-dessus par 2!, 3!, ..., n! et en additionnant membre à membre les nouvelles égalités ainsi obtenues, établir que l'on a pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\boxed{U_n = \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}} \qquad (4)$$

VI- OU ON REJOINT L'ANALYSE

Si $\frac{n!}{D_n}$ est voisin de e alors $U_n = \frac{D_n}{n!}$ est voisin de $\frac{1}{e}$. On précise ici comment sont liés les U_n et $\frac{1}{e}$.

Pour celà :

On considère les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, ..., f_n définies de la façon suivante :

$$f_0(x) = e^{-x} - 1$$
$$f_1(x) = e^{-x} - 1 + x$$
$$f_2(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!}$$
$$f_3(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$
$$f_4(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$$
$$f_5(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

....

$$f_n(x) = e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \ldots - (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \ldots - (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Question 8 :

a) Vérifier que $f_1' = -f_0$, $f_2' = -f_1$, $f_3' = -f_2$, $f_4' = -f_3$, ..., $f_n' = -f_{n-1}$

b) Etudier sur $[0, +\infty[$ les variations de f_0 en déduire que pour tout $x > 0$ on a $f_0(x) < 0$.

c) Etudier sur $[0, +\infty[$ les variations de f_1 (on connaît sa dérivée !) en déduire que pour tout $x > 0$ on a $f_1(x) > 0$.

d) Etablir de même de proche en proche que pour tout $x > 0$ on a :
$f_2(x) < 0$, $f_3(x) > 0$, $f_4(x) < 0$, $f_5(x) > 0$.

e) Démontrer que pour tout $x > 0$:
si n est pair $f_n(x) < 0$

si n est impair $f_n(x) > 0$.

Question 9 :

En utilisant les résultats de la question 9 et l'égalité (4) établir les encadrement suivants :

$$U_1 < \frac{1}{e} < U_2$$

$$U_3 < \frac{1}{e} < U_2$$

$$U_3 < \frac{1}{e} < U_4$$

$$U_5 < \frac{1}{e} < U_4$$

$$U_5 < \frac{1}{e} < U_6$$

$$U_7 < \frac{1}{e} < U_6$$

$$U_7 < \frac{1}{e} < U_8$$

$$U_9 < \frac{1}{e} < U_8$$

$$U_9 < \frac{1}{e} < U_{10}$$

....

$$U_{2k+1} < \frac{1}{e} < U_{2k}$$

$$U_{2k+1} < \frac{1}{e} < U_{2k+2}$$

et calculer la largeur de chaque encadrement obtenu.

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\boxed{|U_n - \frac{1}{e}| < \frac{1}{(n+1)!}}$$

Cette dernière inégalité montre que $U_n = \frac{D_n}{n!}$ est voisin de $\frac{1}{e}$ si n est assez grand et précise l'erreur commise en remplaçant U_n par $\frac{1}{e}$.

VII- APPLICATION

Une formule explicite donnant D_n en fonction de n

L'inégalité (5) s'écrit aussi :

$$\left|\frac{D_n}{n!} - \frac{1}{e}\right| < \frac{1}{(n+1)!}$$

Soit, en multipliant les deux membres de cette inégalité par n!,

$$|D_n - \frac{n!}{e}| < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{(en effet on suppose } n \geqslant 1)$$

donc :

$$D_n \leqslant \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} < D_n + 1$$

Or D_n est entier et la largeur de ce dernier encadrement est 1.

D_n est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$ c'est-à-dire la partie entière (notée Int sur les calculatrices) de $\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}$.

et

$$D_n = \text{Int}\left(\frac{n!}{e} + \frac{1}{2}\right)$$

Question 10 : Le raisonnement ci-dessus est un peu succint, le relire et reconstituer les étapes intermédiaires manquantes.
Avec une calculatrice scientifique (même non programmable) possédant la touche "factorielle" on peu ainsi rapidement calculer D_n, si n n'est pas trop grand. (en pratique une machine qui travaille avec 10 chiffres ne peut donner ainsi exactement les D_n que pour $n \leqslant 12$).

Exemple de calcul : $\frac{10!}{e} + \frac{1}{2}$ est affiché 1334961,416 donc $D_{10} = 1334961$

19. SOMME DE PUISSANCES ENTIERES DES P PREMIERS NATURELS NON NULS

A (1) Soit p un entier naturel non nul.

Question 1 : a) Calculer la somme : $1 + 2 + \ldots + p = \sum_{i=1}^{p} i$

b) Calculer la somme : $1^3+2^3 \ldots + p^3 = \sum_{i=1}^{p} i^3$.

Pour cela, on devinera le résultat pour de "petites" valeurs de p, puis on fera une démonstration par récurrence.

c) Que donne la méthode de b) pour le calcul de la somme :

$1^2 + 2^2 + \ldots + p^2 = \sum_{i=1}^{p} i^2$

Si elle convient, calculer cette somme. Sinon, passer à la question suivante.

(2) Soit p un entier naturel non nul et n un entier naturel.
On cherche à calculer la somme :

$$\sum_{i=1}^{p} i^n = 1^n + 2^n + \ldots + p^n$$

On écrit pour cela :

$$p^n = (1^n + 2^n + \ldots + p^n) - (0^n + 1^n + \ldots + (p-1)^n)$$

C'est-à-dire : $\boxed{p^n = \sum_{i=1}^{p} i^n - \sum_{i=1}^{p} (i-1)^n}$

Question 2 : a) Ecrire dette dernière égalité pour n = 2 ; montrer qu'elle permet de retrouver le résultat de la question 1)a).
(indication :"développer" $(1 - i)^2$)

b) Ecrire cette même égalité pour n = 3, puis n = 4, puis n = 5.
En déduire les résultats suivants :

$$\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{p} i^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^4 = \frac{p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1)}{30}$$

c) Montrer que la connaissances des sommes $\sum_{i=1}^{p} i, \quad \sum_{i=1}^{p} i^2, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{p} i^n$ permet de calculer la somme $\sum_{i=1}^{p} i^{n+1}$.

d) Démontrer par récurrence sur l'entier p que la somme $\sum_{i=1}^{p} i^n$ est le produit de $p(p + 1)$ par un polynôme de la variable p, de degré $(n - 1)$ en p.

(3) Autre méthode de calcul de $\sum_{i=1}^{p} i^n$.

Pour tous entiers naturels n et p, on pose $f_n(p) = \sum_{i=0}^{p} i^n$; on remarque que si p est différent de zéro, $f_n(p) = \sum_{i=1}^{p} i^n$.

Question 3 : a) Montrer que l'on a :

$f_n(p) - f_n(p-1) = p^n$ si $p \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

b) Réciproquement soit g_n une fonction numérique de la variable réelle, qui vérifie :

$g_n(p) - g_n(p-1) = p^n$, pour tout entier p naturel non nul et $g_n(0) = 0$.

Démontrer par récurrence sur l'entier p que :

$$g_n(p) = \sum_{i=0}^{p} i^n, \text{ pour tous entiers naturels n et p.}$$

B **On définit les fonctions g_n de la façon suivante :**

Pour tout nombre réel x :

1/ $g_o(x) = x$;

2/ On pose $\gamma_n(x) = n \int_o^x g_{n-1}(t)\, dt$, pour tout entier naturel n non nul ;

3/ On pose $a_n = 1 - \gamma_n(1)$;

4/ $g_n(x) = \gamma_n(x) + a_n x$

<u>Question 4</u> : a) Calculer à l'aide de ce procédé algorithmique $g_1(x)$ et $g_2(x)$.
Retrouver ainsi les valeurs de

$$\sum_{i=1}^{p} i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} i^2.$$

b) Démontrer par récurrence <u>sur l'entier n</u> que l'on a :
$g_n(x) - g_n(x-1) = x^n$ pour tout nombre réel x et $g_n(o) = 0$.

<u>Indication</u> : Supposer que pour <u>un</u> entier n, on a : $g_n(x) - g_n(x-1) = x^n$ et calculer $g'_{n+1}(x) - g'_{n+1}(x-1)$ pour en déduire l'expression de $g_{n+1}(x) - g_{n+1}(x-1)$.

c) Conclure de ce qui précède que l'on a par ce procédé :

$g_n(p) = \sum_{i=o}^{n} i^n$ pour tous entiers naturels n et p.

d) En utilisant le résultat trouvé à la question 2,b), pour la somme $g_4(p) = \sum_{i=1}^{p} i^4$, calculer $g_5(p) = \sum_{i=1}^{p} i^5$.

C Supplément :

<u>Question 5</u> : Etudier et représenter graphiquement les fonctions g_1, g_2 et g_3.

COMPLEMENT : COMMENT A ETE TROUVE L'ALGORITHME DU PARAGRAPHE 3 A.

On cherche une suite de fonctions polynômes g_n qui vérifie pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ , } g_n(x) - g_n(x-1) = x^n & (1) \\ g_n(0) = 0 & \end{cases}$$

Supposons qu'une telle suite existe :

1) Pour n = 0, la condition (1) s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_0(x) - g_0(x-1) = 1$
la fonction polynôme $g_0 : x \longmapsto x$ vérifie les conditions (1) et (2)

2) Soit $n \geqslant 1$. En dérivant la relation (1) on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_n(x) - g'_n(x-1) = nx^{n-1}$

Comme (1) est vrai pour tout entier n, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'_n(x) - g'_n(x-1) = n(g_{n-1}(x) - g_{n-1}(x-1))$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_n(x) - n\, g_{n-1}(x) = g'_n(x-1) - n\, g_{n-1}(x-1)$

On en déduit que la fonction polynôme $g'_n - ng_n$ prend la même valeur par exemple pour tout entier : $g'_n - ng_n$ est donc une fonction constante ; on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_n(x) - ng_{n-1}(x) = a_n$

on intègre cette égalité sur l'intervalle [0 ; 1]. Compte tenu de la relation (2) on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g_n(x) = n \int_0^x g_{n-1}(t)\, dt + a_n x \qquad (3)$$

De plus des relations (1) et (2) on déduit que $g_n(1) = 1$, ce qui permet de déterminer a_n en donnant à x la valeur 1 dans l'égalité (3).
On obtient :

$$a_n = 1 - n \int_0^1 g_{n-1}(t)\, dt.$$

On trouve bien ainsi la suite des fonctions polynômes g_n décrite par l'algorithme du paragraphe 3 A .

20. UN PROCÉDÉ DE CALCUL NUMERIQUE DE LOGARITHMES NEPERIENS

On étudie une méthode permettant de calculer, avec une excellente précision, et en utilisant seulement les opérations élémentaires d'une calculette (+, -, x, ÷), les logarithmes de quelques nombres.

① Calcul approché de ln x, où x est peu supérieur à 1.

a) Vérifier que, si $x = 1 + u$, on a :

$$\ln x = \int_0^u \frac{dt}{1+t}$$

b) Si $0 < t < 1$, démontrer que :

$$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 < \frac{1}{1+t} < 1 - t + t^2 - t^3 + t^4$$

(Indication : utiliser la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique)

c) En déduire que, si $0 < u < 1$, alors :

$$u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} < \ln(1+u) < u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5}$$

Pour $0 < u < \frac{1}{20}$, vérifier que l'encadrement de $\ln(1+u)$ défini par cette double inégalité a une largeur toujours inférieure à 3×10^{-9}.

② **Application numérique**

a) En utilisant la méthode précédente, déterminer des encadrements des nombres suivants : $a = \ln \frac{25}{24}$, $b = \ln \frac{81}{80}$, $\ln \frac{128}{125} = c$.

b) On pose $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 3$, $\gamma = \ln 5$.

(Ce sont les logarithmes des premiers nombres premiers !)

Vérifier que :

$$\begin{cases} -3\alpha - \beta + 2\gamma = a \\ -4\alpha + 4\beta - \gamma = b \\ 7\alpha \quad -3\gamma = c \end{cases}$$

c) Calculer α, β, γ en fonction de a,b,c.
En déduire des encadrements de α, β, γ.

d) Déterminer, à l'aide des résultats précédents, des encadrements des logarithmes des nombres suivants :

4 ; 6 ; 10 ; 1,5 ; 1,6

21. EQUATIONS DU TROISIEME DEGRE

I- DISCUSSION EN FONCTION DU PARAMETRE p DE L'EQUATION $x^3 - 3x - 2p = 0$

On peut mettre cette équation sous la forme : $x^3 - 3x = 2p$ et introduire l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^3 - 3x$$

Les racines de l'équation $x^3 - 3x - 2p = 0$ sont alors les abcisses des points communs de la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction φ et de la droite d'équation $y = 2p$.

Question 1 : Etudier φ et tracer sa représentation graphique $\mathcal{C}$.
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$.

Question 2 : Résoudre l'équation $\varphi(x) = 2$. Discuter suivant les valeurs de p le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = 2p$ et préciser leur signe.
Comparer les racines des équations : $\varphi(x) = 2p$ et $\varphi(x) = -2p$

Conséquence : Pour le reste de l'étude on choisit p positif.

Remarque : D'après la discussion précédente, quand $p > 1$ l'équation $\varphi(x) = 2p$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule racine notée x_0. Démontrons que dans $\mathbb{C}$ cette même équation admet trois racines, à savoir x_0 et deux racines non réelles complexes conjuguées. En effet on peut écrire :
$x^3 - 3x - 2p = (x - x_0)\,Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré à coefficient réels.

Question 3 : Démontrer que Q n'admet pas de racines réelles. On sait que Q admet toujours deux racines dans $\mathbb{C}$; elles sont complexes conjuguées notées x_1 et $\overline{x_1}$.
Dans $\mathbb{C}$ on peut écrire : $x^3 - 3x - 2p = (x - x_0)(x - x_1)(x - \overline{x_1})$.
Dans $\mathbb{R}$ on obtient : $x^3 - 3x - 2p = (x - x_0)(x^2 - x(x_1 + \overline{x_1}) + x_1\overline{x_1})$.
et l'on remarque que $x_1 + \overline{x_1}$ ainsi que $x_1\overline{x_1}$ sont des nombres réels.

Question 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$.

II- RESOLUTION DE L'EQUATION $x^3 - 3x - 2p = 0$ où p est un nombre réel.

A/ Autour des racines cubiques

Dans toute la suite on pose $j = [1, \frac{2\pi}{3}]$

a) Vérifier que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. En déduire que l'équation $z^3 = 1$ admet trois racines : 1, j, $\bar{j}$.

b) Vérifier que $1 + j + \bar{j} = 0$ et que $\bar{j} = j^2$.

c) Soit $\mathcal{Z}$ un nombre réel non nul. On se propose de chercher les racines cubiques de $\mathcal{Z}$ à savoir les nombres complexes z tels que $z^3 = \mathcal{Z}$. Soit z_0 la racine cubique réelle de $\mathcal{Z}$.
Montrer que l'équation $z^3 = \mathcal{Z}$ est équivalente à l'équation $(\frac{z}{z_0})^3 = 1$.
En déduire que le nombre réel $\mathcal{Z}$ admet dans $\mathbb{C}$ trois racines cubiques qui sont : z_0, $z_0 j$ et $z_0 \bar{j}$.

d) Soit $\mathcal{Z}$ un nombre complexe de module 1 et d'argument θ élément de $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.
Montrer que $z_0 = [1, \frac{\theta}{3}]$ est une racine cubique de $\mathcal{Z}$. En déduire les trois racines cubiques de $\mathcal{Z}$.

B/ Résolution de l'équation $\varphi(x) = 2p$ avec $p > 1$ par la méthode de Cardan.

On pose $x = u + v$

Question 5 : Vérifier que l'équation $x^3 - 3x = 2p$ s'écrit :
$(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv - 3) = 2p$.
En déduire que si les deux nombres u et v vérifient $\begin{cases} uv = 1 \\ u^3 + v^3 = 2p \end{cases}$
alors $u + v$ est solution de l'équation $x^3 - 3x = 2p$.
On est ainsi amené à chercher deux nombres u et v tels que :

$$\begin{cases} uv = 1 \\ u^3 + v^3 = 2p. \end{cases}$$

Si u et v existent, alors u^3 et v^3 vérifient $\begin{cases} u^3 v^3 = 1 \\ u^3 + v^3 = 2p \end{cases}$
et sont solutions de l'équation $y^2 - 2py + 1 = 0$.

Question 6 : Démontrer que la solution réelle de l'équation $x^3 - 3x = 2p$ est :

$$x_0 = \sqrt[3]{p + \sqrt{p^2 - 1}} + \sqrt[3]{p - \sqrt{p^2 - 1}}$$

Application : Trouver une valeur approchée à 10^{-3} près de la racine réelle de l'équation $x^3 - 3x = 4$.

On a vu dans la remarque de I- que l'équation $\varphi(x) = 2p$ admet deux autres racines complexes. On se propose de les déterminer.

Si on raisonne dans $\mathbb{C}$ on peut reprendre tout l'exposé du § B/. Posons :

$$A = p + \sqrt{p^2 - 1} \qquad B = p - \sqrt{p^2 - 1}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{p + \sqrt{p^2 - 1}} \qquad \beta = \sqrt[3]{p - \sqrt{p^2 - 1}}$$

A est un nombre réel qui admet une racine cubique réelle α et deux racines cubiques complexes αj et $\alpha \bar{j}$.

B est de même un nombre réel qui admet une racine cubique réelle β et deux racines cubiques complexes βj et $\beta \bar{j}$.

Question 7 : Démontrer en utilisant la relation $uv = 1$ que l'équation $x^3 - 3x = 2p$, lorsque $p > 1$, admet une racine réelle $\alpha + \beta$ et deux racines complexes $\alpha j + \beta \bar{j}$ et $\alpha \bar{j} + \beta j$.

Vérifier par le calcul que ces trois nombres sont solutions de l'équation proposée.

Application : Montrer sans calcul que : $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 3$

* En déduire la valeur de $\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$

C/ Résolution de l'équation $\varphi(x) = 2p$ avec $0 < p < 1$.

On reprend les calculs du § précédent. Le discriminant de l'équation $y^2 - 2py + 1 = 0$ est trictement négatif. On pose $A = p + i\sqrt{1 - p^2}$

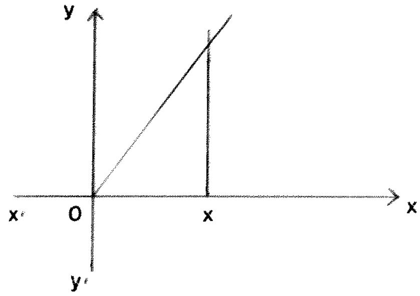
Question 8 : Calculer $|A|$ et vérifier que $\operatorname{Arg} A \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que $(u^3, v^3) = (A, \bar{A})$.

<u>Question 9</u> : Montrer que si α , α j, $\alpha \bar{j}$ sont les racines cubiques complexes de A, alors $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ j, $\bar{\alpha}\,\bar{j}$ sont les trois racines cubiques complexes de $\bar{A}$. En déduire les trois racines réelles de l'équation $x^3 - 3x = 2p$.

<u>Question 10</u> : Résoudre de cette manière l'équation $x^3 - 3x = 1$: on donnera les solutions sous forme de lignes trigonométriques.

22. RESOLUTION DE L'EQUATION $x^3-3x-1 = 0$ A L'AIDE DE LA TRIGONOMETRIE



A/ RESOLUTION DE L'EQUATION

Question 1 : Montrer que tout réel x peut s'écrire
$x = R \cos \theta$ avec $R > 0$ et $0 < \theta < \pi$

Question 2 : Démontrer que pour tout θ réel on a :
$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta$.

Pour résoudre l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ (1) on introduit l'inconnue auxiliaire θ en posant $x = R\cos \theta$ ($R > 0$, $0 < \theta < \pi$). On se réserve de choisir R ultérieurement de façon à simplifier les calculs.

Question 3 : a) Montrer que l'équation (1) peut s'écrire :
$P(R) \cos 3\theta + Q(R) \cos \theta = 1$. (2) où P et Q sont deux polynômes.

b) Déterminer R de façon que l'on ait $Q(R) = 0$.

c) Résoudre, dans ce cas, l'équation (2) d'inconnue θ dans $]0, \pi[$

Question 4 : Résoudre l'équation (1) : on montrera qu'elle admet trois solutions qui peuvent s'écrire :
$2 \cos \frac{\pi}{9}$, $2 \cos (\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})$, $2 \cos (\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})$.

B/ CONSTRUCTION GEOMETRIQUE DES SOLUTIONS

Pour construire la figure étudiée on prendra 4 cm comme unité.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ et Γ le cercle de centre O et de rayon 2.
Soit M le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \frac{\pi}{3}$ et M_1 le point de Γ tel que $(\vec{OA}, \vec{OM_1}) = \frac{\pi}{9}$.
On mène de M les parallèles à (OA) et (OB) qui coupent la droite (OM_1) en P et Q. Soit R le milieu de [PQ].

Question 5 : Démontrer que $RM = OM$; en déduire que $PQ = 2$.

Question 6 : Déduire, de ce qui précède une construction de $a_1 = 2 \cos \frac{\pi}{9}$ à l'aide de la règle, du compas et d'une "bande de papier" sur laquelle on portera la longueur 2.

Question 7 : Construire les solutions de l'équation (1).

Remarque : La construction de la question 4 donne un procédé général pour diviser un angle en trois (problème de la trisection de l'angle) lorqu'on ne sait le faire à l'aide des seuls règle et compas.

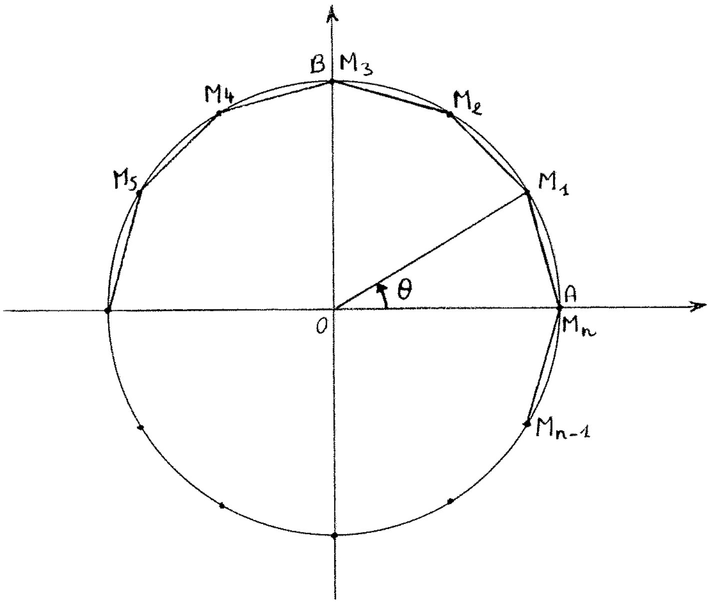
23. CONSTRUCTION (à la règle et au compas) DE POLYGONES REGULIERS

(1) NOTATIONS ET REMARQUES

Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

On se propose, dans cetté étude, de contruire à la règle et au compas des polygones réguliers à n côtés (n = 3 ; 4 ; 5 ; 17) inscrits dans $\mathscr{C}$, dont un sommet est en A.

Les sommets sont nommées M_1, M_2, ..., M_n (M_n = A) comme suggéré dans la figure ci-dessous. On désigne par θ l'angle au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_1})$; on a donc $\theta = \frac{2\pi}{n}$. On pose $\omega = \cos\theta + i \sin\theta$.



Question 1 : Vérifier que les affixes de M_1, M_2, ..., M_n sont ω, ω^2..., ω^n.

Exprimer, en fonction de θ et de k les coordonées du sommet M_k ($k \in (1,2,\ldots n)$).

Question 2 : Vérifier que $\omega^n = 1$, $\omega^{n+1} = \omega$, $\omega^{n+2} = \omega^2$, ..., $\omega^{n+k} = \omega^k$

Démontrer que : ω^{n-k} et ω^k sont deux complexes conjugués.

(2) CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE EQUILATERAL ET D'UN CARRE

Question 3 : Calculer, pour n = 3 puis n = 4, les coordonnées de M_1.
En déduire une construction à la règle et au compas d'un triangle équilatéral et d'un carré inscrits dans $\mathcal{C}$.

(3) CONSTRUCTION D'UN PENTAGONE REGULIER

a) Calcul de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

On suppose n = 5. On a alors $\omega^5 = 1$

Question 4 : Démontrer que $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$
Exprimer en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$: $\omega^4 + \omega$ et $\omega^3 + \omega^2$.

En calculant de deux façons différents $(\omega^4 + \omega) + (\omega^3 + \omega^2)$ et $(\omega^4 + \omega)(\omega^3 + \omega^2)$ démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$ sont solutions d'une équation du second degré. En déduire que
$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)$

b) Construction d'un pentagone régulier

Le point M_1 est déterminé dès que l'on sait construire, à la règle et au compas une longueur égale à $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}\right)$.

Question 5 : Remarquer que $\frac{5}{4} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ pour construire, à l'aide d'un triangle rectangle le point L de (OA) d'abscisse $\sqrt{\frac{5}{4}}$ puis construire le point K de (OA) d'abscisse $-\frac{1}{2}$. En déduire la construction du point I de (OA) d'abscisse $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis celle de M_1.
Terminer la construction du pentagone régulier.

(4) CONSTRUCTION D'UN POLYGONE REGULIER A 17 COTES

A/ On suppose n = 17. On a alors $\omega^{17} = 1$.

Question 6 : Calculer $\omega^{16} + \omega^{15} + \ldots + \omega^{3} + \omega^{2} + \omega + 1$.

On pose : $u_1 = \omega^1 + \omega^9 + \omega^{13} + \omega^{15} + \omega^{16} + \omega^8 + \omega^4 + \omega^2$.

$u_2 = \omega^3 + \omega^{10} + \omega^5 + \omega^{11} + \omega^{14} + \omega^7 + \omega^{12} + \omega^6$

$v_1 = \omega^1 + \omega^{13} + \omega^{16} + \omega^4$; $v_2 = \omega^9 + \omega^{15} + \omega^8 + \omega^2$

$v_3 = \omega^3 + \omega^5 + \omega^{14} + \omega^{12}$ $v_4 = \omega^{10} + \omega^{11} + \omega^7 + \omega^6$

N.B. Des considérations théoriques dûes au mathématicien GAUSS (1777-1855) justifient ces "regroupements". Nous ne les exposerons pas ici.

Question 7 : Calculer $u_1 + u_2$ et $u_1 u_2$.

Déterminer l'équation du second degré dont u_1 et u_2 sont les solutions.

Question 8 : Calculer $v_1 v_2$, et en déduire que v_1 et v_2 sont solutions de l'équation : $X^2 - u_1 X - 1 = 0$

Procéder de façon analogue pour v_3 et v_4.

Question 9 : Montrer que $v_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{17} + \cos \frac{8\pi}{17})$.

Exprimer de même v_2, v_3 et v_4.

En déduire que : $v_2 < v_1$, $v_4 < v_3$.

Question 10 : Exprimer de façon analogue le nombre u_1 et démontrer que $u_1 > 0$.

Les réponses aux questions 9 et 10 permettent de distinguer les racines des équations du second degré écrites aux questions 7 et 8. On pose $\frac{2\pi}{17} = \theta$

Question 11 : On sait que $\cos 3\theta + \cos 5\theta = \frac{1}{2} v_3$

Montrer que $\cos 3\theta \cdot \cos 5\theta = \frac{1}{2} (\cos 2\theta + \cos 8\theta) = \frac{1}{4} v_2$

B/ CONSTRUCTION

Les nombres $\cos 3\theta$ et $\cos 5\theta$ sont les abscisses des sommets M_3 et M_5.

Connaissant M_3 et M_5 on trouvera facilement M_4 puis les autres sommets du polygone régulier.

On cherche donc à construire les points P_3 et P_5 de (OA) d'abscisses respectives $\cos 3\theta$ et $\cos 5\theta$. Les calculs suivants le permettront.

a) On pose $\operatorname{tg} 4\varphi = 4$. avec $0 < \varphi < \frac{\pi}{8}$.

Question 12 : Justifier la phrase précédente.

Question 13 : Calculer u_1 et u_2 à l'aide des résultats du paragraphe A.

On se propose de démontrer que $u_1 = 2 \operatorname{tg} 2\varphi$.

Pour cela on remarquera que $\sqrt{17} = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 4\varphi}$

On exprimera alors u_1 en fonction de $\cos 4\varphi$ puis en fonction de $\operatorname{tg} 2\varphi$. (On pourra exprimer $1 - \cos 4\varphi$ en fonction de $\sin 2\varphi$ et remarquer qu'on a ici $\frac{\sin 4\varphi}{\cos 4\varphi} = 4$).

Question 14 : Calculer v_1 et v_2 en fonction de φ, en utilisant les résultats du paragraphe A et ceux de la question précédente.

Faire de même pour v_3 et v_4.

On montrera que $v_2 = tg(\varphi - \frac{\pi}{4})$ et que $v_3 = tg\,\varphi$.

Pour le calcul de v_2 on pourra remarquer que $\sin 2\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\varphi)$ et que $\cos 2\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\varphi)$.

CONCLUSION :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Cos } 3\theta + \cos 5\theta = \frac{1}{2}\,tg\,\varphi & \\ & \text{avec } tg\,4\varphi = 4 \text{ et } 0 < \varphi < \frac{\pi}{8} \\ \text{Cos } 3\theta \cos 5\theta = \frac{1}{4}\,tg(\varphi - \frac{\pi}{4}) & \end{array}}$$

Construction de H.W. RICHMOND (1893)

Pour cette construction on prendra comme unité de longueur 8 cm.

Soit $I(0, \frac{1}{4})$ et soit J le point de [OA] tel que $4(\vec{IO},\vec{IJ}) = (\vec{IO},\vec{IA})$.

Soit K le point de (OA) tel que $(\vec{IJ},\vec{IK}) = -\frac{\pi}{4}$.

Le cercle de diamètre [AK] coupe [OI] en L.

Le cercle de centre J et de rayon JL coupe OA en P_3 (d'abscisse positive) et P_5.

Question 15 : Démontrer que $(\vec{IO},\vec{IJ}) = \varphi$

Démontrer que $\overline{OP_3} + \overline{OP_5} = 2\overline{OJ} = \frac{1}{2}\,tg\,\varphi$

Démontrer que $\overline{OP_3} \cdot \overline{OP_5} = \overline{OK} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{4}\,tg\,(\varphi - \frac{\pi}{4})$.

(On rappelle que dans un triangle ABC, rectangle en A, de hauteur AH on a : $AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC}$).

Déduire de ce qui précède les égalités :

$\overline{OP_3} = \cos 3\theta$ et $\overline{OP_5} = \cos 5\theta$.

Question 16 : Terminer la construction à la règle et au compas du polygône régulier à 17 côtés étudié.

N.B. Ouvrage de référence : "Théorie des corps la règle et le compas"
Jean Louis Carrega, Herrmann.

24. CONSTRUCTION D'UN POLYGONE REGULIER SOLUTION "APPROCHEE"

Le problème de la construction des polygones réguliers de n côtés à la règle et au compas remonte à l'Antiquité. On sut, très tôt, construire ainsi le triangle équilatéral, le carré, le pentagone et l'hexagone réguliers. La construction classique de la bissectrice permet en outre de construire un polygone régulier de 2n côtés à partir d'un polygone régulier de n côtés.

Ce n'est qu'en 1796 que le mathématicien allemand GAUSS (âgé de 19 ans) décrivit une construction du polygone régulier de 17 côtés. Peu après Gauss énonça le résultat général suivant :

> Un polygone régulier de n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance entière de deux par un ou plusieurs nombres premiers de Fermat.

Quels sont ces nombres premiers de Fermat ? Ce sont les nombres premiers de la forme :

$$F_p = 2^{(2p)} + 1 \qquad \text{(p entier)}$$

Ainsi $F_0 = 3$; $F_1 = 5$; $F_2 = 17$; $F_3 = 257$; $F_4 = 65537$ etc...

(Attention, un nombre de cette forme n'est pas toujours premier : ainsi $F_5 = 4\ 294\ 967\ 297$ est divisible par 641)

Nous allons étudier ici une construction à la règle et au compas d'une solution "approchée" du problème posé, c'est-à-dire d'un polygone "presque régulier".

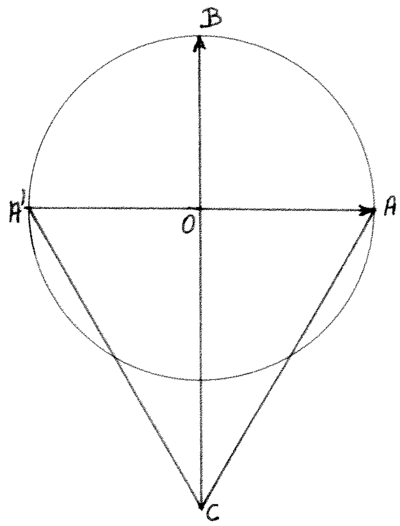
I- ANALYSE DU PROBLEME

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On appelle A' le point diamétralement opposé à A et C le troisième sommet du triangle équilatéral direct AA'C de côté $[A'A]$.

On désigne par P_n le polygone régulier de n côtés inscrit dans $\mathscr{C}$, et dont l'un des sommets est le point A.

Soit : A_n le sommet de P_n défini par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_n}) = \frac{2\pi}{n}$

M_n le point d'intersection de la droite (CA_n) avec l'axe $(O ; \overrightarrow{OA})$.



Question 1 : a) Construire sur trois figures différentes les polygones :
P_3 (triangle équilatéral)
P_4 (carré)
P_6 (hexagone).

b) Calculer AM_3, AM_4 et AM_6 ;
Vérifier que dans chaque cas,
on a : $AM_n = \frac{4}{n}$,
et : $\overline{OM_n} = 1 - \frac{4}{n}$.

On étudie maintenant le cas où n est un entier quelconque.

Question 2 : a) Calculer en fonction de n l'abscisse x_n du point M_n.

b) Pour n variant de 3 à 12 (par exemple) et n = 17, compléter le tableau suivant :

n	x_n	$1 - \frac{4}{n}$

On écrira les valeurs approchées de x_n et de $1 - \frac{4}{n}$ par arrondi avec 3 chiffres après la virgule , à l'aide de la calculatrice.

Pour les valeurs de n envisagées, celles de x_n et de $1 - \frac{4}{n}$ sont "très voisines". Ceci nous conduit à étudier la suite (e_n) définie par :

$$e_n = x_n - (1 - \frac{4}{n})$$

Pour cela, on étudie les variations de la fonction f définie sur $[4 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{\cos \frac{2\pi}{t}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin \frac{2\pi}{t}} - 1 + \frac{4}{t}$$

<u>**Question 3**</u> : a) Vérifier que pour tout t de $[4 ; +\infty[$, on a : $0 \leqslant \frac{2\pi}{t} \leqslant \frac{\pi}{2}$

b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

c) Calculer $f'(t)$ et montrer que $f'(t)$ est du signe de :

$$\varphi(t) = -2 \sin^2 \frac{2\pi}{t} + (3\pi - 4\sqrt{3}) \sin \frac{2\pi}{t} + \pi\sqrt{3} - 6.$$

d) On pose $X = \sin \frac{2\pi}{t}$; étudier le signe du polynôme

$$g(X) = -2X^2 + (3\pi - 4\sqrt{3}) X + \pi\sqrt{3} - 6$$

e) Soit X' et X" les racines de g(X) ; on appelle t' et t" les nombres de l'intervalle $[4 ; +\infty[$ définis par :

$$X' = \sin \frac{2\pi}{t'} \quad \text{et} \quad X'' = \sin \frac{2\pi}{t''}$$

Donner le tableau de variations de f.

f) Démontrer alors que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a : $|e_n| < 10^{-2}$

pour obtenir ce résultat on fera confiance à la calculatrice.

II- CONSTRUCTION D'UN POLYGONE "PRESQUE-REGULIER"

Les résultats précédents nous indiquent pour $n = 5$ ou $n \geqslant 7$, une construction à la règle et au compas d'un polygone P'_n "presque-régulier" de n côtés inscrit dans $\mathscr{C}$ et dont l'un des sommets est A.

Construction de P'_n

On partage le diamètre [A'A] en n parties égales.
Soit M'_n le deuxième point de la subdivision compté à partir de A.
La droite (CM'_n) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points ; soit A'_n celui des deux qui a la plus grande abscisse.
$[AA'_n]$ est un côté du polygone P'_n.

Question 4 : Faire la construction de P'_7 à la règle et au compas.

Question 5 : Soit n un entier égal à 5 ou supérieur à 7.

a) Quelle est l'abscisse de M'_n ?

b) Soit $(X_n ; Y_n)$ les coordonnées de A'_n. Calculer X_n et démontrer que :

$$X_n = \frac{2(n-4)}{3n - \sqrt{n^2 + 16n - 32}}$$

c) On pose $\alpha'_n = (\vec{OA}, \vec{OA'_n})$. On a donc : $\operatorname{tg} \alpha'_n = \frac{Y_n}{X_n}$;

démontrer que : $\frac{Y_n}{X_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4}$

d) On pose $\alpha_n = (\vec{OA}, \vec{OA_n})$

Pour n variant de 5 à 12 et n = 17, compléter le tableau suivant :

n	α_n	α'_n

on écrira les valeurs de α_n et de α'_n exprimées en degrés, minutes et secondes, données par la calculatrice.

III- POUR ALLER PLUS LOIN

Au paragraphe I, on a étudié l'erreur e_n commise sur l'abscisse de M_n lorsqu'on remplace M_n par M'_n. On conçoit aisément que l'erreur ε_n commise alors sur l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA_n})$ soit du même ordre de grandeur.

Mais le fait que e_n soit petite (inférieure au centième) ne signifie nullement que le polygone P'_n "approche bien" le polygone P_n, pour les grandes valeurs de n ; en effet l'angle $\frac{2\pi}{n}$ est alors, lui aussi, "petit". Pour avoir une idée de la qualité de cette approximation, il faut étudier l'erreur relative commise sur l'angle $\frac{2\pi}{n}$. Celle-ci, $\frac{\varepsilon_n}{\frac{2\pi}{n}}$ fait intervenir une fonction qui n'est pas au programme ;

Aussi va-t-on étudier $\frac{e_n}{\frac{2\pi}{n}} = E_n$ dont l'ordre de grandeur sera le même

A/ **Question 6** : Montrer que si $3 \leqslant n \leqslant 17$, alors $E_n < 0{,}03$

B/ Pour $n > 17$, nous allons étudier la fonction g définie sur $[18, +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{f(t)}{\frac{2\pi}{t}} = \frac{1}{2\pi}\, tf(t)$$

Pour plus de facilité, on pose $\frac{\pi}{t} = X$

1 **Question 7** : a) Démontrer que l'on a :

$$g(t) = -\frac{\sqrt{3}\sin X + \cos X}{\sqrt{3} + \sin 2X} \cdot \frac{\sin X}{X} + \frac{2}{\pi} \quad \text{avec } X = \frac{\pi}{t} \;;$$

b) En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$.

2 On a : $2\pi\, g'(t) = f(t) + tf'(t)$

On étudie le signe de $g'(t)$!

Question 8 : a) Montrer que $2\pi\, g'(t) = h_1(X) + h_2(X)$, avec

$$h_1(X) = -2\,\frac{\sqrt{3}\sin X + \cos X}{\sqrt{3} + \sin 2X}\,\sin X$$

$$h_2(X) = 2\sqrt{3}\;\frac{1 + \sqrt{3}\sin 2X}{(\sqrt{3} + \sin 2X)^2}$$

b) Utiliser le résultat : $\forall\, X \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant \sin X \leqslant X$, pour démontrer que :

$$h_1(X) + h_2(X) \geqslant \frac{2X}{(\sqrt{3}+\sin 2X)^2}\left[(1+\sqrt{3}\sin 2X)\sqrt{3} - (\sqrt{3}\sin X+\cos)(\sqrt{3}+\sin 2X)\right]$$

c) Déduire du même résultat que :

$$(\sqrt{3}\sin X + \cos X)(\sqrt{3} + \sin 2X) \leqslant \sqrt{3} + 5X + 2\sqrt{3}\,X^2$$

d) Utiliser le résultat : $\forall\, U \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $U - \frac{U^3}{6} \leqslant \sin U$ *, pour démontrer que :

$$\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}\sin 2X) \geqslant \sqrt{3} + 6X - 4X^3$$

e) Déduire des résultats précédents que, pour tout $t \geqslant 18$, on a :

$$g'(t) \geqslant \frac{\pi}{t^2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3} + \sin\frac{2\pi}{t})^2} \cdot \left(1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{t} - \frac{4\pi^2}{t^2}\right)$$

Question 9 : a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 18$, $1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{t} - \frac{4\pi^2}{t^2} > 0$

b) En déduire que la fonction g est croissante sur $[18, +\infty[$, et par conséquent que :

$$\forall t \in [18, +\infty[\ ,\ g(t) < \lim_{t \to +\infty} g(t).$$

C/ **Question 10** : Conclure que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$E_n < 0{,}06$ (on fera confiance à la calculatrice)

Ce dernier résultat montre la qualité de l'approximation des polygones P_n par les polygones P'_n, quelle que soit la valeur de n.

* On peut admettre ce résultat. On peut aussi le démontrer en se reportant à la question 5b) du T.P. intitulé : "Intégrations par parties répétées".

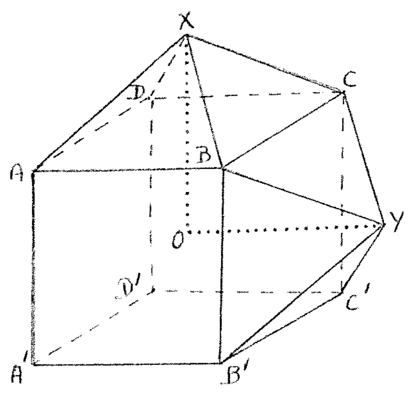
25. OU L'ON RETROUVE L'ANGLE DES ABEILLES

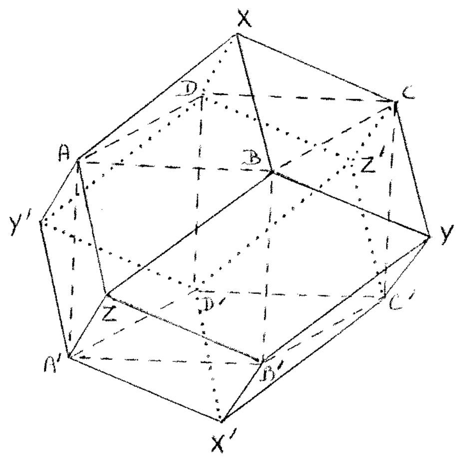
(1) Le grenat dodécaèdre ou le dodécaèdre rhombique

Voici un passage tiré de l'"Essai d'une théorie sur les cristaux appliquée à plusieurs genres de substances cristallisée" par M. L'Abbé Häuy Paris 1784 et lu dans la brochure "Mathématiques et Pédagogie N° 53":
"Développement du grenat dodécaèdre : douze rhombes égaux et semblables entre eux. L'angle obtus acd ou abd de ces rhombes est de 109° 28' 16" ; et l'angle aigu bac ou bdd est de 70° 31' 44"."

Le rhombe est l'ancien mot utilisé pour désigner un losange.

Donnons une autre description qui permette de mieux étudier ce dodécaèdre : partant d'un cube de sommets ABCDA'B'C'D' on construit les symétriques X,X',Y,Y',Z,Z' du centre O du cube par rapport à chacun des plans des six faces, et on construit sur chacune des six faces une pyramide ayant pour sommet le symétrique de O par rapport à la face considérée.





Question 1 : a) Démontrer que les points X,B,C et Y sont coplanaires et que le quadrilatère XBYC est un losange.

b) Comment peut-on en déduire qu'on a ainsi construit douze faces "rhombiques" isométriques.

Question 2 : On pose AB = a
Calculer les angles $\widehat{XBY}$ et $\widehat{BXC}$

La réunion de trois losanges tels que XAZB, BZB'Y et BYCX donne le fond d'une alvéole d'abeille.

(2) La molécule de méthane : CH_4

La molécule de méthane est l'association d'un atome de carbone et de quatre atomes d'hydrogène. Dans cette molécule les atomes d'hydrogène sont à la même distance de l'un quelconque de leurs voisins et sont tous à la même distance du carbone.

Question 3 : Démontrer que les quatre atomes d'hydrogène sont aux sommets d'un tétraèdre régulier et que l'atome de carbone est au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

Question 4 : On note H_1, H_2, H_3, H_4 les sommets du tétraèdre.

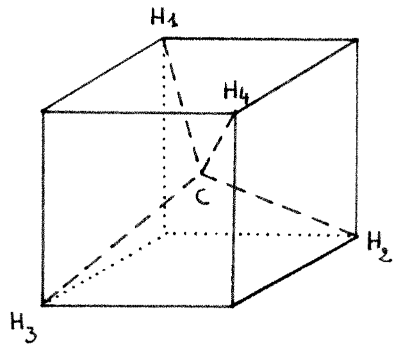
a) Démontrer que C est isobarycentre de (H_1, H_2, H_3, H_4)

b) Calculer l'angle $\widehat{H_1CH_2}$.

Question 5 : Autre manière de calculer l'angle $\widehat{H_1CH_2}$

a) Démontrer que H_1, H_2, H_3, H_4 peuvent être placés aux sommets d'un cube comme l'indique le dessin ci-dessous et que c est le centre de ce cube .

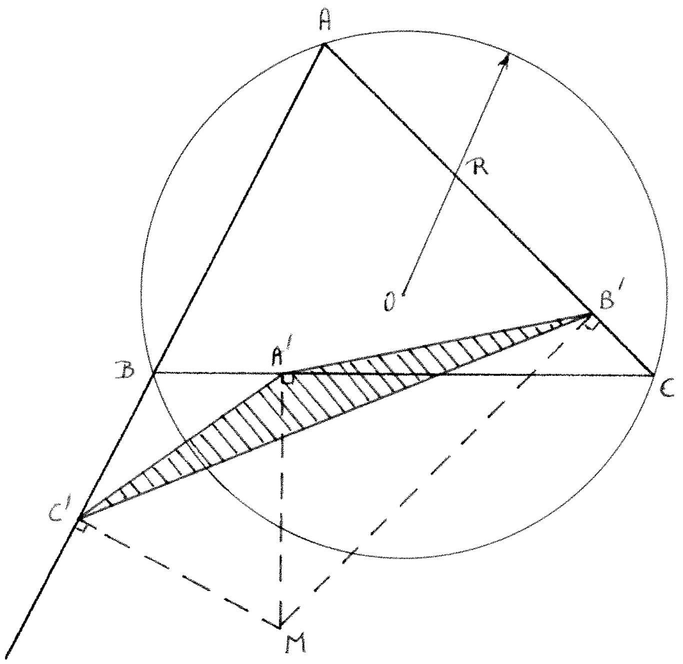
b) En déduire que l'angle $\widehat{H_1CH_2}$ est égal à l'angle $\widehat{XBY}$ du paragraphe 1.



26. ETUDE D'UNE CONFIGURATION A L'AIDE DE BARYCENTRES

PROBLEME

On donne un triangle ABC. Soit O le centre de son cercle circonscrit et R le rayon de ce cercle.
Soit M un point du plan ; on désigne par A', B' et C' ses projections orthogonales sur (BC), (CA) et (AB).
On cherche à calculer l'aire $\mathcal{A}_M$ du triangle A'B'C' en fonction des données et de la position géométrique du point M.



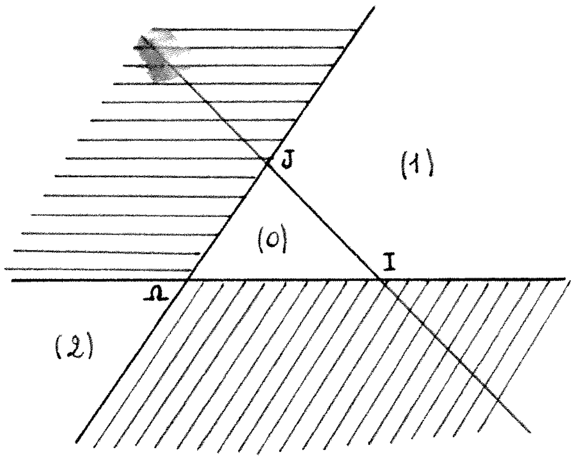
I- PRELIMINAIRES

A/ Soit (Ω, I,J) un repère et M un point du plan. On appelle x et y les coordonnées de M dans ce repère.

1 **Question 1** : Montrer que M est barycentre de (Ω,1-x-y),(I,x),(J,y).

Question 2 : Etudier les signes de x, y, 1-x-y suivant la région notée (0),(1) ou (2) à laquelle appartient M (figure 1). On donnera les résultats sous forme de tableau :

figure 1.



M	x	y	$1-x-y$
: région (0)			
: région (1)			
: région (2)			

(2) **Question 3** : D'après le résultat de la question 1, on a :

$$(1-x-y)\ \overrightarrow{M\Omega} + x\ \overrightarrow{MI} + y\ \overrightarrow{MJ} = \vec{0}$$

Multiplier les deux membres de cette égalité vectoriellement par le vecteur $\overrightarrow{M\Omega}$; en déduire que les nombres $|x|$ et $|y|$ sont proportionnels aux aires des triangles $M\Omega I$ et $M\Omega J$.

B/ On applique les résultats du paragraphe A/ au triangle ABC.

Les droites (BC), (CA) et (AB) partagent le plan en sept régions.

Question 4 : Montrer que tout point M du plan peut être considéré comme barycentre de :

(A, ϵ_1 Aire (MBC)), (B, ϵ_2 Aire (MCA)), (C, ϵ_3 Aire (MAB)),

où : (ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3) est le triplet de signes correspondants à la région à laquelle M appartient (figure 2) ;

et : ϵ_1 Aire (MBC) + ϵ_2 Aire (MCA) + ϵ_3 Aire (MAB) = Aire (ABC).

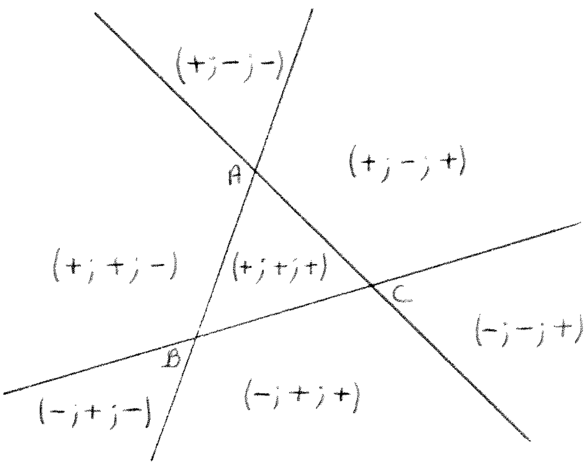


figure 2.

Indication : on pourra faire
d'abord : Ω = A, I = B, J = C
puis : Ω = B, I = C, J = A
enfin : Ω = C, I = A, J = B.

II- CALCUL DE L'AIRE DU TRIANGLE A'B'C'.

Cas particulier : M = O

Question 5 : Calculer l'aire $\mathcal{A}_0$ du triangle A'B'C' dans ce cas.

Cas général :

A/ Soit (Ω, I,J) un repère et M un point du plan. On appelle p, q et r les projetés orthogonaux de M sur les droites (IJ),(ΩI) et (ΩJ).

Question 6 : a) Montrer que si M appartient à la région (1) (figure 1), alors :
Aire (pqr) = |Aire (Mpq) - Aire(Mqr) - Aire (Mrp)|
On justifiera la "nécessité" de la valeur absolue.

b) Quels résultats obtient-on lorsque M appartient à la région (0) ? A la région (2) ? (figure 1).

B/ On applique les résultats du paragraphe A/ au triangle ABC.

Question 7 : Vérifier que, quelle que soit la position de M dans le plan, on a :

$$\text{Aire (A'B'C')} = |\epsilon_1 \text{ Aire (MB'C')} + \epsilon_2 \text{ Aire (MC'A')} + \epsilon_3 \text{ Aire (MA'B')}|$$

où (ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3) est le même triplet de signes que celui de la question 4.

CONCLUSION :

$$\text{Aire(A'B'C')} = |\epsilon_1 \text{ Aire (MB'C')} + \epsilon_2 \text{ Aire (MC'A')} + \epsilon_3 \text{ Aire(MA'B')}|$$

avec $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{S}(X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC})$

$X = \epsilon_1$ Aire (MBC), $Y = \epsilon_2$ Aire (MCA), $Z = \epsilon_3$ Aire (MAB)

$X + Y + Z = S$.

C/ On cherche à calculer $\mathcal{A}_M$ = Aire(A'B'C') en fonction des données a, b, c, S et des nombres X, Y, Z qui fixent la position de M.

Question 8 : On pose MA' = α, MB' = β, MC' = γ

a) Vérifier que : $\begin{cases} \text{Aire (MB'C')} = \beta\,\gamma \sin A = S\dfrac{\beta\gamma}{bc} \\ X = \epsilon_1 \dfrac{a\alpha}{2} \end{cases}$

b) Démontrer que $\mathcal{A}_M = \dfrac{4S}{a^2b^2c^2} \,|\, a^2\, YZ + b^2\, ZX + c^2\, XY|$

c) Que donne ce résultat lorsque M est le centre de gravité de ABC ? Lorsque M est le point de concours des bissectrices intérieures ?

D/ Calcul de $\mathcal{A}_M$ en fonction des données S, R et de la distance OM :

Question 9 : a) Développer $a^2\, YZ + b^2\, ZX + c^2\, XY$, en utilisant :

$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2$

et deux égalités analogues ;

b) Développer $OM^2 = \dfrac{1}{S^2}\,(X\overrightarrow{OA} + Y\overrightarrow{OB} + Z\overrightarrow{OC})^2$;

c) Déduire des résultats précédents l'expression de $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY$ en fonction de S, R et OM ;

d) Démontrer alors que :

$$\mathcal{A}_M = \frac{4S^3}{a^2b^2c^2}\,|R^2 - OM^2|$$

Question 10 : Que donne ce résultat général dans le cas particulier où M est en O ? en déduire que :

$$\boxed{\mathcal{A}_M = \frac{S}{4}\left|1 - \frac{OM^2}{R^2}\right|}$$

III- CONSEQUENCES :

Ce sont les mêmes que les conséquences (2) et (3) du paragraphe C/ de : "Etude d'une configuration à l'aide des nombres complexes"

27. ETUDE D'UNE CONFIGURATION A L'AIDE DES NOMBRES COMPLEXES

A/ PRELIMINAIRE

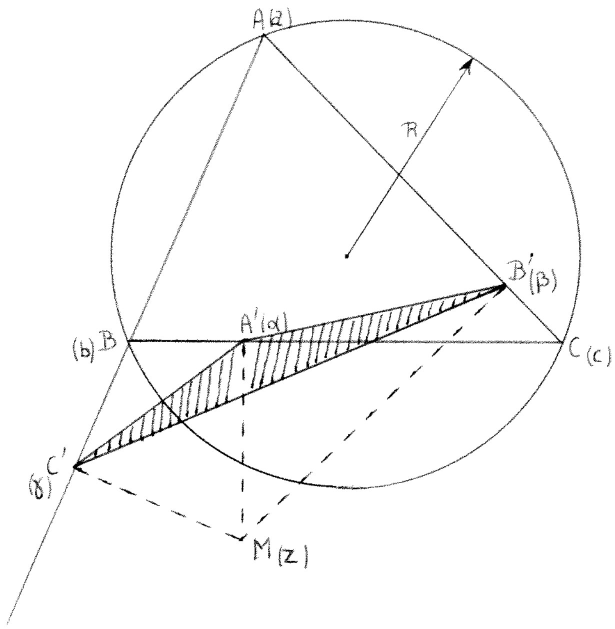
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. On considère les deux vecteur $\vec{V}(X ; Y)$ et $\vec{V'}(X' ; Y')$. Soient Z et Z' leurs affixes.

Question 1 : Exprimer le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{V'}$ en fonction de Z, Z' et de leurs conjugués.
En déduire que $\vec{V}$ est orthogonal à $\vec{V'}$ si et seulement si $\bar{Z}Z' + Z\bar{Z'} = 0$.

Question 2 : Soient P, Q et R trois points tels que $\vec{PQ} = \vec{V}$ et $\vec{PR} = \vec{V'}$.
Calculer l'aire du triangle PQR en fonction de Z, Z' et de leurs conjugués.
En déduire que $\vec{V}$ est colinéaire à $\vec{V'}$ si et seulement si $\bar{Z}\,Z' - Z\bar{Z'} = 0$

B/ PROBLEME

On donne un triangle ABC. Soit O le centre de son cercle circonscrit et R le rayon de ce cercle.
Soit M un point du plan ; on désigne par A', B' et C' ses projections orthogonales sur les droites (BC), (CA) et (AB).
On cherche à calculer l'aire $\mathcal{A}_M$ du triangle A'B'C' en fonction des données et de la position géométrique du point M.



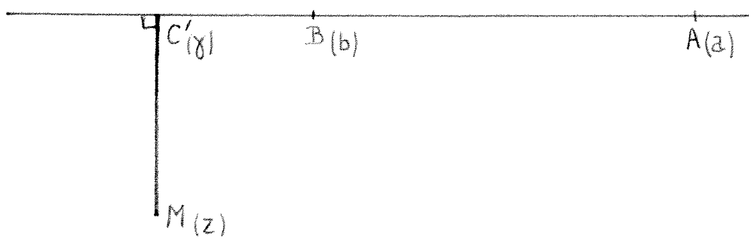
① ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : **le point M est en O.**

Question 3 : Montrer que, dans ce cas, l'aire du triangle A'B'C' est égale au quart de celle du triangle ABC.

② ETUDE DU CAS GENERAL

On munit le plan d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On désigne par a, b, c, α, β, γ les affixes respectifs des points A, B, C, A', B', C'. Soit z l'affixe de M.

Question 4 :



a) Traduire les résultats de la question 1 appliqués aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MC'}$ et ceux de la question 2 appliqués aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$, à l'aide des affixes de A, B, C' et M, et de leurs conjugués.
En déduire la relation :

$$2\gamma = z + a + \frac{b - a}{\bar{b} - \bar{a}} (\bar{z} - \bar{a})$$

b) En remarquant que $a\bar{a} = b\bar{b} = R^2$, montrer que :
$\frac{b - a}{\bar{b} - \bar{a}} = -\frac{ab}{R^2}$, puisque : $2\gamma = z + a + b - \frac{ab}{R^2}\bar{z}$ (1)

c) Ecrire les relations (2) et (3), analogues à cette relation (1), permettant de calculer α et β en fonction de b, c, a, z et $\bar{z}$.

Question 5 : a) Montrer, à l'aide des résultats de la question 2, que l'on a :

$$4\,\mathcal{A}_M = |(\overline{\beta - \alpha})(\gamma - \alpha) - (\beta - \alpha)(\overline{\gamma - \alpha})|$$

b) Utiliser les relations (1), (2) et (3) de la question 4 pour démontrer que :

$$2(\beta - \alpha) = (a - b)(1 - \frac{c}{R^2}\bar{z})$$

et $$2(\overline{\beta - \alpha}) = \frac{R^2}{abc}(b - a)(c - z)$$

c) Démontrer alors que :

$$16\,\mathcal{A}_M = \frac{AB.BC.CA}{R}\,.\,\left|1 - \frac{OM^2}{R^2}\right|$$

CONCLUSION :

> L'aire du triangle A'B'C' dont les sommets sont les projections orthogonales d'un point M sur les trois côtés d'un triangle ABC est égale à :
>
> $$\mathcal{A}_M = \frac{AB.BC.CA}{16\,R}\left|1 - \frac{OM^2}{R^2}\right|$$

C/ CONSEQUENCES

1) On appelle S l'aire du triangle ABC.

Question 6 : a) En appliquant le résultat de la conclusion précédente au cas particulier M = O, montrer que

$$\boxed{S = \frac{AB.BC.CA}{4R}}$$

b) En déduire la relation : $\boxed{\dfrac{\mathcal{A}_M}{S} = \dfrac{1}{4}\left|1 - \dfrac{OM^2}{R^2}\right|}$

2 DROITE DE SIMSON

Question 7 : Déterminer l'ensemble des points M dont les projections orthogonales sur les trois côtés d'un triangle ABC sont alignées.

Pour un tel point M, la droite joignant ces projections est appelée droite de Simson associée à M.

3 On pose $OM = \lambda R \quad (\lambda \geqslant 0)$. On a alors : $\dfrac{\mathcal{A}_M}{S} = \dfrac{1}{4}\,|1 - \lambda^2|$

Question 8 : a) Etudier et représenter graphiquement les variations du quotient $\dfrac{\mathcal{A}_M}{S}$ en fonction de λ .

b) Soit k un nombre réel positif. Etudier suivant les valeurs de k, l'ensemble E_k des points M tels que $\mathcal{A}_M$ soit égale à k.

28. PLUSIEURS METHODES POUR UN MEME PROBLEME DE CONSTRUCTION

On considère les triangles ABC et A'B'C' ainsi définis :

C' est le symétrique de A par rapport à B
A' est le symétrique de B par rapport à C
B' est le symétrique de C par rapport à A

Problème : le triangle A'B'C' étant donné, construire le triangle ABC.

Méthode 1

On appelle C" le symétrique de B' par rapport à A'
A" le symétrique de C' par rapport à B'
B" le symétrique de A' par rapport à C'

Question 1 : a) Faire une figure

b) Démontrer à l'aide d'un calcul vectoriel que le vecteur $\overrightarrow{A''B''}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$
(Indication : $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{C'B''} - \overrightarrow{C'A''} = \ldots$)

c) En déduire une construction du triangle ABC lorsque le triangle A'B'C' est donné.

Méthode 2

On désigne par M, N, P les milieux respectifs de [A'B'], [B'C'] et [C'A'].
Soit I le milieu de [MN] ; nous allons démontrer que I est sur (AB).

Question 2 : a) Faire une figure

b) Déterminer trois nombres α', β', γ' tels que I soit barycentre de (A', α'), (B', β'), (C', γ')
(Indication : O étant un point quelconque on pourra calculer le vecteur $\overrightarrow{OI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$)

c) A' est barycentre de (B,q) et (C,r). Calculer q et r.
Procéder de façon analogue pour B' et C'.
Trouver alors trois nombres α, β, γ tels que I soit barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).
En déduire que I,A et B sont alignés.

d) Donner une construction du triangle ABC, lorsque le triangle A'B'C' est donné.

Méthode 3

On appelle C_1 le symétrique de A' par rapport à B'
A_1 le symétrique de B' par rapport à C'
B_1 le symétrique de C' par rapport à A'

Question 3 : a) Faire une figure

b) Utiliser le résultat concernant la droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle pour déterminer le point d'intersection de (A'B') et (AB_1)

c) En déduire une construction du triangle ABC lorsque le triangle A'B'C' est donné.

Méthode 4

On considère la projection p sur (B'C') parallèlement à (A'B').
On note a = p(A), b = p(B), c = p(C).

Question 4 : a) Faire une figure
b) Démontrer que $\overrightarrow{B'C'} = 7\,\overrightarrow{B'a}$
c) En déduire une construction du triangle ABC lorsque le triangle A'B'C' est donné.

Méthode 5

On considère l'homothétie $h_{A'}$ de centre A' qui transforme B en C
l'homothétie $h_{B'}$ de centre B' qui transforme C en A
l'homothétie $h_{C'}$ de centre C' qui transforme A en B

<u>Question 5</u> : a) Faire une figure

b) Caractériser la transformation $f = h_{C'} \circ h_{B'} \circ h_{A'}$

c) Déterminer géométriquement le point $J = f(A')$

d) Démontrer que les milieux des médianes du triangle A'B'C' appartiennent aux côtés du triangle ABC.

e) En déduire une construction du triangle ABC lorsque le triangle A'B'C' est donné.

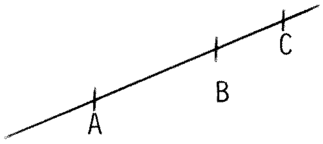
f) Vérifier que le résultat de d) n'est autre que celui de la question 2.c).

29. ALIGNEMENT ET COCYCLICITE

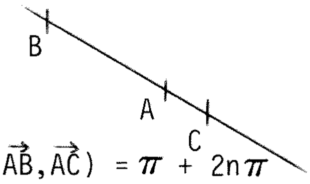
QUELQUES RAPPELS

(Dans ce qui suit k et n désignent des entiers relatifs)

1° $\boxed{A, B, C \text{ alignés} \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k\pi}$



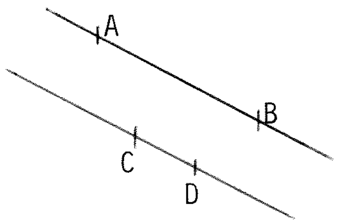
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2n\pi$



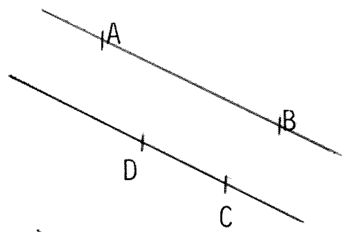
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pi + 2n\pi$

2° $\boxed{(AB) \text{ est parallèle à } (CD) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = k\pi}$

En effet deux situations peuvent se présenter :



$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 2n\pi$

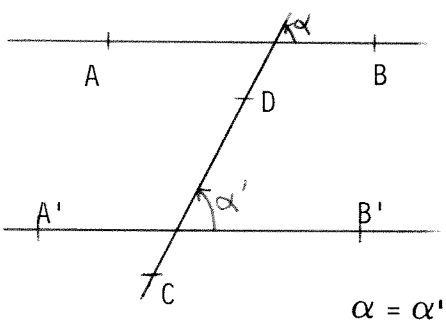


$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \pi + 2n\pi$

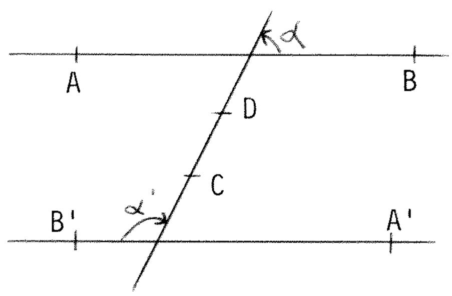
3°

Quelle que soit la droite (CD), les droites (AB) et (A'B') sont parallèles si et seulement si $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + k\pi$.

Soient α et α' les déterminations principales des angles respectifs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{CD})$. Deux situations peuvent se présenter.



$\alpha = \alpha'$



$\alpha' = \alpha - \pi$

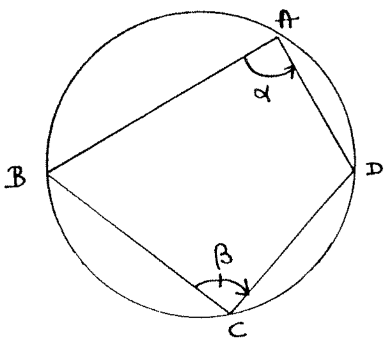
Dans la pratique :

Si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls on peut remplacer dans un calcul $(\vec{u}, \vec{v})$ par $(\vec{u}',\vec{v}) + k\pi$.

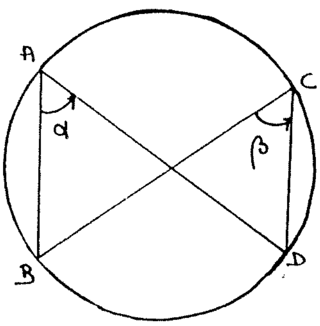
4°

A,B,C,D cocycliques ou alignés
$\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) + k\pi$
$\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = k\pi$

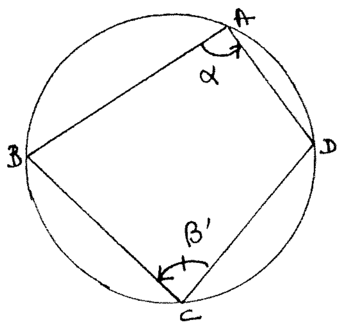
Soient α, β, β' les déterminations principales des angles respectifs $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$, $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB})$.



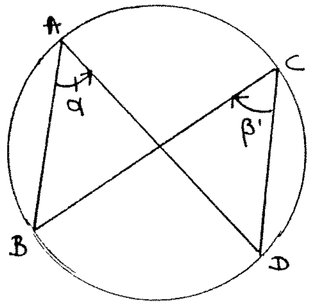
$\alpha = \beta + \pi$



$\alpha = \beta$



$\alpha + \beta' = \pi$



$\alpha + \beta' = 0$

REMARQUE FONDAMENTALE

Si l'on travaille avec des angles géométriques, on est en général obligé de distinguer plusieurs cas particuliers (voir plus haut). L'avantage des angles orientés est de traiter tous ces cas par le même calcul.

CONSEQUENCE

Un quadrilatère ABCD ayant deux angles non consécutifs égaux [à $k\pi$ près] est inscriptible.

Cas particulier : un quadrilatère ayant deux angles opposés droits est inscriptible.

CONSEIL GENERAL POUR LA RESOLUTION D'EXERCICES UTILISANT DES ANGLES DE VECTEURS

A/ Recherche d'une démonstration à l'aide d'un cas particulier

1° Faire une figure soignée

2° Indiquer sur cette figure, les mesures principales (comprises dans $]-\pi\,;\pi]$ des angles utiles, à savoir ceux qui permettent de traduire les hypothèses et la conclusion.

3° Traduire les hypothèses et la conclusion par des relations entre ces mesures. Chercher un calcul qui permette de passer des hypothèses à la conclusion.

B/ Rédaction de la démonstration dans le cas général indépendant de la figure

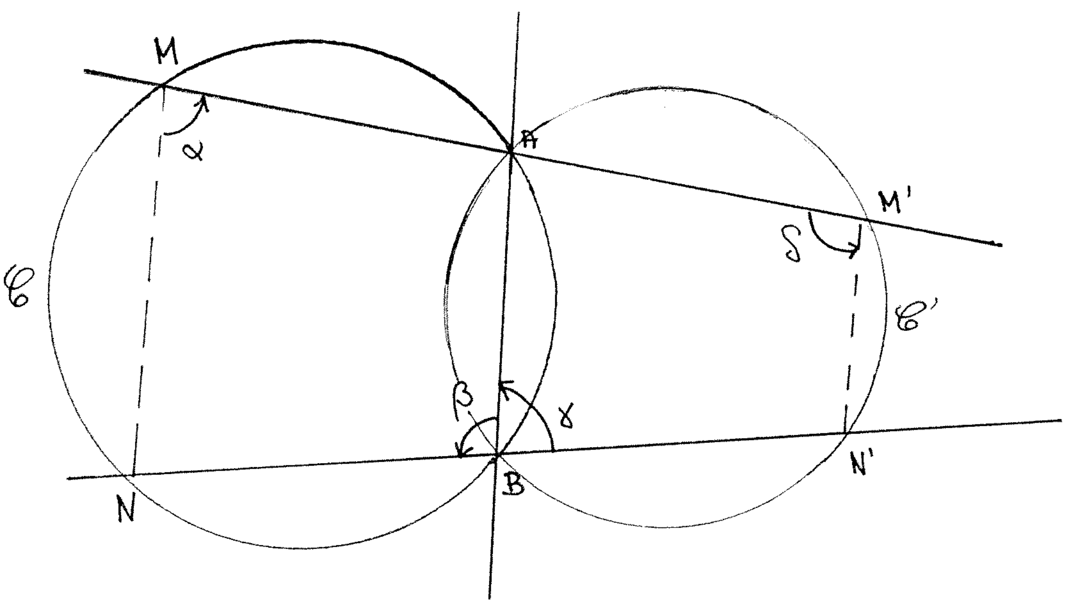
C'est essentiellement recopier la démarche précédente en remplaçant les relations entre déterminations principales par les relations correspondantes entre angles orientés.

Premier exercice résolu :

Enoncé : Deux cercles C et C' se coupent en A et B. On trace les sécantes MAM' et NBN' où M et N appartiennent à C, M' et N' appartiennent à C'. Montrer que (MN) et (M'N') sont parallèles

A/ Recherche d'une démonstration à l'aide d'un cas particulier

Figure : 1° et 2°



3° Traduction des hypothèses et de la conclusion à l'aide de la figure

HYPOTHESES :

On appelle α, β, γ, δ les déterminations principales des angles respectifs $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA})$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN})$, $(\overrightarrow{BN'}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'})$.

(1) $\alpha + \beta = \pi$ car M,N,B,A sont cocycliques.

(2) $\gamma + \delta = \pi$ car M', N', B,A sont cocycliques.

(3) $\gamma + \beta = \pi$ car N,B,N' sont alignés.

Remarque : On introduit la droite (AB) qui permet de passer de C à C'.

CONCLUSION :

(4) $\alpha + \delta = \pi$ car M, A, M' sont alignés.

Dans ce cas particulier on constate que l'on obtient la relation (4) en effectuant (1) + (2) - (3).

B/ **Rédaction de la démonstration dans le cas général indépendant de la figure**

(1') $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN}) = k_1\pi$ car M,N,A,B sont cocycliques.

(2') $(\overrightarrow{BN'}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'}) = k_2\pi$ car M',N',A,B sont cocycliques

(3') $(\overrightarrow{BN'}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN}) = k_3\pi$ car N,B,N' sont alignés.

Effectuons (1') + (2') - (3'). Nous obtenons :

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'}) = K\pi$

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A}) + (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'N'}) = k\pi$

Or les points M, A, M' sont alignés. D'où : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = k\pi$

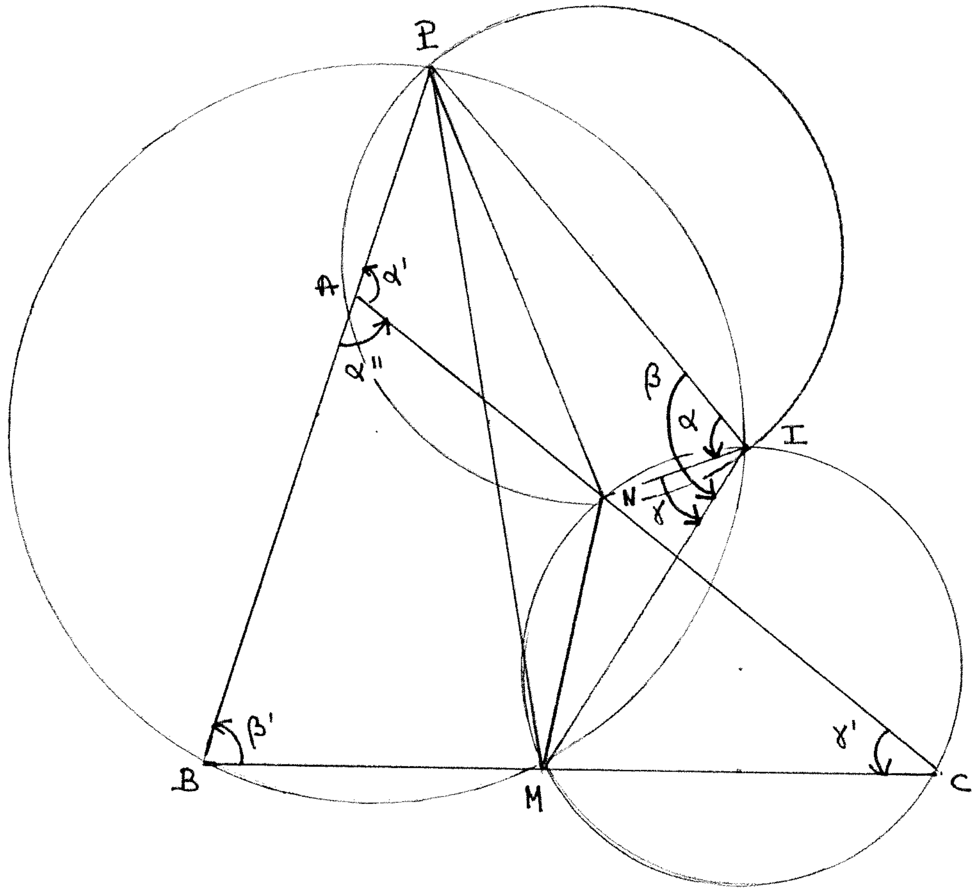
Ce qui traduit que (MN) et (M'N') sont parallèles.

Deuxième exercice résolu :

Enoncé : On donne les points M,N,P sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MCN, NAP, PBM passent par un même point.

A/ **Recherche d'une démonstration à l'aide d'un cas particulier**

Figure : 1° et 2°



3° On observe la figure et on traduit les hypothèses et la conclusion avec les déterminations principales. Soit I le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles MCN et NAP.
On appelle α, α', α'', β, β', γ, γ' les déterminations principales des angles respectifs $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN})$; $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN})$; $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM})$; $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BP})$; $(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM})$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

HYPOTHESES :

(1) $\alpha' + \alpha'' = \pi$ car les points BAP sont alignés
(2) $\alpha + \alpha' = \pi$ car les points P,A,N,I sont cocycliques
(3) $\gamma = \gamma'$ car les points C,M,N,I sont cocycliques
(4) $\alpha'' + \beta' + \gamma' = \pi$ car ABC est un triangle
(5) $\beta = \gamma + \alpha$

CONCLUSION :

Le point I appartient au cercle circonscrit au triangle PBM $\Longleftrightarrow$ les points P,B,M,I sont cocycliques $\Longleftrightarrow \beta + \beta' = \pi$

B/ Rédaction de la démonstration dans le cas général indépendant de la figure

(1') $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}) = k_1\pi$ car les points B,A,P sont alignés

(2') $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}) = k_2\pi$ car les points P,A,N,I sont cocycliques

(3') $(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CM}) + k_3\pi$ car les points C,M,N,I sont cocycliques

(4') $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CM}) = k_4\pi$ car ABC est un triangle

(5') $(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM})$ d'après la relation de Chasles

Des relations (1') et (2') on déduit que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}) + k_5\pi$

On additionne les relations (4') et (5') et on obtient :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}) + (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}) + k_4\pi$$

D'où :

$$(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CM}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}) + k_6\pi$$

En utilisant la relation (3') on peut conclure que :

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IM}) = K\pi$$

ce qui prouve que les points IPBM sont cocycliques c'est-à-dire que I appartient au cercle circonscrit au triangle PBM.

EXERCICES

Dans les exercices ci-dessous, on demande de suivre la même démarche, de faire une figure soignée et de rédiger de manière détaillée la partie B.

1. On donne un triangle ABC et un angle α . A chaque point M du plan on associe ses projections orthogonales P, Q, R sur les droites (BC), (CA), (AB). Trouver l'ensemble des points M pour lesquels on a : $(\vec{PQ}, \vec{PR}) = \alpha + k\pi$.

2. On donne deux cercles C_1 et C_2 sécants en A et B. Soit MAN une droite telle que M appartienne à C_1 et N à C_2. La tangente en M à C_1 coupe la tangente en N à C_2 au point C.
Montrer que les points M,C,N,B sontcocycliques.

3. Un point M décrit le cercle circonscrit au triangle isocèle ABC (AB = AC). Soit P le point d'intersection des droites (AM) et (BC).
   a) Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles BMP et CMP sont respectivement tangents en B à (AB) et en C à (AC).
   b) Déterminer l'ensemble des centres de chacun de ces deux cercles.

4. Deux cordes perpendiculaires AB et CD d'un cercle se coupent en P.
Montrer que la médiane du triangle PBC est hauteur du triangle PAD.

5. Composé de rotations. Ensemble des points divisant un segment dans un rapport donné.
Soient Ω et Ω' deux points fixes, R_1 la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$, R_2 la rotation de centre Ω' et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. M est un point quelconque ;
Soient $M_1 = R_1(M)$
et $M_2 = R_2(M_1)$

$$M \xmapsto{R_1} M_1 \xmapsto{R_2} M_2$$

   a) Démontrer que le milieu de $[MM_2]$ est un point J à préciser.
   b) Déterminer l'ensemble des positions du point M pour lesquelles M, M_1 et M_2 sont alignés.
   Indication : On pourra introduire le projeté orthogonal H de O_1 sur (MM_1) et chercher l'application qui transforme H en M.
   c) Déterminer l'ensemble des positions du point M pour lesquelles $\frac{MM_1}{M_1M_2} = k$ où k est un nombre réel donné.
   Indication : On pourra d'abord déterminer les positions des points M_1 qui satisfont à la condition.

ENONCES :

Figure 1

Soient quatre points A,B,C,D d'un cercle (γ).
Les cercles (γ_1), (γ_2), (γ_3) et (γ_4) passant respectivement par A et B, B et C, C et D, D et A se recoupent en B', C', D' et A'.

Démontrer que les quatre points A',B',C', D' sont sur un même cercle.

Figure 2

Soit un triangle ABC. Un cercle (γ_1) passant par A coupe les côtés [AB] et [AC] en C' et B'. Un cercle (γ_2) passant par C et B' coupe [BC] en A'.
On désigne par (γ_3) le cercle passant par B', C' et A'.

Démontrer que les cercles (γ_1), (γ_2), (γ_3) ont un point commun ω.

Figure 3

On donne quatre droites sécantes deux à deux.

Démontrer que les quatres cercles circonscrits aux quatre triangles déterminés par trois de ces quatre droites ont un point commun.

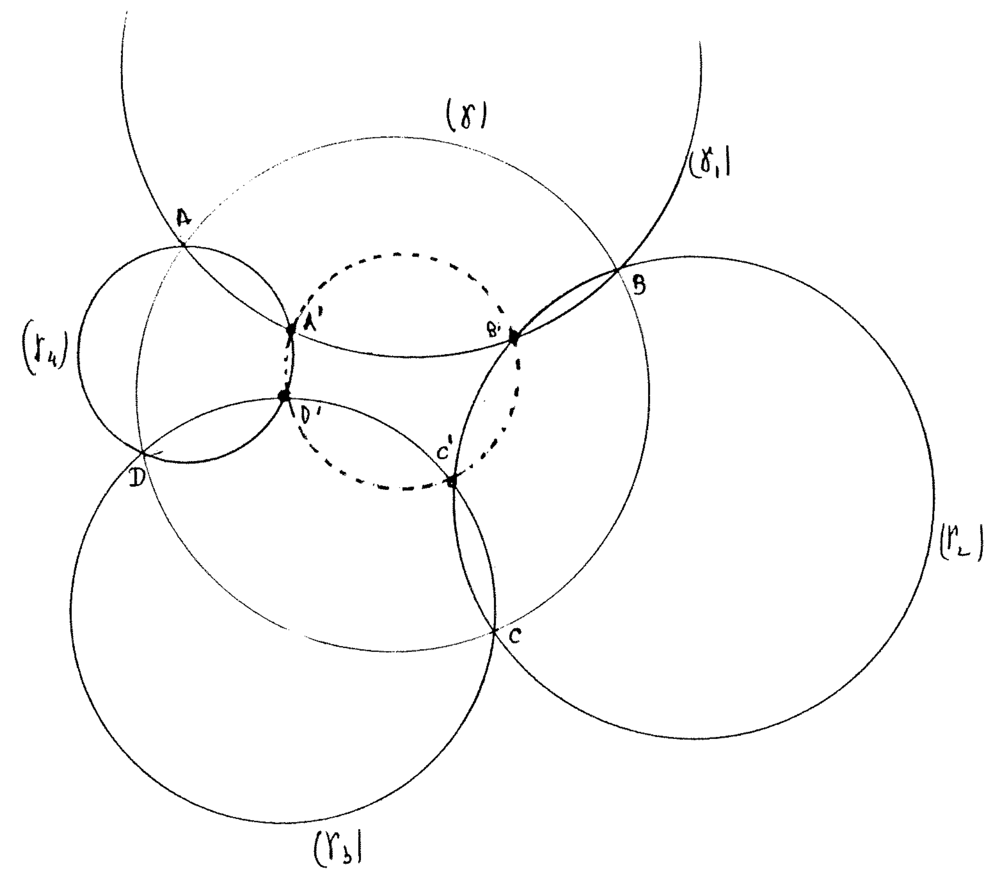


Figure 1

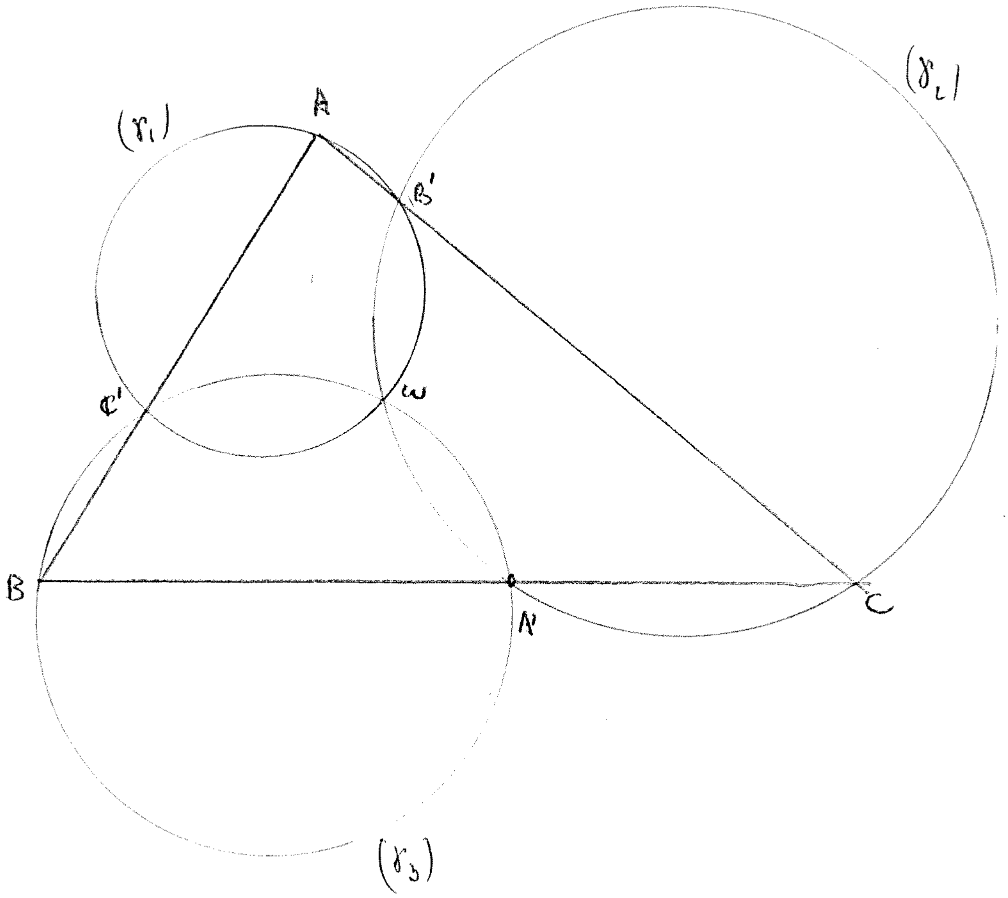


Figure 2

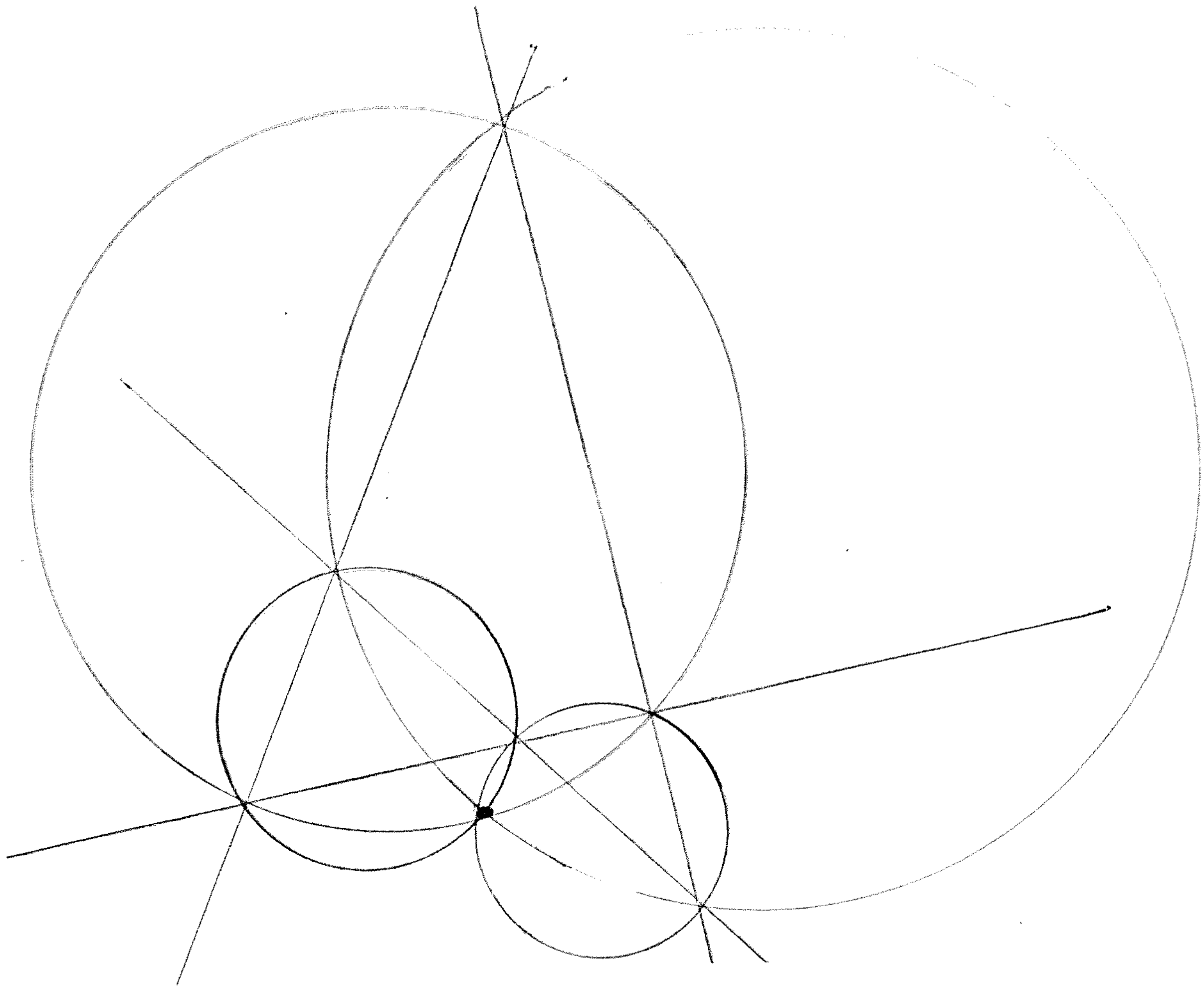


Figure 3

30. LA TRISECTION DE L'ANGLE

A/ INTRODUCTION

Le problème de la trisection de l'angle est celui qui consiste à construire à la règle et au compas un angle dont la mesure est le tiers de celle d'un angle donné. On sait qu'il est en général impossible (*) (par exemple pour $\frac{2\pi}{3}$, ce qui empêche de construire à la règle et au compas un ennéagone régulier), mais non pour, 0 $\frac{\pi}{2}$ ou π . En remplaçant les contraintes draconiennes de la règle et du compas par des contraintes plus souples (utilisation de courbes, pliages...) on peut, avec les nouveaux outils autorisés, résoudre ce problème ; mais auparavant il est nécessaire de le poser clairement.

B/ POSITION DU PROBLEME

Soit, dans le plan orienté, un angle (Ox, Ot) donné de mesure θ . A chaque demi-droite Oz du plan on associe la mesure α de l'angle (Ox, Oz).

Les trisectrices de l'angle (Ox, Ot) sont les demi-droites Oz pour lesquelles on a :

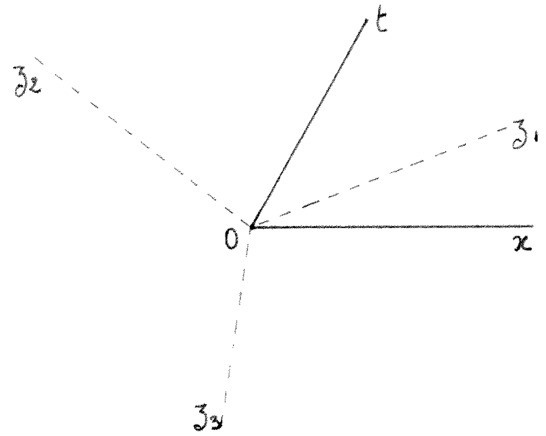
$$3\alpha = \theta + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

soit encore :

$$\alpha = \frac{\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3} .$$

Cette dernière égalité montre qu'un angle admet trois trisectrices Oz_1, Oz_2, Oz_3 qui font entre elles des angles de $\frac{2\pi}{3}$.

On a représenté ci-dessous les trois trisectrices d'un angle (Ox , Ot). Le problème de la trisection de l'angle est celui de la contruction de ses trisectrices.



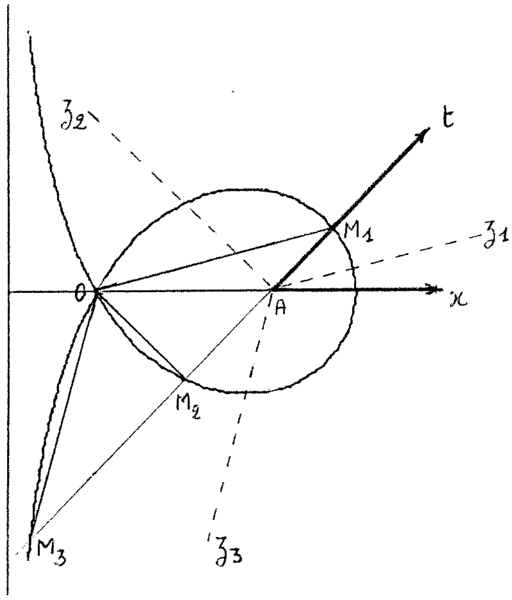
(*) C'est seulement en 1837 que Pierre Laurent Wantzel donnera une démonstration satisfaisante de l'impossibilité de la trisection d'un angle, sauf exceptions.

Question 1 : Construire, à la règle et au compas, les trisectrices de (Ox, Ot) dans les cas suivants : $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

C/ ETUDE D'UN OUTIL : LA TRISECTRICE DE MAC LAURIN

(1) Introduction

La trisectrice de Mac Laurin est une courbe que l'on peut tracer points par points, ou construire (par exemple à l'aide d'un ordinateur) dès qu'on connaît son équation. Elle a l'aspect suivant :



Pour se servir de cette courbe on place le sommet de l'angle à trisecter en A (le point A sera défini dans le paragraphe II) comme dans la figure suivante où l'angle à trisecter est (Ax, At).

La droite (At) coupe la courbe en M_1, M_2, M_3.

Les directions des trisectrices sont définies simplement en fonction de $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ comme on l'établira par la suite.

On se propose dans cette étude de trouver une équation de la trisectrice de Mac-Laurin, pour en obtenir une représentation graphique soignée, et de préciser son mode d'emploi.

(2) Equation de la trisectrice de Mac Laurin

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de coordonnées (0, 2).
Soit α un réel. On désigne par d_1 la droite passant par O, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ et d_2 la droite passant par A, de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\cos 3\alpha\\ \sin 3\alpha\end{pmatrix}$.

Lorsque d_1 coupe d_2 on désigne par M leur point d'intersection et par (x,y) ses coordonnées.

Question 2 : Pour quelles valeurs de α, d_1 coupe-t-elle d_2 ?
Dans ce cas quelle relation y a-t-il entre $(Ax, \overrightarrow{AM})$ et $(Ox, \overrightarrow{OM})$?

Question 3 : a) Démontrer qu'une équation de d_1 est $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$
et qu'une équation de d_2 est $x\sin 3\alpha - y\cos 3\alpha = 2\sin 3\alpha$.

b) Calculer x et y en fonction de $\sin 3\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$
(On trouve $x = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$, $y = \dfrac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha}$).

Les coordonnées (x,y) de M étant toutes deux exprimées en fonction de α, on cherche maintenant une relation indépendante de α liant x et y.

Question 4 : a) Démontrer que $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$
En déduire les égalités : $x = 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 1$

b) Exprimer $x+1$ et $3-x$ en fonction de $\cos^2\alpha$ et $\sin^2\alpha$

c) En déduire que les vecteurs $\begin{pmatrix}x+1\\ 3-x\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\cos^2\alpha\\ \sin^2\alpha\end{pmatrix}$ sont colinéaires
puis que les vecteurs $\begin{pmatrix}x+1\\ 3-x\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

d) Déduire de cette dernière constatation que le point M appartient à la courbe Γ d'équation

$$y^2 = \frac{x^2(3-x)}{x+1}.$$

Etude de la courbe Γ

Question 5 : a) Montrer que la courbe Γ est la réunion des représentations graphiques des fonctions f et g définies par

$$f(x) = x\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} \quad \text{et} \quad g(x) = -f(x).$$

b) Etudier et représenter graphiquement la fonction f. On précisera en particulier l'asymptote à sa représentation graphique ainsi que la demi tangente à cette représentation graphique au point d'abscisse 3.

c) Déduire de b) la représentation graphique de g puis Γ.

On sait maintenant que tout point M tel que $3(Ox, \overrightarrow{OM}) = (Ax, \overrightarrow{AM})$ est un point de Γ.

Réciproquement si M est un point de Γ on doit voir si ce point M vérifie bien l'égalité $3(Ox, \overrightarrow{OM}) = (Ax, \overrightarrow{AM})$.
On exclut les points de Γ situés sur l'axe des abscisses. En ces points les droites (OM) et (AM) sont confondues, l'angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$ est nul ou plat, le problème de la trisection de l'angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$ se résout directement.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de Γ tel que l'on ait $y \neq 0$.
On désigne par α une mesure de l'angle $(Ox, \overrightarrow{OM})$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (OM).

Question 6 : a) Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x+1 \\ 3-x \end{pmatrix}$ sont colinéaires puis que les vecteurs $\begin{pmatrix} x+1 \\ 3-x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos^2\alpha \\ \sin^2\alpha \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

b) Déduire du a) les égalités $x = 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 1$

c) Calculer, en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ puis démontrer l'égalité $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{\cos\alpha}\vec{V}$ où $\vec{V}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos 3\alpha \\ \sin 3\alpha \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{U}$ est un vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}$ un vecteur directeur de la droite $\overrightarrow{AM}$. Les expressions de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ en fonction de α montrent que $3(Ox, \vec{U}) = (Ox, \vec{V})$ donc que $\vec{U}$ est un vecteur directeur d'une trisectrice de l'angle $(Ox, \vec{V})$. Pour savoir si $\overrightarrow{OM}$ est une trisectrice de l'angle $(Ax, \overrightarrow{AM})$ il faut comparer les sens des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{V}$, les sens de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{U}$.

On ne restreint pas la généralité du problème en supposant $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

On suppose qu'il en est ainsi dans toute la suite.

Sens des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{V}$, des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{U}$

Question 7 : a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{V}$ sont de même sens.

b) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{OM} = \frac{x}{\cos\theta} \vec{U}$.

En déduire que si x est positif alors les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{U}$ sont de même sens et que si x est négatif alors les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{U}$ sont de sens contraire.

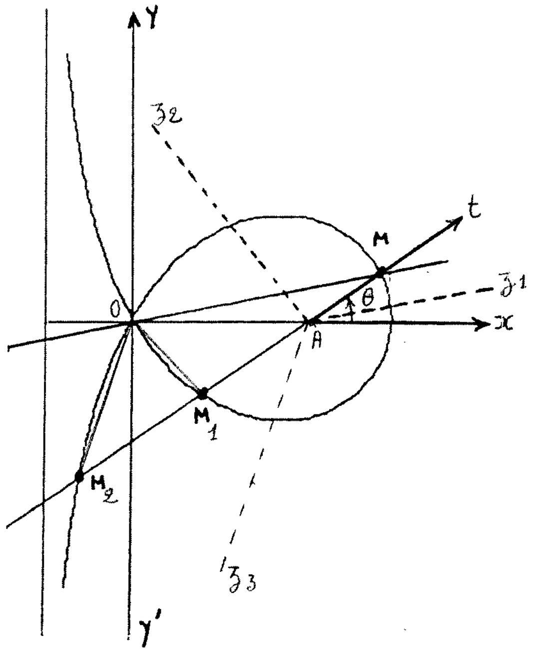
Question 8 : Déduire de la question 7 que si x est positif alors $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur directeur d'une trisectrice de l'angle $(Ax, \overrightarrow{AM})$ et que si x est négatif alors $-\overrightarrow{OM}$ est un vecteur d'une trisectrice de l'angle $(Ax, \overrightarrow{AM})$.

Application à la construction des trois trisectrices d'un angle.

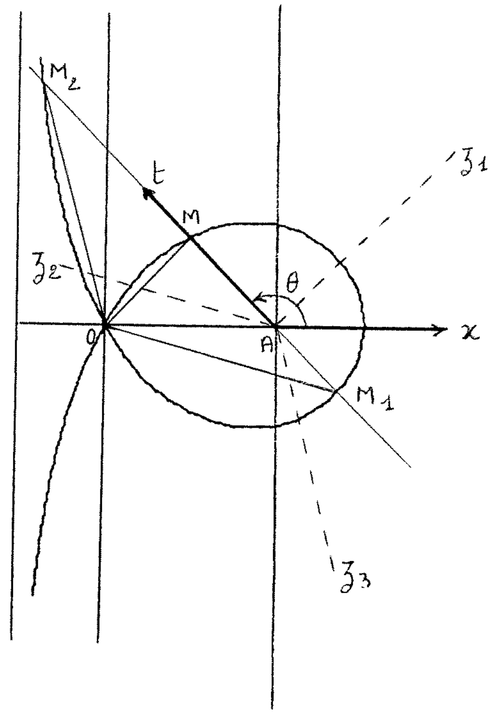
Soit à utiliser la courbe Γ (c'est elle qu'on appelle trisectrice de Mac Laurin) pour trouver les trois trisectrices d'un angle (Ax, At).

Il y a deux cas à envisager. Les notations utilisées dans les figures ci-dessous sont les suivantes : le point M est l'intersection de la demi-droite At et de Γ qui a une abscisse positive. La droite (AM) recoupe Γ en M_1 d'abscisse positive et M_2 d'abscisse négative. On désigne par θ la détermination principale de l'angle (Ax, At) à trisecter.

Premier cas $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



Deuxième cas $\frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi$



<u>Question 9</u> : En observant, dans chaque cas, la disposition des points M, M_1, M_2, en utilisant la question 8 pour trouver un vecteur directeur d'une trisectrice de $(Ax, \overrightarrow{AM_1})$ et en remarquant que $(Ax, \overrightarrow{AM_1}) = \theta + \pi + k\, 2\pi$, démontrer que des vecteurs directeurs des trisectrices de l'angle (Ax, At) sont :

. Dans le premier cas : $\overrightarrow{OM}$, $-\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$

. Dans le deuxième cas : $\overrightarrow{OM}$, $-\overrightarrow{OM_1}$, $-\overrightarrow{OM_2}$.

Cette dernière question justifie et complète le mode d'emploi de la trisectrice de Mac Laurin.

<u>Remarque</u> : Le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$ n'a pas été envisagé ici : la droite (At) coupe Γ en deux points seulement mais ce cas peut être étudié directement.

<u>En résumé</u> : Pour tout angle θ différent de 0, $\frac{\pi}{2}$, π la trisectrice de Mac Laurin permet de résoudre le problème de la trisection de l'angle.
Si θ est égal à 0 ou à $\frac{\pi}{2}$, ou à π , ce problème est résolu simplement par la question 1.

31. A PROPOS DE TRISECTIONS....

I- CONSTRUCTION, POINT PAR POINT, D'UNE TRISECTRICE, A LA REGLE ET AU COMPAS.

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle de diamètre [AB], et O son centre (figure 1).

On appelle : O', le symétrique de O par rapport à A ;
d, la perpendiculaire à la droite (AB) en O' ;

Une droite passant par A recoupe ($\mathscr{C}$) en P, et coupe d en Q ; soit M', le milieu du segment [AQ]. On appelle M, le point défini par l'égalité

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM'}$$

Nous allons démontrer que :
Si P décrit le cercle ($\mathscr{C}$) alors M décrit une trisectrice.
Autrement dit,
Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \alpha \, (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$
alors $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = 3\alpha + k.2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

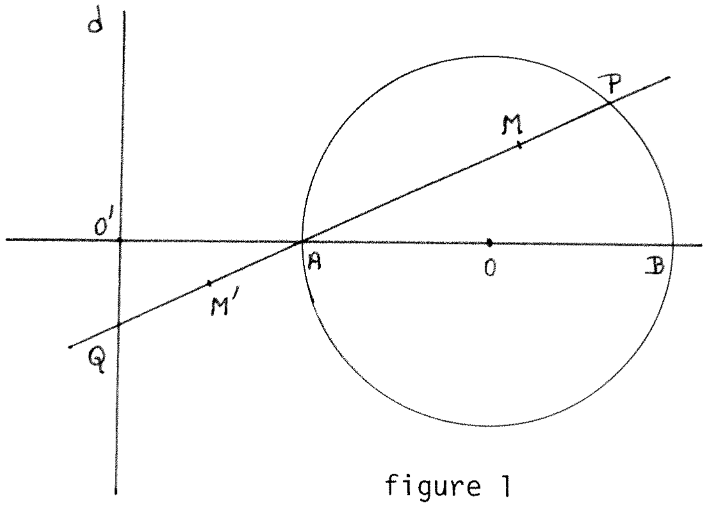


figure 1

Question 1 : On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \alpha \quad (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$

Démontrer que : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}) = 2\alpha + k_1.2\pi \quad (k_1 \in \mathbb{Z})$

Question 2 : a) Soit σ_A la symétrie centrale de centre A et s_Δ la réflexion d'axe Δ, médiatrice du segment [AP].
Etudier les transformés des points P, O et M par $\sigma_A \circ s_\Delta$;
En déduire que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A})$;

b) Calculer l'angle $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A})$ en fonction de α ;

c) Conclure.

II- TRISECTION D'UN ANGLE A L'AIDE D'UNE BANDE DE PAPIER : METHODE D'ARCHIMEDE

A/ Les notations sont celles du paragraphe I.
Soit M_1 le symétrique de M par rapport à Δ : $s_\Delta(M) = M_1$.

Question 3 : a) Vérifier que PM = OM ;

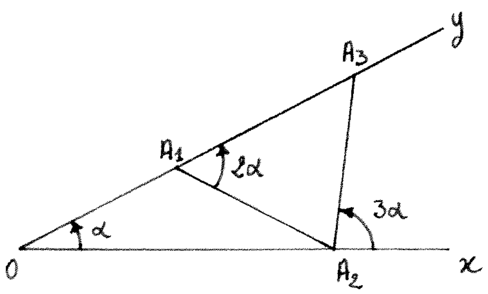
b) En déduire que $M_1A = M_1O = OM$.

B/ Application

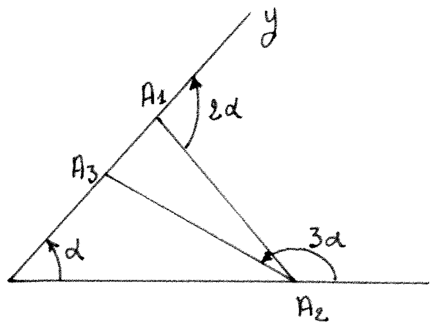
On construit dans l'ordre les points A_1, A_2 et A_3 comme l'indiquent les figures 2 ci-dessous.
Dans chaque cas, on a : $A_1O = A_1A_2$ et $A_2A_3 = A_2A_1$.

figures 2

$0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$



$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$



Question 4 : a) On pose (Ox, Oy) = α. Justifier les mesures d'angles indiquées sur ces figures ;

b) Faire une figure dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

c) Faire une figure dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

C/ Trisection d'un angle : $\widehat{XOY}$

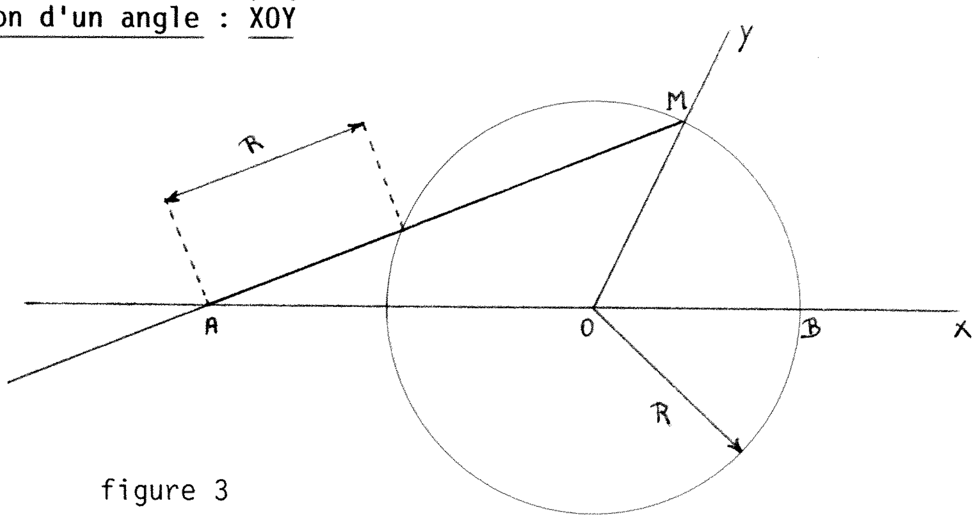


figure 3

On trace le cercle Γ de centre O, de rayon R quelconque, qui coupe OX en B, et OY en M.
On trace la droite passant par M qui coupe OX en A et Γ en M_1 de façon que $AM_1 = R$ (à l'aide d'une bande de papier : figure 3)

<u>**Question 5**</u> : Montrer que $\widehat{BOM} = 3\,\widehat{BAM}$.

III- TRISECTION D'UN ANGLE A L'AIDE DE PLIAGES

On cherche à "diviser" l'angle $\widehat{XAY}$ en trois angles égaux. Pour cela, on commence par faire coïncider AX avec le bord inférieur d'une feuille de papier, A étant situé au bord inférieur gauche (figure 4).

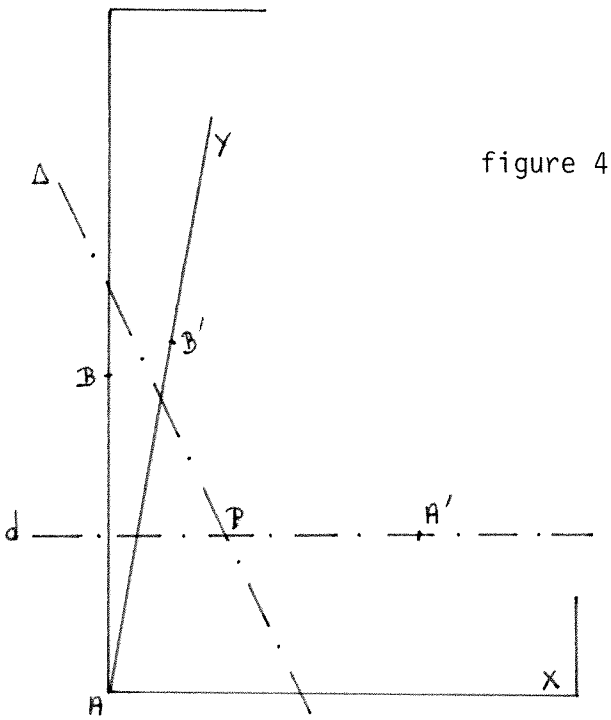


figure 4

A/ Plions :

On effectue deux pliages successifs :

- le premier pli est une droite parallèle au bord inférieur de la feuille ; le premier pliage amène A en un point B du bord gauche de la feuille ;
- le second pliage amène le point A en un point du premier pli, et le point B en un point de AY.

Les deux plis se coupent en P.
On a : $\widehat{XAY} = 3\ \widehat{PAY} = 3\ \widehat{XAA'}$

B/ Expliquons :

Soit d et Δ les deux plis envisagés.

On appelle s_d et s_Δ les réflexions d'axes d et Δ, et on pose :

$B = s_d(A)$; $A' = s_\Delta(A)$; $B' = s_\Delta(B)$.

Question 6 : a) Soit M l'intersection de Δ et de AX.
Démontrer que APA'M est un losange ; en déduire que :
$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AP})$

b) Démontrer que $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB'}) = (\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'P}) = (\overrightarrow{A'P}, \overrightarrow{A'A})$

c) Conclure.

IV- LE TRISECTEUR

Il a été inventé par LAISANT, vers 1885. (figure 5).

Question 7 : Expliquer son emploi, sachant que OPMQ et OP'M'Q' sont deux losanges.

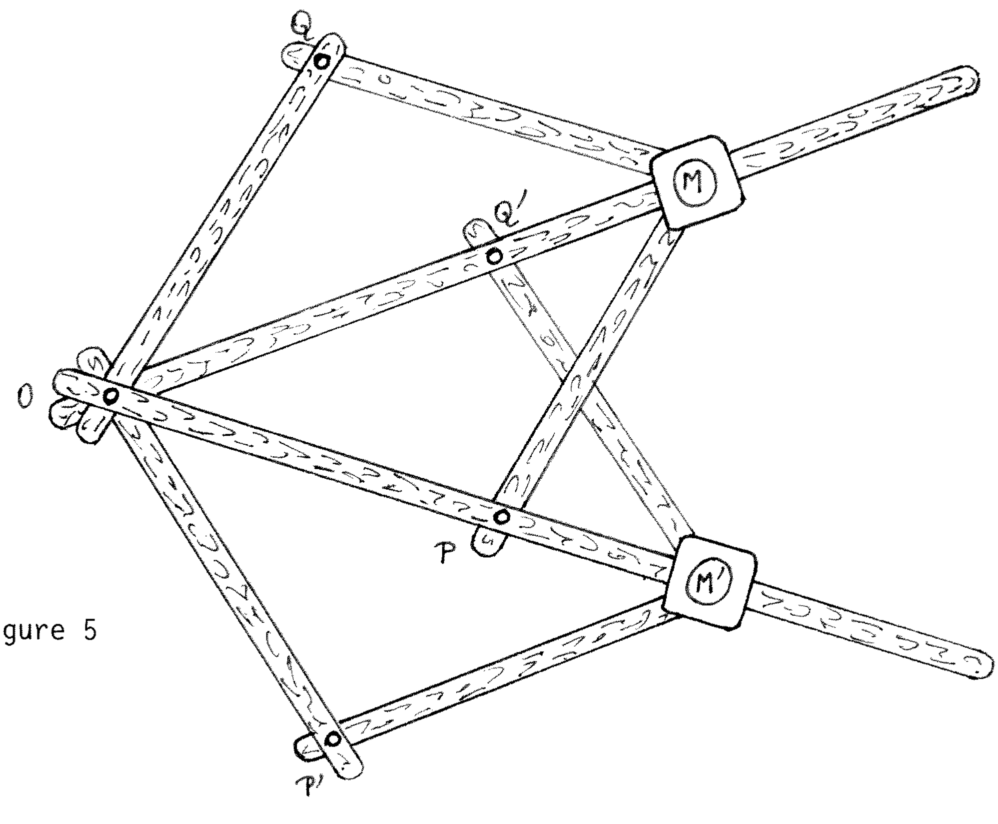


figure 5

32. PROBLEME DE RESERVOIR

PROBLEME :

Un réservoir cylindrique a pour longueur ℓ; le rayon de sa surface de base est R. Il est pourvu d'un orifice de remplissage et d'un robinet comme l'indique la figure 1.

Comment jauger ce réservoir ?

On introduit pour cela, par l'orifice de remplissage une baguette rigide de longueur L et on se propose de la graduer de manière à y lire le volume de liquide contenu dans le réservoir (figure 2).

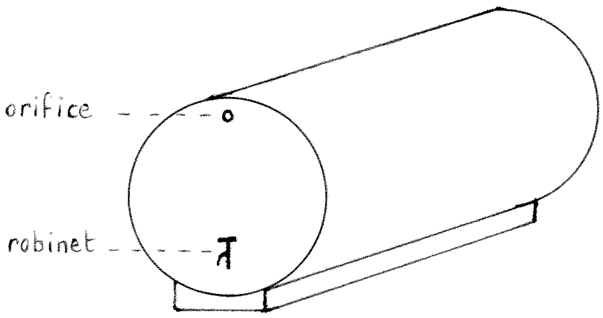


figure 1

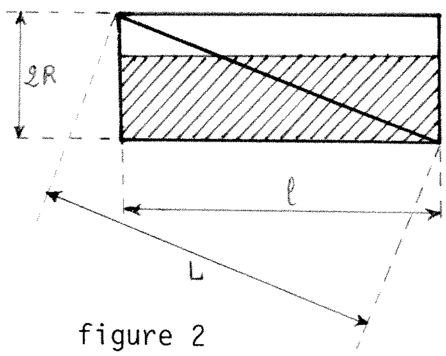


figure 2

Question 1 : Soit h la hauteur du liquide contenu dans le réservoir, et θ l'angle représenté sur la figure 3.

a) Calculer la distance d (figure 4) en fonction de h et des données L et R.

b) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface hachurée sur la figure 3 puis le volume V du liquide contenu dans le réservoir en fonction de θ et des données ℓ et R.

c) Vérifier que :

$$\begin{cases} d = \frac{L}{2}(1 - \cos \theta) \\ V = R^2 \ell \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \end{cases}$$

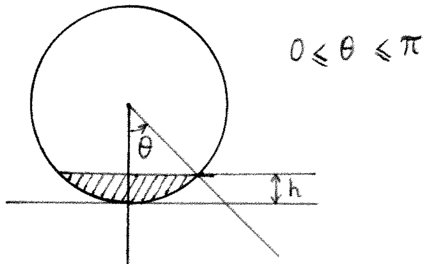


figure 3

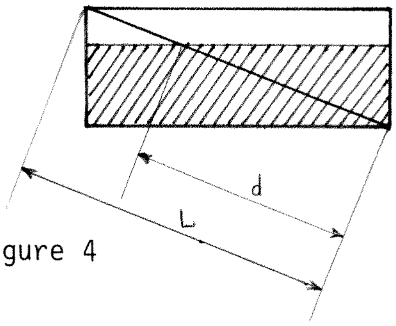


figure 4

<u>Question 2</u> : On donne ℓ = 80 cm et R = 25 cm.
On gradue la baguette de huitième en huitième ; autrement dit on la partage en huit segments de même longueur.
Calculer au litre près le volume de liquide correspondant à chaque graduation.
Dessiner la baguette ainsi graduée en litres.

<u>Question 3</u> : Construire la courbe d'équations paramétrées :

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \\ y(\theta) = \frac{1}{\pi}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \end{cases} \qquad \theta \in [0, \pi]$$

dans un repère orthonormé (unité 10 cm).

<u>N.B.</u> On remarquera auparavant que :

$$\begin{cases} \dfrac{x(\theta) + x(\pi - \theta)}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y(\theta) + y(\pi - \theta)}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

et on interprêtera ce résultat en termes de symétrie.

Pour un tracé précis de la courbe, on admettra qu'elle admet aux points d'abscisses 0 et 1, des tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

33. INVERSES DE CONIQUES

Les courbes que l'on demande de tracer le seront dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on tracera préalablement les cercles de centre O et de rayon 1, 2, 3.... on prendra une unité de longueur de 1,5 cm.
Soit M un point de coordonnées (x,y). On pose :

$OM = \rho$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ avec : $-\frac{3\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

ρ est donc un nombre réel positif.

1 1) On considère <u>la Parabole P</u> d'équation $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

<u>**Question 1**</u> : a) Représenter P ;

b) Soit M, un point de P. Démontrer que l'on a :

$$\rho = \frac{1}{1 - \sin\theta} \quad \text{avec} \quad -\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Etudier la réciproque.

2) A tout point M de P on associe le point M' défini par

$OM' = \frac{1}{\rho}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ avec $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

L'ensemble des points M' est la courbe P' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = (1 - \sin\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (1 - \sin\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } -\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

<u>**Question 2**</u> : a) Montrer que $-\frac{3\pi}{2} < -\pi - \theta < \frac{\pi}{2}$

$$x(-\pi - \theta) = -x(\theta)$$

$$y(-\pi - \theta) = +y(\theta)$$

En déduire que P' admet un axe de symétrie.

b) Etudier les variations de x et de y lorsque θ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

c) Représenter P' sur le même graphique que celui où figure P.

(2) 1) On considère l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{0,8} + \frac{(y - 0,8)^2}{1,44} = 1$

Question 3 : a) Représenter E

b) Soit M un point de E. Montrer que l'on a :

$$\rho = \frac{1}{1,5 - \sin\theta} \quad \text{avec } -\frac{3\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Etudier la réciproque.

2) On procède de façon analogue au paragraphe (1) 2). La courbe E' obtenue a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(\theta) = (1,5 - \sin\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (1,5 - \sin\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec } -\frac{3\pi}{2} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Question 4 : Procéder comme à la question 2.

(3) 1) On considère l'hyperbole H d'équation $\frac{(y + \frac{2}{3})^2}{\frac{1}{9}} - \frac{x^2}{\frac{1}{3}} = 1.$

Question 5 : a) Représenter H.

b) Soit M un point de H. Démontrer que l'on a :

$$\rho = \rho_1(\theta) = \frac{1}{1-2\sin\theta} \quad \text{avec } -\frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

ou

$$\rho = \rho_2(\theta) = \frac{1}{-1-2\sin\theta} \quad \text{avec } -\frac{5\pi}{6} < \theta < -\frac{\pi}{6}$$

Etudier la réciproque.

Caractériser chacune des deux branches H_1 et H_2 de l'hyperbole H.

2) On procède de façon analogue au paragraphe 1 2).
La courbe H' est la réunion de deux branches H'_1 et H'_2

H'_1 a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(\theta) = (1 - 2 \sin \theta) \cos \theta \\ y(\theta) = (1 - 2 \sin \theta) \sin \theta \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in \left] -\frac{7}{6} ; \frac{\pi}{6} \right[$$

<u>Question 6</u> : a) Ecrire la représentation paramétrique de H'_2

b) Procéder comme à la question 2 pour H'_1 et H'_2.

4 1) On considère <u>la droite d</u> d'équation $y = \frac{1}{3}$

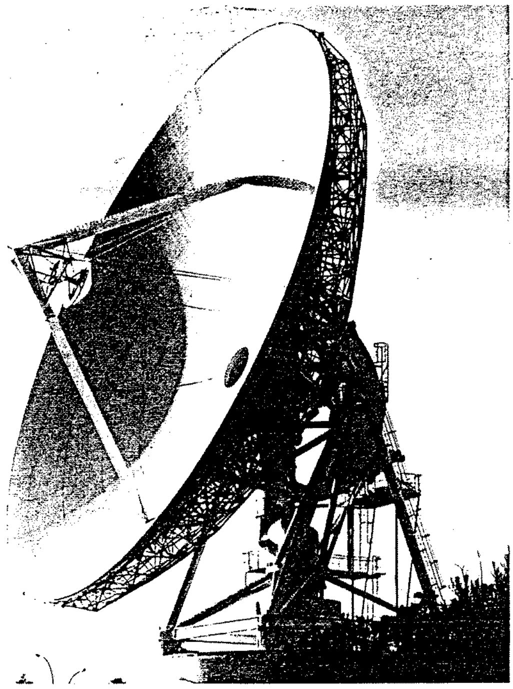
<u>Question 7</u> : Soit M un point de d. Calculer ρ en fonction de θ.

2) On procède comme au paragraphe 1 2), mais cette fois $0 < \theta < \pi$.

<u>Question 8</u> : a) Démontrer que l'ensemble d' ainsi obtenu est un cercle privé d'un point, dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Représenter d et d' sur un même graphique.

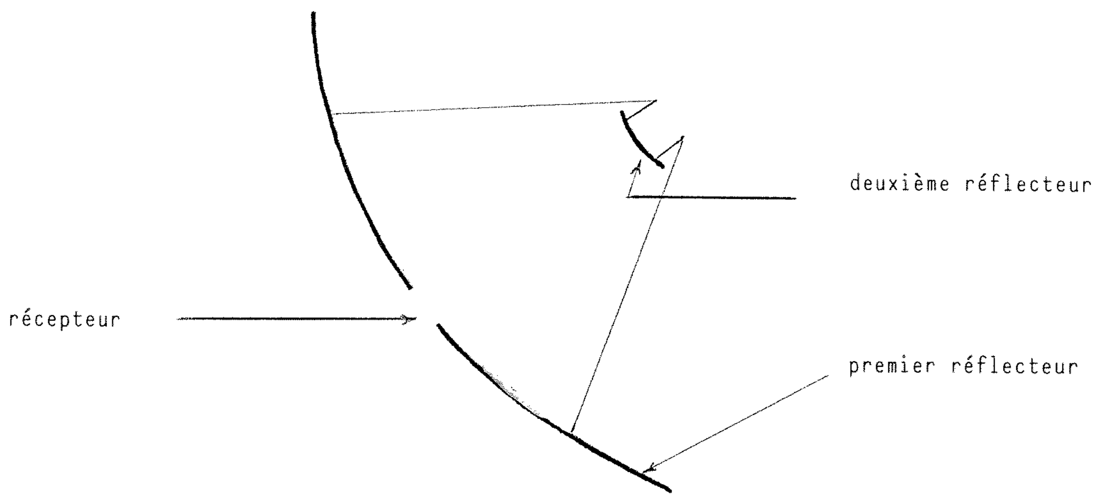
34. REFLECTEURS "MICRO-ONDES"



Radar du CNET

La photo ci-dessus représente un réflecteur "micro-ondes" utilisé dans de nombreux domaines comme l'exploration spatiale, les télécommunications, la radio-astronomie.

Le dispositif comprend, en réalité, deux réflecteurs que nous allons étudier (figure 1).



A/ UNE PROPRIETE DES TANGENTES A LA PARABOLE

Soit P une parabole de paramètre p (p est la distance de son foyer F à sa directrice).
On choisit comme axes Sx et Sy d'un repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente à P en son sommet S, et l'axe de P orienté de S vers F.
Une équation de P dans ce repère est : $y = \frac{x^2}{2p}$

Question 1 : Construire un point M de la parabole P.

Question 2 : Soit a l'abscisse de M.
Ecrire une équation de la tangente Δ à P en M.
Δ coupe l'axe de la parabole en T.
Calculer les coordonnées de T, en fonction de a et de p.

Question 3 : Calculer les longueurs FT et FM en fonction de a et de p.
En déduire que le triangle FMT est isocèle de sommet F.

Application

Soit (IM) un rayon incident intérieur à la parabole P et parallèle à l'axe de la parabole.

Question 4 : Montrer en utilisant le résultat de la question 3 et la loi de la réflexion que ce rayon est réfléchi en le rayon (MF) (fig.2)

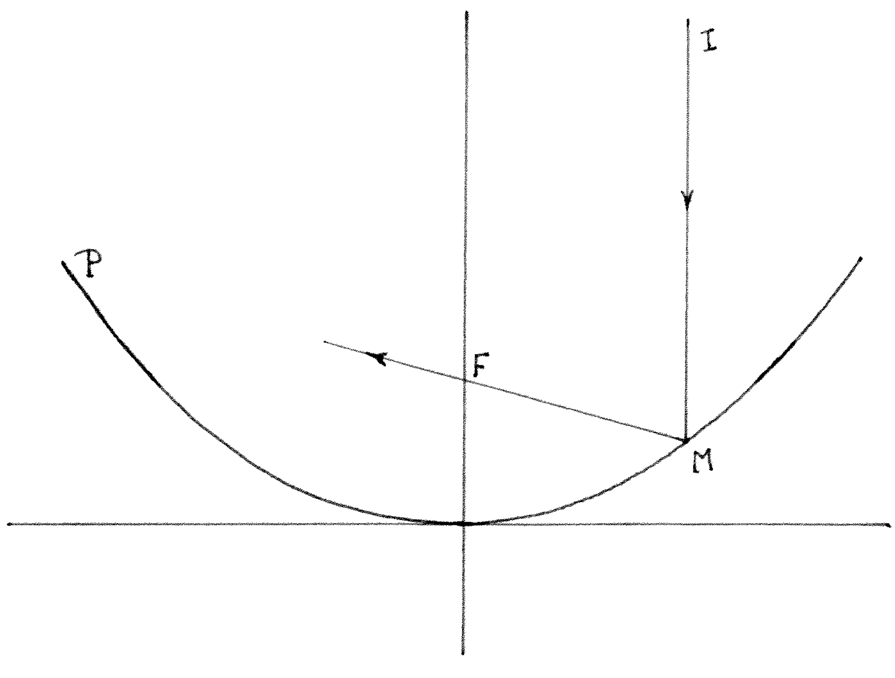


figure 2

B/ UNE PROPRIETE DES TANGENTES A L'HYPERBOLE

Soit H une hyperbole de sommets A' et A, de foyer Φ' et Φ.
On choisit comme axes Ox et Oy d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'axe de l'hyperbole et la médiatrice du segment [A'A].

Soit $A'(-a;0)$, $A(a;o)$, $\Phi'(-c;o)$, $\Phi(c;o)$ $(a > o\ ;\ c > o)$

Une équation de H est : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Question 5 : Démontrer que les relations $\begin{cases} x(t) = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y(t) = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$ $t \in R^*$

définissent une représentation paramétrique de H.

Question 6 : a) Démontrer que pour tout t de R*, on a :

$$x'(t) = \frac{a}{b}\,\frac{y(t)}{t} \qquad y'(t) = \frac{b}{a}\,\frac{x(t)}{t}\ .$$

b) En déduire que H admet une tangente en chacun de ses points.
Montrer qu'une équation de la tangente à H en $M_o(x_o,y_o)$ est :

$$\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

Question 7 : Soit x_o l'abscisse d'un point M_o de H. La tangente Δ à H en M_o coupe l'axe de l'hyperbole en T. Calculer les coordonnées de T en fonction de x_o et des données.

Question 8 : M_o est ici un point de H distinct des sommets A et A'.

Calculer $M_o\Phi$, $M_o\Phi'$, $\overline{T\Phi}$ et $\overline{T\Phi'}$.

En déduire que $\dfrac{\overline{T\Phi'}}{\overline{T\Phi}} = -\dfrac{M_o\Phi'}{M_o\Phi}$

Conclure que Δ est bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\Phi M_o \Phi'}$.

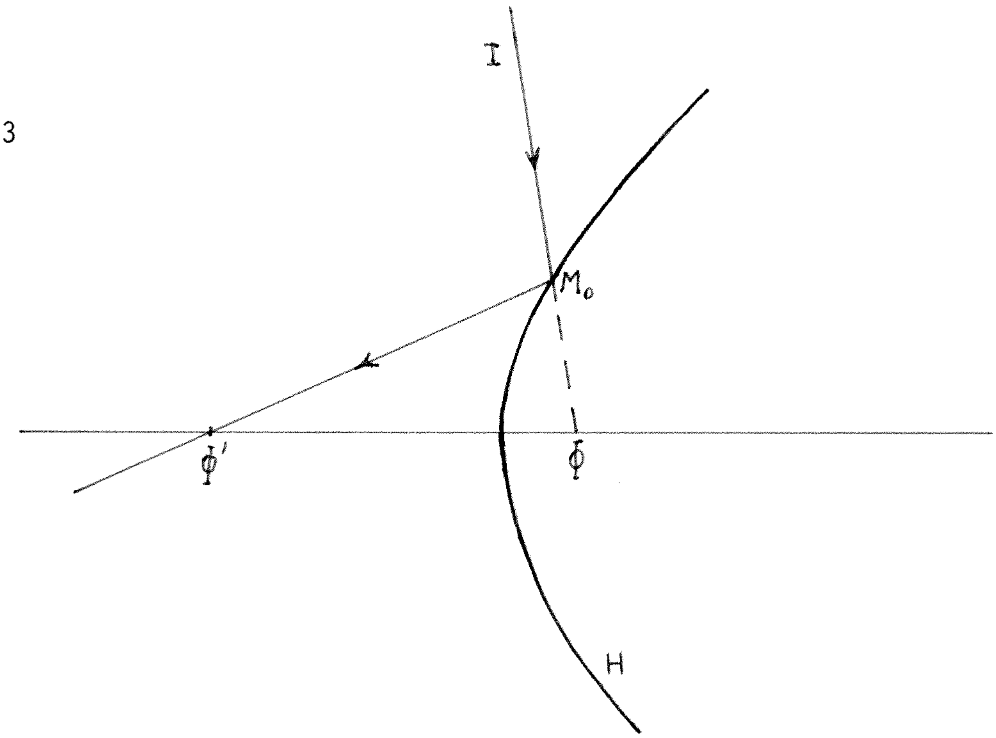
N.B. Pour cela, on se reportera, si nécessaire à l'annexe.

Application

Soit (IM_0) un rayon incident extérieur à l'hyperbole H, passant par Φ.

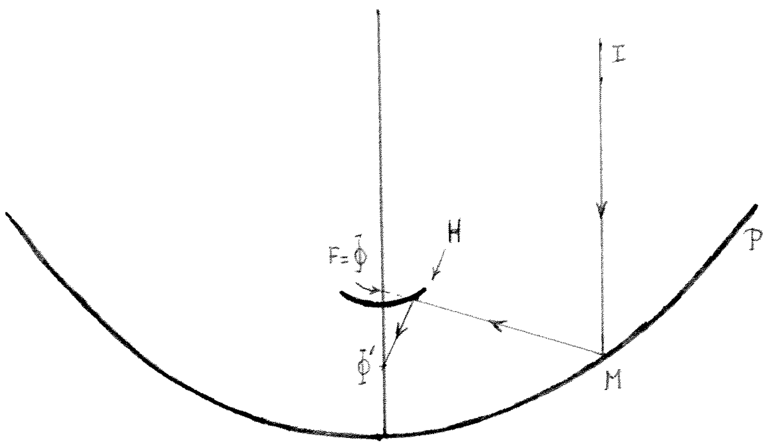
Question 9 : Montrer en utilisant le résultat de la question 8 et la loi de la réflexion que ce rayon est réfléchi en un rayon passant par Φ' (figure 3).

figure 3



C/ APPLICATION

figure 4



Une antenne "micro-ondes" est constituée de deux surfaces de révolution de même axe, l'une parabolique, l'autre hyperbolique. La figure 4 représente la section de cette antenne par un plan méridien. Cette section est constituée

- d'un arc de parabole d'axe d, de foyer F, de sommet S ;
- d'un arc d'hyperbole d'axe focal d, de foyers Φ et Φ'.

Le point Φ est en F et le point Φ' est entre S et F.

L'étude de la figure 4 montre que tout rayon incident parallèle à l'axe d de révolution de l'antenne converge, après deux réflexions, en Φ'.

Remarque : Utilité du réflecteur hyperbolique

Le dispositif de réception des rayons situé à leur point de convergence est de masse élevée. Il est indispensable, pour des raisons de rigidité et d'équilibre de l'ensemble, de le placer le plus près possible de S. La présence du réflecteur hyberbolique, en permettant de remplacer F par Φ', résout ce problème.

Annexe :

Soit ABC un triangle et D le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et du segment [BC].

Question : a) Démontrer que $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \dfrac{AB}{AC}$

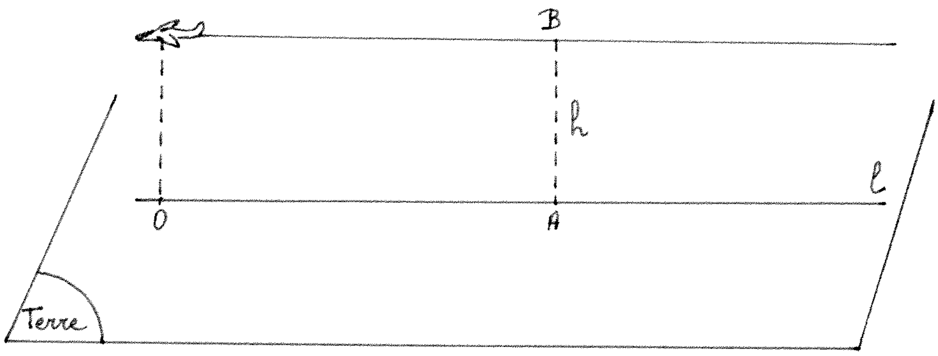
Indication : on appelle B' le symétrique de C par rapport à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$.
On utilise alors le théorème de Thalès.

b) Etudier la réciproque.

35. ZONE D'AUDIBILITE

Considérons un avion en vol supersonique à l'altitude h au-dessus de la Terre. Nous voulons savoir quelle est à un instant i donné la zone de la surface terrestre où l'on a pu entendre le bruit de ses moteurs jusqu'à cet instant.

Pour une approche locale du problème on supposera la surface terrestre plane, l'altitude h constante, la vitesse v du vol constante. On note u la vitesse de propagation du son : $v > u$ car l'avion est en vol supersonique.



A chaque instant de son vol l'avion se trouve à la verticale d'un point déterminé de la surface terrestre. Ce point se déplace d'un mouvement uniforme avec une vitesse v, traçant ainsi une droite ℓ parallèle à la trajectoire de l'avion. Supposons qu'à l'instant i l'avion se trouve au-dessus du point O de la droite ℓ. A l'instant $i - t$ -c'est-à-dire t secondes avant l'instant i- l'avion se trouvait au-dessus d'un point A, dans la position B. Le son émis par l'avion lorsqu'il se trouvait situé en B s'est propagé dans toutes les directions à partir du point B, à la vitesse u ; à l'instant i il a atteint les points d'une sphère de centre B.

<u>**Question 1**</u> : Quel est le rayon de cette sphère ?

<u>**Question 2**</u> : A quelle condition cette sphère coupe-t-elle la surface terrestre ? Définir cette intersection.

Pour obtenir la zone d'audibilité il nous faut donc considérer toutes les positions B sur la trajectoire de l'avion, correspondant à des valeurs de t positives. On obtient ainsi une famille de cercles dans le plan "Terre". Un point M est dans la zone d'audibilité s'il est à l'intérieur de l'un de ces cercles.

<u>**Question 3**</u> : Pour $v = 1,5\ u$ et $h = 10\ 000$ m représenter dans le plan "Terre", à l'échelle 1/500 000e, les points A sur la demi-droite $O\ell$ et les cercles de la famille précédente correspondant à :

$t = \frac{h}{u}$; $t = 1,5\ \frac{h}{u}$; $t = 2\ \frac{h}{u}$; $t = 2,5\ \frac{h}{u}$; $t = 3\ \frac{h}{u}$

Considérons un repère orthonormé d'origine O dans le plan "Terre", le demi-axe positif contenant les points A. Les coordonnées de A sont $(vt\ ;\ 0)$, celles de M sont $(x\ ;\ y)$.

<u>**Question 4**</u> : Quelle inégalité vérifient x et y si M se trouve dans le cercle de centre A et de rayon $R = \sqrt{u^2\ t^2 - h^2}$?

<u>**Question 5**</u> : Montrer que cette inégalité est équivalente à :

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2\ vxt + (y^2 + x^2 + h^2) \leqslant 0 \quad (1)$$

Le premier membre de cette inégalité est un trinôme du second degré en t de la forme

$$\alpha\ t^2 + \beta t + \gamma$$

Préciser les signes de α et β .

Question 6 : Les coordonnées x et y étant fixées, montrer qu'il existe un réel t positif vérifiant l'inégalité (1) si et seulement si on a :

$$\beta < 0 \quad \text{et} \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0 \qquad (2)$$

Question 7 : Montrer que les conditions de (2) s'écrivent aussi :

$$x > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{v^2}{u^2} - 1\right)h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geqslant 1$$

Question 8 : Quel est l'ensemble $\mathcal{H}$ des points M(x ; y) du plan "Terre" vérifiant

$$x > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\left(\frac{v^2}{u^2} - 1\right)h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1 \ ?$$

Dessiner $\mathcal{H}$ en utilisant les mêmes données qu'en 3 puis colorier la zone d'audibilité.

Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0) appartenant à $\mathcal{H}$ et à un cercle $\mathcal{C}$ de la famille.

Question 9 : Déterminer le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Question 10 : On rappelle qu'une équation de la tangente à l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{en } M_0(x_0\ ;\ y_0) \quad \text{est} \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Montrer qu'en M_0, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ ont même tangente.

36. A LA RECHERCHE D'UN TRIANGLE RECTANGLE

1) On cherche à déterminer les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont le périmètre est de 50 cm et l' hypoténuse a pour longueur 20 cm.

Question 1 : Montrer que ce problème n'a pas de solution.

Question 2 : Résoudre le même problème dans le cas où le périmètre est de 50 cm et l'hypothénuse a pour longueur 30 cm.

2) On cherche à quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) liant les nombres p et a, il existe un triangle rectangle de périmètre p et ayant une hypoténuse de longueur a.

A/ SOLUTION ALGEBRIQUE

On appelle b et c les longueurs des côtés de l'angle droit du triangle.

Question 3 : a) Montrer que b et c sont solutions d'une équation du 2e degré.

b) Déterminer à quelles conditions cette équation admet des solutions qui conviennent.

c) Conclure qu'il existe un triangle rectangle de périmètre p et ayant une hypothénuse de longueur a si et seulement si

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{a}{p} < \frac{1}{2} \qquad \left(\text{ou } 2 < \frac{p}{a} < 1 + \sqrt{2}\right)$$

B/ SOLUTION GEOMETRIQUE

On appelle ABC le triangle rectangle et [BC] son hypoténuse.

Question 4 : a) Montrer que A est l'intersection d'un cercle $\mathcal{C}$ et d'une ellipse $\mathcal{E}$ que l'on précisera.

b) Déterminer à quelle condition liant p et a, cette ellipse $\mathcal{E}$ existe.

c) Si $\mathcal{E}$ existe, la médiatrice de [BC] coupe $\mathcal{E}$ en S et S', et coupe $\mathcal{C}$ en D et D'. $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ se coupent si et seulement si BD $\geqslant$ BS. Traduire cette inégalité par une condition liant p et a.

d) Conclure.

Question 5 : a) Le périmètre d'un triangle rectangle est de 50 cm. Déterminer un encadrement au cm près de la longueur de son hypoténuse.

b) La longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est de 20 cm. Déterminer un encadrement au cm près de son périmètre.

37. CONIQUES, CONSTRUCTIONS ET LIEUX GEOMETRIQUES

(1) On considère l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Question 1 : Ecrire les coordonnés paramétriques d'un point de E. Construire un point quelconque de E en utilisant le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon α et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayon β.

Question 2 : Soit d une droite parallèle à l'axe des abscisses. Construire, en utilisant les mêmes cercles, le ou les points d'intersection de E et de d (s'ils existent).

(2) On cherche à construire un triangle dont on connaît :

- le périmètre p ;
- la longueur c d'un des côtés ;
- la longueur h de la hauteur relative à ce côté.

On appelle ABC ce triangle, s'il existe ; on pose AB = c.

Question 3 : a) Montrer que C est un point d'intersection d'une ellipse E et d'une droite d parallèle à son grand axe ; Déterminer les longueurs 2α et 2β des axes de E.

b) Construire le triangle ABC.

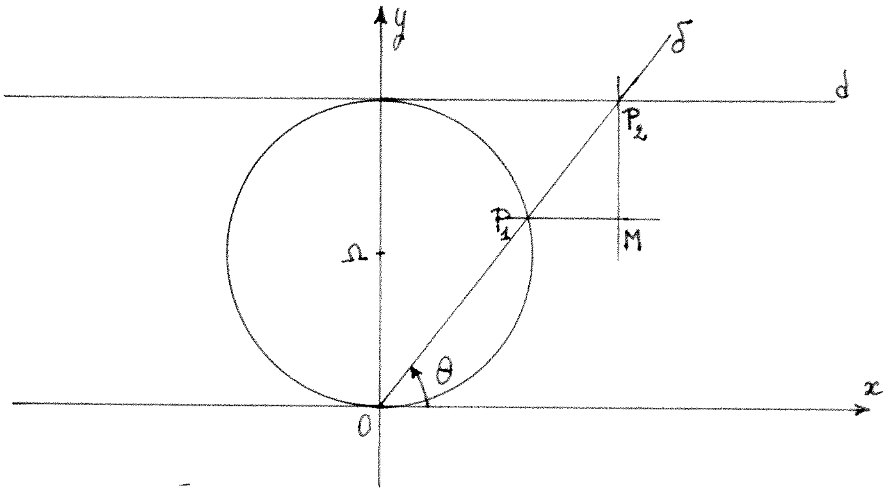
(3) On cherche à construire un triangle dont on connaît le périmètre, l'aire et la longueur d'un côté.

N.B. **L'aire est donnée "géométriquement" comme celle d'un rectangle connu XYZT.**

Question 4 : a) Montrer que le problème se ramène à la construction précédente, moyennant la construction suivante :

b) Construire la hauteur d'un triangle ABC dont on connaît la longueur du côté [AB] et dont l'aire est celle du rectangle XYZT.

(4) **A/** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω (o ; a) (a > o) et d la droite d'équation y = 2 a. Une demi-droite δ d'origine O recoupe $\mathscr{C}$ en P_1 et coupe d en P_2 ; On appelle M le point d'intersection de la parallèle à Ox passant par P_1 et de la parallèle à Oy passant par P_2.



Question 5 : a) On pose $(Ox, \delta) = \theta$

Calculer les coordonnées de M en fonction de θ et de a .

b) Ecrire l'équation cartésienne de l'ensemble Γ des points M lorsque θ varie de $-\pi$ à π, a étant fixé.

c) Construire Γ .

B/ On remplace dans l'énoncé précédent $\mathscr{C}$ par l'ellipse E d'équation :

$$\frac{(y-a)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Question 6 : Procéder comme à la question 5.

<u>N.B.</u> La partie Γ_1 de la courbe Γ, du paragraphe 4 A/, située dans le demi-plan des points d'abscisses positives, est la courbe représentative d'une fonction f. Cette fonction est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0,2a[$; elle admet une fonction réciproque φ définie sur $]0,2a[$

La courbe représentative de φ est connue sous le nom de "the witch of Agnesi" (witch = sorcière). Maria Gaetana Agnesi fut une mathématicienne italienne du 18e siècle ; elle étudia cette courbe qu'elle appela "versiera". La traduction anglaise témoigne probablement de la méfiance inspirée à l'époque par une femme qui faisait.... des mathématiques !

38. SOLUTION "APPROCHEE" D'UN SYSTEME

I- On considère le système de trois équations à deux inconnues réelles suivant :

$$\begin{cases} -2x + y = 6 \\ x + y = 3 \\ 4x + y = -6 \end{cases}$$

(1) RESOLUTION DU SYSTEME. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

Question 1 : Montrer que ce système n'admet pas de solution

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace orienté.
On considère les vecteurs $\vec{u}(-2\ ;\ 1\ ;\ 4)$, $\vec{v}(1\ ;\ 1;\ 1)$ et $\overrightarrow{OS}(6\ ;\ 3\ ;\ -6)$

Question 2 : Déduire du résultat de la question 1 que le vecteur $\overrightarrow{OS}$ n'appartient pas au plan P passant par O, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(2) SOLUTION "APPROCHEE" DU SYSTEME

On poursuit l'étude géométrique précédente. On peut décomposer $\overrightarrow{OS}$ d'une infinité de façons : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2}$ de telle sorte que $\overrightarrow{OS_1}$ soit un vecteur du plan P et $\overrightarrow{OS_2}$ un vecteur qui n'appartienne pas à P.

On CHOISIT de décomposer $\overrightarrow{OS}$ en un vecteur $\overrightarrow{OS_1}$ du plan P et un vecteur $\overrightarrow{OS_2}$ orthogonal à P. (figure 1).

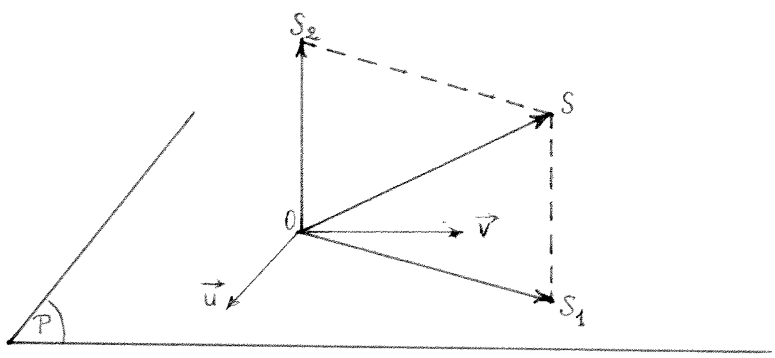


figure 1

Question 3 : Calculer les coordonnées (α , β , γ) d'un vecteur $\vec{w}$ orthogonal au plan P.

Question 4 : En résolvant un système de trois équations à trois inconnues, déterminer (x_1 ; y_1) et z_2 tels que :

$x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_2\vec{w} = \overrightarrow{OS}$

Calculer alors $||\overrightarrow{S_1S}||$.

REMARQUE : S_1 est le pied de la perpendiculaire à P, passant par S ; donc SS_1 est la plus courte distance de S à P. Autrement dit, parmi toutes les décompositions possibles du vecteur $\overrightarrow{OS}$ envisagées, celle qui a été choisie est celle qui réalise le minimum de la norme du vecteur $\overrightarrow{S_1S}$ on peut dire, en ce sens, que $\overrightarrow{OS_1}$ est le vecteur de P, "le plus proche" de $\overrightarrow{OS}$. On dira que (x_1, y_1) est la solution approchée en ce sens du système de la question 1.

Exercices : Autres méthodes pour calculer (x_1 ; y_1)

A/ **Question 5** : On pose $\overrightarrow{OS} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v} + z_2\vec{w}$

a) Vérifier que $\overrightarrow{OS}.\vec{u} = x_1\vec{u}^2 + y_1\vec{u}.\vec{v}$

Ecrire de façon analogue le produit scalaire $\overrightarrow{OS}.\vec{v}$.

b) Calculer les produits scalaires et les carrés scalaires qui conviennent pour déterminer le couple (x_1, y_1) cherché.

B/ **Question 6** : Choisir un vecteur $\vec{t}$ de telle façon que la base ($\vec{t}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) soit orthogonale.

On pose $\overrightarrow{OS} = Y_1\vec{t} + y_1\vec{v} + z_2\vec{w}$

a) Vérifier que $\overrightarrow{OS}.\vec{t} = X_1\ \vec{t}^2$

Ecrire de façon analogue $\overrightarrow{OS}.\vec{v}$.

b) Calculer alors X_1 et Y_1 et en déduire le couple (x_1,y_1) cherché.

II- APPLICATION

On donne les trois points A(-2 ; 6) , B(1 ; 3) , C(4 ; -6) d'un plan repéré.

Question 7 : Vérifier que ces trois points ne sont pas alignés.

Problème : On cherche la droite d, d'équation $y = ax + b$, qui "passe le plus près possible" des points A, B et C au sens suivant :
on cherche à déterminer les coefficients a et b de façon que la norme du vecteur $\vec{E}$ (e_1, e_2, e_3) soit minimale (figure 2).

$\overline{A'A} = e_1$

$\overline{B'B} = e_2$

$\overline{C'C} = e_3$

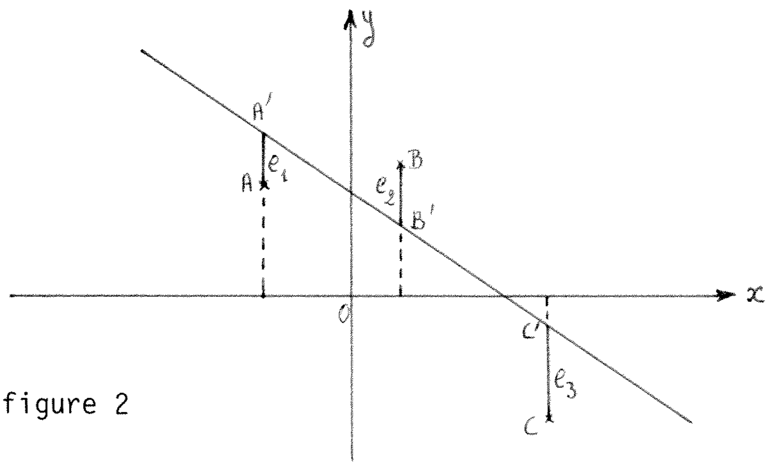


figure 2

Question 8 : Ecrire les trois égalités vérifiées par a,b,e_1,e_2,e_3.

Vérifier qu'elles se résument dans l'égalité vectorielle :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + \vec{E} = \overrightarrow{OS}$$

où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OS}$ sont les vecteurs définis dans la partie I-.

En posant $\overrightarrow{OS_1} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$, on a : $\vec{E} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{S_1S}$.

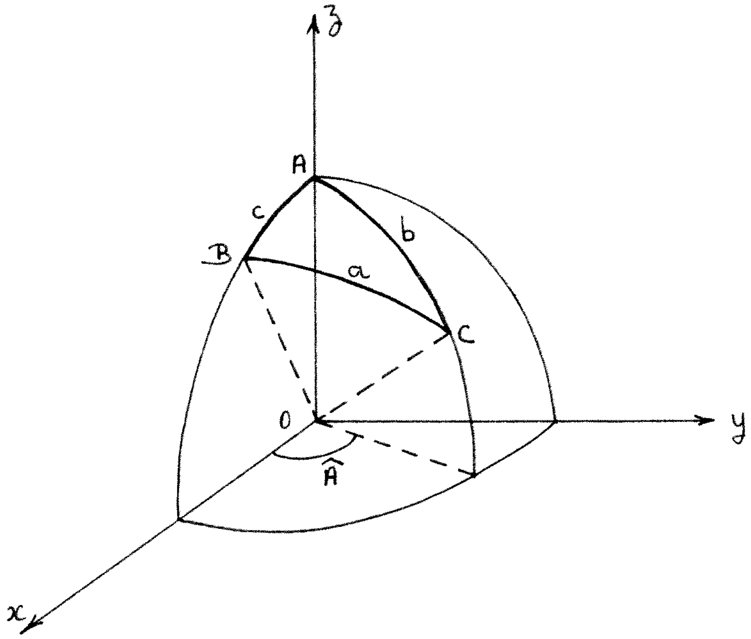
Le problème posé revient donc à chercher a et b de façon que le vecteur $\overrightarrow{S_1S}$ soit de norme minimale.

Question 9 : Déduire des résultats de la partie I-, la droite d cherchée.

Remarque : **Minimiser la norme du vecteur $\vec{E}$ revient à minimiser la somme des carrés des "écarts" e_1, e_2, e_3. Cette méthode est connue sous le nom de méthode des moindres carrés. Elle s'étend, et c'est là que réside son intérêt, de 3 à n points.**

39. UN PEU DE TRIGONOMETRIE SPHERIQUE

I- QUELQUES DEFINITIONS



(1) Un triangle sphérique est la figure ABC formée des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$ de trois des grands cercles de cette sphère.
Dans ce qui suit, on choisit le rayon de la sphère comme unité de longueur.

(2) Les éléments fondamentaux d'un triangle sphérique sont :

Ses angles : Ce sont les angles que font deux à deux les plans des grands cercles qui forment le triangle.
Par exemple, $\hat{A}$ est l'angle des plans AOB et AOC

Question 1 : Définir les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$

Ses côtés : Ce sont les arcs de grands cercles $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{CA}$

Les longueurs c, a, et b de ces côtés sont les mesures en radians des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$.

3 On choisit comme repère orthonormé direct Oxyz de façon que :
Oz soit le support de (OA), orienté de O vers A
B appartienne au plan xoz
On étudie dans ce qui suit des triangles sphériques dont les angles et les longueurs des côtés sont compris entre 0 et π.

II- FORMULE DES COSINUS

Question 2 : Calculer de deux façons différentes le produit scalaire $\vec{OB}.\vec{OC}$.
En déduire la formule des cosinus :

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}}$$

III- FORMULE DES SINUS

A/ Préliminaires : Double produit vectoriel :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs, distincts ou non. On cherche à déterminer le vecteur $\vec{Z} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Premier cas : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Soit P le plan passant par O de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Question 3 : Montrer que $\vec{Z}$ est un vecteur du plan P (faire une figure).

Il existe donc un couple $(\alpha ; \beta)$ de nombres réels tels que :

$$\vec{Z} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$$

Question 4 : Calculer de deux façons différentes le produit scalaire $\vec{u}.\vec{Z}$.
En déduire que $\vec{Z} = \lambda [(\vec{u}.\vec{w}) \vec{v} - (\vec{u}.\vec{v}) \vec{w}]$

On calcule λ dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v} \wedge \vec{w}$ ne sont pas colinéaire.
On choisit pour cela un repère orthonormé direct tel que :
$\vec{i}$ soit colinéaire à $\vec{Z}$
$\vec{k}$ soit orthogonal à P.

Question 5 : a) Faire une figure et calculer de deux façons différentes les coordonnées de $\vec{Z}$ dans ce repère. En déduire la valeur de λ.

b) Montrer que cette valeur de λ convient lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v} \wedge \vec{w}$ sont colinéaires.

Deuxième cas : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Question 6 : Vérifier que l'expression de $\vec{Z}$ trouvée dans le premier cas est encore valable dans ce deuxième cas.

CONCLUSION :

On a l'égalité, appelée formule du double produit vectoriel :

$$\boxed{\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\ \vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\ \vec{w}.}$$

B/ Application

Soit ABC un triangle sphérique

On calcule de deux façons différentes le nombre :

$$||(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC})||$$

Première façon: on utilise la définition du produit vectoriel

Question 7 : Démontrer que :

$$||(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC})|| = \sin c \sin b \sin \hat{A}.$$

Deuxième façon : on utilise la formule du double produit vectoriel, en posant $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

Question 8 : a) Démontrer que :

$$||(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC})|| = |(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \,.\, \overrightarrow{OC}|$$

b) Vérifier que $|(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}).\ \overrightarrow{OC}|$ est le volume V du parallélépipède construit sur les bipoints (O,A), (O,B) et (O,C). (Faire une figure)

Question 9 : On a donc $V = \sin c \sin b \sin \hat{A}$

Démontrer alors la formule des SINUS :

$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}}}$$