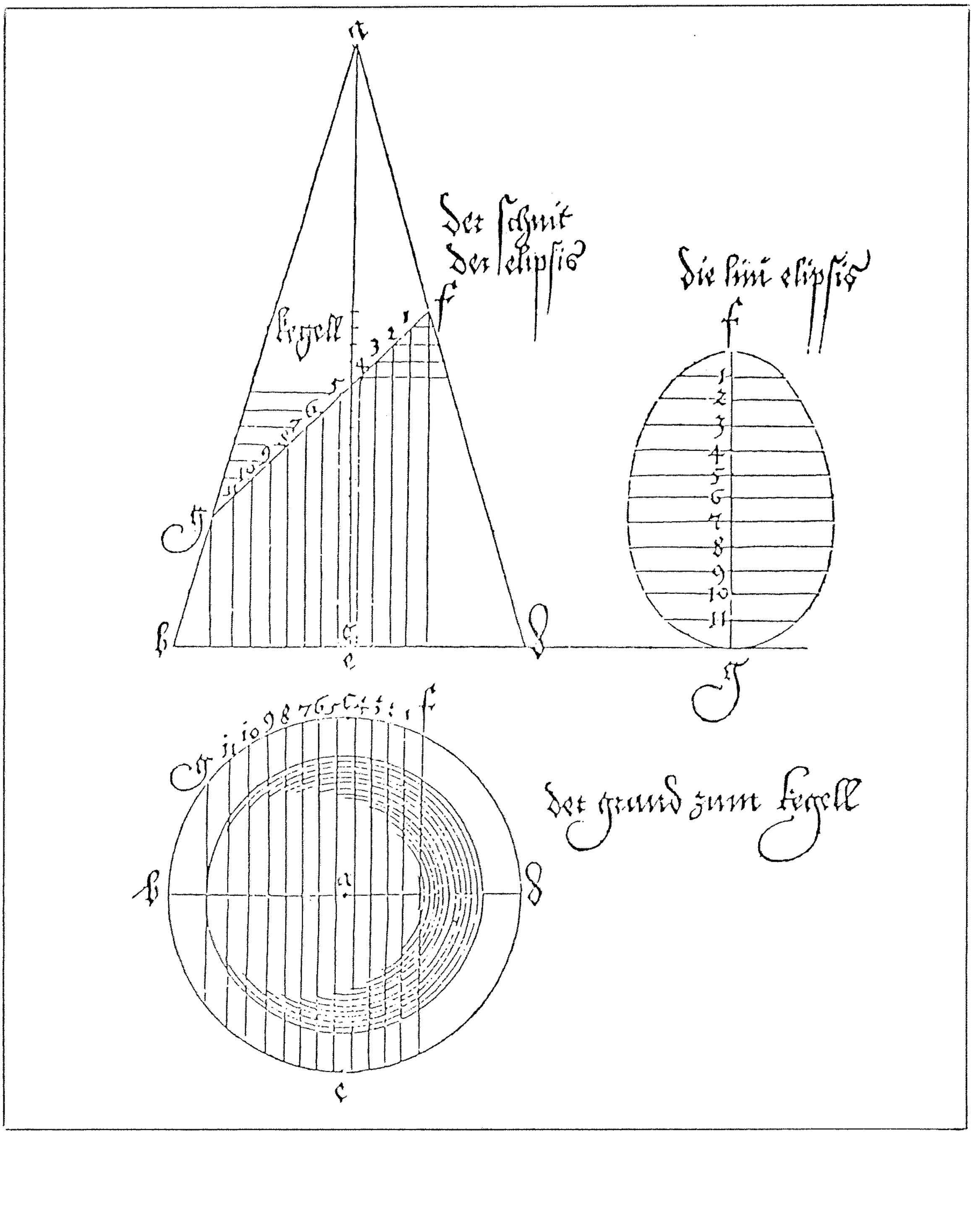
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 56 – SEPTEMBRE 1989 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

La géométrie descriptive existe dès le 16^e siècle comme en témoigne ce dessin de DÜRER d'*une section elliptique d'un cône de révolution* (voir l'article de H. SILVESTRE p. 29).

On notera toutefois que DÜRER a du mal à imaginer que les extrémités des grands axes de l'ellipse aient la même courbure puisqu'en f "*la courbure du cône est plus forte*" qu'en g, d'où la forme curieuse du rabattement dessiné à droite.

QUELLE HISTOIRE!

'*L'Ouvert*' n'a pas sacrifié au bicentenaire et ce numéro est ordinaire. On y trouve cependant beaucoup d'histoire et peu de mathématiques mathématisantes : Roger ISS nous conte l'histoire de sa recherche, des tas de sable à la triangulation des polygônes; Henri SILVESTRE nous parle d'Histoire avec un grand H en nous situant Gaspard MONGE et son œuvre à l'époque de la Révolution; MA KING-TCHONG nous parle de mathématiques au ras de terre dans un pays en voie de développement, ici la Chine; c'est presque de la didactique.

Heureusement qu'un intermède fort à propos nous oblige à un peu de mathématiques (sur les fractions continues et les séries de FAREY) pour mieux comprendre comment fabriquer un calendrier. Mais finalement un calendrier ça ne sert qu'à se repérer dans l'histoire!

Ceux qui regrettent ce contenu peu mathématique pourront se rattraper en s'attaquant aux problèmes de '*L'Ouvert*' qui ne sont, qu'ils se rassurent, pas des problèmes ouverts. A vos stylos, '*L'Ouvert*' attend vos solutions.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 56 – 1989

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT

◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)

◇ *Prix du numéro* : 25.– F

DES TAS DE SABLE AUX GRAPHES

(ou les étonnements d'un amateur de géométrie)

Roger Iss

J'avais proposé à Jean LEFORT un article faisant suite à ceux qu'il avait bien voulu passer dans '*L'Ouvert*' (n° 41, 42 et 51). Mais notre rédacteur en chef a dû le trouver ennuyeux (point de vue que je partage, après relecture) et m'a demandé d'exposer, plutôt, la démarche qui m'a conduit, à partir des tas de sable, à des considérations bien éloignées de ceux-ci. Aussi, bien qu'il soit assez gênant de parler de soi (les mathématiciens, même amateurs, sont plutôt modestes et répugnent à exposer leurs états d'âme), je vous convie à refaire, avec moi, un parcours un peu insolite, mais, rassurez-vous, très élémentaire.

1.— LES POLYÈDRES TAS DE SABLE

Quand on accumule du sable fin et sec sur une plaque plane horizontale et surélevée (pour que le sable excédentaire puisse s'écouler librement), on obtient un tas de sable limité par une surface dont toutes les lignes de pente sont des droites également inclinées sur l'horizontale. Lorsque le contour de la plaque est un **polygone convexe** (1) de n côtés, le tas obtenu est un polyèdre qui a n faces (en plus de sa base), chacune passant par un des côtés du polygone et faisant toutes le même angle aigu avec le plan de celui-ci. Une base triangulaire donne, évidemment, un tétraèdre; avec une base à quatre (resp. cinq) côtés, on obtient un "toit à quatre (resp. cinq) pentes". Mais vous avez beau modifier la forme du quadrilatère ou du pentagone, vous obtenez toujours le même type de toit, présentant la même succession de faces à 3, 4 ou 5 côtés. Par contre, quand on passe à l'hexagone, c'est la surprise : on obtient trois types distincts de tas de sable, irréductibles l'un à l'autre. Bien sûr, on rencontre aussi des "cas limites" où certains sommets sont venus se confondre — le cas extrême étant celui de la pyramide. Mais on ne tarde pas à décréter ces cas "sans intérêt", et on décide de ne s'occuper, dorénavant, que des polyèdres dont chaque sommet est commun à trois faces et trois seulement.

Il vous prend alors l'envie de voir ce qui se passe quand le nombre des côtés de la plaque augmente... Vous abandonnez d'ailleurs vos tas de sable, pour vous contenter de les dessiner. En effet, chaque arête ou ligne de faîte d'un de ces tas, est l'intersection de deux faces de même pente. Elle se projette donc, orthogonalement sur le plan de base, suivant la **bissectrice** de l'angle formé par les côtés du polygone, traces de ces deux faces sur ce plan.

© L'OUVERT 56 (1989)

(1) Il est essentiel que le polygone soit convexe. Dans le cas contraire, chaque angle rentrant de la plaque engendre, sur le tas de sable, une portion de cône de révolution.

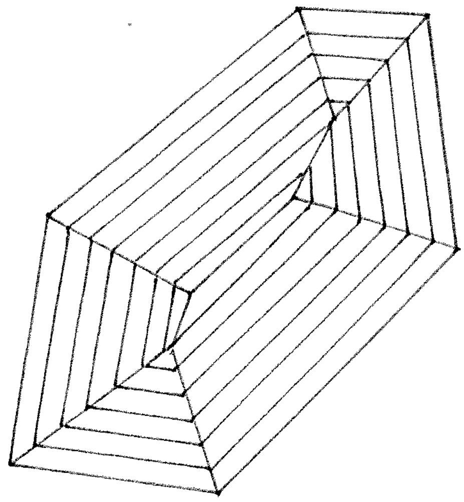


Figure 1

Leur dessin en projection est donc facile et on peut, de plus, utiliser, pour le tracé des bissectrices, les lignes de niveau du tas de sable : ce sont des parallèles équidistantes des côtés du polygone (fig. 1).
Mais l'imprécision augmentant avec le nombre de côtés, il est temps de passer de l'expérience à la théorie et, pour commencer, de se donner une définition mathématique de ces tas de sable. Parmi plusieurs définitions possibles, nous retiendrons celle-ci, bien qu'elle ne corresponde pas exactement à leur génération physique :

Un **polyèdre tas de sable** est un polyèdre convexe de l'espace euclidien dont une face, appelée base, a un côté commun et un seul avec chacune des autres faces et fait le même angle aigu avec chacune d'elles. On suppose, de plus, que tous les sommets du polyèdre sont communs à trois faces et trois seulement (on dira que ce sont des sommets **simples**).

Avec cette définition, on peut démontrer toutes les propriétés des tas de sable polyédraux. Mais nous n'allons pas en rester là, pour deux raisons :

D'abord parce qu'un bon mathématicien cherche toujours à généraliser une définition, donc à plonger l'ensemble des objets qu'il étudie, dans un ensemble plus vaste. Or, dans la définition ci-dessus, il y a des contraintes dont il semble facile de se libérer : l'égale inclinaison des faces en est une.

Ensuite, à force de dessiner des tas de sable, vous finissez par tracer, de manière de plus en plus approximative, les arêtes des polyèdres, censées être des bissectrices. Cependant, vous respectez les règles suivantes :
— une "bissectrice" passe par le sommet de l'angle qu'elle divise en deux;
— quand deux "bissectrices" se coupent, une troisième passe par leur point commun...

Vous vous apercevez, alors, que "ça marche" encore, c'est-à-dire que vos dessins représentent toujours, en projection, des solides de l'espace qui seraient des "tas de sable" où l'égalité des pentes ne serait plus respectée! Et chose curieuse, les propriétés des bissectrices sont devenues de simples propriétés des intersections de plans ...

2.— LES TECTOÈDRES

Il ne reste donc plus qu'à définir ces nouveaux polyèdres auxquels nous allons donner un nom, pour la commodité du langage :

On appelle **tectoèdre** (du latin "tectum" = toit), tout polyèdre convexe tel que :
1. Une de ses faces, appelée base, a un côté et un seul en commun avec chacune des autres faces;
2. Tous ses sommets sont simples.

Ces polyèdres ont, non seulement, toutes les propriétés des tas de sable (sauf, bien entendu, celles qui sont liées à l'inclinaison des faces), mais ils peuvent être étudiés indépendamment de ces derniers. On peut les matérialiser (de manière moins fragile que les tas de sable!), les construire en projection sur leur base, donc les développer ... Ils ont été étudiés sous le nom de "polyèdres T" dans un article de '*L'Ouvert*' [2] auquel je renvoie le lecteur intéressé.

Je ne rappellerai ici que les deux "découvertes" que l'on ne peut manquer de faire en manipulant ces tectoèdres, car elles vont se révéler capitales pour la suite.

a. La "formule" :

Ce n'est pas la forme exacte de ces polyèdres qui nous intéresse, mais la nature et la répartition de leurs faces. En marquant sur chacune de celles-ci le nombre de ses côtés et en lisant ces nombres dans l'ordre où ils se présentent quand on parcourt le polygone de base dans un certain sens, on obtient une suite d'entiers — par exemple 35344 pour l'ordre 5 (fig. 2).

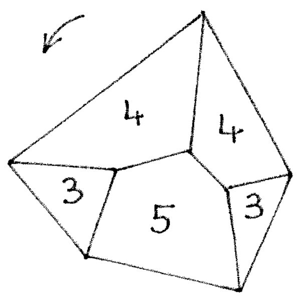


Figure 2

Evidemment, une telle suite, n'est pas unique : elle peut être commencée par n'importe quel terme (c'est un cycle) et lue dans n'importe quel sens (tout au moins, si on convient de ne pas faire de distinction entre un polyèdre et son "image-miroir"). Mais on peut en classer les différentes écritures, par ordre lexicographique, et n'en retenir que la "plus grande" (53443 pour l'ordre 5).

D'autre part, si, jusqu'à l'ordre 9, les termes de cette suite s'écrivent avec un seul chiffre, il n'en est plus de même à partir de 10 et la suite devient peu lisible. Si on diminue de trois unités tous les termes (ce qui donne 20110 pour l'ordre 5), on recule cet inconvéniant jusqu'à l'ordre 13. En passant ensuite en hexadécimal, on peut aller jusqu'à 18. Les nombres obtenus, après cette soustraction, ont encore un sens concret : chacun d'eux indique le nombre d'arêtes sommitales que comporte la face correspondante (0 pour le triangle, etc ...). On les appellera **indices** des faces et leur suite sera la **formule du tectoèdre**.

Désormais, nous ne ferons pas de différence entre deux tectoèdres de même formule. Nous établissons ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des tectoèdres, chaque classe étant caractérisée par une formule.

b. La "troncature triangulaire" :

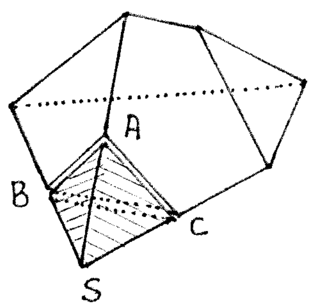


Figure 3

Si vous coupez une "pointe" d'un tectoèdre, en lui enlevant un tétraèdre $SABC$ (fig. 3), vous l'enrichissez d'une face triangulaire ABC qui vient s'intercaler entre deux faces dont le nombre de côtés augmente, de ce fait, d'une unité. Cette opération, que nous appellerons **troncature triangulaire**, permet donc, à partir d'un tectoèdre d'ordre n, d'en fabriquer un d'ordre $n+1$.
Inversement, supposons qu'un tectoèdre d'ordre n possède une face triangulaire ABC telle que les arêtes qui aboutissent en A, B et C se coupent en un point S **extérieur** au tectoèdre.

En lui rajoutant le tétraèdre $SABC$, on le transforme en un tectoèdre d'ordre $n-1$. Or, et c'est assez surprenant a priori, on constate (et on démontre) que tout tectoèdre possède au moins **deux** faces triangulaires et que, sur ces deux faces, il y en a au moins une qui a la propriété considérée ci-dessus (la seule exception est sans gravité : elle se produit pour l'ordre 4 — voir [2] page 7). Tout tectoèdre "descend" donc d'un tectoèdre d'ordre inférieur. La filiation ainsi découverte va donc nous permettre de déduire tous les tectoèdres du tectoèdre d'ordre 3, c'est-à-dire du tétraèdre!

Par ailleurs, cette troncature se traduit de façon très simple au niveau de la formule. Faire une troncature triangulaire c'est, en effet, insérer un zéro entre deux termes consécutifs de la formule et augmenter ces derniers d'une unité. Ainsi 1010 donne 20110 dans le sens descendant et 000 dans le sens ascendant.

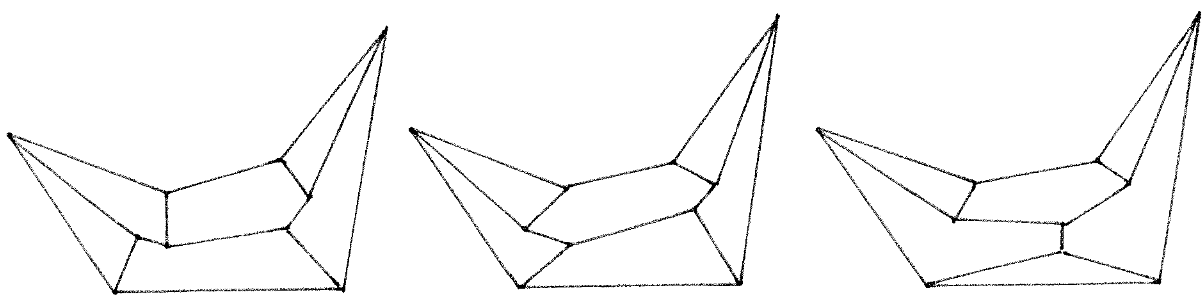
Ayant ainsi "mathématisé" notre problème, nous pouvons ranger notre matériel : il nous suffit désormais de travailler sur les "formules".

On peut ainsi établir que tous les tectoèdres d'un ordre donné n ont tous $(2n-2)$ sommets et $(3n-3)$ arêtes (y compris les sommets et arêtes de la base). La somme des entiers qui figurent dans la formule est alors une constante — pour n donné — et vaut $(2n-6)$.

3. TECTOEDRES A BASE CONCAVE

Cette première généralisation des tas de sable ayant réussi, il est tentant d'échapper à une autre restriction : la condition de convexité. En d'autres termes, existe-t-il des tectoèdres à base concave? Oui. Il y a d'abord ceux que l'on obtient, par analogie avec les polyèdres tas de sable, en menant, par les côtés de la base, des plans faisant le même angle aigu avec le plan de celle-ci. Ce sont des "pseudo-tas de sable", car on ne peut plus les réaliser physiquement avec du sable. Malheureusement, un de nos raisonnements-clés ne s'applique plus. Si on peut toujours tronquer un tectoèdre non convexe, en revanche l'opération inverse n'est généralement plus possible : un tectoèdre non convexe n'est pas toujours "descendant" d'un homologue d'ordre inférieur (c'est le cas des deux premiers polyèdres de la figure ci-dessous). Dans ces conditions, on ne sait pas s'il y a des tectoèdres à base concave correspondant à chacune de nos classes d'équivalence ...

En fait, s'il y a de "bons" polygones concaves pour lesquels tout se passe comme pour les convexes (fig. 4), l'ensemble des polygones concaves apparaît comme un univers inexploré, peuplé de "monstres" — tordus, spiralés ou tentaculaires — auprès desquels les convexes paraissent d'une étonnante simplicité! Retirons-nous donc, à pas feutrés, de ce monde où il faudrait sans doute, revenir avec d'autres moyens.



210210 301110 202020

Figure 4

4. DUALITÉ

Jusqu'à présent, nous avons surtout fait appel à l'expérience et à l'intuition. Il serait peut-être temps d'utiliser des grands procédés, classiques dans l'étude des polyèdres, comme, par exemple, la transformation par **dualité**.

Prenez le dessin d'un tectoèdre de n côtés, mettez un point dans chaque face et reliez par un segment deux de ces points, chaque fois que les faces correspondantes ont un côté commun (fig. 5).

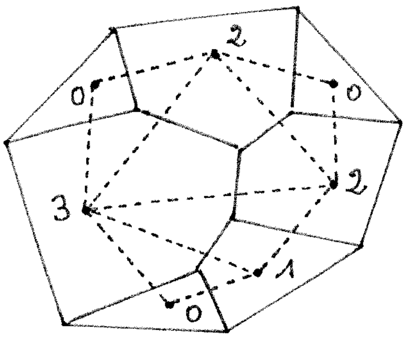


Figure 5

Le résultat obtenu est assez étonnant : le dessin est celui d'un polygone de n côtés que $(n-3)$ diagonales partagent en $(n-2)$ triangles (2).
Autrement dit, avec nos tectoèdres, nous pensions faire de la géométrie à trois dimensions, et, en fin de compte, notre problème se révèle "isomorphe" à un problème de combinatoire à deux dimensions, celui de la **triangulation des polygones** ou encore, d'association de triangles (similaire au problème bien connu des pentaminos, qui est un problème d'association de carrés ou de quadrilatères).

Tout ce qui a été démontré sur les tectoèdres se démontre donc directement — parfois plus simplement — sur les triangulations. Ainsi, notre "formule" s'adapte parfaitement à la nouvelle situation : l'indice d'une face, devenu l'indice d'un sommet du polygone, représente le nombre de diagonales qui en sont issues.

Il est facile de construire la triangulation correspondant à une formule donnée. C'est presque un petit jeu. Dessiner le polygone à trianguler et marquer chaque sommet de son indice, lu dans la formule. Pour chaque sommet d'indice 0, tracer la diagonale qui joint les deux sommets adjacents et enlever une unité à l'indice de ces derniers. Recommencer ensuite l'opération sur la partie non encore triangulée du polygone ...Vous trouverez le tectoèdre correspondant par dualité. Faites un essai avec l'octogone et le décagone de formules respectives 31 022 020 et 4 103 103 110 ...

(2)

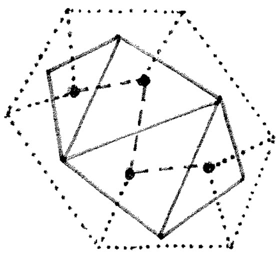
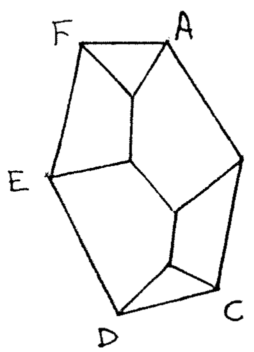


Figure 6

En effectuant la même opération sur la figure duale, on doit, théoriquement, retrouver le schéma initial. Ici, parce que dans la construction indiquée il n'a pas été tenu compte de la base du tectoèdre, on n'obtient que les sommets et les arêtes sommitales de celui-ci. Il reste donc à tracer les arêtes latérales, une par côté du polygone (fig. 6), pour retrouver le dessin schématique du tectoèdre, que l'on peut ensuite "construire" effectivement (voir [2], p. 5).

5. GRAPHES

Depuis EULER, on sait associer à un polyèdre, un graphe (3) appelé **squelette** du polyèdre. Les sommets (ou nœuds), les arêtes du graphe correspondent, respectivement, aux sommets et arêtes du polyèdre (la similitude de vocabulaire n'étant pas une simple coïncidence). Dans ces conditions, notre problème se formule aussi en langage de la théorie des graphes et toute la géométrie que nous avons pu faire n'était qu'un habillage inutile (mais sans doute commode)!



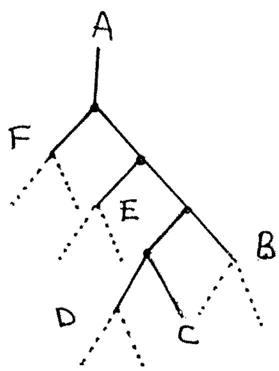


Figure 7

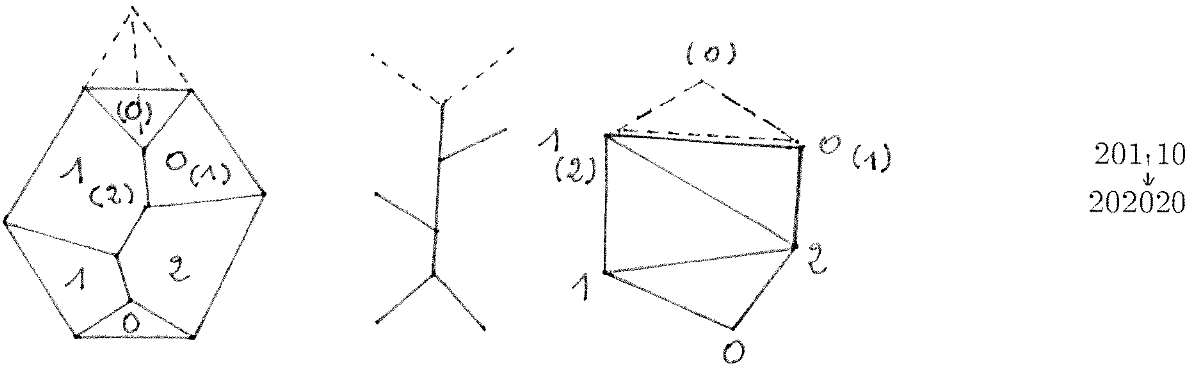
Sans entrer trop loin dans la théorie des graphes, remarquons simplement que, si, dans le dessin d'un tectoèdre, on supprime le polygone de base (fig. 7), il reste la représentation d'un **arbre binaire** (pour lequel n'importe quelle arête latérale peut servir de "tronc"), sous-graphe de l'arbre binaire illimité.

Etudier les tectoèdres, c'est donc aussi étudier les sous-graphes de l'arbre binaire qui comportent $(n-2)$ nœuds et n rameaux libres issus de ceux-ci.
A toute solution de ce problème de graphe, correspond donc une classe de tectoèdres. Or, rien ne nous empêche de "représenter" ce graphe à partir d'un polygone concave. Il y aurait donc autant de tectoèdres concaves que de convexes! Seulement, ce type de représentation ne garantit plus que des arêtes ne se coupent pas en dehors de leurs extrémités et nos tectoèdres risquent d'avoir des faces polygonales croisées. Peut-on encore parler de "polyèdres" dans ce cas?

Faisons le point. Partis des tas de sable, nous voici, maintenant, en possession de plusieurs ensembles isomorphes : les tectoèdres, les polygones triangulés, les arbres binaires, les formules (4) ... Nous disposons ainsi d'un matériel fort intéressant pour une étude ultérieure, car, bien que tout ce que l'on peut dire à propos de l'un de ces ensembles, soit valable pour les autres (par exemple la troncature, comme l'illustre la figure 8), il est évident que, suivant les cas, l'un ou l'autre de

(3) Un **graphe** (non orienté) est la donnée de deux ensembles S et A, finis ou dénombrables (dont les éléments sont appelés respectivement **sommets** et **arêtes**) et d'une application de A dans l'ensemble des paires d'éléments de S qui, à chaque arête, fait correspondre deux sommets qui sont ses **extrémités**. Une **représentation** d'un graphe est un "dessin" où les sommets sont des points et les arêtes des arcs joignant ces points.
(4) On peut en imaginer d'autres ... Par exemple, si dans les dessins de tectoèdres, vous renoncez aux alignements qui en font des projections de solides de l'espace, il vous reste un **"pavage"** du polygone de base par des pavés polygonaux. L'ensemble de ces pavages — tout au moins pour les convexes — est isomorphe aux ensembles cités ci-dessus.

ces ensembles sera plus facile ou, simplement, plus agréable à manipuler que les autres.



Tectoèdre Graphe Polygone triangulé Formule

Figure 8

5. RECHERCHE DES FORMULES

Le problème que l'on se pose normalement maintenant est le suivant : rechercher les formules qui correspondent à un ordre donné, ou, à défaut, les dénombrer.

Comme on l'a déjà vu [2], la récurrence par "troncature" donne bien les formules d'ordre n à partir de celles d'ordre $(n-1)$, mais elle les donne avec répétitions et cela d'une manière (apparemment) imprévisible, certaines formules étant obtenues plusieurs fois, d'autres une seule. Pour $n = 8$, par exemple, les quatre formules de l'ordre 7 ont 28 descendants, parmi lesquels 12 seulement sont distincts; pour $n = 9$, il y aura donc 8×12 formules à trier ... Ce tri devient fastidieux et précaire quand on le fait à la main. Mais c'est un travail pour lequel un ordinateur est tout désigné. En ce qui me concerne, j'ai d'abord utilisé un petit "micro", avec des programmes rédigés dans un Basic sans doute rudimentaire : ce pauvre ordinateur a mis plus d'une semaine pour me calculer les 733 formules de l'ordre 12. Naturellement, il m'a fallu changer d'ordinateur et de langage de programmation. Avec un PC et un programme écrit en Turbo-Pascal, j'ai obtenu le même résultat en ... 10 minutes!

En fait, en passant de l'ordre n à l'ordre $(n+1)$, les temps de calcul se trouvent multipliés par un coefficient voisin de 5, si bien que même un gros ordinateur atteint rapidement ses limites. Pour aller plus loin, il faut trouver de nouveaux algorithmes (ce qui vous donne des idées pour le raisonnement pur) et améliorer vos programmes (donc perfectionner vos capacités en informatique). A part cela, allez-vous sans doute me dire, quel intérêt y a-t-il à connaître les formules des tectoèdres à 20 faces et plus? C'est une bonne question que je laisserai sans réponse ...

Voici le nombre Tn des formules d'ordre n, calculées par ordinateur (lequel peut vous donner, pour le même prix, leur répartition par nombre de zéros) jusqu'à l'ordre 17 :

n	Tn	n	Tn	n	Tn
3	1	8	12	13	2 282
4	1	9	27	14	7 528
5	1	10	82	15	24 834
6	3	11	228	16	83 898
7	4	12	733	17	285 357

Puisqu'il n'est pas possible d'aller beaucoup plus loin, il ne reste plus qu'une solution : trouver un moyen de calculer le nombre Tn sans déterminer les formules correspondantes ... Travail décevant, car, ou bien vos recherches sont vaines, ou bien, quand elles aboutissent, le résultat vous paraît tellement simple et "évident" que vous vous dites : si j'étais plus intelligent, j'aurais trouvé cela depuis longtemps! Mais, à force de "gratter" vous arrivez à faire quelques brèches et vous avez finalement le plaisir de voir la forteresse s'effondrer, par pans entiers. Comme un amateur de mots croisés qui remplit une grille difficile.

6. DÉNOMBREMENT DES TECTOÈDRES

a. Un cas particulier

La première idée qui vient à l'esprit est de dénombrer les formules qui ont un nombre donné de zéros. Ainsi, pour deux zéros, le calcul est facile en faisant appel au graphe. Celui-ci peut se représenter (fig. 9) en alignant les arêtes sommitales, ce qui donne une espèce d'"arête de poisson" à deux queues (les faces triangulaires). Un tel graphe est appelé **"chenille"** (caterpillar) par les anglo-saxons.

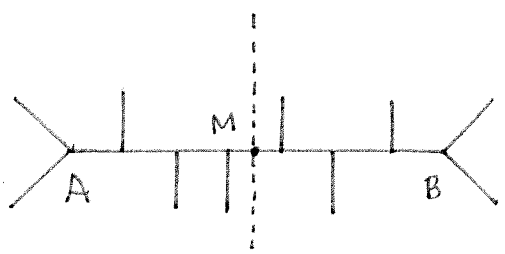


Figure 9

Associons à ce graphe le nombre binaire de $(n-4)$ chiffres obtenu en notant 0 pour une arête latérale dirigée vers le haut et 1 pour une arête dirigée vers le bas. Ainsi le binaire correspondant à la figure ci-contre est 011010.

Mais, d'après nos conventions sur la formule, deux chenilles qui se correspondent par symétrie par rapport au milieu M de AB ou par rapport à la médiatrice de AB, ne sont pas considérées comme distinctes. Sur les 2^{n-4} binaires, ceux qui admettent un axe de symétrie (la formule correspondante est aussi symétrique, tout au moins à une permutation circulaire près) ou un centre de symétrie (la formule correspondante est périodique de période $n/2$) sont donc comptés deux fois et tous les autres quatre fois. On trouve ainsi que le nombre de formules à deux zéros, est, à l'ordre n :

$$\left(2^{n-6} + 2^{E(\frac{n-6}{2})}\right).$$

Le procédé s'étend — péniblement — aux formules à trois zéros, mais semble devenir impraticable au-delà, et aucune récurrence ne se profile à l'horizon ... Il faut changer de méthode. Mais nous aurons au moins appris que les difficultés provenaient des éléments comportant une symétrie ou une périodicité.

Commençons par les formules que nous dirons "symétriques" (les cycles qu'elles représentent se lisent dans les deux sens, ce sont des palindromes). Il est évident que, si dans une telle formule, on supprime (ou rajoute) deux zéros symétriques, on obtient encore une formule symétrique. Elles descendent donc toutes, par double troncature, des formules 1010 (filière paire) ou 20110 (filière impaire). Votre ordinateur, que vous lancez sur cette nouvelle piste, vous montrera que
1. le nombre des symétriques d'ordre $(2n+1)$ est le même que celui des symétriques d'ordre $2n$;
2. la suite des nombres S_{2n+1} de ces formules est

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430\ldots$$

C'est une suite que l'on peut avoir rencontré quelque part : ce sont les nombres de CATALAN (5) ...

Si vous ne connaissez pas les nombres de CATALAN, n'en faites pas un complexe ! Je les connais moi-même depuis peu seulement. Ils interviennent dans beaucoup de problèmes de combinatoire. CATALAN les a obtenus à propos du problème suivant :

Etant donné un ensemble E muni d'une loi de composition **non associative**, quel est le nombre de composés distincts que l'on peut former avec n éléments de E, pris dans un ordre donné ?

Par exemple, avec quatre éléments a, b, c, d on peut former les 5 "produits" distincts suivants : $[a(bc)]d, [(ab)c]d, a[b(cd)], a[(bc)d]$ et $(ab)(cd)$.

Le nombre C_n de ces composées est

$$C_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Voilà une découverte encourageante, même si elle ne nous avance pas beaucoup !

b. Les symétriques d'ordre impair :

Examinons d'un peu plus près le cas des symétriques d'ordre impair : la confrontation de deux manières de les générer va, en effet, nous donner les clefs du calcul.

(5) Eugène CATALAN, mathématicien belge (1814 - 1894).

Il est intéressant d'utiliser, pour cela, des polygones triangulés **réguliers**, car la symétrie de la formule se traduit alors par une symétrie géométrique.

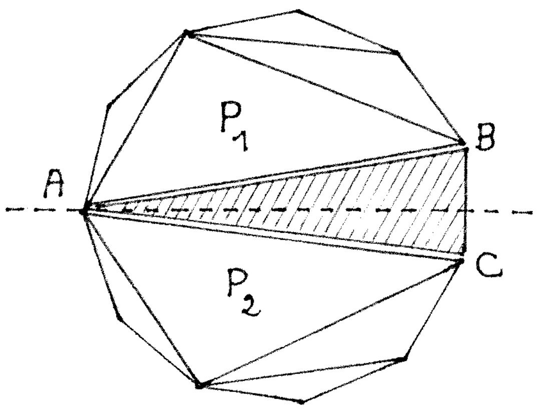


Figure 10

Soit donc un polygone P, triangulé, régulier, de $(2n+1)$ côtés, de formule symétrique. Il admet un axe de symétrie passant par un de ses sommets A et par le milieu du côté opposé BC (fig. 10). Comme une diagonale de la triangulation ne peut pas couper l'axe de symétrie, le polygone P est constitué par le triangle ABC "coincé" entre deux polygones P_1 et P_2 d'ordre $(n+1)$, symétriques l'un de l'autre.

On voit ainsi
— qu'il y a autant de symétriques d'ordre $(2n+1)$ que de manières distinctes de "placer", sur le côtés AB, un polygone P_1 triangulé d'ordre $(n+1)$;
— que les sommets d'indice 0, étant ceux de P_1 et P_2, sont en nombre pair.

Supposons de plus que le polygone P_1 soit lui-même d'ordre impair (donc que n soit pair, $n = 2p$) et que le nombre de ses sommets d'indice 0 soit égal à p (c'est le maximum possible). Chaque côté de P_1, autre que AB (fig. 11), est alors côté d'un triangle "bordant" dont les sommets sont trois sommets consécutifs du polygone.

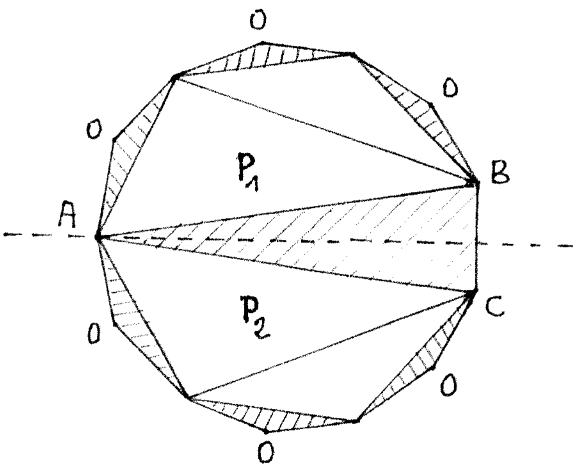


Figure 11

Si nous supprimons ces p triangles bordants dans P_1, ainsi que leurs homologues dans P_2, il nous reste un polygone d'ordre $(2p+1)$, triangulé et toujours symétrique. Comme inversement on peut rajouter des triangles bordants à un tel polygone, nous en déduisons que *le nombre des symétriques d'ordre* $(2p+1)$ *est égal au nombre des symétriques d'ordre* $2n+1 = 4p+1$ *ayant* $2p$ *zéros.*

Naturellement, vous aviez déjà découvert cette propriété en examinant les listes de nombres fournies par votre ordinateur ...

Cela nous incite à déterminer le nombre de symétriques d'ordre $(2n+1)$ ayant un nombre donné de zéros. Pour cela, revenons à nos formules. Celles qui ont $2k$ zéros peuvent s'obtenir, en effectuant deux troncatures symétriquement,
— d'abord sur les formules symétriques d'ordre $(2n-1)$ à $2k$ zéros, en intercalant les nouveaux zéros à côté des zéros existants (car cela ne modidie pas leur nombre).

Il y a $2k$ manières de le faire;
— ensuite sur les formules symétriques d'ordre $(2n-1)$ à $(2k-2)$ zéros, en intercalant les nouveaux zéros entre deux termes non nuls de la formule (ce qui augmente le nombre de zéros de deux unités). Il y a $(n-1)-(2k-2)=n-2k+1$ places possibles pour ces zéros.

En observant que chaque formule est ainsi obtenue k fois (elle admet un "ascendant" pour chaque couple de zéros symétriques) et en notant $S_{2n+1}(2k)$ le nombre de symétriques d'ordre $(2n+1)$ ayant $2k$ zéros, on obtient la relation

$$k\ S_{2n+1}(2k)=2k\ S_{2n-1}(2k)+(n-2k+1)S_{2n-1}(2k-2).$$

Comme $S_{2n+1}(2)$ a été calculé à propos des chenilles et vaut 2^{n-2}, on en déduit, par récurrence, la formule

$$S_{2n+1}(2k)=2^{n-2k}\frac{(n-2)(n-3)\dots(n-2k+1)}{k!(k-1)!}.$$

Il ne reste plus qu'à écrire cette relation à l'ordre $4n+1$ et pour $k=n$, pour en déduire S_{2n+1}, nombre total de symétriques d'ordre $2n+1$.

On trouve bien entendu, le résultat prévu :

$$S_{2n+1}=C_n=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

Comme

$$S_{2n+1}=\Sigma_{k=1}^{E(\frac{n}{2})}S_{2n+1}(2k)$$

on obtient, par la même occasion la formule sommatoire

$$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!(n-2)!}=\Sigma_{k=1}^{E(\frac{n}{2})}\frac{2^{n-2k}}{k!(k-1)!(n-2k)!}.$$

Evidemment, va-t-on me dire, à quoi peut bien servir cette belle formule? Mais strictement à rien : c'est simplement une œuvre d'art!

Je vous ferai grâce du calcul analogue pour les symétriques d'ordre pair, calcul qui confirme le fait que $S_{2n}=S_{2n+1}=C_n$.

c. Les formules périodiques

Il nous reste à nous occuper des formules périodiques et cela nous vaudra la dernière surprise de cette étude ...

Considérons une formule périodique d'ordre n. La "longueur" p de la période est un diviseur de n et le quotient $n/p=f$ est un entier que nous appellerons fréquence. Par exemple, la formule 202020 de l'ordre 6 est périodique de fréquence 3. Or, on sait que la somme des termes d'une formule d'ordre n est $2n - 6$. La somme des termes d'une période est donc

$$\frac{2n-6}{f} = 2p - \frac{6}{f}.$$

La fréquence est donc un diviseur de 6 et ne peut prendre que les valeurs 2, 3 et 6! Or, si dans une formule périodique d'ordre $n = pf$, on supprime f zéros homologues, on obtient une formule d'ordre $(p-1)f$ qui est encore périodique. La réciproque étant vraie, toutes les formules périodiques de fréquence f descendent donc d'une formule périodique d'ordre $2f$. Pour $f = 2$ et $f = 3$, cette formule existe : 1010 et 202020. Par contre, pour $f = 6$, la formule, qui devrait être 303030303030 n'a pas de sens (elle descendrait de 111111).

Les seules fréquences sont donc 2 et 3.. En langage géométrique, cela signifie que les seules symétries possibles pour un polygone régulier triangulé sont : une symétrie centrale, une symétrie ternaire (invariance par rotation de $2\pi/3$) — ces deux symétries étant incompatibles entre elles, mais cumulables avec une symétrie axiale. Ce résultat paraît tout à fait étonnant : a priori, la fréquence pouvait être n'importe quel diviseur de n! Il est aussi rassurant : on sait désormais que le nombre de cas à examiner ne dépassera pas 6.

Les procédés ayant réussi avec les formules symétriques s'appliquent aux formules périodiques et leur nombre s'exprime aussi à l'aide des nombres de CATALAN (6).

d. Le calcul final

Nous avons vu, ci-dessus (en 6,b), qu'il y a autant de symétriques d'ordre $(2n-1)$ que de manières distinctes de "poser", sur un de ses côtés, un polygone triangulé d'ordre n. Nous pouvons maintenant dénombrer ces différentes positions en distinguant les cas suivants : le polygone est symétrique (sans être périodique), périodique (sans être symétrique), périodique et symétrique, et enfin, sans aucune particularité (voir le détail du calcul en annexe) ... Comme le nombre de ces polygones "sans particularité" s'obtient par différence entre le nombre total T_n de formules et le nombre de polygones "particuliers" que l'on vient de calculer, on arrive à une formule d'où l'on peut, finalement, tirer le nombre T_n. Ce dernier s'exprime, à l'aide des nombres de CATALAN, par la relation :

$$T_n = \frac{1}{2n}C_{n-1} + \frac{3}{4}C_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}C_{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{3}C_{\frac{n}{3}}$$

(6) On trouve, on notant $P_n(f)$ le nombre des formules périodiques de fréquence f et $PS_n(f)$ le nombre de celles qui sont, à la fois, périodiques et symétriques ($f = 2$ ou 3) :

$$P_n(f) = \frac{1}{2}[C_{\frac{n}{f}} + C_{\frac{n}{2f}}] \qquad PS_n(f) = C_{\frac{n}{2f}}$$

avec la convention $C_i = 0$ lorsque l'indice i n'est pas un entier.

(avec la convention : $C_i = 0$ lorsque i n'est pas un entier). Si on l'explicite, cela donne

$$T_n = \frac{(2n-5)!}{n!(n-3)!} + \frac{3(n-3)!}{2(\frac{n}{2})!(\frac{n-4}{2})!} + \frac{1}{2}\frac{(n-3)!}{(\frac{n-1}{2})!(\frac{n-3}{2})!} + \frac{1}{3}\frac{(\frac{2n}{3}-2)!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n-3}{3})!}$$

en convenant de considérer comme nul tout terme contenant une factorielle non entière (sinon il faudrait donner six expressions distinctes). Notons que, si T_n est bien un entier, curieusement, les termes, dont il est la somme, ne sont pas nécessairement des entiers ...

Si j'avais trouvé ce résultat, il y a trente ans (le problème du dénombrement des triangulations a été résolu pour la première fois en 1960 (7)), cela aurait peut-être justifié une communication à l'Académie des Sciences! Mais, à cette époque-là, je ne m'intéressais pas encore aux tas de sable ... Aussi, aujourd'hui, je ne suis pas plus avancé que l'amateur de mots croisés déjà cité. Seulement, il ne viendrait pas à l'idée d'un cruciverbiste de raconter comment il a rempli sa grille. Pourquoi alors l'ai-je fait? D'abord, parce qu'il s'agit quand même de mathématiques ... Ensuite, parce que je pense que le cheminement que vous avez bien voulu faire avec moi, est accessible à des élèves (hormis, bien entendu, le dénombrement final). Cette occasion de faire des mathématiques expérimentales, sortant de l'ordinaire et conduisant à des résultats non scolaires, méritait bien d'être signalée ...

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Iss – "*Sable et mathématique*" – '*L'Ouvert*' n° 41 (déc. 1985) et n° 42 (mars 1986).

[2] R. Iss – "*Considérations sur une famille de polyèdres*" – '*L'Ouvert*' n° 51 (juin 1988).

[3] F. Harary et E.-M. Palmer – "*Graphical enumeration*" – New York, Academic Press (1973).

[4] R.-K. Guy – "*Dissecting a polygon into triangles*" – Univ. of Calgary, Research Report (1960).

[5] J.-W. Moon et L. Moser – "*Triangular dissections of n-gons*" – Canad. Math. Bull. 6 (1963).

ANNEXE

Pour chaque polygone triangulé P_1, on détermine le nombre de manières distinctes de le "placer" sur le côté AB (fig. 10). Cela revient, en supposant le polygone régulier, à déterminer le nombre de figures différentes que l'on obtient en orientant un de ses côtés (par exemple, pour le carré, ce nombre est 2 (fig. 12)). Il nous faut distinguer quatre catégories de situations :

(7) Le problème a été résolu en 1960 par R. Guy, puis en 1963 par J. Moon et L. Moser. Je ne connais pas les solutions de ces auteurs, n'ayant pu consulter leurs publications. Je connais, par contre, une autre solution proposée en 1973, par F. Harary et E. Palmer. Elle utilise un théorème savant de George Pólya et consiste à déterminer une "fonction génératrice" telle que les coefficients de son développement en série entière soient justement les nombres T_n.

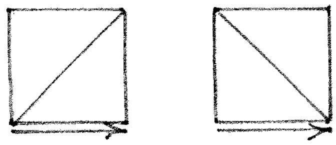


Figure 12

1. **P1 est sans particularité** : chacun de ses côtés joue un rôle différent et peut être placé de deux façons sur AB : il y a $2n$ possibilités.

2. **P1 est symétrique sans être périodique** : Si n est pair, on n'utilise que la moitié des côtés, mais chacun deux fois : il y a n possibilités.

Si n est impair et $n = 2p+1$, il y a p côtés ayant un symétrique et qui sont utilisés deux fois; par contre le côté, dont l'axe de symétrie est médiatrice, est utilisé une seule fois. Il y a encore $2p+1 = n$ possibilités.

3. **P1 est périodique sans être symétrique** : On utilise seulement les côtés relatifs à une période, mais chacun deux fois. Si la fréquence est f, il y a $2n/f$ possibilités, soit n pour la fréquence 2 et $2n/3$ pour la fréquence 3.

4. **P1 est périodique et symétrique simultanément** : On utilise seulement la moitié d'une période, mais deux fois; il y a respectivement $n/2$ et $n/3$ possibilités.

Il reste à déterminer le nombre de polygones P1 appartenant à chacune des catégories précédentes. Avec des notations déjà utilisées, ces nombres sont, pour le

4^{e} type : $PS_n(2)$ et $PS_n(3)$
3^{e} type : $P_n(2) - PS_n(2)$ et $P_n(3) - PS_n(3)$
2^{e} type : $S_n - PS_n(2) - PS_n(3)$
1er type : tout le reste c'est – à – dire
$T_n - S_n - P_n(2) - P_n(3) + PS_n(2) + PS_n(3)$.

On trouve ainsi que

$$S_{2n-1} = 2nT_n - nS_n - n[P_n(2) - \frac{1}{2}PS_n(2)] - \frac{4n}{3}[P_n(3) - \frac{1}{2}PS_n(3)].$$

En remplaçant ces nombres par leurs expressions en fonction des nombres de CATALAN, on obtient la formule indiquée plus haut.

LE MENUISIER MATHÉMATICIEN

Ma King-Tchong (*)

Il y a une trentaine d'années, une nouvelle fit le tour du district de Tsingyuan, dans le centre du Hopei, en Chine du Nord. Un magistrat voulait savoir combien de terre il resterait après la cession d'un morceau de territoire au district voisin. Mais personne n'avait la moindre notion d'arpentage. Quelqu'un suggéra de faire appel à un menuisier ingénieux du village de Wou-an. Un rabot, une scie et une balance lui suffirent pour trouver la solution.

Il colla d'abord une carte du district sur un panneau de bois carré et lisse. D'après l'échelle de la carte, il calcula le nombre de km^2 que représentait la superficie totale du panneau. Puis, il pesa le panneau et calcula le nombre de km^2 représentés par 1 gr de bois. Enfin il découpa dans le bois la partie du district restant après la cession et la pesa. La superficie à déterminer fut établie par l'équation suivante :

$$\frac{\text{1 unité de poids}}{\text{Nombre donné de km}^2}$$

$$= \frac{\text{Total des unités de poids du district après cession}}{\text{Superficie en km}^2\text{ après la cession}}$$

Trois quantités étant connues, il était désormais facile de trouver la quatrième, c'est-à-dire la superficie totale du territoire après cession.

Le menuisier s'appelait Yu Tchen-Chan; il inventa plus tard la méthode de calcul à la règle et occupe maintenant une chaire de mathématiques à l'Université du Hopei, à Tientsin. Cet homme, qui n'avait que trois années d'école dans son enfance, est à 54 ans connu dans tout le pays pour ses calculateurs simples et commodes et les dispositifs accessoires conçus par lui pour le calcul à l'abaque.

Echecs originels

Fils de paysan pauvre, le petit Tchen-Chan regardait avec envie les autres enfants qui avaient la chance d'aller à l'école. A 14 ans, il parvint à exaucer son désir mais sous réserve qu'il se chargeât du nettoyage de l'école. Tout de suite l'arithmétique éveilla son intérêt et son imagination. Voyant certains de ses condisciplines punis pour leur incapacité à retenir la table de multiplication, il se demanda s'il n'existerait pas une méthode simple pour aider à l'apprendre plus facilement. Cette idée d'enfance devint l'ambition de toute sa vie.

La pauvreté de sa famille l'obligea à quitter l'école pour travailler dans les champs, et il dut abandonner son rêve d'étudier les mathématiques. Les dures occupations

(*) Cet article date de septembre 1964 et a été cité en France dans la revue "*Impascience*" n° 4/5 de 1976. C'est une petite contribution à l'histoire politique des mathématiques en Chine.

des paysans remplirent le garçon de la détermination de partir pour le Nord-Est car il avait entendu dire qu'on y utilisait des machines agricoles. Il parcourut à pied plus de 1.000 km pour arriver dans la province du Heilongkiang, où il fit des travaux de bricolage dans une usine de réparation de machines. Pendant ses cinq ans de séjour à cet endroit, il fit à la dérobée de nombreux dessins de tracteurs, moissonneuses et autres outils aratoires, dans l'intention de les reproduire après son retour au pays natal. Par malheur, tous ses dessins furent confisqués et détruits en cours de route par les impérialistes japonais qui avaient envahi le Nord-Est de la Chine.

Mais le jeune homme conservait la ferme résolution d'inventer des machines agricoles qui soulageraient les paysans de leur travail éreintant. Dans le célèbre '*Roman des Trois Royaumes*', il avait lu l'histoire de Tchoukeh Liang qui fabriquait des taureaux et des chevaux de bois capables de se mouvoir automatiquement. Croyant que de tels animaux pouvaient aussi être utilisés pour labourer les champs, il se fit menuisier. Il étudia leur description avec soin et essaya d'en fabriquer un lui-même. Mais comme il s'agissait de légendes relevant de la fantaisie pure, ses essais échouèrent.

Par contre, il y gagna de devenir un menuisier expérimenté. Mesurant et calculant constamment durant sa besogne, l'arithmétique lui revint en mémoire. Bientôt on le connut pour un homme ayant un don pour les chiffres, au point qu'il fut souvent invité à résoudre des problèmes difficiles d'arithmétique. Son désir d'enfance, celui d'inventer des appareils à faciliter le calcul alla croissant. En 1936, il essaya d'en fabriquer un, basé sur un engrenage en bois. Au bout de six années de dur travail, il dut avouer son échec. Quelqu'un se gaussa de lui en ces termes : "*Tant d'années de pitreries, uniquement pour fabriquer un truc ridicule nous apprenant que* $2 \times 8 = 18$!".

Travail et Révolution

En 1942, une organisation révolutionnaire clandestine fut établie au village natal de Yu Tchen-Chan. Grâce à l'aide de certains de ses membres, il en arriva graduellement à comprendre que ce serait seulement en chassant, sous la direction du Parti communiste, les envahisseurs impérialistes et en jetant bas les réactionnaires du pays que les pauvres gens pourraient se redresser économiquement et culturellement. Quant à ses recherches pour simplifier le calcul, elles recevraient un sens plus grand quand le peuple serait maître de son propre pays. Il se rallia aux activités contre les envahisseurs japonais. Sous le masque du menuisier, il pénétra profondément dans les régions occupées par l'ennemi afin d'y glaner des renseignements pour la VIIIème Armée de Route, dirigée par le Parti communiste.

Une fois, un détachement de guérilla atteignit une rivière. Il convenait d'en savoir la largeur afin de connaître la quantité de bois nécessaire à la construction d'un pont de bateaux. Debout sur une charrette, Yu fixa son regard sur un point situé à l'extrémité de l'eau, de l'autre côté de la rivière. Il rabattit la visière de sa casquette de façon que le milieu de la visière coïncidat avec le point fixé par ses yeux. Gardant la tête droite et bien d'aplomb, il tourna sur ses talons jusqu'à ce que ses yeux rencontrent le prolongement de la rive où il se tenait, notant mentalement le point d'intersection de son regard et du centre de la visière. Puis il demanda que l'on tende une corde allant de ses pieds au point de repère : il n'y avait plus qu'à mesurer la longueur de la corde pour connaître la largeur du cours d'eau. Au vrai, il n'avait fait que mettre en application le fait que tous les rayons d'un cercle sont égaux.

Grâce à sa longue expérience, Yu savait comme tout menuisier que la règle est un instrument de calcul commode. Il savait par exemple que pour diviser une planche en deux parties égales il n'était nullement nécessaire de mesurer la largeur et la longueur. Il suffisait de placer parallèlement deux règles, le zéro de chaque règle en regard de chaque bout de la planche, et le point où les chiffres coïncideraient indiquerait exactement le milieu (fig. 1).

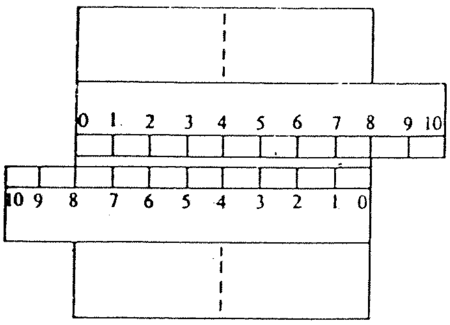


Figure 1

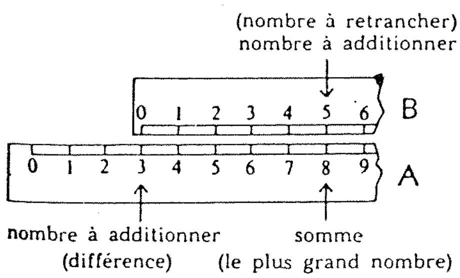


Figure 2

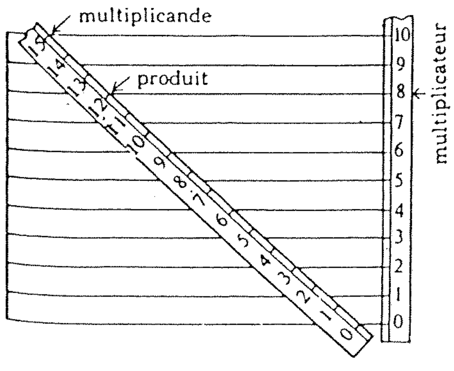


Figure 3

Une observation minutieuse permit à Yu de se rendre compte que l'addition et la soustraction pouvaient être effectuées en manipulant deux règles. Par exemple, pour obtenir la somme de 3 plus 5, on n'a qu'à placer le 3 de la règle A à la hauteur du zéro de la règle B, le résultat, qui est 8, se lisant sur la règle A à la hauteur du 5 de la règle B (fig. 2). La soustraction s'effectue par le processus inverse. Avec deux règles spécialement conçues pour cela, on peut multiplier et diviser certains nombres, mais non tous.

Un jour, Yu découvrit par hasard qu'on coupait plus facilement une canne obliquement que transversalement. Quoiqu'il n'y ait pas de rapport entre les deux cas, sa pensée s'aimanta vers la question de savoir si les calculs pouvaient être accomplis plus facilement en plaçant une règle de façon à former un angle avec une autre. Après avoir procédé à de nombreux essais, il découvrit que la multiplication et la division pouvaient être effectuées en disposant une règle obliquement et en traçant à partir de celle-ci des lignes parallèles pour rejoindre une deuxième règle fixée verticalement au tableau (fig. 3). Par exemple, un réveille-matin coûte 15 yuans; combien en valent 8? Le zéro de la règle mobile est placé sur la ligne du zéro et le 15 sur la ligne 10; la ligne 8 du tableau rencontre le 12 de la règle mobile. En le multipliant par 10, le produit est de 120 yuans, réponse à la question.

Suivant le même principe, Yu inventa en 1947 un calculateur simple qui donnait rapidement la réponse à des questions d'addition, de soustraction, et d'extraction de racines, par un seul mouvement de la règle. Etudiée par des spécialistes, la méthode fut reconnue mathématiquement exacte, et elle reçut un prix du gouvernement populaire de la Région frontière libérée du Chansi-Tchahar-Hopei. La méthode fut vulgarisée par les habitants. Elle aidait à trouver de façon rapide la réponse à de nombreux problèmes compliqués – le calcul de la superficie des terres pendant la réforme agraire; compter la somme nécessaire à l'achat de légumes pour l'armée, et même évaluer la portée balistique de l'artillerie de fabrication locale.

A l'université

Après la proclamation de la République populaire en 1949, les activités créatrices de Yu atteignirent une étape nouvelle. Le gouvernement l'envoya étudier à l'Université Peiyang à Tientsin, l'encourageant à poursuivre ses inventions.

Il n'avait jamais cru pouvoir fréquenter une université, surtout à l'âge de 40 ans. Il dut affronter de nombreuses difficultés, dont sa connaissance limitée des caractères chinois et son ignorance totale de l'alphabet romain utilisé dans les mathématiques. Mais il était résolu de profiter au maximum de l'occasion qui lui était offerte par le gouvernement populaire. Il compara le principe de son calculateur avec ce qu'il apprenait. Sa confiance en lui-même s'accrut lorsqu'il constata que beaucoup de ses méthodes étaient en accord avec les principes mathématiques. Parce que son calculateur facilitait l'apprentissage de l'arithmétique aux ouvriers et aux paysans, il fut invité à Pékin, à la Conférence nationale des ouvriers, paysans et soldats modèles de 1950. Sa rencontre avec le président Mao Tsé-Toung lui donna un encouragement inestimable.

Yu Tchen-Chan fut diplômé avec grande distinction et s'en fut travailler à la Fabrique d'appareillage pour l'enseignement de Nankin. Il fut nommé membre spécial de la Conférence consultative politique de la province du Kiangsou, et fit maintes visites à la campagne et aux usines. Il constatait qu'avec l'accroissement des coopératives agricoles, les calculs requis dans la gestion de la production et la comptabilité impliquaient des chiffres beaucoup plus grands que ceux que son calculateur pouvait embrasser. Et le développement des communes populaires lui donna des impulsions encore plus grandes pour l'amélioration de ses méthodes.

Davantage d'inventions

Un jour de 1959, en fixant quatre pieds à un panneau de bois pour obtenir une table, tout à coup il remarqua qu'au niveau de l'œil les quatre pièces saillant aux coins ressemblaient au nombre 11, vu des deux côtés. En regardant la table, d'en haut et diagonalement, le nombre devenait 121, produit de 11 × 11 (fig. 4). Quoique pure coïncidence, cette découverte lui inspira une méthode de multiplication simple consistant à disposer de façons différentes des dés sur une table.

Mettons qu'il faille multiplier 321 par 213 (fig. 5). Le nombre 321 est disposé verticalement et le multiplicateur 213 horizontalement. Les unités sont séparées par des bâtonnets de façon à former des groupes différents. Puis les groupes sont écartés l'un de l'autre, et le carré considéré diagonalement (fig. 6). Le nombre de dés dans chaque colonne verticale représente un chiffre du produit. Comptez de droite à gauche. Quand le total de chaque colonne verticale dépasse 10, on transfère 1 à la colonne immédiatement à gauche. De cette façon nous obtenons 68373 – produit exact de 321 × 213.

La méthode pouvait être apprise facilement par n'importe qui, serait-il même dépourvu d'instruction. Sur cette base Yu procéda à la création d'un calculateur à dés, capable d'effectuer toutes les opérations arithmétiques avec de grands nombres. Mais les dés étant d'un usage trop encombrant, Yu les remplaça par des points et des lignes sur le papier (fig. 7). Le principe fondamental de cette méthode se ramène à ce que la multiplication, la division et l'extraction de racines peuvent être réduites aux opérations d'addition et de soustraction.

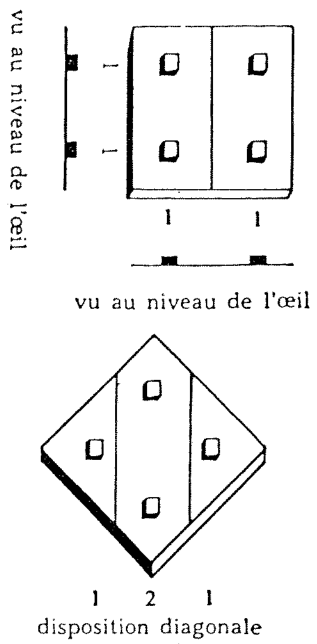


Figure 4

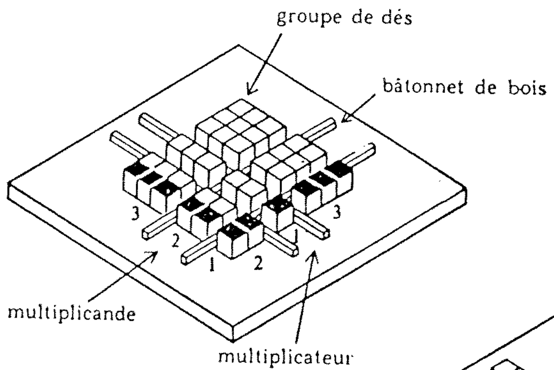


Figure 5

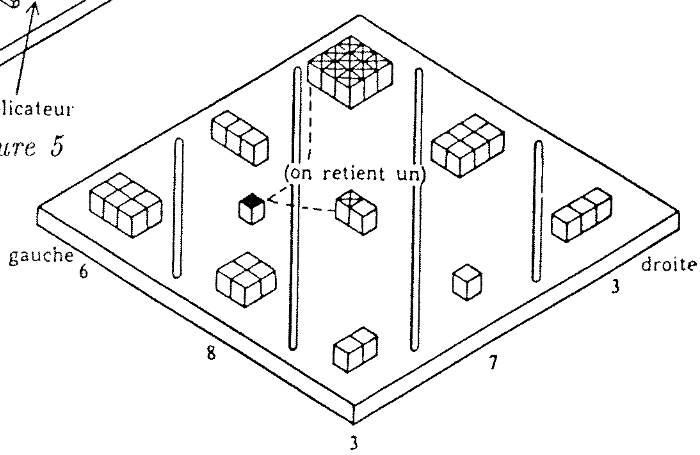


Figure 6

En 1961, Yu fut chargé de conférences à la faculté des mathématiques de l'Université du Hopei. L'année suivante, il combina sa méthode de calcul linéaire avec l'abaque traditionnel, en y ajustant un dispositif auxiliaire qui en facilite l'usage (fig. 8). Grâce à cette innovation, quelques heures suffisent à un écolier pour comprendre le mécanisme de l'abaque, alors qu'auparavant on avait besoin de plusieurs mois.

Au cours des deux dernières années, Yu améliora ce dispositif en y ajoutant de petites boules numérotées qui peuvent être tournées à la main. La multiplication et la division peuvent ainsi être effectuées à partir de la simple connaissance de la table de multiplication, ce qui permet aux débutants d'apprendre le calcul à l'abaque avec plus de facilité.

Les méthodes de calcul et les nombreuses inventions de Yu Tchen-Chan ont grandement contribué, au cours des vingt dernières annnées, à la vulgarisation des mathématiques dans les masses populaires. Aujourd'hui, les communes, fermes d'Etat, écoles, organismes gouvertementaux et autres l'invitent souvent à venir expliquer ses méthodes. Il continue d'améliorer ses instruments à calculer pour mieux satisfaire aux besoins des travailleurs.

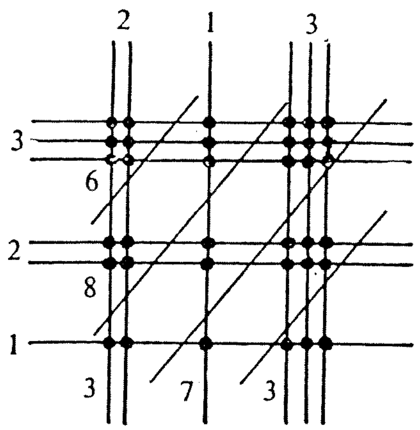


Figure 7

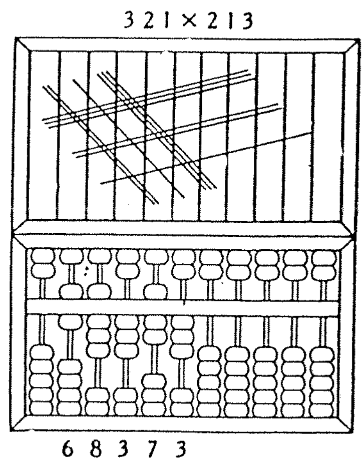


Figure 8

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

5.— INTERMÈDE MATHÉMATIQUE

Comme il a beaucoup été question de série de FAREY et de fractions continues et bien que je sache le lecteur doué d'une culture mathématique certaine, je me permets de donner ici un certain nombre de résultats qui éclaireront les chapitres précédents ainsi que les suivants.

1) Les séries de Farey

a) Considérons l'ensemble des nombres rationnels compris au sens large entre 0 et 1. Ecrivons ces nombres sous forme de fractions irréductibles et limitons nous à ceux dont le dénominateur est inférieur ou égal à d. Si on classe ces nombres par ordre croissant on obtient la série de FAREY d'ordre d notée F_d.

Exemple :

à l'ordre 1	F_1	$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$
à l'ordre 2	F_2	$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$
à l'ordre 3	F_3	$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$
à l'ordre 4	F_4	$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}.$

On remarque que les fractions nouvelles qui apparaissent à l'ordre d ont évidemment toutes un dénominateur égal à d, mais que de plus, si on note n le numérateur de l'une d'entre elle on a: $(n/d) = (a+a'/b+b')$ où (a/b) et (a'/b') sont les fractions immédiatement voisines.

Théorème 1 : *Si a, b, a', b' sont quatre nombres entiers positifs tels que $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ alors $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$.*

$$\text{En effet si } \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \quad \begin{array}{rc} \text{alors} & ab' < ba' \\ \text{donc} & ab' + ab < ab + ba' \\ \text{soit} & a(b+b') < b(a+a') \\ \text{c'est-à-dire} & \frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} \end{array}$$

et on démontre de la même façon l'autre inégalité.

Théorème 2 : *Si $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ sont deux termes successifs d'une série de Farey; alors $ba' - ab' = 1$.*

Cela est manifestement vrai pour la série F_1. Supposons que ce résultat soit vrai pour la série F_d et soit $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ deux fractions consécutives de F_d avec $b+b' = d+1$;

alors on sait que $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'}$ mais $b(a+a') - (b+b')a = ba' - ab' = 1$ et on obtient le même résultat pour l'autre inégalité.

Le théorème est donc démontré par récurrence.

Corrolaire 1 : *La construction indiquée des séries de* FAREY *conduit à des fractions irréductibles.*

D'après l'égalité de BÉZOUT $ba' - ab' = 1$ implique que a et b sont premiers entre eux.

Corrolaire 2 : *L'écart entre deux fractions consécutives* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{a'}{b'}$ *est égal à* $\frac{1}{bb'}$.

b) Applications

• Soit r un réel compris entre 0 et 1. Si on cherche une approximation rationnelle de r, il suffit de placer r dans la série de FAREY d'ordre d, on obtient alors le meilleur encadrement possible de r à l'aide de fractions de dénominateur inférieur ou égal à d.

Exemple : $r = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad d = 4$.

Comme F_4 est :$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$, on a :

$$\frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$$

ce qui place $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans un intervalle d'amplitude $1/12$ limité par des fractions de dénominateur inférieur à 4.

• Si r est extérieur à l'intervalle $[0, 1]$, il suffit de considérer sa partie décimale puis de rajouter sa partie entière.

Exemple : $r = \sqrt{5} \quad d = 5$.

On place $\sqrt{5} - 2$, on trouve $\frac{1}{5} < \sqrt{5} - 2 < \frac{1}{4}$ et par conséquent $2 + \frac{1}{5} < \sqrt{5} < 2 + \frac{1}{4}$, d'où l'encadrement

$$\frac{11}{5} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$$

qui a pour amplitude $\frac{1}{20} = \frac{1}{5 \times 4}$ et qui permet d'approcher $\sqrt{5}$ à l'aide de fractions dont le dénominateur est inférieur à 5.

• Il semble que pour construire la série de FAREY d'ordre d il faille construire toutes les séries précédentes, ce qui risque d'être long. Mais dans la pratique on ne cherche que les deux termes encadrant un certain réel. Il suffit donc de construire les termes de chaque série encadrant ce réel.

Exemple : $r = \frac{\pi}{4} \quad d = 13 \quad (r \simeq 0,78539816\ldots)$.

On part de F_2 : $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$ et comme $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{1}{1}$ on ne s'intéresse qu'au deuxième intervalle de F_2 pour écrire une partie de F_3 :

F_3 :	$\cdots \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$	et comme $\frac{2}{3} < \frac{\pi}{4} < \frac{1}{1}$, on continue avec $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{1}$ ce qui donne
F_4 :	$\cdots \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$	et comme $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{1}{1}$ on passe à
F_5 :	$\cdots \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$	puis, comme $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$ on passe à
F_9 :	$\cdots \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \ldots$	

On remarque qu'il y a ici passage direct de F_5 à F_9, que l'on a

$$\frac{7}{9} < \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$$

ce qui place $\frac{\pi}{4}$ dans un intervalle d'amplitude 1/45 et enfin que l'on obtient les meilleures approximations de $\frac{\pi}{4}$ avec des fractions de dénominateurs inférieurs ou égaux à 13 puisque l'étape suivante conduirait à $\frac{11}{14}$ qui est dans F_{14}. (Les lecteurs malins auront reconnu en $\frac{11}{14}$ le quart de $\frac{22}{7}$.)

2) Développement d'un réel en fractions continues

Soit r un réel strictement positif. Définissons à partir de r les deux suites a et b par :

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{partie entière de } r \\ r &= a_0 1 + b_0 \\ 1 &= a_1 b_0 + b_1 \\ b_0 &= a_2 b_1 + b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{i-2} &= a_i b_{i-1} + b_i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

où les a_i sont tous des entiers positifs et où $0 \leq b_i < b_{i-1}$. On reconnaît là un procédé tout à fait analogue à celui des divisions euclidiennes successives pour la recherche du pgcd de deux entiers. On arrête ce procédé dès qu'on obtient un *reste* b_i nul. Cela ne peut se produire que si r est rationnel. Dans les autres cas les suites a et b sont infinies. Nous nous placerons dans ces cas.

Il est facile de voir que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} r = {} & a_0 + b_0 && = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{b_0}} \\ = {} & a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{b_1}{b_0}} && = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{b_0}{b_1}}} \\ = {} & a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{b_2}{b_1}}} && = \ldots \end{aligned}$$

On dit qu'on a développé r en fraction continue. Les nombres a_0 ; $a_0 + \frac{1}{a_1}$; $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$; ... s'appellent les réduites successives de r et on écrit $r = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

Nous allons démontrer que la suite des réduites converge vers r et nous évaluerons l'écart entre r et la réduite d'ordre n.

Théorème 1 :

Si on définit les suites (p) *et* (q) *par*

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1}a_n + p_{n-2} \quad \text{et} \quad p_0 = a_0; p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_n &= q_{n-1}a_n + q_{n-2} \quad \text{et} \quad q_0 = 1; q_1 = a_1 \end{aligned}$$

alors $\frac{p_n}{q_n}$ *est la réduite d'ordre* n.

La démonstration est immédiate, par récurrence quand on remarque que l'on passe de la réduite d'ordre n à la réduite d'ordre $n+1$ en remplaçant a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n-1}}$.

Par ailleurs on remarque que les suites (p) et (q) sont strictement croissantes à termes entiers et positifs; par conséquent la suite (q) en particulier tend vers $+\infty$.

Théorème 2 :

$\frac{p_n}{q_n}$ *est la forme irréductible de la réduite d'ordre* n, *c'est-à-dire que* p_n *et* q_n *sont premiers entre eux.*

En effet :

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} =& (p_{n-1}a_n + p_{n-2})q_{n-1} - (q_{n-1}a_n + q_{n-2})p_{n-1} \\ =& p_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}p_{n-1} \end{aligned}$$

et par récurrence descendante $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$ ce qui démontre le résultat d'après l'identité de BÉZOUT.

Corollaire :

$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$, donc la différence entre deux réduites successives tend vers 0.

Théorème 3 :

La suite des réduites $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ *converge vers* r *quand* n *tend vers l'infini.*

On étudie la différence $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ qui vaut $\frac{a_n(p_{n-1}q_{n-2} - q_n + p_{n-2})}{q_n q_{n-2}}$ c'est-à-dire $\frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$. Ce qui prouve que la sous suite des réduites d'ordre pair est croissante et celle d'ordre impair est décroissante. Les deux sous suites sont donc adjacentes en vertu du corollaire ce qui permet de conclure à la convergence des réduites.

D'autre part on passe de $\frac{p_n}{q_n}$ à r en remplaçant a_n par $a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}$ donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_n}{q_n} - r\right| &= \left|\frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_n - a_n + q_{n-2}} - \frac{p_{n-1} + (a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}) + p_{n-2}}{q_{n-1}(a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}}) + q_{n-2}}\right| \\ &= \left|\frac{(p_{n-2}q_{n-1} - q_{n-2}p_{n-1})b_n}{(q_{n-1}a_n + q_{n-2})[q_{n-1}(a_n b_{n-1} + b_n) + q_{n-2}b_{n-1}]}\right| \\ &= \frac{b_n/b_{n-1}}{q_n(q_{n-1}a_n + q_{n-2} + \frac{b_1 q_{n-1}}{b_{n-1}})} < \frac{1}{q_n^2} \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

De plus on peut démontrer qu'une réduite est une meilleure approximation de r, c'est-à-dire que parmi toutes les fractions dont le dénominateur est plus petit que q_n aucune n'approche r d'aussi près que $\frac{p_n}{q_n}$.

Ce résultat admet également une sorte de réciproque c'est-à-dire que si une fraction $\frac{p}{q}$ est telle que

$$\left|\frac{p}{q} - r\right| < \frac{1}{q^2}$$

alors $\frac{p}{q}$ est une réduite du développement en fraction continue de r.

3) Approximations rationnelles de quelques "constantes astronomiques"

a) Nombres de jours dans une lunaison : $l = 29,530\ 588\ j$.

• Décomposition en fractions continues :

$$l = [29; 1, 1, 7, 1, 2, 16, 1, 4, 1, 12, 15, 1].$$

Premières réduites

$$29; 30; 29 + \frac{1}{2}; 29 + \frac{8}{15}; 29 + \frac{9}{17}; 29 + \frac{26}{49}; 29 + \frac{425}{801}; 29 + \frac{451}{850}; 29 + \frac{2229}{4201}; \ldots$$

• Encadrement au moyen des séries de Farey pour $l' = l - 29$.

<table>
<tr><td>bornes supérieures de l'</td><td>1</td><td>$\frac{2}{3}$</td><td>$\frac{3}{5}$</td><td>$\frac{4}{7}$</td><td>$\frac{5}{9}$</td><td>$\frac{6}{11}$</td><td>$\frac{7}{13}$</td><td>$\frac{8}{15}$</td><td>$\frac{17}{32}$</td><td colspan="4">$\frac{26}{49}$</td></tr>
<tr><td>bornes inférieures de l'</td><td>0</td><td colspan="6">$\frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$\frac{9}{17}$</td><td>$\frac{35}{66}$</td><td>$\frac{61}{115}$</td><td>$\frac{87}{164}$</td><td>$\frac{113}{213}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="12">$\frac{26}{49}$</td><td>$\frac{451}{801}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{139}{262}$</td><td>$\frac{165}{311}$</td><td>$\frac{191}{360}$</td><td>$\frac{217}{409}$</td><td>$\frac{243}{458}$</td><td>$\frac{269}{507}$</td><td>$\frac{295}{556}$</td><td>$\frac{321}{605}$</td><td>$\frac{347}{654}$</td><td>$\frac{373}{703}$</td><td>$\frac{399}{752}$</td><td>$\frac{425}{801}$</td></tr>
</table>

Les bornes qui sont plus proches de l' que toutes les précédentes sont successivement :

$$1; \frac{1}{2}; \frac{5}{9}; \frac{6}{11}; \frac{7}{13}; \frac{8}{15}; \frac{9}{17}; \frac{17}{32}; \frac{26}{49}; \frac{243}{458}; \frac{269}{507}; \ldots$$

b) Nombres de jours dans une année : $a = 365,242\ 199\ j$.

• Décomposition en fractions continues

$$a = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 20, 6, 12].$$

Premières réduites

$$365; 365+\frac{1}{4}; 365+\frac{7}{29}; 365+\frac{8}{33}; 365+\frac{31}{128}; 365+\frac{163}{673}; \dots$$

• Encadrement au moyen des séries de Farey pour $a' = a - 365$.

bornes supérieures de a'	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{33}$							
bornes inférieures de a'	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{7}{29}$	$\frac{15}{62}$	$\frac{23}{95}$	$\frac{31}{128}$	

	$\frac{39}{161}$	$\frac{70}{289}$	$\frac{101}{417}$	$\frac{132}{545}$	$\frac{163}{673}$	...
	$\frac{31}{128}$					...

les bornes qui sont plus proches de a' que toutes les précédentes sont successivement :

$$0; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{4}{17}; \frac{5}{21}; \frac{6}{25}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{23}{95}; \frac{31}{128} \dots$$

c) Nombres de jours dans une année lunaire de 12 lunaisons :

$$12\ l = 354,367\ 056\ j.$$

• Décomposition en fractions continues

$$12\ l = [354; 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 1, 6, 1, 4, 2].$$

Premières réduites :

$$354; 354+\frac{1}{2}; 354+\frac{1}{3}; 354+\frac{3}{8}; 354+\frac{4}{11}; 354+\frac{7}{19}; 354+\frac{11}{30}; 354+\frac{29}{79}; 354+\frac{127}{346}; \dots$$

• Encadrement au moyen des séries de Farey pour $l" = 12\ l - 354$:

bornes supérieures de $l"$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{19}$	$\frac{18}{49}$	$\frac{29}{79}$
bornes inférieures de $l"$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{40}{109}$	$\frac{69}{188}$	$\frac{98}{267}$

Les bornes qui sont plus proches de $l"$ que toutes les précédentes sont successivement :

$$0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{11}; \frac{7}{19}; \frac{11}{30}; \frac{18}{49}; \frac{29}{79} \dots$$

d) Nombres de lunaisons dans une année ordinaire : $m = 12,368\,267\ l$.

- Décomposition en fractions continues :

$$m = [12; 2, 1, 2, 1, 1, 17, 2, 2, 15, 1, 6, 5]$$

Premières réduites :

$$12; 12 + \frac{1}{2}; 12 + \frac{1}{3}; 12 + \frac{3}{8}; 12 + \frac{4}{11}; 12 + \frac{7}{19}; 12 + \frac{123}{334} \ldots$$

- Encadrement au moyen des séries de Farey pour $m' = m - 12$.

<table>
<tr><td>bornes supérieures de m'</td><td>1</td><td colspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td colspan="2">$\frac{3}{8}$</td><td colspan="7">$\frac{7}{19}$</td></tr>
<tr><td>bornes inférieures de m'</td><td colspan="2">0</td><td colspan="3">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="2">$\frac{4}{11}$</td><td>$\frac{11}{30}$</td><td>$\frac{18}{49}$</td><td>$\frac{25}{68}$</td><td>$\frac{32}{87}$</td><td>$\frac{39}{106}$</td><td>$\frac{46}{125}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="9">$\frac{7}{19}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{53}{144}$</td><td>$\frac{60}{163}$</td><td>$\frac{67}{182}$</td><td>$\frac{74}{201}$</td><td>$\frac{81}{220}$</td><td>$\frac{88}{239}$</td><td>$\frac{95}{258}$</td><td></td></tr>
</table>

Les bornes qui sont plus proches de l' que toutes les précédentes sont successivement :

$$0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{8}; \frac{4}{11}; \frac{7}{19}; \frac{67}{182}; \ldots$$

MONGE ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Henri SILVESTRE

En 1752 débute la publication des premiers volumes de l'Encyclopédie; l'œuvre va influencer les acteurs de la Révolution Française. Son préambule détaille ce qui est l'essentiel de la "*philosophie des lumières*" :
— rassembler les connaissances pour les transmettre aux générations futures, afin que les hommes devenus plus instruits deviennent plus vertueux et plus heureux,
— avoir grande confiance dans le jugement de la raison; elle peut tout, atteint tout, juge de tout. Cette raison procède par déduction en partant de vérités simples et évidentes, mais qui observe aussi les faits, les soumet à la méthode expérimentale pour les vérifier, les contrôler et en déduire des lois,
— tous les domaines sont soumis aux exigences de l'esprit : les phénomènes naturels aussi bien que la nature humaine, la société comme la religion,
— les principes mis en évidence par la raison sont universels,
— les sociétés doivent être organisées pour le bonheur des hommes et respecter les droits naturels de ceux-ci.

Ces idées permettent de comprendre l'importance accordée aux mathématiques et aux sciences expérimentales dans la seconde moitié du 18^{e} siècle. La foi en la science est grande, on pressent qu'elle est capable d'expliquer tous les phénomènes naturels.

A cette époque, l'instruction aussi est considérée comme importante, surtout par la bourgeoisie, car c'est un outil efficace de promotion sociale sous l'Ancien Régime (société d'ordres et de castes) et, à partir de 1789, un moyen de perfectionner l'homme, ainsi que le déclare TALLEYRAND dans son rapport sur l'Instruction publique présenté aux députés de la Constituante le 10 septembre 1791 :"*un des caractères sensible dans l'individu l'est bien plus encore dans l'espèce : car peut-être n'est-il pas possible de dire de tel homme en particulier qu'il est parvenu au point où il pourrait atteindre, et il le sera éternellement de l'affirmer de l'espèce entière dont la richesse intellectuelle et morale s'accroit sans interruption de tous les produits des siècles antérieurs*".

1) L'enseignement primaire au 18^{e} siècle

Sous l'Ancien Régime l'enseignement primaire est du domaine de l'Eglise. Depuis le Concile de Trente (1547), chaque curé doit entretenir un maître pour enseigner les rudiments (lecture, écriture, chant, calcul). L'autorité épiscopale a la haute main sur les écoles du diocèse qui sont surveillées par l'écolâtre. Dans les villes les municipalités forcent en général l'Eglise à entretenir les écoles, et il s'agit souvent

Conférence Régionale APMEP - IREM de Strasbourg (14.06.1989)

d'écoles municipales publiques.

La Convention a débattu en 1793 des plans d'éducation de CONDORCET et du Montagnard LE PELETIER. L'instruction devient publique et laïque, l'enseignement primaire est obligatoire et aux frais de l'Etat. En fait les mesures pratiques ont été votées après Thermidor (9 Thermidor II - 27.07.1794) et mises en place par le Directoire; l'enseignement primaire est particulièrement sacrifié, l'instituteur devient salarié par les communautés locales. Des petites écoles, à demi-clandestines, sont ouvertes; elles sont dirigées par un prêtre réfractaire qui fait concurrence à l'instituteur public.

2) L'enseignement secondaire au 18^e^ siècle

Sous l'ancien Régime les ordres religieux (Jésuites, Oratoriens, Frères des Ecoles chrétiennes) fondent des établissements, ils sont de plus en plus nombreux, tandis que les anciens collèges des Universités ont tendance à régresser (1). Les encyclopédistes sont très critiques sur l'enseignement dispensé dans les collèges, d'ALEMBERT écrit dans l'article "*Collège*" de l'Encyclopédie : "*un jeune homme après avoir passé dans un collège dix années, qu'on doit mettre au nombre des plus précieuses de sa vie, en sort, lorsqu'il a le mieux employé son temps, avec la connaissance très imparfaite d'une langue morte, avec des préceptes de rhétorique et des principes de philosphie qu'il doit tâcher d'oublier; souvent avec une corruption de mœurs dont l'altération de la santé est la moindre suite, quelquefois avec des principes d'une dévotion mal entretenue mais plus ordinairement avec une connaissance de la religion si superficielle qu'elle succombe à la première conversation impie où à la première lecture dangereuse*".

Dès la fin de 1789 les collèges éprouvent de la peine à fonctionner car ils sont privés de ressources, un peu plus tard les religieux réfractaires seront interdits d'enseignement.

Le 7 avril 1793 la Convention tente l'expérience (éphémère) du "*Lycée républicain*" ; on y enseigne la technologie, les arts pratiques (par exemple la sténographie), la géographie, la vulgarisation scientifique. A cette époque également MONGE a pensé à un projet d'école technique pour ouvriers de 14 à 16 ans où seraient enseignés la géométrie descriptive avec ses applications, des éléments de physique, chimie, grammaire, instruction civique, morale.

Pour faire face à un important besoin en matériel de guerre (2), la Convention institue l'Ecole révolutionnaire des armes et poudres le 2 février 1794; son but est d'assurer la formation technique et politique de 1000 citoyens sélectionnés dans les départements pour en faire des chefs d'atelier capables d'enseigner les méthodes de fabrication dans leurs provinces. Des savants tels que MONGE, VANDERMONDE, BERTHELOT, CARNOT y ont participé; le principe et l'organisation des cours révolutionnaires ont été repris à la fondation de l'Ecole Normale de l'an III et de l'Ecole Centrale des Travaux Publics.

---

(1) Toutes les notes sont regroupées p. 35-36.

La loi du 24 février 1795 substitue aux collèges de l'Ancien Régime les "*Ecoles Centrales*", ouvertes au chef-lieu de chaque département. Ce sont des lycées supérieurs dont les cours sont facultatifs et constitués en trois sections successives : d'abord le dessin, l'histoire naturelle, les langues anciennes et vivantes; puis de 14 à 16 ans les sciences (mathématiques, physique, chimie); enfin la grammaire générale (belles-lettres, histoire, législation) (3).

La loi du 11 Floréal an X (1er mai 1802) et le décret du 17 mars 1808 fondent solidement l'enseignement public pour le secondaire et l'Université (en 1808 il s'agit de l'Université impériale; elle a le monopole de l'enseignement). Le nouveau régime prend grand soin du secondaire où se forment les futurs cadres de l'Etat; on y enseigne particulièrement les humanités classiques.

3) L'enseignement supérieur au 18^e siècle

Avant la Révolution l'enseignement mathématique du degré le plus élevé est dispensé en France dans quelques facultés (elles ont peu d'élèves), au Collège Royal (Collège de France, fondé par François 1er), dans quelques écoles spéciales : Ponts et Chaussées à Paris, Génie à Mézières, Artillerie à Strasbourg. Dans ces écoles cependant le niveau mathématique ne dépasse pas celui des stricts besoins professionnels des techniciens qu'elles ont mission de former. Pour toute la France cet enseignement supérieur compte environ 25 chaires de mathématiques.

L'abolition des corporations décidée par la Convention en 1793 entraîne la fermeture des universités et des académies (le 8 août 1793 pour l'académie des sciences, le 15 septembre pour la faculté de médecine).

Tout un réseau d'établissements supérieurs est créé par la Convention thermidorienne (de la chute de ROBESPIERRE (27 juillet 1792) à la séparation de la Convention (26 octobre 1795)), en particulier :

— L'Ecole Centrale des travaux publics (inaugurée le 24 mars 1795 pour préparer aux diverses catégories d'ingénieurs civils et militaires. Le recrutement s'effectue par concours (deux interrogations de mathématiques, les études durent trois ans, elles concernent pour l'essentiel la géométrie descriptive, infinitésimale (MONGE) et la mécanique (LAGRANGE).

— L'Ecole Normale de l'an III, pour former les professeurs des écoles centrales. Les cours ont débuté le 20 janvier 1795, ils s'arrêteront en mai 1795 à la suite de difficultés matérielles. Les élèves sont désignés sans concours par les administrations des districts. Les professeurs sont choisis parmi les plus grands savants de l'époque (LAGRANGE, LAPLACE, MONGE). Les études comprennent pour chaque décade deux séances de mathématiques, de géométrie descriptive, de physique; des séances de débats (discussions) alternent avec les leçons.

4) Vie et carrière scientifique de Monge (1746-1818)

Gaspard MONGE est le fils d'un commerçant aisé, il fréquente jusqu'à 16 ans le collège des Oratoriens de Beaune puis on l'envoie à celui de Lyon où on lui confie bientôt la chaire de physique. Les Pères voulant le faire entrer dans les ordres, il retourne en 1764 dans sa famille. Il occupe ses loisirs en levant un plan de Beaune qui est remarqué par un officier supérieur du Génie; celui-ci lui fait attribuer une place de dessinateur technique à l'Ecole Royale du Génie de Mézières où on étudie la construction des fortifications, l'attaque et la défense des places fortes. Par des méthodes personnelles MONGE résout rapidement un problème de fortifications qui lui a été soumis, il est alors nommé répétiteur de mathématiques puis professeur titulaire de la chaire, en remplacement de l'abbé BOSSUT devenu examinateur des élèves (1769) (4). C'est à cette époque qu'il dégage les principes de la géométrie descriptive pour en faire une technique simple et efficace qu'il enseigne à Mézières.

Au cours de la période 1766-1772, MONGE présente un ensemble très riche de résultats nouveaux et élabore l'essentiel des principes qui dirigeront son œuvre mathématique. De 1766 à 1770 il fait connaître par des lettres (à d'ALEMBERT et à CONDORCET en particulier) et des mémoires successifs l'avancement de son étude sur les développées des courbes gauches. Après la lecture des travaux d'EULER et de LAGRANGE relatifs au calcul des variations, il en tente une généralisation à l'espace (mémoire de 1771). Au cours de cette même année 1771 il envoie plusieurs lettres à CONDORCET sur la résolution de certaines équations aux dérivées partielles dans lesquelles se précise peu à peu la liaison entre équations aux dérivées partielles et surfaces définies par un mode de génération donné. Dès le début de 1772 il rédige successivement deux mémoires sur ce sujet; le 5 avril 1772 il devient membre correspondant de l'académie des sciences. A la même époque il est nommé professeur de physique à l'Ecole de Mézières, le titulaire étant décédé.

Dès lors MONGE ne se consacre plus exclusivement aux mathématiques, il étend son champ de recherche à la physique et à la chimie, comme c'est le cas pour la plupart des mathématiciens de cette époque. Entre des mémoires de physique et de chimie (propriétés du fer et sa conversion en acier) il publie entre 1774 et 1776 trois mémoires qui lui ouvrent les portes de l'académie des sciences comme adjoint géomètre en 1780. A la mort de BÉZOUT en 1782 il lui succède comme examinateur des élèves de la Marine, en même temps qu'il obtient la chaire d'hydraulique instituée par TURGOT au Louvre. Malgré toutes ces charges qui l'obligent à résider cinq mois à Paris pour l'Académie et à parcourir la France pour la Marine, il conserve ses obligations de professeur à Mézières jusqu'en 1784.

En 1789, MONGE est un des savants français les plus connus, mais c'est en physique et chimie que sa réputation est la plus grande. Dès le début de la Révolution il en est un partisan enthousiaste (5), il est membre du club des Jacobins, il y occupera plusieurs postes successifs de direction. Jusqu'en juillet 1792 ses activités se poursuivent sans changement notable, il partage son temps entre l'académie des sciences et les tournées d'examen; celles-ci sont de plus en plus fréquentes car il doit surveiller la mise en route de 12 écoles d'hydrographie qui viennent d'être créées.

Après la journée insurrectionnelle du 10 août 1792, le roi déchu est remplacé par un conseil exécutif; MONGE en fait partie comme Ministre de la Marine. Il démissionne en avril 1793 pour se consacrer à l'Ecole révolutionnaire.

Dès 1794 il prend une bonne part à la création de l'Ecole Centrale des Travaux Publics; dès janvier 1795 il enseigne la géométrie descriptive à l'Ecole Centrale et à l'Ecole Normale; il y acquiert la réputation d'un bon professeur (6).

Le 22 août 1795 la Convention reconnaît en Gaspard MONGE un savant patriote éminent, il entre à l'Institut dès sa fondation.

En 1796 MONGE est chargé avec BERTHOLLET d'une mission en Italie, il rencontre BONAPARTE pour lequel il éprouve une grande admiration et un profond et indéfectible attachement.

Après le 18 Brumaire, MONGE conserve seulement son poste d'enseignement à Polytechnique, il le quitte en 1809; entretemps il publie "*Application de l'Algèbre à la Géométrie*" puis "*Application de l'Analyse à la Géométrie*"; sa géométrie descriptive professée à l'Ecole Polytechnique a déjà fait alors l'objet de plusieurs rééditions.

L'Empereur a accordé à MONGE les mêmes honneurs qu'à LAGRANGE et LAPLACE : sénateur, comte de l'Empire, Grand Officier de la Légion d'Honneur.

Epargné par la 1ère restauration, MONGE reprend sa place pendant les cent-jours; la seconde capitulation l'anéantit : il est exclu de l'Institut et il doit se cacher. A sa mort (28 juillet 1818) aucun hommage officiel ne lui est rendu.

5) La géométrie descriptive – Les précurseurs

La géométrie descriptive utilise les projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires, l'un horizontal, l'autre frontal. Cette technique est connue depuis longtemps, en architecture par exemple dès le 1er siècle av. J.-C., VITRUVE utilise les représentations des bâtiments en "*plan*" et "*élévation*" mais les deux dessins ne sont pas associés. La correspondance entre les deux projections d'une même figure, plus délicate, se rencontre plus tardivement chez DÜRER au 16^e siècle et FRÉZIER au 18^e siècle.

Au Moyen-Age les voûtes et arcs-boutants sont réalisés approximativement en appliquant un répertoire de règles empiriques et compliquées élaborées au cours des siècles. Il semble qu'une partie de ce savoir-faire se soit perdu au 17^e siècle (7).

En 1640 DESARGUES publie une plaquette qui se propose de résoudre les problèmes les plus difficiles du dessin architectural par des méthodes exclusivement géométriques. Il choisit l'exemple d'une montée biaise dans un mur en talus et il utilise le changement de plan, prouvant ainsi sa bonne compréhension des méthodes de géométrie descriptive. Malheureusement le style compliqué de l'auteur et son discours provoquant découragent ses contemporains.

C'est seulement en 1735 que l'architecte FRÉZIER en saisit l'exactitude et l'importance. Il publie à partir de là une "*théorie des sections des corps nécessaires pour la construction des voûtes et la coupe des pierres et des bois*". Les techniques utilisées et les problèmes envisagés sont ceux de l'ancien programme de descriptive de la classe de mathématiques élémentaires, mais les méthodes ne sont pas mises en valeur et restent noyées dans un ensemble de procédés particuliers.

MONGE a bien connu le traité de FRÉZIER qu'on utilisait à l'Ecole de Mézières et il travailla deux ans dans l'atelier de dessin et de taille des pierres. L'apport initial de MONGE a consisté en un vaste effort de simplification et de synthèse.

Le peintre allemand Albrecht DÜRER (1471-1528) publie en 1525 un traité de géométrie orienté vers les applications de la géométrie à l'art, traitant en particulier des méthodes de perspectives et mettant en œuvre des procédés proches dans leur esprit de la géométrie descriptive. Dans cette étude, les deux projections sont associées pour traiter des problèmes de représentation. Par exemple hélice circulaire (ou sur un cône droit) coupant les génératrices sous un angle constant, ombre au flambeau d'un cube, sections planes d'un cône droit à base circulaire et obtention de la conique en vraie grandeur.

Les travaux de DÜRER restèrent inconnus des géomètres; ceux-ci au début du 18^e siècle ignorent en général la méthode des projections et n'utilisent que rarement des démonstrations de caractère projectif.

6) La géométrie descriptive de Monge

D'après MONGE, "*la géométrie descriptive est l'art de représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, les corps de l'espace qui en ont trois et qui sont susceptibles d'une définition rigoureuse*". Bien entendu cette représentation doit aussi permettre de résoudre le plus possible de problèmes techniques ou théoriques, qui se posent sur ces corps de l'espace.

Le principe d'associer les deux projections orthogonales lui est familier, et les travaux de FRÉZIER (qui sont à la base des réalisations de l'Ecole de Mézières) lui ont montré que cette représentation devient performante et simple d'utilisation lorsque l'on recourt à la géométrie. Encore reste-t-il à faire tout un travail d'investigation pour rechercher les méthodes géométriques adaptées à la résolution des problèmes, et qui exploitent cette représentation. Le mérite en revient à MONGE, c'est en cela qu'on peut le considérer comme le créateur de la géométrie descriptive qui apparaît dès 1795 dans son enseignement comme une science complète et moderne.

Le corps de doctrine s'est vraisemblablement constitué entre 1766 et 1784, quelques rares documents subsistent de cette époque provenant d'anciens élèves; par exemple :

— détermination d'un angle dièdre en construisant des normales par un point de l'intersection,
— intersection de deux surfaces de révolution d'axes concourants (utilisation de la famille des sphères centrées au point de concours des deux axes),
— perpendiculaire commune à deux droites (en rendant debout les plans parallèles qui les contiennent).

Par ailleurs un problème (n° 13) figurant dans le mémoire de MONGE sur la théorie des surfaces (1775) est traité par les méthodes de la géométrie descriptive (8).

Dans les treize leçons professées à l'Ecole Normale de l'an III, MONGE insiste sur la valeur éducative de la géométrie descriptive, posant soigneusement ses principes, comparant les méthodes dans l'étude des problèmes relatifs à l'espace; il souligne aussi la relation qu'on doit faire en permanence entre l'analyse et la géométrie descriptive :

"*...Il serait souhaitable que ces deux sciences fussent cultivées ensemble : la géométrie descriptive porterait dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère et à son tour l'analyse porterait dans la géométrie la généralité qui lui est propre*".

Et aussi

"*Il faut que l'élève se mette en état d'une part de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace et de l'autre de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.*

Dans ses leçons MONGE signale aussi l'intérêt de la géométrie descriptive pour les services qu'elle peut rendre aux techniciens.

A l'Ecole Polytechnique c'est ce deuxième aspect qui est privilégié : 1/6 des leçons est consacré aux principes généraux, le reste aux applications : coupe des pierres, coupe des bois, ombre, perspective, topographie, machines.

Bibliographie

L'œuvre scientifique de MONGE, par René TATON (Ed. P.U.F.)

Histoire abrégée des sciences mathématiques, par Maurice d'OCAGNE (Ed. Vuibert)

Les savants en révolution 1789-1799, par Nicole DHOMBRES (Ed. Calmann-Lévy)

Mathématiques et mathématiciens pendant la Révolution française, par Jean DHOMBRES – Commission inter-IREM, Paris 19.11.88

La Révolution 1770- 1880, par François FURET – Histoire de France (Ed. Hachette)

Géomètres français sous la Révolution, par Niels NIELSEN (Copenhague, Ed. Levin & Munksgaard, 1929)

Science et Vie, numéro hors série : 200 ans de sciences 1789-1989

---

(1) A l'expulsion des Jésuites en 1763, leurs collèges ont été rattachés à l'Université.

(2) Extrait de : "*L'école révolutionnaire des armes et poudres*" (02.02.1794) :

1. Situation militaire :
20.04.92 : déclaration de la guerre au roi de Bohème et de Hongrie (i.e empereur d'Autriche);
01.02.93 : déclaration de la guerre à l'Angleterre et à la Hollande;
07.03.93 : déclaration de la guerre à l'Espagne;
10.03.93 : début de l'insurrection vendéenne.

2. Le Comité de salut public né le 06.04.93 saura faire face à la situation ainsi créée, car les besoins en hommes et en matériel sont énormes (dès le 24.02.93 la Convention décrète la levée de

300 000 hommes, le 23.08.93 elle décrète la levée en masse, cela représente un million d'hommes).

a) Création de nombreuses usines, développement de celles qui existent.

b) Appel aux savants pour mettre au point de nouveaux procédés de fabrication des matières premières qui manquent (le salpêtre vient de l'Inde et d'Egypte, le souffre de Sicile, la potasse d'Espagne, le cuivre d'Espagne et de Russie, le fer de Suède, l'acier d'Angleterre et d'Allemagne).

c) Création de l'Ecole révolutionnaire des armes et poudres; les cours sont prolongés par un certain nombre de manuels pratiques.

(3) Après le 18 brumaire an VIII (9 novembre 1799), pendant six semaines LAPLACE est nommé ministre de l'Intérieur. Il diffuse un texte aux professeurs de mathématiques des écoles centrales qui leur recommande de préférer les méthodes générales (c'est-à-dire l'analyse) et d'enseigner la géométrie après l'algèbre.

(4) Le salaire d'un professeur est de 900 livres par an alors que celui d'un examinateur est supérieur à 2000 livres par an.

(5) C'est un encyclopédiste d'origine modeste et il a souffert de ses débuts difficiles à Mézières.

(6) Extrait de "*L'œuvre scientifique de Monge*", par R. TATON :

Dans la troisième séance, MONGE réplique à un élève qui lui cite, d'après CONDILLAC, l'ordre logique de compréhension des éléments géométriques : solide, surface, ligne et point, que ceci n'a d'importance que pour les premières définitions. Il montre encore l'utilité des surfaces développables tant pour la technique ("*ce sont les seules que l'on puisse effectuer en matières flexibles ... sans qu'il soit nécessaire d'emboutir ces feuilles de matière*"), que pour la théorie des ombres et pour le progrès de l'analyse. Il insiste sur l'intérêt de la classification des surfaces d'après leur mode de génération :
.../...

A un autre moment, il affirme sa pleine confiance envers les méthodes mathématiques classiques et sa méfiance à l'égard des tentatives de rigorisation.

Au reste les géomètres connaissent parfaitement la nature des raisonnements qu'ils emploient; ils savent pour chacun d'eux jusqu'à quel point ils peuvent y avoir confiance. La sévérité exagérée que des métaphysiciens qui n'étaient pas géomètres ont à plusieurs reprises essayé d'introduire dans la géométrie et dans l'analyse n'a jamais fait faire un pas à la science, et elle a quelquefois retardé ses progrès en occupant les géomètres à des disputes frivoles et en les forçant d'épuiser leurs forces contre des fantômes.

(7) M. JOUSSE : *Le Secret d'architecture ...*, La Flèche, 1642, p. 1 (cité par R. TATON)

Il y a beaucoup de superbes Edifices qui ont très mal rëussi, pour avoir esté faits par des personnes qui ne sçavoient point les traits Geometriques necessaires à la couppe des pierres. Combien en a-t-on veu, & void t'on tous les jours de grands et riches Bastimens aller en ruine, & se perdre entièrement pour les mauvais assemblages des parties, pour les mauvais rappors des pierres les unes aux autres, pour n'avoir sçeu tailler et aprester les pierres comme il falloit? Vous m'advoüerez donc, qu'en fait d'Architecture, il est necessaire de sçavoir ce qui concerne la couppe des pierres & les traits Geometriques qui en donnent la reigle, puis que de l'ignorance de ce point procède la perte des Édifices, et de l'honneur des Architectes. Or est-il que de ce qui est de ce poinct, il ne s'en trouve rien dans les meillers Autheurs de tous les Anciens Architectes. Ne m'en croyez pas à ma parole, voyez s'il vous plaist, ceux que je vais vous nommer, & les lisez aussi soigneusement que j'ai fait, & vous serez contraints de m'accorder qu'ils ne nous ont laissé aucun précepte pour une chose tant nécessaire.

(8) Problème XIII (mémoire sur la théorie des surfaces (1775))
"*trois courbes quelconques étant données, construire une surface gauche engendrée par le mouvement d'une ligne droite et qui passe par ces trois courbes*".
(On cherche l'intersection de la surface réglée $\Sigma(D, C_1, C_2, C_3)$ avec une verticale arbitraire D en introduisant la surface réglée $\Sigma(D, C_1, C_2)$ et son intersection Γ avec la surface cylindrique projetant C_3 sur le plan horizontal.

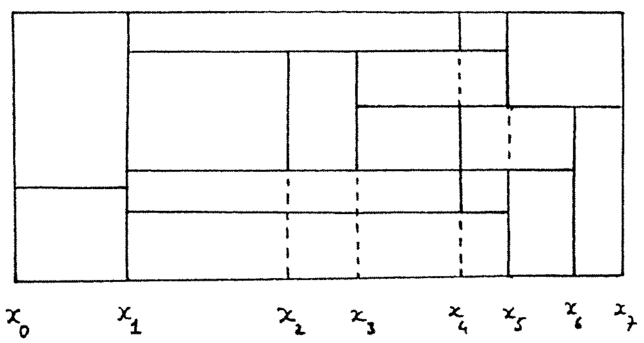
A VOS STYLOS

PROBLÈME 8

Enoncé

Appelons reQtangle, tout rectangle dont le rapport des côtés est rationnel. Démontrer que tout rectangle pavé par des reQtangles est lui-même un reQtangle.

Solution



Soient $x_0, x_1, \ldots, x_p$ les abscisses des côtés verticaux des rectangles du pavage, prises dans l'ordre croissant. Pour $0 \leq i < j \leq p$, intéressons-nous aux rectangles du pavage dont la projection sur l'axe des x est le segment $[x_i, x_j]$; la somme de leurs hauteurs est $a_{ij}(x_j - x_i)$ où a_{ij} est un rationnel ≥ 0 (nul s'il n'y a aucun tel rectangle). Posons $a_{ii} = 0$, et $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i > j$. Alors, pour tout i,

$$(*) \qquad \Sigma_j a_{ij}(x_j - x_i) = \begin{cases} h & \text{si} \quad i = 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < i < p \\ -h & \text{si} \quad i = p \end{cases}$$

En désignant par B la matrice carrée de terme général

$$\begin{cases} b_{ii} = & \Sigma_j a_{ij} \\ b_{ij} = & -a_{ij} \text{ si } i \neq j, \end{cases}$$

(*) se réécrit $BX = H$, où

$$X = \begin{pmatrix} x0 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad H = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}$$

Pour en déduire que $x_p - x_0$ est le produit de h par un rationnel, nous allons inverser cette relation. Le lemme qui suit dit que la matrice B n'est pas inversible, mais presque : connaissant h et B, on peut retrouver les x_i à une constante additive près.

LEMME. Le noyau de B, de dimension 1, est formé des multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il est clair que ce vecteur annule B. Réciproquement, si $BZ = 0$, on a pour tout i :

$$\Sigma_j \; a_{ij}(z_j - z_i) = 0$$

donc $\Sigma_i \; z_i \Sigma_j \; a_{ij}(z_i - z_j) = 0$, et $\Sigma_{ij} \; a_{ij}(z_i^2 - z_i z_j) = 0$.
Echangeant i et j et ajoutant, il vient $\Sigma_{ij} \; a_{ij}(z_i - z_j)^2 = 0$, donc $z_i = z_j$ dès que $a_{ij} > 0$, c'est-à-dire dès que l'un des rectangles du pavage joint x_i à x_j ; en définitive, tous les z_i sont égaux. CQFD.

Donc une certaine ligne de B est combinaison linéaire des p autres, qui sont elles indépendantes. Supprimons cette ligne du système $BX = H$, et remplaçons-la par l'équation $x_0 = 0$ (qui revient à choisir l'origine). On obtient maintenant un nouveau système $B'X = H'$, avec B' inversible; d'où $X = (B')^{-1}H'$. Comme B', $(B')^{-1}$ a tous ses coefficients rationnels; et puisque H' ne contient que $\pm h$ et 0, ceci entraîne $x_p = bh$ avec b rationnel.

Plus généralement, cette méthode établit que le rapport des côtés du grand rectangle appartient au sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré par les rapports des côtés des rectangles du pavage.

Comment pouvait-on tomber sur cette solution? Tout simplement grâce à une analogie électrique : imaginons le plan fait d'un matériau conducteur homogène, et parcouru d'un courant électrique uniforme de la droite vers la gauche. La différence de potentiel entre deux points est simplement la différence de leurs abscisses, et chaque rectangle du pavage est parcouru par une intensité égale à sa hauteur; sa résistance V/I est donc le rapport longueur/hauteur, et le pavage n'est rien d'autre qu'un réseau de résistances électriques, les nœuds du réseau correspondant aux x_i. En fin de compte, le problème est d'établir que si, dans un réseau de résistances électriques, chaque résistance est rationnelle, alors la résistance équivalente à tout le réseau est, elle aussi, rationnelle. Et maintenant tout bon manuel de physique donne la méthode : écrire, pour chaque nœud, la loi de KIRCHHOFF — c'est ce que fait (*) — et résoudre le système obtenu.

PROBLÈME 9

Enoncé

Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(0,0) = 0$ et que $f(x,y)$ soit le plus petit entier qui ne soit pas de la forme $f(x',y)$ avec $x' < x$ ou $f(x,y')$ avec $y' < y$. Fournir une méthode de calcul de f aussi simple que possible.

Indication

Penser à la numération binaire.

PROBLÈME 10

(proposé par D. DUMONT)

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, \ldots\}$ dont on propose trois définitions :

Définition 1 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 2 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 - xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 3 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + 3y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

1°) Montrer que ces trois définitions sont bien équivalentes.

2°) Montrer que E est stable pour la multiplication, c'est-à-dire que $n_1 \in E$ et $n_2 \in E \Rightarrow n_1 n_2 \in E$.

3°) Soit $P = \{3, 7, 13, 19, 31, 37, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Montrer que P se compose de 3 et de l'ensemble des nombres premiers de la forme $6k + 1$, et que pour ces nombres premiers la représentation sous la forme $x^2 + 3y^2$ est unique. En outre, si p est de la forme $6k + 1$ alors $4p$ s'écrit de manière unique comme suit :

$$4p = x^2 + 27y^2 \qquad (x, y \text{ entiers } > 0).$$

Une réponse exacte, mais malheureusement tardive, au problème n° 7 a été donnée par Monsieur GUINOT de Bourg en Bresse.

UNE LEÇON DE CONDORCET

(Extrait de CONDORCET, éd. ACL)

Voici quel est le système de numération actuellement usité en France.

Un ajouté à *dix*, *dix* et *un* s'appèlent ... *Dix-un.*
Un ajouté à *dix-un*, ou *deux* ajoutés à *dix*, *dix* et *deux*, s'appèlent... *Dix-Deux.*
Un ajouté à *dix-deux*, ou *trois* ajoutés à *dix*, *dix* et *trois*, s'appèlent ... *Dix-Trois.*
Un ajouté à *dix-trois*, ou *quatre* ajouté à *dix*, *dix* et *quatre*, s'appèlent ... *Dix-Quatre.*
Un ajouté à *dix-quatre*, ou *cinq* ajouté à *dix*, *dix* et *cinq*, s'appèlent ... *Dix-Cinq.*
Un ajouté à *dix-cinq*, ou *six* ajouté à *dix*, *dix* et *six*, s'appèlent ... *Dix-Six.*
Un ajouté à *dix-six*, ou *sept* ajouté à *dix*, *dix* et *sept*, s'appèlent ... *Dix-Sept.*
Un ajouté à *dix-sept*, ou *huit* ajouté à *dix*, *dix* et *huit*, s'appèlent ... *Dix-Huit.*
Un ajouté à *dix-huit*, ou *neuf* ajouté à *dix*, *dix* et *neuf* s'appèlent ... *Dix-Neuf.*

Arrivés à ce terme, nous ne disons pas dix-dix, pour exprimer *un* ajouté à *dix-neuf*, ou *dix* et *dix*; il est aisé de voir que ce moyen, si on le continuoit long-tems, conduiroit à former des noms trop longs, trop difficiles à reconnoître et à prononcer; on l'appèle donc *duante* : ainsi,

Un et *dix-neuf*, *dix* et *dix*, s'appèlent ... *Duante.*
Un et *duante* s'appèlent ... *Duante-Un.*
Un et *duante-un*, *duante* et *deux*, s'appèlent ... *Duante-Deux.*
Un et *duante-deux*, *duante* et *trois*, s'appèlent ... *Duante-Trois, etc.*
.../...
Un et *duante-huit*, *duante* et *neuf*, s'appèlent ... *Duante-neuf.*
Un et *duante-neuf*, *duante* et *dix*, s'appèlent ... *Trente.*

Dès-lors vous voyez que *trente* et *un* s'appèle *trente-un*, et ainsi de suite jusqu'à *trente* et *neuf*, qui s'appèlent ... *Trente-neuf.*

Par conséquent, on prononce :

Un et *trente-neuf*, *trente* et *dix*, par le mot ... *Quarante.*
Un et *quarante-neuf*, *quarante* et *dix*, par ... *Cinquante.*
Un et *cinquante-neuf*, *cinquante* et *dix*, par ... *Soixante.*
Un et *soixante-neuf*, *soixante* et *dix*, par ... *Septante.*
Un et *septante-neuf*, *septante* et *dix*, par ... *Octante.*
Un et *octante-neuf*, *octante* et *dix*, par ... *Nonante.*

On aura un moyen d'exprimer successivement tous les nombres, depuis *un* jusqu'à *nonante-neuf*, *nonante* et *dix*, par ... *Cent.*