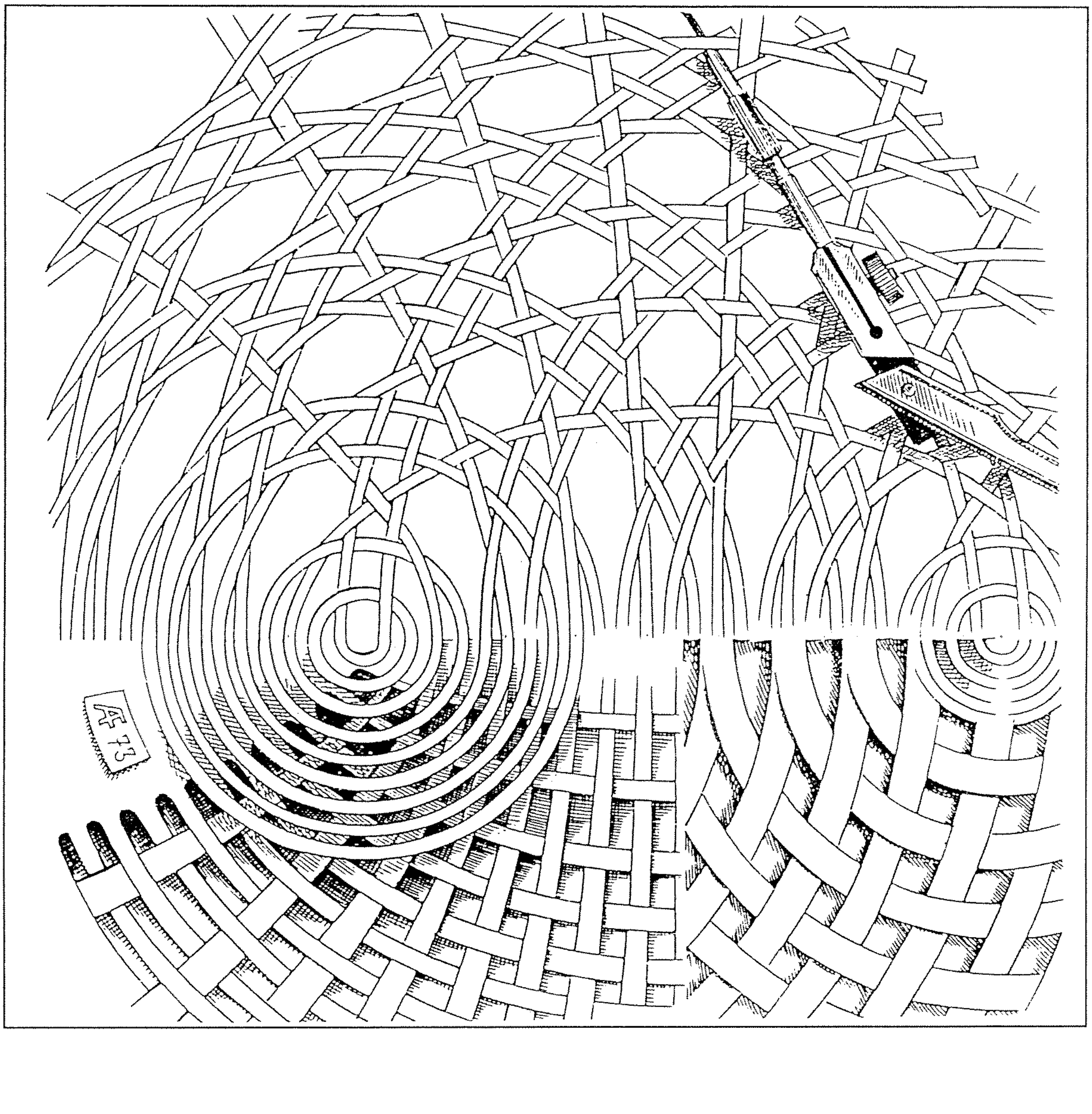
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 53 – DÉCEMBRE 1988 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

Albert Flocon : Entrelacs – Suite expérimentale – Épreuve 14.

"OCTUPLE ENTRELACS"

Entrelacs de cercles concentriques (1973)

Burin Sur Duchêne gris clair

Cuivre 14 × 14 cm

Feuille 30,5 × 21,8 cm

Signée en bas à droite

Un cercle sur trois n'a pas été repris au burin, ceux précisément dont les intersections déterminent les faisceaux des ellipses et des hyperboles. Les cercles restants forment ainsi avec les autres coniques un réseau de quadrilatères et d'octogones courbes qui pourrait s'étendre indéfiniment.

(D'après l'ouvrage "Suites expérimentales"
Medusa – Bauhaus (Vienne – Berlin))

PROMOTIONS

Entre les promotions au mérite, les promotions à l'ancienneté et les concours, le débat reste ouvert et le restera sans doute à jamais; les unes favorisent le nepotisme, les autres la routine, quant aux concours on connaît les rigidités qu'ils apportent dans le système scolaire.

Ne rien faire étant la pire des politiques, il faut bien trancher. Ce sera un des objectifs de la mission de Monsieur DACUNHA-CASTELLE. Devant la diversité des tâches d'enseignement et d'éducation, il est urgent de mettre sur pied un système de promotion le plus équitable possible et qui corresponde à ce que l'on veut valoriser dans le système éducatif français.

La nomination de certifiés et d'agrégés au tour extérieur n'a guère profité qu'à des chefs d'établissement, ce qui est une perversion du système : que l'on créé un concours — agrégation si l'on veut — parfaitement ciblé sur les besoins des proviseurs (administration, relations publiques,...) et que l'on réserve l'agrégation de mathématiques aux enseignants de mathématiques.

Accorder un doctorat d'Etat pour valoriser le travail réalisé au sein d'un IREM ou dans le cadre de la formation des adultes part d'un très bon sentiment mais pervertit de la même façon ce diplôme, surtout quand la thèse est des plus légères.

Les CAPES et agrégation internes (cette dernière est encore en gestation) échappent à cette critique puisque centrés sur le contenu de la discipline. Reste à savoir si l'on n'a pas plutôt besoin de véritables pédagogues, au courant des techniques de groupe, de ce qu'est un enfant ou un adolescent, des attitudes à prendre en classe et ouvert au travail interdisciplinaire... Si tel est le cas, il faudrait adapter et les épreuves de recrutement et les examens et concours internes pour prendre en compte toutes les situations professionnelles et ne pas se limiter aux seuls collèges et lycées.

Gardons-nous donc de vouloir utiliser les diplômes à d'autres fins et dans un autre cadre que ceux pour lesquels ils ont été conçus. Innovons! Pour que demain, de nouvelles formes de promotion permettent de prendre en compte et de valoriser le travail multiforme de chacun.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 53 - 1988

L'OUVERT

ISSN 0290 - 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 25.– F

SUR UN PROBLÈME DE FERMAT

Jacques DAUTREVAUX (*)

Imaginons trois villes A, B, C que l'on veut réunir deux à deux par un réseau de communication; comment concevoir ce réseau pour que la longueur totale à construire (donc que le coût total) en soit minimum? Dans une première approximation nous faisons abstraction des contraintes de nature écologique ou économique (passage à une proximité suffisante de certains centres urbains importants).

Une première idée, simple sinon simpliste, serait de créer un réseau simplement triangulaire, mais ce n'est sûrement pas la solution optimale car en ne conservant que deux côtés (au lieu de trois) du triangle, le réseau envisagé conserve sa fonction et sa longueur a diminué. On peut aussi concevoir en réseau en "Y" : on voit aisément qu'en prenant pour centre du "Y" le centre de gravité du triangle, on obtient là aussi une longueur de réseau inférieure au périmètre du triangle.

On est donc amené à se poser le problème général suivant :

> Etant donnés trois points distincts du plan, en quelle position du plan doit-on placer un point M pour que la somme $MA + MB + MC$ soit minimale?

Ce problème a été posé par Pierre FERMAT et résolu par son contemporain Evangelisto TORICELLI (l'inventeur du baromètre!), mais pas dans sa généralité. Nous nous proposons de la traiter ici intégralement.

La présente étude a l'avantage de montrer que (dans le cas de 3 points) les résultats peuvent s'obtenir par des méthodes tout à fait élémentaires.

Après une étude rapide nécessitant des connaissances du niveau DEUG nous aborderons une approche plus purement géométrique ne nécessitant que des connaissances du niveau Terminale.

On se donne dans le plan euclidien trois points A, B, C (éventuellement alignés) déterminant un triangle ABC (éventuellement aplati), les dénominations des sommets étant faites de telle sorte que :
— le segment BC est celui qui a la plus grande longueur ($BC \geq AB$ et $BC \geq AC$) de sorte que, si ABC est un véritable triangle, son angle le plus grand est A, et par conséquent B et C sont aigus; si A, B, C sont alignés, A se trouve nécessairement entre B et C;
— si ABC est un véritable triangle, le sens de parcours du contour $ABCA$ est le

(*) Maître-Assistant honoraire - Université de Haute Alsace.

sens direct (l'intérieur du triangle à gauche).

Ces conventions étant faites, il est clair que la fonction f définie sur le plan euclidien, à valeurs dans $\mathbb{R}$, déterminée par :

$$M \longrightarrow f(M) = MA + MB + MC$$

est continue dans tout le plan, à valeurs strictement positives, prenant à l'extérieur d'un cercle de rayon assez grand contenant en son intérieur les trois points A, B, C des valeurs croissantes quand la distance de M au centre du cercle augmente.

Des propriétés des fonctions continues il résulte qu'une telle fonction admet une valeur minimale en un certain point T nécessairement intérieur au cercle dont il a été question ci-dessus; on m'excusera de ne pas entrer dans les détails sur ce point.

La fonction f est, en outre, différentiable en tout point du plan autre que A, B et C de sorte que le point T défini précédemment ne peut être que le point A (les points B et C étant à exclure puisque d'après les conventions faites on a $f(A) < f(B)$ et $f(A) < f(C)$ (*)) ou un point en lequel le gradient de la fonction f est le vecteur nul (ce gradient n'existe qu'en un point où la fonction est différentiable).

On se convainc aisément que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad} f}(M) = \frac{\overrightarrow{AM}}{MA} + \frac{\overrightarrow{BM}}{MB} + \frac{\overrightarrow{CM}}{MC}$$

et que par suite, en un point T où le gradient est nul on a :

$$\frac{\overrightarrow{TA}}{TA} + \frac{\overrightarrow{TB}}{TB} + \frac{\overrightarrow{TC}}{TC} = \overrightarrow{0}$$

ce qui entraîne que nécessairement T est intérieur (strictement) au triangle ABC, comme barycentre à coefficients strictement positifs des trois points A, B et C.

D'autre part, T est tel que trois vecteurs de longueur unité, d'origine commune T et dirigés vers A, B et C ont une somme nulle, ce qui entraîne, ainsi qu'on le voit facilement, que de T on "*voit*" chacun des segments BC, CA et AB sous le même angle $\frac{2\pi}{3}$, autrement dit que :

$$(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) = (\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) = (\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) = \frac{2\pi}{3} \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

compte tenu des conventions faites au début.

On remarquera que ces conditions nécessaires excluent évidemment l'existence d'un tel point T lorsque A, B, C sont alignés.

(*) J'omets débilérément le cas où on aurait par exemple $BC = AC(\geq AB)$ car dans un tel cas, l'angle A est nécessairement aigu et l'existence du point T, avec $f(T) < f(A)$, est assurée.

Selon un résultat tout à fait classique de géométrie élémentaire, si on construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC', les cercles circonscrits à ces trois triangles ont en commun un point L par lequel passent également les trois droites AA', BB' et CC' ; de plus, les trois segments AA', BB' et CC' ont même longueur.

Il en résulte une caractérisation aisée du point L comme deuxième point commun à la droite AA' et au cercle circonscrit au triangle équilatéral BCA' disposé de telle façon que A et A' soient situés de part et d'autre de la droite BC.

Dans tous les cas, des considérations très élémentaires sur lesquelles on me permettra de ne pas insister établissent que : $LB + LC = LA'$.

α) Lorsque $A < \frac{2\pi}{3}$, il est clair que L est situé entre A et A', donc à l'intérieur du triangle, et que :

$$\begin{aligned} f(L) &= LA + LB + LC \\ &= LA + LA' = AA' \end{aligned}$$

et qu'il est donc une des positions possibles du point T (l'autre étant A).

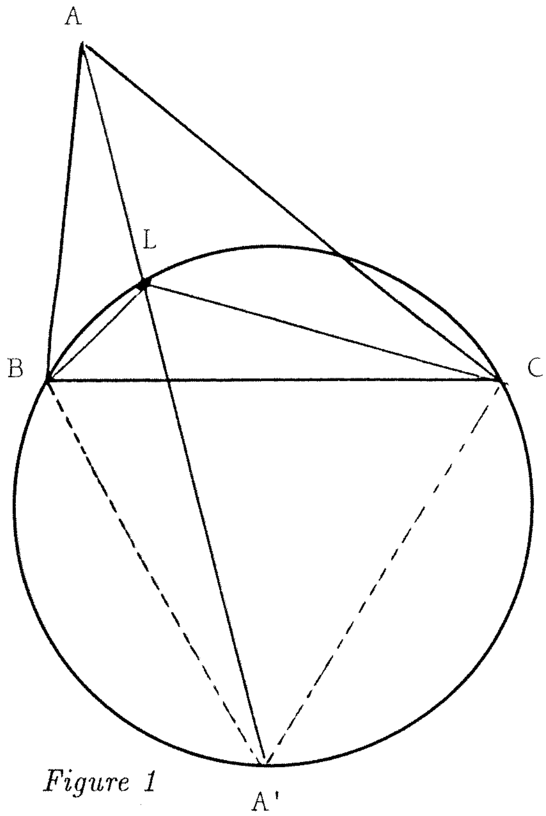


Figure 1

Posant $BC = a, AC = b$ et $AB = c$, un calcul classique montre que :

$$AA'^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C + \frac{\pi}{3}),$$

et comme $AA' = BB'$ on peut écrire : $[f(L)]^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A + \frac{\pi}{3}) < b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2 = [f(A)]^2$ d'où il résulte que $f(L) < f(A)$, et que par suite T est en L. On notera que l'égalité ne pourrait avoir lieu que si $A = \frac{2\pi}{3}$, ce qui est exclu par l'hypothèse initiale.

β) Lorsque $A \geq \frac{2\pi}{3}$, le point L n'est plus situé entre A et A' et par suite n'est plus à l'intérieur du triangle. De la sorte, la seule position possible pour le minimum est le point A.

Une manière plus géométrique et plus élémentaire d'aborder le problème est basée sur les inégalités de PTOLÉMÉE, dont une démonstration élémentaire sera donnée en annexe. Le théorème de PTOLÉMÉE s'énonce ainsi :

"*Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Alors chacun des produits $AB \times CD, AC \times BD, AB \times CD$ est au plus égal à la somme des deux autres. De plus, si l'un des produits est égal à la somme des deux autres, les deux autres inégalités sont strictes, et par exemple $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ si et seulement si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés, placés dans cet ordre sur le cercle ou sur la droite.*"

Soit alors M un point du plan distinct de B, C et A' (M peut donc éventuellement se trouver en A); l'inégalité suivante, appliquée aux quatre points M, A', B, C : $MA' \times BC \leq MB \times A'C + MC \times A'B$ devient, puisque le triangle $A'BC$ est équilatéral : $MA' \leq MB + MC$, d'où :

$$f(L) = AA' \leq MA + MA' \leq MA + MB + MC = f(M),$$

soit, $f(M) \geq f(L)$, l'égalité ne pouvant se produire que si :

$$MA' = MB + MC$$

c'est-à-dire $MBA'C$ cocycliques (ou alignés) dans cet ordre,

$$\text{et } MA + MA' = AA',$$

c'est-à-dire AMA' alignés dans cet ordre; par suite M coïncide avec le point L défini plus haut, à la condition que ce point soit intérieur au triangle ABC, ou éventuellement en A, lorsque $\hat{A} = \frac{2\pi}{3}$; (ce point L ne peut évidemment exister que si $A \leq \frac{2\pi}{3}$). Dans ce cas, comme $f(B)$ et $f(C)$ sont tous deux supérieurs à $f(A)$ en raison des hypothèses faites, donc supérieurs à $f(L)$ et que $f(A') = AA' + 2a > f(L)$, on voit clairement qu'alors le point L est l'unique position de minimum de la fonction f, et que le point T est en L (éventuellement confondu avec A lorsque $A = \frac{2\pi}{3}$).

On obtient ainsi un premier résultat : si $A \leq \frac{2\pi}{3}$ il existe dans le plan un unique point T (intérieur – strictement – au triangle ABC lorsque $A < \frac{2\pi}{3}$, placé en A lorsque $A = \frac{2\pi}{3}$) en lequel la fonction f admet une valeur minimale, et pour tout point M du plan autre que ce point T, on a : $f(M) > f(T)$.

Le cas $A > \frac{2\pi}{3}$ est plus fastidieux car le théorème de PTOLÉMÉE ne permet pas de conclure, et il faut opérer par approches successives dans un régionnement convenable du plan, comme indiqué sur la figure 4.

a) M sur un des côtés du triangle

a$_1$) Demi-droite BA d'origine B :
— M entre A et B :
$f(M) = AB + MC > AB + AC = f(A)$ car $MC > AC$ comme côté opposé au plus grand angle (A, qui est obtus) du triangle AMC.

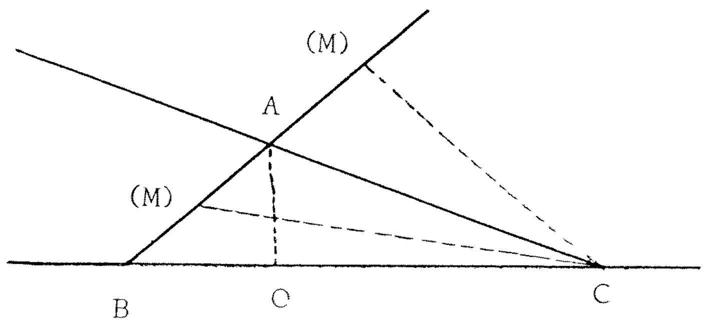


Figure 2

— M au-delà de A :
$f(M) = 2MA + AB + MC > AB + AC$ car $MA + MC > AC$ dans le triangle AMC.
— M en B :
on sait déjà que $f(B) > f(A)$. Donc, pour tout point M autre que A situé sur la demi-droite BA d'origine B, on a : $f(M) > f(A)$.

a$_2$) Demi-droite CA d'origine C :
en échangeant les rôles de B et C, on obtient un résultat identique : pour tout point M autre que A situé sur la demi-droite CA d'origine C, on a : $f(M) > f(A)$.

a$_3$) Droite BC :
Si O est la projection orthogonale de A sur BC, il est bien clair que $f(M) \geq BC + OA$ car $MA \geq OA$ et $MB + MC \geq BC$, quelle que soit la position de M sur la droite BC.

On est, pour un triangle ABC, amené à comparer $h + a$ et $b + c$: ceci tient plus des relations métriques du triangle que des inégalités géométriques.

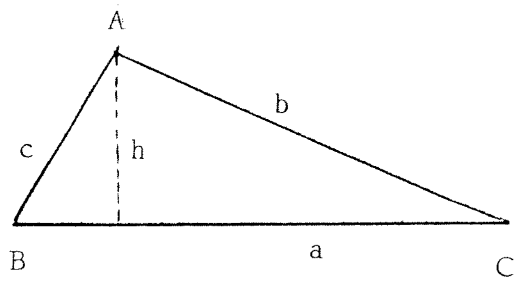


Figure 3

$h + a - (b + c)$ est proportionnel à $\sin B \times \sin C + \sin A - \sin B - \sin C$; A étant fixé, posons $u = \frac{B+C}{2}$ $(A = \pi - 2u)$ et $v = \frac{B-C}{2}$ (alors $B = u + v$ et $C = u - v$) de sorte que la quantité à étudier est :

$$\sin(u + v) \times \sin(u - v) + \sin 2u - \sin(u + v) - \sin(u - v)$$

que l'on peut remplacer par :

$$\varphi(v) = \cos 2v - \cos 2u + 2 \sin 2u - 4 \sin u \times \cos v,$$

fonction de v dans laquelle $|v| \leq u$ et dans laquelle, pour raison de parité, on peut faire varier v de 0 à u.

On remarque que, si A, B, C sont alignés, $OA = 0$ et $f(M) \geq BC = f(A)$, l'égalité n'étant obtenue que si M est en A (point confondu avec O).

Sinon, on voit que $\varphi(u) = 0$.

D'autre part, $\varphi'(v) = -2 \sin 2v + 4 \sin u \sin v = 4 \sin v(\sin u - \cos v)$; dès lors, dans l'hypothèse $A > \frac{2\pi}{3}$ où nous nous trouvons, on a $u < \frac{\pi}{6}$ et donc aussi $v < \frac{\pi}{6}$, puisque $0 \leq v < u$: il s'ensuit que $\cos v > \sin u$ et donc $\varphi'(v) < 0$ (avec $\varphi'(0) = 0$) de sorte que, lorsque v croît de 0 à u, $\varphi(v)$ décroît de $\varphi(0)$ à 0, et par suite $\varphi(v) > 0$ sur cet intervalle; ceci montre que $h + a > b + c$, donc que, sur la droite BC $f(M) \geq f(O) > f(A)$ lorsque A, B, C forment un vrai triangle; si A, B, C sont alignés, nécessairement dans l'odre B, A, C, A est confondu avec O et le minimum de f sur la droite BC est obtenu en O. Pour un point M non situé sur BC on a:

$$f(M) = MA + MB + MC > MB + MC > BC = AB + AC = f(A)$$

de sorte que dans ce cas $f(M) > f(A)$ pour tout point M du plan autre que A (avec évidemment égalité lorsque M est en A, point en lequel f est minimal).

Dans toute la suite nous supposerons donc que A, B, C forment un vrai triangle.

b) Régionnement du plan

La droite BC et les deux demi-droites définies précédemment régionnent le plan en cinq zones (ne contenant pas leurs frontières) selon le plan de zonage ci-contre.

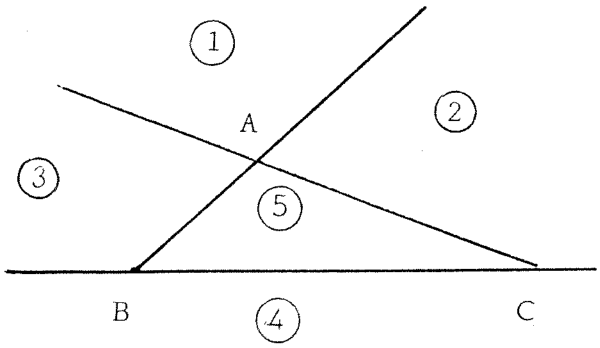


Figure 4

b$_1$) M en zone 1 :
Dans les deux triangles MAB et MAC la somme des angles en A est $2\pi - A$: elle est donc comprise entre π et $\frac{4\pi}{3}$ et par suite l'un au moins d'entre eux est obtus, celui du triangle MAC par exemple. Dans ce triangle on a $MC > AC$, côté opposé à l'angle le plus grand (parce qu'obtus) dudit triangle; dans le triangle MAB on a bien évidemment $MB + MA > AB$ de sorte que $f(M) = MA + MB + MC > AB + AC = f(A)$.

b$_2$) M en zone 2 :
M et B étant de part et d'autre de la droite AC, les droites MB et AC se coupent en I, point situé tant entre M et B qu'entre A et C. Alors, $f(M) = MA + MB + MC > AC + IB > f(I) > f(A)$.

b$_3$) M en zone 3 :
Le même résultat est valable, il suffit d'échanger les rôles de B et C.

b$_4$) M en zone 4 :
A et M étant de part et d'autre de la droite BC, les droites AM et BC se coupent en un point I situé entre A et M. Alors $MB + MC > BC$ et $MA > IA \geq OA$, O étant la projection orthogonale de A sur BC. Il en résulte $f(M) = MA + MB + MC > BC + OA = f(O) > f(A)$.

b$_5$) M en zone 5 (intérieur du triangle) :
Comme $A > \frac{2\pi}{3}$ il existe sur la droite BC, entre B et C, un point D tel que l'angle en A du triangle ABD soit égal à $\frac{2\pi}{3}$: on peut supposer que M et C sont situés de part et d'autre de la droite AD (s'il n'en était pas ainsi en échangerait dans le raisonnement les rôles des points B et C). Alors les droites AD et MC se coupent en un point I situé aussi bien entre A et D qu'entre M et C.

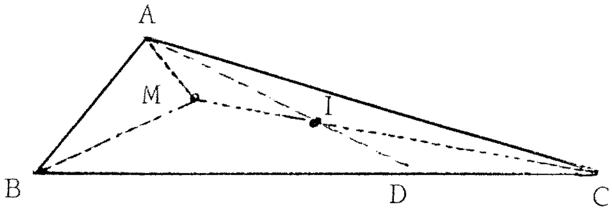


Figure 5

On a alors $MA + MB + MI > AB + AI$ par application d'un résultat antérieur concernant le cas où l'angle en A du triangle vaut $\frac{2\pi}{3}$. D'où :

$$\begin{aligned} f(M) &= MA + MB + MC \\ &= MA + MB + MI + IC > AB + AI + IC > AB + AC = f(A), \end{aligned}$$

puisque dans le triangle AIC on a bien : $AI + IC > AC$.

On a donc établi un deuxième résultat qui complète le premier : dans le cas où $A > \frac{2\pi}{3}$, la fonction f admet sa valeur minimale au point A.

En résumé :

Soient A, B, C trois points du plan, disposés de telle sorte que A soit le sommet de l'angle le plus grand du triangle ABC (éventuellement aplati : dans ce cas, A, B, C sont alignés, dans l'ordre B, A, C).

Il existe un point T unique en lequel la fonction f définie dans le plan par : $f(M) = MA + MB + MC$ atteint sa valeur minimale.
— Si $A < \frac{2\pi}{3}$, ce point T est le *point de Toricelli* L du triangle ABC, obtenu comme deuxième point commun à la droite AA' et au cercle $A'BC$, A' étant déterminé de telle sorte que le triangle BCA' soit équilatéral et que A et A' soient de part et d'autre de la droite BC;
— Si $A \geq \frac{2\pi}{3}$, ce point T est le point A.

ANNEXE

Une démonstration élémentaire du théorème de PTOLÉMÉE.

Soient A, B, C, D quatre points du plan, distincts.

1) Si A, B, C, D sont alignés, placés dans l'ordre $ABCD$, on posera $AB = b, AC = c, AD = d$ et on calculera les trois produits : $AB \times CD = b(d-c), AC \times BD = c(d-b)$ et $AD \times BC = d(c-b)$, ce qui a un sens puisque $0 < b < c < d$.

Une simple vérification montre que : $AB \times CD + AC \times BD > AD \times BC, AC \times BD + AD \times BC > AB \times CD$, et que $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$, avec égalité dans un cas et inégalité stricte dans les deux autres.

2) Supposons que A, B, C, D ne soient pas quatre points d'une même droite (il est possible que trois d'entre eux soient alignés).

N.B. : le lecteur fera les figures nécessaires.

La similitude plane directe de centre A transformant B en C transforme D en un point E, et on a : $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$, d'où $AC \times BD = AB \times CE$.

De cette similitude résulte l'existence d'une similitude plane directe de centre A transformant B et D et C en E. Alors, on obtient :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}, \quad \text{soit } AD \times BC = AB \times DE.$$

Il s'ensuit que $AC \times BD + AD \times BC = AB \times (CE + DE)$. Comme $CE + DE \geq CD$, on obtient l'inégalité de base :

$$AB \times CD \leq AC \times BD + AD \times BC$$

avec égalité si et seulement si $CE + DE = CD$, c'est-à-dire si C, D, E sont alignés dans l'ordre C, E, D, soit $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DE}) = \pi \pmod{\pi}$.
Or :

$$(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) \pmod{2\pi}.$$

Comme $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}$ dans la première similitude, et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \pmod{2\pi}$ dans la seconde, on obtient : $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \pmod{2\pi}$ de sorte que l'égalité $AB \times CD = AC \times BD + AD \times BC$ est obtenue si et seulement si $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) + \pi \pmod{2\pi}$, ce qui est équivalent, en clair, au fait que $ABCD$ sont cocycliques (ou alignés en vertu du **1**), et placés dans l'ordre A, C, B, D sur le cercle (ou sur la droite).

On obtient d'autres inégalités du même genre en permutant arbitrairement les quatre lettres A, B, C, D. On obtient en fait **trois** inégalités seulement, car l'expression $AC \times BD + AD \times BC - AC \times CD$ est invariante par le sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ (groupe symétrique de degré 4) engendré par les deux permutations $(ACBD)$ et $(AB)(C)(D)$ (qui sont un 4-cycle et une transposition), lesquelles engendrent un groupe d'ordre 8 de type *diédral*.

Les trois inégalités de PTOLÉMÉE ainsi obtenues sont donc :

$$\begin{cases} AB \times CD & \leq AC \times BD & + AD \times BC \\ AC \times BD & \leq AB \times CD & + AD \times BC \\ AD \times BC & \leq AB \times CD & + AC \times BD \end{cases}$$

et on vérifie aisément que si l'une de ces trois inégalités est une égalité, les deux autres sont des inégalités strictes.
(Démonstration d'après GUICHARD, *Cours de Géométrie* – Vuibert, 1924.)

On ne m'en voudra pas de ne pas répéter l'énoncé complet du théorème, qui a été donné antérieurement.

A PROPOS DE ... L'ÉTENDUE DES JOURS

(L'OUVERT n° 48, page 1 et n° 51, page 32)

Jacques DAUTREVAUX

La formule de base à adopter pour effectuer ce calcul est :

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H$$

liant la hauteur h d'un astre (au-dessus de l'horizon) de déclinaison δ et son angle horaire H en un lieu terrestre de latitude φ. En y faisant $h = 0$ on obtient bien les formules (2) et (3) citées dans l'article de J.-P. PARISOT; ce dernier pose "*in fine*" une question dont la réponse, exposée ci-après, me semble évidente. Les éphémérides publiées dans divers calendriers (celui des P.T.T. par exemple) ont toutes pour origine les éphémérides calculées et publiées par le Bureau des Longitudes. Celles-ci calculent les levers et couchers du Soleil au moyen de la formule ci-dessus, non pas avec $h = 0$ comme on le croit communément, mais avec $h = -36'36''$ (*), valeur *normalisée* de la réfraction atmosphérique à l'horizon (c'est la valeur **réelle** de h lorsque le centre du Soleil est **vu** à l'horizon), ce qui a pour effet d'allonger de 6 à 8 minutes (variable avec la latitude du lieu) en France la longueur du jour par rapport à celle qui serait calculée avec $h = 0$. Par ailleurs on notera que les calculs sont effectués par convention pour le centre du disque solaire, mais qu'il ne serait pas sot de les envisager pour le bord supérieur de ce disque (moment de la disparition **complète** du Soleil sous l'horizon), ce qui revient à diminuer h du demi-diamètre apparent du Soleil (16' en moyenne) donc à allonger à nouveau de 3 à 4 minutes supplémentaires la longueur du jour. La grandeur h peut également prendre en compte d'autres paramètres, tels par exemple la correction d'altitude (résultant de la dépression de l'horizon). Quant à la durée de la **clarté**, bien supérieure à la longueur du jour, elle dépend de la durée des crépuscules, qui ne peuvent guère être calculés à l'avance car ils dépendent davantage des conditions météorologiques que des conventions que l'on peut faire à leur sujet. Si l'on veut calculer les éphémérides pour un lieu donné, dont on connaît la latitude et la longitude, il faut connaître la déclinaison du Soleil (donnée par les éphémérides pour chaque jour à 0 h) et l'équation du temps (résultant de l'heure de passage au méridien à Paris); si on se contente de la précision du dixième de minute, on calcule séparément le lever et le coucher du Soleil au moyen des valeurs de la déclinaison à 6 h et 18 h obtenues simplement par interpolation linéaire.

(*) Les "*Ephémérides Nautiques*", pour leur part, sont calculées avec $h = -34'$.

UN LIVRE :

ALGEBRE APPLIQUEE A L'INFORMATIQUE

Depuis qu'existent les systèmes automatiques, c'est-à-dire bien avant l'ère de l'informatique, une bonne compréhension du fonctionnement de ces systèmes nécessitait quelques connaissances d'algèbre. Le langage des ensembles, l'algèbre de BOOLE, les diagrammes de CAROLL et de KARNAUGH, les systèmes de numération ... sont autant de sujets que l'on trouve dans des ouvrages traitant des automatismes. Seulement il s'agit d'ouvrages techniques.

C'est tout le mérite de M. MIGNOTTE, d'avoir pris le problème à l'envers et d'avoir rédigé un ouvrage de mathématiques à propos des automatismes. Le titre dit *algèbre appliquée à l'informatique* mais il faut comprendre informatique dans un sens très large puisque, s'il cite à plusieurs reprises les ordinateurs, rien n'interdit d'imaginer d'autres transmissions de l'information à l'aide, par exemple, de circuits hydrauliques ou pneumatiques (c'est ainsi que fonctionnent de très nombreux robots, dans des environnements hostiles).

L'ouvrage de M. MIGNOTTE correspond à un enseignement optionnel de deuxième année de DEUG, enseignement créé pour faciliter les études en licence d'informatique. Ce n'est donc pas un de ces ouvrages de haut niveau réservé aux spécialistes, mais un ouvrage qui s'adresse aussi à *l'honnête homme* (devais-je dire à *l'honnête enseignant de mathématiques*?) qui veut parfaire ses connaissances culturelles sur les bases mathématiques de la transmission et de la transformation de l'information.

A côté de chapitres classiques, du moins par leur contenu, où l'enseignant de mathématique n'apprendra rien, on trouve des chapitres plus en rapport avec le traitement de l'information comme :
— machines ayant un nombre fini d'états,
— circuits logiques,
— codes binaires,
le tout complété par de nombreux exercices.

Il est agréable de trouver disponible en français un ouvrage clair et accessible au plus grand nombre, sur un sujet en pleine expansion.

Algèbre appliquée à l'informatique
Maurice MIGNOTTE – P.U.F., 1987 – 180 pages – 100 F

SAVOIR FABRIQUER UN TEST

Georges GLAESER

Quel que soit le but d'un test, sa réalisation demande une attention soutenue pour être sûr de ce que l'on va mesurer.

Dans la recherche de l'amélioration continuelle des tests et de la suppression de la pédagogie d'opinions, il faut citer le travail remarquable de Raymond BUYSE. Si d'autres que lui ont tenu des propos analogues, il fut le seul à déployer des efforts tant théoriques que pratiques pour préciser les objectifs et les méthodologies de la recherche pédagogique puis mettre effectivement en œuvre ce programme.

Cela se traduisit par une cinquantaine de thèses de doctorat, une centaine de mémoires de licence et beaucoup de travaux de laboratoire effectués sous sa direction.

Après de brillantes études dans un école normale catholique, Raymond BUYSE enseigne à partir de 1909 dans l'enseignement primaire et secondaire. Puis il soutient tour à tour deux thèses de doctorat : "*L'anormalité d'origine endocrinienne*", sous la direction d'O. DECROLY, puis "*L'étude psychologique de la fonction motrice*", en 1920. De 1924 à 1927, il devient assistant de son maître DECROLY, avec lequel il publie une série d'ouvrages classiques, dont "*La pratique des tests mentaux*".

Pour expliquer le genre de questions qui se posent à l'expérimentateur fabriquant de tests, je prendrai l'exemple d'une question citée dans l'ouvrage, et dont les graves défauts n'y sont même pas signalés. L'important est cependant qu'on travaille, à l'époque, pendant des mois, pour améliorer des instruments de diagnostic fiables, en se posant des questions analogues :

Jean a une sœur, Jeanne, un frère Lucien, et un cousin Jules.
Répondez aux six questions suivantes :
1° Quelle est la sœur de Lucien?
2° Quel est le cousin de Jeanne?
3° Quelle est la cousine de Jules?
4° Quel est le frère de Lucien?
5° Combien de frères a Jeanne?
6° Combien de cousins a Jules?

La question est extraite d'une batterie destinée à préselectionner les écoliers les plus doués d'une population d'enfants de treize-quatorze ans.

Pour fournir une réponse *correcte* aux questions 1°, et 3°, le sujet peut utiliser l'une ou l'autre des procédures suivantes :

a) Comprendre la structure des liens familiaux des quatre personnages, et produire les arguments formels suivants :

"*Le cousin du frère de X est un cousin de X*"

"*Si Y est le cousin d'une fille Z, alors Z est cousine de Y*"

Et se garder d'affirmer que "*tout cousin d'un de mes cousins est mon cousin*".

b) Répondre Jeanne sans réflechir davantage : n'est-ce pas le seul prénom féminin figurant dans l'énoncé?

On est en présence d'un exemple typique de ce qu'on appelle, à la suite des théoriciens du problème d'échec, des questions **impures de but** : une question où certains sujets peuvent obtenir un succès **usurpé**, sans avoir fait valoir les aptitudes intellectuelles subtiles que le test voulait mettre en évidence.

Remarquons encore que l'expérimentateur sera bien embarrasé pour juger les réponses suivantes à la question 6° :
— Jules a deux cousins;
— on ne peut pas savoir combien Jules a de cousins;
— Jules a au moins deux cousins : Jean et Lucien. Mais on ne nous renseigne pas sur l'existence éventuelle d'autres cousins non directement apparentés à Jean!!

S'il s'agit de détecter les meilleures aptitudes à l'abstration, cette dernière réponse est la meilleure.

Dans son ensemble, l'ouvrage est précieux pour nous renseigner sur l'histoire de la fabrication des tests, au début du siècle. Des efforts méthodologiques seront encore nécessaires pour mettre en évidence le genre de défaut signalé sur l'exemple précédent.

Le reste de la carrière de BUYSE s'effectue essentiellement à Louvain, où il suscite de nombreux travaux sur la lecture ou l'orthographe : signalons les célèbres "*échelles Dubois - Buyse d'orthographe usuelle française*", destinées à étalonner les dictées.

Le travail de BUYSE apparaît ainsi comme précurseur des réflexions sur les tests, réflexions qui continuent d'avoir lieu actuellement et qui visent à améliorer la connaissance que l'on peut avoir des élèves.

APPEL AUX COLLÈGUES

Pouvez-vous faire passer ce test à vos élèves (entre 10 et 14 ans) et nous faire part des résultats obtenus ainsi que de vos remarques? Merci.

UN MIROIR AUX ALOUETTES

Jacques LUBCZANSKI

Le gros travail d'un mathématicien, c'est de poser correctement le problème qu'il doit résoudre : voilà une idée partagée par beaucoup au niveau de la recherche.

Le gros du travail d'un élève en cours de maths, c'est de résoudre correctement le problème qui est posé : voilà une idée partagée par beaucoup au niveau de l'enseignement.

Et les auteurs de manuels scolaires, les professeurs mettent tout leur soin à faciliter la résolution des problèmes posés aux élèves : énoncés soignés, détaillés, ne faisant appel qu'à des notions déjà vues, utilisant directement les théorèmes du dernier cours. Cela a l'avantage de ne pas dérouter les élèves et leur permet d'obtenir de bonnes notes. Et à la longue, cela démontre de façon inductive le "*théorème-élève*" suivant

"*En maths, tout problème a une solution et une seule*"
et ses corollaires :
"*Si on me pose la question, c'est que je dois pouvoir y répondre*"
"*Le professeur connaît les solutions de tous les problèmes de maths*"
et finalement la conséquence logique :
"*Le gros du travail d'un chercheur en maths, c'est de poser corectement ... etc ...*"

Et la chose la plus difficile qui soit est de faire comprendre ce que veut dire, dans la bouche d'un mathématicien, une phrase comme :
"*Il est* **prouvé** *qu'il est* **impossible** *de couper un angle en trois parties égales avec une règle et un compas*";
et en particulier, que ce n'est pas dû à l'incompétence des mathématiciens ou à leur manque de persévérance! ([1])

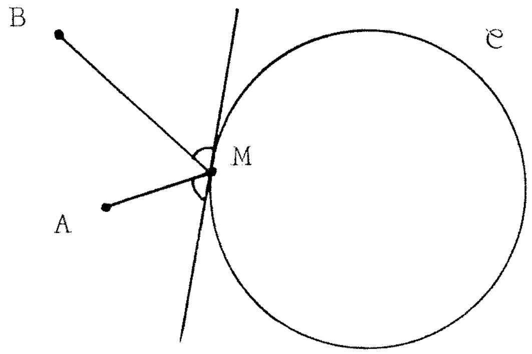
Or, voici que moi-même, malgré mon expérience et ma vigilance, me suis laissé piéger par les "*théorèmes-élèves*" ... qui deviennent des "*théorèmes-profs*"! Souvenez-vous : c'était dans le dernier numéro de votre revue préférée, au début de l'article "*La démonstration : calcul et/ou raisonnement ?*".

© L'OUVERT **53** (1988)

([1]) Pour une analyse fine et drôle de la psychologie des trisecteurs de cercles, je renvoie le lecteur au savoureux livre de U. DUDLEY "*A budget of trisections*", éd. Springer.

C'était même le premier exercice : d'après un "*théorème-élève*" bien connu, ce devait donc être le plus facile ...

Le cercle $\mathcal{C}$, les points A et B étant donnés, construire le point M où se réfléchit un rayon lumineux qui va de A à B.



Cet énoncé faisait suite à deux exemples analogues, où la réflexion se faisait sur une puis deux droites : une progression logique.

Le lendemain de la publication de l'article, un jeune collègue me demanda entre deux portes la solution : je la lui promis pour la récréation ... Le surlendemain j'eu quelques coups de téléphone ... et ensuite un abondant courrier.

C'est ainsi que je m'aperçus que je ne savais pas faire ce "*petit*" exercice! Toute honte bue, j'allais écumer les librairies et les bibliothèques : d'après un théorème de Tonton Lulu, quelqu'un avait certainement déjà eu la même idée : ce qui change c'est l'emballage.

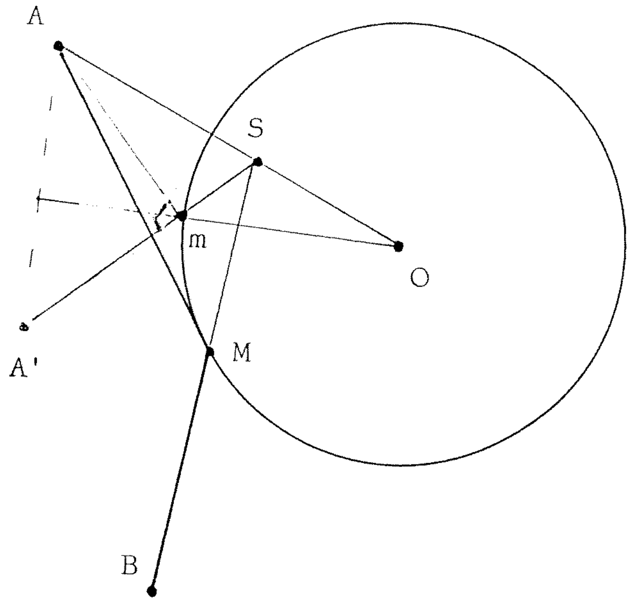
En effet ce problème est celui de la réflexion sur un miroir sphérique convexe : sus aux traités d'Optique!

Au commencement était l'"*Optique*" d'EUCLIDE : la proposition XVIII étudie la réflexion dans un miroir sphérique concave.

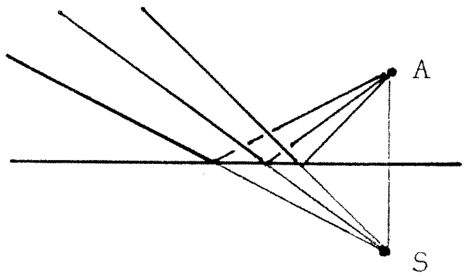
Ensuite il y eut ALHAZEN au XII^{e} siècle, puis VITTELION au XV^{e}, qui reprirent la construction d'EUCLIDE.

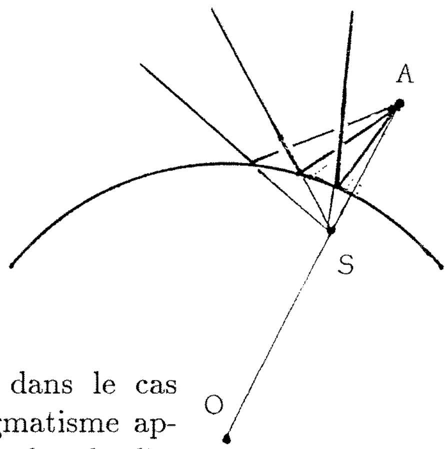
Voici ce que cela donne, en extrapolant aux miroirs convexes :

On choisit m sur le cercle; on construit le symétrique A' de A par rapport à Om.
Alors $A'm$ coupe OA en S.
Enfin BS coupe le cercle en M qui est le point cherché.



Le point S s'appelle le "*stigmate*" : c'est sur son existence que s'appuie cette construction (aujourd'hui S pourrait s'appeler l'image virtuelle de A dans le miroir), par analogie avec le miroir plan :

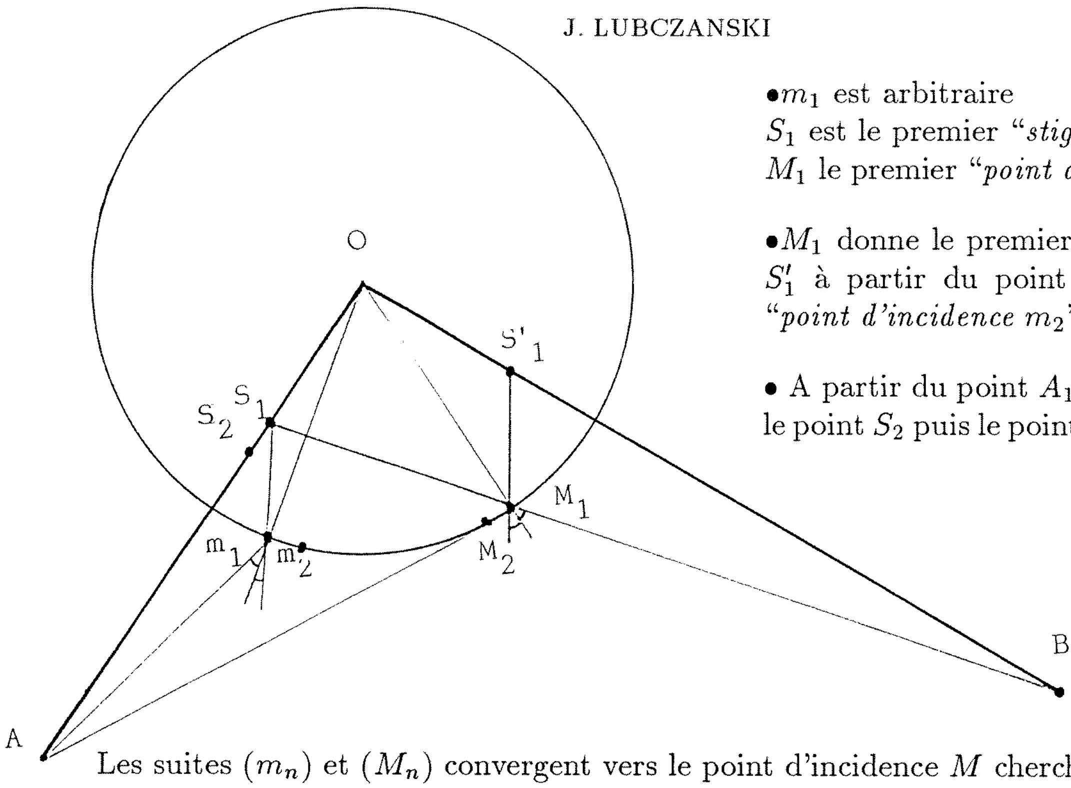




Malheureusement, il n'y a pas de stigmate dans le cas sphérique : les physiciens disent qu'il y a stigmatisme approché quand le rayon du miroir est assez grand et la distance de A au miroir assez petite (2).

La construction d'EUCLIDE est donc en tout état de cause une construction approchée. Ceci dit, comme beaucoup de constructions, de calculs approchés, elle peut servir de point de départ à une itération convergente vers la solution du problème :

(2) Cela signifie que les rayons réflechissants de A ne convergent pas en un point : ils enveloppent une "*petite*" région à l'intérieur du cercle.



•m_1 est arbitraire
S_1 est le premier "*stigmate*"
M_1 le premier "*point d'incidence*"

•M_1 donne le premier "*stigmate*" S_1' à partir du point B, puis le "*point d'incidence* m_2"

• A partir du point A_1, m_2 donne le point S_2 puis le point M_2 etc ...

Les suites (m_n) et (M_n) convergent vers le point d'incidence M cherché.

Et il a fallu attendre le développement de la géométrie analytique pour s'apercevoir que ce problème se ramène à l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle, qui est un problème non réductible du quatrième degré : l'espoir de le résoudre à la règle et au compas s'envole à tout jamais ...

Mais au bout du compte j'ai bien dû faire un peu de mathématiques. Pas vous?

Bibliographie

. "*Le miroir*".– J. BALTRUSAITIS.– Elmayan-Le Seuil 1978

. "*Célèbres problèmes de mathématiques élémentaires*".– E. CALLANDREAU.– Albin Michel 1949 (*cf.* ci-dessous)

. "*100 great problems of elementary mathematics*".– H. DORRIE.– Dover. 1969

. Et tout traité d'optique géométrique.

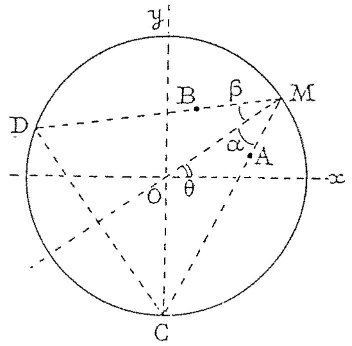
Compléments :

Le problème du miroir d'ALHAZEN
extrait de "*Célèbres problèmes mathématiques*"
Callendreau.– Paris 1949

I.– Hassan-ben-Haithem, mathématicien et astronome arabe, mort au Caire en 1038, est, sous le nom d'ALHAZEN, auteur d'un célèbre traité d'optique publié à Bâle en 1572 par RISNER. Ce traité, traduit en 1270 par VITELLIO, servit beaucoup à KÉPLER (1571 – 1630) pour son traité d'optique. On y trouve résolue la question connue sous le nom de problème d'ALHAZEN, à savoir *en quel point d'un miroir concave circulaire doit tomber la lumière venant d'un point donné pour qu'elle se* *réfléchisse en un autre point également donné.* On dénomme encore ce problème, problème du billard circulaire, en l'énonçant : "*Quelle est la route que doit suivre une bille sur ce billard pour aller frapper une deuxième bille après réflexion sur la bande ?*"

HUYGENS (1629–1695), BARROW (1630–1677) (qui fut le professeur de NEWTON), de l'HOSPITAL (1661–1704), RICCATI (1676–1754), QUÉTELET (1796–1874) se sont ultérieurement occupés de cette question.

II.– Voici comment l'on peut présenter une solution actuelle du problème. Soit C étant le cercle donné, de centre O et de rayon R, A et B les points donnés de coordonnées a_0, a_1, b_0, b_1, par rapport à un système d'axes rectangulaires de coordonnées d'origine O. Soit M le point sur le cercle, tel que la droite AM, émanant du point de départ A, soit également inclinée sur OM que la droite MB passant par le point B d'arrivée; soient δ, θ, γ les angles que font avec l'axe des x les directions MB, MO, MA; on a :



$$\alpha = \gamma - \theta, \text{ et } \beta = \theta - \delta,$$

d'où

$$\text{tg}\alpha = \frac{tg\gamma - tg\theta}{1 + \text{tg}\gamma \times tg\theta}, \quad \text{tg}\beta = \frac{\text{tg}\theta - \text{tg}\delta}{1 + \text{tg}\delta \times \text{tg}\theta}.$$

Mais si x, y sont les coordonnées de M :

$$\text{tg}\gamma = \frac{y - a_1}{x - a_0}, \quad \text{tg}\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{tg}\delta = \frac{y - b_1}{x - b_0};$$

d'où, avec l'égalité de α et β, et en posant :

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = A, \quad a_0 b_0 - a_1 b_1 = B, \quad a_0 + b_0 = C, \quad a_1 + b_1 = D,$$

on obtient :

$$A(x^2 - y^2) - 2Bxy + (x^2 + y^2)(Cy - Dx) = 0.$$

Mais comme le point M se trouve aussi sur le cercle, on a :

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

d'où :

$$A(x^2 - y^2) - 2Bxy + R^2(Cy - Dx) = 0.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole, et par conséquent le point M cherché est à l'intersection de cette courbe avec le cercle; il y a donc en général quatre solutions.

NOUVELLE PARUTION :
"POUR UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES"

Bulletin Inter – I.R.E.M.

Prix : 45 F (60 F si envoi postal) Chèque à l'ordre de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

3.— LES CALENDRIERS LUNAIRES

Quand l'homme a décidé de s'adresser à la lune pour mesurer le temps, il a vraiment fait un mauvais choix de calendrier. D'abord, parce que question périodicité, la lune n'est pas terrible. Elle parcourt son orbite une fois en 29 j 6 h tandis qu'il lui faudra 14 h de plus quelques mois plus tard. Ensuite, il s'agit de savoir quand commence le mois, c'est-à-dire quand apparaît à nouveau un tout petit croissant. Cela paraît évident mais ... dépend du temps (celui qu'il fait). Comment voulez-vous savoir si le mois n'a pas quelques jours de retard? Mais ce n'est pas encore le plus grave; *la civilisation* (sic!) s'est épanouie au soleil; les nuages ne restaient pas en place trop longtemps. Il est surtout très difficile de dire quand a lieu la nouvelle lune et l'apparition du nouveau croissant dans la direction du soleil est chose malaisée à voir et on s'y brûle les yeux.

C'est pourquoi traditionnellement, dès le 29ᵉ jour du mois, on observe le nouveau croissant dans le ciel du crépuscule au coucher du soleil. Si on ne voit rien, on recommence le lendemain. Si l'état du ciel ne permet pas une bonne observation, le nouveau mois est annoncé le 31ᵉ jour. Il ne s'agit pas que le nouveau mois prenne du retard en raison d'une petite dépression accompagnée de pluies violentes séjournant indûment sur la région pendant une semaine!

Voici donc une méthode empirique qui donne parfaitement satisfaction tant qu'on ne requiert pas une grande précision instantanée. On remarquera, cependant, que le nouveau mois commence ainsi environ 36 à 48 h après la nouvelle lune moyenne théorique.

Il a dû apparaître assez rapidement à nos ancêtres que les mois avaient alternativement 29 et 30 jours. Ce n'est pas pour rien que $29 + 1/2$ est une réduite (1) de la durée moyenne de la lunaison à savoir 29,530 588 jours.

On appellera donc, **mois lunaire** une durée de 29 ou 30 jours. Comme il est manifeste que le mois est une unité petite, on a dû les regrouper. Il est difficile de savoir comment puisque, sauf pour de très rares cas, l'écriture n'était pas encore inventée. Sans doute, comme pour les Romains, peut-on envisager un regroupement par dix mois, qui résulte de la numération orale de base dix. Mais, les Celtes avaient une numération de base vingt et on peut imaginer d'autres sortes de regroupement dûes à des croyances religieuses.

(1) réduite au sens de la décomposition en fraction continue.

Il paraît vraissemblable que ces peuples ont initialement utilisé une méthode empirique pour connaître le début de chaque mois, en remarquant la presque alternance des lunaisons de 29 et 30 jours.

1) Le calendrier Romain primitif :

A l'époque de la fondation de Rome, les habitants du Latium avaient une année de dix mois lunaires (alternativement de 30 et 29 jours), ce qui est très logique pour un peuple utilisant le système décimal dans sa numération orale.

Les mois ne furent désignés au début que par leur numéro d'ordre, puis reçurent pour les premiers d'entre eux, des noms de divinités (dont l'origine est parfois obscure). On eut donc :

Martius	(30 j)	*"Mars"*	
Aprilus	(29 j)	*"ouvrir"*	
Maius	(30 j)	*"déesse de la croissance"*	
Junius	(29 j)	*"Junon"*	
Quintilis	(30 j)		soit un total
Sextilis	(29 j)		de 295 jours
September	(30 j)	nombre	
October	(29 j)	correspondant	
November	(30 j)		
December	(29 j)		

C'était simple et régulier. Trop simple (?), car le soleil vint tout compliquer. A cette époque là, la civilisation était essentiellement agricole et les gens ont préféré avoir des mois qui tombent à peu près toujours à la même saison. On les comprend. Mais au lieu d'adopter d'emblée un nouveau calendrier, ils ont préféré, par pur conservatisme, modifier ce qu'ils avaient. On rajouta donc deux mois à l'année après December, on eut Januarus (30 j) et Februarus (29 j).

On obtint alors un total de 354 jours qui ne faisait pas encore le compte mais qui était déjà plus précis.

Il ne faut pas blâmer les Romains. Tous les calendriers lunaires connus regroupent les mois par douze ou treize, preuve qu'ils ne sont pas aussi purement lunaires qu'on veut bien le dire.

Ce calendrier Romain subit bien des avatars avant que Jules César n'y mit bon ordre. En particulier, on donna aux mois des durées de 29 ou 31 jours car les nombres pairs furent pendant longtemps tenus pour néfastes. Le lecteur patient saura la fin de l'histoire du calendrier Romain dans un prochain numéro.

2) Le calendrier Musulman actuel

Les années ont douze mois alternativement de 30 et 29 jours soit au total 354 jours. Mais un tel calendrier ne reste pas longtemps en correspondance avec la lune puisque douze lunaisons font : 354,367 jours. Au moment de l'adoption de ce calendrier, fixé par MAHOMET lui-même, les mesures étaient suffisamment précises pour que l'on sache qu'il y avait un écart de 11 jours en 30 ans. Il faut donc $12 \times 30 = 360$ lunaisons en 30 ans, soit $30 \times 354 + 11 = 10631 = 29 \times 360 + 191$ jours. Comme par hasard, $354 + \frac{11}{30}$ est une réduite de l'année de 12 lunaisons. De plus, $29 + \frac{191}{360}$ est une approximation de la lunaison donnée par les séries de FAREY ([2]).

On adopte alors, un cycle de 30 ans au cours duquel 11 années ont 355 jours, le 355$^{\text{e}}$ jour étant placé à la fin de l'année, le dernier mois ayant alors 30 jours au lieu de 29. Ces années sont alors qualifiées d'abondantes, par opposition aux 19 autres qui ne sont que communes.

Reste à savoir comment placer les années abondantes parmi les années communes. L'empirisme dût guider les auteurs de ce calendrier. Mais il est facile de le retrouver en utilisant les données actuelles.

En effet, l'année lunaire de 12 mois comporte 354,367 056 jours, donc une année de 354 jours est trop courte de 0,367 056 jour et après deux années de 354 jours, il manque 0,734 112 jour. Il y a donc intérêt à placer à ce moment là un jour supplémentaire. La deuxième année a alors 355 jours ce qui fait 0,265 888 jour de trop ... On continue ainsi en rajoutant un jour à l'année chaque fois que le manque est supérieur à la demi-journée (voir tableau).

Les années abondantes sont alors placées aux années :

2; 5; 7; 10; 13; 15; 18; 21; 24; 26; 29.

Remarques : On aurait pû se contenter d'attendre que le retard soit d'un jour complet pour placer une année abondante. On les aurait trouvées alors en :

3; 6; 9; 11; 14; 17; 20; 22; 25; 28; 30.

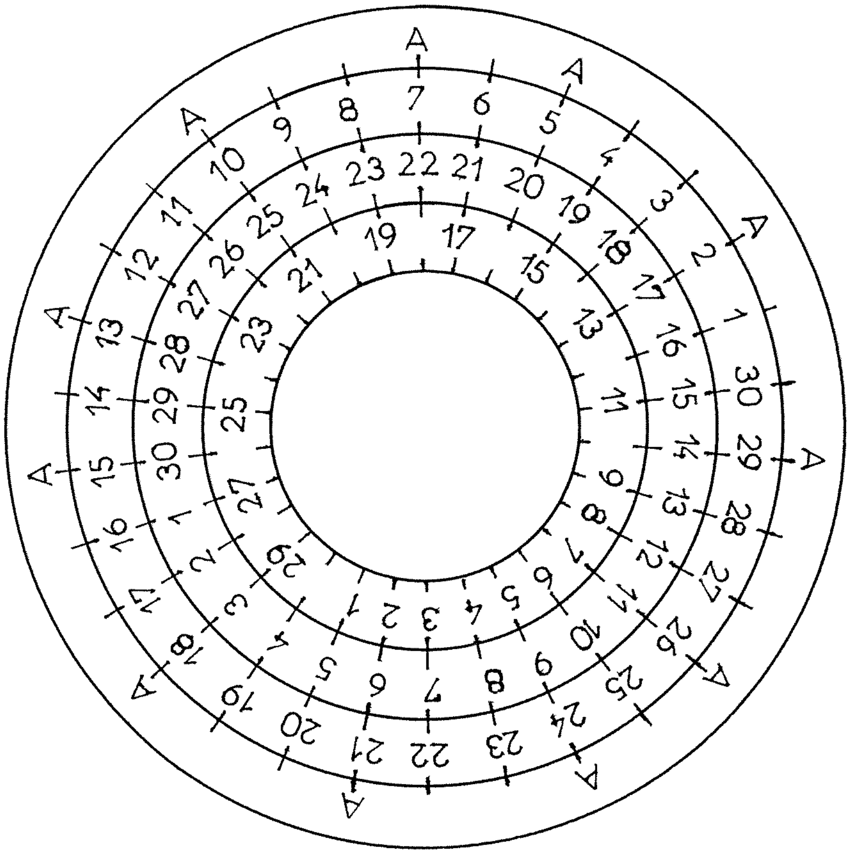
Le lecteur se convaincra qu'il s'agit du même rythme décalé de 15 années.

Actuellement, étant donné la date tardive d'adoption de ce rythme dans l'ère de l'hégire, il est préférable de prendre pour début du cycle une année multiple de 30 et de l'appeler année 0 du cycle. Moyennant cette convention, les années abondantes sont placées aux rangs :

2; 5; 7; 10; 13; 16; 18; 21; 24; 26; 29.

Contrairement aux apparences ce rythme est décalé de 19 années par rapport à celui trouvé initialement (ça n'a pas l'air, comme ça! mais le graphique ci-après le prouve).

([2]) Des notions sur les séries de FAREY seront données dans un prochain numéro. Ami lecteur, patiente!



Cycle des années abondantes : Selon l'endroit du début du cycle, les années abondantes sont placées différemment mais le rythme est toujours le même.

Les noms des mois sont :

1. Mouharram (30)
2. Safar (29)
3. Rabi'-oul-Aououal (30)
4. Rabi'-out-Tani (29)
5. Djoumada-l-Oula (30)
6. Djoumada-t-Tania (29)
7. Radjab (30)
8. Cha'ban (29)
9. Ramadan (30)
10. Chaououal (29)
11. Dou-I-Qa'da (30)
12. Dou-I-Hidjja (29 ou 30) (3)

On notera qu'il n'y a que 10 noms diférents. N'est-ce pas là la trace d'un ancien compte par dizaines?

Le calendrier actuel retarde de 0,011680 jour en 30 ans, c'est-à-dire 16 minutes 49 secondes. L'écart atteindra une journée en un peu plus de 2568 ans de 12 mois lunaires (c'est-à-dire 2492 de nos années).

(3) On remarquera que l'alternance des mois à l'intérieur d'un cycle de 30 ana fait qu'à la fin du 49^e mois il y a eu 26 mois de 30 jours ce qui conduit à la réduite $29+26/49$ pour la lunaison. De même au bout d'un cycle et 19 années soit 49 années il y a eu 312 mois de trente jours ce qui conduit à la même réduite.

arrondi à l'entier le plus proche		arrondi à l'entier inférieur		
excès sur le jour	année	excès sur le jour	année	rang
0,367056	C	0,367056	C	1
-0,265888	A	0,734112	C	2
0,101168	C	0,101168	A	3
0,468224	C	0,468224	C	4
-0,164720	A	0,835280	C	5
0,202336	C	0,202336	A	6
-0,430608	A	0,569392	C	7
-0,063552	C	0,936448	C	8
0,303504	C	0,303504	A	9
-0,329440	A	0,670560	C	10
0,037616	C	0,037616	A	11
0,404672	C	0,404672	C	12
-0,228272	A	0,771728	C	13
0,138784	C	0,138784	A	14
-0,494160	A	0,505840	C	15
-0,127104	C	0,872896	C	16
0,239952	C	0,239952	A	17
-0,392992	A	0,607008	C	18
-0,025936	C	0,974064	C	19
0,341120	C	0,341120	A	20
-0,291824	A	0,708176	C	21
0,075232	C	0,075232	A	22
0,442288	C	0,442288	C	23
-0,190656	A	0,809344	C	24
0,176400	C	0,176400	A	25
-0,456544	A	0,543456	C	26
-0,089488	C	0,910512	C	27
0,277568	C	0,277568	A	28
-0,355376	A	0,644624	C	29
0,011680	C	0,011680	A	30

On remarquera au passage qu'un musulman fait toujours plus jeune que son âge. En effet, quand il annoncé 34 ans dans son calendrier, cela n'en fait que 3 dans le nôtre (à quelques jours près). Cela pose le problème du passage d'un calendrier à l'autre.

Passage du calendrier musulman au jour julien.

Les musulmans avaient l'habitude de compter les jours à partir du coucher du Soleil. La tendance moderne consiste à utiliser le jour civil avec changement de date au milieu de la nuit. J'adopterais ici ce nouvel usage simplement parce que c'est beaucoup plus simple et que paresseux de nature je ne veux pas me fatiguer à calculer le nombre d'heures variables en fonction de la latitude et de la saison qu'il faut ajouter ou retrancher pour effectuer le changement d'origine.

Par ailleurs on ramènera toujours l'heure locale à l'heure UT en tenant compte des décalages de fuseaux horaires puis on décimalisera la journée. Par exemple 15 h 30 min correspond à 0,6458 ...jour.

Formule :

Soit a l'année de l'hégire,
m le numéro du mois dans l'année,
j le jour du mois,
b le reste de la division de a par 30.

Alors le jour julien JJ est donné par :

$$\mathrm{JJ} \ = j + [29,5m] + [354,37b + 0,05] + 10631\left[\frac{a}{30}\right] + 1\ 948\ 055,5$$

où [ ] signifie que l'on prend la partie entière du résultat calculé dans le crochet.

En effet : à un jour près, j est le nombre de jours écoulés depuis le début du mois, à 29 jours près [29,5 m] correspond au nombre de jours de tous les mois entiers écoulés à la date considérée. On compte ensuite le nombre de cycles de 30 ans entièrement écoulés. A une constante près c'est $[\frac{a}{30}]$ et chaque cycle contient 10631 jours. Enfin, il faut dénombrer le nombre de jours séparant l'achèvement du dernier cycle de 30 ans et le 1er Mouharram de l'année en cours. C'est le nombre entier d'années b, chaque année comportant environ 354,37 jours. La formule donnée est empirique, il suffit de vérifier que $[0,37b + 0,05]$ donne le nombre d'années abondantes dans les b années écoulées depuis la fin du dernier cycle de 30 ans (au moins à une constante près!). Le dernier terme est une constante permettant d'ajuster les origines. Il est calculé à l'aide de tables (j'ai dit que j'étais paresseux, je ne vais pas faire le calcul!).

Formule inverse :

Connaissant le jour julien JJ on cherche la date dans le calendrier musulman sous la forme A, M, Q où A est l'année de l'hégire, M le numéro du mois et Q le quantième. La suite de calculs suivants conduit, comme expliqué à côté, au résultat :

$z = \mathrm{JJ} - 1\ 948\ 085,5$	Nombre de jours depuis le 1er Mouharram de l'an 0 à 0 heure.
$a_1 = 30[\frac{z}{10631}]$	Nombre d'années, correspondant à 30 fois le nombre de cycles de 30 ans (soit 10631 jours).
$b = z - 10631 \times \frac{a_1}{30}$	Nombre de jours depuis l'achèvement du dernier cycle de 30 ans.
$a_2 = [\frac{b+0,95}{354,37}]$	Nombre d'années entières depuis l'achèvement du dernier cycle de 30 ans, $b + 0,95$ s'analyse en $b + 1 - 0,05$.
$A = a_1 + a_2$	Année de l'hégire.
$c = b - [354,37a_2 + 0,05]$	Nombre de jours dans l'année A.
$m = [\frac{c}{29,50}] + 1$	Numéro du Mois sauf un cas particulier pour le 30 Dou-l-Hidjja des années abondantes où $m = 13$.
$M = m - [\frac{m}{13}]$	Numéro du Mois.
$Q = c + 30 - [29,50M]$	Quantième.

3) En guise de conclusion

Il est remarquable que le calendrier musulman soit un calendrier purement lunaire. En effet, il semble qu'historiquement l'évolution voit le passage du calendrier lunaire au luni-solaire puis au solaire. Il apparaît donc difficile de trouver un calendrier purement lunaire à notre époque. La plupart du temps il s'agit de peuples à tradition orale (comme les "*hova*" de Madagascar – mais il y a eu emprunt aux arabes) ou alors de peuples ayant encore une civilisation de cueillette (indiens d'Amazonie). Le calendrier musulman est donc de tous ces points de vue une exception notable. Il a d'ailleurs failli être un calendrier luni-solaire et la transition vers ce stade était en cours quand le prophète MAHOMET a interdit les mois intercalaires. Tradition, désir de simplification, conservatisme? Il faudrait pour trancher faire une exegèse fouillée des motivations du prophète. Il est certain qu'à l'époque, chaque tribu attendait l'observation du croissant pour décider du début du nouveau mois, ce qui impliquait des variations du calendrier d'une tribu à l'autre.

Pour ne pas trop compliquer l'exposé (je tiens à ce que mes trop rares lecteurs me suivent jusqu'au bout) je ne suivrai pas l'ordre historique mais je passerai prochaînement à l'étude des calendriers solaires.

— à suivre —

NOUVELLE PARUTION :
"SUIVI SCIENTIFIQUE – CLASSE de 4ème"
Bulletin Inter – I.R.E.M.

Prix : 45 F (60 F si envoi postal)   Chèque à l'ordre de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

DES CONJECTURES

Eugène EHRHART

Nous allons d'abord faire le point pour quelques conjectures classiques, en relavant le rôle joué à présent par l'ordinateur. Puis *nous montrerons que la conjecture de Goldbach est sans doute exacte.* Enfin nous signalerons trois nouveaux problèmes ouverts sur les nombres premiers.

I.— Quelques conjectures arithmétiques historiques

Parmi les plus connues — qui ont fasciné une foule de chercheurs grands ou moins grands par un énoncé simple contrastant avec une grande difficulté — citons les conjectures :

1) **de Fermat** : l'équation diophantienne $X^n + Y^n = Z^n$ n'a pas de solution pour $n > 2$;

2) **de Gauss** : pour tout entier n, $2^{2^n} + 1$ est un nombre premier;

3) **d'Euler** : une puissance n-ième n'est décomposable en une somme de moins de n puissances n-ièmes;

4) **de Goldbach** : tout entier pair est somme de deux nombres premiers (à part 2, car 1 ne compte pas comme nombre premier);

5) **des nombres premiers jumeaux** (*) : il y en a une infinité;

6) **de Collatz** : quel que soit l'entier positif u_1, un terme égal à 1 figure dans la suite

$$u_{n+1} = \begin{cases} 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair,} \\ \frac{1}{2}u_n & \text{si } u_n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Où en sont actuellement ces conjectures?

1) En 1983 FALTING a prouvé que l'équation ne pourrait avoir qu'un nombre fini de solutions pour $n > 2$. En 1984 MORISHIMA et GUNDERSON ont montré que si l'équation avait une solution, **il faudrait que** $n > 57 \cdot 10^9$, et l'on verra qu'**il faudrait aussi que** $X, Y, Z > n$. Y a-t-il quelqu'un qui doute encore de l'exactitude de la conjecture?

Sans nuire à la généralité on peut supposer $X > Y$. Comme $Z \geq Y + 1$,

$$X^n \geq (Y+1)^n - Y^n > nY^{n-1}. \tag{1}$$

D'où $n/Y < (X/Y)^n < 1$. Donc $Z > Y > n$, mais aussi $X > n$, car (1) donne

$$n \log X > \log n + (n-1) \log Y > n \log n$$

la dernière ingégalité pouvant s'écrire :

(*) Deux premiers sont dits jumeaux si leur différence est 2.

$$(n-1)\log Y > (n-1)\log n.$$

2) EULER a constaté que la conjecture est déjà en défaut pour $n = 5$. Depuis on a trouvé d'autres contre-exemples.
3) Deux contre-exemples infirment la conjecture :

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5 \qquad \text{(trouvé en 1966)},$$
$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422418^4 \qquad \text{(trouvé en 1971)}.$$

Une première grande victoire de l'ordinateur !
4) Nous montrerons plus loin que la conjecture est sans doute exacte.
5) Un raisonnement "**plausible**" conduit à estimer que le nombre de paires de jumeaux jusqu'à n grand, est de l'ordre de :

$$J_n \simeq 1,32032 \frac{n}{(\log n)^2}$$

ce qui impliquerait l'exactitude de la conjecture [1]. Soit j le nombre de paires de jumeaux de l'intervalle $(10^m, 10^m + 150000)$ et j' la valeur approchée déduite de la formule empirique précédente. Alors [1]

m	8	9	10	11	12	13	14	15
j	601	466	389	276	276	208	186	161
j'	584	461	374	309	259	221	191	166

On voit que l'approximation est remarquable : **la conjecture 5 est probablement vraie**.

Par ailleurs j'ai montré que **dans la suite illimitée des nombres premiers il existe des intervalles arbitrairement grands sans jumeaux** [2].

6) Malgré plusieurs prix offerts pour sa résolution la conjecture, vieille d'une trentaine d'années, reste ouverte. ISHIHATA l'a vérifiée pour $u_1 < 3.10^{12}$.

Remarque : La réponse, oui ou non, à ces problèmes importe d'ailleurs peu pour la science mathématique. Ici ce n'est pas tant le résultat qui compte, que le moyen d'y parvenir. Il est bien connu que la conjecture de FERMAT, par exemple, a conduit KUMMER à introduire les idéaux, théorie belle et féconde.

II.— L'aide de l'ordinateur

Pour **infirmer** une conjecture arithmétique l'ordinateur est un outil puissant, puisqu'il suffit de trouver un seul contre-exemple. C'est ainsi qu'on a pu écarter celle d'EULER.

Mais l'ordinateur peut aussi **confirmer** une conjecture, si on peut réduire une question à l'examen d'un nombre fini, même très grand, de cas répétitifs. Ainsi il y a quelques années la conjecture des quatre couleurs a enfin été validée, en la ramenant à quelques 2000 cas de figures, que l'ordinateur a tranchés. Récemment, je me posais la question : *Quel est le plus petit cercle passant par juste cinq nœuds d'un quadrillage* J'ai pu ramener ce problème ardu à écarter près de 1000 cercles, ce que l'ordinateur a réalisé. Le cercle conjecturé était le bon : $3(X^2+Y^2)-25(X+Y)=0$, en axes normaux du quadrillage.

III.— Le raisonnement plausible

En voici un exemple, appliqué à la conjecture de GOLDBACH. En face de chaque entier pair n de 4 à 100, plaçons le nombre d de ses décomposotitions en sommes de deux nombres premiers.

n	d	n	d	n	d	n	d
4	1	28	2	52	3	76	4
6	1	30	3	54	5	78	6
8	1	32	2	56	3	80	4
10	2	34	4	58	4	82	5
12	1	36	4	60	6	84	8
14	2	38	2	62	3	86	5
16	2	40	3	64	5	88	4
18	2	42	4	66	6	90	9
20	2	44	3	68	2	92	4
22	3	46	4	70	5	94	5
24	3	48	5	72	6	96	7
26	3	50	4	74	5	98	3
						100	6

On constate que la variation de d est très capricieuse, mais que "*en gros*" d est croissant, croissance plus visible dans les deux listes ci-dessous. La première donne dans chaque centaine jusqu'à 1200, le plus grand d avec le plus grand n correspondant. La seconde donne pour chaque d de 1 à 12 le plus grand n associé jusqu'à 1200.

d	9	14	19	27	30	32	32	42	50	50	56	57
n	90	180	270	390	420	510	660	780	840	990	1050	1170

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	12	68	128	152	188	332	398	368	488	632	692	808

Nous allons montrer que *pour n grand cette croissance "en gros" continue* toujours. Quoique, par suite de certaines approximations, notre raisonnement manque parfois de rigueur, il permet, je pense, de conclure que la conjecture de GOLDBACH est très probablement exacte.

2	$n-2$
3	$n-3$
4	$n-4$
$\vdots$	$\vdots$
$K-2$	$K+2$
$K-1$	$K+1$
K	K

Soit un nombre pair $n = 2K$. En face des entiers consécutifs de 2 à K, plaçons leurs compléments à n. On sait que pour K grand les deux colonnes de cette liste contiennent sensiblement respectivement $\frac{K}{\log K}$ et $\frac{2K}{\log 2K} - \frac{K}{\log K}$ nombres premiers. La probabilité qu'en face d'un nombre premier choisi de gauche se trouve un nombre premier de droite est :

$$P_1 \simeq \frac{\frac{2K}{\log 2K} - \frac{K}{\log K}}{K} = \frac{2\log K - \log K - \log 2}{\log K \log 2K} \simeq \frac{1}{\log 2K}.$$

(On suppose ici une équiprobabilité, qui n'est qu'approximative.) La probabilité qu'un premier déterminé de gauche ne soit pas en face d'un premier de droite est donc

$$P_1' \simeq 1 - \frac{1}{\log 2K}.$$

Par suite la probabilité qu'aucun premier de gauche ne soit en face d'un premier de droite — c'est-à-dire que $n = 2K$ ne soit décomposable en somme de deux nombres premiers — est inférieure à :

$$P = \left(1 - \frac{1}{\log 2K}\right)^{\frac{K}{\log K}}$$

car pour le second premier choisi à gauche

$$P_2 = \frac{\dfrac{2K}{\log 2K} - \dfrac{K}{\log K}}{K-1} > \frac{1}{\log 2K}$$

puisqu'un des non-premiers de droite est maintenant supprimé. Donc $P_2' < 1 - 1/\log 2K$. Pareillement pour les premiers suivants choisis à gauche : la suite $P_1', P_2', P_3', \ldots$ est décroissante. Or quand K croît, P **décroît rapidement et tend vers zéro**. En effet

$$P = \left[\left(1 - \frac{1}{\log 2K}\right)^{\log 2K}\right]^{\frac{K}{\log K \log 2K}}$$

où l'expression entre crochets croît lentement et tend vers $1/e$, pendant que son exposant croît et tend vers l'infini.

Remarque

Par un raisonnement probabiliste analogue, plausible au sens de POLYA [3], j'ai montré que le produit

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p}\right)\log p,$$

où les dénominateurs sont les nombres premiers jusqu'à p, est *"voisin" de* 1/2 *quand p est très grand.* (La valeur exacte de la limite est 0,561...) [4].

IV.— Conjectures sur les nombres premiers.

Voici une supposition qui implique celle de GOLDBACH. Elle est vérifiée pour les nombres jusqu'à 1200, et par le raisonnement plausible fait plus haut son exactitude est également très probable.

Conjecture 1. Tout entier pair supérieur à 12 est, **de plus d'une manière**, la somme de deux nombres premiers (plus de 10 manières pour $n > 632$).
Le chapitre III suggère aussi :

Conjecture 2. Le nombre de décomposition de l'entier pair n en somme de deux premiers tend vers l'infini avec n.
Enfin généralisons le problème des jumeaux :

Conjecture 3. Tout nombre pair est, d'une infinité de manières, la différence de deux nombres premiers.

Je remercie François PLUVINAGE. A l'aide de l'ordinateur, il a calculé les d des nombres pairs $n < 1200$ et écarté près de 1000 cercles dans le problème terminal du chapitre II.

Bibliographie

[1] P. DAVIS & R. HERSCH.– *The Mathematical Experience.* p. 215–216, Boston, 1982.
[2] E. EHRHART.– *On prime numbers.* The Fibonaci Quarterly, p. 271–274, août 1988.
[3] G. POLYA.– *Les Mathématiques et le raisonnement plausible.* Gauthier-Villars, 1958.
[4] E. EHRHART.– *Nombres premiers et calcul de probabilité.* Articles de mathématiques, p. 177, Cédic/Nathan, 1986.

NOUVELLE PARUTION :
"IMAGES ET MATHS"
Bulletin Inter – I.R.E.M.

Prix : 25 F (35 F si envoi postal)   Chèque à l'ordre de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

UN MATHEMATICIEN ALSACIEN

SOUS LA REVOLUTION FRANCAISE :

LOUIS ARBOGAST (*)

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Il est devenu courant et banal de stigmatiser une évocation de l'histoire qui se limiterait à des noms illustres et à des dates charnières. Cette attitude reste pourtant encore fréquente dans la perception que nous gardons de l'histoire des mathématiques. Nous retenons quelques noms de génies mathématiciens : ARCHIMÈDE, EULER, CAUCHY etc ..., rencontrés au fil de nos études, à l'occasion d'une formule ou d'un théorème. Nous oublions, ce faisant, que la science se constitue sur un terreau favorable ou défavorable, dans un cadre stimulant ou contraignant, au milieu d'une communauté scientifique qui favorise ou, au contraire, freine la recherche et l'invention. Nous oublions qu'autour des noms illustres qui nous sont restés, d'autres hommes, nombreux, moins connus, moins brillants sans doute, mais souvent ardents et persévérants dans leur travail obscur, ont préparé le terrain, dégrossi les problèmes, et ont ainsi contribué quelquefois de façon décisive, aux progrès d'une idée. C'est l'histoire d'un tel homme que je veux rapporter ici : celle de Louis François Antoine ARBOGAST. C'est son œuvre que je voudrais sortir de l'oubli. Qu'en plus cet homme soit né en Alsace et ait joué un rôle important à Strasbourg ne peut qu'augmenter notre intérêt : les mathématiciens alsaciens ne sont pas si nombreux, qui ont réalisé une œuvre importante. Plusieurs pourtant ont laissé des traces : le surprenant est que les traces soient restées, mais pas le nom de leurs auteurs. Qui sait, par exemple, que la notation factorielle $n!$ pour le produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ a été introduite par KRAMP un autre mathématicien alsacien, né à Strasbourg en 1760, et doyen de la faculté des sciences de cette même ville de 1810 jusqu'à sa mort en 1826?

La situation pour ARBOGAST est encore plus paradoxale : voici en effet un savant perçu par ses contemporains comme un des premiers géomètres de la fin du 18^{e} siècle. Qu'on en juge : LALANDE dans le 6^{e} supplément à l'Histoire des Mathématiques de MONTUCLA [1] évoque :

"Un de nos plus habiles géomètres (qui) a publié en 1800 une nouvelle espèce de calcul qu'on peut regarder comme une découverte dans l'analyse (...) Ce nouveau calcul influera nécessairement sur les progrès de l'analyse (...). Il semble que la méthode d'ARBOGAST est ce que Waring paraissait désirer quand il parlait d'une méthode de déduction, mais il fallait pour réaliser cette idée, un des premiers géomètres de ce siècle."

LACROIX, dans son '*Traité de Calcul différentiel et intégral*' [2] – lequel représente une sorte d'encyclopédie de l'analyse au début du 19^{e} siècle – ne fait pas moins

© L'OUVERT 53 (1988)

(*) Conférence faite au Congrès des Sociétés Savantes, le 5 avril 1988 à Strasbourg.

de douze mentions d'ARBOGAST (plus que d'autres contemporains restés célèbres comme BEZOUT, CARNOT, CLAIRAUT, LAMBERT ou MAC-LAURIN) tant dans son introduction, que tout au long des trois volumes qui composent ce monumental traité.

LAGRANGE lui-même rend hommage à ARBOGAST dans l'introduction à sa '*Théorie des fonctions analytiques*' [3] lorsqu'il évoque "*son beau Mémoire où la même idée (celle développée par* ARBOGAST *) est exposée, avec des développements et des applications qui lui appartiennent*".

D'ailleurs les noms de LAGRANGE et d'ARBOGAST sont associés dans les propositions du Comité du Salut Public, lorsque celui-ci veut mettre en place l'Ecole Centrale de Travaux Publics (qui deviendra l'Ecole Polytechnique). On peut lire ainsi, dans le procès-verbal de la séance du 5 Frimaire an III (25 novembre 1794) [4] :

"État des principaux agents de l'Ecole Centrale des Travaux Publics, dont il est nécessaire et urgent que la nomination soit confirmée par les trois Comités de Salut Public, d'Instruction publique et des Travaux publics :

Instituteurs d'analyse : Lagrange — Arbogast — Ferry"

et ce commentaire (séance du 26 Frimaire - 16 décembre 1794) [4] :

"considérant combien il est important de donner à l'enseignement de l'École Centrale des Travaux Publics toute la perfection qu'exige son objet en la proportionnant au degré où sont parvenues les lumières acquises, et en y employant les hommes les plus habiles dans les sciences mathématiques et physiques."

En fait, ARBOGAST refusera cette place "*pour ne pas donner prise à la calomnie*" et déclarera vouloir garder son poste de représentant. Cependant le Comité l'invita à faire son cours pendant un an (KUSCINSKI – Dictionnaire des Conventionnels [5]).

De quelle calomnie s'agit-il? Nous sommes à la fin de 1794, après la Terreur; avec la guerre extérieure et intérieure, le pays est exsangue et affamé. Comme nous le verrons, ARBOGAST était un des membres principaux du Comité d'Instruction publique de la Convention, lequel a mis en place, avec les Comités de Salut Public et des Travaux Publics, l'École Polytechnique. A un moment où la vie quotidienne, au niveau même de la simple subsistance, était très difficile pour tout le monde, il eût été tentant de jouer de son influence pour obtenir un poste aussi glorieux et rémunérateur. Le caractère foncièrement honnête et droit d'ARBOGAST lui interdisait de donner prise à la moindre suspicion.

On pourrait ainsi multiplier les témoignages de l'époque — cela ne ferait qu'accroître l'étonnement et la curiosité devant l'oubli patent dont est victime dans la France d'aujourd'hui l'œuvre mathématique d'ARBOGAST : quel est le mathématicien français, quel est le professeur ou l'étudiant de mathématiques qui connaisse aujourd'hui seulement le nom d'ARBOGAST?

Certes, on peut penser que les contemporains d'ARBOGAST sont mauvais juges pour apprécier les qualités des hommes qu'ils fréquentent; trop près, ils ont du mal à percevoir les lignes de forces en profondeur, à dégager ce qui est porteur d'avenir de ce qui est succès sans lendemain. En réalité l'œuvre d'ARBOGAST eut une fortune très différente selon les pays.

En France, à part quelques articles ou mentions publiés par son ami J.-F FRANÇAIS dans les premiers volumes des Annales de GERGONNE [6] l'œuvre mathématique d'ARBOGAST fut peu à peu oubliée.

Même infortune en Allemagne. Si l'on examine par exemple l'"*Essai d'un système complet et conséquent des mathématiques*" de Martin OHM (Vol. 4 – 1830) on y trouve énoncé le problème suivant

"Etant donnée une fonction $y(x)$, trouver $y^{(n)}(x)$ dérivée $n^{\text{ième}}$ de y directement, sans avoir besoin de calculer les dérivées d'ordres inférieurs."

Mais en fait M. OHM ne traite ce problème que pour quelques cas particuliers, là où la formule d'ARBOGAST donne une méthode tout à fait générale. Visiblement les idées d'ARBOGAST n'avaient pas réussi — trente ans après sa mort — à traverser le Rhin.

Oubliées sur le continent, ces idées eurent par contre un succès remarquable en Angleterre. Dès 1819 HORNER expose sa fameuse méthode de résolution approchée des équations numériques [7] en faisant référence au '*Calcul des dérivations*' d'ARBOGAST et à sa formule. Celle-ci ne cessera d'être commentée, expliquée, développée, utilisée dans les diverses revues mathématiques anglaises du 19e siècle sous des signatures plus ou moins illustres comme DE MORGAN, CAYLEY, DOWKINS, ROBERTS, TANNER etc... (voir [8]).

DE MORGAN, par exemple, va jusqu'à souhaiter que "*la loi de formation d'*ARBOGAST *de n'importe quelle puissance de polynôme fasse partie de l'algèbre la plus élémentaire*" [9].

Et ROBERTS écrit :

"L'œuvre d'ARBOGAST sur ce sujet ("*Calcul de dérivations*") est si remarquable pour la généralité et la puissance de ses procédés, et pour l'expression distinguée du principe fondamental du calcul des opérations, une méthode alors inexistante dans quelque forme systématisée que ce soit, qu'il semble légitime de relier son nom à la question générale du développement (des fonctions)" [10].

Repères biographiques

Louis François Antoine ARBOGAST est né le 4 octobre 1759 à Mutzig, fils d'Antoine ARBOGAST secrétaire de bailliage et de Catherine SCHMITT. Je n'ai jusqu'à présent rien trouvé sur son enfance et ses premières études. Juste une allusion à un tuteur dans une notice nécrologique [11] permet de penser qu'il était orphelin dès son plus jeune âge.

"ARBOGAST réunissait aux qualités qui constituent le vrai savant, une grande droiture dans le caractère et un cœur noble et bienfaisant. Son tuteur étant détenu, il le nourrit pendant sa captivité, et fit tous ses efforts pour lui en adoucir les rigueurs."

Après des études de droit à l'Université de Strasbourg de 1779 à 1981, il exerce quelques temps le métier d'avocat au Bureau du Conseil Souverain d'Alsace à Colmar. Mais passionné depuis longtemps par les mathématiques (*cf.* [11]) il est nommé professeur de cette matière en 1783 au Collège Royal de Colmar, puis à l'Ecole d'Artillerie de Strasbourg, et aussi professeur de physique au Collège national de la même ville. Gagné par les idées révolutionnaires, il adhère à la

Société des Amis de la Constitution le 26 octobre 1790 et est élu député du Bas-Rhin à l'Assemblée Législative, en août 1791, réélu un an plus tard à la Convention. Apparemment discret au sein même des deux Assemblées, il participa par contre très activement aux travaux du Comité d'Instruction publique où il siégea sans désemparer depuis sa création en octobre 1791 jusqu'au début de 1795 (dernière mention dans les procès-verbaux du Comité d'Instruction publique [12] le 18 pluviose an III). D'abord sollicité, nous l'avons vu, pour enseigner à l'Ecole Polytechnique, il fut chargé en juillet 1795 de l'organisation de l'Ecole Centrale du Bas-Rhin qui remplaçait l'ancienne Université de Strasbourg. Il y enseigna les mathématiques pratiquement jusqu'à sa mort prématurée le 8 avril 1803 à l'âge de 43 ans. Il était correspondant de l'Académie des Sciences de Paris depuis le 18 août 1792, et membre associé, non résident, de la section de mathématiques de l'Institut National de France depuis le 28 février 1796.

L'œuvre mathématique

L'œuvre mathématique d'ARBOGAST présente trois pôles d'intérêt :
— une réflexion approfondie et originale sur les fondements du calcul infinitésimal et sur les objets qu'il manipule,
— l'invention d'une méthode de développement des fonctions, connue (au moins en Angleterre) sous le nom de "*formule d'*ARBOGAST" liée avec les premiers essais de ce qu'on appelle aujourd'hui le calcul opérationnel,
— un peu à part car touchant l'histoire des sciences, la constitution d'une importante collection de mémoires et de lettres inédites des mathématiciens français du XVII^e siècle.

La question des fondements

Si l'on veut connaître les grands problèmes qui préoccupaient la communauté scientifique au 18^e siècle, dans tous les domaines, une bonne information nous en est donnée par les questions mises à concours par les grandes Académies européennes, et particulièrement l'Académie de Berlin et l'Académie de Saint Pétersbourg.

Ainsi en 1787 cette dernière avait proposé un prix pour la meilleure réponse à la question suivante :

"Déterminer si les fonctions arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles qui ont plus de deux variables, appartiennent à des courbes ou surfaces quelconques, soit algébriques, transcendantes ou mécaniques, soit discontinues ou produites par le mouvement libre de la main; ou bien si elles ne peuvent légitimement être rapportées qu'à des courbes continues et susceptibles d'être exprimées par des équations algébriques ou transcendantes."

On reconnaîtra aisément dans cette question, ainsi que dans le vocabulaire utilisé, tous les éléments qui ont constitué cette longue et parfois violente querelle entre EULER, d'ALEMBERT et quelques autres à propos de l'équation des cordes vibrantes [13]. Sans vouloir reprendre en détail cette querelle, signalons simplement qu'elle touchait un problème de fond lié à une conception trop étroite que l'on se faisait alors des fonctions de l'analyse, et qu'elle joua un rôle moteur dans le progrès des mathématiques, faisant éclater le cadre conceptuel même de l'analyse classique.

Le prix fut gagné par ARBOGAST âgé de moins de trente ans, et qui d'emblée acquit ainsi une certaine célébrité dans la communauté mathématique européenne. Non seulement il répondait aussi complètement que possible dans le cadre conceptuel du 18^{e} siècle à la question de l'Académie (donnant raison sur le fond à EULER) mais son argumentation mettait en place une distinction essentielle en analyse, qui allait aider à dégager le concept moderne de fonction continue [14].

En 1784, une autre question fondamentale avait été mise ,à prix, cette fois par l'Académie de Berlin. LAGRANGE y était encore, lorsqu'elle demanda, sans doute à son initiative :

"Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle infini en mathématiques"

ajoutant ce commentaire :

"On sait que la haute géométrie fait un usage continuel des infiniment-grands et des infiniment-petits. Cependant les géomètres et même les analystes anciens ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini; et de grands analystes modernes avouent que les termes grandeur infinie sont contradictoires. L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique propre à être substitué à l'Infini..."

De nombreuses réponses furent apportées, directement ou indirectement à cette question, et leur examen mériterait à lui seul une ou plusieurs séances. Schématiquement on peut distinguer deux tendances. La plupart des mathématiciens tentent d'élucider ce qu'ils appellent *la métaphysique du calcul infinitésimal* en essayant de préciser ou de fonder les concepts "*d'infiniment petit*", "*infiniment grand*" ou de "*limites*", en restant donc dans la problématique paradoxale soulevée par la question de l'Académie. D'autres, comme LAGRANGE et ARBOGAST vont chercher à se situer dans une toute autre perspective, refusant ces notions, et essayant de trouver — selon les termes mêmes de l'Académie *un principe sûr et clair propre à être substitué à l'Infini.* On connaît le *Traité des fonctions Analytiques* de LAGRANGE, déjà cité. Voici comment ARBOGAST juge la théorie utilisant les infiniment-petits, et quelles sont ses propres intentions dans l'introduction à son **Mémoire sur de nouveaux principes de calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniment-petits et des limites** [15].

"...Cette théorie, par sa nature même, est peu susceptible d'être présentée d'une manière rigoureuse. Nous ne saurions en effet nous former aucune idée nette d'une quantité infiniment-petite, parce qu'une telle quantité regardée comme quelque chose de réel serait en d'autres termes capable d'augmentation ou de diminution qui ne saurait recevoir de diminution ultérieure. Aussi l'expression vague d'infiniment petit, quelque sens qu'on lui donne pour la justifier, nuit-elle toujours à l'évidence (...) et l'on n'éprouve pas le contentement qui naît de la conviction parfaite (...) Malgré ces défectuosités de la méthode infinitésimale, tous les plus grands géomètres de nos jours en ont conservé la caractéristique et les expressions et l'on a adopté pour théorie rigoureuse celle des limites. Il résulte de là que la caractéristique ne répond pas parfaitement à la théorie, celle-là supposant des différentielles isolées dy, dx, dz etc... et celle-ci n'attachant d'idée précise qu'à leurs rapports

$$dy/dx, dz/dx \text{ etc.}$$

Mon dessein est de proposer une autre théorie qui, appropriée aux notations reçues et ne laissant rien à désirer du côté de la rigueur et de la clarté, n'entraîne dans aucune longueur inutile; elle porte sur les idées les plus simples et me paraît répandre sur les calculs supérieurs la même évidence qui règne dans l'algèbre ordinaire. Je ne considère les différentielles que comme les termes successifs de la série qui exprime la différence ou l'incrément d'une fonction d'une ou plusieurs variables, la série étant ordonnée suivant les puissances des différences $\Delta x, \Delta y$ etc..."

ARBOGAST a envoyé ce mémoire à l'Académie des Sciences de Paris en 1789 soit huit ans avant la parution du "*Traité*" de LAGRANGE lequel avait d'ailleurs été chargé d'en faire un rapport, avec LEGENDRE.

Plus tard ARBOGAST exploitera à fond toutes les ressources de sa théorie pour en dégager un procédé algorithmique extrêmement simple et général de développement des fonctions en série de puissance de la variable, procédé connu sous la dénomination : formule d'ARBOGAST.

Nous l'étudierons en détail dans un prochain article.

La collection d'Arbogast

Dans un article du Journal des Savants, en septemble 1839 le comte LIBRI-CARRUCCI faisait part d'une acquisition "*la plus heureuse que j'ai faite, de ma vie*", écrivait-il, acquisition qu'il venait de réaliser chez un libraire de Metz et comportant un lot important de manuscrits provenant de la bibliothèque de FRANÇAIS, lequel les avait lui-même reçus de son ami ARBOGAST. Ce lot comprenait de nombreuses lettres inédites de DESCARTES, J. BERNOUILLI, l'HOPITAL, d'ALEMBERT, VARIGNON, et surtout une collection de manuscrits et de lettres de FERMAT se composant :

"1. De quelques cahiers qui paraissent autographes et qui ne renferment que des recherches géométriques inachevées et des brouillons de calcul;
2. D'un volume qui entre autres choses contient une ancienne copie de lettres inédites de FERMAT, copie qui très probablement remonte à l'époque même où ces lettres ont été écrites;
3. D'un énorme cahier d'écriture moderne, où l'on a réuni toutes les lettres précédentes en y joignant plusieurs écrits mathématiques de FERMAT et quelques autres lettres que l'on a tirées de différents manuscrits. Vérification faite, ce cahier se trouve écrit de la main d'ARBOGAST."

Par un décret du 28 avril 1843, LIBRI avait été chargé par le Ministère de l'Instruction publique de réunir dans une publication d'ensemble tous les écrits de FERMAT mais le projet n'aboutit pas.

LIBRI fut en effet soupçonné de vol de livres dans les bibliothèques dont il avait la charge, officiellement inculpé et condamné. Il eut cependant le temps de fuir à Londres où il vendit son inestimable bibliothèque (plus de 30000 volumes). La collection d'ARBOGAST se trouva ainsi dispersée, après divers avatars, en partie à la Bibliothèque Nationale de Paris, en partie en Italie, dans la collection du prince BONCOMPAGNI et surtout à la bibliothèque de Florence.

Finalement les copies qu'ARBOGAST avait faites des manuscrits et des lettres de FERMAT servirent de façon irremplaçable pour l'édition des œuvres de ce dernier, lorsque Paul TANNERY et Charles HENRY en furent chargés en 1891 par le Ministère de l'Instruction Publique. (Sur l'ensemble de cette question, *cf.* [16]).

Arbogast au comité d'Instruction Publique

Plusieurs raisons motivaient la présence d'ARBOGAST au Comité d'Instruction publique et y expliquent l'importance de ses activités , la variété de ses interventions.

Aux qualités de compétences touchant les sciences et plus particulièrement les mathématiques ARBOGAST joignait, aux dires de ses contemporains "*une grande droiture dans le caractère, et un cœur noble et bienfaisant*" [(Notice nécrologique de la Société libre des sciences et des arts)] [11]. Aussi fut-il constamment réélu au Comité, et plusieurs fois président ou secrétaire. Il traversa toutes les phases de la Révolution sans jamais être inquiété, alors que de tempérament très modéré, il s'était préoccupé publiquement devant l'Assemblée Nationale de la sûreté personnelle du prince royal lors des évènements de 20 juin 1792, et avait refusé, bien que montagnard, de voter la mort de Louis XVI en janvier 1793.

Son origine alsacienne, sa connaissance de la culture et de la langue allemande lui firent confier tout ce qui concernait les informations sur l'organisation scolaire en Allemagne, laquelle avait bénéficié durant les dernières décennies du 18^e siècle d'un développement remarquable. En effet, les idées pédagogiques nouvelles développées par J.-J. ROUSSEAU dans l'Emile avaient eues une grande fortune un peu partout en Europe, mais elle était restée toute théorique en France. En Allemagne par contre elles furent mises en pratique par des gens comme BASEDOW et PESTALOZZI. Les idées et les méthodes de cette nouvelle école pédagogique d'outre Rhin avaient déjà pénétré dans les esprits en Alsace où de plus, comme le fait remarquer R. REUSS "*l'enseignement était peut-être plus développé (...) par suite de l'émulation naturelle que suscitait dans le clergé des deux cultes, l'antagonisme confessionnel des populations de notre province*" [17].

Aussi trouve-t-on mentionné dès le 3 novembre 1791 dans les procès-verbaux du Comité d'Instruction publique, qu'ARBOGAST est chargé de faire venir d'Allemagne des ouvrages sur l'organisation des écoles normales, des universités, des gymnases.

Le terme même d'Ecole Normale était emprunté à l'Autriche. Le prélat silécien FELBIGER chargé par Marie-Thérèse de la réorganisation de l'enseignement populaire, avait créé en 1774 le terme de *Normalschule* pour désigner une école type dans laquelle les instituteurs devaient trouver un modèle à suivre.

Les alsaciens J.-F. SIMON et Joseph SCHWEIGHAUSER avaient fait un stage au célèbre établissement de BASEDOW : le Philanthropinum de DESSAU. Ils étaient en relation avec plusieurs membres du Comité d'Instruction publique, et leur avaient proposé la création en France d'établissements semblables aux écoles normales autrichiennes.

Il serait trop long et fastidieux d'énumérer par ailleurs toutes les tâches confiées à ARBOGAST en raison de ses compétences scientifiques. Chaque fois qu'un problème, qu'une sollicitation concernait une question ou un homme de science, on en chargeait ARBOGAST. Que ce soit pour :

- des expériences météorologiques en ballon,
- un projet de canal de Dieppe à Paris,
- l'examen de mémoires mathématiques (RAFFRON, CAYRON, COUSIN etc...),
- la mise en place, avec ROMME d'un concours pour la construction d'une pendule décimale et pour l'instruction sur le nouveau calendrier;

et tant d'autres questions à caractère plus ou moins scientifique.

Il fut chargé aussi, avec GREGOIRE et THIBEAUDEAU, de constituer une bibliothèque à la disposition du Comité d'Instruction publique, bibliothèque formée à partir des bibliothèques privées, sous scellés, des Emigrés.

"Vu (...) le projet d'établir près du Comité d'Instruction Publique une bibliothèque qu'il serait facile de composer d'articles choisis dans les bibliothèques d'émigrés et des établissements supprimés, (...) arrête qu'il sera formé dans le local du Comité d'Instruction Publique une collection des meilleurs ouvrages sur les objets relatifs aux travaux des différents comités (21 nivose An III - 10 janvier 1794)" [12].

Est-là qu'ARBOGAST fut mis en présence des lettres et manuscrits des mathématiciens du 17^{e} siècle qu'il recopia méticuleusement, avec son honnêteté habituelle?

Surtout, ARBOGAST travailla sans relâche avec ses amis CONDORCET et ROMME à l'élaboration et l'adoption d'un plan général d'organisation de l'Instruction Publique, et ses interventions furent nombreuses pour défendre le projet de CONDORCET, en particulier la nécessité de cinq niveaux d'instruction.

Deux autres contributions importantes méritent d'être encore soulignées. Il s'agit de son rapport sur le nouveau système des Poids et Mesures, et de son "*rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'Instruction Publique*".

On peut juger, sur ce dernier point combien les idées pédagogiques d'ARBOGAST étaient modernes — influencées sans doute par PESTALOZZI :

"Un préjugé, accrédité trop longtemps, et qui a contribué plus que tout autre à entraver l'instruction, c'est de croire que les facultés intellectuelles ne se développent que les unes après les autres; que les enfants ne sont capables que de mémoire et non de raisonnement, de manière que l'instruction ne s'est presque bornée qu'à faire apprendre de mémoire aux élèves ce qu'ils ne comprenaient pas, et ensuite à guider leur imagination."

"Les enfants raisonnent aussi bien, quelquefois mieux que les hommes, mais sur des choses à leur portée, et ces choses sont celles qui tiennent à des idées sensibles. Commençons donc de bonne heure à faire raisonner les enfants; que les premiers livres qui leur seront offerts les y mènent naturellement; alors et alors seulement vous formerez leur esprit et leur cœur. Alors l'étude ne sera plus pour eux un état de violence, mais ils s'y porteront bientôt par goût. Toutes les facultés se développent graduellement, mais à peu près également : occupons les toutes, mais occcupons les agréablement. Que par une pente douce on marche des idées sensibles aux idées abstraites; qu'on place les jeunes gens dans les mêmes circonstances où nous nous sommes trouvés nous-mêmes, lorsque nous nous sommes formés des idées exactes, et alors les progrès deviendront rapides, parce que le travail, rendu plus facile, sera toujours accompagné de ce plaisir qui, des succès obtenus, porte vers des succès nouveaux cf. [18]".

Pour ce qui est des Poids et Mesures on a de la peine à imaginer aujourd'hui le progrès immense qu'apporta la réforme du système métrique. Fernand BRAUDEL [19] l'a fort bien mis en évidence lorsqu'il écrit : "Cette diversité extravagante des mesures était le cauchemar des administrations. Pourrait-on donner aux fûts de vin une seule et même contenance, demandait-on à l'intendant du Poitou en 1684? Idée absurde, répond-il en citant aussitôt une multitude étourdissante de tonneaux dont les appellations et contenances varient de localité en localité (...). L'unité ce serait la quadrature du cercle".

Eh bien, cette quadrature du cercle, la Convention Nationale eut le courage de l'entreprendre et la volonté de la réussir. En sa qualité de rapporteur du Comité d'Instruction Publique, ARBOGAST fit adopter le 1er avril 1793 une loi introduisant le système métrique dans toute l'étendue de la jeune République.

"C'est sur un objet de bienfaisance universelle que votre Comité d'Instruction Publique vient fixer quelques moments les regards de la Convention Nationale. L'uniformité des poids et mesures était depuis longtemps un des vœux des philantropes; elle est réclamée à la fois par les sciences et les arts, par le commerce et par l'homme utile qui vit du travail de ses mains, et qui, le plus exposé aux fraudes, est le moins en état d'en supporter les effets. Ce nouveau moyen de cimenter l'unité de la République en présente encore d'estime et de liaison entre les Français et les autres peuples, entre la génération présente qui offre ce bienfait, et la postérité qui en jouira ou en vérifiera les bases" [20].

Tout cela, ARBOGAST le fit avec une compétence, une discrétion mais aussi un dévouement constants au service public. Un des derniers arrêtés du Comité de Salut Public du 12 brumaire an IV "Charge les conducteurs de charrois gratuitement à Strasbourg les livres, meubles et effets du représentant ARBOGAST dans des charriots couverts de la République" cf. [5].

On ne peut mieux décrire la personnalité d'ARBOGAST et la façon avec laquelle il vécut ces évènements, qu'en citant pour terminer la notice nécrologique donnée par la Société libre des Sciences et des Arts, qu'il avait contribué à créer à Strasbourg en 1796 [11].

"Ne désirant acquérir la célébrité que par l'étude des sciences, et non par les dignités et les honneurs publics, il ne fut, dans ces deux assemblées politiques, qu'un mathématicien que des circonstances extraordinaires avaient arraché à sa paisible retraite. Religieux à remplir les devoirs que la voix de ses concitoyens lui avait imposés, il les regardait comme une chaîne pesante, qu'il reprenait chaque jour avec exactitude, mais dont il s'affranchissait avec volupté, pour l'oublier dans le sein de ses studieuses occupations. C'était l'asile où se réfugiait ARBOGAST, qui, placé au foyer des évènements, contemplait toujours avec un sentiment d'effroi les grands et terribles spectacles de la révolution
".

BIBLIOGRAPHIE

[1] MONTUCLA.– *Histoire des Mathématiques.*– Tome IV.– Publié par J. de la Lande (1802).
[2] LACROIX S.- F.– *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral.*– 2^{e} édition (1810) chez Coursier, Paris.
[3] LAGRANGE J.-L.– *Théorie des fonctions analytiques.*– Imprimerie de la République, Paris (1797).
[4] AULARD. *Procès-verbaux du Comité du Salut Public.*
[5] KUSCINSKI A.– *Dictionnaire des Conventionnels.*– Paris, Société de l'Histoire de la Révolution Française (1916).
[6] Annales de GERGONNE.– Annales de Mathématiques pures et appliquées, Nismes entre 1810 et 1832.
[7] HORNER W.-G.– *Philosophical Trans. of the Royal Society.*– Vol. 109 (1819).
[8] LLOYD-TANNER H.-W.– *On the history of Arbogast's rule.*– Messenger of Math. XX 1890–1891.– p. 83–101.
[9] DE MORGAN A.– *Application of combinations to the explanation of Arbogast's method.*– C. & D. Math. Journal.– VOl. VI.
[10] ROBERTS S.– *On Arbogast's calculus of derivations.*– Q. J. Math.– Vol IV (1861).
[11] Mémoires de Société des Sciences agriculture et arts de Strasbourg.– Berger Levrault (1811).
[12] GUILLAUME.– *Procès-verbaux du Comité d'instruction publique.*
[13] TRUESDELL C. LEONHARDI EULERI *Opera omnia.*– Ser. II, Vol. 13 (1956).
[14] ARBOGAST L.– *Mémoire sur la nature des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles.*– Saint Petersbourg, Imprimerie à l'Académie impériales des Sciences (1791).
[15] ARBOGAST L.– *Mémoire sur de nouveaux principes de calcul différentiel et intégral.*– (1798) Manuscrit.– Bibliothèque Laurentiana Florence Cod. Laur. Ashb. App. (1840).

[16] TANNERY P.– *Mémoires scientifiques* VI, Paris (1926).
[17] REUSS R.– *Notes sur l'instruction primaire en Alsace pendant la Révolution.*– Berger Levrault (1910).
[18] ARBOGAST L.– *Rapport et projet de décret "Sur la composition des livres élémentaires destinés à l'Instruction Publique"* présenté à la Convention au nom du Comité d'Instruction publique par LFA ARBOGAST député du Département du Bas-Rhin.
[19] BRAUDEL F.– *L'identité de la France.*– Tome I.– Arthaud Flammarion (1986).
[20] ARBOGAST L. *Sur l'uniformité et le système général des Poids et Mesures, Rapport et projet de décret... par le citoyen* ARBOGAST.

LES ESPACES ETHYLIQUES
(suite et fin)

Nous avons reçu de Monsieur J.-P. BOURGUIGNON *les précisions suivantes :*

L'histoire en ce qui concerne le séminaire sur les espaces éthyliques est la suivante : il a été écrit par un groupe d'élèves (dont j'étais) de la promotion 1966 de l'Ecole Polytechnique dans le cadre de la campagne de Kes (campagne électorale pour la désignation des délégués des élèves) et est paru dans un numéro pirate du journal "*Le Monde*" publié à cet occasion.

Cette promotion était la première a avoir Gustave CHOQUET comme professeur de mathématiques (d'où le nom du séminaire), et un nombre important d'élèves (une cinquantaine) fréquentait assidument son séminaire. Le choix d'une présentation axiomatique ne menant nulle part (la face cachée du canular, qui a échappé semble-t-il à O. GEBUHRER) a été l'objet d'un débat animé parmi les rédacteurs, comme il se doit dans ce genre de circonstances, il s'agit d'"*un défi à BOURBAKI*" soi-même ni plus ni moins.
Honte à moi, je n'ai pu empêcher le crime de lèse-majesté!

A VOS STYLOS

PROBLÈME 5

Énoncé

Vrai ou faux?

> "Si F est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et si $E_1, \ldots E_n$ sont des sous-espaces vectoriels de F tels que $E_1 \cup \ldots \cup E_n = F$, alors l'un au moins des E_i est égal à F."

Solution (Edmond SPACK - LETI Haguenau)

Nous allons démontrer un énoncé plus général :

> Si F est un espace vectoriel sur un corps commutatif **infini** K; si $E_1, \ldots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de F tels que $E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_p = F$, alors l'un au moins des E_i est égal à F.

La propriété encadrée est équivalente à chacune des propriétés suivantes :
• Toute réunion finie de sous-espaces vectoriels propres de F n'est pas égale à F.
• Toute réunion finie d'hyperplans de F n'est pas égale à F (tout sous-espace vectoriel propre de E étant inclus dans un hyperplan d'après le lemme de ZORN).
• $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall f_1 \ldots f_p \in F^* - \{0\}, \exists x \in F, \forall i \in \{1, \ldots, p\}, f_i(x) \neq 0$

où F^* est le dual de F;
$F^* - \{0\}$ est F^* privé de la forme linéaire nulle.

Il nous reste à démontrer cette dernière propriété. Nous allons le faire par récurrence sur p.
• La propriété est vraie pour $p = 1$.
• Soit $p \geq 1$ et soient $f_1, \ldots f_p, f_{p+1}$ dans $F^* - \{0\}$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\exists x \in F, \forall i \in \{1, \ldots, p\}, f_i(x) \neq 0.$$

Si $f_{p+1}(x) \neq 0$ c'est terminé.
Sinon, soit (e_j) pour $j \in I$ une base de F (d'après le lemme de ZORN, tout espace vectoriel admet une base. Nous l'avons indexé ici au moyen de l'ensemble I).
Comme f_{p+1} n'est pas la forme linéaire nulle

$$\exists j_1 \in I,\ f_{p+1}(e_{j1}) \neq 0.$$

Décomposons x sur la base (e_j) pour $j \in I$

$$x = x_{j1}.e_{j1} + \cdots + x_{jn}.e_{jn}.$$

Soit
$$\begin{aligned}\sigma_i : K &\longrightarrow K\\ \alpha &\longmapsto f_i(\alpha.e_{j1} + x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn})\\ &\quad = \alpha f_i(e_{j1}) + f_i(x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn}).\end{aligned}$$

σ_{p+1} est bijective puisque application de K dans K de la forme $\alpha \longmapsto \alpha.a + b$ avec $a \neq 0$.

Considérons l'ensemble $J = \{i \in \{1, \ldots, p\} / f_i(e_j) \neq 0\}$. De la même façon, chaque σ_i pour i dans J est bijective donc :

$$\forall i \in J, \quad \exists! \alpha_i \in K \quad \sigma_i(\alpha_i) = 0.$$

Posons : $L = K - (\{\alpha_i / i \in J\} \cup \{x_{j1}\})$. L est infini puisque différence ensembliste d'un ensemble infini et d'un ensemble fini. Soit alors $\alpha \in L$ et posons :

$$y = \alpha.e_{j1} + x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn}.$$

On a (en raison de l'injectivité de σ_{p+1} et de σ_i pour i dans J) :
• $f_{p+1}(y) = \sigma_{p+1}(\alpha) \neq \sigma_{p+1}(x_{j1}) = f_{p+1}(x) = 0$ donc $f_{p+1}(y) \neq 0$.
• $\forall i \in J$, $f_i(y) = \sigma_i(\alpha) \neq \quad \sigma_i(\alpha_i) = 0$ donc $\forall i \in J$, $f_i(y) \neq 0$.
Enfin, comme $f_i(e_{j1}) = 0$ pour i extérieur à J :

$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, \ldots, p\} - J, f_i(y) &= \alpha f_i(e_{j1}) + f_i(x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn})\\ &= x_{j1} f_i(e_{j1}) + f_i(x_{j2}.e_{j2} + \cdots + x_{jn}.e_{jn})\\ &= f_i(x) \neq O.\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons construit un y tel que $f_i(y) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq p+1$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES

1) L'hypothèse K corps commutatif **infini** est essentielle car l'énoncé devient faux lorsque K est fini, aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie.

2) On montre aussi que si E est un espace vectoriel de dimension **finie** sur un corps **infini non-dénombrable**, alors toute réunion finie ou dénombrable d'hyperplans de E n'est pas E. (L'énoncé devient faux si la dimension de E est infinie.)

3) Enfin, on montre que si E est un espace vectoriel sur un corps commutatif K, alors toute réunion de deux hyperplans de E, n'est jamais égale à E. Mais il peut arriver que la réunion de trois hyperplans de E soit égale à E, aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie. Par exemple $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ peut s'écrire comme la réunion de trois hyperplans, de même que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

PROBLÈME 6

Enoncé

Pour $\varepsilon > 0$, soit $\mathcal{M}^\varepsilon$ l'ensemble des matrices 3×3, à coefficients positifs ou nuls, telles que la somme de chaque colonne soit 1 et que l'une au moins des lignes ait tous ses coefficients plus grands que ε. Montrer que si $(M_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans $\mathcal{M}^\varepsilon$, le produit infini

$$M_1 \times M_2 \times \ldots M_n \times \ldots$$

converge. La limite est-elle toujours de la forme

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix} ?$$

Indication

Coordonnées barycentriques.

PROBLÈME 7

Enoncé

Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$ telle que, pour tout $x, P_x(y) = f(x, y)$ est un polynôme en y et, pour tout y, $Q_y(x) = f(x, y)$ est un polynôme en x. Est-ce que f est un polynôme à deux variables ?

POÈMES A METAMORPHOSES POUR RUBAN DE MŒBIUS

(...) On prend une bande de papier très **allongée.**
Sur l'une de ses faces, on écrit la première moitié du poème.
On retourne la bande **autour de son plus grand côté**, et sur la deuxième face on écrit la deuxième moitié du poème.
Après avoir opéré une torsion d'un demi-tour, on colle l'une sur l'autre les deux extrémités de la bande.
On obtient ainsi un ruban de Mœbius qu'on lit d'un bout à l'autre sans avoir à le retourner puisqu'il n'a qu'une seule face. (...)

Exemple :
Soit la bande de départ suivante :

1ère face		*2ème face*	
	Trimer, trimer sans cesse, pour moi, c'est la sagesse je ne puis flemmarder car j'aime mon métier...		C'est vraiment éreintant de gaspiller son temps et grande est ma souffrance quand je suis en vacances.

Luc Etienne
in "*Oulipo*", chez Gallimard.

NOUVELLE PARUTION :
ACTES DU COLLOQUE Inter – I.R.E.M.
"HISTOIRE ET ÉPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES : LES MATHÉ MATIQUES DANS LA CULTURE D'UNE ÉPOQUE"
(Strasbourg (22-23 mai 1987)

Prix : 80 F (100 F si envoi postal) Chèque à l'ordre de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

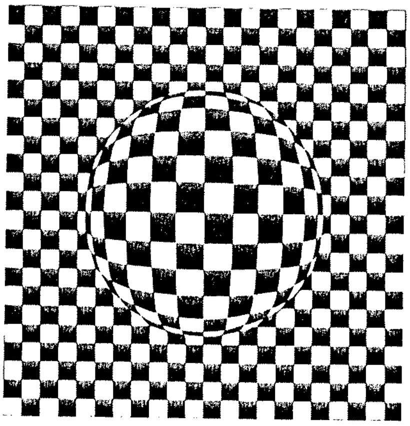
CONTRIBUTIONS A L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE CONTEMPORAIN :

Analyse des contenus, méthodes, progressions relatifs aux principaux thèmes des programmes.

La Proportionnalité

Le Calcul Numérique



... L'un des points les plus délicats du métier de professeur est, pour chaque concept fondamental, de bien situer le travail d'une classe dans la continuité d'un apprentissage et d'une progression s'étalant sur plusieurs années et parfois sur plusieurs cycles. Cela exige une vue d'ensemble des contenus et des finalités des programmes, ainsi qu'une analyse approfondie des difficultés auxquelles se heurtent la majorité des élèves.

C'est pourquoi on ne saurait être trop reconnaissant à la COPREM, dont on sait le rôle essentiel qu'elle a joué dans l'élaboration des nouveaux programmes de mathématiques, d'avoir aussi entrepris une étude "longitudinale" de deux thèmes majeurs, la proportionnalité et le calcul numérique.

(extrait de la préface de M. Pierre LEGRAND)

BON DE COMMANDE

(à détacher et à retourner au C.R.D.P. — B.P. 279/R7 67007 STRASBOURG CEDEX)

Je soussigné(e), NOM .... Prénom ....

ÉTABLISSEMENT ....

prie le C.R.D.P. de faire parvenir la commande ci-dessous à l'adresse suivante :

NOM .... Prénom ....

RUE .... N° ....

VILLE .... Code Postal ....

B 3070 [ ] exemplaire(s) de : **Contributions à l'enseignement mathématique contemporain : La Proportionnalité — Le Calcul Numérique**

46.-F l'unité franco

Ci-joint le règlement de .... F sous forme de

☐ chèque bancaire barré

☐ chèque postal (3 volets)

☐ mandat-lettre

(à l'ordre de M. l'Agent Comptable du C.R.D.P. de Strasbourg - C.C.P. STRASBOURG 5506.89 K)

Date .... Signature et Cachet :

N.B. Les commandes qui ne seront pas accompagnées de leur montant ne pourront être honorées. Pour les établissements publics, un bon de commande administratif signé de l'ordonnateur sera exigé pour les commandes supérieures à 500,00 F. (Les commandes inférieures à 500,00 F feront l'objet d'un règlement préalable).

TABLE DES MATIÈRES