L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

n° 55 – JUIN 1989 I.S.S.N. 0290 - 0068

NOTRE COUVERTURE :

Pour harmoniser la durée du mois lunaire avec celle de l'année scolaire, une seule solution : une *rencontre entre la Lune et le Soleil*, rencontre présidée par l'humanité qui sert et d'interprète et de conciliateur.

Les résumés des débats se trouvent dans nos articles sur la "*Grande saga des calendriers*".

L'illustration est due à Francine LEFORT.

VOITURE PERSONNELLE AUTORISEE

(remboursement limité au tarif SNCF) (*)

Il y a quelques années, les dépenses de chauffage des établissements scolaires avaient la priorité sur celles d'enseignement ce qui faisait dire aux mauvais esprits que l'Education Nationale avait plus à charge de garder les élèves au chaud que d'assurer leur éducation. (Les esprits chagrins diront que ça n'a pas changé!)

Aujourd'hui, que n'entendons-nous pas de nos responsables, Ministre(s), Recteurs, ... sur la nécessaire modernisation de notre système éducatif, nécessaire pour l'avenir de la nation, pour les 76,...% de bacheliers,...Et de mettre en avant les MAFPEN, les stages du PAF. Il est alors curieux d'apprendre de la bouche même des responsables de la formation académique à Strasbourg que la dite formation n'est pas une priorité et que la loi de 1971 ne s'applique toujours pas à notre ministère de tutelle.

S'étonnera-t-on alors de voir les rares collègues qui malgré les difficultés avec leur chef d'établissement acceptent de prendre sur leur temps et sur leur argent pour recevoir une formation qui n'est ni reconnue, ni valorisée, voir donc ces collègues se comporter en consommateur?

Un certain nombre d'institutions (ministères et syndicats essentiellement) se sont charitablement occupé de nous ces temps-ci. Une nécessaire revalorisation financière a eu lieu. Mais a-t-on réellement valorisé notre fonction d'enseignant et d'éducateur? A-t-on valorisé le travail de tous ceux et celles qui s'investissent dans leur métier? J'en doute! Ne nous étonnons donc pas si de moins en moins de personnes s'intéressent à une carrière dans l'Education Nationale et si d'autres démissionnent.

J. LEFORT.

(*) Ce qui veut dire que l'autobus nécessaire pour se rendre de la gare au lieu de convocation est à votre charge.

SOMMAIRE

N° 55 – 1989

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT

◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.

◇ Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent Comptable de l'U.L.P. (IREM)

◇ *Prix du numéro* : 25.– F

UNE SEMAINE, UNE CLASSE, UN PROBLÈME

Francis JAMM

Ouf! La neige est enfin arrivée; et je me retrouve encadrant une classe de neige, avec 35 élèves de seconde du LEGT Jean Mermoz de Saint-Louis. Je vais profiter de leur isolement pour leur proposer de vivre, en miniature, une aventure de recherche scientifique. Le problème soumis à leur sagacité est : l'ensemble des nombres premiers est-il infini?

C'est un vrai problème. On ne sait pas laquelle des deux propositions il faut chercher à montrer. De plus, c'est un résultat important et sa démonstration est non triviale à trouver.

Avant le départ les élèves savaient qu'une activité de recherche était prévue; mais sans plus. Ce n'est qu'une fois sur place qu'ils ont découvert sa nature ainsi que la question posée.

C'est la narration de ce qu'ont vécu ces élèves que je vous propose de lire.

LUNDI MATIN 2, 3 et 5...sont venus nous serrer la pince.

Préliminaires : J'explique qu'une telle activité tient de l'auberge espagnole. Chaque élève en retirera une satisfaction proportionnelle à son investissement personnel. J'indique que je sais cette activité réalisable (cf. plus loin le texte de WAGENSCHEIN), mais qu'il est également possible d'aboutir à un échec. Soit par manque de motivation, soit parce qu'ils ne trouveront pas. Dans ce dernier cas l'échec ne serait que partiel (à mes yeux!). D'autre part je précise, que s'ils ne trouvent pas, je ne donnerai ni la démonstration ni la réponse, une fois de retour à Saint-Louis. Dans la recherche scientifique, il n'y a pas de *deus ex machina* qui vient à la rescousse des chercheurs.

Je distribue alors aux élèves la liste des nombres premiers jusqu'à 10 000, ainsi que leur densité sur certains intervalles (voir annexe page 10). Cela évite de perdre du temps à produire des nombres premiers et permet de saisir de suite le problème de leur raréfaction.

Puis les élèves se répartissent en quatre groupes, les Kangourous, les Dahus, les Quatterback (c'est le nom de lanceur en football américain) et les génies.

Je leur suggère le mode de fonctionnement suivant : une demi-heure de réflexion en groupe, puis un quart d'heure de *séminaire* afin de communiquer leurs résultats, confronter leurs idées et définir l'orientation à donner à leurs recherches. Chaque groupe comporte un rapporteur de séance. Mon rôle doit se borner à les observer et à leur faire prendre conscience des *stratégies de recherche* qu'ils développent.

Je vais essayer de m'interdire d'indiquer si un raisonnement est juste ou faux, si une idée est fructueuse ou pas. Le professeur de mathématiques est aux abonnés absents. Un raisonnement est juste, une idée est intéressante si la communauté scientifique, c'est-à-dire les élèves en juge ainsi.

Bon enthousiasme. Les élèves sont surpris de l'extrême irrégularité de la répartition des nombres premiers. A la fin de la première séance, et bien qu'ils aient constaté cette irrégularité, ils essaient tous, en observant les nombres premiers inférieurs à 10 000, de deviner une règle de construction des nombres premiers. Il suffirait alors d'étendre cette règle jusqu'à l'infini pour pouvoir conclure. En fin de séance la situation est la suivante :

Kangourous : la baisse des nombres premiers est irrégulière, non périodique, et localement on peut même observer une augmentation de la densité des nombres premiers. Néanmoins ils cherchent à tracer la représentation d'une fonction de répartition des nombres premiers.
Ils pensent que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Dahus : pour savoir si un nombre est premier il faut le traiter en entier, la seule observation de ses derniers chiffres ou d'une combinaison de ses chiffres est insuffisante. Alexandre croit avoir lu dans une encyclopédie la valeur du plus grand nombre premier, mais il ne s'en souvient plus.
Ils pensent que l'ensemble des nombres premiers est fini.

Quatterback : ils cherchent à trouver une formule du type $2x+1$ qui permettrait d'écrire tous les nombres premiers sous cette forme. Ils cherchent également à définir la densité des nombres premiers sur des intervalles d'amplitude 100.
Ils pensent que l'ensemble des nombres premiers est fini.

Génies : on part de $\mathbb{N}$.
Les nombres pairs éliminent 50 % des entiers.
Les multiples de 3 en éliminent encore 15 %.
Les multiples de 5 en éliminent encore 6,3 %, etc...
Il s'agit de savoir si l'on arrivera ainsi, à partir d'un certain rang, à éliminer tous les nombres. Donc, à voir si le nombre d'entiers non éliminés tend vers 0, soit en atteignant 0 après un nombre fini d'étapes soit sans jamais l'atteindre.
Ils pensent que l'ensemble des nombres premiers est infini.

LUNDI SOIR : normalement, après le ski, est prévue une heure à une heure et demie de travail scolaire (français, IES). Un élève ayant dû être hospitalisé à la suite d'une fracture, le programme est perturbé et le français est remplacé par une nouvelle séance de mathématiques. Chaque groupe poursuit dans sa voie sans que rien de neuf n'émerge. Sauf les Quatterback qui tentent le raisonnement suivant : si l'infini est divisible par deux, ou par un autre nombre, alors cela signifie qu'il n'est pas premier, et par conséquent l'ensemble des nombres premiers sera fini. Ils essaient donc des opérations sur l'infini afin d'obtenir le plus grand nombre premier. "$\infty/2$ *ça fait combien ?*". Je suis obligé de préciser le statut du symbole ∞ et de faire un peu d'arithmétique de l'infini. A la fin de la séance j'explique qu'ils se heurtent tous au même obstacle. Trouver une règle permettant de savoir ce qui se passe pour les nombres premiers supérieurs à 10 000 alors qu'ils constatent tous une grande irrégularité dans leur répartition.

Puisque c'est comme ça nous reviendrons demain!

MARDI MATIN 2, 3 et 5... sont venus nous serrer la pince

Les Quatterback s'intéressent à la répartition des couples de nombres premiers jumeaux (i.e. séparés seulement par un nombre pair). Ils constatent aussi leur extrême irrégularité. Il semble admis par tous que l'on peut trouver un intervalle d'un million sans rencontrer un nombre premier puis en rencontrer à nouveau.

Isabelle commence une phrase par "*Si l'ensemble des nombres premiers est fini...*". Alexandre parle de raisonnement par l'absurde. Mais ni l'un ni l'autre, ni leurs camarades ne réalisent que cela ouvre une nouvelle voie. Les génies tentent un raisonnement par l'absurde, mais sans résultat et sans communiquer leur tentative aux autres.

Catherine constate qu'en prenant un nombre premier n, $n-1$, peut se décomposer en produits de facteurs premiers, puisque l'on obtient de nouveau le nombre premier en ajoutant 1.

A la fin de la séance je fais constater que toutes les tentatives vont dans le même sens, et ne semblent guère avancer. Je pose la question : "*Ne faudrait-il pas que certains reprennent le problème à zéro en essayant de trouver une nouvelle voie de recherche ?*". Pas de réaction.

Puisque c'est comme ça nous reviendrons demain!

MERCREDI MATIN 2, 3 et 5... sont venus nous serrer la pince

Je donne à chaque groupe un quart d'heure pour arriver à trouver quelque chose de régulier dans les nombres premiers. Que ce soit une fonction de répartition, une fonction de densité par tranches de 100, les couples de nombres premiers jumeaux ou une formule permettant d'écrire tous les nombres premiers. Après un quart d'heure chacun constate son échec. Je pose à chaque groupe la question : "*Pensez-vous pouvoir aboutir ? Voulez-vous poursuivre dans cette voie ?*". Ils n'y croient plus guère et tout le monde est prêt à essayer autre chose. Mais quoi ?

Je fais remarquer que "*c'est un problème pour lequel on dispose de peu d'éléments au départ. Et que d'autre part on n'a rien de vraiment manipulable. Que pourrait-on faire pour s'étoffer ?*".

Pascal (du groupe des génies) suggère un raisonnement par l'absurde qui nous dotterait d'une hypothèse supplémentaire.

Les élèves étant peu familiarisés avec le raisonnement par l'absurde, j'interviens : "*Oui, mais alors il faut faire un pari. Si l'on pense que l'ensemble des nombres premiers est fini, alors il faudra le supposer...*" chœur des élèves : "*infini !*". "*Si au contraire on pense qu'il est infini alors il faudra le supposer...*" chœur des élèves :

"*fini*" "*Que faire ?*".

Depuis deux jours le nombre de partisans d'un ensemble infini augmente. De plus, Pascal dit que l'hypothèse d'un ensemble fini est quelque chose de plus facile à exploiter que celle d'un ensemble infini.

Je précise quelle devra être alors la suite de leur démarche : "*Il faut, en exploitant cette hypothèse, arriver à un résultat contradictoire. Par exemple trouver un nombre qui serait à la fois pair et impair, ou un nombre premier qui serait divisible par un autre nombre. Mais d'abord, si l'on suppose l'ensemble des nombres premiers fini quelles conséquences peut-on en tirer ?*". On me répond : "*Il existe un plus grand nombre premier*". On le désigne par N.

Spontanément, trois groupes vont essayer de fabriquer un nombre premier plus grand que N. Certains essayent de le faire à partir d'additions. Le groupe des Dahus, entraîné par Alexandre, recherche un nombre de la forme $6n \pm 1$. En cours d'informatique il avait essayé de réaliser un programme fournissant tous les nombres premiers inférieurs à 10 000. Je lui avais expliqué, pour optimiser sa recherche, que les nombres premiers étaient de la forme $6n \pm 1$. Les Quatterback essayent de trouver un diviseur de N.

On me demande : "*Mais si N est le plus grand nombre premier, on ne peut donc pas en trouver un qui soit plus grand*" ce qui nécessite quelques explications individuelles supplémentaires sur le raisonnement par l'absurde.

Mercredi midi : Alexandre a téléphoné à son père pour lui demander de chercher dans son encyclopédie quel est le plus grand nombre premier. Son père lui répond : "*C'est un nombre de 687 chiffres*". Du coup, Alexandre pense que l'ensemble des nombres premiers est fini. Fort heureusement son information est peu écoutée; mais avec son entorse à la déontologie de la recherche il aurait pu faire capoter l'activité, que le renseignement fourni fût exact ou non. Cet épisode montre l'utilité de l'isolement des élèves.

Puisque c'est comme ça nous reviendrons demain!

JEUDI MATIN   2, 3 et 5... sont venus nous serrer la pince

La nuit semble avoir été agitée. Les regards sont ternes et tout à l'heure sur les pistes les jambes seront molles. Avant de débuter, Cédric, qui n'aime guère l'incertitude, me demande : "*Pensez-vous que nous trouverons ?*". Je lui réponds que je n'en sais rien.

Je précise qu'il s'agit de trouver un nombre premier supérieur à N, ou bien un diviseur de N. Maintenant que l'ensemble des nombres premiers est supposé fini il faut arriver à le manipuler comme quelque chose de concret. Ecrire $2\ 3\ 5 \dots N$ semble peu opératoire. Je leur dis : "*Vous n'utilisez pas totalement l'hypothèse : l'ensemble des nombres premiers est fini. Que peut-on encore dire ?*". La réponse vient : "*Qu'il y a par exemple p nombres premiers*". Voyant qu'ils n'arrivent pas à manipuler ces nombres premiers je leur indique, croyant les aider, qu'on peut les représenter par $x_1, \ldots x_p$. En fait cela n'aidera guère les élèves à manipuler les nombres premiers.

C'est alors que se produit l'évènement qui va passer inaperçu :

Stéphanie : "*Il faut faire des multiplications*".
Isabelle : "*On n'aura pas un nombre premier*".
Catherine : "*Il suffit de faire + 1*".

Personne ne se rend compte que l'on tient la solution. Mais je peux maintenant répondre "*oui*" à la question de Cédric.

Les Dahus continuent à chercher des nombres de la forme $6n \pm 1$. D'autres regardent si $2N + 1$ ne serait pas premier. Pour cela ils essaient de voir si X premier implique $2X + 1$ premier. D'autres encore cherchent le nombre premier suivant N. Les Quatterback se demandent si $N + 2$ est premier, ce qui relance la recherche sur les couples de nombres premiers jumeaux. Tous procèdent par observation des nombres premiers inférieurs à 10 000. Je fais remarquer que l'on retombe dans une méthode semblable à celle utilisée au début de la semaine.

Gaël pense que $N + 1$ est premier. L'objection sera longue à lever par la *communauté scientifique*! Plusieurs élèves font l'hypothèse supplémentaire : soit N' un nombre premier plus grand que N. Il me faut réexpliquer ce qui me semblait acquis hier, à savoir le principe du raisonnement par l'absurde. Voyant la lassitude gagner je les informe que tous les éléments permettant d'arriver à la solution ont été trouvés, mais que la *sauce n'a pas encore pris*. Je résume au tableau ce qui s'est dit :

$6n \pm 1$,
multiplications,
ce n'est pas premier,
faire + 1,
$2N + 1$.

Certains élèves décrochent et jouent au Yam ou rédigent leurs cartes postales. Ayant décidé pour cette activité, de m'en tenir au principe que la science se propose mais ne s'impose pas, je n'interviens pas.

Puisque c'est comme ça nous reviendrons demain!

VENDREDI MATIN 2, 3 et 5... sont venus nous serrer la pince

Le problème semblant trop difficile à résoudre avec N, plus grand nombre premier, je suggère de se placer dans un cas plus simple, en supposant par exemple que le plus grand nombre premier est 11, et en essayant d'en fabriquer un qui soit plus grand. Certains me répondent : "*Ben c'est 13 !*". Comme cela semble encore trop compliqué, je propose de prendre 5 comme plus grand nombre premier. Puis, en cinq minutes tout est fini. Stéphanie reprend avec Virginie son idée de la veille, et fabrique $2 \star 3 \star 5 + 1$. Elles soumettent le résultat à Isabelle J. et Catherine, puis à l'ensemble de la classe qui arrive à l'étendre à N.

Etonnement d'avoir trouvé. Leur joie éclate. Applaudissements. Rideau.

Il ne reste plus qu'à aller skier.

Bilan

Etant juge et partie il m'est assez difficile d'établir un bilan.

Le premier bilan est constitué par ce que chaque élève a vécu, et par le souvenir qu'il en gardera. Pour certains élèves l'expérience a été positive, ils nous l'ont dit, pour d'autres elle ne laissera pas de trace. Il y a également, mais c'est assez impalpable, la découverte du fait, que trouver cela peut prendre du temps et aussi qu'au cours d'une recherche il faut à certains moments prendre du recul et analyser sa stratégie.

Sur le plan mathématique plusieurs notions ont été abordées :
⋆ raisonnement par l'absurde bien sûr;
⋆ distinction entre raisonnement inductif et raisonnement déductif. Les élèves ont bien compris que l'observation des nombres premiers inférieurs à 10 000 ne permettait pas d'extrapoler. Il fallait un raisonnement général;
⋆ pour certains le statut du symbole ∞ a été précisé;
⋆ la notion de limite : la valeur est-elle atteinte après un nombre fini ou infini d'étapes?

Y a-t-il eu un travail constructif de fait, ou bien me suis-je contenté de faire *mariner* les élèves en leur fournissant la solution au compte gouttes? La règle que je m'étais fixée pour mes interventions était qu'elles ne devaient pas se substituer à l'imagination des élèves pour leur donner les clefs du raisonnement. Ai-je respecté l'esprit de cette règle ou me suis-je livré à une séance de maïeutique (cf. Le Ménon de PLATON)? Au lecteur de se faire une opinion à travers le récit.

Signalons enfin que les élèves qui ont trouvé ne sont pas les *grosses têtes* de la classe.

VARIATIONS SUR UN MÊME THÈME

Martin WAGENSCHEIN (1896-1988), pédagogue et professeur de mathématiques et de physique, enseignait à l'Ecole d'Humanité, un internat fondé par Paul GEHEEB en Suisse. "Une école qui laisse des *loisirs*, et où l'autoformation est possible" écrit-il. Il y pratiquait un enseignement par thèmes. Il proposa à treize élèves de 14-17 ans, et de nationalité différente, de démontrer la proposition d'EUCLIDE : l'ensemble des nombres premiers est illimité. Cela se déroulait vers 1930. Pour la petite histoire signalons que, plus tard, Daniel Cohn Bendit fut élève de cette école.

Depuis plusieurs années je connaissais cette expérience, mais je m'étais refusé, avant de la réaliser moi-même, à en lire le récit pour ne pas être influencé et chercher inconsciemment à reproduire ce qu'il avait vécu.

Voici un résumé de son récit (Martin WAGENSCHEIN : "*Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken*" Tome 1, éd. Klett, 1965).

1ère heure : elle fut consacrée à bien comprendre le problème.

2ème heure : avant la deuxième heure, Gabi (16 ans, anglo-allemande) pensait que tous les nombres premiers (sauf 2) s'écrivaient $2n \pm 1$. Mais elle a vite compris qu'il s'agissait d'une évidence. Durant cette deuxième heure, en conversant avec Gabi, Peter (14 ans, allemand) trouve que tous les nombres premiers (sauf 2 et 3) sont de la forme $6n \pm 1$ **(1)**. Il ne peut pas encore le prouver mais il en est persuadé car tous ses essais concordent (23 37 41 43). Il ne peut clairement expliquer comment il a trouvé, mais il voulait "*tenir compte du 3*". Les élèves se répartissent une table des nombres premiers jusqu'à 10 000, trouvée dans un livre, et vérifient que la formule est valide (M. WAGENSCHEIN aurait préféré que les élèves établissent eux-mêmes cette table). Mais tous sont conscients que rien n'est joué, qu'un contre-exemple peut tout faire capoter et que la proposition **(1)** reste à prouver. Ils se lancent dans une recherche désordonnée. Je dois maîtriser cette compétition aveugle, en rappelant ce que nous cherchons. La phrase **(1)**, si elle était vraie, nous aiderait-elle dans notre recherche? Oui, car $6n \pm 1$ peut devenir aussi grand que l'on veut. Un seul voit que cette proposition ne sert à rien, mais que c'est sa réciproque qu'il nous faudrait. Il faut une longue conversation pour convaincre tout le monde de la différence entre proposition et proposition réciproque. Elnis (16 ans, israélien) précise les choses :

"*Tous les nombres premiers sont de la forme $6n \pm 1$, ne nous sert à rien*
Tous les nombres de la forme $6n \pm 1$ sont premiers, peut nous aider."

Mais elle est fausse, et on collectionne vite les contre-exemples (25 121 119 65).

3ème heure : La différence entre une proposition et sa réciproque s'éclaire seulement à travers l'exemple suivant :

Tous les Bernois sont Suisses (juste).
Tous les Suisses sont Bernois (faux).

Elnis croit que $6p \pm 1$ avec p nombre premier permet toujours de construire un nombre premier supérieur à p **(2)**. Les élèves constatent que la proposition est fausse. Le contre exemple $6 \star 29 + 1 = 175$ suffit. 175 n'est divisible ni par 2, ni par 3 ni par 29, mais rien ne l'empêche d'être divisible par 5. Après le cours, Elnis se tient devant le tableau "$42 = 2 \star 3 \star 7$. *Dedans il y a 2, 3, 7 et ils ne sont pas dans 43. On a juste besoin de regarder si 5 n'est pas dedans. Il suffit d'appliquer les critères de divisibilité*". Je lui dis que c'est le bon chemin mais qu'il n'y a pas besoin des critères de divisibilité. Le lendemain il arrive rayonnant au petit déjeuner : "*J'ai la solution*". Il la donne en cours : "*Si P est le plus grand nombre premier que je connaisse, alors $N = 2 \star 3 \star 5 \ldots \star P + 1$ est certainement un nombre premier plus grand que P. Ce nombre n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par P, donc par aucun nombre*". Tous sont d'accord. Les essais concordent : $2 + 1 = 3$; $2 \star 3 + 1 = 7$ jusqu'à $2 \star 3 \star 5 \star 7 \star 11 \star 13 + 1 = 30\ 031$ qui devrait aussi être premier. Je reste hésitant et leur demande un peu plus d'esprit critique et de fournir une preuve. Curieusement, la solution ne vient pas par le biais de l'expérience en démasquant 30 031 comme je l'avais pensé.

Le soir, Marianne (15 ans, Balte) timide et presque muette jusque là, me surprend en m'expliquant clairement l'erreur de la proposition d'Elnis. Le matin, cri de joie de Gabi, elle pouvait prouver qu'il n'existait pas de plus grand nombre premier.

4ème heure : Tout d'abord, il en reste un qui croit encore à la proposition d'Elnis; son auteur lui-même est hésitant. Alors je laisse Marianne donner son contre-exemple. "*La supposition d'Elnis n'est pas correcte car il existe entre P et N encore d'autres nombres premiers. N peut être premier, mais il peut aussi ne pas l'être. Alors il existe encore un nombre premier, entre P et N, qui divise N*". Tous le comprennent bientôt. Surtout lorsque je laisse voir et montrer que $30\ 031 = 59 \star 509$ et que 59 et 509 sont des nombres premiers compris entre P et N. Alors la proposition d'Elnis est liquidée. Gabi résume avec une grande clarté le raisonnement qui est ensuite repris en français et en anglais.

5ème heure : Elle est consacrée à la rédaction complète qui est ensuite comparée au texte d'EUCLIDE. "*Notre texte est plus simple que celui d'EUCLIDE, le sien par contre (étant donné qu'il n'a pas écrit pour des enfants) est non seulement plus précis et plus complet, mais aussi plus* **racé**.

Ne semblera-t-il pas prétentieux, d'avoir consacré à une phrase qui peut être comprise en 5 minutes, tout un cours et d'y avoir travaillé durant 5 heures ? Il me semble que c'est seulement un tel exemple qui peut répondre à des questions comme : "*Pourquoi les mathématiques à l'école ? Quel est notre but ? Où est l'essentiel ? Nos chapitres que nous parcourons rapidement, sont-ils vraiment tous indispensables ?*" Ecoutons la petite Gabi : "*C'était merveilleux, mais les mathématiques sont horribles*". Un mois plus tard elle écrivait : "*Vous n'imaginez pas combien c'était crispant. On ne pensait à plus rien d'autre... Les mathématiques m'avaient toujours semblées ennuyeuses et je ne pouvais presque pas comprendre comment cette magnifique aventure était aussi des mathématiques... C'est comme si une nouvelle partie de notre cerveau s'était mise en branle... Lorsqu'après plusieurs jours nous avons trouvé, nous étions fiers, comme si le problème des nombres premiers nous avait tracassés toute notre vie et que nous étions les premiers hommes à trouver sa solution*".

Commentaires

35 élèves contre 13; passons...

M. WAGENSCHEIN avait directement demandé de montrer que l'ensemble est infini. Il voulait que les élèves cherchent une démonstration alors que j'ai posé une question ouverte.

Il évite le raisonnement par l'absurde, ce que j'aurais également préféré d'un point de vue esthétique.

Son expérience se déroule dans le cadre normal de l'enseignement de cette école et non pas comme une activité extraordinaire lors d'une classe transplantée.

Mais, au-delà de ces différences de forme c'est bien la même aventure qu'ont vécue les élèves. Ils ont buté sur les mêmes obstables. Obstacle de logique (proposition réciproque, raisonnement par l'absurde) et aussi difficulté à passer correctement des cas particuliers au cas général, surtout quand les cas particuliers mènent à une compréhension partielle du phénomène (tous jugent inutile de vérifier si 30 031 est premier). Dans les deux cas l'important n'est pas la découverte, par tâtonnements, du nombre miracle $2 \star 3 \star \ldots \star p + 1$.

J'ai été frappé par le contraste entre le foisonnement d'idées des élèves (M. WAGENSCHEIN parle de recherche désordonnée :*wildes Suchen*) et leur indigence à mettre en œvre une stratégie de recherche, à prendre de la hauteur par rapport au problème.

Je ne partage pas l'opinion de M. WAGENSCHEIN, que seule une telle activité justifie l'enseignement des mathématiques à l'école, néanmoins cette expérience me suggère deux réflexions.

L'enseignement de la logique (logique des propositions, théorie des ensembles) mériterait d'être renforcé et de ne pas se perdre dans la vague des *mathématiques concrètes*. Bien entendu les mathématiques n'ont pas le monopole de l'apprentissage de la logique.

Faisons confiance aux élèves, et osons les lancer dans des activités de longue haleine où ils seront leur propre maître d'œuvre. En option informatique, ils réalisent durant près de deux mois un projet. C'est une activité courante dans l'enseignement technique mais plus rare dans l'enseignement général. On est frappé par leur envie de **créer** quelque chose de valable et par leur difficulté à organiser leur travail. Il me semble que l'on passe à côté de quelque chose d'important pour leur formation, en présentant uniquement des mathématiques coupées en rondelles, à l'instar des sujets du baccalauréat.

ANNEXE

ENTRE 1 ET 100 IL Y A 25 NOMBRES PREMIERS SOIT 25 %

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

ENTRE 100 ET 200 IL Y A 21 NOMBRES PREMIERS SOIT 21 %

101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199

ENTRE 200 ET 500 IL Y A 49 NOMBRES PREMIERS SOIT 16.33 %

211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359
367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499

ENTRE 500 ET 1 000 IL Y A 73 NOMBRES PREMIERS SOIT 14.60 %

503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661
673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853
857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997

ENTRE 1 000 ET 2 000 IL Y A 135 NOMBRES PREMIERS SOIT 13.50 %

1009 1013 1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063 1069 1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151 1153 1163 1171 1181
1187 1193 1201 1213 1217 1223 1229 1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373
1381 1399 1409 1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451 1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531 1543 1549 1553 1559
1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657 1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709 1721 1723 1733 1741 1747
1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879 1889 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973
1979 1987 1993 1997 1999

ENTRE 2 000 ET 5 000 IL Y A 366 NOMBRES PREMIERS SOIT 12.20 %

2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053 2063 2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129 2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 2203 2207
2213 2221 2237 2239 2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287 2293 2297 2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351 2357 2371 2377 2381 2383 2389
2393 2399 2411 2417 2423 2437 2441 2447 2459 2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557 2579 2591 2593 2609 2617 2621
2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731 2741 2749 2753 2767 2777 2789 2791 2797
2801 2803 2819 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903 2909 2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971 2999 3001 3011 3019
3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079 3083 3089 3109 3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253
3257 3259 3271 3299 3301 3307 3313 3319 3323 3329 3331 3343 3347 3359 3361 3371 3373 3389 3391 3407 3413 3433 3449 3457 3461 3463
3467 3469 3491 3499 3511 3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547 3557 3559 3571 3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637 3643 3659
3671 3673 3677 3691 3697 3701 3709 3719 3727 3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823 3833 3847 3851 3853 3863 3877
3881 3889 3907 3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947 3967 3989 4001 4003 4007 4013 4019 4021 4027 4049 4051 4057 4073 4079 4091
4093 4099 4111 4127 4129 4133 4139 4153 4157 4159 4177 4201 4211 4217 4219 4229 4231 4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289
4297 4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373 4391 4397 4409 4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507 4513 4517 4519 4523
4547 4549 4561 4567 4583 4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657 4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4733 4751 4759
4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817 4831 4861 4871 4877 4889 4903 4909 4919 4931 4933 4937 4943 4951 4957 4967 4969 4973 4987
4993 4999

ENTRE 5 000 ET 10 000 IL Y A 560 NOMBRES PREMIERS SOIT 11.20 %

5003 5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087 5099 5101 5107 5113 5119 5147 5153 5167 5171 5179 5189 5197 5209 5227 5231
5233 5237 5261 5273 5279 5281 5297 5303 5309 5323 5333 5347 5351 5381 5387 5393 5399 5407 5413 5417 5419 5431 5437 5441 5443 5449
5471 5477 5479 5483 5501 5503 5507 5519 5521 5527 5531 5557 5563 5569 5573 5581 5591 5623 5639 5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669
5683 5689 5693 5701 5711 5717 5737 5741 5743 5749 5779 5783 5791 5801 5807 5813 5821 5827 5839 5843 5849 5851 5857 5861 5867 5869
5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939 5953 5981 5987 6007 6011 6029 6037 6043 6047 6053 6067 6073 6079 6089 6091 6101 6113 6121 6131
6133 6143 6151 6163 6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221 6229 6247 6257 6263 6269 6271 6277 6287 6299 6301 6311 6317 6323 6329 6337
6343 6353 6359 6361 6367 6373 6379 6389 6397 6421 6427 6449 6451 6469 6473 6481 6491 6521 6529 6547 6551 6553 6563 6569 6571 6577
6581 6599 6607 6619 6637 6653 6659 6661 6673 6679 6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761 6763 6779 6781 6791 6793 6803 6823
6827 6829 6833 6841 6857 6863 6869 6871 6883 6899 6907 6911 6917 6947 6949 6959 6961 6967 6971 6977 6983 6991 6997 7001 7013 7019
7027 7039 7043 7057 7069 7079 7103 7109 7121 7127 7129 7151 7159 7177 7187 7193 7207 7211 7213 7219 7229 7237 7243 7247 7253 7283
7297 7307 7309 7321 7331 7333 7349 7351 7369 7393 7411 7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487 7489 7499 7507 7517 7523 7529 7537
7541 7547 7549 7559 7561 7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643 7649 7669 7673 7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723 7727
7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829 7841 7853 7867 7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919 7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993
8009 8011 8017 8039 8053 8059 8069 8081 8087 8089 8093 8101 8111 8117 8123 8147 8161 8167 8171 8179 8191 8209 8219 8221 8231 8233
8237 8243 8263 8269 8273 8287 8291 8293 8297 8311 8317 8329 8353 8363 8369 8377 8387 8389 8419 8423 8429 8431 8443 8447 8461 8467
8501 8513 8521 8527 8537 8539 8543 8563 8573 8581 8597 8599 8609 8623 8627 8629 8641 8647 8663 8669 8677 8681 8689 8693 8699 8707
8713 8719 8731 8737 8741 8747 8753 8761 8779 8783 8803 8807 8819 8821 8831 8837 8839 8849 8861 8863 8867 8887 8893 8923 8929 8933
8941 8951 8963 8969 8971 8999 9001 9007 9011 9013 9029 9041 9043 9049 9059 9067 9091 9103 9109 9127 9133 9137 9151 9157 9161 9173
9181 9187 9199 9203 9209 9221 9227 9239 9241 9257 9277 9281 9283 9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377 9391 9397 9403
9413 9419 9421 9431 9433 9437 9439 9461 9463 9467 9473 9479 9491 9497 9511 9521 9533 9539 9547 9551 9587 9601 9613 9619 9623 9629
9631 9643 9649 9661 9677 9679 9689 9697 9719 9721 9733 9739 9743 9749 9767 9769 9781 9787 9791 9803 9811 9817 9829 9833 9839 9851
9857 9859 9871 9883 9887 9901 9907 9923 9929 9931 9941 9949 9967 9973

ENTRE 10 000 ET 30 000 IL Y A 2 016 NOMBRES PREMIERS SOIT 10.08 %
ENTRE 100 000 ET 101 000 IL Y A 81 NOMBRES PREMIERS SOIT 8.1 %
ENTRE 1 000 000 ET 1 001 000 IL Y A 75 NOMBRES PREMIERS SOIT 7.5 %
ENTRE 10 000 000 ET 10 001 000 IL Y A 61 NOMBRES PREMIERS SOIT 6.1 %
ENTRE 100 000 000 ET 1000 001 000 IL Y A 54 NOMBRES PREMIERS SOIT 5.4 %
ENTRE 1 000 000 000 ET 1 000 001 000 IL Y A 49 NOMBRES PREMIERS SOIT 4.9 %

TÉMOIGNAGE

Un professeur de Lycée Professionnel

Les maths (...) c'est un ensemble de recettes permettant d'obtenir le résultat de chaque problème. (...). L'inconvénient, c'est que ces recettes sont bien plus ressenties comme les Tables de la Loi que comme des astuces permettant d'aboutir plus vite et plus simplement au résultat. Ça donne des élèves qui regardent pensivement leur cahier, et parfois s'enhardissent à demander si on a **le droit** de faire ça. Je dois passer pour un farfelu quand je réponds que bien sûr qu'on a le droit, mais que ce serait faux. Pour eux, ces deux notions ne sont pas distinctes. Avec les 1ères années BEP, j'ai bien du mal à leur faire additionner des fractions. Parmi l'ensemble des recettes mathématiques, celles sur les fractions sont souvent mélangées de telle façon qu'il en résulte tout ce qu'on veut, sauf le bon résultat. Mais avec ces classes, on aborde le calcul d'erreur. Et quand on cherche l'erreur maximum sur un calcul réalisé à partir de mesures physiques, il n'est pas rare que l'on simplifie une écriture telle que celle-ci :

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0,001}{1,414} + \frac{0,001}{3,141}$$

en celle-ci :

$$\frac{\Delta x}{x} \simeq \frac{0,001}{1,500} + \frac{0,001}{3,000} = \frac{1}{1500} + \frac{1}{3000} = \frac{3}{3000} = \frac{1}{1000}.$$

parce qu'on cherche une erreur maximum et qu'on ne va pas s'embarasser de plusieurs chiffres significatifs. Alors on *arrondit.* Mais pour les élèves, ça ne passe pas : pour additionner deux fractions, il *faut* chercher le dénominateur commun, et additionner les deux fractions une fois qu'elles sont écrites avec le même dénominateur. Et voilà que je remplace 1,414 par 1,5! "*On n'a pas le droit de faire ça!*". Pensez donc : le Grand Prêtre lui-même qui transgresse les Tables de la Loi mathématique! A quels saints se vouer?

Encore une fois, il est évident que je ne pense pas un instant à me moquer de ces élèves; je veux uniquement critiquer la mentalité qu'on leur a inculquée. Eux, en fait, ils ont bien travaillé : ils ont intégré cette mentalité au point de ne plus comprendre quand on essaie de faire des calculs concrets.

ANALYSE NON STANDARD
ET CALCUL NUMÉRIQUE SUR ORDINATEUR

Emile URLACHER

0.— Introduction

Un ordinateur ne sait traiter que des nombres entiers. Cette réalité est parfois reconnue (voir pour les coordonnées des pixels d'un écran bit-map), d'autres fois elle est cachée. Ainsi les réels de l'ordinateur ne sont en fait que des entiers les représentant. Les deux représentations usuelles sont connues sous les dénominations suivantes :

— la virgule fixe,
— la virgule flottante.

Chacune d'elles a pour objectif d'éviter les inconvénients de l'autre. Pour la virgule fixe, overflow (dépassement de capacité) et underflow, sont monnaie courante et de fréquents *changements d'échelle* sont nécessaires lors des calculs intermédiaires. La virgule flottante exige, quant à elle, des temps de calcul importants pour des précisions parfois inutiles (voir le tracé d'une courbe sur un écran bit-map) et quelquefois illusoires (1). Les deux représentations reposent cependant sur la même assertion : à une *très petite* échelle ou avec une *très grande* unité les entiers simulent bien le *continu* et donc les réels.

Alors qu'elles n'ont qu'un sens heuristique en mathématiques classiques, les notions de *très petite* échelle ou de *très grande* unité peuvent être formulées, donc contrôlées, de manière à la fois simple et rigoureuse dans le cadre de l'analyse non standard (2).

Plus précisément l'analyse non standard permet de considérer un **ordinateur "idéal"** (ou idéel), modèle de l'ordinateur usuel, et de disposer de chemins balisés pour la construction d'algorithmes de calculs utilisant uniquement les entiers. Quitte à ce que certaines constantes soient bien choisies, ces algorithmes seront exécutables sur l'ordinateur usuel. Du recours exclusif aux entiers résulte un gain de temps de calcul important et, évidemment, une transportabilité accrue des programmes.

1.— Un ordinateur idéal

Soit ω un entier positif infiniment grand fixé. J'appelle ordinateur *idéal* (dans la suite, j'écrirai simplement OI) un ordinateur formel qui sait gérer (comparer,

(1) Voir l'article de R. SEROUL : "*Equations différentielles et nombres entiers*" '*L'Ouvert*' n° 48 (Septembre 1987).

(2) En annexe est donnée une très brève introduction à l'analyse non standard.

additionner, soustraire, multiplier et faire le quotient entier) tous les entiers n pour lesquels il existe k standard avec $|n| \leq k\omega$ (autrement dit les entiers de l'ordre de ω).

Remarques

1. Le dépassement de capacités est possible sur l'OI (par exemple pour ω^2).

2. Les entiers infiniment grands pouvant être distingués des entiers standard, l'OI permet de prendre en compte des ***entiers longs*** et ainsi d'orienter les algorithmes afin de gagner éventuellement de la mémoire dans des problèmes où ceux-ci interviennent (les entiers longs occupant évidemment beaucoup de mémoire).

Tout algorithme de calcul exécutable sur l'OI donne immédiatement un algorithme exécutable sur l'ordinateur usuel en remplaçant ω par un entier N disponible sur ce dernier et judicieusement choisi.

L'analyse non standard nous donne de bonnes raisons de penser que si l'algorithme *idéal* était *bon* alors l'algorithme *concret* ainsi obtenu le sera aussi. En fait en choisissant ω infiniment grand j'ai, en quelque sorte, répondu par avance à toute condition qui pouvait porter sur la *grandeur* de N.

Afin de pouvoir traiter tout problème numérique je vais définir une représentation des réels par des entiers.

2.— Une représentation des réels par des entiers

Je note par $[a]$ la partie entière de a. Tout réel x est représenté par le couple d'entiers (X_0, R) défini comme suit

$$X_0 = [\omega x]$$
$$R = [\omega(\omega x - X_0)].$$

Il en résulte immédiatement la

Proposition : Tout réel non infiniment grand est représenté par un couple d'entiers (X_0, R) de l'OI.

Définitions : L'entier X_0 est appelé **représentation** de x et R est appelé le reste de la représentation.
Un entier X est dit un représentant de x si $|X - X_0|$ est standard.

Ces définitions appellent les

Commentaires et remarques :
1. La représentation X_0 du réel x détermine x avec une erreur inférieure à $1/\omega$. Un représentant X de x détermine x avec une erreur de l'ordre de $1/\omega$ (i.e. $|x - (X/\omega)| \leq k/\omega$, avec k standard). A chaque réel on associe la collection de tous ses représentants (on représente un point par une tache, ce qui nous est assez familier).

Deux réels standard distincts ont des collections disjointes de représentants .

Pour calculer une valeur approchée d'un réel x_o, je construis un algorithme pouvant tourner sur l'OI et qui permet de calculer un représentant X de x_o.

2. Le nombre de boucles d'un algorithme exécutable sur l'OI peut être de l'ordre de ω. Ainsi en partant avec une erreur initiale de l'ordre de $1/\omega$, sachant que les erreurs s'accumulent, on peut aboutir à un résultat non satisfaisant (c'est-à-dire à un entier qui n'est pas un représentant du réel à approcher). D'où résulte la nécessité de tenir compte du reste R. En effet (X_0, R) détermine x à $1/\omega^2$ près.

3.— Une représentation des fonctions

A la représentation des réels ainsi définie correspond naturellement une représentation des fonctions.

Ainsi, soit

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction réelle.

Je note $\{l, l+1, \ldots, l+p\}$ l'intervalle de $\mathbb{Z}$ constitué par les représentations des éléments de $[a,b]$.

Définition : On dit qu'une application

$$F : \{l, l+1, \ldots, l+p\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

(i) est une **représentation** de f si
$\forall k \in \{l, l+1, \ldots l+p\}$, $F_k = F(k) = [\omega f(\frac{k}{\omega})]$
(ii) est un **représentant** de f si $\forall k \in \{l, l+1, \ldots, l+p\}$,
F_k est un représentant de $\omega f(\frac{k}{\omega})$.

Il correspond évidemment à la représentation de f une fonction **reste**

$$R : \{l, l+1, \ldots, l+p\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, \omega - 1\}$$

définie par

$$R_k = \left[\omega(\omega f(\frac{k}{\omega}) - F_k)\right], \qquad k \in \{l, l+1, \ldots l+p\}.$$

Et je peux affirmer

Proposition : Si f est une fonction standard, sa représentation, son reste et tout représentant est défini sur des entiers de l'OI et à valeurs dans ceux-ci.

Il est facile de vérifier que

Remarque : Si la fonction f est standard de classe C^1, si F est un représentant de f et X un représentant de x alors F_X est un représentant de $f(x)$.

Dans de nombreux problèmes numériques, tels le tracé de courbes ou l'intégration numérique d'équations différentielles, on est amené à tabuler des fonctions. Ceci se traduit dans notre cas par la détermination de représentants de ces fonctions.

La notion de code, que je vais définir, se révèle jouer un rôle essentiel dans les calculs ainsi requis.

Avec les notations qui précèdent

Définition : On dit qu'une application

$$C : \{l, l+1, \ldots, l+p\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est un code de f s'il existe un représentant F de f tel que

$$\forall k \in \{l, l+1, \ldots, l+p-1\}\ ,\ C_k = F_{k+1} - F_k.$$

On dira encore que C est le code correspondant au représentant F de f.

Remarques

1. Un représentant F d'une fonction f est parfaitement déterminé par le code lui correspondant et une de ses valeurs F_k. Ainsi pour le tracé du graphe de f, il suffit de connaître une telle valeur et un tel code.

2. Si C est le code correspondant à la représentation d'une fonction standard dérivable, alors

$$\forall k \in \{l, l+1, \ldots, l+p-1\}\ ,\ C_k = \left[f'(\frac{k}{\omega})\right] + \alpha_k$$

où

$$\alpha_k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Par conséquent quel que soit k, C_k est standard, donc un entier *petit* de l'ordinateur modèle.

En appelant C code d'ordre 1 de f, je peux définir D code d'ordre 2 de f par

$$\forall k \in \{l, l+1, \ldots, l+p-2\} \qquad D_k = C_{k+1} - C_k$$

et de même des codes d'ordre 3, 4, etc...

A toutes les fonctions code est associée la même fonction reste, notamment celle associée au représentant primitif.

4.— Application

Je me propose de construire un algorithme permettant de tabuler la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$, autrement dit de calculer $F_k = \left[\frac{k^2}{\omega}\right]$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, \omega$.

Par définition

$$\frac{k^2}{\omega} = F_k + \frac{R_k}{\omega}$$

ou encore

$$k^2 = F_k \times \omega + R_k \qquad (1)$$

où

$$\begin{cases} F_k & = k^2 \text{ div } \omega \\ R_k & = k^2 \text{ mod } \omega \end{cases}$$

De même

$$\begin{cases} F_{k+1} & = (k+1)^2 \text{ div } \omega \\ R_{k+1} & = (k+1)^2 \text{ mod } \omega \end{cases}$$

et d'après (1)

$$\begin{cases} F_{k+1} & = F_k + (2k+1+R_k) \text{ div } \omega \\ R_{k+1} & = (2k+1+R_k) \text{ mod } \omega \end{cases}$$

ou encore en passant au code d'ordre 1

$$\begin{cases} C_k & = (2k+1+R_k) \text{ div } \omega \\ R_{k+1} & = (2k+1+R_k) \text{ mod } \omega \end{cases}$$

Ce qui me donne l'algorithme suivant

```
F := 0; R := 0;
Pour k := 0 à (ω − 1) faire
   début
      C := (2k + 1 + R) div ω;
      R := (2k + 1 + R) mod ω;
      F := F + C
      écrire (F)
   fin.
```

Pour l'algorithme ainsi obtenu il n'y a plus de dépassement de capacité possible et on constate que C ne prend effectivement que des valeurs standard.

Par ailleurs à chaque étape le couple (F_k, R_k) représente exactement $f(k/\omega)$ et il n'y a pas d'accumulation d'erreurs. La fonction F déterminée est non seulement un représentant de $f(x) = x^2$ mais sa représentation entière. L'algorithme est parfait.

Rien ne m'interdit d'écrire, à présent un programme en Pascal en prenant $\omega = 10000$ et de faire tourner l'algorithme sur un micro ordinateur. Il suffit alors de placer la virgule sur les entiers affichés pour obtenir la tabulation voulue, les valeurs étant données à 1/10000 près par défaut.

Il est possible de se ramener, grâce au code d'ordre 2, à un algorithme n'utilisant plus que des additions, des soustractions et des tests.

En effet, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} C_{k+1} & = [2(k+1)+1+R_{k+1}] \text{ div } \omega \\ R_{k+2} & = [2(k+1)+1+R_{k+1}] \text{ mod } \omega \end{cases}$$

Par ailleurs

$$2k + 1 + R_k = C_k \times \omega + R_{k+1}$$

D'où en posant

$$\begin{cases} D_k &= C_{k+1} - C_k \\ dR_k &= R_{k+1} - R_k. \end{cases}$$

Il en résulte

$$\begin{cases} D_k &= (2 + R_{k+1} + dR_k) \text{ div } \omega \\ R_{k+2} &= (2 + R_{k+1} + dR_k) \text{ mod } \omega. \end{cases}$$

Remarque : On démontre que quel que soit k, $D_k \in \{-1, 0, 1\}$.

En dc la variable associée à D_k et en introduisant la variable auxiliaire t pour l'expression $2 + R_{k+1} + dR_k$ j'obtiens pour $\omega = 10000$ l'algorithme suivant :

```
ω := 10000; r0 := 0; r1 := 1; c := 0; f := 0;
pour k := 0 à 9998 faire
   début
      dr := r1 − r0;
      t := 2 + r1 + dr
      si t ⩾ 0 alors
         début
            si t < ω alors
               début
                  dc := 0;
                  r0 := r1;
                  r1 := t;
               fin
            sinon
               début
                  dc := 1;
                  r0 = r1;
                  r1 = t − ω
               fin
         fin
      sinon
         début
            dc := −1;
            r0 := r1
            r1 := ω + t
         fin;
      c := c + dc; f := f + c;
      écrire (f)
   fin.
```

Cet algorithme donne évidemment des résultats identiques à ceux obtenus avec le code d'ordre 1.

J'ai fait l'expérimentation sur un micro-ordinateur Apple II_C, les programmes étant écrits en Pascal UGSD (compilation en un P-code qui lui est interprété). La tabulation de $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$ avec un pas de $1/10000$ a ainsi nécessité les temps de calcul suivants :
— en entiers
. avec le code d'ordre 1 : 39 s
. avec le code d'ordre 2 : 34 s
— en virgule flottante : 52 s.

L'exemple choisi pour l'application peut paraître bien naïf. Cependant, outre son intérêt pédagogique pour l'exposé de la méthode, le calcul de x^2 joue un rôle fondamental dans le calcul sur ordinateur des puissances entières de x.

Je propose l'exercice suivant : écrire un algorithme permettant la tabulation de $g(x) = x^4$ à partir du code d'ordre 1 de $f(x) = x^2$.

5.— Quelques commentaires pour conclure

⋆ Utilisant la représentation des réels par des *classes d'équivalence* d'entiers (évitant ainsi les notions de coupure et autres...) Jacques HARTHONG a fait le pari de faire toute l'analyse avec uniquement les entiers. Ce qui a été exposé ici entre parfaitement dans le cadre de ce travail et profite ainsi d'une base théorique qui constitue à la fois un moyen de contrôle et un guide pour la prospective.

⋆ Nombre de lecteurs auront sans doute remarqué une étrange ressemblance de la démarche proposée ici avec celle de la virgule fixe (voir article de R. SEROUL dans '*L'Ouvert*' n° 48). Se pose alors la question : "*N'est-ce pas simplement de la virgule fixe déguisée ?*". Pour répondre à cette interrogation il n'y a qu'un moyen, c'est d'essayer de tenir un discours similaire dans le cadre de la virgule fixe.

Je ne tiens pas à imposer ma réponse, qui est évidemment non. Cependant je donnerai deux indices :

— dans le cadre proposé ici il est interdit de calculer la représentation du produit de deux réels comme l'a fait R. SEROUL dans son article,

— l'importance et l'interprétation de la notion de code sont immédiates dans ce qui précède. Est-ce aussi simple dans le cadre de la virgule fixe?

ANNEXE

Introduction à l'Analyse non Standard

Les fondements

Les ensembles infinis constituaient le sujet central de la crise des fondements du début du siècle. L'ensemble des entiers en est un exemple type. D'une part il y a les entiers usuels, c'est-à-dire ceux qui, préalables à toute mathématique, font l'objet des manipulations d'usage dont la plus simple est le dénombrement : 1, puis son suivant 2, et ainsi de suite. D'autre part il y a l'ensemble $\mathbb{N}$ satisfaisant aux axiomes de PEANO. Il est clair que les entiers usuels peuvent être considérés comme des éléments de $\mathbb{N}$. Mais est-ce que tout élément de $\mathbb{N}$ est un entier usuel (ou naïf selon la terminologie de G. REEB)? Si oui pourquoi mettre parmi les axiomes un principe de récurrence?

Les mathématiciens semblent d'accord pour admettre que, d'une façon générale, il n'y a guère concordance entre les conceptions intuitives et leur formalisation que dans le cas fini. En formalisant, on introduit des objets *idéaux* dans le cas infini.

Alors que la mathématique formelle classique ne prend pas en compte l'existence même de tels objets, que la mathématique constructiviste refuse une partie du formalisme pour éviter de les considérer, l'analyse non standard leur fait jouer un rôle essentiel.

De façon précise pour fonder une théorie axiomatique de l'analyse non standard (1) :

— on considère **la théorie axiomatique des ensembles de** ZERMELO-FRAENKEL **avec l'axiome du choix**, c'est-à-dire la mathématique classique (les objets sont des ensembles et toutes les propositions s'énoncent à l'aide du prédicat binaire $\in$).

— on introduit un **prédicat unaire "standard"** (un objet pourra ainsi être qualifié de standard ou non standard) et trois axiomes supplémentaires.

Axiome 1 : Tous les éléments d'un ensemble E sont standard si et seulement si E est standard et fini.

Axiome 2 : Si $A(x, t_1, \ldots, t_n)$ est une formule de la mathématique classique alors, quels que soient $t_1, \ldots, t_n$ standard, la propriété que $A(x, t_1, \ldots, t_n)$ est vraie pour tout x standard entraîne celle que $A(x, t_1, \ldots, t_n)$ est vraie pour tout x.

Axiome 3 : Si A est un ensemble standard et P une propriété, alors il existe un ensemble standard B dont les éléments standard sont les éléments standard de A qui satisfont à P.

---

(1) La présentation de l'Analyse Non Standard proposée est une version, à peine simplifiée, de la théorie I.S.T. (International Set Theory) telle qu'elle a été introduite par E. NELSON dans le '*Bulletin de l'American Mathematical Society*' n° 83 de 1979.

Commentaires et remarques

1. On peut considérer que *standard* formalise *usuel.* Ainsi on reconnaît par l'axiome 1 l'existence d'éléments *idéaux* ou *non usuels* dans tout ensemble infini. De plus par l'axiome 2 on admet que la mathématique classique n'a pas les moyens de distinguer ces éléments *idéaux.*

2. Dans cette nouvelle théorie n'importe quelle propriété ne définit plus (comme en mathématique classique) un sous-ensemble d'un ensemble donné. Ainsi les entiers standard ne forment pas un sous ensemble de $\mathbb{N}$ (sinon on pourrait leur appliquer le principe de récurrence et tout entier serait standard). Ce défaut est en partie compensé par l'axiome 3 et se révèle paradoxalement fructueux dans de nombreuses démonstations.

3. Les objets de la mathématique classique sont les objets de l'analyse non standard. L'axiome 2 permet de montrer que ceux qui sont définis de manière unique sont standard. Ainsi $0, 1, 2, \ldots, \sqrt{2}, \ldots \pi, e, \ldots \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots \cos, \sin, \exp, \log, \ldots$ sont des objets standard.

4. Tous les théorèmes de la mathématique classique sont des théorème de l'analyse non standard.

5. Si la théorie de ZERMELO-FRAENKEL n'est pas contradictoire, alors la nouvelle théorie ne l'est pas non plus.

Infiniment grands et infiniment petits

Un intérêt essentiel de l'analyse non standard est de permettre une définition rigoureuse de notions d'infiniment grand et d'infiniment petit échappant aux paradoxes qui les accompagnaient traditionnellement.

Définitions:
— Un réel est dit **infiniment grand** s'il est supérieur en valeur absolue à tout réel standard.
— Un réel est dit **infiniment petit** s'il est inférieur en valeur absolue à tout réel standard strictement positif.
Le théorème suivant est immédiat.

Théorème : Il existe $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ et il existe $\beta, \beta \in \mathbb{R}$ tels que α est infiniment grand et β est infiniment petit.

En effet si α est un entier non standard alors α est infiniment grand et $1/\alpha$ est infiniment petit.

UN RESTE POSITIF

J. A. Lindon
cité par Martin Gardner dans
"*Penrose tiles to trapdoor ciphers*"
(Freeman and company, New York)

Un charpentier du nom de Jean-Charles Brattick,
Et qui avait du goût pour les mathématiques,
Fit, pour bien s'amuser, un beau mardi d'été,
Un joli cube de bois de moins un de côté.

Et bien que cela paraisse faux pour de bon,
C'est qu'il avait vraiment **moins** un mètre de long;
C'est-à-dire, sauf si chauffe votre cerveau,
Qu'il avait pour longueur un mètre sous zéro!

Et quand à la largeur, moins un mètre il faut,
De la même façon moins un mètre de haut.
Par multiplication on a (si ça ne fume!)
Oui, moins un mètre cube et pas plus de volume.

En suant sang et eau, cet objet il scia,
De part en part les dures faces il traversa,
Car malgré ses côtés de longueur négative,
Moins par moins, on le sait, fait l'aire positive.

Jean-Charles en fabriqua un deuxième tout bête
Qui cette fois avait plus un mètre d'arête;
Ainsi tout simplement pour volume il avait
Plus un mètre cube tout juste une fois fait.

Maintenant commença le début de ses maux :
Avec ses deux cubes comme deux faux jumeaux,
S'attendant au pire, mais sans se faire prier,
Il plaça le second au dedans du premier.

Plus un mètre, moins un mètre, sans aucun doute,
Les arêtes simplement disparurent toutes,
Ainsi que le volume, il n'avait rien gagné
Car que faire des seules faces qui restaient?

Ouvrez tout grand vos yeux et n'ayez aucun trouble,
Ces faces maintenant étaient de taille double,
Enfermant quelque chose qui, par son adresse,
N'avait ni longueur ni volume. Mais qu'était-ce?

Il avait découpé dans un morceau d'ébène
Ces volumineux cubes, et malgré sa peine,
Ce qu'il en restait alors, il fallait le voir :
Une très très fine peau anguleuse et noire,

De douze mètres carrés – ce n'est pas petit –
Sans poids car aucun espace elle ne remplit;
Et sur le sol de Jean-Charles, cela gisait.
Il ne savait pas quel usage il en ferait.

(Traduction de J. Lefort.)

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

4.— LES CALENDRIERS SOLAIRES (suite)

3) Le calendrier grégorien

a) Si on regarde les réduites suivantes du développement en fraction continue de l'année exprimée en jours, on trouve $365 + \frac{7}{29}$ et $365 + \frac{8}{33}$. Cette dernière valeur est intéressante puisqu'elle correspond à 24 années bissextiles en 99 ans, quasiment un siècle. D'où l'idée, l'unité du siècle étant bien commode, de ne placer que 24 années bissextiles par siècle mais d'en rajouter une tous les quatre cent ans puisqu'alors le cycle de 99 ans aura un écart de 4 ans sur le cycle du siècle. Evidemment, on ne retrouve pas exactement la réduite ($\frac{8}{33} = 0,242424\ldots$) mais ($\frac{3\times24+25}{400} = 0,2425$).

Une autre façon de faire, consiste à chercher une approximation en jour de la durée du siècle. On trouve alors qu'il faut supprimer 3 années bissextiles tous les quatre cent ans (par rapport au calendrier julien), si on se contente de l'approximation donnée par la première réduite.

Bien sûr, c'est en sens inverse que l'humanité a travaillé. C'est parce que la chrétienté (surtout en Europe) s'est aperçue que l'équinoxe de printemps *ripait* vers *l'hiver* que les gens se sont posés des questions sur la concordance de leur calendrier soit-disant solaire (le calendrier julien) avec le Soleil. Dès 325 de notre ère, lors du concile de Nicée qui fixa la date de Pâques (nous y reviendrons), l'équinoxe de printemps tomba le 21 mars, soit 4 jours d'avance sur ce que SOSIGÈNE avait prétendu fixer lors de la réforme julienne. Cependant nous avons vu la difficulté de dater exactement l'instant de l'équinoxe et nos ancêtres qui n'étaient déjà plus gaulois en étaient tellement conscients qu'ils attribuèrent à SOSIGÈNE seul, cet écart de 4 jours.

Et ils n'avaient pas tout à fait tort puisque SOSIGÈNE s'était trompé d'une journée. C'est pourquoi les pères de l'Eglise pensèrent qu'à l'avenir l'équinoxe aurait toujours lieu un 21 mars.

Mais dès le 8^{e} siècle on s'aperçu que ce n'était pas vrai. On proposa une modification en 1414 au concile de Constance puis au concile de Trente (1545-1553), mais finalement c'est à Grégoire XIII que l'on doit la réforme qui porte son nom. Comme pour d'autres c'est une commission de savants parmi lesquels il faut citer essentiellement Christophe CLAVIUS, mathématicien allemand (Bamberg 1537 - Rome 1612) et Luigi LILIO (Aloysius LILIUS), astronome italien qui firent l'essentiel des calculs.

b) Adoption du calendrier grégorien

Il fut décidé (et cela est arbitraire) que l'on conserverait le fil conducteur de la semaine et que l'équinoxe serait fixé au 21 mars. Les années bissextiles auront lieu tous les quatre ans quand le millésime est divisible par 4, sauf pour les années séculaires qui ne sont bissextiles que si le millésime est divisible par 400.

. A Rome, en Espagne et au Portugal, ainsi que pour l'Eglise catholique le lendemain du jeudi 4 octobre 1582 fut le vendredi 15 octobre 1582.
. En France, sous Henri III, le lendemain du dimanche 9 décembre 1582 fut le lundi 20 décembre 1582 (⋆).
. Aux Pays-Bas catholiques, le lendemain du jeudi 14 décembre 1582 fut le jour de Noël.
. Dans les états catholiques d'Allemagne et de Suisse, le réforme eut lieu en 1584.
. En Pologne, pourtant très catholique, la réforme eut lieu en 1586, malgré des révoltes en particulier à Riga.
. En Hongrie, la réforme eut lieu en 1587.
. Les états protestants des Pays-Bas, d'Allemagne et de Suisse, s'alignèrent vers 1700 (pas tous à la même date, ce serait trop simple!).
. En Angleterre, le lendemain du mercredi 2 septembre 1752 fut le jeudi 14 septembre 1752 (le retard accumulé était alors de 11 jours). Des émeutes se produisirent. Il faut remarquer que cette même année avait commencé trois mois plus tôt pour aligner son jour de l'an au 1er janvier. Des gens défilèrent criant : "*rendez-nous nos trois mois; rendez-nous nos 11 jours ...*"
. En Suède la réforme eut également lieu en 1752.
. Au Japon, on adopta le calendrier grégorien pour les actes officiels à partir de 1873.
. La Chine le fit en 1912.
. L'URSS passa directement du mercredi 1er février 1918 au jeudi 14 février (⋆⋆).
. L'état roumain abandonna le calendrier julien en 1919.
. Les églises orthodoxes orientales s'alignèrent le lendemain du 30 septembre 1923 qui devint le dimanche 14 octobre 1923.
. La Turquie enfin se rallia au nouveau calendrier en 1924.

Actuellement, on peut estimer que le calendrier grégorien est le calendrier civil en usage dans le monde entier. Mais différents calendriers locaux restent en usage de façon plus ou moins courante pour des besoins religieux ou para-religieux (fêtes) ou tout simplement par conservatisme.

La façon internationale de noter une date est alors : 1988-10-05 ou à la rigueur 88-10-05 pour le 5 octobre 1988.

(⋆) Cette *France* ne comportait ni le Nord, ni l'Alsace et la Lorraine, ni la Franche-Comté, ni la Savoie et le comté de Nice.
(⋆⋆) C'est pourquoi la révolution d'octobre est actuellement fêtée en novembre!

c) La précision du calendrier grégorien

Tel qu'il est, le calendrier grégorien n'est pas rigoureusement en accord avec le Soleil. L'année grégorienne est trop longue d'environ trois jours en dix mille ans. A ce niveau ou bien on se considère comme un sacré optimiste, mais on oublie le cours de l'histoire ou bien on pense à la variation séculaire des *constantes* astronomiques et on n'insiste pas trop. Personnellement — si je puis me permettre de donner un avis purement subjectif — j'estime que si les égyptiens ont pu vivre plus de quatre millénaires avec un calendrier vague, nous n'avons pas besoin, nous qui ne dépendons guère du cycle solaire, de la précision sophistiquée du calendrier grégorien. Qu'importe si dans quelques milliers d'années, décembre soit un mois de canicule en Europe, ça l'est bien actuellement pour l'hémisphère sud!

En fait, le raccourcissement de l'année tropique (5 sec par millénaire – effet proportionnel au carré du temps) l'allongement du jour par frottement des marées (1,64 m sec par siècle – effet proportionnel au carré du temps) agissent également et dans le même sens sans compter les variations imprévues. Cela donnerait l'équinoxe de printemps vers le 11 mars d'ici dix millénaires... Vanitas vanitatis, omnes vanitas.

d) Passage du calendrier grégorien au jour julien

Comme pour le calendrier julien, et pour les mêmes raisons, on numérote mois et années de la façon suivante :
Soit a l'année et m le numéro du mois dans l'année
. Si $m = 1$ ou 2 on pose $A = a - 1$ et $M = m + 12$
. Sinon on pose $A = a$ et $M = m$.

Formule : Soit A et M l'année et le mois modifiés comme ci-dessus; soit j le jour du mois. Alors le jour julien JJ est donné par :

$$JJ = [365,25A] + [30,6(M+1)] + j + 1\ 720\ 996,5 - [\frac{A}{100}] + [\frac{A}{400}].$$

On remarque les deux termes complémentaires par rapport à la formule analogue concernant le calendrier julien.

Formule inverse : Connaissant le jour julien JJ, on cherche la date correspondante dans le calendrier grégorien sous la forme (A, M, j) où A et M sont les années et les mois modifiés comme il a été dit précédemment.

La suite de calculs suivants conduit au résultat :

$Z = JJ - 1\ 721\ 119,5$	Nombre de jours écoulés depuis le 1er mars 0.
$Q = [\frac{z}{146\ 097}]$	Nombre de fois 4 siècles soit 146 097 jours.
$S = 4Q + [\frac{z - 146\ 097\ Q}{36\ 524}]$	Nombre de siècles.

$u = [\frac{z-36\ 524\ S-Q}{365,25}]$	Nombre d'années dans le siècle.
$A = 100\ S + u$	Valeurs de l'année modifiée.
$b = z - 36\ 524\ S - Q - [365,25u]$	Nombre de jours écoulés dans l'année A.
$M = [\frac{b}{30,6}] + 3$	Numéro du mois modifié.
$j = b - [30,6(M+1)] + 123$	Quantième dans le mois.

On obtient facilement a et m à partir de A et M : si $M = 13$ ou 14, on pose $m = M - 12$ et $a = A + 1$, sinon on a $m = M$ et $a = A$.

En comparant les formules du calendrier grégorien et du calendrier julien on notera que ces deux calendriers concordent pendant le 3[e] siècle de notre ère, plus exactement du 1er mars 200 au 28 février 300.

4) Le calendrier républicain

Pour être sûr que l'année soit en concordance avec le Soleil, le plus simple c'est de faire un peu comme pour les calendriers lunaires : le jour de l'an sera systématiquement celui où aura lieu tel phénomène régulier : par exemple, l'équinoxe d'automne pour Paris. C'est le choix qui a été fait pour le calendrier républicain qui comporte 10 mois de 30 jours divisés en 3 décades chacuns, auxquels sont adjoints 5 ou 6 jours complémentaires.

Le principal obstacle est qu'il faut un calcul astronomique compliqué pour déterminer le début de l'année et sa longueur. Bien sûr, grossièrement, il y a normalement 5 jours complémentaires et 6 une fois tous les quatre ans.

Les noms des jours d'une décade sont :

primidi	duodi	tridi	quartidi	quintidi
sextidi	septidi	octidi	nonidi	décadi

Les noms des mois de l'année sont :

vendémiaire	nivôse	germinal	messidor
brumaire	pluviôse	floréal	thermidor
frimaire	ventôse	prairial	fructidor

Les cinq jours supplémentaires sont les **sans-culottides**, le sixième étant le **jour de la révolution**. Le premier vendémiaire de l'an I fut fixé au 22 septembre 1792. Les années *sextiles* eurent lieu en l'an III, VII et XI.

5) Le calendrier tamoul

Le lecteur pourrait se demander ce que vient faire l'étude d'un calendrier supplémentaire. Nous venons de voir des approximations chaque fois meilleures de l'année astronomique pour finir par le plus parfait possible. Mais le lecteur ignore peut-être qu'il y a trois sortes possibles d'années (au moins). L'année tropique qui correspond à deux retours consécutifs du plan de l'équateur terrestre dans le plan de l'écliptique (équinoxe). C'est l'année qui rythme les saisons. Mais on peut aussi étudier l'année anomalistique correspondant au retour au périgée (environ 365 j 6 h 14 min) ou l'année sidérale correspondant au retour dans une même direction stellaire (environ 365 j 6h 9 min).

C'est à cette dernière année que fait référence le calendrier tamoul. C'est effectivement une année qui se mesure assez facilement et on connaît la précision des observations astronomiques indiennes.

Les tamouls, très logiques avec le système sexagésimal, divisent la journée en 60 nâLi, chacun divisé en 60 vinâdi et chaque vinâdi en 60 nodi. Le jour commence au lever du Soleil. L'année comporte douze mois qui correspondent aux douze constellations du zodiaque d'origine grecque que nous connaissons. Le début de chaque mois doit coïncider avec l'entrée du Soleil dans l'un des signes du zodiaque, de sorte que la durée de chaque mois ne tient pas compte de la division en jours, mais de la durée que le Soleil met à parcourir ce signe. Dans la pratique, lorsque le début du mois astronomique tombe après le coucher du Soleil, ou plus exactement quand la fraction de jour dépasse 30 nâLi (soit 12 heures) on reporte le début du mois civil au jour suivant.

Voici les mois tamouls, leur durée approximative et la correspondance actuelle dans le calendrier grégorien :

	Durée			correspondance
	j	nâLi	vinâdi	
cittirei	30	55	32	avril – mai
vaigâçi	31	24	12	mai – juin
âni	31	36	38	juin – juillet
âdi	31	28	12	juillet – août
âvani	31	2	10	août – septembre
pourrattâçi	30	27	22	septembre – octobre
aippaçi	29	54	7	octobre – novembre
kârttigei	29	30	24	novembre – décembre
mârgaLi	29	20	53	décembre – janvier
taï	29	27	16	janvier – février
mâçi	29	48	24	février – mars
pangouni	30	20	21	mars – avril

Si les mois n'ont pas le même longueur c'est à cause de l'excentricité de l'orbite terrestre, car chaque signe du zodiaque a une amplitude d'exactement 30° mais la Terre n'a pas une vitesse uniforme.

La durée exacte de l'année tamoule est de 365 j 6 h 12 min 30 s (c'est plus facile à compter qu'en nâLi vinâdi et nodi). Il y a un très léger écart par rapport à l'année sidérale (environ 3 min) mais un écart très important avec l'année tropique puisqu'il est de près de 24 minutes.

Toujours fidèle à la soixantaine, les tamouls comptent par cycle de 60 ans baptisé grande année (pêrândou). Chacune des 60 années du cycle porte un nom mais les cycles en eux-mêmes sont peu différenciés de sorte qu'il règne une grande incertitude sur les dates un peu lointaines. On sait que ce calendrier a été adopté à l'époque où le point vernal (point correspondant à l'équinoxe de printemps) était dans la constellation *revati*. Or, cette constellation s'étend sur environ 13°. L'année 427 de notre ère est assez satisfaisante, mais il est possible qu'il y ait eu des cycles de 30 ans au début, auquel cas l'année 397 pourrait également convenir.

6) Et à l'avenir ?

Le calendrier grégorien, pour des raisons historiques est devenu le calendrier civil de la quasi totalité des habitants de la Terre. On ne peut pas dire que ce soit un calendrier simple mais l'histoire montre abondamment que les gens sont très conservateurs en la matière. Ce qui le rend pratique, c'est le fil conducteur des jours de la semaine.

Beaucoup de savants, de nombreuses commissions, ont cherché à changer ce calendrier, il est vraissemblable qu'il restera en vigueur sauf cataclysme mondial.

— à suivre —

SIMPLIFICATION

$\frac{64}{16} = \frac{4}{1}$; il suffit de simplifier par le chiffre 6 ! De même en simplifiant par le chiffre commun :

$$\frac{65}{26} = \frac{5}{2}\ ;\ \frac{98}{49} = \frac{8}{4}\ ;\ \frac{95}{19} = \frac{5}{1}.$$

Mais on peut faire mieux :

$$\frac{3332}{833} = \frac{32}{8}\ ;\ \frac{3325}{133} = \frac{25}{1}\ ;\ \frac{8175}{981} = \frac{75}{9}\ ;\ \frac{8180}{3681} = \frac{80}{36}\ ;\ \frac{8172}{681} = \frac{72}{6}.$$

Et encore mieux :

$$\frac{2666}{6665} = \frac{266}{665} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}\ ;\quad \frac{629629625}{85629629} = \frac{629625}{85629} = \frac{625}{85}.$$

Et d'autres encore, de quoi faire douter le meilleur élève :

$$\frac{23994}{15996} = \frac{2394}{1596} = \frac{234}{156}\ ;\quad \frac{18668}{4667} = \frac{1868}{467} = \frac{188}{47}\ ;\quad \frac{4252121345}{92121215} = \frac{42521345}{921215} = \frac{425345}{9215}\ldots$$

LA CONSTRUCTION DES LOGARITHMES DE NEPER

Quelques pages destinées aux élèves des classes terminales et à leurs professeurs

Nicole VOGEL

N.B. : La lecture des passages entre étoiles n'est pas indispensable à la compréhension générale de l'ensemble. Le nombre d'étoiles indique leur degré de difficulté ; * : pour tous ; ** : accessible à tous ceux qui acceptent de faire un petit effort ; *** : pour les élèves des terminales scientifiques après l'étude des équations différentielles.

En ce temps là, les calculatrices n'existaient pas, et le calcul numérique était fastidieux.

Après divers essais visant à remplacer les multiplications par des additions ou à simplifier les calculs trigonométriques, vint enfin NEPER qui inventa les logarithmes. NEPER (1550-1617) était un baron écossais qui fréquentait le milieu scientifique de son époque. Dans la préface de son premier traité de 1614, écrit en latin, il annonça sa découverte ainsi :

> "Préface de la merveilleuse règle des Logarithmes
>
> Très illustre amateur de mathématiques,
> comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. A la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement. Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ; il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens ..."

Les astronomes furent évidemment ravis de cette découverte et KEPLER (1571-1630) salua l'œvre de NEPER en 1624 :

"*... Je résous la question par le bienfait des logarithmes. Je ne pense pas que quelque chose soit supérieur à la théorie de Neper ...*" D'ailleurs, KEPLER lui-même publia une contribution à l'étude des logarithmes en 1624 et 1625.

Notons au passage qu'il existait une véritable communauté scientifique européenne à cette époque puisque l'allemand KEPLER utilisa les travaux de l'écossais NEPER.

Mais comment a-t-on défini un logarithme au début du XVII^e siècle? Peut-on parler de fonction logarithme et dans ce cas, quelle en est la base? Comment a-t-on pu calculer des tables? C'est ce que nous allons essayer de comprendre.

1.— Quelques remarques préliminaires.

A l'époque de NEPER, la notion de fonction n'existait pas. Au contraire, les logarithmes serviront de prototype dans le développement de ce concept général (défini par EULER en 1748 seulement). Pourtant, nous parlerons de fonction par commodité, puisque NEPER donne un moyen de faire correspondre un logarithme à chaque nombre positif. Il s'agit donc bien d'une fonction.

De même, la notation décimale n'était pas encore généralisée, et là encore les logarithmes contribueront à son adoption générale. Mais je ne pense pas qu'il faille attacher beaucoup d'importance à la position de la virgule dans les tables de NEPER. Elles semblent plutôt présentées en virgule flottante, comme nos tables actuelles. D'ailleurs, au cours de ses calculs, NEPER convertit une unité principale en 10^7 unités secondaires lorsque cela simplifie l'écriture de ses nombres.

Avant de poursuivre, je voudrais encore préciser que ce texte n'est pas un travail d'historienne, pour lequel je n'ai ni la compétence, ni les documents originaux, mais un essai d'explication et d'analyse, avec le vocabulaire, les notations et les outils que nous utilisons dans notre enseignement actuel, d'une partie du raisonnement de NEPER.

2.— La définition des logarithmes par Neper.

Le but de NEPER est d'établir une table des logarithmes des sinus d'angle de 0° à 90° c'est-à-dire une table qui a la propriété suivante : si $LN\ a = A$ et si $LN\ b = B$, alors $LN(a \times b) = A + B$. (Nous noterons LN la fonction construite par NEPER.)

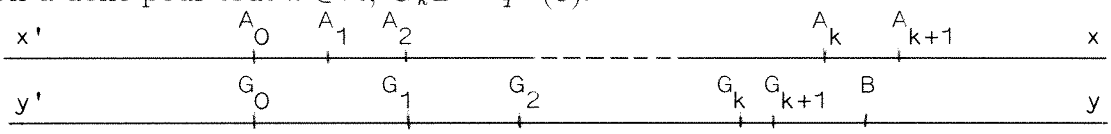
angles	sinus	logarithmes
α	a	A
β	b	B
	$a \times b$	$A + B$

La présence des sinus s'explique par la difficulté des calculs trigonométriques, malgré leur importance en astronomie et en navigation en particulier.

NEPER raisonne ainsi : il découpe une demi-droite d'origine A_0 suivant une progression arithmétique, (l étant une longueur donnée, les points A_k de cette demi-droite sont définis par : $l = A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_kA_{k+1}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_0A_k = kl = kA_0A_1$ (1)) et un segment $[G_0B]$ de longueur 1 suivant une progression géométrique. Etant donné $q \in]0,1[$, les points G_k de ce segment sont définis par :

$$q = G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \cdots = \frac{G_{k+1}}{G_kB} \text{ (2)}.$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_kB = q^k$ (3).



L'idée de comparer une progression arithmétique à une progression géométrique est assez naturelle, puisqu'il s'agit de mettre en relation un produit avec une somme. Ceci explique que NEPER ait choisi le nom *logarithme* formé de *logos* ("raisons" = rapports) et de *arithmos* ("nombres").

D'autre part, représenter des nombres par des segments est la règle de l'époque, héritée des Eléments d'EUCLIDE.

A partir de ces segments, NEPER définit (sans l'écrire ainsi, évidemment) : $LN(G_kB) = A_0A_k$ (4).

Ceci ne donne bien sûr pour le moment que le logarithme des nombres de la forme q^k ($k \in \mathbb{N}$).

		explications :
[* Mais nous avons déjà	$LN(G_0B) = A_0A_0$	relation (4)
c'est à dire	$LN\ 1 = 0$	
Et aussi	$LN(G_kB) = A_0A_k$	(4)
Or	$G_kB = q^k$	(3)
et	$A_0A_k = kA_0A_1$	(1)
donc	$LN(q^k) = kA_0A_1$	
De plus	$A_0A_1 = LN(G_1B) = LNq$	(4) et (2)
D'où	$LN(q^k) = kLNq$	*]

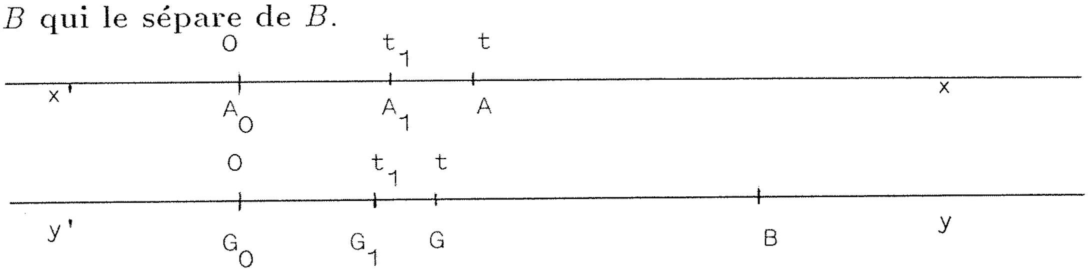
NEPER passe ensuite des nombres de la forme q^k à l'ensemble des réels positifs à l'aide de la cinématique :

• A **est un point mobile sur** $x'x$ **qui se déplace avec un mouvement uniforme** dans le sens de A_0 vers A_1 et qui passe en A_0 à l'instant 0. v est la vitesse constante de A sur $x'x$.

• G **est un point mobile sur** $y'y$ qui se déplace de la manière suivante :

  • **A l'instant 0, il passe en** G_0 **avec la vitesse** v.

  • A chaque instant, **la vitesse de** G **est proportionnelle à la distance** GB **qui le sépare de** B.



Soit t_1 un instant positif fixé, A_1 la position de A sur $x'x$ et G_1 la position de G sur $y'y$ à l'instant t_1.

Si on pose $l = A_0A_1$ et $q = G_1B$ (5), **les points** A_k **définis plus haut** (par (1)) **sont alors les positions de** A **sur** $x'x$ **aux instants** kt_1, **et les points** G_k (définis par (2)) **sont les positions de** G **sur** $y'y$ **aux mêmes instants.**

[** Prouvons-le en faisant une disgression dans le XX^e siècle pour les méthodes.

	explications :
Appelons t_k l'instant où A est en A_k.	
Nous avons donc $\frac{A_0A_k}{A_0A_1} = \frac{t_k}{t_1}$.	le mouvement sur $x'x$ est uniforme;
D'où $\frac{kl}{l} = \frac{t_k}{t_1}$	(1) et (5)
donc $kt_1 = t_k$ (6).	
D'autre part, la vitesse de G à l'instant t est de la forme $C.GB$, où C est une constante.	la vitesse de G est proportionnelle à GB;
Donc, la vitesse de G à l'instant 0 est $C.G_0B = C$.	$G_0B = 1$;
D'où $c = v$.	la vitesse de G à l'instant 0 est aussi v.

Conclusion : **la vitesse de** G **à l'instant** t **est** $v.GB$ (7)

Appelons y l'abscisse de G sur $y'y$ (de repère $G_0, \overrightarrow{G_0B}$) à l'instant t.	
Donc $GB = 1 - y$ (8)	$\overline{G_0B} = 1$ et $\overline{G_0G} = y$ donc $GB = \overline{GB} = \overline{G_0B} - \overline{G_0G}$
et la vitesse de G à l'instant t est $v(1-y)$.	**]

[*** Nous en déduisons $\frac{dy}{dt} = v(1-y)$
donc y est une solution de l'équation différentielle $Y' + vY = v$.

- Une solution particulière de $Y' + vY = v$ est $Y = 1$.
- Donc (y est solution de $Y' + vY = v$) $\Longleftrightarrow$ ($y - 1$ est solution de $Y' + vY = 0$).
- La solution générale de $Y' + vY = 0$ est $Y = Ke^{-vt}$ ($K \in \mathbb{R}$)

Donc $y = 1 + Ke^{-vt}$. De plus, pour $t = 0$, nous avons $y = 0$, donc $K = -1$.

Conclusion : $y = 1 - e^{-vt}$.	
Donc $GB = e^{-vt}$ (9).	(8)
Cherchons enfin où se trouve G à l'instant t_k :	
$GB = e^{-vt_k}$	(9)
$= e^{-vkt_1} = (e^{-vt_1})^k$.	(6)
D'autre part $G_1B = e^{-vt_1}$	G_1 est défini comme la position de G à l'instant t_1 et (9)
et $G_1B = q$	(5)
donc $e^{-vt_1} = q$,	
d'où $GB = q^k = G_kB$.	(3)
Conclusion : $G = G_k$ c.q.f.d.	***]

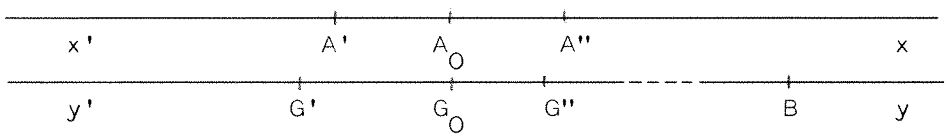
[** Evidemment, NEPER n'utilise pas le calcul infinitésimal. Il considère que t_1 est une valeur suffisamment petite pour qu'on puisse confondre la vitesse instantanée avec la vitesse moyenne pendant un intervalle de temps t_1.

Alors on a $G_0G_1 = vt_1$	v : vitesse à l'instant 0 t_1 : durée du déplacement de G_0 à G_1 ;
donc $G_1B = 1 - vt_1$.	$G_1B = G_0B - G_0G_1$ et $G_0B = 1$;
D'où $1 - vt_1 = G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \frac{G_{k+1}B}{G_kB}$ (10).	(2)
Soit G la position du mobile à l'instant $2t_1$:	
$G_1G = G_1B.v.(2t_1 - t_1)$	en t_1 le mobile est en G_1 et sa vitesse est $v.G_1B$ d'après (7) $2t_1 - t_1$ est la durée du déplacement de G_1 à G ;
donc $G_1B - GB = G_1B.v.t_1$	
d'où $G_1B(1 - vt_1) = GB$	
et $\frac{GB}{G_1B} = 1 - vt_1 = \frac{G_2B}{G_1B}$.	(10)
Donc $GB = G_2B$ c'est-à-dire $G = G_2$	

De même, de proche en proche, (en fait, par récurrence, mais ce principe n'a été mis en forme par Pascal qu'en 1654) on prouve que pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k est la position de G à l'instant kt_1. **]

Poursuivons maintenant le raisonnement de Neper :
Il définit $LN(GB) = A_0A$ (11), A et G étant les positions des deux mobiles au même instant t. Nous obtenons ainsi le logarithme de tout nombre de $]0, 1]$ et même de $]0, +\infty[$ si nous nous intéressons aussi aux positions du mobile avant l'instant 0.

[** Soit Δt un petit intervalle de temps non nul, A' et G' les positions des mobiles à l'instant $-\Delta t$, et A'' et G'' les positions des mobiles à l'instant Δt.



Nous avons $G'G_0 > A'A_0$	la vitesse de G décroît puisqu'elle est proportionnelle à GB et est égale à celle de A à l'instant 0, donc le mobile G est plus rapide que A avant l'instant 0.
et $A_0A'' > G_0G''$.	Par contre, après l'instant 0 A est plus rapide que G.
De plus $A'A_0 = A_0A''$.	le mouvement de A est uniforme et la durée des déplacements $A' \to A_0$ et $A_0 \to A''$ est la même, Δt.

Finalement $G'G_0 > A'A_0 = A_0A'' > G_0G''$ (12)

Posons $h = G_0G''$ (13).	
On en tire $G''B = 1 - h$.	$G''B = G_0B - G_0G''$ et $G_0B = 1$;
Or $LN(G''B) = A_0A''$	(11)
d'où $LN(1-h) = A_0A''$ (14).	

Ecrivons les déplacements élémentaires de G de l'instant $-\Delta t$ à l'instant 0 et de l'instant 0 à l'instant Δt :

$G'G_0 = v.G'B.\Delta t$	$v.G'B$ est la vitesse de G à l'instant $-\Delta t$ d'après (7) et Δt est la durée du déplacement;
et $G_0G'' = v.\Delta t$.	v = vitesse à l'instant 0
D'où $\frac{G'G_0}{G_0G''} = G'B = G'G_0 + 1$.	
Or $G_0G'' = h$	(13)
donc $G'G_0 = h(G'G_0 + 1)$	
d'où $G'G_0 = \frac{h}{1-h}$ (15)	

En portant (13), (14) et (15) dans (12) nous obtenons : **]
Conclusion : $\frac{h}{1-h} > LN(1-h) > h$ (16) pour les "petites" valeurs positives de h.

3.— Base des logarithmes ainsi construits

Quelques rappels (ou compléments) de cours :

C_1 Soit $\alpha \in]0,1[\cup]1,\infty[$.
On appelle fonction logarithme de base α et on note $\log_\alpha$
la fonction : $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{\ell\eta x}{\ell\eta\alpha}$$

C_1' Une telle fonction vérifie, pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*\,2}$ et $\beta \in \mathbb{R}$,
$\log_\alpha(x.y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$ et $\log_\alpha(x^\beta) = \beta \log_\alpha x$.

[** C_2 Si dans un voisinage de a, $f(x) > g(x) > h(x)$ et si $\lim_a f = \lim_a h = l$ alors $\lim_a g = l$

C_3 $\lim_{x\to 0} \frac{\ell\eta(1+x)}{x} = 1$ **]

Prouvons que la fonction LN définie par Neper est bien une fonction logarithme et cherchons son lien avec $\ell\eta$:

[*** Revenons encore au XX$^{\text{e}}$ siècle et utilisons les résultats du paragraphe 2.

Soit $y \in]0,+\infty[$, G sur $y'y$ tel que $y = GB$ et A la position du mobile sur $x'x$ au même instant t.

$LN\ y = LN(GB) = A_0A$	(11)
$= vt$	car le mouvement de A est uniforme de vitesse v.
D'autre part $GB = e^{-vt}$	(9)
donc $\ell\eta(GB) = -vt$	
d'où $vt = -\ell\eta(GB) = -\ell\eta y$.	***]

Conclusion : $LN\ y = -\ell\eta y$ et donc $LN\ y = \frac{\ell\eta y}{\ell\eta(1/e)}$ et d'après C_1 cela signifie que LN est la fonction logarithme de base $\frac{1}{e}$.

[** Trouvons la base de LN autrement :

Nous avons $\frac{1}{1-h} > \frac{LN\ (1-h)}{h} > 1$	d'après (16) en divisant par $h > 0$
Or $\lim_{h>0}^{h\to 0} \frac{1}{1-h} = 1$	
donc $\lim_{h>0}^{h\to 0} \frac{LN\ (1-h)}{h} = 1$	d'après C_2
Posons $x = -h$	
Nous avons alors $lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{LN\ (1+x)}{-x} = 1$	
donc $\lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{LN\ (1+x)}{x} = -1$	(17)

Appelons N la base de LN :	
$\frac{LN(1+x)}{x} = \frac{\ell\eta(1+x)}{\ell\eta N} \cdot \frac{1}{x}$	C_1
$= \frac{\ell\eta(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\ell\eta N}$	

$$\left.\begin{aligned} \text{Donc } \lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{LN(1+x)}{x} &= \lim_{x<0}^{x\to 0} \frac{\ell\eta(1+x)}{x}.\frac{1}{\ell\eta N} \\ &= \frac{1}{\ell\eta N} \\ \text{D'où } -1 &= \frac{1}{\ell\eta N} \\ \ell\eta N &= -1 \\ \text{Nous retrouvons donc ainsi } N &= \tfrac{1}{e} \quad **] \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &C_3 \\ &(17) \end{aligned}$$

4.— Les tables

Neper établit d'abord une table de logarithmes provisoire qu'il appelle "tables radicales".

Il y met des nombres de 0,5 à 1 avec un pas (variable) inférieur à 5.10^{-4}, et leur logarithme. Pour cela, il procède ainsi :

Il prend $A = 0,9995$ et $B = 0,99$ et en utilisant les propriétés C_1' (paragraphe 3), il constitue le tableau suivant, formé de 69 colonnes et 21 lignes :

1^e colonne		2^e colonne		3^e colonne		69^e colonne	
Nb	LN	**Nb**	LN	**Nb**	LN	**Nb**	LN
1	0	B	b	B^2	$2b$	B^{68}	$68b$
A	a	AB	$b+a$	AB^2	$2b+a$	$A.B^{68}$	$68b+a$
A^2	$2a$	A^2B	$b+2a$	A^2B^2	$2b+2a$	$A^2.B^{68}$	$68b+2a$
–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–
A^{20}	$20a$	$A^{20}B$	$b+20a$	$A^{20}.B^2$	$2b+20a$	$A^{20}.B^{68}$	$68b+20a$

Entre deux nombres consécutifs d'une colonne, le pas est inférieur à 5.10^{-4}.

[* Ces deux nombres sont de la forme B^pA^n et B^pA^{n+1} $(p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N})$

$$\left.\begin{aligned} \text{Posons } C = B^pA^n.\ \text{Alors } B^pA^n - B^pA^{n+1} &= C(1-A) \\ &= C.5.10^{-4} \\ \text{Or } 0 < C &< 1 \\ \\ \text{donc } 0 < B^pA^n - B^pA^{n+1} &< 5.10^{-4} \quad *] \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &\\ &\text{car } A = 0,9995 \\ &\text{car } 0 < A < 1 \\ &\text{et } 0 < B < 1 \\ & \end{aligned}$$

Entre le nombre situé à la fin d'une colonne et celui du début de la colonne suivante, le pas est inférieur à 5.10^{-4}.

[* Ces deux nombres sont $A^{20}B^p$ et B^{p+1} $(p \in \mathbb{N})$
Or $A^{20} \simeq 0,99005$ et $B < 0,99$
donc $0 < A^{20} - B < 5.10^{-4}$
donc $0 < B^pA^{20} - B^{p+1} < 5.10^{-4}$ car $0 < B^p < 1$ *]

La suite des nombres lus colonne après colonne de la 1ère à la 69ᵉ est décroissante.

[* Car $A < 1$ donc $B^pA^{n+1} < B^pA^n$ et nous avons vu plus haut que $B^{p+1} < B^pA^{20}$ *]

Cette suite de nombres commence par 1 et finit par $A^{20}B^{68} \simeq 0,4999 < 0,5$.

Pourquoi le choix de A et de B ?

Nous avons déjà vu plus haut que puisque A est voisin de 1, on modifie peu un nombre de la table en le multipliant par A.

B est un nombre tel que B soit proche de A^n pour un entier n "assez petit" : nous avons vu plus haut que c'est le cas pour $n = 20$. Mais surtout, il s'agit de faire beaucoup de calculs à la main, il faut donc qu'ils soient simples! Or, on multiplie un nombre par A en lui retranchant la moitié de son millième.

[* $C \times A = C \times (1 - 5.10^{-4}) = C \times (1 - \frac{1}{2000}) = C - \frac{C}{1000} \times \frac{1}{2}$ *]

Multiplier un nombre par B est encore plus simple, puisqu'il suffit de lui retrancher son centième.

[* $C \times B = C \times (1 - 10^{-2}) = C - \frac{C}{100}$ *]

Les calculs nécessaires pour remplir cette table sont maintenant assez simples lorsqu'on connaît a et b. Dans les colonnes "LN", ils se réduisent à des additions de a, et dans les colonnes "nombres", à des multiplications par A. Dans les lignes, il suffit de faire des additions de b et des multiplications par B.

Ces calculs auraient été confiés à des maîtres d'école.

Nous constatons que chaque colonne est indépendante des autres, et que de plus on peut vérifier les calculs des colonnes en les refaisant ligne par ligne. Les risques d'erreurs sont ainsi limités. La conception de ce tableau est donc trés ingénieuse.

Il nous reste à expliquer comment Neper a calculé a et b.

Pour cela, il calcule un logarithme fondamental, celui de $1 - 10^{-7}$ (nous poserons $\alpha = 1 - 10^{-7}$).

Puis il calcule une première table, celle des puissances de α jusqu'à α^{100}, dont il déduit $LN(1 - 10^{-5})$ (nous poserons $\beta = 1 - 10^{-5}$).

Il calcule enfin une deuxième table, celle des puissances de β jusqu'à β^{50}, dont il déduit $LN\ A$ c'est-à-dire a.

[* **Précisons** ses méthodes :

• Rappelons la relation (16) : $\frac{h}{1-h} > LN(1-h) > h$. La moyenne $\frac{1}{2}(h+\frac{h}{1-h})$ donne une bonne valeur approchée de $LN(1-h)$ lorsque h est petit. NEPER l'applique à $h = 10^{-7}$ et obtient ainsi $LN\alpha \simeq 1{,}000\ 000\ 050\ 000.10^{-7}$.

• Les calculs de la première table sont des multiplications par α, ce qui revient à retrancher à un nombre son quotient par 10^7. NEPER obtient ainsi $\alpha^{100} \simeq 0{,}9\ 999\ 900\ 000\ 495$, valeur que nous noterons X. Donc $100.LN\alpha \simeq LN\ X$.

Par ailleurs $\alpha^{101} = \alpha^{100}(1 - 10^{-7}) \simeq X - 0{,}999\ 990.10^{-7}$ que nous noterons X'. Donc $101.LN\alpha \simeq LN\ X'$.

Par interpolation linéaire (méthode que nous expliquerons à la fin de ce paragraphe), on obtient :

$$LN(0{,}99\ 999) = LN\beta \simeq 100{,}000\ 495\ 000.LN\alpha.$$

D'où $LN\beta \simeq 100{,}000\ 500\ 000.10^{-7}$.
(Remarque : on aurait pu calculer $LN\beta$ avec la relation (16), mais l'incertitude sur le résultat aurait été trop grande pour pouvoir baser tout le travail suivant sur ce nombre).

• Les calculs de la deuxième table sont des multiplications par β, ce qui revient à retrancher à un nombre son quotient par 10^5. NEPER obtient ainsi $\beta^{50} \simeq 0{,}9\ 995\ 001\ 222\ \mathbf{927}$ et introduit ici une erreur, puisqu'il devrait trouver $0{,}9\ 995\ 001\ 224\ \mathbf{804}$.

En faisant une interpolation linéaire et en utilisant $LN\beta$, on trouve alors $LN(0{,}9\ 995)$, c'est-à-dire a. *]

Neper trouve finalement $a \simeq 5\ 001{,}25.10^{-7}$, mais les décimales suivantes de son résultat sont fausses.

Avec cette valeur, NEPER remplit la première colonne de ses tables radicales avec la meilleure précision possible et en déduit b.

[* En effet, il a A^{20} et $LN(A^{20}) = 20.a$. Il calcule aussi A^{21} et $LN(A^{21}) = 21a$. Comme $A^{21} < 0{,}99 < A^{20}$, il en déduit $LN(0{,}99)$, c'est-à-dire b, par interpolation linéaire. *]

Finalement Neper obtient $b \simeq 100\ 503{,}4.10^{-7}$.

Maintenant, il ne reste plus qu'à remplir les autres colonnes des tables radicales.

A partir des tables radicales, Neper calcule ensuite les logarithmes des sinus des angles de 90° à 30°, avec un pas d'une minute d'angle. Il part pour cela d'une table de sinus (la construction d'une telle table est une autre histoire ...) et situe chaque sinus entre deux nombres des tables radicales. Pour trouver son logarithme, il fait une interpolation linéaire sur les logarithmes des deux nombres, c'est-à-dire qu'il calcule le logarithme du sinus en admettant qu'entre deux nombres consécutifs des tables, les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres (cette approximation est légitime puisque le pas des tables est très petit).

[* Précisons : supposons que dans la table suivante les lignes 1) et 3) figurent dans les tables radicales et que y soit compris entre x et z. On cherche Y :

	nombres	LN
1)	x	X
2)	y	$Y?$
3)	z	Z

Faire une interpolation linéaire consiste à supposer $\frac{x-y}{x-z} = \frac{X-Y}{X-Z}$, ce qui permet de calculer Y. *]

Pour les angles inférieurs à 30°, NEPER utilise les formules de trigonométrie.

[** $\sin(2.x°) = 2\sin(x°).\cos(x°)$
donc $\frac{1}{2}.\sin(2x°) = \sin(x°).\sin(90° - x°)$
d'où $LN(\sin(x°)) = LN(\frac{1}{2}) + LN(\sin(2.x°)) - LN(\sin(90° - x°))$.

A partir des valeurs déjà calculées, cette formule donne $LN(\sin(x°))$ pour $15 \leq x \leq 30$ (puisqu'alors $30 \leq 2x \leq 60$ et $60 \leq 90 - x \leq 75$). Puis avec les nouvelles valeurs on complète pour les angles de 7°30′ à 15°, et ainsi de suite on arrive jusqu'à un angle égal à 1′. **]

> Plus, et c'est là qu'intervient une nouvelle fonction de l'enseignant, les mathématiques peuvent devenir psychothérapiques. "*Il ne faut jamais oublier que jouer est une thérapie en soi. Faire le nécessaire pour que les enfants soient capables de jouer, c'est une psychothérapie qui a une application immédiate et universelle* ". Dans cette perspective, un enseignant de mathématiques ne fait pas qu'apprendre les mathématiques à ses élèves; il peut les aider à s'épanouir, à développer à la fois leur adaptation au réel et leur pouvoir créatif. Il existe par exemple un courant de propositions de "*problèmes ouverts* " où le but est d'inventer de multiples procédés d'études et de comparer les différents chemins suivis. Ce qui compte alors, c'est le pouvoir créatif de l'élève. Ce procédé stimule l'initiative, évite les démarches étroitement balisées, laisse place à l'erreur indispensable au progrès et peut déboucher parfois sur une production individuelle ou collective. Voilà à quoi peut servir une discipline comme les mathématiques.
>
> "Les maths, les français, les langues...
> à quoi ça me sert?
> (l'enseignant et la représentation de sa discipline)"
> Jacques NIMIER, Cédic, 1985

5.— Extrait des tables.

Voici un passage de la table des logarithmes de sinus obtenue, avec sa signification :

23°	Sinus	Logarithmes	Différences	Logarithmes	Sinus	66°
0′	3 907 311	9 397 354	8 569 026	828 328	9 205 049	60′
1	3 909 989	9 390 504	8 560 941	829 583	9 203 912	59
2	**3 912 666**	**9 383 660**	**8 552 861**	**830 799**	**9 202 774**	58
3	3 915 343	9 376 821	8 544 785	832 036	9 201 635	57
27						33
28	3 982 155	9 207 616	8 344 322	863 294	9 172 920	32
29	3 984 823	9 200 918	8 339 360	864 558	9 171 761	31
30	3 987 491	9 194 226	8 328 403	865 823	9 170 601	30

$\sin(23°2')$ $\times 10^7$

$LN(\sin(23°2'))$ $\times 10^7$

$LN(\tan(23°2'))$ $\times 10^7$ $= [LN(\sin(23°2')) - LN(\cos(23°2'))]$ $\times 10^7$

$LN(\sin(66°58'))$ $\times 10^7$

$\sin(66°58')$ ou $\cos(23°2')$ $\times 10^7$

Nous remarquons que dans la 1ère colonne les sinus sont croissants, alors que dans la 2e, les LN sont décroissants. Cette fonction LN est donc décroissante. Nous retrouvons ainsi que ce n'est pas $\ell\eta$. D'ailleurs, puisque les sinus sont dans $]0,1]$, les $\ell\eta$ seraient négatifs.

[* Nous pouvons encore retrouver la base N de la fonction LN :

$$LN \sin 23° = \frac{\ell\eta \sin 23°}{\ell\eta N} \text{ d'après } C_1$$

$$\text{donc } \ell\eta N = \frac{\ell\eta \sin 23°}{LN \sin 23°} \simeq -1$$

Nous pouvons en déduire $N \simeq \frac{1}{e}$. *]

En vérifiant à la calculatrice, nous constatons aussi que les derniers chiffres des logarithmes de la table ne sont pas exacts. NEPER lui-même a reconnu qu'il restait une erreur qu'il n'a pas pu localiser. Nous avons vu qu'il s'est trompé dans le calcul de β^{50}. Mais nous lui pardonnons cette petite inexactitude, car nous qui peinons pour effectuer une petite multiplication sans calculatrice, sommes bien obligés d'admirer une réalisation aussi ingénieuse!

Références

Histoires des logarithmes de Neper à Euler.— Charles NAUX (Paris, Librairie scientifique et technique A. Blanchard – (1966)

The historical development of the calculus (Chap. 6).— C.-H. EDWARDS, Jr. (New York, Springer Verlag (1979)

On trouvera aussi un T.P. autour du travail de NEPER dans Transmath Terminales A_1B, page 260, ou Terminales C.E., Tome 1, page 124 (le T.P. porte sur $\ell\eta$ et non LN).

MUMATH OU DERIVE?

Etienne MEYER vient de publier à l'IREM de Strasbourg un fascicule : "*Faire des maths avec Mumath*" (prix de vente : 40 F).
Enfin un manuel d'informatique qui insiste sur la didactique et la pédagogie. Après la présentation de **mumath** et de son langage de programmation **musimp**, l'auteur nous initie à la manipulation des différents fichiers (arithmétique, algèbre, équations linéaires, analyse) et multiplie les exemples de travaux pratiques réalisables et réalisés en classe de première ou de terminale :

- fractions continues;
- calcul de log 2;
- méthode de NEWTON;
- recherche de nombres premiers;
- systèmes d'équations linéaires;
- exemple de calcul intégral;
- comportement asymptotique d'une fonction.

Avec la puissance de calcul que l'on connaît (voir l'article d'E. MEYER dans '*L'Ouvert*' n° 43), mumath réalise des prouesses qui sidèrent élèves et professeurs.

Mais voilà qu'on annonce sur le marché le successeur de ce magnifique logiciel : **derive**, beaucoup plus interactif (mais plus de programmation possible), plus performant, autorisant les représentations graphiques en $2D$ ou $3D$ et de façon directe, le calcul approché. A quand **derive** (a mathematical assistant) sur une calculatrice de poche?

PROBLÈME 7

Énoncé

Soit une fonction de deux variables $f(x,y)$ telle que, pour tout $x, P_x(y) = f(x,y)$ est un polynôme en y et, pour tout y, $Q_y(x) = f(x,y)$ est un polynôme en x. Est-ce que f est un polynôme à deux variables?

Solution

Nous n'avons reçu que tardivement une solution de F. DOUÉ, solution qui est essentiellement la même que celle proposée ci-dessous :

Cas où les variables sont réelles (ou complexes, ou dans tout corps non dénombrable).

Il existe une partie infinie X de $\mathbb{R}$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $x \in X$, le degré de P_x est au plus k (en effet, $X_k = \{x \in \mathbb{R} : d^\circ P_x \leq k\}$ est une suite croissante, de réunion $\mathbb{R}$; si chaque X_k était fini, $\mathbb{R} = \cup_k X_k$ serait dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis).

Il existe donc $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0 : X \to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in X$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = a_k(x)y^k + a_{k-1}(x)y^{k-1} + \cdots + a_0(x)$.

Choisissons $k+1$ valeurs distinctes y_i de y. Puisque la matrice de VANDERMONDE $Y = (y_i^j)_{0\leq i,j\leq k}$ est inversible, et que pour $x \in X$ on a

$$Y \begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{y_0}(x) \\ \vdots \\ Q_{y_k}(x) \end{pmatrix},$$

on voit en inversant cette formule que chaque a_i est la restriction à X d'un polynôme b_i sur $\mathbb{R}$. Pour tout y, les polynômes $Q_y(x)$ et $\Sigma_{i=0}^k y^i b_i(x)$ sont égaux sur l'ensemble infini X, donc partout; et $f(x,y) = \Sigma_{i=0}^k y^i b_i(x)$ identiquement.

En revanche, dans $\mathbb{Q}$, la fonction

$$\begin{aligned} f(x,y) = &(x-r_1)(y-r_1) \\ &+ (x-r_1)(y-r_1)(x-r_2)(y-r_2) \\ &+ (x-r_1)(y-r_1)(x-r_2)(y-r_2)(x-r_3)(y-r_3) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

(où $(r_n)_{n\geq 1}$ est une énumération des rationnels) est séparément un polynôme en chaque variable, sans être un polynôme à deux variables (on ne peut lui assigner de degré).

PROBLÈME 8

Enoncé

Appelons reQtangle, tout rectangle dont le rapport des côtés est rationnel. Démontrer que tout rectangle pavé par des reQtangles est lui-même un reQtangle.

Indication

Lois des nœuds de KIRCHHOFF.

PROBLÈME 9

Enoncé

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(0,0) = 0$ et que $f(x,y)$ soit le plus petit entier qui ne soit pas de la forme $f(x',y)$ avec $x' < x$ ou $f(x,y')$ avec $y' < y$. Fournir une méthode de calcul de f aussi simple que possible.