L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n°50 - AVRIL 1988 ISSN 0290-0068

NOTRE COUVERTURE

Siméon Denis POISSON se prête bien involontairement à un poisson d'avril. Voir article page 1.

En novembre 1970 paraissait sous la responsabilité de Roger Iss un fascicule d'une vingtaine de pages intitulé sobrement '*L'Ouvert*'. Comme le dit justement Jean SAMSON dans l'éditorial : "*Le titre (...) a été choisi non tant pour des raisons topologiques que pour rappeler à chaque instant la raison d'être d'un organisme de liaisons, d'échanges, ouvert à tous*".

Malgré sa couverture verte "*ce bulletin (...) ne veut au aucune façon concurrencer le bulletin de l'*A.P.M." écrit aussi notre collègue.

Au sommaire de ce premier numéro : une enquête sur la classe de troisième par ROCHE, une réflexion sur le hasard par IGOT, une expérience de mini-ordinateur (eh oui déjà!) en 6^e et 5^e par SAMSON. En avril 71 paraît le numéro 3 et les dernières lignes annoncent : "*Dans le numéro quatre (...) paraîtront les premières tentatives pédagogiques d'applications des nouveaux programmes*". Malheureusement la rentrée 72 se passe puis 73 et toujours pas de numéro 4!

Ce n'est qu'en novembre 74 que paraît ce fameux n° 4 où il n'est d'ailleurs plus question de "*nouveaux*" programmes. Une couverture illustrée, cartonnée, une quarantaine de pages... Trois fois par an '*L'Ouvert*' parvient aux professeurs de l'académie, puis, petit à petit sa notoriété s'étend. On le cite dans plusieurs régions et il est même exporté.

Malgré des crises où l'on repose régulièrement le problème de la fermeture de '*L'Ouvert*', ce périodique survit. Pendant l'année scolaire 80-81 une nouvelle équipe animée par Georges GLAESER et Eric CHANEY donne une nouvelle orientation et publie à partir de 82 au rythme de quatre numéros par an.

En mars 84, le titre change d'allure : un livre ouvert (bien sûr) remplace le V d'"*ouvert*", allusion transparente à GALILÉE qui disait que les mathématiques sont la langue qui permet de lire l'univers à livre ouvert. Le sous-titre change aussi : cela n'est plus que "*le journal de l'*A.P.M.E.P. *d'Alsace et de l'* I.R.E.M. *de Strasbourg*" après avoir été "*l'organe d'information et d'échange de la régionale* A.P.M.E.P. *d'Alsace et de l'* I.R.E.M. *de Strasbourg*" (ouf!).

Fin 85, Eric CHANEY nous quitte et je reprends le flambeau. Un an après, sur la lancée du travail d'Eric CHANEY, '*L'Ouvert*' passe en $\TeX$. L'ouverture sur la France et le monde est de plus en plus grande.

Ce mois-ci, S. D. POISSON nous prête son portrait pour un poisson d'avril qui introduit l'humour dans les pages de ce numéro 50, numéro un peu spécial de '*L'Ouvert*'.

Humour grinçant et sans doute salutaire quand on réfléchit aux erreurs d'illustres mathématiciens, humour réconfortant quand on se moque de BOURBAKI et de nos collègues, humour joyeux quand le dessin s'en mêle.

Puisse cette dose d'humour donner envie à tous de prendre un nouveau départ pour que '*L'Ouvert*' soit sûr de fêter son numéro 100 lors de la rentrée de l'an 2000 (faites le calcul, ce n'est pas un canular!).

Jean LEFORT

PRIX D'ALEMBERT : Une mention attribuée à "L'Ouvert"

♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Après avoir été attribué en 1986 à '*Pour la Science*', le prix d'ALEMBERT, décerné par la Société Mathématique de France a couronné cette année l'exposition '*Horizons Mathématiques*'. A côté de ce prix, quatre mentions furent citées : '*L'Ouvert*' est l'une d'entre elles, les trois autres sont :

— Pour l'honneur de l'esprit humain de DIEUDONNÉ;
— Mathématiques au fil des âges de DHOMBRES;
— Histoires de Comptes de CERQUETTI-ABERKANE.

Rappelons que le prix d'ALEMBERT récompense une œuvre de vulgarisation mathématique de quelque type que ce soit.

SOMMAIRE

N° 50 – 1988

◇ *Notre couverture : Siméon Denis POISSON* I

◇ *Editorial : "50"* II

◇ *Siméon Denis Poisson*, par J. LEFORT 1

◇ *Ensemblistes*, par R. QUENEAU 4

◇ *POUR GRANDS QUE SOIENT LES ROIS* 5

La catastrophe de Kempe, par J. LEFORT 7

La continuïté, par A. CAUCHY 13

Relations sur Chasles, par H. BOUASSE 19

◇ *HUMOUR & PASTICHES* 23

L'humour en mathématiques, par J. LEFORT 25

Une tranche de vie, (extrait de 'Pour la Science') 31

Espaces ethyliques, par M. HOQUET 35

Les fausses démonstrations, par J. LEFORT 37

◇ *Approchons* π *avec une erreur de* 1/40 000 000 000, par Y. PIRAT 40

◇ *Un beau spectacle arithmétique*, par G. GLAESER 46

◇ *Du rallye aux U.S.A.*, par J. LEFORT et F. DOUÉ 48

◇ *A vos stylos*, par '*L'Ouvert*' 52

◇ *Sommaire* IV

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : J. LEFORT
◇ *Correspondance à adresser à* :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
Tél. : 88-41-63-00, poste 240
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)* :
90.–F pour l'Alsace
120.–F pour les autres départements
110.–F pour l'étranger
(Chèque à l'ordre de Mr l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM))
◇ *Prix du numéro* : 25.– F

Siméon Denis POISSON

Jean LEFORT

21 (ou 22) Juin 1781	Naissance à Pithiviers. Il étudie à l'école centrale de Fontainebleau (écoles créées par la révolution, une dans chaque département).
1798	Il est reçu premier à polytechnique. Il sera élève de LAGRANGE et s'intéresse très tôt à la pédagogie. Il devient vite répétiteur puis
1802	professeur suppléant et enfin
1806	professeur titulaire en remplacement de FOURIER.
1808	Il devient astronome au bureau des longitudes.
1809	Nommé professeur de mécanique à la faculté des sciences.
23 mars 1812	Il est élu à l'Institut de sciences physiques en remplacement de MALUS.
1817	voit son mariage avec une orpheline née en Angleterre de parents immigrés. A partir de cette date, son existence sera sévèrement réglée entre la famille, le travail personnel et les obligations professionnelles.
1820	Il est nommé au Conseil Royal de l'université. C'est le poste le plus élevé de l'administration pour le développement de l'enseignement en France. Il y combattit, avec l'aide d'AMPÈRE, pour contrecarrer la campagne conservatrice contre les programmes scientifiques.
1827	Son rôle à l'Académie des Sciences s'accroît à la mort de LAPLACE et plus encore à partir de
1830	avec l'exil de CAUCHY, où il obtient alors une place prépondérante.
1837	Il est élevé à la dignité de Pair de France; mais la maladie le guette et c'est très affaibli qu'il mourra en
1840	.

D'après "S. D. POISSON et la science de son temps"
par METIVIER, COSTABEL et DUGAC
(Ecole Polytechnique).

Pendant toute sa vie, POISSON n'a défendu qu'une idée : "*Les Mathématiques*". Peu lui importait le régime politique du moment s'il pouvait continuer à professer les mathématiques. Quelques exemples le prouvent :

1°) Son élection à l'institut en 1812, il la doit, entre autre, à son attitude comme jeune professeur à l'X où en 1804 il avait évité que les élèves ne donnent suite à un projet de pétition contre l'établissement de l'Empire. Il n'avait pourtant aucune sympathie pour le régime napoléonien et désirait avant tout préserver d'une crise l'institution à laquelle il était dévoué.

2°) En acceptant la dignité de Pair de France, il tenait moins à marquer son conformisme politique qu'à obtenir un levier supplémentaire pour multiplier son action au profit de la communauté scientifique.

3°) COURNOT écrit dans ses souvenirs :

> *"M. Poisson joignait à beaucoup de rondeur dans les formes une grande finesse d'esprit, un grand fond de bon sens et de tolérance qui l'inclinaient aux idées conservatrices. Grâce à la haute réputation dont il jouissait dans le monde savant (en 1815), le parti royaliste n'avait pas demandé mieux que de prendre son esprit conservateur pour du royalisme et il s'y était prêté!... La révolution de 1830 survenue, M. Poisson ne trouva pas qu'il y eût de motifs pour cesser de prêter son concours à un gouvernement qui voudrait être sensé et modéré, et il prit le parti de tolérer le formulaire philosophique de M. Cousin comme il en avait toléré d'autres, à condition qu'on ne les lui imposerait pas à lui-même, et que les affaires, comme les mathématiques, n'en iraient pas moins leur train.* "

Finalement, si POISSON ne fut pas un grand mathématicien inventif, il a su souvent mieux présenter les travaux de ses collègues (ce qui n'allait pas toujours sans heurts) et s'intéressa à tout ce qui se passait en mathématique et en physique. Il a donc beaucoup écrit et ses cours sont des modèles de clarté. L'histoire a retenu :

▷ *Equation de Poisson.*— Equation aux dérivées partielles de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Elle intervient en physique dans la théorie des potentiels newtoniens.

▷ *Intégrale de Poisson.*— Intégrale :

$$v(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \alpha)} \Phi(\alpha) d\alpha.$$

En posant $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ la fonction définie par $u(x, y) = v(\rho, \theta)$ est une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, harmonique sur le disque $x^2 + y^2 < 1$, qui prend sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ les valeurs données $\Phi(\alpha)$ où $\alpha = \text{Arg}(x + iy)$.

▷ *Loi de Poisson.*— Une variable aléatoire discrète X dont l'ensemble des valeurs prises est N obéit à une loi de Poisson si sa fonction de distribution est définie par $P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ où λ est une constante réelle positive appelée paramètre de la loi. L'espérance mathématique et la variance de X sont toutes deux égales au paramètre λ.
La loi de Poisson intervient dans la construction d'œuvres de Xénakis et dans celles d'autres compositeurs ayant recours à un aléatoire partiel.

▷ *Noyau de Poisson.*— Fonction K définie sur $]0,1[\times\mathbb{R}$ par :

$$K(r,x) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos 2\pi x}.$$

D'après le "Dictionnaire des Mathématiques"
par Alain BOUVIER et Michel GEORGE
sous la direction de François LE LIONNAIS
(P.U.F. - 1979 - p. 578-579)

ENSEMBLISTES

Dans l'autobus S considérons l'ensemble A des voyageurs assis et l'ensemble D des voyageurs debout. A un certain arrêt, se trouve l'ensemble des personnes qui attendent. Soit C l'ensemble des voyageurs qui montent; c'est un sous-ensemble de P et il est lui-même l'union de C' de l'ensemble des voyageurs qui restent sur la plate-forme et de C" l'ensemble de ceux qui vont s'asseoir. Démontrer que l'ensemble C" est vide.

Z étant l'ensemble des zazous et $\{z\}$ l'intersection de Z et de C', réduite à un seul élément. A la suite de la surjection des pieds de z sur ceux de y (élément quelconque de C' différent de z), il se produit un ensemble M de mots prononcés par l'élément z. L'ensemble C" étant devenu non vide, démontrer qu'il se compose de l'unique élément z.

Soit maintenant P l'ensemble des piétons se trouvant devant la gare Saint-Lazare, z, z' l'intersection de Z et de P', B l'ensemble des boutons de pardessus de z, B' l'ensemble des emplacements possibles des dits boutons selon z', démontrer que l'injection de B dans B' n'est pas une bijection.

R. QUENEAU
Exercices de style
N° 64

POUR GRANDS QUE SOIENT LES ROIS

ILS SONT CE QUE NOUS SOMMES.

ET PEUVENT SE TROMPER

COMME LES AUTRES HOMMES.

(*Le Cid* – CORNEILLE)

Les plus grands mathématiciens ont, eux aussi, commis des erreurs. On trouvera ci-après trois exemples correspondant à trois situations différentes :

- On raisonne en s'appuyant sur une figure trop complexe et qui ne représente pourtant pas le cas général. (Peut-on raisonner juste sur une figure fausse ?)
- On crée une nouvelle notion. Quoi de plus naturel que de ne pas voir tout de suite les cas particuliers et les subtilités qui n'apparaîtrons que quand toute la théorie sera bien assise !
- On prend prétexte de son rang dans la communauté mathématique pour imposer ses vues sur des sujets qui n'ont plus rien à voir avec les maths. Erreur infiniment plus grave que les deux précédentes.

LA CATASTROPHE DE KEMPE

Jean LEFORT

La première mention écrite du problème des quatre couleurs date du 23 octobre 1852 dans une lettre de A. de MORGAN à HAMILTON. (Le problème est attribué à un dénommé Francis GUTHRIE.)

Mais c'est en 1878 que ce problème acquis une grande notoriété par une communication de CAYLEY à la Société Mathématique de Londres.

En 1879, un avocat londonien, mathématicien amateur, KEMPE, propose une "*démonstration*" et atteint ainsi la célébrité, recevant honneurs et décorations.

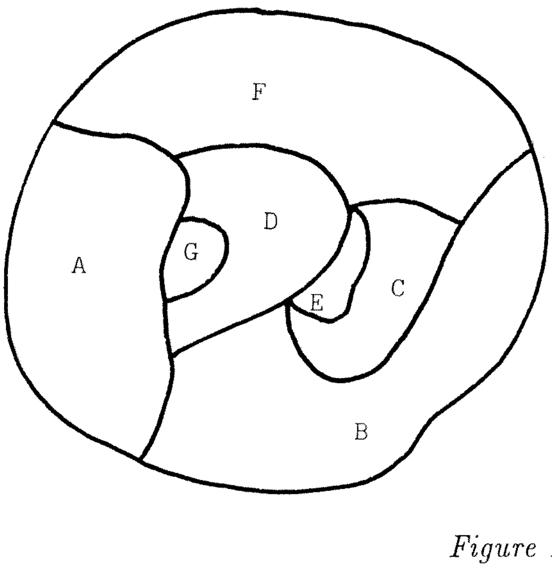
Pour bien comprendre le travail de KEMPE, nous utiliserons un vocabulaire moderne (KEMPE utilisait le langage des cartes qui n'est pas très facile à manier!).

1.— Transformation du problème :

Le problème est :

> *"Démontrer que quatre couleurs sont toujours suffisantes pour colorier une carte plane de façon que deux pays voisins n'aient jamais la même couleur. "*

Précisons que chaque pays est d'un seul tenant (on dit connexe) et que deux pays sont voisins s'ils ont une frontière commune (un ou plusieurs points isolés entre deux pays ne permettent pas de les déclarer voisins).

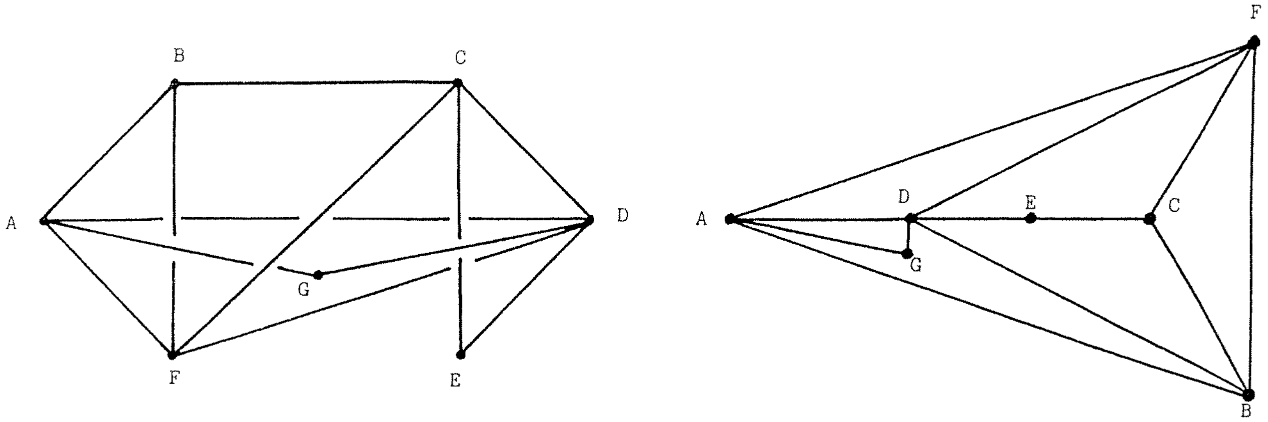


C et D ne sont pas voisins.
E n'est voisin que de D et C.

Figure 1

© L'OUVERT 50 (1988)

Choisissons **un** point à l'intérieur de chaque papys (et non pas sur la frontière) et relions par un arc de courbe deux points si et seulement si ces deux points sont choisis dans deux pays voisins. Nous obtenons ainsi un graphe (fig. 2) dont les points sont les **sommets** et les arcs de courbe les **arêtes**.



Graphe de la figure 1
avec croisements.

Graphe de la figure 1
sans croisements.

Figure 2

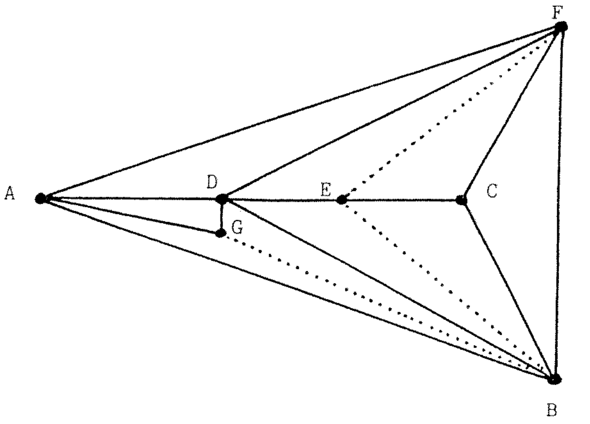
Il est clair qu'on peut toujours s'arranger pour que deux arêtes distinctes n'aient en commun qu'un sommet ou plus. On dit qu'il s'agit d'un graphe planaire.

Le problème des quatre couleurs peut être reformulé ainsi : "*démontrer que quatre couleurs sont suffisantes pour colorier les sommets d'un graphe planaire de façon que deux sommets reliés par une arête ne soient pas de la même couleur*".

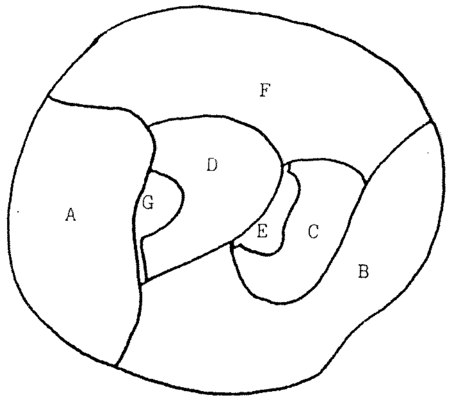
Remarque : un graphe délimite dans le plan un certain nombre de régions appelées **faces**. Chaque face est bordée par au moins trois arêtes. Si il y en a plus de trois, on peut toujours ajouter des arêtes pour se ramener au cas où il y a exactement trois arêtes autour de chaque face. On obtient alors un graphe **triangulé**.

Il est clair que si on a démontré le théorème des quatre couleurs pour un graphe triangulé, il est alors démontré pour tout graphe.

En langage des cartes, ajouter une arête revient à modifier légèrement les frontières de chaque région.



Triangulation de la figure 2 par ajout de 3 arêtes.



Carte de la figure 1 légèrement modifiée pour correspondre au graphe triangulé ci-contre.

Figure 3

2.— La relation d'EULER et ses conséquences.

Si on note S, A et F le nombre de **S**ommets, **A**rêtes et **F**aces d'un graphe (ne pas oublier de compter une face pour l'extérieur du graphe), on a :

$$S - A + F = 2.$$

Si le graphe est triangulé, chaque face est bordée de trois arêtes et chaque arête sépare deux faces; donc : $3F = 2A$ ce qui prouve que

$$A = 3S - 6.$$

Théorème : Tout graphe planaire triangulé possède au moins un sommet auquel n'aboutissent pas plus de cinq arêtes.

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il y ait au moins six arêtes arrivant en chaque sommet; comme chaque arête a deux sommets extremité, on a

$$6S \leq 2A = 6S - 12$$

ce qui est contradictoire.

3.— L'idée de KEMPE

Il s'agit de raisonner par récurrence sur le nombre N de sommets. Il est clair que le théorème des quatre couleurs est vrai pour $N \leq 4$. Supposons le théorème vrai pour N ; soit alors un graphe comportant $N+1$ sommets. Soit S_0 un sommet auquel n'aboutissent pas plus de cinq arêtes. Supprimons S_0. On obtient un graphe à N sommets auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Toute l'astuce consiste à colorier les voisins de S_0 avec trois couleurs au plus. Cela est certainement possible si en S_0 n'aboutissent que trois arêtes (ce qui laisse une quatrième couleur disponible). Mais il faut un peu d'astuce si y aboutissent quatre ou cinq arêtes.

Toute personne qui a déjà essayé de colorier la carte des départements français avec quatre couleurs, sait bien qu'il faut parfois reprendre tout le coloriage pour éviter des impossibilités.

Voici l'astuce de recoloriage de KEMPE :

a) S_0 a quatre voisins :

Soient a, b, c, d les quatre voisins, coloriés respectivement en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

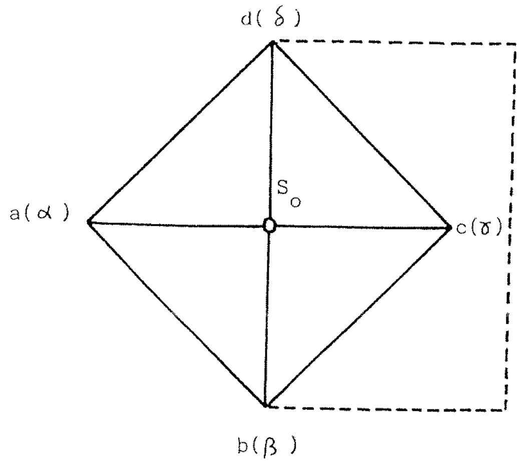


Figure 4

Essayons de faire disparaître la coleur δ en d en recoloriant d en β. Si on change δ en β sur d il faudra changer β en δ sur tous les voisins de d et continuer ainsi de proche en proche. On finira bien par s'arrêter. De deux choses l'une, ou bien b n'a pas été touché par ces échanges et la couleur δ est alors libre pour S_0 (fig. 4) ou bien b a été touché et sa couleur est alors δ et il semble qu'on n'ait rien gagné. Mais dans ce dernier cas, c'est qu'il est apparu une chaîne de sommets alternativement de couleur β et δ joignant b à d (fig. 4). Il suffit alors de jouer sur les couleurs α et δ pour voir qu'il ne peut pas y avoir de chaîne de sommets alternativement de couleur α et δ joignant a et c. Il est alors possible de modifier α en δ sur a puis δ en α sur les voisins de a... en étant sûr de n'avoir pas à modifier δ en c (en raison de la présence d'une chaîne $\beta - \delta$ entre b et d).

b) S_0 a cinq voisins

A une symétrie près, on se trouve dans la situation de la figure 5.

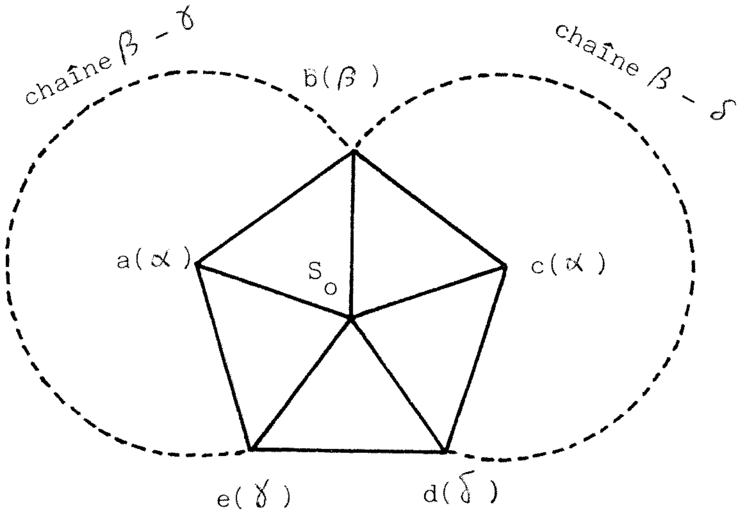


Figure 5

Essayons de supprimer la couleur β en b en la remplaçant par δ. Cela nécessite de changer β et δ chez tous les voisins de b ...etc ... Si on ne touche pas à la couleur de e, c'est gagné et on peut colorier S_0 en β. Sinon c'est qu'il existe une chaîne entre b et e de sommets alternativement de couleurs β et δ (fig. 5). On peut alors tenter le coup en échangeant β et δ à partir de b. Si on ne touche pas à d, c'est gagné, sinon c'est qu'il existe une chaîne entre b et d de sommets alternativement de couleurs β et δ (fig. 5).

Mais s'il existe une chaîne $\beta - \delta$ entre b et e et une chaîne $\beta - \delta$ entre b et d, il n'existe pas de chaîne $\alpha - \delta$ entre a et d et de chaîne $\alpha - \delta$ entre c et e. On peut donc tranquillement recolorier a en δ et modifier en conséquence les voisins de a, puis recolorier c et δ avec les mêmes modifications sur les voisins. La couleur α est alors libre pour σ_0.

5.— La catastrophe de KEMPE.

Ce n'est qu'en 1890 que HEAWOOD montra la faille dans le raisonnement de KEMPE. Mais HEAWOOD n'obtînt ni décorations, ni honneurs pour ce travail.

C'est en modifiant l'allule de la figure 5 que l'on trouve la faille (voir fig. 6).

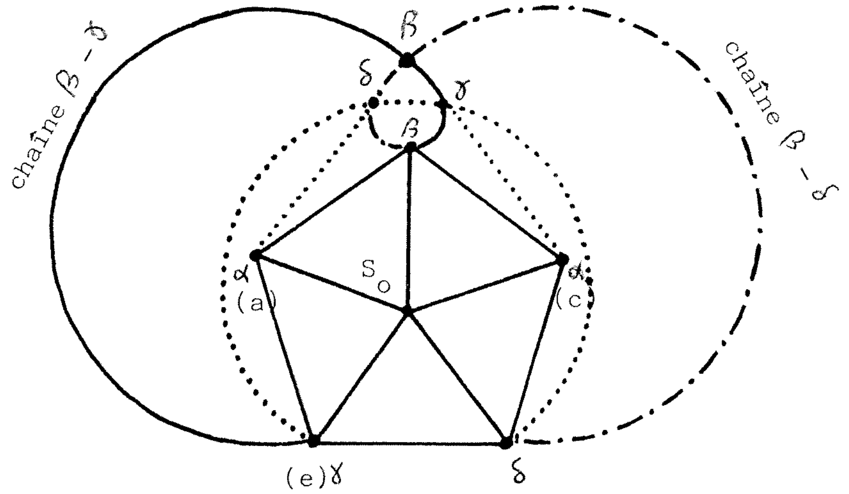


Figure 6

L'échange $\alpha - \delta$ à partir de a permet l'apparition horrible d'une chaîne $\alpha - \delta$ entre c et e ne permettant pas de poursuivre le raisonnement.

Si les chaînes $\beta - \delta$ et $\beta - \delta$ se croisent, dès qu'on effectue l'échange entre α et δ à partir de a on peut faire apparaître une chaîne $\alpha - \delta$ entre c et e, ne permettant plus de continuer le beau raisonnement de KEMPE. C'est catastrophique!

En fait HEAWOOD n'avait pas tout démoli. Le raisonnement de KEMPE permet de montrer que cinq couleurs suffisent. Mais il a fallu attendre 1976 pour que le théorème soit effectivement démontré.

"*Un bon géomètre raisonne juste sur une figure fausse*". Ce dicton est comme tous les autres : il n'est que partiellement vrai. La catastrophe dans le raisonnement de KEMPE montre l'importance de la figure juste pour aider le raisonnement. On reconnaîtra qu'ici, vu l'infinité des cas de figure, KEMPE avait de bonnes excuses, d'autant plus qu'il ne connaissait pas le langage des graphes (ce qui montre une fois de plus l'intérêt d'une bonne notation).

Bibliographie :

Revue du Palais de la Découverte — n° spécial 12 (janv. 1978) "*Le théorème des quatre couleurs*" (*).

(*) Disponible à la Bibliothèque.

LA CONTINUITÉ

Augustin CAUCHY

N.D.L.R. : Nous donnons ci-après quelques extraits du cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique de CAUCHY.

INTRODUCTION

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude et alors les différentes formules ne présentent plus des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI, qu'*une série divergente n'a pas de somme.*

(...)

Mais ceux qui liront mon ouvrage reconnaîtront, je l'espère, que les propositions de cette nature, entraînant l'heureuse nécessité de mettre plus de précision dans les théories, et d'apporter des restrictions utiles à des assertions trop étendues, tournent au profit de l'analyse, et fournissent plusieurs sujets de recherches qui ne sont pas sans importance. Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, à ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.

(...)

CHAPITRE I

DES FONCTIONS RÉELLES

I.— *Considérations générales sur les fonctions.*

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables.

Les diverses expressions que fournissent l'Algèbre et la Trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces mêmes variables. Ainsi, par exemple,

$$L(x), \sin x, \ldots$$

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x+\alpha)-f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un* *accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x, on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité.*

CHAPITRE II

DES QUANTITÉS INFINIMENT PETITES OU INFINIMENT GRANDES, ET DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS. VALEURS SINGULIÈRES DES FONCTIONS DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS.

I.— *Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.*

On dit qu'une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots,$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots,$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative.

(...)

CHAPITRE VI

DES SÉRIES CONVERGENTES ET DIVERGENTES. RÈGLES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES. SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES CONVERGENTES.

I.— *Considérations générales sur les séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différents termes de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente* et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complètement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1, x, x^2, x^3, \dots,$$

qui a pour terme général x^n.

(...)

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots \tag{1}$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_{n-1}$$

vers une limite fixe s; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= u_n, \\ s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1}, \\ s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n, décroisse indéfiniment, tandis que n augmente; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$\begin{aligned} &u_n + u_{n+1}, \\ &u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

c'est-à-dire les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \ldots,$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

(...)

On indique généralement la somme d'une série convergente par somme de ses premiers termes suivie de points. Ainsi, lorsque la série

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots; \tag{6}$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1, x, x^2, x^3, \ldots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{7}$$

La série

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \cdots = s_n + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

et, par suite,

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$$

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{ième}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \; r_n \; \textit{et} \; s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME I.— *Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

RELATIONS SUR CHASLES

Henri BOUASSE

N.D.L.R. : Les ouvrages de mécanique et de physique de H. BOUASSE avaient cours au début de ce siècle. Ces ouvrages sont très intéressants par leurs longues préfaces où l'auteur règle son compte avec la société en général et ses collègues en particulier. On trouve entre autre une préface sur "*le professeur idéal* ", sur "*les savants* ". C'est de cette dernière qu'est extrait le texte ci-après :

[Cette] histoire défraya les séances de l'Académie des Sciences et la presse scientifique du monde entier pendant de longues années (1867- 1869); elle se termina par la confusion du géomètre CHASLES et la condamnation judiciaire d'un faussaire, VRAIN-LUCAS, qui avait dépouillé le géomètre de plus de 200 000 francs. CHASLES et l'Académie montrèrent en cette affaire une naïveté, une crédulité, un entêtement dont il est impossible d'avoir une idée complète sans lire les *Comptes Rendus*, et qui excusent son voleur. Vous connaissez cette caricature d'une femme montrant le poing à son mari et disant à bouche fermée : "*Ce serait offenser DIEU que de ne pas tromper cet homme-là !* ". Le faussaire devait en penser autant de ses victimes.

Vous connaissez aussi le proverbe : "*Si tu me trompes, tu as tort; si tu me trompes une seconde fois, nous avons tort; mais si tu me trompes trois fois, j'ai tort* ". Or ce n'est pas trois, c'est plusieurs centaines de fois que CHASLES se laissa berner, alors que dès le début de la mystification, FAUGÈRE démontra clair comme le jour que les lettres attribuées à PASCAL (les premières que CHASLES publia) étaient l'œuvre d'un faussaire.

Voici l'histoire.

Le 13 juillet 1867, CHASLES offre à l'Académie deux autographes de PASCAL sur l'attraction universelle. Vous supposez qu'avant toute discussion l'Académie ordonnera une expertise en écriture : pas du tout, on commence par discutailler (DUHAMEL, FAYE, CHEVREUL) sur les conséquences à tirer des documents mis au jour. Qu'à cela ne tienne : CHASLES n'est pas chiche d'autographes; sans plus tarder il jette sur le tapis 9 pages *in-quarto* petits caractères, de notes inédites. Tout de même quelques-uns commencent à douter : pour vaincre ces doutes, le 28 juillet 1867, CHASLES apporte une correspondance sensationnelle entre PASCAL et NEWTON. Dans cette même séance est donnée lecture d'une lettre de FAUGÈRE qui, depuis vingt ans, s'occupait de PASCAL et lisait ses manuscrits, déclarant que la signature mise au bas des lettres de PASCAL n'est pas celle de PASCAL, et qu'elles sont d'une autre écriture que la sienne. La comédie a duré quinze jours ...

Vous n'y êtes pas : elle durait encore deux ans après.

On vous a raconté la plaisante histoire de la dent d'or dont je ne sais quelle Académie discutait la croissance; après quinze ans de débats quelqu'un proposa de vérifier son existence, et l'on constata que jamais personne n'avait possédé dent naturelle de ce métal. Vous avez assurément protesté contre l'invraisemblance de ce conte : et vous aviez grandement tort, l'histoire de CHASLES et de l'Académie des Sciences est là pour le démontrer.

Ne m'inputez pas la moindre animosité contre cette Académie. Il est de notoriété que c'est non pas mon défaut de mérite qui m'empêche d'en être, mais simplement mon parfait mépris pour ces associations *fermées* ridicules, mépris affiché depuis longtemps pour ces cénacles *clos* d'admiration mutuelle. Je vous raconte cette histoire pour obtenir que l'Académie prise en corps devienne moins néfaste pour le pays. Mais comme vous n'êtes pas tenu de me croire sur parole, je prends dans les *Comptes Rendus de l'Académie* du 26 août 1867 quelques extraits d'une lettre de FAUGÈRE qui valent comme satire les meilleurs morceaux polémiques de PASCAL ou de BOILEAU.

Ce texte a été publié par l'Académie en personne.

"Les documents dont il s'agit étant donnés comme des originaux autographes, et cette qualité supposée étant le principal sinon le seul argument invoqué à l'appui de leur authenticité et de leur valeur, il me semble que la première chose à faire, et la plus essentielle, doit être une vérification d'écriture.

"A cet égard j'ose croire que l'on peut s'en rapporter au témoignage de quelqu'un qui a eu pendant quinze mois chez lui le manuscrit des *Pensées* de PASCAL et a passé la plus grande partie de ce temps à la déchiffrer et à l'étudier.

"A défaut de ce manuscrit, que chacun d'ailleurs peut consulter à la Bibliothèque impériale, j'ai mis sous les yeux des Membres de la Commission divers fragments également authentiques du grand écrivain, et particulièrement une signature mise en bas d'une quittance passée devant notaire. Je regrette que pressés par l'heure qui les appelait à la séance publique, ou ne se jugeant pas compétents pour une comparaison d'écriture, ils n'aient pas accordé au fait matériel, qui leur était soumis, toute l'attention qu'il comportait.

Ainsi, vous le voyez, on nomme une Commission qui est incompétente ou dont le seul désir est de ne rien savoir. Car vraiment, à juger par l'importance des séances de l'Académie, on peut sans grand dommage en manquer une, voire les manquer toutes; reste la question du jeton de présence, mais en service commandé on est tenu pour présent. Dans l'avenir, mon cher lecteur, n'oubliez pas ce qu'est une Commission de l'Académie des Sciences et le cas qu'on doit en faire !

"Comment Monsieur, vous blâmez ces illustres savants de leur circonspection ! Était-ce leur rôle de prendre parti ?"

Eh ! qui donc les forçait à prendre implicitement parti en acueillant les documents ?

Je poursuis.

"Cependant la vérification est ici d'autant plus facile, même pour les yeux les moins exercés, que le fabricateur de ces documents ne s'est pas astreint, ainsi qu'il arrive ordinairement, à contrefaire ou à imiter l'écriture de PASCAL. Agissant avec un sans-façon inouï, il s'est contenté de donner à son écriture un caractère plus ou moins ancien et d'employer une orthographe à peu près conforme à celle du temps de PASCAL. C'est ce qui explique comment il lui a été possible d'écrire un si grand nombre de lettres et de notes : ce n'était plus pour lui qu'une affaire d'imagination. Le faussaire a pris comme de raison du vieux papier, et c'était sans aucun doute pour lui la plus grande difficulté. Mais malgré toute son industrie il n'est pas parvenu à consommer, entre une encre nécessairement nouvelle et un papier ancien, cette combinaison que le temps seul peut produire. L'aspect de l'encre, tantôt fraîche encore, tantôt jaunie outre mesure par un procédé mal déguisé, suffirait seul à montrer la fraude."

Je regrette pour vous d'être contraint d'abréger. Ayant le texte sous les yeux, je vous assure que je ne m'embête pas.

Oyez ce détail.

"Il s'agit de l'une des Notes que PASCAL aurait envoyées à BOYLE en 1652. On donne, est-il dit dans cette note, *comme un effet de la vertu attractive la mousse qui flotte sur une tasse de café et qui se porte avec une précipitation très sensible vers les bords du vase...* Une pareille observation suppose que l'usage du café était déjà répandu en France du temps de PASCAL. Or ce ne fut qu'en 1669, c'est-à-dire sept ans environ après sa mort, que Soliman AGA, ambassadeur de Turquie auprès de Louis XIV, introduit dans la société parisienne l'usage du café."

Fausseté manifeste de l'écriture, faits postérieurs à la mort de l'écrivain supposé... il ne reste plus que l'examen du style. "Ici toute l'industrie du faussaire a échoué. Je laisse à nos voisins d'outre-Manche le soin de nous dire si NEWTON écrivait en français à un âge surtout où très probablement il n'avait guère écrit dans sa propre langue. Je m'en tiens aux lettres qui lui auraient été écrites par PASCAL. Voici par exemple comment il s'exprime dans celle qu'il aurait adressée le 20 mai 1654, à NEWTON qui n'avait qu'un peu plus de onze ans. *Je vous envoie divers problèmes afin d'exercer votre génie. Il ne faudrait pas cependant, mon jeune ami, fatiguer votre jeune imagination. Travaillez, étudiez; mais que cela se fasse avec modération... Je vous parle par expérience; car moi aussi dès ma jeunesse j'avait hâte d'apprendre, et rien ne pouvait arrêter ma jeune intelligence, si je puis ainsi parler. Je ne vous dis point cela, mon jeune ami, pour vous détourner de vos études, mais pour vous engager à étudier modérément. Les connaissances insensiblement et avec le temps* (sic). *Ce sont les plus stables...*

Ainsi, d'une part, PASCAL enverrait à un enfant des problèmes pour exercer son génie et lui imposerait la charge bien lourde de les examiner et de lui dire son sentiment, et d'une autre part il lui recommanderait d'étudier modérément. Comment reconnaître en cela la logique et le langage de l'auteur des *Provinciales*?

S'il est vrai que le style c'est l'homme, je croirais volontiers que celui qui a écrit ces lettres, loin d'être PASCAL, ne serait même pas de nationalité française.

Et je vous répète que l'affaire durait encore deux ans après !

Elle s'étale dans quatre volumes des *Comptes Rendus*, où elle occupe plus de cent pages grand *in-quarto* !

Pour comprendre qu'une telle bouffonnerie se soit prolongée, pour se convaincre de ceci : que LES SAVANTS SORTIS DE LEUR PETIT TRUC SONT ORDINAIREMENT D'UNE INCOMMENSURABLE BÊTISE, lisez la réplique de CHASLES du 2 septembre 1867, pièce capitale, pièce admirable, pièce qu'il faudrait transcrire en lettres d'or et coller sur les murs de la salle où l'Académie se rassemble !

Premier argument : *Je possède une caisse de documents, tous de la même origine. S'il en est un de faux, tous sont faux. Comment voulez-vous que je puisse l'admettre ?* Ça rappelle BARTHOLO chantant : "Croyez-vous qu'il soit si facile, De tromper un homme tel que moi !".

A quoi FAUGÈRE répliquait que la multitude des documents s'étayant les uns les autres et rassemblés miraculeusement dans la même main, se répondant et s'accordant ensemble comme des faux témoins qui se concertent pour accréditer le mensonge, vendus à la même personne par un homme dont on cache le nom, était la meilleure preuve de la fausseté du bloc tout entier.

Second argument : On buvait du café à Venise en 1615, à Marseille en 1654. PASCAL a-t-il dû attendre qu'il fût tout à fait à la mode pour faire son observation contestée? CHASLES aurait pu renforcer son argument en soutenant qu'on buvait du café bien antérieurement à la Mecque.

Troisième argument : Je ne puis sur la question de style avoir la prétention de suivre M. FAUGÈRE. Mais je suis persuadé que bien des littérateurs se feraient honneur d'avoir écrit les lettres que voici. Suivent de *nouveaux* documents. C'est décidément plus fort que de jouer au bouchon. On dit à un monsieur : "Telles lettres sont écrites par un goujat." Il répond : "Vous avez grandement tort, la preuve est qu'en voisi d'admirables !"

Quatrième argument : Vous dites que NEWTON n'a pas connu PASCAL. C'est une erreur : la preuve est une lettre *tirée de ma collection* (20 octobre 1727) qui dit exactement le contraire.

Autre part qu'à l'Institut, on aurait menacé l'orateur de l'enfermer à Sainte-Anne, dans la salle des paralytiques généraux : l'Académie approuva par son silence.

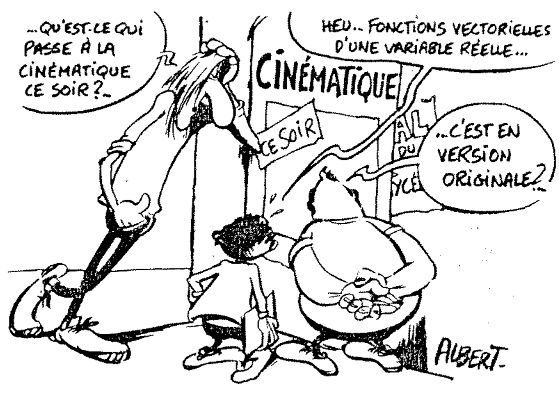
Je clos avec regret cette histoire que l'Académie voudrait bien qu'on effaçât de ses annales. La rappeler est cependant la seule manière de rendre l'Institut moins nuisible en mettant par le récit des sottises passées le public en garde contre les sottises futures.

HUMOUR & PASTICHES

Peut-on parler sérieusement de l'humour ?

Rien de plus sérieux que les mathématiques,
rien de plus humoristique que les mathématiques !

CHAPITRE IV



L'HUMOUR EN MATHÉMATIQUES

Jean LEFORT

En mathématiques, comme ailleurs, l'humour ce n'est pas nouveau et pourquoi le serait-il puisque l'humour apparaît dans toutes les cultures, sur tous les sujets. Ce qui peut paraître bizarre, c'est qu'on ait toujours tendance à associer les mathématiques à l'absence d'humour : "*Les mathématiques c'est sérieux*". Combien de fois entend-on ce genre de phrase dans la bouche d'élèves mais aussi de collègues ? Mais peut-être ces élèves sont-ils passés entre les mains de ces collègues !

a) En 1974 paraissait chez CEDIC un petit opuscule de 64 pages de $8 \times 13,5$ cm intitulé '*Math. marrantes*' par GILL. Vendu à un prix ridicule, il s'arrachait comme des petits pains à une récréation de 10 heures au congrès A.P.M.E.P. de la même année. 48 petits dessins qui ont fait rire les générations d'élèves auxquelles je les ai montrés. Dommage que, les programmes ayant changés, l'humour n'en soit plus perceptible par les lycéens actuels. Quel humoriste nous réactualisera cet ouvrage ?

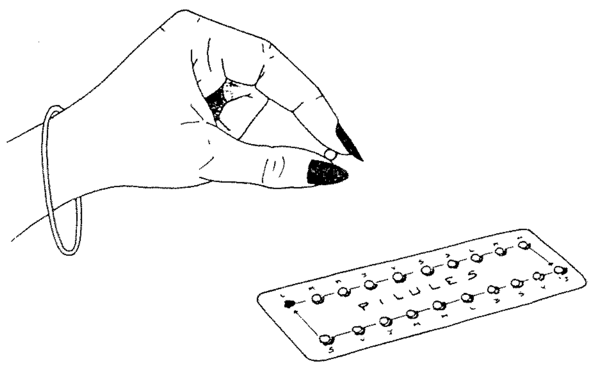


Figure 1
Elément neutre pour la multiplication

Ce faisant, GILL montrait qu'il avait été à bonne école puisque une des gloires de BOURBAKI c'est d'avoir proposé des termes français reposant sur le jeu de mots pour désigner certaines notions mathématiques : "*Un ensemble tonnelé est un ensemble borné, cerclé,...*". C'est donc un juste retour des choses que de prendre dans un sens courant un terme mathématique, de voir des coureurs cyclistes dans un groupe cyclique...

b) Mais l'humour ne se résume pas au détournement de vocabulaire. C'est LUCAS qui a inventé la belle légende relative au jeu : '*les tours de Hanoï*', légende qu'il faut lire plusieurs fois pour en saisir les anagrammes et les jeux de mots.

> *Le professeur N. Claus (de Siam), mandarin du collège Li Sou Stian, raconte qu'il a vu dans le grand temple de Bénarès, au dessus du dôme qui marque le centre du monde, trois aiguilles de diamant plantées dans une dalle d'airain, hautes d'une coudée et grosses comme le corps d'une abeille.*
> *Sur une des aiguilles, Dieu enfila, au commencement des siècles, soixante quatre disque d'or pur, le plus large reposant sur l'airain, de plus en plus étroits jusqu'au sommet. C'est la tour sacrée de Brahma. Nuit et jour, les prêtres se succèdent sur les marches de l'autel, occupés à transporter la tour de la première aiguille de diamant sur la troisième en ne déplaçant qu'un seul disque d'or à la fois et en veillant à ne jamais le poser sur un autre plus petit, selon les règles qui ont été imposées par Brahma. Quand tout sera fini, la tour et les brahmes tomberont et ce sera la fin du monde.*

Figure 2

Cet humour là n'est-il pas frère de la pédagogie, permettant de susciter l'intérêt des élèves pour autre chose qu'une n^{ième} étude de fonction, ou, plus subtile, pour justement une n^{ième} étude de fonction! C'est bien ce qu'ont compris les initiateurs de rallye qui recherchent toujours une rédaction captivante des énoncés tels que celui de QUICK et FLUPKE de l'an passé.

c) On peut aller plus loin en montant de toute pièce une fausse démonstration. On en trouvera en annexe quelques unes et on en rencontre maintenant de plus en plus dans les livres de cours ou d'exercices. Sans doute est-ce très pédagogique d'essayer de faire trouver l'erreur manifeste. Mais ça l'est encore plus que de lui montrer que de très grands mathématiciens ont commis de graves erreurs et comment, eux ou leurs collègues, s'en sont rendus compte (voir l'article "*Pour grands que soient les rois...* ").

d) Prenons garde de ne pas récupérer l'humour pour en faire une matière d'étude sérieuse! Il est plaisant de voir les éditeurs utiliser les talents de dessinateurs pour illustrer leurs ouvrages de gags humoristiques :

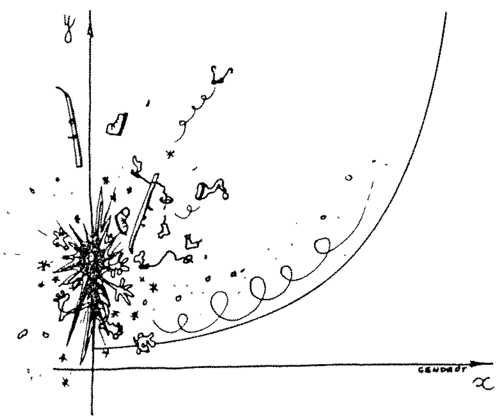
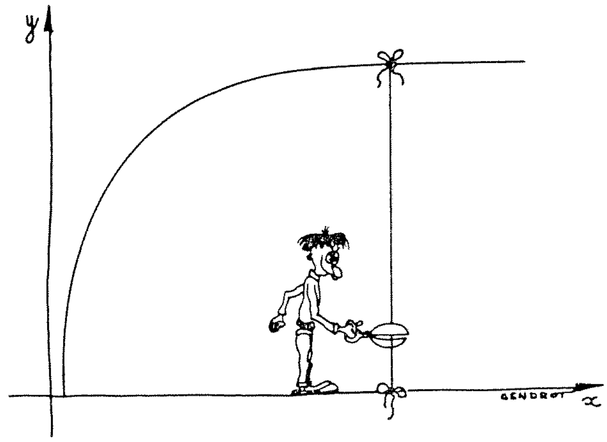


Figure 3



Cela devient vite un argument de vente; j'avoue être très sensible à cette publicité!

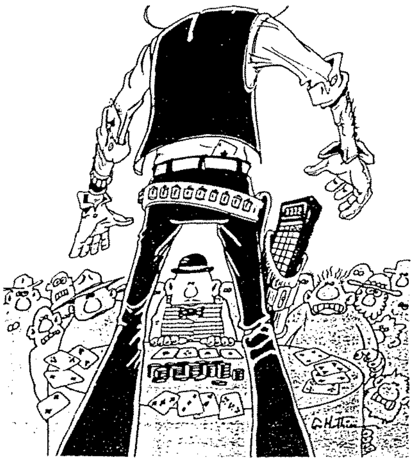


Figure 4
Cours de probabilités et de statistiques
Christian Lebœuf - Jean-Louis Roque - Jean Guégand

Quel progrès depuis '*Mathématiques pour l'élève professeur*' de G. GLAESER. Mais en 1971 notre collègue était un pionnier :

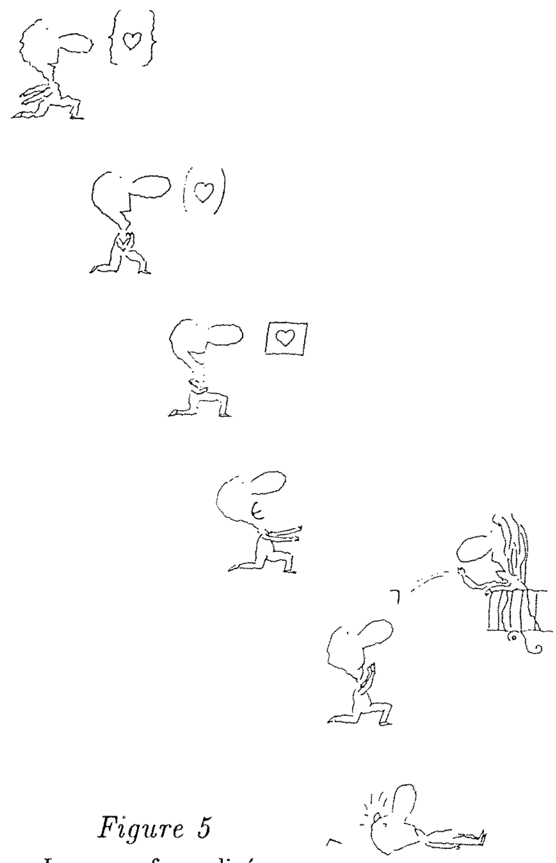


Figure 5
Langage formalisé.

et il a fallu tout le talent de DESCLOSEAUX pour faire accepter ces illustrations. Et pourtant vers la même époque (dès Janvier 1970) dans l'"*American Scientist*", Sidney HARRIS réfléchissait aussi à sa manière sur le symbolisme du langage :

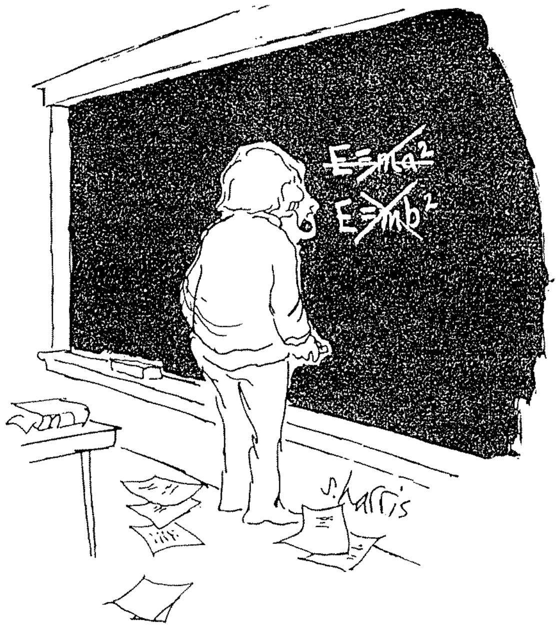


Figure 6

e) Il n'est pas mauvais de ne pas s'oublier comme sujet d'humour en tant qu'enseignant ou chercheur. Quand le noceur rentre tard, il a un tas d'excuses à présenter à sa femme, mais quand le noceur est matheux quoi de plus facile que d'inventer un calcul idiot !

Figure 7
Excuse mon retard; j'ai dû calculer 5000 décimales de π.

et à l'inverse, quelle charge humoristique que de présenter deux vieilles mémées avec leur cabas dans un quartier délabré, discutant de convergence de séries et d'intégrales de la façon la plus rigoureuse qui soit pendant deux pages et qui finissent par résoudre $3x = x$ en $3 = 1$, ce qui les conduit à un "*aujourd'hui, tout fout le camp*".

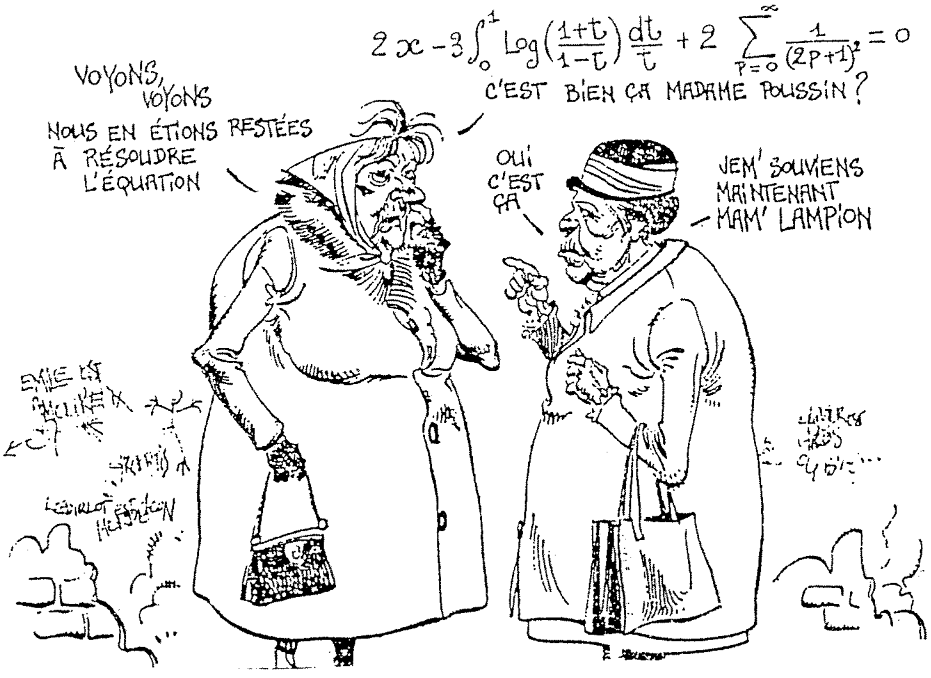


Figure 8

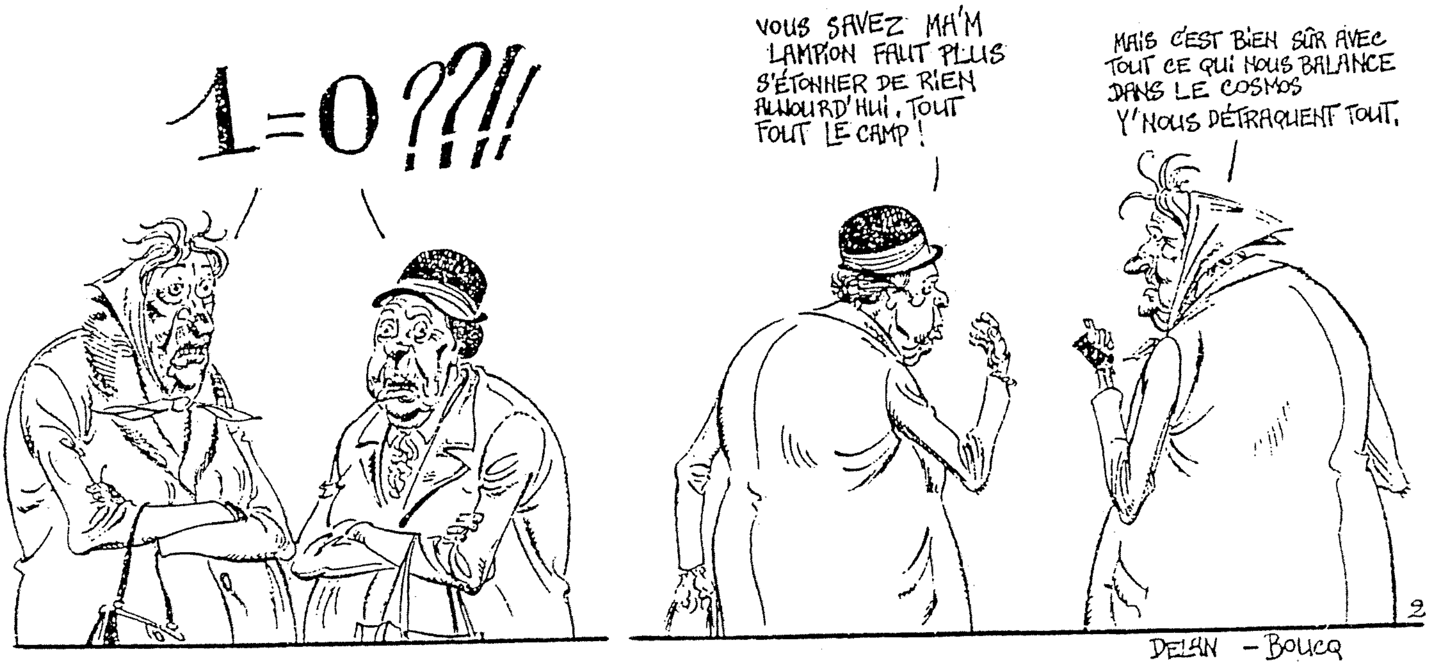


Figure 9

f) Humour encore quand on présente une démonstration presque juste, un résultat presque faux ou un théorème paradoxal... ?

$\star$ $\epsilon^{\pi\sqrt{163}} \in \mathbb{N}$ est presque juste. C'est un bon exercice d'informatique que de chercher une approximation précise de ce réel de l'ordre de $2,625\ 10^{17}$. Mais quelle certitude avoir quand on trouve :

$$262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743,\ 999\ldots$$

ou

$$262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 744,\ 000\ldots$$

et il faut pousser toujours plus loin l'approximation. Et si c'était un entier? Les lecteurs savants connaissent le théorème de GELFOND qui permet de démontrer que $\epsilon^{\pi\sqrt{163}}$ est transcendant. Mais c'est quand même curieux et on peut s'étonner de la coïncidence :

$$262\ 537\ 412\ 640\ 768\ 743,\ 999\ 999\ 999\ 999\ 250\ldots$$

C'est presque un entier !

$\star$ $\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}} = \sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$ est juste. Si, si ! Mais quelle certitude a-t-on à l'aide d'un calcul à la machine? Et quelle méthode directe utiliser pour la démonstration d'autant plus que c'est une question toujours ouverte de connaître *a priori* le degré d'un nombre algébrique?

$\star$ $\sqrt{1141\ t^2+1}$ peut être entier pour $t \in \mathbb{N}^*$ est presque faux. Combien de temps faut-il à un ordinateur pour explorer toutes les valeurs de t jusqu'à 3×10^{25} ? Bien sûr, le lecteur savant a entendu parler des équations de FERMAT-PELL et sait que :

$$1141\ t^2+1 = x^2$$

a une infinité de solutions entières non triviales. Mais ici, la première est :

$$t = 30\ 693\ 385\ 322\ 765\ 657\ 197\ 397\ 208 \quad \text{ouf !}$$

Quiconque douterait de ce qui précède doit penser à APÉRY démontrant l'irrationnalité de $\zeta\ (3)$ aux journées arithmétiques de Luminy en 1978. Sa démonstration était-elle presque juste ou presque fausse?

⋆⋆⋆

Finalement l'humour apparaît à tous les détours d'une vie d'enseignant ou de chercheur de mathématiques. Quelqu'un en douterait-il? Qu'il lise cette '*tranche de vie*' donnée en annexe et qui accumule des situations comiques. Bien sûr, toute ressemblance avec des collègues est pure coïncidence !

UNE TRANCHE DE VIE

N.D.L.R. : Nous remercions '*Pour la Science*' d'avoir bien voulu nous autoriser à reproduire le texte ci-après paru en avril 1982. Nous signalons que '*Pour la Science*' publie régulièrement des articles sur les mathématiques et que la Société Mathématique de France à décerné à cette revue le Prix d'Alembert en 1986 pour sa contribution à la diffusion de la pensée mathématique en France.

Théo : Mon problème de recherche est dans une impasse.

Cantorbaki : Lequel? Celui sur les nombres premiers mon petit Théo?

Théo : Oui... Je suis en train de le démontrer pour chaque nombre premier en utilisant l'article de RAMDY et HARAMANUJAN...

Cantorbaki : Vous voulez dire *La liste complète de tous les nombres premiers. Journal de l'infini*, volume 173 et suivant?

Théo : Oui : Mais ils n'ont publié juqu'à présent que les nombres premiers pairs !

Cantorbaki : J'ai reçu une lettre d'HARAMANUJAN il y a quelques semaines. Il disait qu'ils avaient bien commencé avec 2, qui est premier naturellement, et qu'ils avaient décidé d'étudier tous les nombres premiers pairs. Il dit qu'ils ont été jusqu'à 1 355 579 014 264 890 988 mais n'ont pas trouvé d'autres premiers pairs !

Théo : Peut-être n'y a-t-il pas d'autres nombres premiers pairs?

Cantorbaki : Mais que faites-vous du théorème de DIRICHLET,— vous savez celui qui dit qu'il y a une infinité de nombres premiers dans n'importe quelle progression arithmétique? Les nombres pairs ne forment-ils pas une progression arithmétique?

Théo : Je le pense. J'ai oublié la plupart de ce que j'ai appris à l'école. C'est très troublant.

Cantorbaki : DIRICHLET a peut-être fait une erreur?

Théo : Cela semble peu probable. Peut-être pourrions-nous démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers pairs?

Cantorbaki : Vous voulez dire en modifiant la démonstration d'EUCLIDE pour les nombres premiers quelconques?

Théo : Exactement. Travaillons seulement avec les nombres premiers pairs et voyons ce qui se passe. Supposons qu'il y en a un nombre fini.

Cantorbaki : On en connaît déjà un : 2.

Théo : Donc supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de nombres premiers pairs plus grands que 2. Disons $p_1 \dots p_n$. Et maintenant? EUCLIDE forme le nombre

$p = p_1p_2 \dots p_n + 1$, etc.

Cantorbaki : Cela ne marche pas : il est impair.

Théo : C'est foutu...

Cantorbaki : Non ! Pourquoi ne poserait-on pas $P = p_1p_2 \dots p_n + 2$?

Théo : OK. Alors P est pair et il doit être divisible par quelque nombre pair, disons q. Et q ne peut être aucun des p_1 car ils donnent 2 lorsqu'on divise P par ceux-ci...

Cantorbaki : ...et q ne peut être 2 car si 2 divise P alors il divise aussi p_1 ... qui est premier et plus grand que 2.

Théo : Par conséquent q est un nombre premier pair différent de 2, $p_1, \dots p_n$ ...

Cantorbaki : ...contrairement à l'hypothèse. Il doit donc exister une infinité de nombres premiers pairs.

Théo : Je pense que cela marche. DIRICHLET avait raison après tout.

Cantorbaki : Je vais en parler à André...

Théo : J'aimerais tant qu'il m'aide dans mon vrai problème.

Cantorbaki : Quel est votre vrai problème?

Théo : Euh...bon, je pense que ma petite amie est...

Cantorbaki : Non; votre problème de recherche.

Théo : Ah oui. C'est une espèce de réciproque de la conjecture de GOLDBACH.

Cantorbaki : Vous voulez dire : "*que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*"?

Théo : Oui. Je veux démontrer que tout nombre premier est la somme de deux nombres pairs. Vous voyez si je peux le démontrer, alors...

Cantorbaki : C'est sûrement faux? Que faites-vous de 3? Si 3 est la somme de deux nombres pairs alors l'un est 2...donc l'autre est 1. Et 1 est impair.

Théo : Voilà où je bute...

Cantorbaki : Vous avez besoin d'autres hypothèses. Pourquoi ne pas supposer que vos nombres premiers sont pairs?

Théo : J'y ai pensé. Mais supposons que l'on prenne un nombre premier pair et supposons que $q = x + y$ avec x et y pairs, disons $x = 2u$ et $y = 2v$. Alors $q = 2(u + v)$, donc 2 divise q. Mais q est premier : contradiction !

Cantorbaki : Donc votre hypothèse est réfutée pour les nombres premiers pairs.

Théo : Vraiment? Je n'en suis pas si sûr...

Cantorbaki : Cela signifie qu'il vous suffit d'étudier les nombres premiers impairs.

Théo : Mais je ne peux attendre RAMDY et HARAMANUJAN pour les avoir...

Cantorbaki : Bien. Mais vous l'avez établi pour la moitié des cas possibles.

Théo : Plus trois que vous avez fait.

Cantorbaki : Alors écrivez et publiez. De cette façon si vous réussissez à démontrer le théorème avec les nombres impairs, cela vous fera deux articles. De nos jours avec cinq articles et vous êtes maître-assistant, 15 articles, maître de conférence.

Théo : Attendez, attendez. Quand dans notre démonstration, avons-nous fait l'hypothèse que q est pair?

Cantorbaki : Où nous avons - non - nous ne l'avons pas fait. La même démonstration marche aussi pour les premiers impairs !

Théo : Je le vois maintenant. Réfutation de la réciproque de la conjecture de GOLDBACH par Théo.

Cantorbaki : et CANTORBAKI.

Théo : Oui. On pourrait le publier dans les Compte-Rendus

Cantorbaki : Le Bulletin

Théo : Le Journal...

Cantorbaki : Les Annales...

Théo : Quelles références !

Cantorbaki : Du calme ! du calme... Je dois en parler à Pierre.

Théo : On pourrait le présenter au congrès international, on aurait peut-être une médaille Field.

Cantorbaki : Deux médailles Field.

Théo : Je serais immédiatement professeur et alors je roulerais sur l'or.

Cantorbaki : Vraiment?

Théo : Et je n'aurais même pas à écrire 31 thèses...

Cantorbaki : J'aurais un poste permanent à Princeton.

Théo : Comme André?

Cantorbaki : J'irais à Paris avec un emploi du temps chargé, déjeuner à la Sorbonne, dîner à l'Institut. Je pourrais même peut-être rencontrer BOURBAKI ! Oui ! Oui ! (il s'arrête soudainement soucieux). Attendez une minute. Et 2 !

Théo : 2?

Cantorbaki : 2.

Théo : Qu'y a-t-il? Allez! Allez !

Cantorbaki : $2 = 0 + 2$.

Théo : Génial !

Cantorbaki : 2 est premier. 0 et 2 sont pairs.

Théo : Ah malheur ! ...

BROCHURE A.P.M.E.P.

ELEM – MATH. IX
Aides pédagogiques pour le cycle moyen.
Situations problèmes
Brochure n° 64
60 F (70,90 F si envoi postal)

Avant-propos 5

CHAPITRE I : ÉTUDE GÉNÉRALE

1. Evolution de la place du problème dans l'enseignement des mathématiques 7
2. Du problème à la situation-problème 18
3. Etude d'un problème classique 24
4. Problèmes et pratiques pédagogiques 31

CHAPITRE II : CHRONIQUES DÉTAILLÉES

1. Annuaire téléphonique 37
2. La course au trésor 46
3. Industrialisation 54
4. Fiche horaire S.N.C.F. 59
5. Commande de jouets 70
6. Centre de calcul 73
7. Agrandissement de puzzle 80
8. Jeu des guides et des voyageurs 83

CHAPITRE III : BANQUE D'IDÉES

1. Quelques indications pour préparer une activité problème 89
2. Créer un environnement mathématique dans l'école 90
3. Des idées 91

CHAPITRE IV : ÉPREUVE D'ÉVALUATION

1. Mise en garde 129
2. A titre d'exemple 131

CHAPITRE V : BIBLIOGRAPHIE ET ANNEXES

1. Bibliographie 145
2. Annexes 146

Brochure A.P.M.E.P. disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.. Veuillez établir votre chèque à l'ordre de la Régionale A.P.M. de Strasbourg. D'autres documents sont en vente, renseignez-vous.

ESPACES ETHYLIQUES

M. Hoquet

I.— STRUCTURES TONNELEES.

Définition I-1 : On appelle *tonneau ouvert* tout sous-ensemble convexe, équilibré, absorbant et ouvert d'un espace vectoriel topologique localement compact (e.v.t.l.c.)
Définition I-2 : On appelle *tonneau* tout sous-ensemble convexe, équilibré, absorbant et fermé d'un e.v.t.l.c.
Définition I-3 : On appelle *bonde* la fermeture d'un tonneau.
Définition I-4 : On appelle *espace bondé* un e.v.t.l.c. dans lequel tout tonneau est partout dense.
Définition I-5 : On appelle *espace pinté* un e.v.t.l.c. dans lequel tout tonneau est vide.
Théorème I-1 : Dans un espace bondé, tout tonneau est l'espace lui-même.
Théorème I-2 : Dans un espace pinté, toutes les bondes sont ouvertes, donc vides.
Définition I-6 : On appelle *espace tonnelé* un e.v.t.l.c. dans lequel tout tonneau est voisinage de zéro.

II.— FONCTIONS TITUBANTES.

Définition II-1 : On appelle *titubation* d'une fonction [notation : tit(f)] le cardinal de l'ensemble des tonneaux d'image vide.
Définition II-2 : On appelle *fonction titubante* une fonction qui transforme au moins un tonneau en un tonneau vide.
Théorème II-1 : Pour qu'une fonction soit titubante, il faut et il suffit que sa titubation ne soit pas nulle.
Définition II-3 : On appelle *fonction ivre morte* une fonction dont la titubation est infinie.
Théorème II-2 : Toute fonction d'un espace tonnelé dans un espace pinté est ivre morte.

Il existe des fonctions qui transforment tout tonneau en un tonneau dont la fermeture est ouverte, mais qui ne sont pas ivres mortes.
Ex. : Il n'existe pas de fonctions titubantes (*a fortiori* ivres mortes) d'un espace quelconque dans un espace bondé.

III.— TOPOLOGIE ALCOOLIQUE.

Les fonctions considérées dans la suite seront des fonctions définies sur un espace tonnelé et à valeurs dans ce même espace. Le lecteur vérifiera aisément que la fonction $p(x,y)$, définie par $p(x,y) = tit(x) - tit(y)$ (x et y étant des fonctions définies précédemment) définit un écart sur l'ensemble de ces fonctions.

La topologie faible associée à cet écart est dite *alcoolique*.
Théorème III-1 : Toute suite de fonctions de titubation strictement croissante converge vers une fonction ivre morte.
Théorème III-2 : Toute famille infinie de fonctions admet au moins un point d'accumulation.
Définition III-1 : Deux fonctions sont dites *également cannées* ou *équicannées* si elle ont même titubation (autrement dit leur écart est nul).
— On vérifiera que c'est une relation d'équivalence, compatible avec la structure d'espace vectoriel. Une classe d'équivalence est appelée *degré alcoolique*. Par abus de langage, on parlera de degré alcoolique d'une fonction.
— L'écart $p(x, y)$ définit sur l'ensemble des degrés alcooliques un autre écart, noté (x, y), dont la restriction à l'ensemble des degrés alcooliques des fonctions non ivres mortes est une distance.

$$A^\circ = \{f^\circ / f \in \ (\mathrm{Et},\ \mathrm{Et}'); \mathrm{tit}(f)\ \mathrm{fini}^{\circ\circ}\} A - \text{éthylique.}$$

Théorème III-3 : Aucune suite de degrés alcooliques strictement croissante ne converge vers un point de A°.
Théorème III-4 : L'ensemble A° est canoniquement isomorphe à N.

IV.— ALCOOTEST

Définition IV-1 : On appelle "*alcootest*" d'une famille de fonctions

$$\mathrm{Alc}(f_i) = \ \mathrm{Sup}[\mathrm{tit}\ (f_i)].$$

Théorème IV-1 : On démontre l'inégalité fondamentale suivante :

$$\mathrm{Alc}\ (f_i) > \ \mathrm{tit}\ [\mathrm{Sup}\ (f_i)] > \ \inf\ [\mathrm{tit}\ (f_i)].$$

Indication
L'intersection de deux tonneaux est un tonneau.
Pour plus de détais, voir BOURBAKHIC, livre III, tome 15, chapitre 246,372.
Théorème IV.2 : Toute famille finie d'alcootest infini contient au moins une fonction ivre morte.
Théorème IV-3 : Toute famille dénombrable d'alcootest égale à π_1 contient une infinité dénombrable de fonctions ivres mortes.

LES FAUSSES DÉMONSTRATIONS

Jean LEFORT

1) 3=0

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2+x+1=0$.
Multiplions par x ; comme $x=0$ n'est pas solution, il y a équivalence :

$$x^3+x^2+x=0.$$

Retranchons membre à membre les deux égalités :

$$x^3-1=0$$

soit $$x^3=1$$

équivalent à $$x=1$$

et en reportant dans l'équation initiale il vient : $3=0$!

Moralité : Tu ne diviseras pas par zéro ! (car ce n'est pas par x que l'on a multiplié mais, de façon détournée, par $x-1$).

2) Un angle droit est égal à un angle obtu

La figure ci-après est construite de la façon suivante :

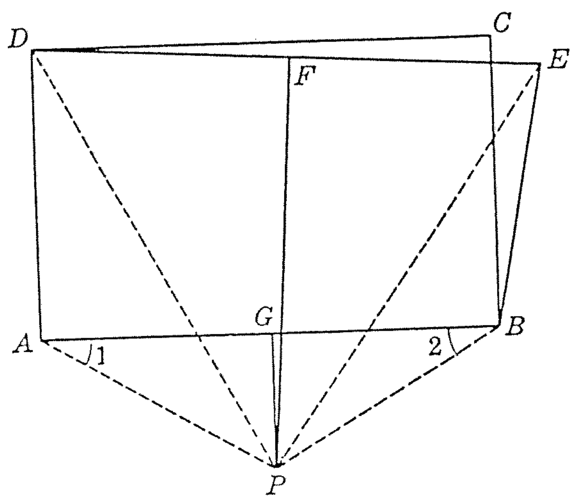


Figure a

$ABCD$ est un rectangle; $BE = BC = AD$ et E est à l'extérieur du rectangle. Les médiatrices FP de $[DE]$ et GP de $[AB]$ se coupent en P.

On a alors les résultats suivants :
$PD = PE$; $PA = PB$; l'angle en 1 vaut l'angle en 2; les triangles PAD et PBE sont isométriques; $\widehat{PAD} = \widehat{PBE}$; $\widehat{DAB} = \widehat{ABE}$ ce qui traduit bien qu'un angle droit vaut un angle obtu !

Moralité : Qui prétend raisonner juste sur une figure fausse? (En fait P est très très loin et les triangles PAD et PBE se correspondent par une rotation.)

3) La mixité n'existe pas

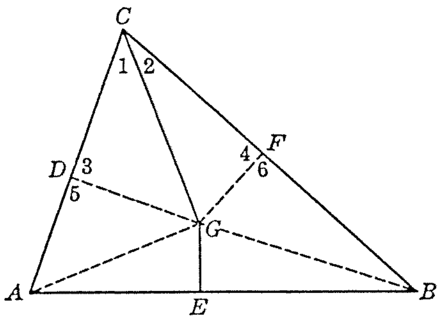
Dans une classe de n élèves, il n'y a que des filles ou que des garçons !

$\star$ Cela est manifestement vrai pour $n = 1$.
A qui dit que c'est faux car il n'a jamais vu une classe de 1 élève, je dis que l'absence de preuve n'est pas une preuve !

$\star$ Supposons le résultat vrai pour n élèves et prenons une classe de $n+1$ élèves. Les n premiers (par ordre alphabétique) sont du même sexe en raison de l'hypothèse de récurrence. Les derniers aussi et comme ces deux sous-ensembles sont d'intersection non vide, tous les élèves de la classe ont le même sexe !

Moralité : Qui croit qu'une récurrence commence toujours à 0 ou à 1? (C'est évidemment au passage de 1 à 2 que la démonstration faute !)

4) Tous les triangles sont isocèles



La figure ci-contre représente un triangle ABC, la bissectrice CG de $\widehat{C}$ et la médiatrice EG de $|AB|$ qui se coupent en G. D est la projection de G sur (AC) et F celle de G sur (BC).

Figure b

On a alors les résultats suivants :
$GA = GB$ car G est sur la médiatrice de $[AB]$; $GD = GF$ car G est sur la bissectrice de $\widehat{C}$; $\widehat{D}$ et $\widehat{F}$ sont des angles droits; GAD et GBF sont des triangles isométriques puisque triangles rectangles ayant deux côtés égaux : $\widehat{GAD} = \widehat{GBF}$; $\widehat{GAE} = \widehat{GBE}$ et finalement $\widehat{A} = \widehat{B}$; le triangle ABC ayant ses angles à la base égaux, il est isocèle !

Quelqu'un me dit que la figure est fausse. Admettons et regardons tous les autres cas de figures.

G sur AB	G extérieur à ABC G proche de (AB)	G extérieur à ABC G loin de (AB)

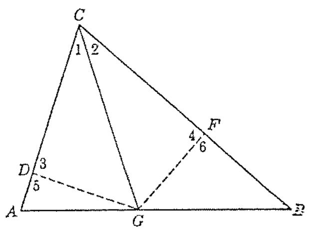


Figure c

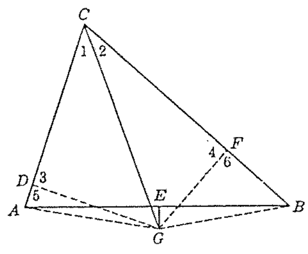


Figure d

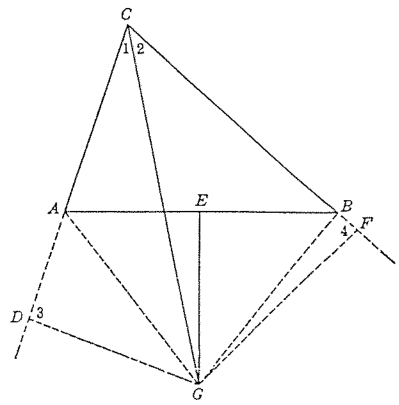


Figure e

Dans tous les cas la démonstration précédente s'applique mot pour mot !

Moralité : Quand il y a beaucoup de cas, on risque d'en oublier ! (G est extérieur au triangle mais des points F et D, l'un est sur le segment côté et l'autre non !)

APPROCHONS π AVEC UNE ERREUR DE 1/40 000 000 000

Yves PIRAT

N.D.L.R. : Il est toujours possible de construire à la règle et au compas une approximation aussi bonne que l'on veut d'un réel, π par exemple. La précision devient vite illusoire dès que le nombre de reports d'instrument s'élève. (Il n'est pas si évident que ça de construire effectivement un hexagone régulier!) Il est par contre intéressant de concevoir une construction raisonnable en temps et en dimension. En ce sens le travail de M. PIRAT est original et peut donner des idées d'application en classe.

L'affaire est claire et sans appel : la quadrature parfaite du cercle est impossible à réaliser, et tenter d'apporter du nouveau dans ce domaine ne présente plus aucun intérêt... si l'on en croit les mathématiciens de haut vol!

Mais il en faut davantage pour décourager les chercheurs amateurs!

Elaborer une formule d'approximation n'est pas un exploit si j'en juge par la facilité avec laquelle j'ai découvert les suivantes (et bien d'autres dont je vous fais grâce) :
— avec une faible erreur sur la 9^{e} décimale : $\sqrt{10} - \frac{76,7}{3708}$; $\sqrt{5} + 1 - \frac{821}{8690,1}$;
— avec une faible erreur sur la 8^{e} décimale : $4\sqrt{5} - 4\sqrt{2} - \frac{0,5833}{4}$; $2\sqrt{5} - 1 - \frac{41,979}{127}$.

Mais l'élaboration d'une formule relativement simple donnant une valeur π' très approchée de π (avec 10 décimales justes) et menant à une construction géométrique facile, relève du casse-tête! Je ne vous imposerai donc pas la lecture de la genèse de cette découverte :

$$\pi' = \sqrt{40} - \frac{9,548888}{3} = 3,1415926536701 \cong \pi - 0,0000000000804$$

c'est-à-dire avec une erreur relative de 1/40 000 000 000 qui bat à plate couture le 1/30 000 000 cité par WARUSFEL. Pour donner une idée plus concrète de cette précision, je vous signale que si cette formule était utilisée pour carrer le cercle moyen de la Terre (diamètre : 12 730 km), l'erreur absolue avoisinerait 1 mm sur le périmètre et 32 ares sur la superficie. Ce qui est vraiment peu, on en conviendra.

Mise à part cette précision, la construction que je propose est d'autant plus intéressante qu'elle détermine deux lieux géométriques originaux. En effet, après avoir construit la formule à partir d'un cercle quelconque (C), vous pourrez obtenir en quelques secondes le carré correspondant à n'importe quel autre cercle, et inversement. Ce qui fournit un immense avantage sur toutes les formules de π utilisées dans l'industrie!

QUELQUES EXPLICATIONS

Remarque préliminaire

On remarque que l'on peut écrire :

$$\pi' = \sqrt{40} - \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) - \frac{2,19 \times 5,23}{12,5}.$$

Graphiquement, on notera

$$\text{PI} = \frac{5}{3} + \frac{3}{5} \quad ; \quad \text{IA} = \frac{2,19 \times 5,23}{12,5} \quad \text{PA} = \frac{9,548888}{3}.$$

Problème à résoudre

Après avoir tracé un cercle (C) quelconque, **dont le rayon R servira d'UNITÉ dans tout ce qui suit**, il faudra construire $OP(= OA - PA)$ qui égale $\pi' R$, c'est-à-dire voisin de la moitié de la circonférence de (C). Il suffira de partager OP en 2 pour obtenir $OP/2$ côté du carré correspondant, **en périmètre**, au cercle (C). Puis il faudra construire $OS = R\sqrt{\pi'}$ côté du carré correspondant, **en superficie**, au cercle (C). Dans toutes ces constructions, fort simples comme vous le remarquerez, les proportions ne seront pas respectées pour des raisons évidentes de place.

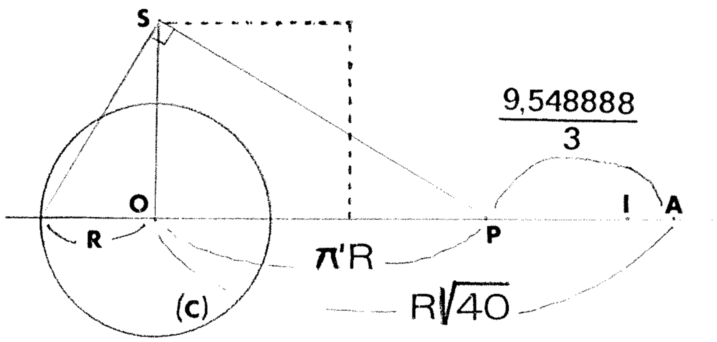


Figure 1

La figure 1 montre la situation à laquelle il faut aboutir. J'ai conservé exceptionnellement l'unité R, que l'on ne retrouvera plus dans les figures suivantes.

Pour parvenir à la figure 1, nous allons construire successivement les divers éléments qui interviennent dans la formule.
Si l'affaire est simple, puisqu'elle ne fait appel qu'à des connaissances scolaires (PYTHAGORE et surtout THALÈS), elle sera un peu longue, mais cela se justifie par la précision à laquelle il faut aboutir.

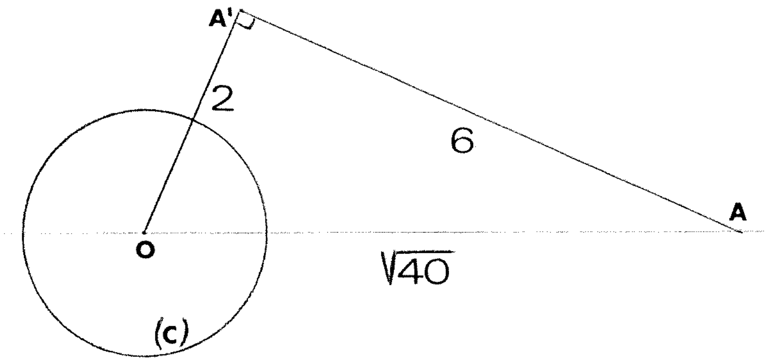


Figure 2
Construction de $OA = \sqrt{40}$ sur une droite quelconque passant par le centre O du cercle (C).

Il suffit de construire le triangle $OA'A$, rectangle en A'. A noter que 2 égale en fait $2R, 6 = 6R, \sqrt{40} = R\sqrt{40}$.

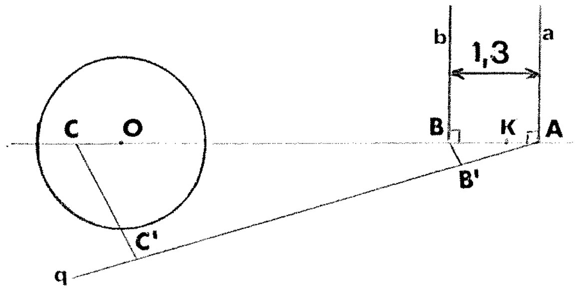


Figure 3
Construction d'un élément dont nous aurons besoin dans la suite.

Tracer Aq quelconque. Placer les points B', C' et C tel que $AB' = 1$, $AC' = 5$, $AC = 6,5$. La relation $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} donne AB = 1,3$. Placer K tel que $BK = 1$. Mener, en A et B les perpendiculaires (Aa) et (Bb) à OA.

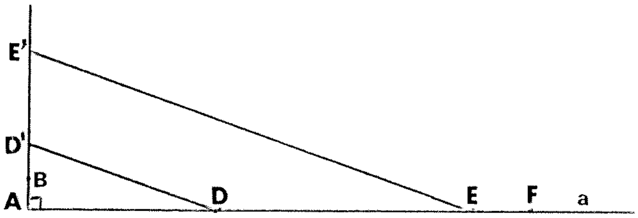


Figure 4
Construction de $AF = 2,19$

Placer E', D' et E tel que $AE' = 5, BD' = 1, AE = 1,5$. La relation $\frac{AD}{AE} = \frac{AD'}{AE'}$ donne $AD = 0,69$. Placer F tel que $DF = 1,5$ donne $AF = 2,19$.

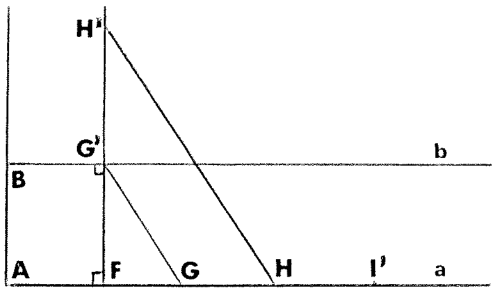


Figure 5

Construction de $AI = 5,23$

Mener, en F, la perpendiculaire Ff à Aa, qui coupe Bb en G'. Placer les points H et H' tels que $FH = 2$ et $FH' = 2,5$. La relation $\frac{FG}{FH} = \frac{FG'}{FH'}$ donne $FG = 1,04$. Placer I' tel que $GI' = 2$ et $FI' = 3,04$. Donc $AI' = 2,19 + 3,04 = 5,23$.

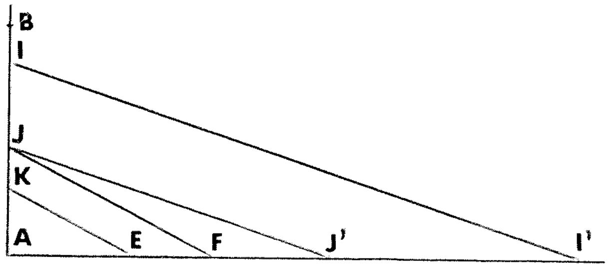


Figure 6

Construction de $AI = 2,19/5 \times 5,23/2,5 = 13,74444/15$

Placer J' tel que $AJ' = 2,5$. La relation $\frac{AJ}{AK} = \frac{AF}{AE}$ donne $AJ = 2,19/5$. La relation $\frac{AI}{AJ} = \frac{AI'}{AJ'}$ donne $AI = AJ \times \frac{AI'}{AJ'}$ d'où $AI = 2,19/5 \times 5,23/2,5$.

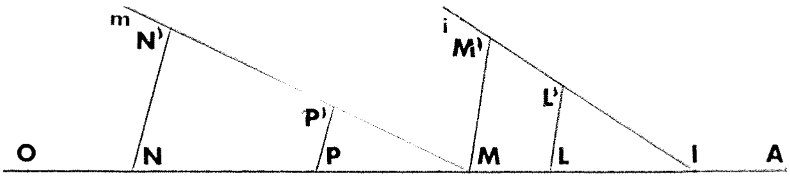


Figure 7

Construction de $IP = 34/15$

Tracer Ii quelconque. Placer L, M' et L' tels que $IL = 1, IM' = 5, IL' = 3$. La relation $\frac{IM}{IL} = \frac{IM'}{IL'}$ donne $IM = 5/3$. Tracer Mm quelconque. Placer N, P' et N' tels que $MN = 1, MP' = 3, MN' = 5$. La relation $\frac{MP}{MN} = \frac{MP'}{MN'}$ donne 3/5. Donc $IP = 34/15$.

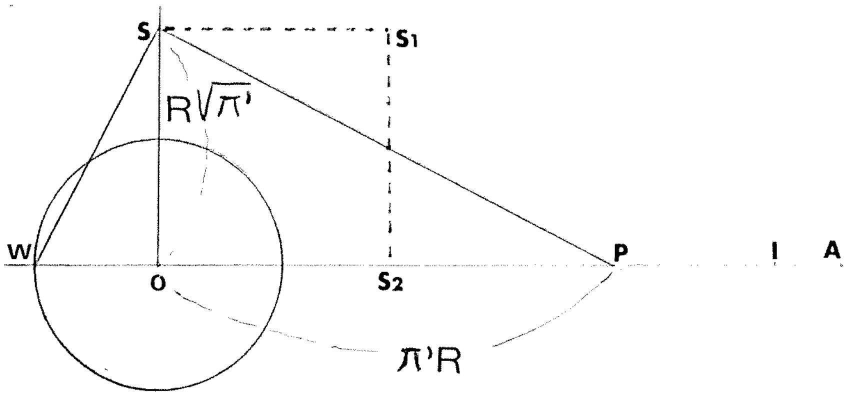


Figure 8

Après avoir construit $OS = R\sqrt{\pi'}$, nous serons parvenus à la figure 1

Nous savons que $OA - AP = OP = \pi' R$. Donc $OP/2$ est le côté du carré correspondant, **en périmètre**, au cercle (C). Construire le triangle WSP, rectangle en S. Comme $WD = 1$, la hauteur $OS = R\sqrt{\pi'}$ est le côté du carré OSS_1S_2 correspondant, **en superficie**, au cercle. En effet : Superficie de $(C) = \pi R^2$; superficie du carré $= \pi' R^2$.

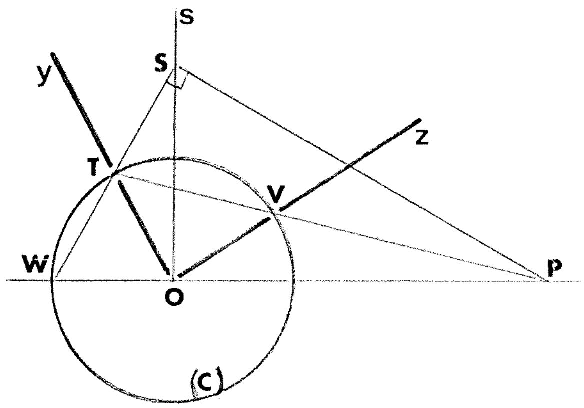


Figure 9

Construction des lieux géométriques qui permettent
de trouver immédiatement les côtés des deux carrés correspondant
à un cercle quelconque, et inversement.

WS coupe le cercle (C) en T. TP coupe le cercle (C) en V. La demi-droite Oy (OT prolongé) est le lieu géométrique des points T. La demi-droite Oz (OV prolongé) est le lieu géométrique des points V.

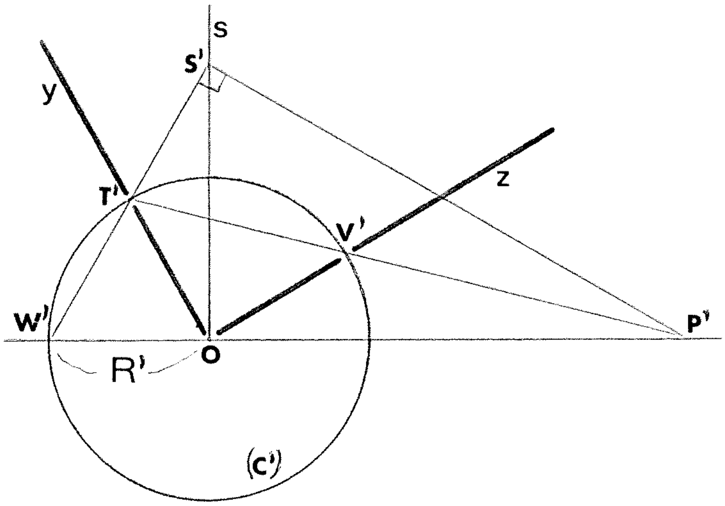


Figure 10

Utilisation des lieux géométriques

Soit un cercle quelconque (C') de rayon R' que Oy et Oz coupent respectivement en T' et V'. Le prolongement de $W'T'$ coupe Os en S'. $OS' = R'\sqrt{\pi'}$. $T'V'$ prolongé coupe OA en P_1. $OP_1 = \pi' R' = 1/2$ circonférence de (C'). A noter que P_1 peut être déterminé autrement : soit en construisant le triangle $W'S'P_1$, rectangle en S', soit en construisant $S'P_1$ parallèle à SP. On comprend dès lors facilement que l'on peut effectuer l'opération inverse : obtenir instantanément le cercle correspondant à un carré donné.

UN BEAU SPECTACLE ARITHMÉTIQUE

Georges GLAESER

On entend souvent dire qu'une Exposition Mathématique porte essentiellement sur des thèmes géométriques et historiques : on y présente surtout des stands consacrés à de **belles figures** (comme celles que l'on trouve dans "*Anschauliche Geometrie*" de David HILBERT et S. Cohn VOSSEN; traduit en anglais sous le titre "*Geometry and the imagination*").

Parfois on y exhibe des instruments anciens analogues à ceux que l'on peut admirer au musée d'histoire des sciences de Florence.

Enfin, on réalise souvent des panneaux biographiques consacrés à des savants célèbres.

Pourtant, dans l'éditorial du n° 26 (février 1982) de '*L'Ouvert*' , intitulé "*la mathématique du voyeur*" nous avions présenté les formules suivantes, pour bien montrer que l'on pouvait présenter de beaux spectacles arithmétiques :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}}$$

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots$$

Voici un merveilleux énoncé de problème, qui montre une solution, mais qui laisse à l'élève le soin de se poser des questions, de formuler des conjectures, d'échaffauder des démonstrations : c'est plus fort que le bébé de la publicité qui est sec lorsqu'il est mouillé.

Que nos collègues l'affichent dans des classes de la 2de jusqu'au DEUG ou dans les classes préparatoires. Qu'ils encouragent leurs élèves à le considérer comme une tâche **facultative** destinée essentiellement aux gens curieux!

Ne faites pas d'impair.
(Carrés et cubes sont enchevêtrés dans la suite des nombres impairs.)

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1\\
2^2 &= 1+3\\
3^2 &= 1+3+5\\
4^2 &= 1+3+5+7\\
5^2 &= 1+3+5+7+9\\
6^2 &= 1+3+5+7+9+11\\
7^2 &= 1+3+5+7+9+11+13\\
8^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15\\
9^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15+17\\
10^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19\\
11^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21\\
12^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23\\
13^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25\\
14^2 &= 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27\\
15^2 &= \underbrace{1}_{1^3}+\underbrace{3+5}_{2^3}+\underbrace{7+9+11}_{3^3}+\underbrace{13+15+17+19}_{4^3}+\underbrace{21+23+25+27+29}_{5^3\ \cdots}\ \ldots
\end{aligned}
$$

(*)

Croyez-le ou non, toutes les puissances entières des naturels sont somme d'impairs consécutifs.

$$
\underbrace{1}_{1^5},\ 3,\ \underbrace{5+7+9+11}_{2^5},\ 13, 15, 17,\ \underbrace{19+\ldots+35}_{3^5},\ 37,\ldots,47,\ \underbrace{49+\ldots+79}_{4^5\ldots]},\ \ldots
$$

(*)

Suite de carrés consécutifs égaux.

$$
\begin{aligned}
3^2 + 4^2 &= 5^2\\
10^2 + 11^2 + 12^2 &= 13^2 + 14^2\\
21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 &= 25^2 + 26^2 + 27^2\\
36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 &= 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2\\
55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 &= 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2
\end{aligned}
$$

(etc).

(*)

On peut compléter ce "*dessin arithmétique*" des calculs suivants :

$$1 = 1^4\ ;\ 7+9 = 2^4\ ;\ 25+27+29 = 3^4 \text{ etc}$$

(*) D'après(*World Federation Newsletter N°6, August 1987, Page 20*)

DU RALLYE AUX U.S.A.

Jean LEFORT et Frédéric DOUÉ

Avec la participation de :

Jean-Philippe HABÉ – Mathieu KESSLER
Philippe TRIMBORN – Frédérique CHAUVE

Le rallye mathématique d'Alsace, inauguré en 1974, a eu un tel succès qu'il a donné naissance à une multitude de rallyes à travers la France. En marge de la vénérable institution officielle qu'est le concours général, les rallyes ont prouvé leur capacité à révéler des talents mathématiques et à montrer un autre visage de notre discipline plus en rapport avec la recherche.

Fort d'une expérience américaine faite en juillet 86, Roger CUCULIÈRE (*) a proposé très peu de temps avant la distribution des prix du rallye que 4 des lauréats participent au stage organisé par l'I.A.E. (Institute for Advanced Education) à Long Island aux Etats-Unis. Les frais de séjours (2000 $) ont été couverts à égalité par l'Education Nationale et des organismes américains. Seul le voyage (sur charter) était à la charge des familles. Un tirage au sort a dû départager les nombreux candidats tous valables : deux haut-rhinois et deux bas-rhinois (cités ci-dessus) se sont donc retrouvés pour un mois avec 5 autres français (des lauréats du rallye d'Ile de France et le 1er prix du concours général) parmi 125 personnes dont 3 hongrois, 9 suisses et 1 pakistannais.

C'est donc un sujet de fierté pour l'Alsace que R. CUCULIÈRE ait pensé spontanément à nous pour étoffer la délégation française. Cet article lui est donc aussi dédié. Qu'il trouve ici tous nos remerciements.

Accueillis dès l'arrivée à l'aéroport, les élèves furent logés par chambre de trois, et les repas pris dans un self. Certains ont trouvé le logement un peu sommaire, mais tous reconnaissent l'excellence de l'accueil et de l'encadrement même si cela impliquait un contrôle de sécurité très strict. Le séjour (sauf pour les français qui visitèrent Washington pendant 5 jours) eut lieu exclusivement sur le campus, samedi et dimanche compris. Mais les activités possibles sur un terrain d'environ 110 ha, au bord de la mer, sont nombreuses tant sur le plan sportif que sur le plan culturel.

Le sport a été à l'honneur tout au long du séjour puisque lever à 7 heures, une activité sportive (éventuellement natation) était obligatoire dès avant le "*petit*"

(*) '*Une expérience américaine d'école d'été pour élèves avancés*' dans le bulletin A.P.M.E.P. n° 361 de décembre 1987 déjeuner de même l'après-midi avant les cours. Quatre équipes, formées par les organisateurs se sont affrontées tout au long du stage dans différentes disciplines sportives et un classement fut établi en fin de séjour avec une distribution de médailles.

En ce qui concerne les matières *intellectuelles*, il s'agissait de la physique, de l'informatique (soit étude de langage, soit recherche), des mathématiques, des échecs (niveau débutant ou confirmé) et du S.A.T. (préparation aux tests que passent les américains avant d'entrer à l'université); chaque stagiaire choisissait 4 matières dont 2 principales.

En informatique : La taille du groupe de travail était limitée à 10 (nombre de machines) et les langages étudiés furent le FORTRAN, le C et l'A.P.L. Mais plus intéressants furent les problèmes de recherche. Par exemple, celui sur la séparation de signaux (électriques ou accoustiques) grâce à des procédés d'analyse moyenne. Les éléments théoriques nécessaires étaient donnés au fur et à mesure.

Aux échecs : Il y eut des analyses de parties.

En physique : Les participants ne tarissent pas d'éloges sur les cours et les activités à la fois très durs et très intéressants, le professeur sachant présenter les divers exercices et faire toucher du doigt quelques problèmes actuels de physique fondamentale. Voici quelques exemples :
— Quand la fréquence des impacts après l'explosion d'un feu d'artifice est-elle la plus grande?
— Comment évolue le poids d'un sablier au fur et à mesure de l'écoulement?
— Une corde étant attachée par ses deux extrémités au plafond, à quel endroit la tension est-elle la plus grande?
— Quand on envoie un œuf sur un autre fixe, quel est celui des deux qui se casse le plus facilement? (et chaque participant fit des expériences).
— Une expérience de pensée : quelle est la surface d'équilibre de l'eau dans un verre si tout l'univers (sauf l'eau) se met à tourner autour de l'axe du verre?
— Démontrer que dans l'air que je respire, il y a au moins une molécule qui a été respirée par NEWTON.
— ...

Le professeur avait l'habitude de donner différentes pistes de recherche, ce qui permettait d'exciter la curiosité et l'intérêt des élèves. Chacun devait faire des évaluations ou des recherches personnelles pour trouver les données manquantes. Les problèmes étaient repris d'une séance à l'autre ce qui fait qu'en tout une trentaine furent traités au cours du séjour.

En mathématiques : Aucune surprise puisque les problèmes proposés à la sagacité des participants étaient tous des problèmes du type *rallye*.

Mais il y a une véritable découverte des mathématiques : **les mathématiques ce ne sont pas des études de fonctions : les mathématiques c'est le rallye**. Tandis qu'en cours on apprend des théorèmes et on les applique, on a découvert des problèmes à la fois plus abstraits et plus réalistes. Plus abstrait car on passe par une abstraction plus poussée pour les résoudre; plus réalistes de par leur énoncé et la nécessité de **vérifier** systématiquement le résultat après la théorie.

De plus si l'énoncé est accessible à tout le monde, aucune indication n'est donnée sur la méthode de résolution. En cela c'est vraiment un problème de recherche qui se démarque des études de fonctions ou des problèmes de bac. Et pourtant dans la plupart des cas le bagage mathématique nécessaire à la résolution est peu élevé.

Il faut noter l'importance de l'arithmétique dans les problèmes de type rallye. En ce sens, il est dommage que cette branche ait totalement disparue des programmes français ce qui est peut-être une des causes de la contre-performance de l'équipe française aux olympiades internationales (on n'improvise pas des calculs modulo p). Pour contrebalancer ces résultats, les français ont remporté les trois premières places en physique et la première et troisième en maths aux olympiades finales du stage.

A côté de ces problèmes de rallye, chaque participant devait se donner un sujet de recherche et avancer dans sa résolution; par exemple :
— étude du triangle de PASCAL;
— notion de suites récurrentes;
— les bœufs d'ARCHIMÈDE;
— les circuits sur un échiquier au moyen de différentes pièces;
— ...

On peut toutefois regretter que là-bas comme en France, on ne parle jamais de ce qui se fait en maths actuellement. Qui a parlé de la démonstration par FALTINGS de la conjecture de MORDELL? Et pourtant elle est parfaitement explicable à des lycéens et nos rallymen ont été interessés par les explications que nous leur avons données. Si, bien sûr, nombre de résultats mathématiques font appel à des théories très sophistiquées, il y en a pourtant beaucoup qui peuvent être introduites dans un cours au titre de la culture mathématique — et dans toutes les sections.

⋆⋆⋆

Reste une question importante : **pourquoi les américains invitent-ils des étrangers**?

— Une première réponse peut être trouvée dans la sélection (ou plutôt l'absence de sélection) des américains eux-mêmes. Ce stage organisé par l'I.A.E., qui regroupe des scientifiques éminents, est un peu un camp de vacances. Sa réputation est assurée par l'internationalité du stage.
— Il y a un côté chasseur de tête, c'est-à-dire encouragement à la fuite des cerveaux vers les U.S.A. A ce propos il faut citer une anecdote très significative :
Un professeur a proposé tout de go à un des hongrois très fort en informatique : "*Pourquoi ne resterais-tu pas ici?*" Le hongrois s'est contenté de rire malgré

l'insistance du professeur qui a rajouté : "*On pourrait s'arranger*" ?
— Enfin, il y a un aspect relation publique ou diplomatique dans ce sens que cela permet d'assurer des relations futures avec d'autres pays. Cet aspect n'est guère dissociable de la chasse aux cerveaux.

Il est certain qu'un problème se pose : doit-on, en tant que responsable de la formation des jeunes, encourager ces contacts qui risquent d'aboutir à priver notre pays des scientifiques de renom. N'y aurait-il pas intérêt à s'inspirer de l'exemple américain pour créer quelque chose d'analogue en France même? A la suite du rapport DAVID, les U.S.A. ont pris le taureau par les cornes, mettant les bouchées doubles pour enrayer une désaffection envers les mathématiques. La situation en France est grave et les mathématiciens, tant dans les universités que dans l'industrie, ont tiré la sonnette d'alarme lors du colloque "*Mathématiques à venir*". Les responsables politiques sont conscients du danger. Puissent les décisions venir rapidement et les enseignants de base appuyer le mouvement pour que les jeunes retrouvent le chemin des mathématiques.

Préambule en guise de mode d'emploi ... 3
Historique ... 5
L'affaire du papyrus ou la diminution du neuvième ... 21
A propos du papyrus Rhind ... 27
Archimède (287-212 avant J.-C.) ... 35
Viète (1540-1603) ... 49
Descartes (1596-1650) ... 53
Solides de révolution ; vers la démarche de Wallis ... 59
Formules : Wallis, Stirling ... 75
Gregory (1638-1675) ... 89
Leibniz (1646-1716) ... 93
Newton (1642-1727) ... 97
Euler (1707-1783) ... 101
π et les séries de Fourier ... 109
Le nombre π et les fractions continues ... 117
Les nombres de Liouville ... 131
Travaux d'Hermite et Lindemann ... 135
π dans nos classes ... 145
Le problème de la quadrature du cercle parmi les autres problèmes de construction ... 159
L'aiguille de Buffon ... 183
La chasse aux décimales (et une exclusivité mondiale) ... 199
Les décimales de π et la statistique ... 207
Le grenier ... 223
Bibliographie ... 282
Index ... 287

NUMÉRO SPÉCIAL π
du 'Petit Archimède'
50 F (60 F si envoi postal)

Brochure A.P.M.E.P. disponible à la Bibliothèque de l'I.R.E.M.. Veuillez établir votre chèque à l'ordre de la Régionale A.P.M. de Strasbourg. D'autres documents sont en vente, renseignez-vous.

PROBLÈME 2

Proposé par D. DUMONT

Enoncé

Pour $n \geq 1$, on appelle u_n le nombre égal à n si n est impair, et à $-3p(n)$ si n est pair, où $p(n)$ désigne le plus grand diviseur impair de n. Posant

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n,$$

montrer que $|s_n| \leq n$, et trouver tous les n pour lesquels $|s_n| = n$.

Solution proposée par R. ANDRÉ-JEANNIN de Sfax en Tunisie. (L'auteur nous a proposé une solution plus courte.)

On se propose de montrer le résultat suivant :

Théorème :
Pour tout $n \geq 1$ on a $|S_n| \leq n$, et $|S_n| = n$ si et seulement si $n = 1$ ou si il existe $m \geq 2$ tel que $n = 2^m - 2$. Dans ce cas $s_n = -n$.
La démonstration se fait en plusieurs étapes. Dans toute la suite on pose : $\sigma(n) = p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$.

Propriété 1 :
Pour r impair et $k \geq O$ on a :

$$\sigma(2^k r) = \frac{r^2(4^k - 1)}{3} + \sigma(r) \tag{1}$$

Démonstration :
Par récurrence sur k. La propriété est évidente pour $k = 0$, supposons la vérifiée jusqu'à l'ordre k.
Remarquons que pour $m \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\sigma(2m) &= 1 + 3 + \cdots + (2m-1) + p(2) + p(4) + \cdots + p(2m) \\ &= m^2 + p(1) + p(2) + \cdots + p(m) = m^2 + \sigma(m)\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma(2^{k+1} r) &= \sigma(2.2^k r) \\ &= 4^k r^2 + \sigma(2^k r) \\ &= 4^k r^2 + r^2 \frac{(4^k - 1)}{3} + \sigma(r) \\ &= \frac{(4^{k+1} - 1) r^2}{3} + \sigma(r).\end{aligned}$$

La propriété est encore vraie à l'ordre $k+1$.

Remarque :
En posant $n = 2^k r$, (1) peut s'écrire :

$$\sigma(n) = \frac{n^2 - p(n)^2}{3} + \sigma\big(p(n)\big) \tag{2}$$

Propriété 2 :
Soit r impair, $r \geq 3$. On a :

$$r^2 + r + 3 \leq 3\sigma(r) \leq r^2 + 2r \tag{3}$$

et

$$3\sigma(r) = r^2 + 2r \text{ si et seulement si } r = 2^m - 1 \quad (m \geq 2)$$
$$3\sigma(r) = r^2 + r + 3 \text{ si et seulement si } r = 2^m + 1 \quad (m \geq 1)$$

Démonstration :
Soit $r = r_0 \geq 3$ impair. Considérons l'algorithme :

$$\begin{array}{llllll}
 & r_o - 1 = & 2^m r_1 & n_1 \geq 1 & r_1 = p(r_o - 1) \\
\text{Si } r_1 \neq 1 & r_1 - 1 = & 2^{n_2} r_2 & n_2 \geq 1 & r_2 = p(r_1 - 1) \\
\vdots & \vdots & & & \\
\text{Si } r_i \neq 1 & r_i - 1 = & 2^{n_{i+1}} r_{i+1} & n_{i+1} \geq 1 & r_{i+1} = p(r_i - 1)
\end{array}$$

La suite r_i est strictement décroissante. Il existe donc un entier $k \geq 0$ tel que $r_k > 1$ et

$$r_k - 1 = 2^{n_{k+1}} r_{k+1} \text{ avec } r_{k+1} \text{ et } n_{k+1} \geq 1.$$

On a alors d'après (2) pour $0 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned}
\sigma(r_i) = r_i + \sigma(r_i - 1) &= r_i + \frac{(r_i - 1)^2 - r_{i+1}^2}{3} + \sigma(r_{i+1}) \\
&= \frac{r_i^2 - r_{i+1}^2 + r_i + 1}{3} + \sigma(r_{i+1}).
\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les égalités précédentes $(0 \leq i \leq k)$ on obtient :

$$\sigma(r_o) = \frac{r_0^2 - r_{k+1}^2 + r_0 + r_1 + \cdots + r_k + k + 1}{3} + \sigma(r_{k+1}).$$

Or, $r_0 = r$, $r_{k+1} = \sigma(r_{k+1}) = 1$, permettent d'écrire :

$$\sigma(r) = \frac{r^2 + r + r_1 + \cdots + r_k + 3 + k}{3} \tag{4}$$

(4) montre d'abord que :
$\sigma(r) \geq \frac{r^2+r+3}{3}$, l'égalité étant atteinte si et seulement si $k = 0$, autrement dit $r_0 = 1 + 2^{n_1} \quad (n_1 \geq 1)$.
Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} r_0 - 1 &\geq 2r_1 \\ r_1 - 1 &\geq 2r_2 \\ &\vdots \\ r_{k-1} - 1 &\geq 2r_k \\ r_k - 1 &\geq 2 \end{aligned} \tag{5}$$

En ajoutant membre à membre on obtient : $r_1 + \cdots + r_k \leq r - k - 3$, l'égalité étant atteinte si et seulement si les équations (5) sont des égalités, autrement dit si $r = 2^m - 1 \quad (m \geq 2)$.
On peut donc écrire d'après (4) : $\sigma(r) \leq \frac{r^2+2r}{3}$, l'égalité étant atteinte pour $r = 2^m - 1$.

Propriété 3 :
Pour r impair et $k \geq 1$, $S(2^k r) = r^2 - 3\sigma(r)$ (avec $S(n) = u_1 + \cdots + u_n$ la suite de l'énoncé).

Démonstration :
Pour $m \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned} S(2m) &= 1 + 3 + \cdots + (2m-1) - 3\big(p(2) + \cdots + p(2m)\big) \\ &= m^2 - 3\sigma(m) \end{aligned}$$

D'où en utilisant (1) :

$$\begin{aligned} S(2^k r) = S(2.2^{k-1}r) &= 4^{k-1}r^2 - 3\sigma(2^{k-1}r) \\ &= 4^{k-1}r^2 - r^2(4k^{-1} - 1) - 3\sigma(r) \\ &= r^2 - 3\sigma(r) \end{aligned}$$

La propriété 3 montre que pour n pair $S(n)$ ne dépend que de $p(n)$.

Propriété 4 :
Pour $n \geq 1$ on a :

$$-2n \leq S(2n) \leq -2 \tag{6}$$

$S(2n) = -2n$ si et seulement si $n = 2^m - 2 \quad (m \geq 2)$.

Démonstration :
Posons $n = 2^k r$, $r = p(n)$. La propriété 3 montre que :

$$S(2n) = S(2^{k+1}r) = r^2 - 3\sigma(r)$$

si $r = 1$, $S(2n) = S(2^{k+1}) = -2$, d'où $S(2) = -2$.

Si $r \geq 3$ on a d'après (3)

$$-2n \leq -2r \leq S(2n) \leq -r-3 \leq -6.$$

De plus $S(2n) = -2n$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow n = r \text{ et } r = 2^m - 1 \text{ (d'après la propriété 2)} \\ &\Longleftrightarrow 2n = 2^{m+1} - 2 \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

Remarquons aussi que $S(2n) = -r-3$ lorsque $r = p(n) = 2^m + 1 \quad (m \geq 1)$.
Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème cité au début. En effet le cas de $S(2n)$ fait l'objet de la propriété 4. Il suffit de remarquer que :

$$S(2n+1) = (2n+1) + S(2n) \quad (\text{pour } n \geq 1)$$

d'où d'après (6) :

$$1 \leq S(2n+1) \leq 2n-1$$

ce qui montre que $S(2n+1) < (2n+1)$ pour $n \geq 1$. Il est clair par ailleurs que $S(1) = p(1) = 1$, ce qui achève la démonstration.

PROBLÈME 3

Enoncé

Vrai ou faux ?

> Tout ensemble de parties de $\mathbb{N}$ qui est totalement ordonné par inclusion (ceci signifie que, deux éléments quelconques de cet ensemble étant donnés, l'un des deux est toujours inclus dans l'autre) est fini ou dénombrable.

Donner une démonstration ou un contre exemple.

Indication

L'assertion est fausse.

PROBLÈME 4

Enoncé

Trouver tous les réels $a > 0$ tels qu'il existe, dans l'espace euclidien usuel muni d'un repère orthonormé, un cube de côté a et dont les sommets ont toutes leurs coordonnées entières.