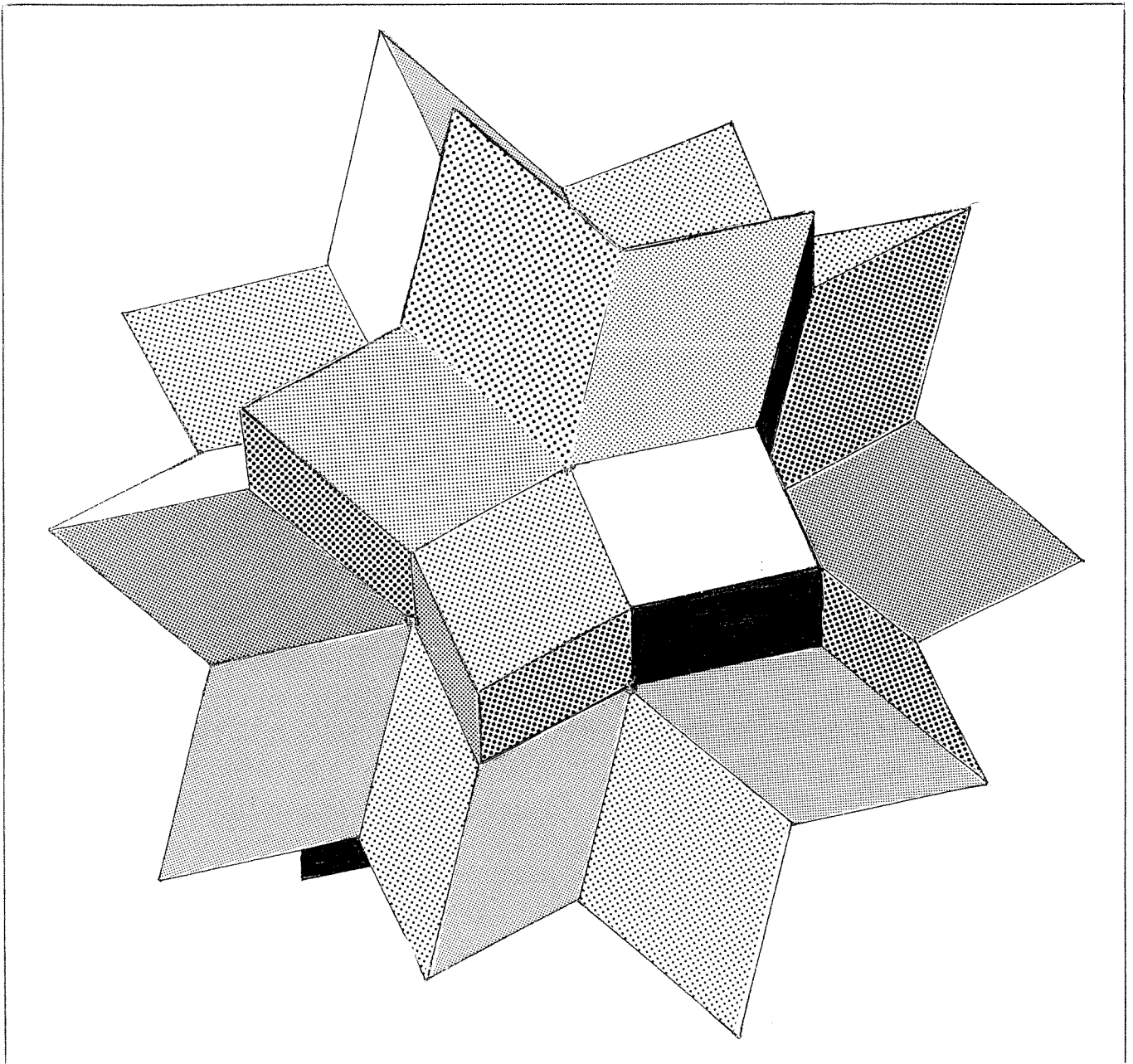

L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n°51 - JUIN 1988

ISSN 0290-0068



NOTRE COUVERTURE

Ce "*bouquet*" est peut-être le plus beau des polyèdres : **douze fleurs dont les cinq pétales sont des losanges d'or** (le rapport de leurs diagonales est le nombre d'or). Les centres des fleurs et les pointes de leurs pétales sont respectivement les sommets d'un icosaèdre et d'un dodécaèdre réguliers.

Un modèle avec trois fleurs bleues et autant de rouges, de jaunes et de blanches, sans voisinage de même couleur, est très décoratif.

Un dessin du bouquet figure à la page 239 de "*Pavés et bulles*", par Françoise PÉCAUT (Brochure A.P.M. n° 23).

E. EHRHART

HYPOCRISIE

Qui n'est pas d'accord pour généraliser l'accès à l'éducation? Voilà une idée généreuse que seuls combattront les personnes attachées à la défense de leurs privilèges et jaloux de leur savoir au point d'en refuser la communication aux autres qui risqueraient alors de prendre le pouvoir à leur place.

Donc, tous les gouvernements – de progrès –, tous les ministres de l'éducation – nationale ou non – se targuent de mettre en place un système éducatif qui permette l'accès du plus grand nombre au niveau le plus élevé.

Mais comme c'est curieux!

— On supprime les filières pour en supprimer les abus, mais par le même coup les avantages!

— On crée la "*pédagogie différenciée*", recette miracle qui doit être inscrite dans les gènes de la plupart des enseignants puisqu'il n'est nul besoin de les y former!

— On prône le progrès grâce à l'informatique qui permet de n'avoir pas à apprendre les formules du cours. C'est très utile au bac!

— On diminue les bourses et les places en cité universitaire, au nom de l'égalité ou du libéralisme!

— On "*décentralise*" les décisions – pédagogiques ou administratives – au niveau des chefs d'établissement en leur donnant plein pouvoir, mais en oubliant de vérifier leur capacité à gérer leurs nouvelles responsabilités!

— On crée des "*semaines des arts*" au moment où l'on diminue les options artistiques et où l'on introduit un personnel extérieur sans aucun diplôme pédagogique!

Je pourrais multiplier les exemples qui tendent à prouver que l'on donne d'une main ce que l'on retire de l'autre. Ne cherche-t-on pas, derrière un discours hypocrite, à ne favoriser qu'une classe sociale, qui habite une grande ville universitaire et qui a les moyens – financiers et culturels – de compléter l'éducation de ses enfants?

Jean LEFORT

SOMMAIRE

N° 51 - 1988

◇ Notre couverture : Rhomboèdre semi-régulier à 60 faces	I
◇ Editorial : Hypocrisie	II
◇ Considérations sur une famille de polyèdres, par R. ISS	1
◇ Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski, par L.- E. DUBINS	15
◇ Le paradoxe de Gumbel, par J. LEFORT	19
◇ A propos de l'équation cyclotomique $X^{11} - 1 = 0$, par J. DAUTREVAUX	22
◇ Commentaires sur l'article "L'étendue des jours", par J.P. PARISOT	32
◇ Rêveries d'une nuit de sabbat mathématique, par O. GEBUHRER	37
◇ A vos stylos, par 'L'Ouvert'	39
◇ Sommaire	III

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

- ◇ Responsable de la publication : J. LEFORT
- ◇ Correspondance à adresser à :
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex
Tél. : 88-41-64-40
- ◇ Abonnement (pour 4 numéros annuels) :
50.-F pour les membres A.P.M. d'Alsace
90.-F pour l'Alsace
120.-F pour les autres départements
110.-F pour l'étranger
(Chèque à l'ordre de Mr l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM))
- ◇ Prix du numéro : 25.- F

CONSIDÉRATIONS SUR UNE FAMILLE DE POLYÈDRES

Roger Iss

1.— Manipulations préliminaires

Imaginez un tétraèdre en terre glaise, posé sur une table. Avec un couteau, découpez une “*pointe*” de ce solide, comme si c’était un gâteau, c’est-à-dire en pratiquant une coupe plane — pas forcément verticale — allant jusqu’au ras de la table (fig. 1). Enlevez le petit tétraèdre ainsi découpé : il vous reste un polyèdre à base quadrangulaire.

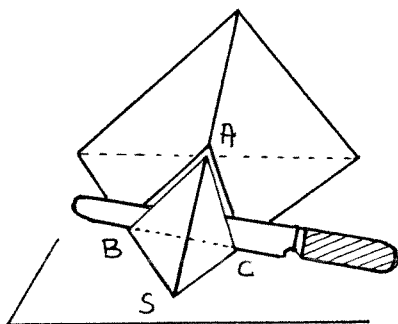


Figure 1

Sans changer la face en contact avec la table, continuez à tronquer ce polyèdre de la même manière, ou, de façon plus précise, à

- choisir un sommet S de la face située dans le plan de la table;
- choisir, sur chacune des trois arêtes issues de S un point distinct de leurs extrémités;
- A, B, C étant les points ainsi choisis, enlever au solide le tétraèdre $SABC$.

En répétant cette opération, que nous appellerons **troncature triangulaire**, on obtient une suite de polyèdres convexes ayant la particularité suivante : chaque face visible a un côté commun avec la face en contact avec la table.

Mais nous pouvons laisser la terre glaise et nous contenter de représenter ces solides par des vues en projection horizontale, car il est facile de voir, sur le dessin, l’effet d’une troncature triangulaire. On constate que, quelle que soit la manière de faire la première troncature, les solides à base quadrangulaire que l’on obtient — ce sont des pentaèdres — se ressemblent tous par la disposition des faces et le nombre de côtés de celles-ci. Il en est de même des solides à base pentagonale obtenus après deux troncatures. Par contre, avec trois troncatures, on peut obtenir trois types

différents de solides à base hexagonale (fig. 2 et 3).

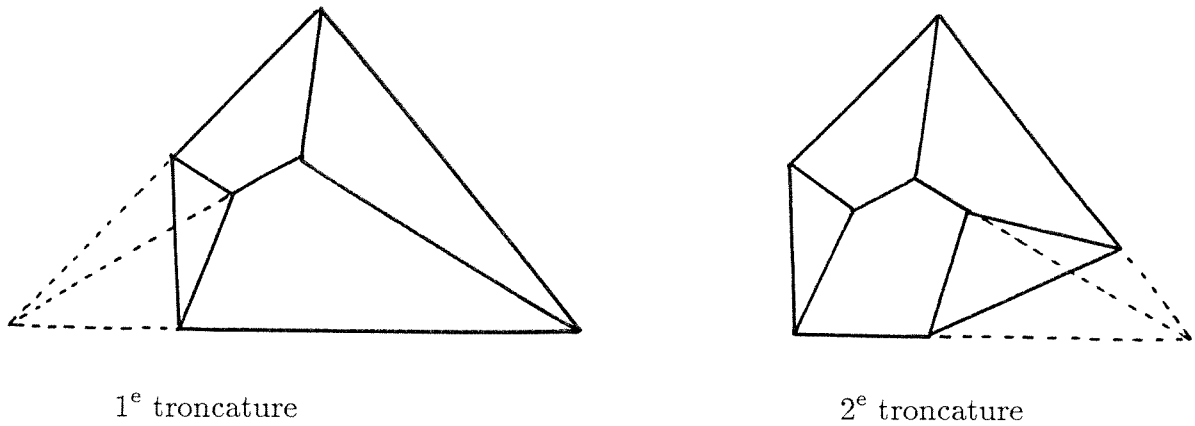
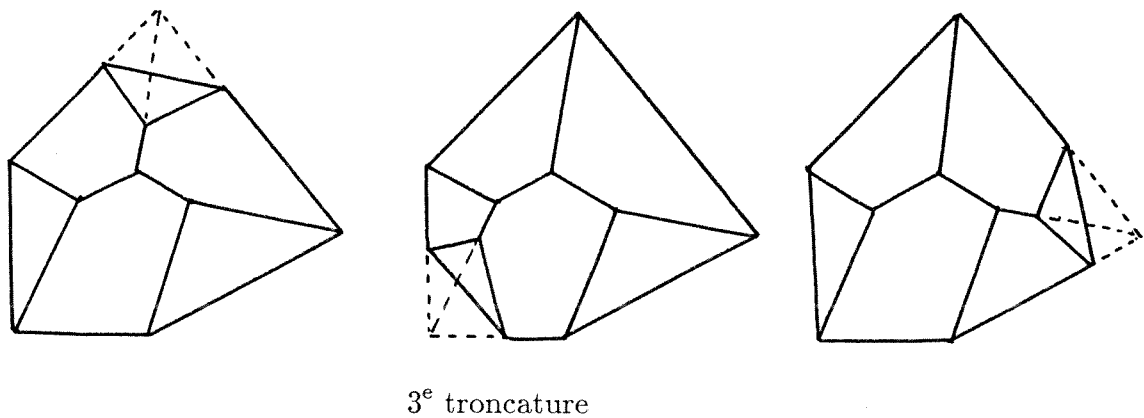


Figure 2



3° troncature

Figure 3

Etudions ces polyèdres d'un peu plus près.

2.— Vers une définition

La face en contact avec la table sera notée \mathcal{B} et appelée **base** du solide. Celui-ci sera dit **d'ordre** n si le polygone \mathcal{B} a n côtés. Pour bien différencier \mathcal{B} des autres faces, nous réserverons les mots **faces**, **arêtes** et **sommets** pour désigner, respectivement, les faces, arêtes et sommets qui ne sont pas dans le plan de base. Pour ceux de ces éléments qui sont dans ce plan, nous parlerons de **base**, de **côtés de la base** et de **sommets de la base**.

Dans un polyèdre, un sommet est commun à trois faces et trois arêtes au moins. Nous dirons qu'un sommet est **simple** s'il est commun à trois faces et trois arêtes seulement. Comme, dans notre manipulation, nous avons choisi de couper les polyèdres successifs par des plans ne passant pas par les extrémités des arêtes ou des côtés, tous leurs sommets, qu'ils soient sur la base ou non, sont simples.

Définitions : On appelle **polyèdre** T_n (ou tout simplement T) tout polyèdre convexe dont

- 1) une face \mathcal{B} , n -gonale, a un côté commun et un seul avec chacune des autres faces du polyèdre;
- 2) tous les sommets sont simples.

3.— Propriétés des arêtes et des sommets

Toute arête étant commune à deux faces, et deux seulement, on peut distinguer deux catégories d'arêtes :

- les **arêtes latérales**, issues d'un sommet de la base et communes à deux faces consécutives (ou adjacentes);
- les **arêtes sommitales**, joignant deux sommets et intersection de deux faces non consécutives.

Sur un polyèdre T , on peut, de même, distinguer quatre catégories de sommets, suivant la nature des trois arêtes qui en sont issues :

1. **les trois arêtes sont latérales** : le sommet considéré est alors unique et cela ne se produit que pour le tétraèdre T_3 ;
2. **deux arêtes sont latérales et la troisième sommitale** : c'est, par exemple, le cas des deux sommets du pentaèdre T_4 (fig. 2);
3. **une arête est latérale, les autres sommitales** : exemple, le sommet central d'un polyèdre T_5 (fig. 2);
4. **les trois arêtes sont sommitales** : exemple, le sommet central du premier polyèdre T_6 de la figure 3.

On peut alors énoncer quelques propriétés presque évidentes :

- Un sommet d'où partent deux arêtes latérales est sommet d'une face triangulaire.
- Deux faces triangulaires ne sont jamais adjacentes, sauf pour le tétraèdre T_3 .
- Etant donnés deux sommets d'un polyèdre T , il existe toujours une suite d'arêtes consécutives — que nous appellerons un **chemin** — joignant ces sommets. En d'autres termes, la figure formée par les arêtes et les sommets est connexe.

4.— Propriété fondamentale des polyèdres T

Convenons d'abord de désigner, dorénavant, les côtés de la base d'un polyèdre T par des lettres majuscules A, B, \dots et par des lettres minuscules a, b, \dots les faces correspondantes.

Considérons une arête sommitale S_1S_2 , commune à deux faces j et k non consécutives et soit l la troisième face passant par le sommet S_2 . Si nous rangeons ces trois faces dans l'ordre j, l, k les côtés correspondants de la base sont dans l'ordre J, L, K : cet ordre oriente le polygone de base et nous pouvons dire que L est "entre" J et K .

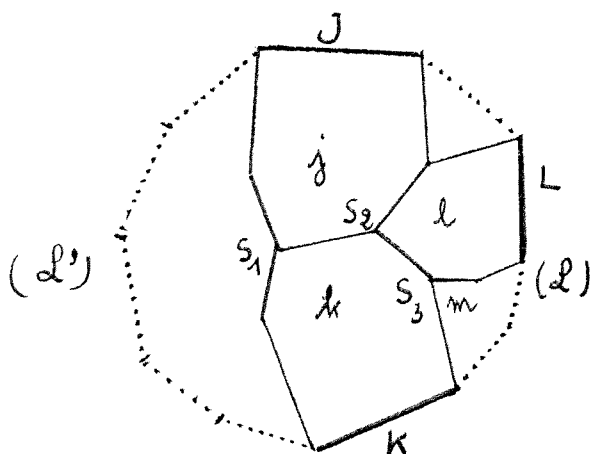


Figure 4

Par ailleurs, le polygone de base est la réunion des côtés J, K et de deux lignes polygonales \mathcal{L} et \mathcal{L}' disjointes (fig. 4). Soit \mathcal{L} celle qui est entre J et K et qui, par conséquent, contient le côté L .

Si \mathcal{L} se réduit au seul côté L , les deux arêtes, issues de S_2 — autres que $S_1 S_2$ — sont latérales et la face l est triangulaire.

Si, au contraire, \mathcal{L} contient plusieurs côtés, du sommet S_2 est issue au moins une autre arête sommitale. Soit $S_2 S_3$ cette arête, commune, par exemple, aux faces l et k . On peut répéter pour elle le raisonnement fait pour l'arête $S_1 S_2$: si m est la troisième face passant par S_3 , le côté M correspondant est situé entre L et K et appartient donc encore à \mathcal{L} .

De proche en proche, en suivant un chemin d'arêtes sommitales à partir de S_2 , on parvient donc à un sommet d'une **face triangulaire ayant sa base sur la ligne \mathcal{L}** . Le même raisonnement pouvant être fait à partir du sommet S_1 , il existe une autre face triangulaire dont la base appartient à la ligne \mathcal{L}' . D'où le résultat fondamental.

Dans un polyèdre T , il y a au moins deux faces triangulaires.

Le même raisonnement montre, de plus, que tout chemin d'arêtes sommitales se terminant sur une face triangulaire, un tel chemin **ne se referme pas et ne comporte pas de boucles**.

Ces résultats peuvent aussi s'établir en faisant appel au théorème d'EULER pour les polyèdres convexes :

Nombre de faces F + nombre de sommets S - nombre d'arêtes $A = 2$.

En effet, supposons qu'un polyèdre T_n possède p sommets et q arêtes sommitales. En comptant aussi les éléments de la base, on trouve

$$F = n + 1 \quad S = n + p \quad A = 2n + q$$

d'où $p - q = 1$: le nombre des sommets surpasse celui des arêtes d'une unité. Or, s'il y avait une boucle, on aurait $p - q = 0$ ($p - q = -1$ pour 2 boucles, etc). La ligne des arêtes sommitales ne se refermant pas, elle admet au moins deux extrémités, sommets de faces triangulaires.

5.— Représentation d'un polyèdre T

On peut représenter, comme on l'a déjà fait ci-dessus, un polyèdre T en le projetant — orthogonalement pour fixer les idées — sur le plan de base. La figure obtenue définit le polyèdre à une affinité près, par rapport au plan de base, comme une carte topographique où les cotes ne seraient pas données.

A cette indétermination près, on peut dessiner exactement la "carte" d'un polyèdre T , à partir de son polygone de base, en utilisant les règles de la géométrie dans l'espace. A savoir, essentiellement, les deux suivantes :

1. **Règle d'alignement** : Si une arête est l'intersection de deux faces j et k , elle passe, ainsi que sa projection, par le point d'intersection des droites qui portent les côtés J et K correspondants de la base (elle leur est parallèle lorsque ces deux droites sont parallèles).
2. **Règle des trois arêtes** : Si j et k sont deux faces distinctes, les arêtes $a \cap j$ et $a' \cap k$ ont une extrémité commune S seulement si $a = a'$. Si c'est le cas, la troisième arête issue de S est $j \cap k$ (fig. 5).

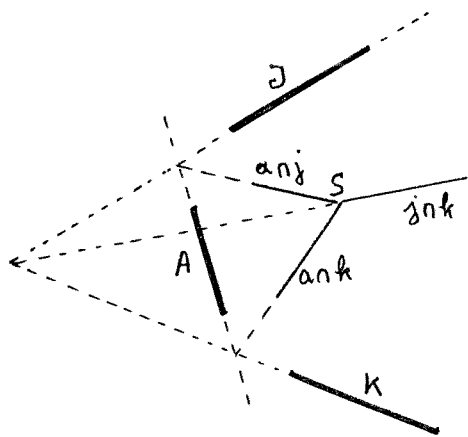


Figure 5

Ces deux règles ont été utilisées pour la construction de la figure 6 où la base \mathcal{B} est un hexagone. On commence le dessin par une face triangulaire que l'on trace arbitrairement à partir de n'importe quel côté de la base. Sur chacune des arêtes, obtenue par la règle des trois arêtes, on choisit un sommet, puis une autre arête issue de celui-ci. Il suffit de veiller à la convexité, la projection d'une face convexe étant elle-même convexe.

On procède ainsi de proche en proche et on termine par une face triangulaire.

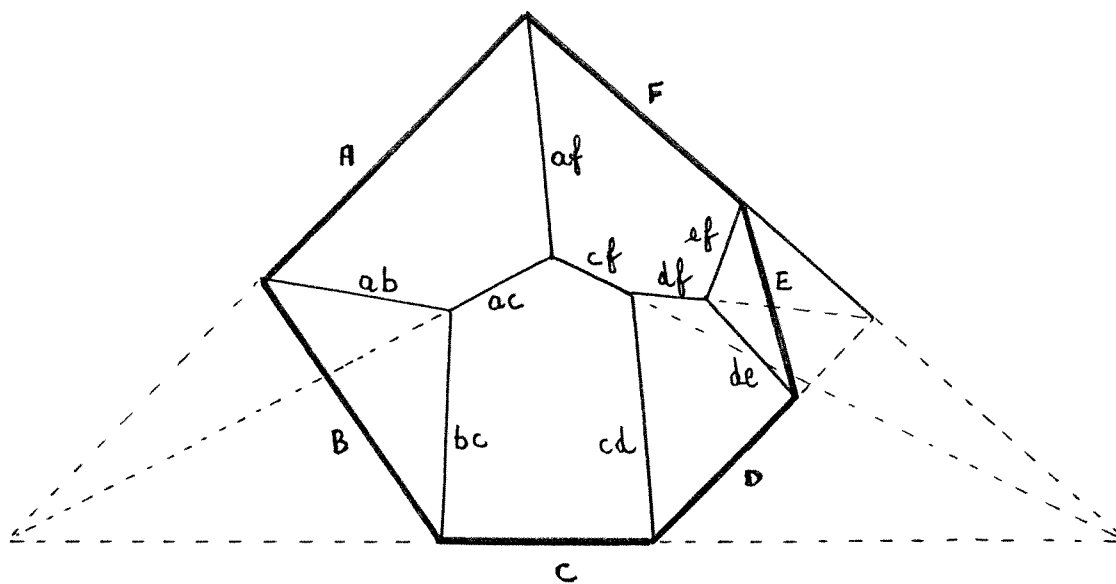


Figure 6

Signalons, qu'à partir d'une telle vue en projection, il est facile d'obtenir un **développement** du polyèdre (donc aussi de le réaliser en carton). Il suffit d'effectuer un rabattement de chaque face sur le plan de base, à l'extérieur du polygone B . On commence, là encore, par une face triangulaire dont on pourra choisir arbitrairement la hauteur.

6.— Génération par récurrence des polyèdres T_n

Nos manipulations sur un tétraèdre en terre glaise ont montré que, par des troncatures successives, on pouvait, à partir de lui, obtenir des polyèdres T_n d'ordre aussi élevé que l'on voulait. Nous allons voir, qu'inversement, tout polyèdre T_n peut être obtenu, par troncatures, à partir d'un tétraèdre, ou, à défaut, d'un pentaèdre. En effet, considérons un polyèdre T_n et supposons que, parmi ses faces triangulaires, il en existe une qui ait la propriété suivante : si $\alpha\beta$ est le côté de la base qui définit cette face, la somme $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$ des mesures en radians des angles du polygone en α et β est supérieure à π (fig. 7).

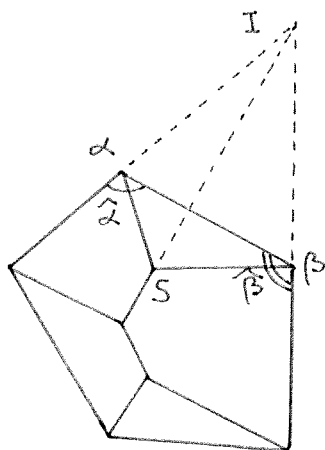


Figure 7

Les prolongements des côtés adjacents au côté $\alpha\beta$ se coupent alors en un point I tel que le triangle $I\alpha\beta$ soit, en entier, extérieur au polygone de base. S étant le sommet de la face triangulaire, le tétraèdre $S\alpha\beta I$ est extérieur au polyèdre T_n .

Réunissons ce tétraèdre et le polyèdre : nous obtenons encore un polyèdre T , mais qui est d'ordre $n - 1$ et contient $T_n \dots$ L'opération que nous venons de faire est exactement l'**opération réciproque de la troncature triangulaire**. Elle est toujours possible, à une exception près. En effet, dans un polygone convexe de plus de quatre côtés, il ne peut y avoir quatre angles dont la somme est inférieure à 2π ⁽¹⁾. Si donc la condition $\hat{\alpha} + \hat{\beta} > \pi$ n'est pas vérifiée pour une face triangulaire, elle l'est nécessairement pour une autre.

Par contre, pour $n = 4$, le résultat est en défaut lorsque $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \pi$ pour chacune des deux faces triangulaires. La base B est alors un trapèze (pouvant être, bien sûr, un parallélogramme ou un rectangle ...) et les faces triangulaires sont relatives aux côtés "obliques" de ce trapèze.

⁽¹⁾ Pour $n > 4$, s'il existait quatre angles dont la somme soit inférieure ou égale à 2π , la mesure de chacun des $(n - 4)$ autres angles étant strictement inférieure à π , la somme s des angles du polygone serait telle que

$$s < 2\pi + (n - 4)\pi.$$

Or, $s = (n - 2)\pi$. C'est donc impossible.

Pour $n = 4$, $s = 2\pi$. Si donc $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \pi$, deux côtés opposés du quadrilatère B sont parallèles et on a aussi $\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' = \pi$ pour les deux autres angles.

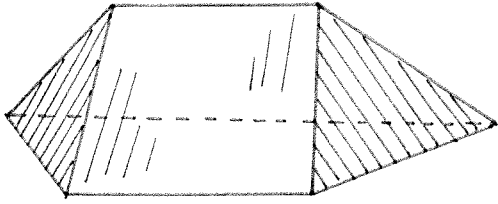


Figure 8

Le pentaèdre T_4 correspondant (fig. 8) a son arête sommitale **parallèle au plan de base** et ne peut donc pas être obtenu par des troncatures à partir d'un tétraèdre. Il en est de même des descendants, par troncatures, d'un tel pentaèdre : ils sont caractérisés par l'existence d'une arête sommitale parallèle au plan de base.

Tout polyèdre T_n , pour $n > 4$, descend, par $(n - 4)$ troncatures triangulaires, d'un pentaèdre T_4 .

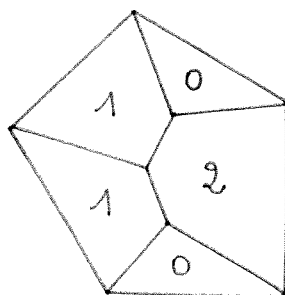
S'il n'a pas d'arête sommitale parallèle au plan de base, il descend d'un tétraèdre T_3 par $(n - 3)$ troncatures. Nous disposons ainsi d'une "récurrence" nous permettant de fabriquer **tous** les polyèdres T .

7.— Classification des polyèdres T

Déjà, en découpant notre tétraèdre en terre glaise, nous avons fait un tri parmi les polyèdres T obtenus. En disant qu'on ne trouvait qu'un seul modèle de polyèdre T_4 ou T_5 , mais trois modèles de T_6 , nous avons utilisé une relation d'équivalence dans l'ensemble des polyèdres considérés.

Pour préciser cette relation, nous allons convenir d'un code. Orientons d'abord le polygone de base et choisissons un de ses sommets pour origine. Cela revient à ranger les côtés de ce polygone — et, par conséquent, les faces du polyèdre — dans un certain ordre. A chacune des faces, associons le nombre des **arêtes sommitales** qu'elle contient (c'est le nombre de ses côtés diminué de trois unités). On obtient ainsi une suite de n entiers. Mais l'origine et le sens choisi sur la base étant arbitraires, cette suite n'est définie qu'à des permutations circulaires près et à une inversion près. C'est un **cycle**. Par exemple, pour le polyèdre T_5 de la figure 9, on trouve 10201, mais aussi 20110, 02011...

CONSIDÉRATIONS SUR UNE FAMILLE DE POLYÈDRES



Convenons de classer toutes les écritures de ce cycle par ordre lexicographique et de ne conserver que la plus “*grande*” de ces écritures. Nous l’appellerons **formule du polyèdre**. Ainsi, pour $n = 5$, la formule est 20110.

Figure 9

La relation d’équivalence cherchée est alors évidente :

Deux polyèdres T sont équivalents s’ils ont la même formule.

Remarque : la construction, vue au § 5, permet de représenter un polyèdre T quand on connaît sa formule, car celle-ci, “*programme*” le choix des arêtes à dessiner.

Il nous reste à voir l’effet, sur cette formule, des troncatures triangulaires. Or, chacune d’elles crée, dans un polyèdre T , une nouvelle face triangulaire et augmente d’une unité le nombre des arêtes sommitales des faces qui lui sont adjacentes (elle transforme l’arête latérale qui leur était commune en sommitale). Cela nous donne la règle suivante :

On intercale un zéro entre deux termes consécutifs de la formule et on augmente d’une unité les deux nombres ainsi séparés (étant entendu qu’il faut le faire aussi pour les termes extrêmes, car ils sont consécutifs dans le cycle).

Ainsi, à partir de la formule 20110 de T_5 (elle-même descendantes de 000 et 1010, formules respectives de T_3 et T_4), on obtient les cinq descendants suivants :

030111, 301110, 210210, 202020, 201201

Seulement, en ordonnant ces suites, comme convenu, on s’aperçoit qu’il n’y en a que trois distinctes :

301110, 210210, 202020.

Il y a donc trois classes de polyèdres T_6 et trois seulement (fig. 10). Nous les avons déjà trouvées au début de notre étude.

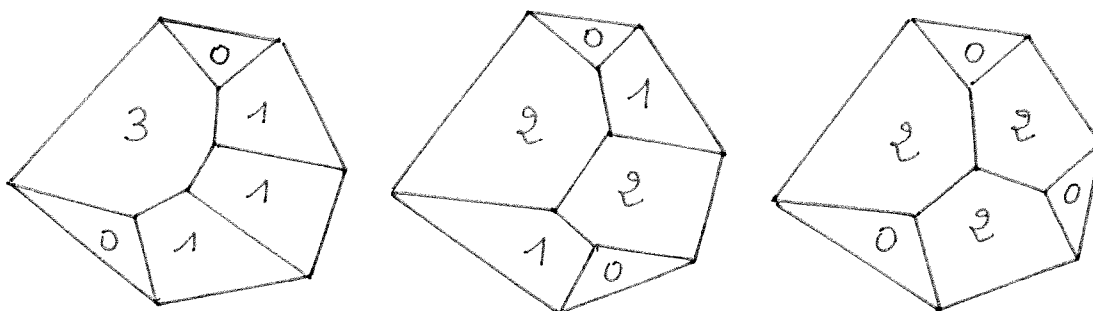


Figure 10

La recherche des différentes classes de polyèdres se ramène donc à une recherche purement numérique et on peut oublier complètement le contexte géométrique. La règle de récurrence ci-dessus nous permet de trouver les cycles de tous les polyèdres T_n pour n donné. Malheureusement, elle les donne non ordonnés et avec répétitions : la même suite peut être obtenue plusieurs fois, à une permutation circulaire ou une inversion près.

Il faut donc opérer un tri. Cela peut se faire à la main jusqu'au $n = 7$, pour lequel on trouve les quatre formules suivantes :

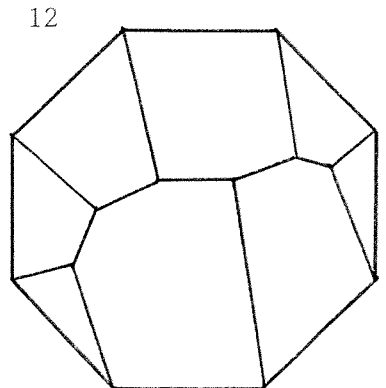
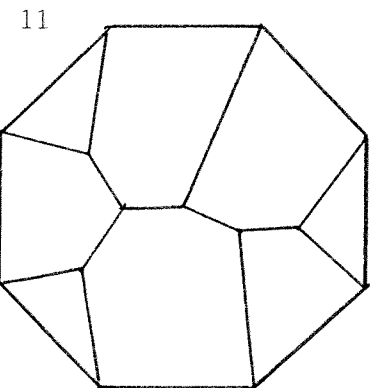
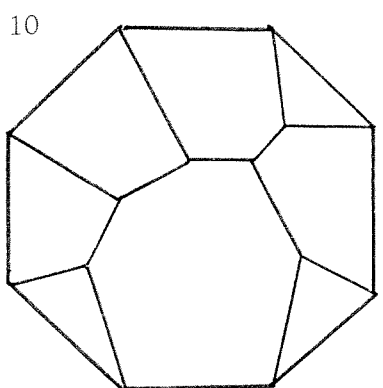
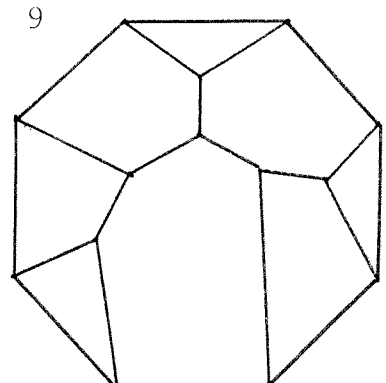
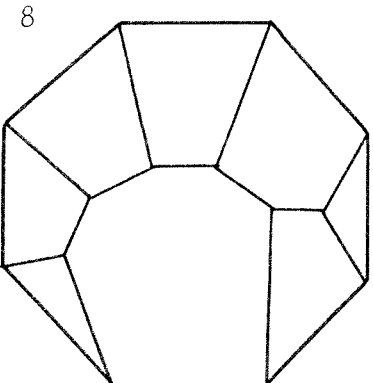
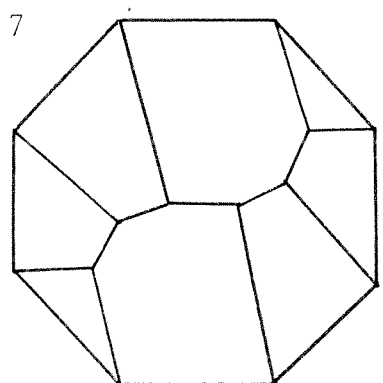
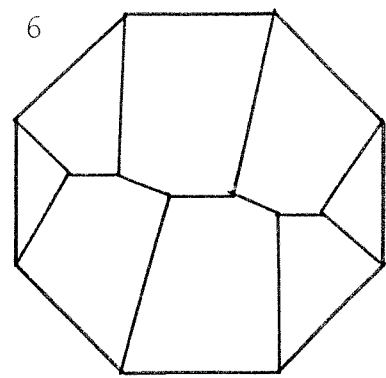
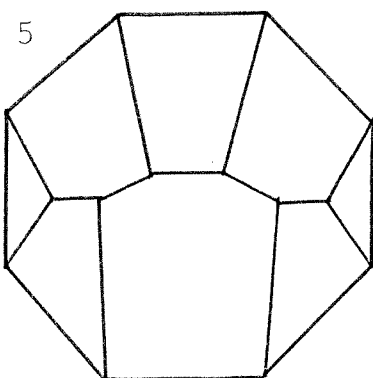
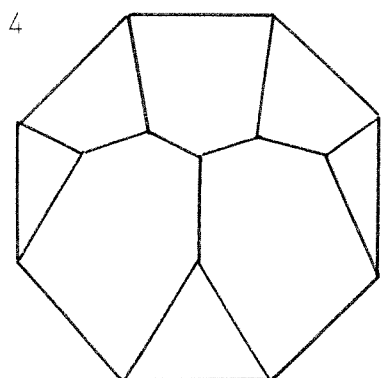
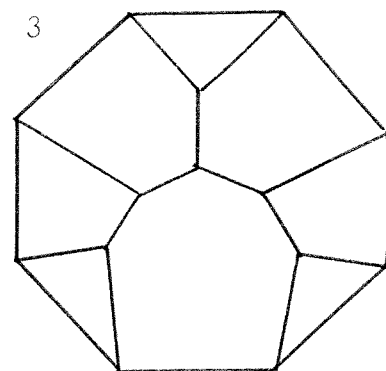
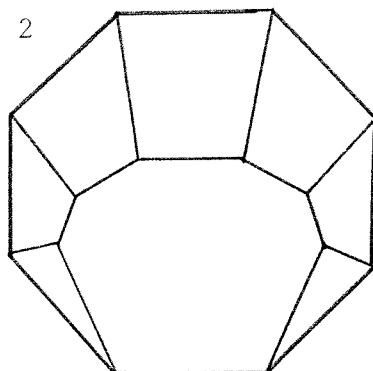
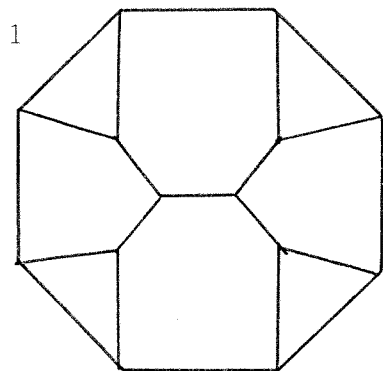
$$4\ 011\ 110, 3\ 102\ 110, 3\ 020\ 210, 2\ 201\ 210.$$

Au delà, les calculs et le tri deviennent fastidieux et il vaut mieux faire appel à un ordinateur. Un petit programme vous donnera facilement, sinon rapidement, 12 formules pour $n = 8$ ⁽³⁾, 27 pour $n = 9$, 82 pour $n = 10$, 228 pour $n = 11$, 733 pour $n = 12$.

L'expression, donnant le nombre de formules en fonction de n , reste encore à découvrir...

⁽³⁾ Les douze polyèdres T_8 sont représentés à la page ci-après. Les cycles des sept premiers présentent des symétries (par exemple le n° 3 dont le cycle 40120210 est un palindrome), une périodicité (par exemple le n° 7 de formule 31103110) ou les deux à la fois (le n° 1 de formule 30203020). On peut alors trouver, dans chaque classe, des représentants où cela se traduit par des symétries **géométriques**. C'est ce qui a été fait sur ce dessin. Par contre, les cinq derniers polyèdres ne présentent aucune symétrie.

CONSIDÉRATIONS SUR UNE FAMILLE DE POLYÈDRES



Les douzes polyèdres T_8

Dénombrement des arêtes et des sommets

A chaque troncature, le nombre des sommets d'un polyèdre T augmente d'une unité et celui des arêtes de deux unités. On trouve ainsi que **tout polyèdre T_n possède $(n - 2)$ sommets et $(2n - 3)$ arêtes, quelle que soit sa formule.**

La somme des entiers qui figurent dans cette formule est une constante, pour un ordre donné et vaut $(2n - 6)$.

8.— Dual d'un polyèdre T

Etant donné un polyèdre, si, à chaque face on fait correspondre un point et si on relie par un segment deux de ces points lorsqu'ils correspondent à des faces ayant une arête commune, on obtient le **dual** du polyèdre. Ce dual est encore un polyèdre si on choisit convenablement les points (pour les polyèdres réguliers, par exemple, à chaque face on fait correspondre son centre), mais il peut être "*aplati*" si les points sont pris dans un même plan. C'est sans importance, dans la mesure où on ne s'intéresse qu'aux relations existant entre faces, arêtes et sommets. Il y a réciprocité entre un polyèdre et son dual.

Considérons un polyèdre T_n (nous supposons avoir choisi un sens et une origine sur son polygone de base) et cherchons son dual T_n^* . Comme ce qui est relatif à la base ne nous intéresse pas, nous simplifierons en n'utilisant que les faces, arêtes et sommets — à l'exclusion de tout élément situé dans le plan de base —. De plus, pour avoir un dessin aussi simple que possible, nous choisirons les n points, images des faces, dans un même plan, aux sommets d'un polygone convexe de n côtés et rangés, sur celui-ci, dans le même ordre que les faces sur le polyèdre (fig. 11).

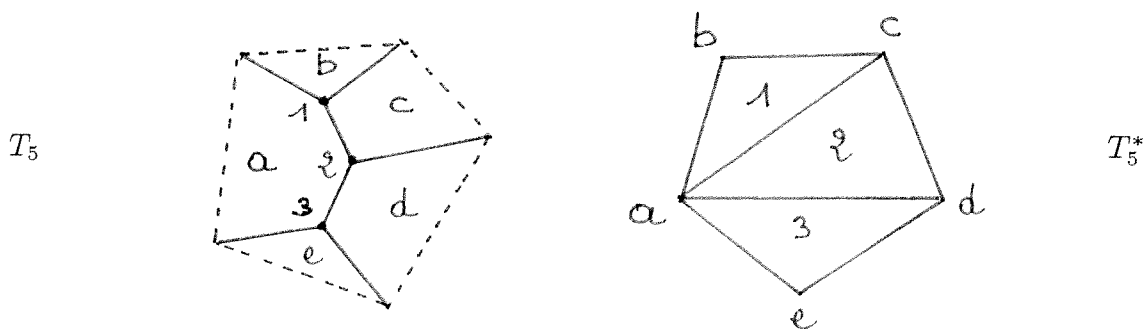


Figure 11

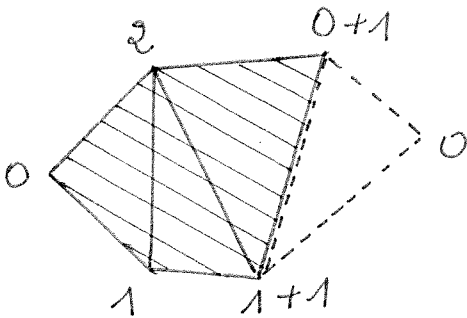
On constate alors, que les images des arêtes latérales du polyèdre T_n sont les côtés du polygone T_n^* et que celles des arêtes sommitales sont des **diagonales** de ce polygone. De plus, **ces diagonales partagent le polygone T_n^* en triangles, chacun d'eux étant l'image d'un sommet du polyèdre T_n .**

Notre problème, qui était l'étude de la répartition des sommets d'un polyèdre T_n , se ramène donc à un problème plan : celui **des partitions d'un polygone**

convexe en triangles (ou triangulation). En se plaçant en géométrie métrique, on dispose d'un atout supplémentaire : on connaît d'avance le nombre de triangles de la partition. Il est égal à $(n-2)$, car la somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est $(n-2)\pi$ (somme que l'on calcule d'ailleurs à l'aide d'une partition particulière en triangles ayant un sommet commun).

Le polygone T_n^* ayant n côtés, parmi ces $(n-2)$ triangles, il y en a au moins deux qui ont deux côtés communs avec le polygone ; à ces deux triangles correspondent deux sommets d'où partent deux arêtes latérales, donc deux faces triangulaires. Nous venons de retrouver le théorème d'existence de deux faces triangulaires dans le polyèdre T !

A chaque sommet du polygone T_n^* , associons le nombre des **diagonales** qui en sont issues. Puisque nous avons rangé les sommets dans un ordre donné, nous obtenons ainsi une suite de n entiers qui, comme précédemment, définit un cycle ; c'est, évidemment, le même que celui qui a été défini pour le polyèdre T_n . A tout polygone convexe triangulé est donc associée une **formule**, la même que celle du polyèdre T_n correspondant.



On retrouve également la relation de récurrence établie au § 7. La troncature triangulaire se traduit, en effet, au niveau du dual, par l'addition au polygone T_n^* d'un triangle supplémentaire, construit sur un de ses côtés et vers l'extérieur (fig. 12). Cela provoque bien, dans la formule, l'insertion d'un zéro et l'augmentation d'une unité des deux nombres encadrant ce zéro.

Figure 12

Si, pour représenter des polygones triangulés équivalents, c'est-à-dire ayant même formule, nous utilisons des **polygones réguliers** de même dimension, cette équivalence se traduit par une **isométrie**. Le problème de la recherche des classes de polyèdres T_n et leur dénombrement est donc "*isomorphe*" au problème de la triangulation (à une isométrie près) d'un polygone régulier de n côtés. Ainsi nous savons que s'il n'y a que trois façons de trianguler un hexagone, il y en a 82 pour

le décagone, 733 pour le dodécagone...

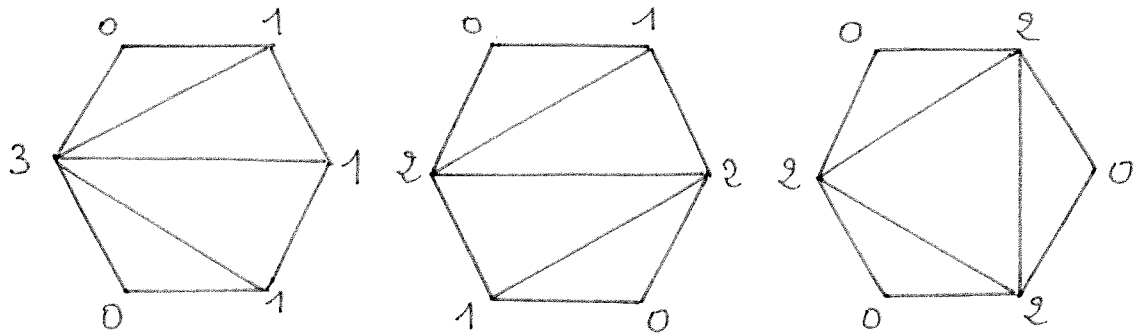


Figure 13

Polygone T_6^* duals des polyèdres T_6 de la figure 10

Conclusion.

J'espère que ces polyèdres, curieux malgré leur simplicité, auront amusé le lecteur autant qu'ils m'ont amusé moi-même. Je pense qu'ils constituent un bon matériel de travaux pratiques de géométrie de l'espace, en raison de la facilité avec laquelle on peut les matérialiser, les dessiner ou les développer. Ils peuvent aussi fournir l'occasion d'introduire, de façon très élémentaire, des notions qui le sont moins comme équivalence, récurrence, cycle, dualité ...

GÉOMÉTRIQUE

Dans un parallélépipède rectangle se déplaçant le long d'une ligne droite d'équation $84x + S = y$, un hommoïde A présentant une calotte sphérique entourée de deux sinusoides, au-dessus d'une partie cylindrique de longueur $l > n$, présente un point de contact avec un hommoïde trivial B .

Démontrer que ce point de contact est un point de rebroussement.

Si l'hommoïde A rencontre un hommoïde homologue C , alors le point de contact est un disque de rayon $r < l$.

Déterminer la hauteur h de ce point de contact par rapport à l'axe vertical de l'hommoïde A .

R. QUENEAU
Exercices de style
 N° 95

LE PARADOXE DE HAUSDORFF – BANACH – TARSKI

L.-E. DUBINS

Cet article est paru en 1979, dans le numéro 12 de la ‘*Gazette des Mathématiciens*’. Le lecteur intéressé trouvera l’état actuel de la question et une bibliographie abondante dans ‘*The Banach-Tarski paradox*’ par Stan WAGON, *Encyclopedia of Mathematics and its applications*, Vol. 24, Cambridge Univ. Press.

Il s’énonce de la manière suivante (les définitions précises seront données plus loin) : “*Si X et Y sont deux parties de \mathbb{R}^3 bornées et d’intérieur non vide, il est possible de découper X en un nombre fini de morceaux et de réarranger ceux-ci pour obtenir Y* ”.

L’essentiel du paradoxe est contenu dans le lemme suivant, qui en constitue la partie géométrique.

LEMME.— *Soit S la sphère unité de \mathbb{R}^3 (d’équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Il existe deux rotations a et b dans SO_3 , d’angles respectifs 180° et 120° , et une partition (A, B, C, D) de S telles que D est dénombrable, et que*

$$C = bB = b^2A ; A = a(B \cup C).$$

Autrement dit, l’ensemble A est à la fois le tiers et la moitié de $S - D$.

Démonstration.— On pose

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

et on appelle G le groupe engendré par a et b , qui est constitué de l’identité e , de a , et des rotations de la forme

$$(1) \quad r = a^{\epsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} a \dots a b^{n_{k-1}} a b^{n_k} a^{\epsilon_2},$$

où $k \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ et $n_i \in \{1, 2\}$. On remarque que tout élément de $G - \{e, a\}$ admet une seule écriture du type (1). (Ceci revient en effet à vérifier qu’un produit $b^{n_1} a b^{n_2} a \dots a b^{n_k} a$ ($k \in \mathbb{N}^*$, $n_i \in \{1, 2\}$) n’est jamais égal à a ou à e ; or on vérifie facilement par récurrence qu’un tel produit est de la forme

$$\frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \sqrt{3} \\ i_1 & p_4 & i_2 \sqrt{3} \\ i_3 \sqrt{3} & p_5 \sqrt{3} & i_4 \end{pmatrix}$$

où les p_j sont des entiers pairs et les i_j des entiers impairs.) Le groupe G est donc le groupe des mots réduits formés à l'aide des lettres a et b , les seules règles de réduction étant $a^2 = b^3 = e$.

On peut maintenant définir une partition (G_1, G_2, G_3) de G selon la règle suivante : pour $n \geq 0$, on met dans G_1 les mots $(b^2a)^n$, dans G_2 les mots $a(b^2a)^n$ et dans G_3 les mots $ba(b^2a)^n$; les autres mots sont mis dans G_1 (resp. G_2, G_3) selon qu'ils commencent (à gauche) par a (resp. b^1, b^2). On vérifie sans peine les égalités $G_3 = bG_2 = b^2G_1, G_1 = a(G_2 \cup G_3)$.

Il ne reste qu'à faire opérer G sur S . L'ensemble

$$D = \{x \in S : \exists r \in G - \{e\} \quad rx = x\}$$

est formé des intersections avec S des axes des rotations $r \in G - \{e\}$; c'est un ensemble dénombrable, stable par G . Pour $x \in S - D$, l'orbite de x sous G est en bijection avec G par $r \leftrightarrow rx$. On choisit un représentant de chacune des orbites contenues dans $S - D$; grâce à l'axiome du choix, ceci peut se faire de manière à obtenir un ensemble E . On pose alors $A = G_1E, B = G_2E, C = G_3E$; compte tenu des propriétés de G_1, G_2, G_3 , on vérifie sans peine, orbite par orbite, que A, B, C forment une partition de $S - D$ et satisfont à

$$C = bB = b^2A \quad ; \quad A = a(B \cup C).$$

Le reste de la démonstration du paradoxe est consacré à des manipulations d'ensembles.

La notation $X \equiv Y$ signifiant que les parties X et Y de \mathbb{R}^3 se correspondent par un déplacement, on dira que deux parties X et Y de \mathbb{R}^3 sont **équivalentes par découpage fini** (et on écrira $X \equiv_f Y$) si l'on a $X_1 \equiv Y_1, X_2 \equiv Y_2, \dots, X_n \equiv Y_n$ pour une partition (X_1, \dots, X_n) de X et une partition (Y_1, \dots, Y_n) de Y . Lorsque c'est le cas, il existe une bijection f de X sur Y ayant même restriction à chaque X_i qu'un déplacement f_i de \mathbb{R}^3 : une telle bijection sera dite associée à l'équivalence entre X et Y .

L'énoncé exact du paradoxe est le suivant : **Deux parties bornées d'intérieur non vide de \mathbb{R}^3 sont toujours équivalentes par découpage fini.**

Les propriétés de l'équivalence par découpage fini qui seront utilisées dans la suite sont

- a) une propriété d'union disjointe : si les unions $X \cup X'$ et $Y \cup Y'$ sont disjointes, et si $X \equiv_f Y$ et $X' \equiv_f Y'$, alors $X \cup X' \equiv_f Y \cup Y'$;
- b) la transitivité, qui en fait une relation d'équivalence : si $X \equiv_f Y$ et $Y \equiv_f Z$, il existe des partitions finies P_X et P_Z de Y qui correspondent respectivement à des partitions de X et Z ; si P est alors une partition finie de Y plus fine que P_X et P_Z , les éléments de P convenablement déplacés permettent de reconstituer aussi bien X que Z , d'où $X \equiv_f Z$;

c) enfin, une propriété analogue au théorème de CANTOR-BERNSTEIN : si, pour une partie X' de X et une partie Y' de Y , on a $X \equiv_f Y'$ et $X' \equiv_f Y$, alors $X \equiv_f Y$. Soient en effet $f : X \rightarrow Y'$ une bijection associée à l'équivalence entre X et Y' et $g : X' \rightarrow Y$ une bijection associée à l'équivalence entre X' et Y . La démonstration classique du théorème de CANTOR-BERNSTEIN fournit l'existence d'une partie X'' de X' telle que

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X - X'' \\ g(x) & \text{si } x \in X'' \end{cases}$$

soit une bijection de X sur Y (par exemple $X'' = X - \bigcup_{n \geq 0} (g^{-1} \circ f)^n (X - X'')$). La restriction de f à chaque élément d'une certaine partition finie P de X est la trace d'un déplacement; il en va de même pour g et une partition finie Q de X' . Les partitions P et Q induisent respectivement des partitions traces P' et Q' sur $X - X''$ et X'' . La réunion $P' \cup Q'$ est une partition finie de X sur chaque élément de laquelle la restriction de h coïncide avec un déplacement, d'où l'équivalence entre X et Y .

Reprenons maintenant la démonstration du paradoxe où nous l'avions laissée, c'est-à-dire à la sphère unité découpée en quatre morceaux A, B, C et D , ce dernier étant dénombrable, tels que $A \equiv B \equiv C$ et $A \equiv B \cup C$. Donnons-nous deux autres sphères de rayon un, S' et S'' , disjointes. La translation qui envoie S sur S' (resp. S'') transforme A, B, C et D en A', B', C' et D' (resp. A'', B'', C'' et D''). Les neuf ensembles $A, A', A'', B, B', B'', C, C'$ et C'' se correspondent par déplacement; de $A \equiv B \cup C$, on peut donc déduire

$$A \equiv_f A' \cup A'' \quad B \equiv_f B' \cup B'' \quad C \equiv_f C' \cup C'',$$

et, par réunions disjointes, $(S - D) \equiv_f (S' - D') \cup (S'' - D'')$.

Ceci constitue le résultat de HAUSDORFF : à des ensembles dénombrables près, la sphère S équivaut par découpage fini à $S' \cup S''$. La suite est due à BANACH et TARSKI : élimination des ensembles dénombrables, puis généralisation à des parties quelconques.

L'élimination de l'ensemble D se fait en remarquant que l'ensemble des rotations r qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \quad \forall y \in D - \{x\} \quad r^n x \neq y$$

n'est pas vide, car son complémentaire dans SO_3 est dénombrable. Soit donc r possédant cette propriété; les ensembles $D, rD, \dots, r^n D, \dots$ sont deux à deux disjoints. En notant U leur union, on a $rU = U - D$, d'où $U \equiv U - D$. On en déduit $U \cup (S - U) \equiv_f (U - D) \cup (S - U)$, c'est-à-dire $S \equiv_f (S - D)$. De même, on montre que $S' \equiv_f (S' - D')$ et $S'' \equiv_f (S'' - D'')$, ce qui permet de transformer le résultat de HAUSDORFF en $S \equiv S' \cup S''$.

Il existe donc des partitions $(S_1, \dots, S_{m+n}), (S'_1, \dots, S'_m)$ et (S''_1, \dots, S''_n) de S, S' et S'' telles que $S_1 \equiv S'_1, \dots, S_m \equiv S'_m, S_{m+1} \equiv S''_1, \dots, S_{m+n} \equiv S''_n$. En remplaçant les S_i par $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} tS_i$ et les S'_i et S''_i par des ensembles analogues, on en déduit

$$T - \{O\} \equiv_f (T' - \{O'\}) \cup (T'' - \{O''\}),$$

où T, T' et T'' sont des boules fermées de frontières S, S' et S'' , et O, O' et O'' leurs centres respectifs.

Il est facile d'en déduire $T \equiv_f T' \cup T''$: il suffit pour cela de vérifier que $T - \{O\} \equiv_f T$, ou encore, puisqu'on a évidemment pour $x \in S$ $T - \{O\} \equiv_f T - \{x\}$, que $T - \{x\} \equiv_f T$ pour un x de S . Mais ceci résulte de l'équivalence $S - \{x\} \equiv_f S$ (vraie — voir plus haut — car l'ensemble $\{x\}$ est dénombrable) à laquelle il suffit de rajouter l'ensemble $T - S$.

Nous savons donc qu'une boule unité équivaut à deux boules unité. Il est facile d'en déduire par récurrence que, **pour $n \geq 1$, une réunion disjointe de n boules unité équivaut, par découpage fini, à une boule unité.**

Jusqu'ici, la propriété de CANTOR-BERNSTEIN n'a pas été utilisée. Elle va servir à passer des boules au cas des ensembles quelconques.

Soit X une partie bornée de \mathbb{R}^3 qui contient une boule fermée X' de rayon $r > 0$. Il est possible de découper X en un nombre fini, soit n , de morceaux qui sont chacun inclus dans une boule de rayon r . Donnons-nous par ailleurs une réunion Z de n boules fermées disjointes de rayon r . Par définition de n , X est équivalente par découpage fini à une partie Z' de Z ; d'autre part, le travail fait sur les boules de rayon un se généralise par homothétie aux boules de rayon r , d'où $X' \equiv_f Z$. Grâce à la propriété de CANTOR-BERNSTEIN, on a alors $X \equiv_f Z$, donc $X \equiv_f X'$.

Si maintenant X et Y sont deux parties bornées d'intérieur non vide de l'espace \mathbb{R}^3 , elles contiennent respectivement des boules X' et Y' de même rayon $r > 0$, et, de $X \equiv_f X'$ et $Y \equiv_f Y'$, on déduit $X \equiv_f Y$: le paradoxe est établi dans toute sa généralité.

REMARQUES

On n'a pas cherché ici la construction la plus économique possible. R. ROBINSON a montré $T \equiv_f T' \cup T''$ en découplant T' et T'' en **trois** morceaux chacune!

Le même paradoxe n'a pas lieu dans \mathbb{R}^2 . Mais si l'on remplace, dans la définition de $X \equiv Y$, le groupe des déplacements par SL (qui conserve aussi la mesure), le paradoxe **a lieu** en dimension 2.

En dimension 1, disons que $A \geq B$ s'il existe une bijection 1-lipschitzienne de A sur B , et que $A \geq_f B$ s'il existe des partitions (A_1, \dots, A_n) et (B_1, \dots, B_n) de A et B telles que, pour tout i , $A_i \geq B_i$. Il est faux que $[0, 1] \equiv_f [0, 10]$, mais vrai que $[0, 1] \geq_f [0, 10]$!

LE PARADOXE DE GUMBEL

Jean LEFORT

On connaît dans \mathbb{R} le théorème :

“Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure”

Considérons maintenant l'âge de décès d'un individu quelconque. Si on prend en compte l'ensemble de ces âges pour les personnes déjà mortes, on a un ensemble fini et il n'est pas difficile (en théorie) de trouver une borne supérieure. Dans la pratique, la falsification est souvent de règle !

Si l'on considère l'âge de décès dans l'absolu (en supposant les conditions sociales constantes), on peut parfaitement imaginer un ensemble infini. De deux choses l'une :

- Ou l'on admet que cet ensemble est majoré, alors il existe un âge limite où la probabilité de mourir dans l'instant est de 100%;
- ou l'on admet que cet ensemble n'est pas majoré, mais alors il existerait une chance (infime) pour qu'un individu atteigne les 969 ans attribués à MATHUSALEM!

Disons tout de suite que rien ne permet de trancher entre les deux hypothèses. On peut mieux en comprendre les raisons en examinant les tableaux ci-après :

	Survivants		Espérance de vie en années	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
90 ans	100 000	100 000	2,67	3,11
95 ans	15 150	20 800	2,06	2,27
100 ans	1 230	2 180	1,32	1,64
101 ans	611	1 230	1,20	1,57
102 ans	329	670	1,07	1,50
103 ans	177	357	0,95	1,41
104 ans	94	184	0,83	1,32
105 ans	44	91	0,71	1,20
106 ans	18	44	0,58	1,01
107 ans	4	20	0,44	0,71
108 ans	-	8	0,31	0,44
109 ans	-	3	0,19	0,25
110 ans	-	-	-	0,10

Tableau 1

Table de survie au dessus de 90 ans.

	Hommes	Femmes
Naissances	428 000,00	407 000,0
90 ans	11 950,00	13 850,0
100 ans	155,00	299,0
105 ans	4,90	13,0
106 ans	2,00	6,7
107 ans	0,36	3,5
108 ans	-	1,1

Tableau 2

Les survivants d'une génération moyenne

Avant de les commenter, précisons ce que l'on entend par *espérance de vie à un âge donné*.

Considérons par exemple toutes les personnes (de telle région, de tel sexe, ...) qui ont 60 ans en 1987. En moyenne, ces personnes vont mourir à un âge de $60 + x$ ans. x s'appelle l'espérance de vie à 60 ans. Il est clair que x ne pourra être connu que quand toutes ces personnes seront décédées. C'est pourquoi on approche x par y où $60 + y$ est l'âge moyen des personnes de plus de 60 ans mortes en 1987. En raison des progrès médicaux, il est vraisemblable que l'on a $x \geq y$. Dans le cas de très faibles effectifs, on peut faire le regroupement sur plusieurs années.

En revenant aux tableaux, on remarque que si le nombre de survivants diminue rapidement, il n'en est pas de même de l'espérance de vie. Reste à savoir comment évolue cette espérance en fonction de l'âge.

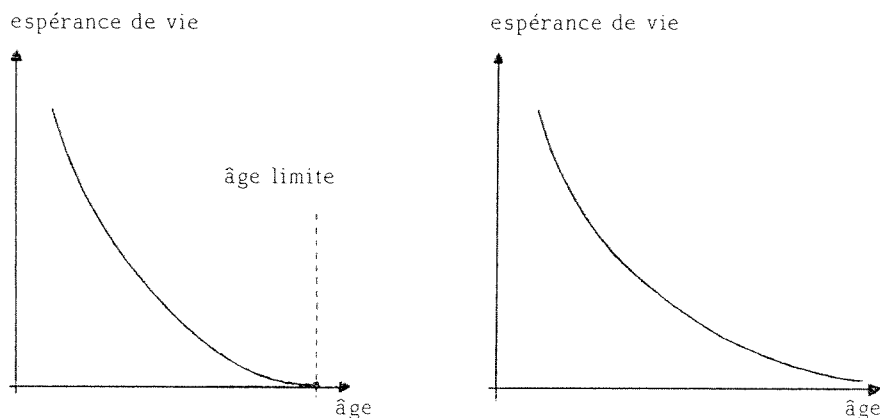


Figure 3

Deux hypothèses sur la vie extrême

Soit la courbe s'annule, soit il y a une asymptote horizontale. Il est clair qu'il est impossible de trancher à l'aide des seules statistiques puisque cela jouera sur quelques, voir un seul individu. Il se peut que la probabilité de mourir dans l'instant se rapproche si rapidement de 1 que les statistiques ne permettront jamais de

trancher.

Enfin, on n'oubliera pas que le raisonnement s'est fait à conditions sociales constantes, ce qui n'est jamais le cas; pour s'en rendre compte, il suffit de comparer différents pays. Le paradoxe de GUMBEL a encore de beaux jours devant lui.

A. GROTHENDIECK REFUSE LE PRIX CRAFOORD

Le prix Crafoord, décerné par l'Académie Royale des Sciences de Suède et d'une valeur de 270 000 dollars devait être attribué cette année à Alexandre GROTHENDIECK et à son élève Pierre DELIGNE, tous deux déjà médaille Fields.

Dans une lettre à l'Académie, A. GROTHENDIECK explique les raisons de son refus qui s'étendrait d'ailleurs à tout autre prix qui pourrait lui être décerné. Ces raisons sont au nombre de trois, la dernière étant pour lui fondamentale.

1°) Son salaire lui suffit et quant aux honneurs la fécondité de ses travaux lui paraît être la seule épreuve décisive.

2°) Les honneurs paraissent attirer les honneurs, laissant dans l'ombre bien des chercheurs très valables.

3°) Le prix Crafoord couronnerait des travaux datant de 1970! Depuis cette date, son cheminement intérieur l'a éloigné des milieux scientifiques dont l'esprit se dégrade de plus en plus et qui tolère le pillage entre confrères aux dépens des plus faibles. Pour lui, accepter le prix serait donner sa caution à une évolution qu'il reconnaît comme profondément malsaine.

A. GROTHENDIECK termine sa lettre en évoquant les profonds bouleversements à venir d'ici la fin du siècle dans la pratique et les objectifs de la "science".

Les idées résumées dans sa lettre sont longuement exposées dans un ouvrage à paraître : "*Récoltes et semailles*" dont des photocopies ont été distribués par ses soins auprès de ses collègues de géométrie algébrique.

A PROPOS DE L'ÉQUATION CYCLOTOMIQUE $X^{11} - 1 = 0$

Jacques DAUTREVAUX (*)

A la suite de mon article “*Des équations qui déterminent les sections circulaires*” (*L'Oouvert* n° 46 et 47), M. DAUTREVAUX a bien voulu prendre le temps de détailler certains calculs et d'en dégager la structure en termes modernes de théorie des groupes. Qu'il en soit vivement remercié. Un tel éclairage n'est pas inutile pour comprendre en profondeur ce qui restait caché aux acteurs mêmes de ce qu'ils inventaient peu à peu, péniblement, à la manière de somnambules, pour reprendre un titre célèbre de A. KOESTLER. Veillons simplement à ne pas confondre ce point de vue avec le point de vue historique dans lequel se situe l'article en question. Celui-ci avait pour objectif de présenter aux lecteurs un certain nombre de **faits et de textes historiques** constitutifs du laborieux processus d'émergence d'un nouveau concept, d'un nouvel outil : la structure de groupe. Il est à placer dans la série d'articles commencée dans *L'Oouvert* avec le n° 44 par “*Le problème de la résolution des équations algébriques dans l'émergence du concept de groupe*”, et dont le plus récent est celui d'Etienne KOEHLER sur “*Un mémoire fondateur de CAUCHY*” (*L'Oouvert* n° 49).

J.-P. FRIEDELMEYER

Une étude fort détaillée parue dans *L'Oouvert* n° 46 sous la signature de Jean-Pierre FRIEDELMEYER mentionne la méthode mise en œuvre par VANDERMONDE.

L'équation $x^{11} - 1 = 0$, dont les racines sont les onze racines onzièmes de l'unité se réduit après élimination de la racine 1 à l'équation cyclotomique $x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, dont les racines sont les dix racines onzièmes de l'unité non réelles. Selon la méthode bien connue de traitement des équations dites *réciproques* on obtient en posant $u = x + \frac{1}{x}$ (0 n'étant pas racine), selon la notation utilisée de nos jours l'équation résolvante :

$$(E) \quad u^5 + u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3u + 1 = 0$$

dont les cinq racines sont réelles car elles représentent deux fois les parties réelles des racines onzièmes de l'unité : l'ensemble de ces racines est donc l'ensemble $\{2 \cos \frac{2\pi}{11}, 2 \cos \frac{4\pi}{11}, 2 \cos \frac{6\pi}{11}, 2 \cos \frac{8\pi}{11}, 2 \cos \frac{10\pi}{11}\}$.

Le calcul effectif de ces racines, montrant que les racines de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$ (que n soit premier ou non) s'expriment par radicaux, laisse le lecteur quelque peu sur sa faim : l'expression explicite des racines fait en effet intervenir quatre quantités de la forme Δ , définies chacune comme racine cinquième d'un nombre complexe, donc avec cinq déterminations possibles : il y a donc un problème de coordination des déterminations à choisir pour les quatre quantités Δ intervenantes.

© L'OUVERT 51 (1988)

(*) Maître-Assistant honoraire – Université de Haute Alsace

A PROPOS DE L'ÉQUATION CYCLOTOMIQUE $X^{11} - 1 = 0$

A signaler toutefois que la quantité Δ^5 n'étant pas symétrique par rapport aux racines de l'équation, n'est donc pas **directement** calculable au moyen des fonctions symétriques élémentaires des racines, et que, par ailleurs, les cinq racines cinquièmes de l'unité ne sont linéairement indépendantes ni sur \mathbb{Z} (le rang y est 4) ni sur \mathbb{R} (le rang est 2), ce qui rend difficile la comparaison de calculs et de résultats obtenus par différentes techniques calculatoires.

Dans ce qui suit, je vais m'efforcer de conduire le calcul rigoureux des racines de l'équation (E) par la méthode précitée, et ensuite de voir comment éviter les artifices rencontrés.

Soit donc l'équation (E), dont les racines a, b, c, d, e sont individualisées de la façon suivante :

$$a = 2 \cos \frac{2\pi}{11}, \quad b = 2 \cos \frac{4\pi}{11}, \quad c = 2 \cos \frac{8\pi}{11},$$

$$d = 2 \cos \frac{6\pi}{11}, \quad e = 2 \cos \frac{10\pi}{11}.$$

Des calculs trigonométriques simples donnent les relations de linéarisation suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} a^2 = b + 2 & ab = a + d & ac = d + e & ad = b + c & ae = c + e \\ & b^2 = c + 2 & bc = b + e & bd = a + e & be = c + d \\ & & c^2 = d + 2 & cd = a + c & ce = a + b \\ & & & d^2 = e + 2 & de = b + d \\ & & & & e^2 = a + 2 \end{array}$$

et par ailleurs on a $a + b + c + d + e = -1$ (somme des racines de (E)).

On notera par ailleurs que, avec le choix ainsi fait de a, b, c, d, e on aura $-1 < e < c < d < 0 < b < a < 1$, classement qui nous sera utile à la fin pour découvrir les valeurs explicites de ces racines.

Considérons l'expression $\delta(r) = a + br + cr^2 + dr^3 + er^4$, dans laquelle r désigne une des racines cinquièmes de l'unité. Il est clair que $\delta(1) = -1$ et que, pour les quatre racines cinquièmes non réelles, qu'on peut noter $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ (ω et ω^4 sont inverses, donc conjuguées, et de même ω^2 et ω^3), où ω est l'une quelconque d'entre elles, $\delta(r)$ prend quatre valeurs distinctes deux à deux conjuguées (car a, b, c, d, e sont réels) et on pourra alors écrire :

$$\begin{array}{l} a+b+c+d+e = -1 \\ a+b\omega+c\omega^2+d\omega^3+e\omega^4 = \delta \\ a+b\omega^2+c\omega^4+d\omega+e\omega^3 = \delta' \\ a+b\omega^3+c\omega+d\omega^4+e\omega^2 = \overline{\delta'} \\ a+b\omega^4+c\omega^3+d\omega^2+e\omega = \overline{\delta} \end{array}$$

La résolution de ce système donne immédiatement les valeurs de a, b, c, d, e lorsqu'on connaît δ et δ' .

Compte tenu de $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, on voit facilement que l'on obtient :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{5}(-1 + \delta + \delta' + \bar{\delta}' + \bar{\delta}) & b &= \frac{1}{5}(-1 + \delta\omega^4 + \delta'\omega^3 + \bar{\delta}'\omega^2 + \bar{\delta}\omega) \\ c &= \frac{1}{5}(-1 + \delta\omega^3 + \delta'\omega + \bar{\delta}'\omega^4 + \bar{\delta}\omega^2) & d &= \frac{1}{5}(-1 + \delta\omega^2 + \delta'\omega^4 + \bar{\delta}'\omega + \bar{\delta}\omega^3) \\ e &= \frac{1}{5}(-1 + \delta\omega + \delta'\omega^2 + \bar{\delta}'\omega^3 + \bar{\delta}\omega^4) \end{aligned}$$

ce qui résout complètement le problème à condition de connaître δ et δ' .

On peut observer aussi que :

$$\delta\bar{\delta} = (a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + e\omega^4)(a + b\omega^4 + c\omega^3 + d\omega^2 + e\omega)$$

est une expression de la forme

$$A + B\omega + C\omega^2 + D\omega^3 + E\omega^4$$

où

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = a + b + c + d + e + 10 = 9 \\ B &= E = ab + bc + cd + de + ae = 2(a + b + c + d + e) = -2 \\ C &= D = ac + ce + be + bd + ad = 2(a + b + c + d + e) = -2 \end{aligned}$$

compte tenu des relations de linéarisation déjà vues, provenant de l'affectation à a, b, c, d, e des valeurs numériques précisées, soit :

$$\delta\bar{\delta} = 9 - 2(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = 11 \text{ puisque } 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0.$$

On a de même $\delta'\bar{\delta}' = 11$ puisqu'il s'agit seulement du remplacement de ω par ω^2 . Il en résulte que

$$\|\delta\|^2 = \|\delta'\|^2 = 11.$$

On remarque que, par la permutation circulaire $(abcde)$ δ est transformé en $\delta\omega^4$, puis, en itérant cette transformation, successivement en $\delta\omega^3, \delta\omega^2$ et $\delta\omega$.

Il en résulte que l'expression $\Delta(r) = [\delta(r)]^5$ est invariante par la permutation circulaire $(abcde)$, donc par le groupe cyclique d'ordre 5 qu'elle engendre : $\Delta(r)$ ne prend donc que 24 valeurs distinctes correspondant aux $4! = 24$ permutations possibles de l'ensemble $\{b, c, d, e\}$, un changement du choix de r parmi les 4 racines non réelles de l'unité $\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ étant équivalent à une permutation de l'ensemble $\{b, c, d, e\}$.

Calculons $\Delta(r) = [\delta(r)]^5 = [a + br + cr^2 + dr^3 + er^4]^5$, pour un choix à préciser ultérieurement de r dans l'ensemble $\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$, en utilisant les relations de linéarisation vues plus haut, provenant de l'affectation à a, b, c, d, e des valeurs numériques précisées.

On trouve tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 [\delta(r)]^2 &= (2c - 2e - b) + (2a - 2c - e)r + (2d - 2a - c)r^2 \\
 &\quad + (2b - 2d - a)r^3 + (2e - 2b - d)r^4 \\
 &= (2r - 2r^2 - r^3)a + (-1 + 2r^3 - 2r^4)b + (2 - 2r - r^2)c \\
 &\quad + (2r^2 - 2r^3 - r^4)d + (-2 - r + 2r^4)e \\
 &= (2r - 2r^2 - r^3)(a + br^2 + cr^4 + dr + er^3) \\
 &= (2r - 2r^2 - r^3)\delta(r^2)
 \end{aligned}$$

On a par suite la relation $\delta^2 = (2\omega - 2\omega^2 - \omega^3)\delta'$.

$2\omega - 2\omega^2 - \omega^3$ ayant pour conjugué $2\omega^4 - 2\omega^3 - \omega^2$, le carré de son module est

$$\begin{aligned}
 \|2\omega - 2\omega^2 - \omega^3\|^2 &= (2\omega - 2\omega^2 - \omega^3)(-\omega^2 - 2\omega^3 + 2\omega^4) \\
 &= 9 - 2\omega - 2\omega^2 - 2\omega^3 - 2\omega^4 \\
 &= 9 - 2(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = 11
 \end{aligned}$$

et son inverse est $\frac{1}{11}(-\omega^2 - 2\omega^3 + 2\omega^4)$ de sorte que

$$\delta' = \frac{1}{11}(-\omega^2 - 2\omega^3 + 2\omega^4)\delta^2.$$

Il s'ensuit que la seule connaissance de δ (qui détermine ensuite $\bar{\delta}$, δ' et $\bar{\delta}'$) suffit pour obtenir les expressions explicites de a, b, c, d, e .

Continuons : $[\delta(r)]^3 = [\delta(r)]^2\delta(r) = (2r - 2r^2 - r^3)\delta(r^2)\delta(r)$ et, selon le même procédé que précédemment on obtient :

$$\begin{aligned}
 \delta(r^2)\delta(r) &= (2b - 2c - d) + (2d - 2e - a)r + (2a - 2b - c)r^2 \\
 &\quad + (2c - 2d - e)r^3 + (2e - 2a - b)r^4 \\
 &= (-r + 2r^2 - 2r^4)a + (2 - 2r^2 - r^4)b + (-2 - r^2 + 2r^3)c \\
 &\quad + (-1 + 2r - 2r^3)d + (-2r - r^3 + 2r^4)e \\
 &= (-r + 2r^2 - 2r^4)(a + br^3 + cr + dr^3 + er^2) \\
 &= (-r + 2r^2 - 2r^4)\delta(r^3)
 \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
 [\delta(r)]^3 &= (2r - 2r^2 - r^3)(-r + 2r^2 - 2r^4)\delta(r^3) \\
 &= (-6 + 4r + 6r^3 - 3r^4)\delta(r^3)
 \end{aligned}$$

et la relation

$$\delta^3 = (-6 + 4\omega + 6\omega^3 - 3\omega^4)\bar{\delta}'.$$

Ensuite :

$$[\delta(r)]^4 = [\delta(r)]^3\delta(r) = (6r + 3r^2 + 10r^3 + r^4)\delta(r^3)\delta(r)$$

et comme précédemment :

$$\begin{aligned}
 \delta(r^3)\delta(r) &= (2b - 2c - d) + (2a - 2b - c)r + (2e - 2a - b)r^2 \\
 &\quad + (2d - 2e - a)r^3 + (2c - 2d - e)r^4 \\
 &= (2r - 2r^2 - r^3)a + (2 - 2r - r^2)b + (-2 - r + 2r^4)c \\
 &\quad + (-1 + 2r^3 - 2r^4)d + (2r^2 - 2r^3 - r^4)e \\
 &= (2r - 2r^2 - r^3)(a + br^4 + cr^3 + dr^2 + cr) \\
 &= (2r - 2r^2 - r^3)\delta(r^4)
 \end{aligned}$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
 [\delta(r)]^4 &= (-6 + 4r + 6r^3 - 3r^4)(2r - 2r^2 - r^3)\delta(r^4) \\
 &= (-18 - 12r + 23r^2 - 2r^3 + 8r^4)\delta(r^4) \\
 &= (6r + 41r^2 + 16r^3 + 26r^4)\delta(r^4)
 \end{aligned}$$

et la relation :

$$\delta^4 = (6\omega + 41\omega^2 + 16\omega^3 + 26\omega^4)\bar{\delta}.$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
 [\delta(r)]^5 &= [\delta(r)]^4\delta(r) = (6r + 41r^2 + 16r^3 + 26r^4)\delta(r^4)\delta(r) \\
 &= 11(6r + 41r^2 + 16r^3 + 26r^4)
 \end{aligned}$$

puisque $\delta(r)$ et $\delta(r^4)$ sont conjugués, leur produit est $\|\delta(r)\|^2 = 11$.

On a donc, dans les hypothèses précisées au début, et avec les valeurs numériques précisées pour a, b, c, d, e :

$$\Delta(r) = 11(6r + 41r^2 + 16r^3 + 26r^4).$$

La fin du calcul est alors évidente.

Soient $\Delta = 11(6\omega + 41\omega^2 + 16\omega^3 + 26\omega^4)$ et δ_0 l'une quelconque des déterminations de la racine cinquième du nombre complexe Δ : les quatre autres déterminations sont les nombres complexes $\delta_0 r, \delta_0 r^2, \delta_0 r^3$ et $\delta_0 r^4$, où r est l'une quelconque des racines cinquièmes non réelles de l'unité, pour laquelle il nous est loisible de prendre $r = \omega$.

On pose $\delta'_0 = \frac{1}{11}(-\omega^2 - 2\omega^3 + 2\omega^4)\delta_0^2$: il en résulte qu'à $\delta_0\omega$ est associé $\delta'_0\omega^2$, à $\delta_0\omega^2$ est associé $\delta'_0\omega^4$, à $\delta_0\omega^3$ est associé $\delta'_0\omega$ et à $\delta_0\omega^4$ est associé $\delta'_0\omega^3$.

L'expression $\frac{1}{5}(-1 + \delta + \delta' + \bar{\delta} + \bar{\delta}')$ est susceptible de prendre cinq valeurs différentes, résumées dans la formule :

$$x_i = \frac{1}{5}(-1 + \delta_0\omega^i + \delta'_0\omega^{2i} + \bar{\delta}'_0\omega^{3i} + \bar{\delta}_0\omega^{4i}) \quad \text{avec } 0 \leq i \leq 4$$

(où les exposants $2i, 3i, 4i$ sont réduits modulo 5), et l'on voit alors sans peine que le quintuplet $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ représente à une permutation circulaire près

le quintuplet (a, b, c, d, e) des racines cherchées; en fait c'est celui des x_i qui est l'élément maximal du quintuplet qui représente effectivement a ; mais le classement des cinq valeurs attribuées aux racines cherchées a, b, c, d, e permet effectivement d'attribuer à chacune d'elles chacune des cinq valeurs trouvées.

Le calcul de $\Delta(\omega)$ est alors aisé, il en résulte cinq valeurs de δ d'où la formule $\frac{1}{5}(-1 + \delta + \delta' + \delta'' + \delta''')$ fournit les cinq racines a, b, c, d, e dans un ordre dépendant du choix de la première détermination de δ et de l'ordre dans lequel sont prises les suivantes, mais, en raison de la symétrie de la formule, indépendant du choix initial de ω .

La méthode de calcul ainsi exposée donne lieu, en apparence, à des calculs assez aisés dont la raison principale aura été le choix d'une indexation convenable des racines de l'équation (E) : si on tente de refaire les calculs en intervertissant les valeurs numériques attribuées à deux des racines, a et b par exemple, on ne retrouve plus la lumineuse simplicité et la symétrie constatées. Si par exemple vous n'affectez pas de valeurs aux cinq racines a, b, c, d, e , vous pouvez calculer effectivement la quantité $\Delta(r)$ sous la forme $A + Br + Cr^2 + Dr^3 + Er^4$, dans laquelle chacun des coefficients A, B, C, D, E est effectivement invariant par toutes les permutations circulaires itérées du cycle $(abcde)$, mais seulement par celles-là et ne s'exprimant donc pas au moyen des fonctions symétriques élémentaires des racines de (E). A titre d'exemple, on obtient :

$$B = 5\Sigma a^4b + 10\Sigma a^3b^2 + 30\Sigma a^2bd^2 + 20\Sigma abe^3 + 60\Sigma a^2bde$$

où chaque Σ est étendu aux seules cinq permutations circulaires itérées de la permutation circulaire $(abcde)$. La raison essentielle du succès du mode de calcul adopté est que l'on a pu classer les cinq racines de (E) selon la formule $u_k = 2 \cos \frac{2^{k+1}\pi}{11}$, où k décrit l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$: $a = u_0$, $b = u_1$, $c = u_2$, $d = u_3$, $e = u_4$ et que cela assure que le tableau des relations de linéarisation est de la sorte invariant par les cinq permutations itérées de la permutation circulaire $(abcde)$. Ce fait est général pourvu que les racines u_k soient indexées par les exposants d'un générateur du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$, groupe cyclique, ici d'ordre 10.

Soit donc n premier impair, avec $n = 2p+1$. L'équation $x^n - 1 = 0$ après élimination de la seule racine réelle 1 se réduit à l'équation cyclotomique $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$ dont les $n - 1$ racines, non réelles, sont les racines n -ièmes de l'unité autres que 1, qui, n étant premier, sont toutes primitives (il est inutile, on le sait, de faire l'étude lorsque n est composé, car on se ramène en fait, à une succession d'équations binômes de degré premier). Si ω est l'une d'elles, l'ensemble de ces racines peut être représenté par ω^k , où k décrit l'ensemble des éléments autres que 0 dans le corps (puisque n est premier) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'où l'idée de base commune aux méthodes de GAUSS et de LAGRANGE, qui est d'associer les racines cherchées aux éléments du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, lequel est, on le sait, cyclique, en écrivant ces $n - 1$ racines (cet entier est pair) sous la forme : $x_k = e^{ig^k\alpha}$, où

$\alpha = \frac{2\pi}{n}$ et g un générateur du groupe cyclique $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Le conjugué (ou, si l'on veut, l'inverse) de x_k est un $x_{k'}$ tel que l'on ait, modulo n , $g^k + g^{k'} = 0$, ou encore $g^{|k-k'|} = -1$. Puisque g est générateur, on a : $g^{n-1} = g^{2p} = 1$ (c'est le "petit" théorème de FERMAT), on a : $g^{2p} - 1 = (g^p - 1)(g^p + 1) = 0$, soit, puisque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps et que $g^p - 1 \neq 0$ (sinon g ne serait pas générateur), $g^p + 1 = 0$, et p est évidemment l'exposant de g qu'il nous faut, de sorte que $\overline{x_k} = x_{k+p}$, et on retrouve alors bien que :

$$\overline{x_k} = e^{ig^{k+p}\alpha} = e^{-ig^k\alpha} \text{ puisque } g^p = -1.$$

On est ainsi amené à décrire les $2p$ racines de l'équation cyclotomique $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$ en deux suites de racines conjuguées respectivement $\{x_k\}$ et $\{x_{k+p}\}$ où k décrit l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Selon la méthode traditionnelle, cela revient à regrouper les racines deux par deux selon la transformation $u = x + \frac{1}{x}$ (dans la théorie de GAUSS, ces regroupements correspondent aux éléments du groupe-quotient de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ selon le sous-groupe d'ordre 2 engendré par $g^p = -1$).

Il n'y a rien de mystérieux donc à écrire les racines de l'équation résolvante en u (polynôme de degré p que l'on sait écrire dans le cas général en fonction de n) sous la forme $u_k = 2 \cos g^k \alpha$, avec $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Les relations de linéarisation s'écrivent alors aisément : $u_k^2 = 4 \cos^2 g^k \alpha = 2(1 + \cos 2g^k \alpha) = 2 + u_{k+j}$ car 2 étant un élément de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ on est assuré de trouver un j tel que $2 = g^j$, et de même pour les mêmes raisons :

$$u_i u_j = 4 \cos g^i \alpha \cos g^j \alpha = 2(\cos(g^i + g^j)\alpha + \cos(g^i - g^j)\alpha) = u_k + u_{k'},$$

où

$$g^i + g^j = g^k \text{ ou } g^{k+p} \text{ et } g^i - g^j = g^{k'} \text{ ou } g^{k'+p}.$$

Il est alors clair que l'ensemble des formules de linéarisation ainsi obtenues est invariant par toutes les permutations de $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ itérées de la permutation circulaire $(0 \ 1 \ 2 \ \dots \ p-1)$, tant il semble évident que $u_{k+1}^2 = 2 + u_{k+j+1}$ et $u_{i+1} u_{j+1} = u_{k+1} + u_{k'+1}$.

De là la méthode de VANDERMONDE, consistant à poser :

$$\delta(r) = \sum_{i=0}^{p-1} u_i r^i,$$

où r est une racine p -ième de l'unité ($r^p = 1$). On a évidemment $\delta(1) = -1$; et si ω est une racine p -ième **primitive** de l'unité, on obtiendra entre les u_i $p-1$ autres équations de la forme :

$$\delta_k = \sum_{i=0}^{p-1} u_i \omega^{ki}$$

où tous les δ_j peuvent se calculer à partir de l'un d'eux, δ_1 par exemple. Si on remarque en outre que $\Delta(r) = [\delta(r)]^p$ est invariant par toutes les permutations de $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ itérées de la permutation circulaire $(0, 1, 2, \dots, p-1)$, le calcul de $\Delta(\omega)$ en utilisant les relations de linéarisation conduira à une expression de type linéaire ayant de type d'invariance, donc nécessairement de la forme :

$$\Delta(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} A_i \omega^i, \text{ où } A_i = K_i + L_i \sum_{j=0}^{p-1} u_j = K_i - L_i.$$

Les p déterminations de la racine p -ième de $\Delta(\omega)$ fournissent alors les p racines cherchées $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$ à une permutation circulaire près, ainsi qu'il a été observé sur l'exemple traité $n = 11$. La plupart des particularités observées étaient dans ce cas masquées par le fait que $p = 5$ est premier et aussi que 2 est générateur du groupe $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$. Si on essaie de reprendre le calcul pour $n = 17$ selon cette méthode, on verra les racines u_i se regrouper par 4, puis par 2 selon les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$, groupe d'ordre $16 = 2^4$ dont 2 n'est pas un générateur (il faut prendre 3 par exemple).

Exemple : Le cas $n = 13$.

Le groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ est d'ordre 12; un de ses générateurs est 2, de sorte que les racines u_k de l'équation résolvante $u^6 + u^5 - 5u^4 - 4u^3 + 6u^2 + 3u - 1 = 0$ peuvent s'écrire $u_k = 2 \cos 2^k \alpha$, où $\alpha = \frac{2\pi}{13}$ et où l'entier k décrira l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en vertu du tableau des valeurs de 2^k modulo 13, qui définissent l'indexation des racines x_k de l'équation cyclotomique en x (de degré 12) :

$k =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2^k =$	1	2	4	-5	3	6	-1	-2	-4	5	-3	-6	1
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	

Le groupe cyclique $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, d'ordre 12, de générateur 2, contient trois sous-groupes, cycliques aussi, d'ordre 2 (engendré par -1), 4 (engendré par 5) et 6 (engendré par 4).

Le sous-groupe d'ordre 2 partage le groupe complet en six classes composées chacune de deux éléments et qui sont :

$$\{1, -1\}, \{2, -2\}, \{4, -4\}, \{-5, 5\}, \{3, -3\} \text{ et } \{6, -6\},$$

ce qui correspond à un partage de l'ensemble des douze racines x_k en six groupes de deux $\{x_0, x_6\}, \{x_1, x_7\}, \{x_2, x_8\}, \{x_3, x_9\}, \{x_4, x_{10}\}$ et $\{x_5, x_{11}\}$, tous de la forme $\{x_k, x_{k+6}\}$ avec $x_k x_{k+6} = 1$ et $x_k + x_{k+6} = u_k$: quand on connaît les six u_k , x_k et x_{k+6} sont obtenus comme racines de l'équation du second degré $x^2 - u_k x + 1 = 0$:

on obtient ainsi la raison profonde de la transformation $u = x + \frac{1}{x}$ qui, appliquée classiquement à l'équation cyclotomique $x^{12} + x^{11} + x^{10} + \dots + x^2 + x = 0$ donne comme résolvante l'équation en $u : u^6 + u^5 - 5u^4 - 4u^3 + 6u^2 + 3u + 1 = 0$, de degré 6, dont le groupe “*pilotant*” les racines est le groupe-quotient de $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ par son sous-groupe $\{1, g^6\}$ d'ordre 2. G est un groupe cyclique d'ordre 6 engendré par l'élément $\bar{2} = \{2, -2\}$ qu'on peut assimiler à 2 (au signe près — si l'on peut dire car il s'agit d'entiers modulo 13 —); il contient un sous-groupe C d'ordre 2 contenant les éléments 1 et 5 et un sous-groupe d'ordre 3 contenant les éléments 1, 3 et 4 (isomorphe au quotient de G par le premier de ces sous-groupes).

Posant $\alpha = \frac{2\pi}{13}$ on a : $u_k = 2 \cos 2^k \alpha$, ce qui permet d'établir, d'une part les quatre relations de linéarisation :

$$u_0^2 = u_1 + 2, \quad u_0 u_1 = u_0 + u_4, \quad u_0 u_2 = u_3 + u_4 \text{ et } u_0 u_3 = u_2 + u_5$$

dont toutes les autres se déduisent par des permutations circulaires itérées du cycle (0 1 2 3 4 5), et d'autre part la relation $u_{k+1} = u_k^2 - 2$ qui permet d'obtenir à partir de l'une d'elles, les six racines dans l'ordre $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ à **une permutation circulaire près**, ce qui n'est pas une réelle difficulté car il est facile de positionner u_0 sachant que u_0 est (toujours) la plus grande des racines, ainsi qu'on le voit aisément.

Le quotient de G par son sous-groupe d'ordre 2 comporte trois éléments auxquels sont associées les trois paires $\{u_0, u_3\}, \{u_1, u_4\}$ et $\{u_2, u_5\}$ de racines. Posant $v_k = u_k + u_{k+3}$ ($k \in \{0, 1, 2\}$, entier modulo 3) on voit que, si on connaît v_0, v_1 et v_2, u_k et u_{k+3} sont les racines de l'équation du second degré $u^2 - v_k u + v_{k+2} = 0$.

On détermine aisément pour les v_k des relations de linéarisation analogues à celles des u_k , se déduisant des deux suivantes :

$$v_0^2 = 3 - v_0 + v_2 \text{ et } v_0 v_1 = v_1 - 1$$

par toutes les permutations circulaires itérées du cycle (0 1 2).

De $v_0 + v_1 + v_2 = -1$ on tire $v_0^2 + v_0 v_1 + v_0 v_2 = -v_0 = v_0^2 + v_0 + v_1 - 2$, ce qui donne $v_1 = -v_0^2 - 2v_0 + 2$, puis $v_2 = v_0^2 + v_0 - 3$. Comme $v_0 v_2 = v_0 - 1 = v_0^3 + v_0^2 - 3v_0$ on a $v_0^3 + v_0^2 - 4v_0 + 1 = 0$, équation à laquelle satisfont aussi v_1 et v_2 car elle est invariante par toute permutation circulaire itérée du cycle (0 1 2). On obtient ainsi l'équation du troisième degré $v^3 + v^2 - 4v + 1 = 0$ dont les trois racines sont v_0, v_1 et v_2 , équation qu'on aurait pu former directement en calculant au moyen des formules de linéarisation les fonctions symétriques élémentaires des trois racines v_0, v_1, v_2 . La résolution de cette équation donne effectivement les valeurs numériques des trois racines, sans qu'on aie la possibilité *a priori* de les affecter aux trois quantités v_0, v_1 et v_2 parfaitement définies.

Du fait qu'il suffit, ainsi qu'on a vu, de connaître l'une quelconque des racines u_k , la méthode se simplifie finalement beaucoup et se ramène à calculer **une** racine v de l'équation du troisième degré $X^3 + X^2 - 4X + 1 = 0$, et **une** racine u de l'équation du second degré $X^2 - vX + v^2 + v - 3 = 0$.

Cette racine u est l'un des u_k , et l'utilisation itérée de la relation $u_{k+1} = u_k^2 - 2$ ($k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, entier modulo 6) permet d'obtenir, ainsi qu'il a été vu, les affectations exactes à $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ des six valeurs numériques ainsi obtenues.

Remarque : la méthode de calcul de LEGENDRE est elle-même applicable à la résolution de l'équation du troisième degré $v^3 + v^2 - 4v + 1 = 0$. Appelant j , selon l'usage, l'une des racines cubiques primitives de l'unité, et posant $\delta = v_0 + jv_1 + j^2v_2$, on a $\bar{\delta} = v_0 + j^2v_1 + jv_2$, et comme $v_0 + v_1 + v_2 = -1$, l'une des racines (ici v_0) serait $v = \frac{1}{3}(-1 + \delta + \bar{\delta})$. Un calcul aisé, utilisant les formules de linéarisation des v_k , montre que :

$$\delta\bar{\delta} = 13, \quad \delta^2 = (-1 + 3j^2)\bar{\delta} \text{ et enfin } \delta^3 = 13(-1 + 3j^2).$$

Il s'ensuit que, pour obtenir l'une, v , des racines, il suffit de prendre pour δ l'une des trois racines cubiques de $\Delta = 13(-1 + 3j^2)$.

On aurait évidemment pu procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire partir du sous-groupe d'ordre 3 de G : le groupe quotient correspond aux deux triplets $\{u_0, u_2, u_4\}$ et $\{u_1, u_3, u_5\}$ de racines u_k . Posant :

$$y_0 = u_0 + u_2 + u_4 \text{ et } y_1 = u_1 + u_3 + u_5 \text{ on a : } y_0 + y_1 = -1 \text{ et } y_0y_1 = -3$$

(ainsi qu'il résulte des relations de linéarisation), de sorte que y_0 et y_1 sont les racines de l'équation du second degré $X^2 + X - 3 = 0$, mais sans qu'on dispose du moyen *a priori* d'attribuer à y_0 et à y_1 l'une et l'autre des valeurs numériques trouvées pour ces deux racines : si l'on désigne l'une d'elles par y , l'autre est naturellement $-y - 1$ (leur somme étant -1).

Le calcul (au moyen des relations de linéarisation) des fonctions symétriques élémentaires de u_0, u_2 et u_4 montre que ces trois quantités sont racines de l'équation du troisième degré : $u^3 - y_0u^2 - u - (y_1 + 2) = 0$, sous réserve que y ait effectivement la valeur numérique à attribuer à y_0 , sinon on obtient les racines u_1, u_3 et u_5 . Mais comme tout à l'heure, la relation $u_{k+1} = u_k^2 - 2$ nous tire d'affaire car il suffit alors de connaître l'une quelconque des racines u_k . Dès lors, il suffit de calculer d'abord l'une, y , des racines de $X^2 + X - 3 = 0$, puis l'une, u , des racines de $X^3 - yX^2 - X + y - 1 = 0$. Pour cette dernière équation la méthode de LEGENDRE est utilisable, mais les calculs sont plus complexes et conduisent à $u = \frac{1}{3}(y + \delta + \bar{\delta})$, où δ serait l'une des racines cubiques de $3(4 + j^2) - 2(4 + 3j)y$, ce qui rend préférable la première méthode exposée.

Pour en savoir plus, le lecteur consultera avec fruit les chapitres consacrés aux équations abéliennes dans le "*Cours d'Algèbre Supérieure*" de J.-A. SERRET (Gauthier-Villars, 1877). LEGENDRE a, lui aussi, consacré à la résolution de l'équation binôme $X_n - 1 = 0$ (pour n premier) toute une partie de sa "*Théorie des Nombres*" (Paris 1830, réédité en 1955 chez Blanchard).

COMMENTAIRES SUR L'ARTICLE "L'ÉTENDUE DES JOURS"

Jean-Paul PARISOT (*)

1) Remarques générales sur la méthode

La méthode astucieuse qui est proposée permet de passer directement du repère écliptique au repère local en évitant des intermédiaires de calcul qui nécessitent la définition des coordonnées équatoriales locales. Classiquement avec les méthodes de la trigonométrie sphérique, on opère en deux temps (nous renvoyons le lecteur aux ouvrages d'astronomie, par exemple : '*Les éphémérides du bureau des longitudes*' pour la définition et la signification des variables utilisées) :

- i) passage des coordonnées écliptiques (longitude l) aux coordonnées équatoriales (ascension droite α ou angle horaire H et déclinaison δ),
- ii) passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées horizontales (azimut et hauteur).

Dans la méthode proposée, on court-circuite le premier pas en arrivant directement à la formule (p. 8) qui donne la durée du jour :

$$J = \frac{24}{180} \text{ arc cos} \left(\frac{-\sin \theta \sin i \sin \varphi}{\cos \theta (\cos^2 \varphi + \cos^2 i \sin^2 \varphi)^{1/2}} \right) \quad (1)$$

En réalité, le terme entre parenthèses est H , l'angle horaire du soleil à son lever ou à son coucher. C'est un angle dont la signification physique est très importante puisqu'il définit l'heure solaire vraie : c'est celle que l'on lit sur les cadrans solaires. Nous en verrons l'importance plus loin dans l'étude de la variation de la durée du jour.

2) Notations de l'article

A partir des notations de l'article, il est pratiquement **impossible** de se rattacher aux notations consacrées dans tous les ouvrages d'astronomie :

- ce qui est appelé déclinaison est en réalité la **distance zénithale** notée z . Elle est égale au complément de la hauteur. On réserve le terme de déclinaison (δ) pour la hauteur du soleil au-dessus de l'équateur.
- φ est la longitude écliptique. On réserve φ à la latitude du lieu à la place de θ .
- i est l'inclinaison de l'écliptique notée habituellement ϵ . Il est dit p. 8 que "*i est une constante chez nous*" ce qui est assez curieux, car i est une constante **pour tout le monde** ! Elle vaut actuellement $23^\circ 27'$.

© L'OUVERT 51 (1988)

(*) Observatoire de Besançon — 25044 Besançon Cedex

3) Remarques sur la variation de la durée du jour

Ainsi qu'il est précisé dans l'introduction, les calculs présentés dans l'article reposent sur une **discrétisation** de la position du soleil sur son orbite, position repérée par l'angle $\varphi(t)$ qui reste constant pendant 24 h. Quelques lignes plus loin (p. 3) il est montré que la durée du jour est indépendante de la longitude de l'observateur. Cette affirmation est évidemment vraie en raison de l'hypothèse simplificatrice car dans la réalité ceci est faux. C'est cette idée qui est développée dans ce paragraphe. Après une mise en évidence des écarts, nous en verrons une explication à partir des données des calendriers puis une justification théorique.

3-1 Données brutes

Si l'on fait appel à des éphémérides (Dumoulin et Parisot, 1987 ou Meeus, 1982), on peut estimer numériquement la variation de durée du jour en fonction de la longitude. Le calcul nous fournit les données suivantes sur l'évolution de la durée du jour le 1er janvier 1988 pour trois villes situées à une latitude de 48° :

Longitude	Durée du jour
90° Est	8h 23min 26s
0°	8h 23min 38s
90° Ouest	8h 23min 50s

La figure 1 qui reproduit la variation de déclinaison du soleil durant cette même journée va nous guider dans la recherche de l'explication de cet écart. En examinant les déclinaisons correspondant aux heures de lever et coucher, on constate que dans des zones de longitudes différentes, la déclinaison du soleil n'est pas la même : elle augmente avec le temps car nous avons choisi une époque située juste après le solstice d'hiver. Ainsi, plus on se dirige vers l'Ouest et plus le soleil est haut ; la durée du jour augmente continuellement.

3-2 Données des calendriers et estimation de l'écart

Si l'on consulte un calendrier (par exemple, celui des P.T.T.) pour l'année 1988, on lit les informations suivantes pour les 1er et 6 janvier (les indications des calendriers et éphémérides français dont données pour Paris – longitude = $2^\circ 20'$ Est, latitude = $48^\circ 50'$ Nord – et les heures sont exprimées en TU) :

Date	Lever	Coucher	Durée du jour	Déclinaison
1/1	7h 46	16h 02	8h 16min	$-23^\circ 00'$
6/1	7h 45	16h 08	8h 23min	$-22^\circ 29'$

ce qui indique une augmentation de la durée du jour d'environ 1min 24s par jour. En réalité, cette augmentation est liée à la variation de la déclinaison du soleil qui passe de -23° à $-22^\circ 29'$ durant la même période. Dans ces conditions, en 24 h, quand on se déplace en longitude avec le soleil tout **en conservant la même latitude**, les caractéristiques du soleil varient continuellement : il n'est pas dans la même situation quand il se lève ou quand il se couche dans des zones de longitude

différentes. L'augmentation de la durée du jour de 1min en 24h se répartit sur 360° de longitude. Quand on se déplace seulement de 90° comme dans les exemples traités, l'augmentation moyenne entre le 1er et le 6 janvier sera seulement de $84/4 = 21s$. On retrouve l'ordre de grandeur du calcul précédent. Si l'on avait choisi une période proche des équinoxes quand les variations de déclinaison sont les plus importantes, l'effet serait plus évident. Par exemple entre le 21 mars et le 25 mars on lit sur les calendriers :

Date	Lever	Coucher	Durée du jour	Déclinaison
20/3	5h 55min	18h 02min	12h 07min	-0°07'
25/3	5h 44min	18h 10min	12h 26min	1°51'

avec une durée du jour qui augmente en moyenne de 3min 48s par jour au lieu de 1min 24s en janvier.

3-3 Justification théorique

Parmi les formules concernant les levers et couchers, la plus importante relie l'angle horaire de l'astre à la latitude du lieu (φ) et à la déclinaison de l'objet (δ) :

$$\cos H = -\tan \varphi \tan \delta \quad (2)$$

C'est la forme simplifiée d'une formule plus générale qui est écrite ici dans le cas d'un astre à l'horizon (on retrouve une relation équivalente à (1) en écrivant que la durée du jour est égale à $2H$). Si h est la hauteur de l'objet, la relation générale est :

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H.$$

En différenciant (2) on obtient directement la variation de durée du jour car la quantité H exprime la demi-durée du jour, ou plus exactement l'intervalle de temps qui sépare le lever ou le coucher du passage au méridien.

$$\partial H / \partial t = \frac{\tan \varphi}{\sin H \cos^2 \delta} \partial \delta / \partial t \quad (3)$$

Date	$\delta(^{\circ})$	$\partial \delta / \partial t (^{\circ} / j)$	$H(^{\circ})$	$\partial H / \partial t (^{\circ} / j)$	$2 \partial H / \partial t$
01/01	-23°	0.103	61.8	0.154	1min 23s
20/03	0	0.393	90	0.436	3min 29s
21/12	-23°27'	0.0166	61.2	0.025	12s

Evolution de δ et de la durée du jour à une latitude de 48°.

La dérivée $\partial \delta / \partial t$ est calculée à partir de 2 valeurs de δ espacées de 5 jours.

Pour estimer $\partial \delta / \partial t$ il n'est pas nécessaire de connaître avec une grande précision la variation de δ . On obtient une très bonne approximation de cette fonction avec une représentation sinusoidale (*Fig. 2*) :

$$\delta(t) = 23.45^{\circ} \sin(360(t - 80)/365)$$

où la variable t est exprimée en jours à partir du premier janvier. $t = 80$ correspond au jour de l'équinoxe de printemps. La variation de δ exprimée en °/jour s'écrit :

$$\partial\delta/\partial t = 0.403 \cos(360(t - 80)/365).$$

On peut remarquer que le maximum est réalisé aux équinoxes avec une variation de près de 1/2 degré par jour.

4) Question :

Le calendrier dans lequel j'ai relevé les informations signale qu'en 1988 le printemps a lieu le 20 mars. Or, d'après les heures de lever et coucher de soleil, la durée du jour est de 12 h 07 min alors que nous sommes le jour de l'équinoxe (jour = nuit?). Pourquoi cette égalité est-elle réalisée le 18 mars et non pas le 20? Même remarque en automne.

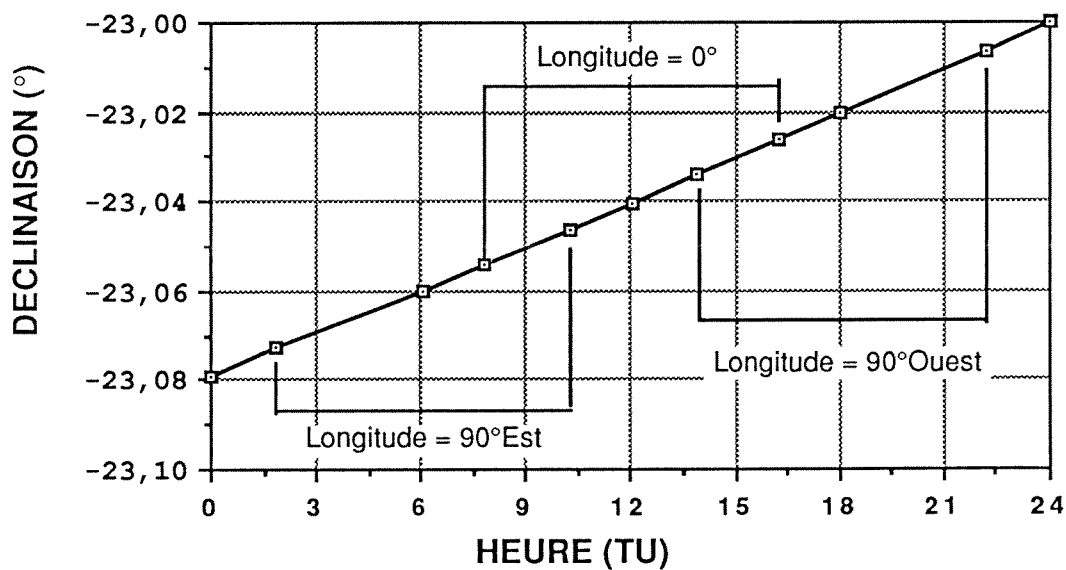


Figure 1

Variation de la déclinaison du soleil le 1er janvier 1988. Sur le même graphique sont notées les valeurs de δ correspondant aux instants des levers et couchers en trois lieux situés à la même latitude de 48° mais de longitudes différentes. En cours de journée, la déclinaison du soleil augmentant, la durée du jour ne sera pas la même en ces trois lieux de même latitude.

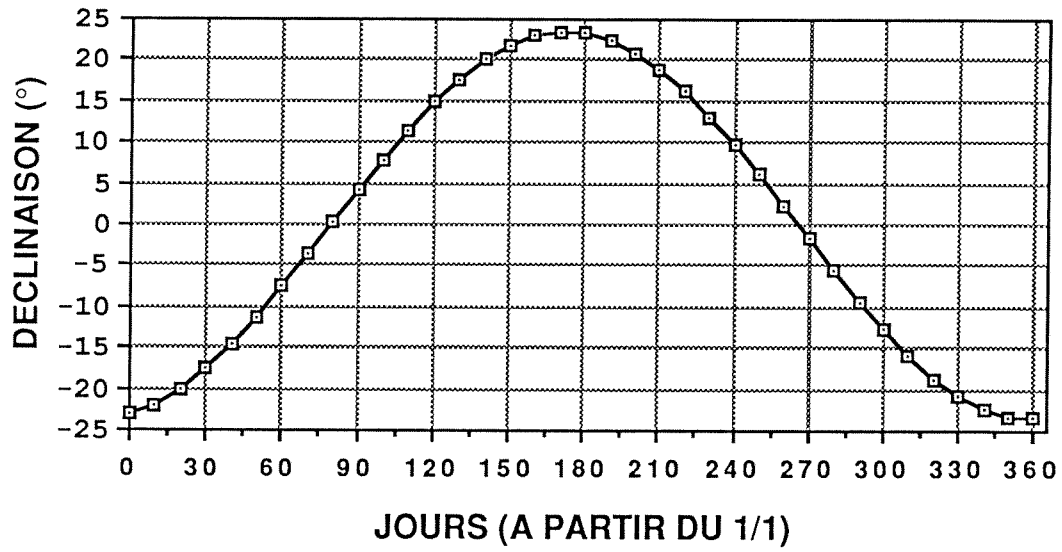


Figure 2

Variation de la déclinaison du soleil durant l'année.

Références

- DUMOULIN (C.) et PARISOT (J.-P.) – *Astronomie pratique et informatique* – Paris, Masson, (1987)
MEEUS (J.) – *Calculs astronomiques pour amateurs* – Société Astronomique de France (1982).

RÊVERIES D'UNE NUIT DE SABBAT MATHÉMATIQUE

Olivier GEBUHRER

Tout occupé à noyer mon chagrin dans le vin à la suite de vaines recherches sur un célèbre problème d'entraînement de Géométrie de 5^e (Niveau 2 dans la terminologie I.R.E.M.), l'article de M. HOQUET "*Espaces Ethyliques*" de '*L'Ouvert*' n° 50 tomba sous mes yeux imbibés de larmes et de vapeurs d'alcool.

Je parcourus tout d'abord ces pages avec la mélancolie titubante caractéristique de mon état, puis d'étranges lueurs se mirent à danser au plafond des brumes de mon imagination. L'aubergiste, éberluée, assista ainsi à la métamorphose subite d'un individu sur lequel l'alcool avait déjà exercé quelques ravages en une puissante mécanique qui se mit à noircir fièvreusement sa nappe de papier.

Si je renonce à vous livrer les résultats de cette nuit agitée, c'est que l'aube grise me contraignant à rejoindre mes pénates, les terrifiants pépins de la réalité réduisirent en poudre mes plus belles espérances.

Jugez-en plutôt : tout d'abord notre ami M. HOQUET ne s'intéresse semble-t-il qu'aux espaces vectoriels topologiques **localement compacts** : on travaille donc dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie, pourquoi le cacher aux lecteurs ?

Mais imaginons l'hypothèse la plus favorable d'un lapsus conduisant à écrire COMPACT là où il eût été nécessaire d'écrire CONVEXE. Dorénavant, je prendrai la liberté **d'écrire e.v.t.l.c. avec cette dernière acception.**

A quoi ressemblent les espaces bondés ? Notre ami M. HOQUET nous dévoile certains mystères au "*théorème I.1*". Mais comme dans TOUT espace vectoriel topologique localement convexe, le point O admet un système fondamental de voisinages tonneaux, il en résulte que tout élément d'un tel système est confondu avec l'espace tout entier.

Autrement dit, les seuls e.v.t.l.c. **bondés** sont les espaces vectoriels E munis de la topologie grossière qui comporte comme seuls ouverts \emptyset et E .

Hélas, les malheurs ne font que commencer car lorsqu'on s'intéresse aux **espaces pintés**, la situation est bien pire.

Si l'on veut éviter de se référer à BOURBAKI (EVT) ou tout autre auteur du même genre pour prouver la propriété précédemment rappelée, il suffit d'introduire pour un ensemble convexe équilibré absorbant T sa jauge P_T définie par $P_T(x) = \inf\{\lambda \geq 0 / \lambda x \in T\}$ et de vérifier que, si T est ouvert, $\{P_T < 1\} = T$, que si T est un voisinage ouvert de O pour la topologie considérée, P_T est une fonction

continue sur E et il en résulte que les ensembles $\{P_T \leq \alpha\}$ sont des voisinages tonneaux pour tout $\alpha > 0$.

Cela étant, il en résulte que la définition I.5 des espaces pintés est VIDE car dans tout espace vectoriel topologique localement convexe, tout voisinage tonneau de O contient 0 .

On vient de prouver le MÉTATHÉOREME : dans tout e.v.t.l.c. les tonneaux appartiennent à la catégorie des Danaïdes.

Moralité : Une condition nécessaire pour introduire l'humour en mathématiques est d'opérer à jeun.

NOUVELLES DU RALLYE

Le rallye mathématique d'Alsace se porte bien. Quand vous lirez ces lignes, les prix auront été distribués. D'ores et déjà (mi-mai), nous savons que ce fut un succès : 800 participants en 1^{ère}, 400 en Terminales.

En 1^{ère}, 3 premiers prix, 7 deuxièmes prix et 7 troisièmes prix récompenseront les candidats sans compter la possibilité d'un séjour aux U.S.A. comme l'an passé.

Si tous n'ont pas réussi, tous ont participé dans la bonne humeur comme en témoignent ces remarques :

— *“Comme nous n'aurons pas la joie de terminer parmi les premiers, nous aurons au moins celle d'être les premiers à terminer.”*

— *“A l'année prochaine.”*

— *“Une chose est sûre, quelques lignes suffisent à constituer un problème suffisamment ardu pour retenir des élèves pendant plusieurs heures.”*

A VOS STYLOS

PROBLÈME 3

Énoncé

Vrai ou faux ?

Tout ensemble de parties de \mathbb{N} qui est totalement ordonné par inclusion (ceci signifie que, deux éléments quelconques de cet ensemble étant donnés, l'un des deux est toujours inclus dans l'autre) est fini ou dénombrable.

Donner une démonstration ou un contre exemple.

Contre-exemple

Le contre-exemple suivant nous a été proposé par E. KERN et M.- P. MULLER.

Pour x réel positif, posons $I_x = \{r \in \mathbb{Q} \mid 0 < r < x\}$. L'ensemble $\{I_x, x \in \mathbb{R}_+^*\}$ a la puissance du continu et est totalement ordonné par inclusion (car $x \mapsto I_x$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés).

Si maintenant φ est une injection de \mathbb{Q}_+^* dans \mathbb{N} (par exemple $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = 2^p 3^q$ pour $\frac{p}{q}$ fraction irréductible), l'ensemble $\{\varphi(I_x), x \in \mathbb{R}_+^*\}$ de parties de \mathbb{N} a la puissance du continu et est totalement ordonné par inclusion.

PROBLÈME 4

Énoncé

Trouver tous les réels $a > 0$ tels qu'il existe, dans l'espace euclidien usuel muni d'un repère orthonormé, un cube de côté a et dont les sommets ont toutes leurs coordonnées entières.

Indication

Le nombre a doit être entier.

PROBLÈME 5

Énoncé

Vrai ou faux ?

Si F est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} , et si E_1, \dots, E_n sont des sous-espaces vectoriels de F tels que $E_1 \cup \dots \cup E_n = F$, alors l'un au moins des E_i est égal à F .

Donner une démonstration ou un contre-exemple.

LE 'PLOT' — SPÉCIAL SYMÉTRIE

La SYMÉTRIE est le thème principal du n° 42 du 'Plot'. Thème actuellement très utilisé dans divers domaines scientifiques, la **symétrie** peut être enseignée à tous les niveaux scolaires : dans les *petites* classes on aborde la symétrie miroir et la symétrie centrale, mais aussi les motifs répétitifs par rotation ou par translation ; dans les plus grandes classes, on n'en reste pas là mais on va au contraire à la recherche de tout ce qui est invariant par des transformations de toutes sortes.

La **symétrie**, c'est un thème formateur et culturel qui donnera envie aux élèves de faire de la géométrie, aussi bien au collège qu'au lycée.

Dans ce numéro du 'Plot' on trouvera :

★ 'Un bon paveur sait paver sans erreur', par J. LEFORT, où l'on retrouve sur 24 pages des frises, des pavages réguliers ou non, périodiques ou non, utilisant toutes sortes de transformations.

★ 'Les dentelles du Puy' par Ch. PÉROL, où l'on verra que les dentelières connaissent la structure de groupe !

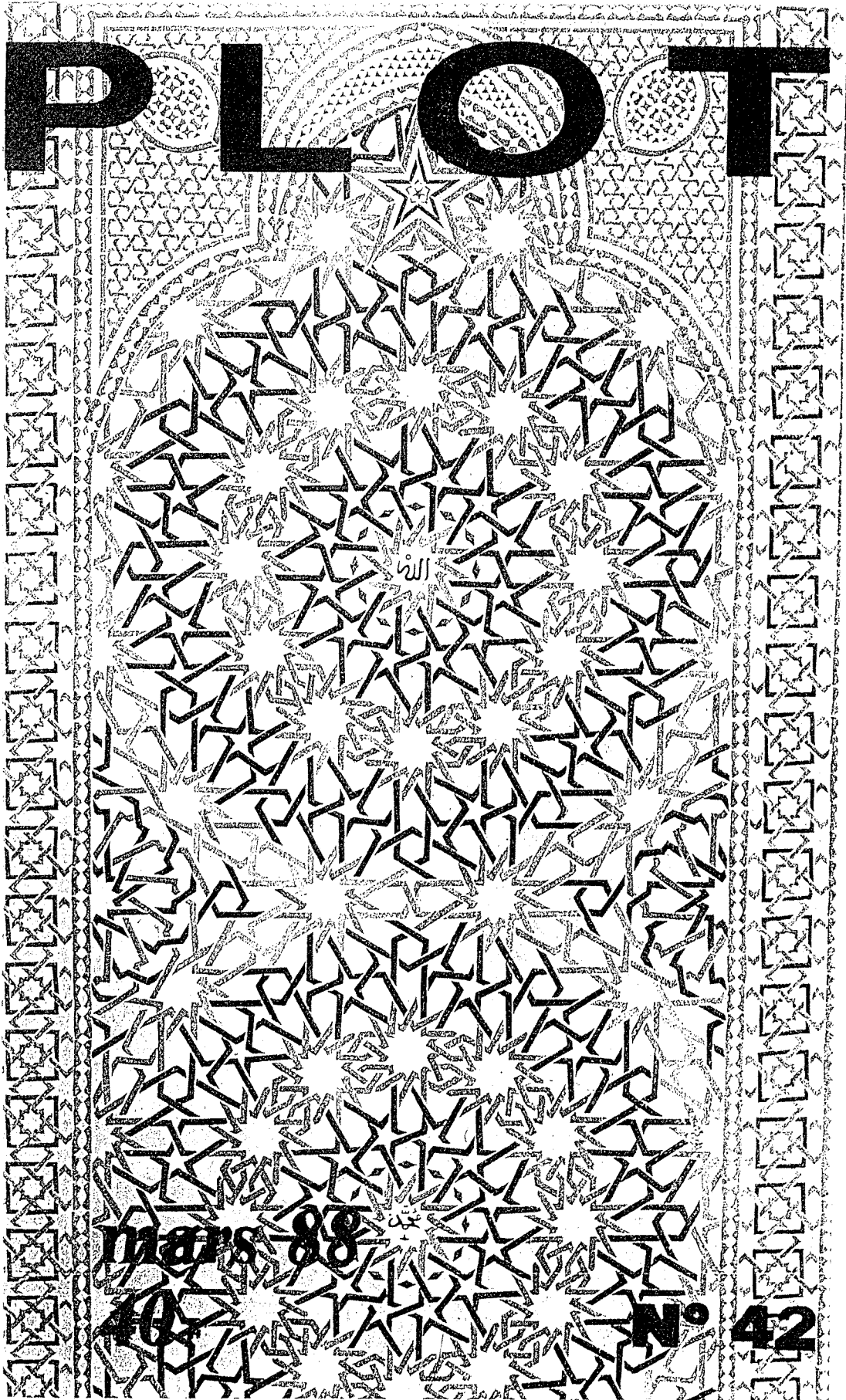
★ 'Les mosaïques non-euclidiennes' par Ch. LÉGER.

★ 'L'interdit du pentagone', relatant la découverte d'un pseudo-cristal avec des symétries d'ordre cinq ...

Le tout truffé de figures et de dessins (plus de 200 pour les 48 pages du numéro).

Si et seulement si vous habitez l'Alsace (*), vous pouvez obtenir ce numéro du 'Plot' sur la symétrie, à la bibliothèque IREM au prix exceptionnel de 25.- F (franco de port). La bibliothécaire appréciera beaucoup si vous vous regroupez par 3 ou 4 pour faire une commande par chèque.

(*) Dans le cas contraire, se renseigner sur le tarif à l'IREM d'Orléans – Domaine Universitaire – 45046 ORLÉANS CEDEX.



S
Y
M
E
T
R
I
E
S
S
Y
M
E
T
R
I
E
S
S
Y
M
E
T
R
I
E
S
S
Y
M
E
T
R
I
E
S