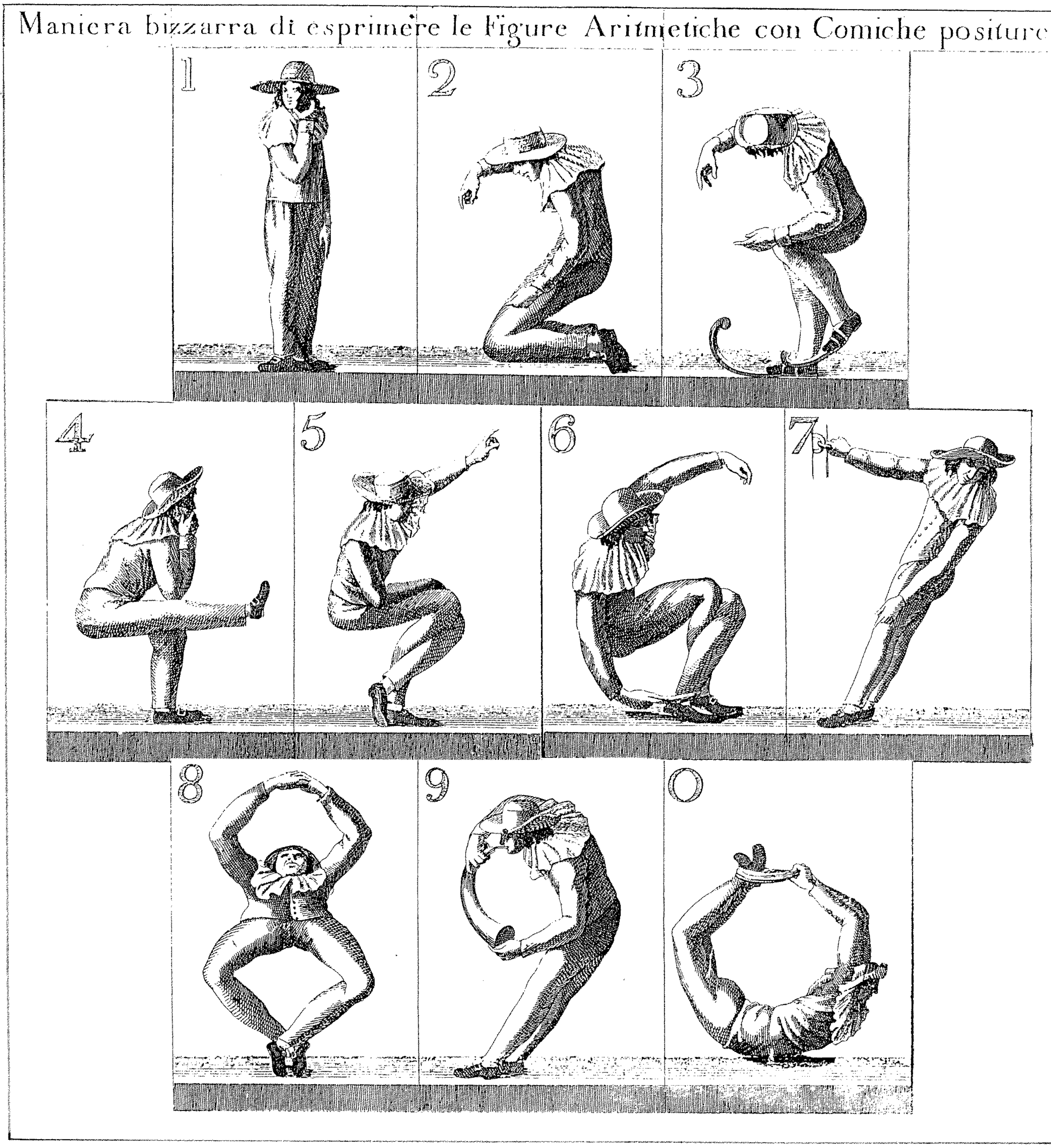
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 58 – MARS 1990 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

"MANIERA BIZZARA DI ESPRIMERE
LE FIGURE ARITMETICHE CON COMICHE POSITURE"

Posture comique pour représenter de façon étrange les chiffres.

D'après une gravure italienne du début du 19^{e} siècle. Collection de Massin. Notre couverture résulte d'un montage de la gravure reproduite dans "La lettre et l'image" par Massin chez Gallimard.

'L'Ouvert' et son avenir

C'est toujours un sujet d'inquiétude pour ceux qui s'occupent de la publication de *'L'Ouvert'* que de trouver des articles pour assurer la parution des numéros à venir. Certains reprocheront la part trop belle faite à l'enseignement supérieur et le présent numéro n'échappe pas à la règle, mais il témoigne aussi d'une large ouverture par la présence d'auteurs étrangers et en particulier de M. de GUZMÀN, professeur à l'Université Complutense de Madrid.

L'enseignement en lycée ne peut être présent que grâce à vous lecteurs. Pourquoi ne nous faites-vous pas parvenir des "*notes de cours*", c'est-à-dire la présentation originale d'un théorème ou d'une théorie classique, l'idée d'un rapprochement inhabituel de plusieurs thèmes ...? Toute chose que vous faites ou découvrez dans vos classes et qui mérite d'être transmise bien au delà du cercle restreint des collègues de votre établissement.

A vous de jouer!

J. LEFORT.

P.S. : Au fil des pages, on trouvera quelques résultats d'une enquête commandée par les Ministères de la culture, de l'éducation et de la recherche sur "*les mécanismes de socialisation à la science et à la technique*". Elle porte sur un échantillon de 1095 enfants de 11 à 17 ans, réparti selon la méthode des quotas (sexe, âge, profession du chef de ménage et catégorie d'agglomération).

On en trouvera un compte rendu détaillé dans la revue "*Culture technique*" n° 20, 4e trimestre 1989, p. 29 et suivantes.

SOMMAIRE

N° 58 – 1990

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 25.– F

SUR L'INVITATION ET L'INITIATION À LA RECHERCHE

Dominique DUMONT

Fidèle lecteur de '*L'Ouvert*', j'ai cru répondre à son appel en proposant plusieurs problèmes, soit originaux soit trop peu connus, pour qu'ils soient soumis aux lecteurs de cette revue. Mais comme je n'ai pas envoyé de solutions, la rédaction a réagi en me faisant savoir que sa "politique éditoriale" était de ne publier que des problèmes résolus. La meilleure méthode pour elle de s'assurer qu'ils le sont consiste à exiger des correspondants qu'ils envoient les solutions des problèmes qu'ils posent. Un autre moyen consiste bien sûr en ce que la rédaction résolve elle-même les problèmes avant de les publier, mais cette procédure-là présente deux inconvénients : d'une part elle fait la part trop belle au correspondant, puisqu'elle aboutit à faire faire par la rédaction un travail que lui devrait faire, d'autre part elle présente le risque que la rédaction ne sache pas résoudre le problème posé (*).

Pour ma part je persiste à penser que c'est une habitude désastreuse d'envoyer les solutions des problèmes qu'on pose. La rédaction de '*L'Ouvert*' m'ayant libéralement proposé de défendre mon point de vue, je vais à présent tenter de le faire, en centrant le débat sur les points suivants : à quoi sert au juste une rubrique de problèmes dans une revue? Qu'est-ce qu'une initiation à la recherche mathématique? Les deux questions précédentes sont-elles liées ou non?

On se demande parfois, pour aborder la première question, si certaines rubriques de "problèmes" ne sont pas avant tout des occasions pour d'incorrigibles professeurs-évaluateurs de faire encore passer des examens à leurs lecteurs. "Très bonne solution de M. Machin, bonnes solutions de MM. Chose et Autre, etc". La "*Revue de Mathématiques Spéciales*" reste attentive à complimenter ses lecteurs professeurs, qui ont été et seraient toujours de **bons élèves**. L'une des règles de ce jeu est évidemment de détenir les solutions des problèmes. Un bon professeur doit savoir résoudre les problèmes qu'il pose à ses élèves, or nous sommes des professeurs de professeurs, par conséquent cette règle s'applique à nous.

C'est cette idée que je conteste, car elle contribue à maintenir le fossé existant entre l'enseignement et la recherche. Nous sommes des **enseignants chercheurs**, et dès que nous sommes un peu chercheurs l'obligation de détenir et dispenser la connaissance devient dérisoire et prétentieuse. En outre je refuse que l'on tienne pour acquis que seuls les universitaires sont des enseignants chercheurs. Peut-être en effet ont-ils seuls le statut (et les privilèges en matière de charges d'enseignement) d'enseignants-chercheurs, mais je ne vois absolument pas au nom de quoi les universités et le CNRS auraient le monopole de toute recherche. Je

© L'OUVERT 58 (1990)

(*) N.D.L.R. : Ce qui est déjà arrivé.

pense au contraire que tout mathématicien qui aime les Mathématiques se doit d'être un peu chercheur, même si comme WEIERSTRASS il enseigne dans un lycée. Rappelons que WEIERSTRASS est resté dans un Gymnasium jusqu'à passé l'âge de 40 ans, à enseigner la géographie, les sciences naturelles etc, et à s'occuper de recherches mathématiques durant ses loisirs. Quand bien même il ne deviendrait pas un nouveau WEIERSTRASS, un professeur de lycée d'aujourd'hui peut fort bien avoir le goût et même la passion de la recherche mathématique. Un non professionnel aussi, d'ailleurs, car faut-il rappeler que FERMAT était magistrat, que FOURIER était préfet, que l'actuel chef de file de la Combinatoire en France, M.-P. SCHÜTZENBERGER, était au départ médecin de par sa profession? Il y a toujours eu, à des degrés divers dans le mérite et la réputation, de nombreux chercheurs qu'on peut qualifier de "non institutionnels" (terme préférable à celui d'"amateurs").

Une rubrique de problèmes dans une revue peut certainement jouer un rôle de point de rencontre entre gens qui, de près ou de loin, s'occupent de, ou s'intéressent à, la recherche mathématique. L'intérêt est similaire à celui que présentent des activités telles que les "clubs mathématiques" parmi les lycéens. Il s'agit ni plus ni moins de rappeler que l'activité des mathématiciens consiste essentiellement, comme dit DIEUDONNÉ ("Penser les mathématiques", éd. Seuil, coll. Points, p. 23-24), à se poser des devinettes et à tenter d'y répondre. La recherche commence dès qu'il apparaît clairement que le problème posé est "hors programmes", qu'il faut trouver une méthode et non se contenter d'appliquer ce qui marche dans la routine des exercices au programme. Ce type d'activités a évidemment plus de rapport avec la recherche mathématique que les études secondaires et universitaires au cours desquelles on demande aux étudiants d'absorber sans renâcler quantité de théories, et quelques rares méthodes vraiment utiles pour résoudre certains problèmes, et où on ne leur demande jamais d'**inventer** quoi que ce soit, ou du moins de réfléchir dans ce sens. L'année de DEA ne fait nullement exception, puisque comme son nom l'indique c'est une année d'études approfondies. Comprenons-nous, il ne s'agit pas ici de dénier tout intérêt à ces études, simplement d'affirmer qu'elles ne sont pas une initiation à la recherche, ni même une préparation à la recherche en tant que démarche intellectuelle spécifique.

Une authentique initiation à la recherche doit être précédée d'une **invitation** à la recherche, et celle-ci ne saurait consister à ne poser que des problèmes résolus. Imaginez un jeune inspecteur de police à qui son patron dirait :

"J'ai décidé de vous confier l'affaire du crime de la rue Descartes. Mais je vous préviens, j'ai déjà identifié le coupable, c'est juste pour voir comment vous vous débrouillez...".

Après quelque temps de ce régime, ce patron s'étonnerait de voir le jeune homme manquer d'enthousiasme dans ses enquêtes policières. Non, un bon patron de recherche est celui qui formule à la fois son ignorance personnelle et son espoir que son élève fasse progresser l'enquête, et même résolve l'énigme.

Certes on peut concevoir que si la rédaction de '*L'Ouvert*' ne pose que des problèmes dont elle détient les solutions, c'est dans l'intention charitable d'épargner à ses lecteurs la peine inutile (?) de travailler sur des problèmes trop difficiles pour eux. En effet, un préjugé bien ancré veut que les problèmes de mathématiques se répartissent en deux catégories : les problèmes résolus et les problèmes "ouverts". Les problèmes résolus sont de difficultés variables, ils peuvent même être franchement difficiles (genre olympiades), s'ils ne sont pas trop difficiles ils sont bons pour les lecteurs de '*L'Ouvert*'. Les problèmes dits "ouverts" et autres terribles "conjectures" forment la seconde catégorie, ils sont toujours par essence extrêmement difficiles et ne sont bons que pour une espèce supérieure de mathématiciens, lecteurs d'autres revues que '*L'Ouvert*'.

Tout chercheur sait parfaitement que cette vision des choses est caricaturale, qu'il n'y a pas d'un côté les problèmes qu'on sait résoudre et de l'autre les problèmes qu'on ne sait pas résoudre, puisque l'essentiel de l'activité d'un chercheur consiste précisément à s'intéresser à des problèmes qu'il ne classe dans aucune de ces deux catégories. Le sort de celui qui cherche est très souvent de "tomber" sur un problème au sujet duquel il ne sait **rien**. Il ne sait pas si ce problème est nouveau ou déjà posé (probablement sous une autre forme) "quelque part dans la littérature", il ne sait pas si ce problème est facile ou difficile, s'il saura bientôt le résoudre ou si cet espoir est vain, si un autre que lui-même serait mieux armé pour le résoudre, si une meilleure connaissance de telle ou telle théorie pourrait l'aider, bref il ne sait rien.

Son réflexe naturel est alors de se tourner vers d'autres mathématiciens, pour tenter de s'informer auprès d'eux, de les informer et de susciter leur intérêt pour son problème. Dans la plupart des cas il ne rencontrera qu'indifférence, ou plutôt indisponibilité chez ces mathématiciens qui sont eux aussi des chercheurs suffisamment préoccupés comme ça par leurs propres problèmes ou par de tout autres tâches. Si, comme c'est souvent le cas, notre chercheur ne s'est posé ce problème "qu'incidemment", si ce n'est pas un point fondamental de ses recherches en cours, alors il abandonnera purement et simplement son problème, sans avoir pu y intéresser qui que ce soit et sans y avoir sérieusement réfléchi lui-même, et en sachant pertinemment qu'il n'a aucune raison a priori de penser que ce problème soit réellement difficile. Il est simplement dommage qu'il n'ait pas à cette occasion réussi à inviter et à initier à la recherche quelqu'un de disponible :

"Je vous invite à travailler sur l'affaire de la rue Descartes, sur laquelle je n'ai pu réunir le moindre élément. Je n'ai pas le temps de m'en occuper moi-même, je suis trop pris par la rue Blaise Pascal, il est possible d'ailleurs que les deux affaires soient liées, et c'est pourquoi nous devons rester en contact. Consultez les fichiers, remontez les filières, tâchez d'interroger la gouvernante, cette Irma qui veut donner l'impression de tout savoir. C'est une éventualité à envisager qu'elle sache effectivement la vérité, auquel cas tout l'art serait de réussir à la faire parler. Tenez-moi au courant de tout progrès de votre enquête".

On pourra objecter que beaucoup de problèmes de recherche en mathématiques ne s'expriment pas en langage élémentaire et ne peuvent guère concerner que des spécialistes. C'est indiscutable, certains sujets sont devenus au fil des années hautement techniques et sont plus ou moins hermétiques aux non spécialistes, qui peuvent tout au plus espérer être informés dans des conférences de vulgarisation des progrès de ces sujets de recherche, mais non participer à ces progrès. Il n'en demeure pas moins qu'existent au moins trois immenses domaines des mathématiques où l'on peut encore énoncer et résoudre en termes élémentaires de très nombreux problèmes de recherche, ce sont la théorie des nombres, la géométrie et la combinatoire. Ces problèmes peuvent intéresser et inspirer un vaste public de gens susceptibles d'être attirés par les joies que procurent l'invention et la découverte, je crois que c'est le cas de nombreux lecteurs de '*L'Ouvert*'. Je voudrais donc conclure en exposant comment cela pourrait se répercuter au niveau de la rubrique de problèmes.

Voici comment on pourrait distribuer les rôles (d'ailleurs interchangeables) entre les trois acteurs principaux : les correspondants qui soumettent des problèmes, la rédaction de la revue, les lecteurs qui réagissent aux problèmes.

1) Le correspondant doit faire l'effort de soumettre un problème d'un type bien particulier, c'est-à-dire un problème original, ou du moins peu connu. Dans l'idéal le problème se compose d'abord d'une partie assez facile, que le correspondant sait résoudre, puis d'une partie qu'il ne sait pas résoudre mais sans y avoir beaucoup réfléchi, ce qui signifie donc qu'elle n'est pas forcément difficile. Tout dans la rédaction de l'énoncé doit être incitatif, doit montrer au lecteur qu'on travaille avec des objets qui lui sont familiers. Par conséquent l'astérisque qui prévient le lecteur qu'on aborde une question non résolue par le correspondant est évidemment à proscrire, car chacun sait l'effet dissuasif d'un tel signe distinctif.

Au départ, le correspondant n'envoie pas de solution, il n'enverra de solution que si les lecteurs le demandent explicitement.

2) Le rôle de la rédaction se borne à juger de l'intérêt du problème soumis. Un problème présente de l'intérêt s'il est original et s'il est de nature à susciter des réactions chez les lecteurs, le niveau de difficulté supposé ne doit jouer aucun rôle dans la décision de publication.

3) Les lecteurs envoient leurs solutions, même partielles, à défaut des lettres montrant leur intérêt pour le problème. Si le problème ne suscite pas d'écho on n'y reviendra plus, en particulier on ne publiera pas l'éventuelle solution du correspondant. Si au contraire il y a des réactions, on met les lecteurs rapidement en contact avec le correspondant, ensemble ils préparent un petit dossier sur l'état d'avancement du problème, à publier rapidement (et non des années plus tard comme dans un mensuel américain bien connu).

Je pense très sérieusement que cela pourrait permettre à certains chercheurs de sortir de cet isolement qui est une plaie très répandue dans la recherche mathématique. Je pense tout aussi sérieusement que cela pourrait conduire beaucoup de gens à se sentir véritablement concernés par ce que font les chercheurs. Car c'est par le décloisonnement du petit milieu de la recherche mathématique, et par son ouverture au monde extérieur, qu'on pourra concrétiser l'intention généreuse d'Alain CONNES, telle qu'elle s'exprime dans la phrase concluant son livre :

"*Ce qui m'importe surtout en fait, c'est de faire partager à d'autres l'essentiel de ce qui habite la recherche mathématique, le sens que l'on peut donner à la "quête du vrai", et la joie intérieure que l'on peut éprouver à s'y abandonner.*" ("Matière à pensée", entretiens avec J.-P. CHANGEUX, éd. Odile JACOB.)

Pour chacune des matières suivantes, je voudrais que tu me dises si en général à l'école, tu as des notes au-dessus de la moyenne, à peu près à la moyenne, en dessous de la moyenne :

	au-dessus	*moyenne*	*en dessous*	*n'en fait pas*	*SR*
Langues vivantes	49	30	17	4	1
Histoire-géo	50	31	17	1	0
Français	49	30	20	0	0
Maths	47	26	26	0	0
Dessin	53	22	10	14	1
Musique	41	15	12	31	0
Latin	8	5	4	81	2
Physique	45	27	21	7	0
Biologie, géologie	44	28	15	13	0
Ateliers techniques	40	16	6	38	1

Les intérêts des enfants se distribuent assez régulièrement selon les différentes disciplines; les matières scientifiques se rangent à peu près au même niveau que les autres à l'exception de la physique qui suscite peu d'attrait (33%).

A travers ces choix se dessine une carte reflétant une intériorisation précoce du sentiment de compétence en fonction du sexe. On l'a vu, les filles dans leur ensemble adoptent des attitudes moins favorables vis-à-vis du champ scientifique. De même, à l'école, elles manifestent un moindre intérêt pour les matières appartenant à ce domaine. Elles choisissent plus volontiers les disciplines littéraires : 49 % d'entre elles disent s'intéresser beaucoup aux langues vivantes contre seulement 39 % des garçons, 53 % au français contre 35 % des garçons, par ailleurs elles cultivent davantage la musique ou le dessin. En revanche, les garçons sélectionnent plus souvent les matières scientifiques : 52 % d'entre eux disent s'intéresser beaucoup aux maths contre seulement 37 % des filles, 43 % à la physique contre 25 % des filles, et davantage aux activités proposées dans les ateliers techniques. Sur les sciences de la vie en revanche, on n'observe pas de différences en fonction du sexe.

L'analyse des distributions concernant les notes obtenues donne des résultats analogues. Pourtant les statistiques scolaires montrent qu'en moyenne les garçons ne surpassent nullement les filles dans les matières scientifiques. La discrimination culturelle fonctionne donc de façon si efficace qu'elle conduit les filles non seulement à dénier leur intérêt pour les matières "masculines" mais en plus à se déprécier et à nier leur propre compétence.

RÉFLEXIONS AUTOUR D'UNE TASSE DE THÉ

Albert TROESCH

"Laissez tomber une goutte de thé non loin du centre de la tasse. Les ondes se rassembleront au point symétrique. La raison est qu'en vertu de la définition focale de l'ellipse, les ondes issues d'un foyer de l'ellipse se rassemblent dans l'autre."

Ce texte est extrait du livre d'ARNOLD : "*Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*" ([1] p. 45, note en bas de page). Son but est d'illustrer le fait qu'"une ellipse de faible excentricité ressemble beaucoup à un cercle", rôle qu'elle remplit à merveille! Mais étant donné sa nécessaire concision, elle comporte un certain nombre de sous-entendus. Nous commencerons donc par commenter successivement ces trois phrases, puis nous donnerons une autre explication du phénomène signalé.

1. COMMENTAIRES :

Commençons par examiner la première phrase : "*Laissez tomber une goutte de thé non loin du centre de la tasse*". Le fait d'avoir à distinguer entre points proches et non proches du centre suggère que le phénomène décrit n'est pas observable pour toutes les positions possibles du point d'impact de la goutte sur la surface du liquide. Faut-il alors comprendre que la convergence des ondes a lieu rigoureusement jusqu'à une distance maximale d et cesse brutalement d'être observée pour des distances plus grandes? Ou plutôt faut-il comprendre qu'elle n'a jamais lieu rigoureusement, mais que ce qui est observé est d'autant plus proche de la situation idéale décrite que la distance au centre est petite? Cette dernière interprétation signifierait que nous sommes en présence d'un phénomène asymptotique, c'est-à-dire d'une description idéale dont le phénomène réel s'approche d'autant mieux que certains paramètres sont petits. Comme les lois de réflexion des ondes de l'optique géométrique dont l'emploi est sous-entendu, ne sont valables que pour des distances de propagation grandes par rapport à la longueur d'onde (la propagation des ondes sous forme de rayons est aussi un phénomène asymptotique) la dernière explication est sans doute la plus probable!

Quel sens faut-il alors donner à l'expression en italique? Si nous voulons faire une analyse mathématique du phénomène de réflexion des ondes dans une tasse il nous faudra préciser ce sens. En effet, du point de vue de la mathématique classique les nombres résultant des mesures de longueur sous-entendues ne peuvent être classés qu'arbitrairement en *grands* et *petits*, classement qui seul pourrait donner un sens à "*non loin de*". Ce qui précède suggère que nous pourrions utiliser le langage des développements asymptotiques et supposer que la distance au centre de la tasse est un paramètre qui tend vers 0, ainsi que la longueur d'onde, et de plus que le rapport entre la longueur d'onde et la distance au centre tend vers 0 ... Nous préfèrerons utiliser l'analyse non standard dont les concepts sont bien plus suggestifs et proches du langage utilisé dans le texte d'ARNOLD : nous traduirons *non loin* par *infiniment proche*.

L'apparente précision de la deuxième phrase : "*Les ondes se rassembleront au point symétrique*" n'est qu'illusoire d'après ce qui précède étant donné que le point de focalisation des ondes ne peut être déterminé qu'avec une précision de l'ordre de la longueur d'onde. Encore un argument qui milite pour le caractère asymptotique du phénomène.

La dernière phrase apparaît comme une tentative d'explication du phénomène de convergence des ondes après réflexion sur le bord de la tasse. Cette explication fait appel aux propriétés focales des ellipses, ce qui suppose que l'on assimile le bord de la tasse à une ellipse dont l'un des foyers serait le point d'impact. Cette *approximation* du bord par une ellipse est assez surprenante étant donné l'arbitraire de ce choix; on s'attendrait à une approximation par un objet plus symétrique, par exemple par un cercle. C'est une telle approximation que nous utiliserons par la suite. Mais peut-être ne faut-il voir dans cette phrase qu'une constatation : tout se passe comme si le bord de la tasse était une ellipse dont l'un des foyers est le point d'impact de la goutte sur le liquide.

2. LE PHÉNOMÈME DE RÉFLEXION DES ONDES DANS UNE TASSE D'UN POINT DE VUE NON STANDARD :

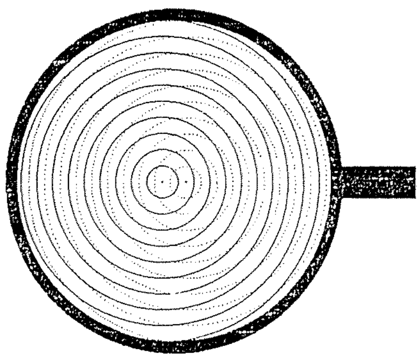


Figure 1

2.1. Quelques rappels d'analyse non standard (1).

• En analyse non standard il n'y a pas de définition d'un *objet standard*, tout comme dans la théorie des ensembles, le terme *ensemble* n'est pas défini : il ne prend son sens que par l'intermédiaire d'une série d'axiomes. De la même manière le terme standard ne prend son sens que par l'intermédiaire d'axiomes (ajoutés à ceux de la théorie des ensembles) qui régissent son emploi. Ceux-ci sont au

(1) Que le lecteur ne se laisse pas impressionner par ces mots et poursuive la lecture.

nombre de trois. Nous ne les donnerons pas. Le lecteur peut très bien se passer de leur énoncé technique, tout comme il peut se passer de l'énoncé des axiomes de la théorie des ensembles, sans préjudice pour son activité mathématique. Nous en donnerons seulement quelques conséquences simples et immédiates qui nous seront utiles par la suite et qu'on pourra considérer comme des axiomes.

• Tout objet mathématique qui est caractérisé de manière unique dans la mathématique usuelle est standard.
Exemples : $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \ldots 0, 1, 2 \ldots \sqrt{2}, e, \pi \ldots$

• Tout ensemble standard non vide a des éléments standard.

• Deux ensembles standard ayant les mêmes éléments standard sont égaux.

• Tout ensemble infini a des éléments non standard.

• Il existe des nombres réels *infiniment petits* c'est-à-dire dont la valeur absolue est inférieure à tout nombre standard strictement positif. Deux nombres réels x et y sont *infiniment proches* (ce qui se note $x \simeq y$) si leur différence est infiniment petite.

• Il existe des nombres réels *infiniment grands* c'est-à-dire dont la valeur absolue est plus grande que tout nombre standard. Un nombre non infiniment grand est appelé *limité*. En particulier tout nombre standard est limité.

• La somme et le produit de deux nombres standard sont standard. La somme et le produit de nombres limités sont limités.

• Pour tout nombre limité x de $\mathbb{R}$ il existe un unique nombre standard $^\circ x$ de $\mathbb{R}$ tel que $x -^\circ x$ est infiniment petit. Ce nombre standard est appelé la *partie standard* de x.

• Propriétés : $^\circ(xy) =^\circ x^\circ y^\circ(x+y) =^\circ x +^\circ y$.

• Pour tout point limité x de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire dont les coordonnées sont limitées) il existe un unique point standard $^\circ x$ infiniment proche de x et appelé *partie standard* de x. Ses coordonnées sont les parties standard des coordonnées de x.

• Pour toute partie A de $\mathbb{R}^2$ il existe un ensemble standard unique $^\circ A$ dont les éléments standard sont les parties standard des points limités de A. Cet ensemble standard est appelé l'ombre de A (axiome de standardisation cf. [2] et [3]). Si nous convenons que notre champ de vision se limite aux points limités de $\mathbb{R}^2$ et que notre acuité visuelle ne permet pas de distinguer des points infiniment proches (ce qui dépasse de très loin les qualités de notre vision réelle), nous devons en conclure que nous ne pouvons pas distinguer un ensemble A de son ombre $^\circ A$.

• Une fonction standard f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est continue au point standard $^\circ x$ si pour tout y infiniment proche de $^\circ x$ on a : $f(y) \simeq f(^\circ x)$.

2.2. Hypothèses et formulation non standard :

Pour décrire le phénomène asymptotique, nous utilisons à présent quelques éléments très simples d'analyse non standard (2) (cf. [2] et [3]). Pour cela nous ferons les hypothèses suivantes :
1) La distance du point d'impact au centre de la tasse est un infiniment petit.
2) Le rapport de la longueur des ondes de liquide à cette distance est un infiniment petit.

L'hypothèse 1) idéalise le fait que le point d'impact est *non loin du centre* : ici cette expression prend donc un sens précis.

L'hypothèse 2) garantira que les lois de l'optique géométrique seront valables à toutes les échelles d'observation que nous utiliserons.

En examinant le centre de la tasse avec une loupe sous laquelle le point d'impact est par exemple à la distance 1 du centre, il suffira de montrer que les lois de l'optique géométrique ont pour conséquence que tout rayon issu du point d'impact passe en un point infiniment proche du point symétrique. Le lecteur se convaincra facilement que cette situation presque idéale pour des distances infiniment petites restera approximativement vraie pour des distances standard mais "assez petites" et que cette propriété non standard décrit parfaitement le phénomène asymptotique de réflexion dont parle ARNOLD. Nous pourrions évidemment traduire cette propriétés en termes de mathématique classique, nous n'en ferons rien, estimant que la propriété non standard est bien plus parlante que sa traduction compliquée.

2.3. Quelques remarques et rappels :

Notre étude de la réflexion des ondes dans une tasse repose sur les trois remarques suivantes :

Remarque 1 :
Deux droites passant par des points limités et ayant un point d'intersection infiniment grand ont des ombres parallèles.

Remarque 2 :
Deux droites passant par des points limités et dont les ombres ne sont pas parallèles se coupent en un point limité dont la partie standard est le point d'intersection des ombres des deux droites.

Remarque 3 :
Soient D et D' deux droites passant par des points limités, et ayant un point d'intersection infiniment grand. Soit B la bissectrice de l'angle infiniment petit formé par ces deux droites. Les ombres des droites D, B et D' sont des droites parallèles équidistantes.

Les deux premières sont des conséquences immédiates des remarques suivantes :

(2) Non, cher lecteur n'abandonnez pas la lecture ici, encore un petit effort S.V.P.

Remarque 4 :
L'ombre d'une droite D passant par un point limité est une droite ${}^\circ D$. De plus l'ombre d'un vecteur unitaire de D est un vecteur unitaire de ${}^\circ D$.

En effet, soit X un point limité de D et u un vecteur directeur unitaire de D. Alors les points limités de D sont les points $x + tu$ où t est un réel limité. L'ensemble ${}^\circ D$ est l'ombre de la droite D donc les points standard de ${}^\circ D$ sont les points ${}^\circ(x + tu) ={}^\circ x +{}^\circ t {}^\circ u$ (pour t limité). Les points standard de ${}^\circ D$ sont donc les points standard de la droite standard passant par ${}^\circ x$ et de vecteur directeur ${}^\circ u$. Ces deux ensembles standard ayant les mêmes éléments standard sont donc égaux. De plus (continuité de la norme) $\|{}^\circ u\| \simeq \|u\| = 1$ et comme $\|{}^\circ u\|$ est standard $\|{}^\circ u\| = 1$.

Remarque 5 :
Si D est une droite passant par des points limités, et si z est un point infiniment grand de D alors ${}^\circ(z/\|z\|)$ est un vecteur unitaire de ${}^\circ D$.

Soient x et u respectivement un point limité et un vecteur unitaire de D. Il existe alors un t infiniment grand tel que $z = x + tu$. De plus

$$\frac{z}{\|z\|} = \frac{x}{\|z\|} + \frac{tu}{\|z\|} \simeq \frac{tu}{\|z\|} \simeq \text{signe}(t)u.$$

Il en résulte que les vecteurs unitaires $z/\|z\|$ et signe$(t)u$ ont pour ombre le vecteur directeur unitaire signe$(t){}^\circ u$ de ${}^\circ D$.

Démonstration de la remarque 3 :
D'après la remarque 1 les trois droites D, B et D' sont parallèles. Il reste à montrer qu'elles sont équidistantes.

Considérons le cercle de centre le point d'intersection z de D et D' et passant par l'origine. L'ombre de C est la droite orthogonale aux ombres des trois droites D, D' et B, et passant par l'origine. En effet soient (z_1, z_2) les coordonnées de z et $x = (x_1, x_2)$ un point limité non infiniment petit de C. Nous avons alors la relation

$$(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2.$$

Il en résulte après division par $\|z\|$:

$$x_1\Big(\frac{x_1}{\|z\|} - \frac{2z_1}{\|z\|}\Big) + x_2\Big(\frac{x_1}{\|z\|} - \frac{2z_1}{\|z\|}\Big) = 0.$$

Par conséquent

$${}^\circ x_1 \cdot {}^\circ\Big(\frac{z_1}{\|z\|}\Big) + x_2 \cdot {}^\circ\Big(\frac{z_2}{\|z\|}\Big) = 0,$$

ce qui montre que x est orthogonal à ${}^\circ D, {}^\circ D'$ et ${}^\circ B$.

Soient d, d' et b les points d'intersection limités de C avec D, D' et B. Les parties standard de ces trois points sont alignées sur ${}^\circ C$, de plus

$$\|d - b\| = \|d' - b\|.$$

Il résulte de la continuité de la norme

$$\|d - b\| \simeq \|{}^\circ d - {}^\circ b\|$$
$$\|d' - b\| \simeq \|{}^\circ d' - {}^\circ b\|.$$

Par conséquent les réels standard (infiniment proches) $\|{}^\circ d - {}^\circ b\|$ et $\|{}^\circ d' - {}^\circ b\|$ sont égaux.

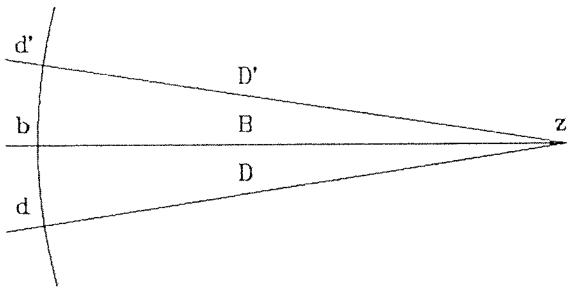


Figure 2

2.4. Cas d'une tasse à bord circulaire :

Nous assimilerons la surface libre du liquide au repos à un sous ensemble de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$.

Nous supposerons que le bord de la tasse est un cercle standard, par exemple le cercle de rayon 1 centré à l'origine, et que la goutte tombe à une distance infiniment petite ε du centre O.

Un rayon issu du point d'impact I (normale au front d'onde) se réfléchit sur le bord de la tasse selon la loi usuelle de la réflexion. Appelons x et y les coordonnées dans $\mathbb{R}^2$.

Pour étudier de façon plus précise le rayon réfléchi nous faisons le changement de coordonnées suivant :

$$\varepsilon X = x, \varepsilon Y = y.$$

C'est-à-dire que nous observons le centre de la tasse à l'aide d'une "loupe" de grossissement infiniment grand $1/\varepsilon$.

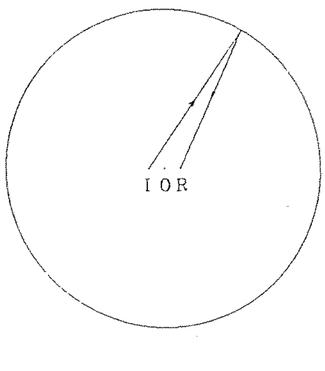


Figure 3

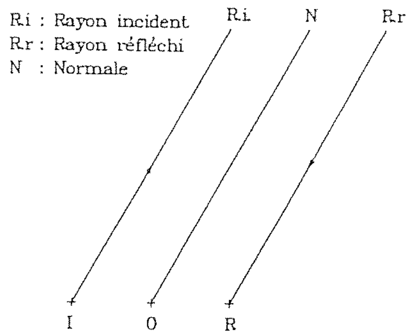


Figure 4

Dans ces nouvelles coordonnées le bord de la tasse est maintenant un cercle de rayon infiniment grand $1/\varepsilon$. Le rayon incident, la normale au bord de la tasse au point d'incidence et le rayon réfléchi forment donc trois droites concourantes en un point infiniment grand. La normale et le rayon incident passent par des points limités. De plus la normale est la bissectrice de l'angle infiniment petit formé par les deux autres droites. D'après la remarque 3 les ombres des trois droites sont parallèles et équidistantes. L'ombre du rayon réfléchi passe ainsi par le point R symétrique de I par rapport à O. Nous avons donc montré que *les ondes issues de I convergent, après réflexion sur le bord de la tasse, vers le point R symétrique de I par rapport à O.*

Remarque :
D'un point de vue physique ceci signifie que si ε est très petit, et si la longueur d'onde est très petite par rapport à ε alors la distance du rayon réfléchi au point R est très petite par rapport à ε. On remarquera la similitude des points de vue physique et non standard.

Dans la mathématique classique, ce que nous venons de montrer pourrait se traduire partiellement de la manière suivante :
Si ε désigne la distance du point d'impact au centre $O, \lambda(\varepsilon)$ une fonction représentant la longueur de l'onde issue de I, et si $d(\varepsilon)$ est la distance du rayon réfléchi au point symétrique R, alors si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda(\varepsilon)/\varepsilon = 0 \text{ on a } \lim_{\varepsilon \to 0} d(\varepsilon)/\varepsilon = 0.$$

2.5. Cas d'une tasse à bord elliptique de faible excentricité :

Le raisonnement précédent est encore valable pour une tasse qui n'est pas parfaitement circulaire, à condition que l'hypothèse (H) suivante soit vérifiée :

En tout point du bord de la tasse, la normale à celui-ci passe par un point dont la distance au centre est infiniment petite par rapport à la distance du point d'impact I au centre.

Dans ce cas, dans la loupe de grossissement $1/\varepsilon$, l'ombre de la normale passe par l'origine.

L'hypothèse (H) est vérifiée en particulier lorsque la tasse est elliptique mais que la distance focale est au plus de l'ordre de la distance de I à O. En effet, considérons un rayon issu de l'un des foyers. Soit ε la distance focale infiniment petite de l'ellipse. Prenons pour I le foyer F_1. Dans la loupe de grossissement $1/\varepsilon$, d'après les propriétés focales de l'ellipse et la remarque 3, le rayon incident F_1M, la normale au point d'incidence et le rayon réfléchi F_2M ont pour ombres trois droites équidistantes : l'ombre de la normale passe donc par le centre de l'ellipse dans la loupe de grossissement $1/\varepsilon$. Ainsi la distance de la normale au centre est infiniment petite par rapport à ε.

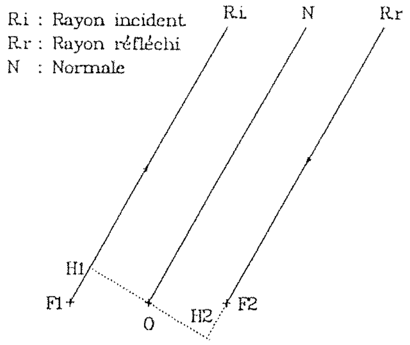


Figure 5

De plus il est facile de voir que

$$2OM = F_1M + F_2M + \delta$$

où δ est infiniment petit par rapport à $OF_1 = \varepsilon$.

3. REMARQUES FINALES :

1. Pour une ellipse d'excentricité infiniment petite, le rayon de courbure est infiniment proche du rayon du cercle qui est son ombre. Mais en général la condition (H) n'implique pas la proximité infinitésimale des rayons de courbure, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Considérons la courbe définie par

$$x = (1 + \alpha \cos \omega\theta) \cos \theta$$
$$y = (1 + \alpha \cos \omega\theta) \sin \theta$$

avec α et $\omega\alpha/\varepsilon$ infiniment petits, ω et $\omega^2\alpha$ infiniment grands.

Nous avons

$$x' = -(1 + \alpha \cos \omega\theta) \sin \theta - \alpha\omega \sin \omega\theta \cos \theta$$
$$y' = (1 + \alpha \cos \omega\theta) \cos \theta - \alpha\omega \sin \omega\theta \sin \theta.$$

Le vecteur normal est alors infiniment proche du vecteur de composantes $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ à un infiniment petit près de l'ordre de $\alpha\omega$. Il en résulte que la normale passe à une distance du centre infiniment petite par rapport à ε.

D'autre part

$$
\begin{aligned}
x'' &\simeq -(1 + \alpha\omega^2 \cos\omega\theta)\cos\theta \\
y'' &\simeq -(1 + \alpha\omega^2 \cos\omega\theta)\sin\theta.
\end{aligned}
$$

ce qui montre que le rayon de courbure présente de grandes variations. Pour $\alpha\omega^2 = 1$, il oscille entre 0 et 2.

2. Nous avons montré précédemment que pour une ellipse de faible excentricité, non seulement les ondes issues d'un foyer se focalisent dans l'autre foyer après réflexion, mais encore, toute onde issue d'un point dont la distance au centre est infiniment petite et au moins de l'ordre de la distance focale, se focalise en un point symétrique. Cela a pour conséquence qu'un miroir elliptique de faible excentricité peut donner des images réelles (resp. virtuelles) d'objets réels (resp. virtuels).

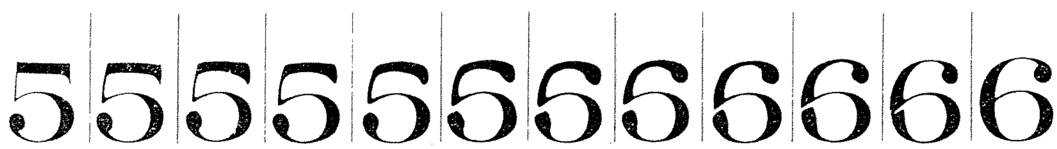
3. Le titre volontairement à double sens de cet article est une invitation à faire l'expérience amusante que décrit ARNOLD. On peut s'amuser à observer plusieurs réflexions successives : sans une dissipation d'énergie inévitable, les ondes oscilleraient périodiquement d'un foyer à l'autre pendant un temps assez long. Comme la focalisation n'est qu'approximative, il y a une dégénérescence des ondes et au bout d'un certain temps le mouvement deviendra chaotique. Terminons donc par la question que tous les lecteurs sont sans doute en train de se poser : peut-on donner une estimation de la durée du mouvement approximativement périodique ?

Bibliographie

[1] V. ARNOLD : *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.*– Editions Mir 1976.

[2] E. NELSON : *Internal Set Theory.*– BAMS n° 83, Nov. 1977.

[3] E. URLACHER : *L'OUVERT* (Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg), n° 55, Juin 1989, p. 12-20.



Le bas de cette page est un fac simile d'une carte de vœux pour l'année 1966 du graphiste Alfred MATTAUCH (reproduction extraite du livre de MASSIN).

JEUX ET MATHÉMATIQUES

Miguel de GUZMÁN

Mathématiques, art et jeux

Les mathématiques sont une activité humaine aux mille facettes. Il s'agit, bien sûr, d'une science; mais qui plus est, c'est un exemple et un modèle de toute activité scientifique. C'est un instrument puissant pour l'exploration de l'univers et pour l'utilisation judicieuse des ressources naturelles qui sont à notre disposition. C'est un modèle de pensée qui tout au long des siècles a servi de champ privilégié pour l'étude des capacités de l'esprit humain.

Mais les mathématiques ont aussi été et continuent d'être un art et un jeu authentique et cette composante artistique ou ludique est tellement inhérente au développement des mathématiques que tout champ de travail mathématique qui n'atteint pas un niveau certain du point de vue esthétique reste instable jusqu'à l'obtention d'une expression mieux finie qui doit mener à une vision plaisante, intéressante, harmonieuse et unitaire de la même façon qu'un poème ou une symphonie inachevée tend, dans l'esprit de son auteur, à la plus belle des formes possible.

Dans ce qui suit nous analyserons rapidement les liens entre mathématiques et jeux en laissant de côté la composante artistique qui a été relevée par plusieurs auteurs parmi lesquels George David BIRKHOFF, Helmut HASSE, Andreas SPEISER, Hermann WEYL ...

La nature des jeux

Les jeux ont été analysés de façon approfondie par le sociologue Johann HUIZINGA dans son œuvre *Homo Ludens.* Il relève comme caractéristiques d'un jeu les traits suivants :

• Le jeu est une *activité libre*, libre au sens du grec "*paideia*" c'est-à-dire une activité que l'on développe pour elle-même et non pas pour en tirer un quelconque profit.

• Il a une *fonction certaine* dans le développement de l'individu. Le petit d'homme comme le petit animal, joue et se prépare ainsi de lui-même à la compétition et à la vie. L'homme adulte joue et ce faisant il obtient une sensation de libération, d'évasion et de délassement.

• Un jeu *n'est pas une plaisanterie.* Les jeux nécessitent une certaine ardeur. Il n'y a pire gâcheur que celui qui ne prend pas le jeu au sérieux.

• Le jeu, comme la création artistique, procure du *plaisir aussi bien au spectateur qu'au participant.*

• *Il est indépendant de la vie ordinaire*, dans le temps et dans l'espace.

• *Il contient des éléments de tension* dont la rupture et la libération sont source de plaisir.

• Le jeu permet la création de *liens spéciaux* entre les joueurs, une sorte de fraternité.

• A travers ses règles, le jeu crée un *nouvel ordre*, une nouvelle vie, pleine de rythme et d'harmonie.

Une analyse superficielle de l'activité mathématique nous permet de vérifier que tous ces traits sont présents dans bien de ses manifestations. Ainsi donc, les mathématiques sont, de part leur nature profonde, un jeu, bien que ce jeu recouvre d'autres aspects comme l'aspect scientifique, l'aspect "*instrument*", l'aspect philosophique, qui tous ensemble font des mathématiques un des piliers essentiels de la culture humaine.

La pratique des mathématiques et les jeux

Si jeux et mathématiques ont autant de points communs quant à leur finalité et leur nature, il n'en est pas moins vrai qu'ils partagent aussi les mêmes traits essentiels en ce qui concerne leur pratique. Ceci est particulièrement intéressant quand on se demande quelle est la méthode la plus adéquate pour transmettre à un large public le profond intérêt et l'enthousiasme que les mathématiques peuvent engendrer et pour amener ce même public à une première initiation sur les méthodes et les moyens utilisés en mathématiques.

Tout jeu commence par la donnée d'un ensemble de règles, d'un certain nombre d'objets ou de pièces dont la fonction est définie par ces règles de la même façon que les objets d'une théorie mathématique sont déterminés par une définition implicite : "*On se donne trois systèmes d'objets. Nous appelerons points les objets du premier système ...*".

Quiconque débute dans la pratique d'un jeu doit acquérir une certaine familiarisation avec ces règles, avec les liens entre les différentes pièces, de la même façon que le novice en mathématiques compare et fait interagir les premiers éléments d'une théorie. Ce sont les exercices élémentaires d'un jeu ou d'une théorie mathématique.

Le joueur qui progresse dans la maîtrise du jeu peut acquérir quelques techniques pratiques simples qui, dans des circonstances qui apparaissent assez souvent, conduisent à une fin gagnante. Ce sont les lemmes de base et les faits de la théorie qui sont facilement accessibles dès qu'on se heurte à la résolution de problèmes simples du domaine considéré.

Une exploration plus approfondie d'un jeu qui possède une longue tradition donne à l'amateur une connaissance des procédures et méthodes particulières que les grands maîtres du jeu ont laissé à la postérité. Ce sont les mouvements et les stratégies à un niveau plus complexe et plus profond qui demandent une compréhension spécifique car ils sont fort éloignés des éléments initiaux du jeu. Cela correspond en mathématique à la phase dans laquelle l'étudiant essaye d'assimiler et de faire siens les grands théorèmes et les principales méthodes qui ont été créés au cours des âges sur le sujet. Ce sont les processus de pensée des esprits réellement créatifs qui sont maintenant à sa disposition lui permettant de se débrouiller au milieu de situations confuses et délicates.

Plus tard, dans les parties les plus sophistiquées là où le stock de problèmes ne sera jamais épuisé, le joueur chevronné essaye de résoudre de façon originale des situations de jeu qui n'avaient jamais été explorées auparavant. Ceci correspond à la recherche de problèmes ouverts d'une théorie mathématique.

Enfin quelques individus sont capables de créer de nouvelles parties, riches de situations et d'idées intéressantes qui font apparaître des stratégies originales et des styles novateurs. Ceci est parallèle à la création de nouvelles théories mathématiques fertiles en idées et problèmes et rendant possible des applications pour faire face à d'autres problèmes ouverts et pour explorer plus avant certains niveaux de la réalité qui jusqu'à maintenant étaient restés dans l'ombre.

L'impact des jeux sur les mathématiques

Très fréquemment dans l'histoire des mathématiques une question intéressante posée sous forme de jeu ou une observation astucieuse sur une situation apparemment sans mystère conduit à de nouveaux modes de pensée. C'est cet état d'esprit qui permet à la science de progresser fortement. Il faut des gens capables de porter un regard nouveau hors des contraintes et des modes habituelles, loin du cadre strict et rigoureux dans lequel la science officielle se place habituellement.

Les débuts de l'analyse combinatoire se trouvent dans le "*Livre des substitutions*" (I. CHING) avec la distribution des différents symboles divinatoires et la construction, également en Chine, des carrés magiques aux connotations mystiques.

Les jeux de calculs (*psefoi*) des pythagoriciens, donnèrent naissance à d'intéressants théorèmes de théorie des nombres. Les paradoxes de ZÉNON, doivent probablement être compris comme une satyre des méthodes en vigueur parmi les mathématiciens de l'époque. EUCLIDE lui-même utilise une série de problèmes erronés dans un de ses livres, *Pseudaria*, comme motivation de ses étudiants pour les amener à penser correctement. ARCHIMÈDE, avec son *problème des bœufs* et l'*arénaire* fait face à une situation originale, à la façon d'un jeu, afin d'aiguiser ses instruments mathématiques.

La liste des objets mathématiques qui ont été créés par esprit de jeux est sans fin. Il suffit de relever quelques noms de célèbres mathématiciens auxquels on peut penser dans ce contexte : FIBONACCI, CARDAN, FERMAT, PASCAL, LEIBNIZ,

EULER, D. BERNOULLI, GAUSS, HAMILTON, HILBERT, von NEUMANN ... Un résumé court mais très riche de l'évolution des récréations mathématiques se trouve dans l'article de W.-L. SCHAAF "*Number games and other mathematical recreations*" de l'Encyclopædia Britannica.

Mathématiques dans les jeux

La richesse des thèmes mathématiques dans les jeux classiques et modernes est impressionnante. La meilleure façon de s'en rendre compte est de parcourir les œuvres de LUCAS ou de BALL (BALL et COXETER) et aussi la compilation bibliographique faite par W.-L. SCHAAF sur la littérature actuelle sur les jeux et publiés par "*The National Council of Teachers of Mathematics*" (*).

A côté de l'arithmétique, de la géométrie, de la théorie des nombres, comme sources traditionnelles de récréations il faut citer la topologie, la géométrie combinatoire, la théorie des graphes, la logique, les probabilités, ... Dans tous ces domaines nouveaux ou anciens, il y a un nombre incalculable de problèmes ouverts d'aspect amusant ou attirant qui sont sans doute aussi faciles à énoncer que difficile à résoudre, comme par exemple le dernier "théorème" de FERMAT et qui, comme lui, attendent probablement la création de nouveaux processus de pensée qui pourront jeter quelque lumière sur leur solution. A propos de beaucoup d'entre eux, personne ne saurait dire s'ils doivent être classés dans le domaine des mathématiques sérieuses ou dans celui des puzzles ou des bizarreries sans intérêts. On peut sûrement affirmer que n'importe quel jeu ou puzzle suffisamment profond peut avoir de très importantes répercussions sur des aspects intéressants des mathématiques. Dans la création de jeux ou de puzzles, l'homme peut laisser courir son imagination en toute liberté sans être contraint par des liens conceptuels ou méthodologiques de la théorie traditionnelle.

L'esprit des jeux dans les mathématiques

Il y a beaucoup de mathématiques profondes qui ont la saveur des jeux. Parmi les exemples modernes, on peut en choisir quelques uns pour lesquels cela est évident. Certains d'entre eux peuvent servir de base à des jeux d'entraînements et d'amusements :

- Le théorème des 4 couleurs : toute carte plane peut être coloriée selon certaines règles à l'aide de 4 couleurs.

- Théorème de RAMSEY (version élémentaire) : on se donne six points sur une circonférence et on joint tous les couples par un segment soit bleu soit rouge. Alors à la fin il y a toujours un triangle dont les côtés ont la même couleur.

- Le lemme de SPERNER : on triangule un triangle ABC, c'est-à-dire qu'on effectue une partition du triangle ABC en triangles plus petits de telle façon que deux d'entre eux sont soit disjoints soit n'ont qu'un côté ou qu'un sommet en commun. On donne aux sommets de la triangulation les nombres A, B, C. En imposant la

(*) N.D.L.R. : Les fascicules JEUX 1 et JEUX 2, publiés par l'A.P.M.E.P. sont une excellente introduction pour les francophones.

seule condition de n'y avoir aucun sommet de nom C sur le côté AB du grand triangle de nom A sur BC et de nom B sur CA, alors il y a toujours au moins un triangle de la triangulation dont les sommets sont A, B, C.

• Problème de KAKEYA : trouver la borne inférieure des aires de toutes les figures planes à l'intérieur desquelles une aiguille de longueur unité peut être retournée de façon continue (de manière à échanger la position de ses extrémités).

• Les théorèmes du point fixe.

• Les billards triangulaires.

• Le théorème de HELLY.

• La conjecture de HADWIGER.

• La conjecture de BORSUK.

Les jeux mathématiques comme instrument d'enseignement et de vulgarisation des mathématiques.

Martin GARDNER à évalué la situation très correctement : "*La meilleures façon d'intéresser un étudiant est sûrement de lui présenter un jeu mathématique intriguant, un puzzle, un tour de magie, une plaisanterie, un paradoxe, un modèle concret, un petit poème ou n'importe lequel d'une vingtaine de choses que les professeurs obtus essayent d'éviter parce que cela leur paraît frivole* (préface de "*Carnaval mathématique*").

L'expert mathématicien commence son approche d'une question dans le même esprit que celui d'un enfant commençant à manipuler un nouveau jouet, prêt à la surprise, ayant une profonde curiosité face au mystère qu'il espère éclaircir, faisant un effort agréable vers la découverte. Pourquoi n'aurions nous pas le même esprit de jeu dans notre approche pédagogique des mathématiques? Un jeu mathématique bien choisi peut conduire l'étudiant de n'importe quel niveau au meilleur point d'observation pour chacun des sujets qu'il doit affronter. Les bénéfices en seront nombreux : punch, ouverture, motivation, intérêt, enthousiasme, amusement.

D'un autre côté la similitude de structure entre mathématiques et jeu nous permet de commencer à exercer par le jeu les mêmes outils, les mêmes stratégies de pensée que celles qui sont utiles dans les situations mathématiques. En particulier l'apprentissage des capacités heuristiques en mathématiques peut être réussi par la pratique de bien des jeux comme cela a été magnifiquement montré dans le travail d'AVERBACH et CHEIN "*Problem solving through mathematical games*" a travers une très riche collection de jeux.

Mais par dessus tout cette approche ludique des sujets mathématiques les plus sérieux peut bénéficier profondément à l'étudiant et influencer de façon positive toute son attitude envers les diverses situations mathématiques pour le restant de sa vie en lui montrant comment se placer dans un état d'esprit correct pour affronter des problèmes mathématiques.

Du point de vue de la vulgarisation des mathématiques l'efficacité des jeux mathématiques est tellement évident que je n'ai pas besoin de m'y étendre. Dans la dédicace du récent ouvrage de BERLEKAMP, CONWAY et GUY "*Winning ways for your mathematical games*" les auteurs écrivent, de façon tout à fait justifée : "*A Martin* GARDNER *qui a révélé plus de mathématiques à plus de gens que quiconque*". Mathématiques et jeux comme nous l'avons vu, sont souvent indiscernables quant à leut contenu, mais qui plus est dans l'état d'esprit avec lequel on doit les approcher.

Les mathématiques sont un grand jeu sophistiqué qui, d'un autre côté, peuvent être un travail d'art intellectuel apportant en même temps une lumière intense pour explorer l'univers et ayant de grandes répercussions pratiques. Les essais de vulgarisation des mathématiques à travers ses applications, son histoire, la biographie des mathématiciens les plus intéressants, à travers ses liens avec la philosophie ou d'autres aspects de l'esprit humain peuvent très bien servir à faire connaître les mathématiques à beaucoup de gens. Mais sans doute aucune autre méthode ne peut mieux montrer ce qui signifie faire des mathématiques qu'un jeu bien choisi.

Je vais te lire une liste de choses, pour chacune dis-moi si à ton avis elle est scientifique ou pas scientifique :

	Scientifique	*Pas scientifique*	*SR*
La physique	*94*	*6*	*0*
La médecine	*90*	*10*	*0*
La météo	*60*	*39*	*1*
Les horoscopes	*39*	*60*	*1*
Les mathématiques	*74*	*25*	*1*
La biologie	*87*	*13*	*0*
L'histoire	*22*	*77*	*1*
L'informatique	*71*	*28*	*1*
La politique	*8*	*90*	*2*

Les sciences majeures, reconnues comme telles par la grande majorité des enfants [sont] : la physique, la médecine, la biologie, les mathématiques. La réponse positive augmente généralement avec l'âge et avec l'avancement dans le cycle scolaire; toutefois le statut scientifique des mathématiques s'affirme plus tardivement que les autres disciplines sans doute parce que l'existence à l'école de cours de mathématiques distincts des cours de sciences maintient pour les plus jeunes une certaine ambiguïté.

QUOI DE NEUF CONCERNANT LES TRIANGLES RECTANGLES?

Alain ROBERT

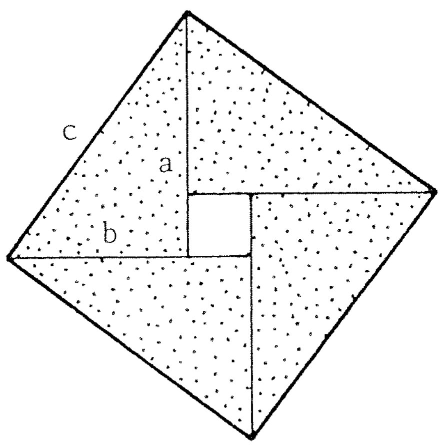
Les triangles rectangles ont été étudiés depuis la plus haute antiquité et le théorème de PYTHAGORE était connu des Chinois au deuxième millénaire avant Jésus-CHRIST. Par contre, le problème des nombres congruents, liés aux triangles rectangles rationnels ayant une aire entière, n'est étudié que depuis le XII^{e} siècle de notre ère. Ce n'est que tout récemment (1983) que TUNNEL a pu donner une condition nécessaire pour qu'un entier soit congruent. La conjecture de BIRCH et SWINNERTON-DYER permettrait de démontrer que la condition donnée par TUNNEL est suffisante. Ainsi, l'histoire n'est encore pas terminée ...

1.— LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit a et b sont reliés à l'hypothénuse c par la relation :

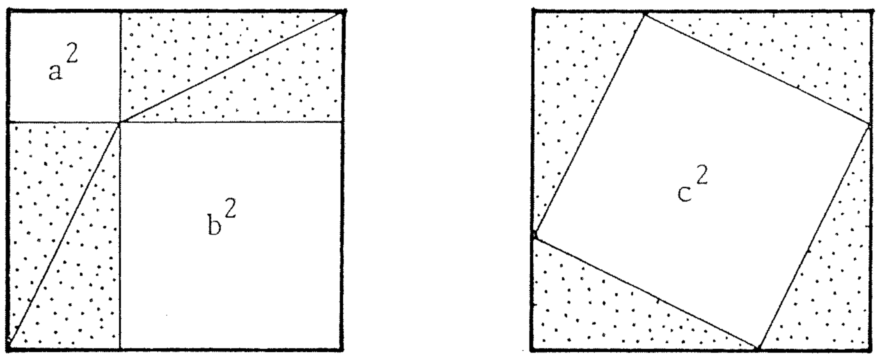
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Inversement, cette relation caractérise les triangles rectangles. Ce fait semble déjà avoir été connu des Chinois au deuxième millénaire avant Jésus CHRIST puisqu'on trouve une *démonstration* de cette relation dans le plus ancien manuscrit chinois mathématique connu, le Chon-pei. Du moins, on y trouve une preuve visuelle que le triangle rectangle de côtés 3 et 4 a une hypothénuse de 5 ... L'argument visuel a été repris dans le fameux Lilavati écrit par le mathématicien indien BHASKARA (1114-1158).



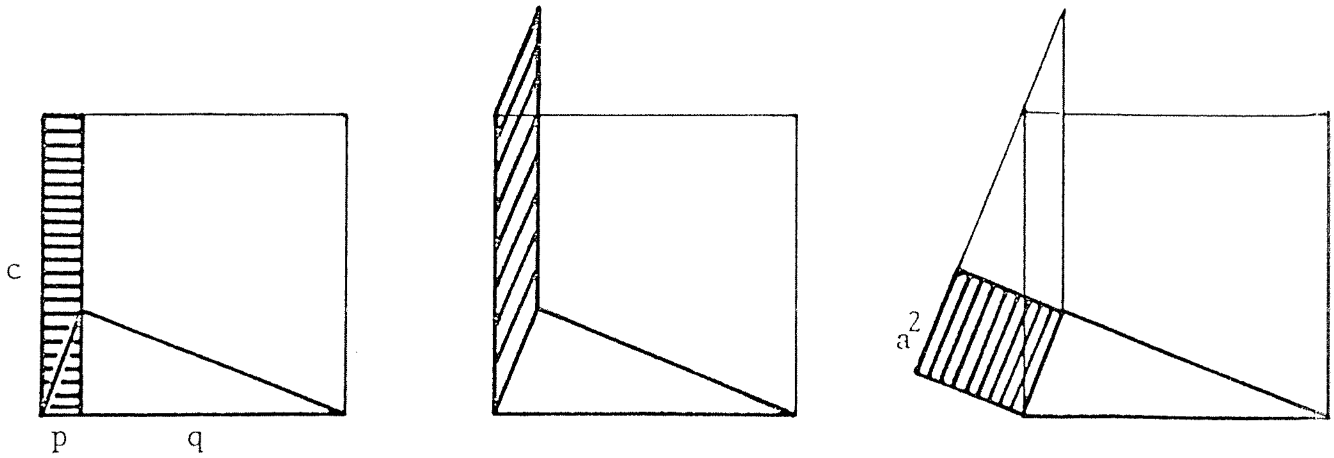
$$4(\frac{1}{2}ab) + (a-b)^2 = c^2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Voici un argument visuel probablement encore plus simple!



Contemplez!

Celui d'EUCLIDE est légèrement plus complexe, mais aussi plus précis.



$$a^2 = pc \text{ et } b^2 = qc \Longrightarrow a^2 + b^2 = (p+q)c = c^2.$$

Pour construire des triangles rectangles à côtés entiers, PYTHAGORE avait déjà découvert une méthode : partons d'un nombre impair a, de sorte que $a^2 = 2n+1$ est aussi impair et $b = n$ conduit au triangle rectangle

$$a^2 + b^2 = (2n+1) + n^2 = (n+1)^2.$$

On trouve ainsi les triangles rectangles :

$$\begin{array}{rrr} 3, & 4, & 5 \\ 5, & 12, & 13 \\ 7, & 24, & 25 \\ 9, & 40, & 41 \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

Cette méthode ne fournit que des triangles rectangles ayant un côté de l'angle droit d'une unité inférieure à l'hypothénuse. Il y en a d'autres, par exemple le triangle de côtés 20, 21 et 29 est rectangle et ne s'obtient pas par la méthode de PYTHAGORE.

Voici quelques résultats généraux concernant les triangles rectangles à côtés entiers.

Observation 1.
Dans un triangle rectangle à côtés entiers, un côté de l'angle droit au moins est pair.

Preuve : Une simple considération de parité ne suffit pas puisque dans la relation $a^2 + b^2 = c^2$, on pourrait imaginer a priori que a et b sont impairs, avec c pair. Il faut effectuer un calcul modulo 4 pour s'apercevoir de l'impossibilité de cette situation.

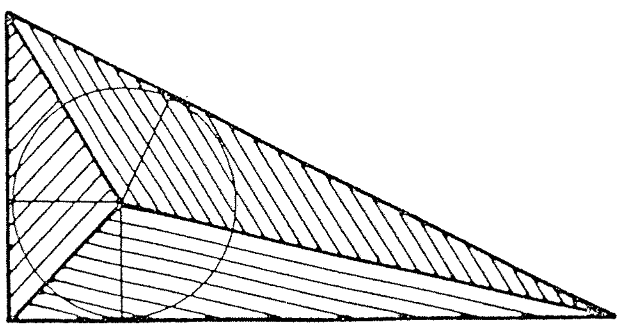
Si $x \equiv 0, 1, 2, 3 \mod 4$, on a resp. $x^2 \equiv 0, 1, 0, 1 \mod 4$ et par conséquent, si x et y sont impairs, on a $x^2 \equiv 1 \equiv y^2 \mod 4$ d'où $x^2 + y^2 \equiv 2 \mod 4$ prouvant que $x^2 + y^2$ n'est pas un carré parfait!

Observation 2.
L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est entière.

Preuve : En effet, l'aire est donnée par $S = \frac{1}{2}ab$ et nous venons de montrer que le produit ab est pair.
Nous verrons même dans la section suivante que l'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est **paire**.

Observation 3.
Dans un triangle rectangle à côtés entiers, le rayon du cercle inscrit est entier.

Preuve : L'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de rayon de cercle inscrit r se calcule facilement par décomposition du triangle initial en trois sous-triangles ayant leurs sommets en le centre du cercle inscrit.



$$S = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \tfrac{r}{2}(a + b + c)$$

On trouve

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c).$$

Pour un triangle rectangle, on a aussi

$$S = \frac{1}{2}ab$$

d'où par comparaison,

$$r(a + b + c) = ab \Longrightarrow$$

$$r = \frac{ab}{a + b + c}$$

Il s'agit donc de montrer que $a + b + c$ divise ab ...

Amplifions la fraction par $a+b-c$. On trouve :

$$r=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{2ab}=\frac{a+b-c}{2}$$

en vertu de l'égalité de PYTHAGORE $a^2+b^2-c^2=O$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $a+b-c$ est pair!

Voici une façon élégante de le montrer : pour tout entier x, x et x^2 ont la même parité

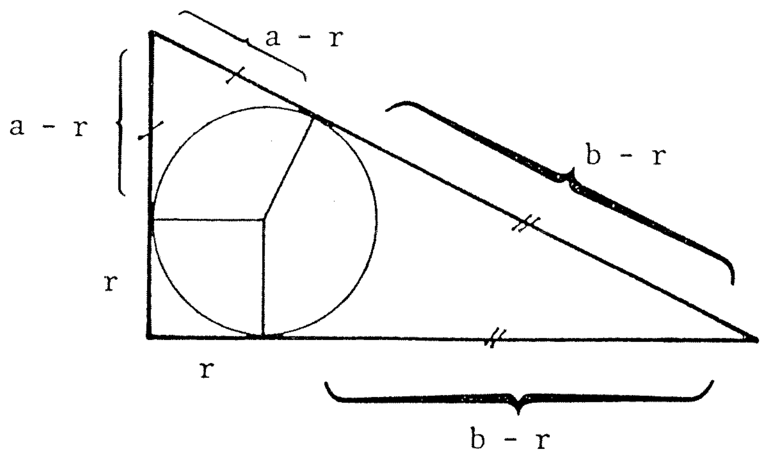
$$x \equiv x^2 \bmod 2$$

d'où

$$a+b-c \equiv a^2+b^2-c^2=0 \bmod 2.$$

Remarque 1. La relation reliant le rayon du cercle inscrit aux côtés d'un triangle rectangle possède aussi une démonstration visuelle

$$c=(a-r)+(b-r) \Longrightarrow 2r=a+b-c.$$



Remarque 2. La construction pythagoricienne partant d'un entier impair a, $b=\frac{1}{2}(a^2-1)$ et $c=\frac{1}{2}(a^2+1)$ fournit un rayon de cercle inscrit $r=\frac{1}{2}(a-1)$. Tous les entiers naturels apparaissent donc comme rayons de cercles inscrits à de tels triangles.

Remarque 3. Nous avons utilisé la congruence $n^2 \equiv n \bmod 2$. Elle a été généralisée par FERMAT sous la forme suivante :

si p est un nombre premier,
alors $n^p \equiv n \bmod p$.

Lorsque n n'est pas divisible par p, on peut écrire cette congruence $n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. Sous cette forme, elle a été généralisée par EULER. Dénotant par $\varphi(m)$ le nombre d'entiers relativement premiers à m parmi les représentants $1, 2, \ldots, m-1$, on a

$$n^{\varphi(m)} \equiv \bmod m \text{ si } n \text{ et } m \text{ sont relativement premiers.}$$

A son tour, cette congrence est un cas particulier du théorème de LAGRANGE qui affirme que dans un groupe fini, l'ordre d'un élément est un diviseur de l'ordre du groupe :

$$G \text{ groupe fini d'ordre } g > 1$$
$$\Longrightarrow x^g = 1 \quad \forall x \in G.$$

2.— TRIPLES PYTHAGORICIENS

Nous allons déterminer **tous** les triangles rectangles à côtés entiers. Lorsque a, b et c sont trois entiers strictement positifs satisfaisant $a^2 + b^2 = c^2$, il est possible de les diviser par leur pgcd (plus grand commun diviseur) d et obtenir trois entiers $a/d, b/d$ et c/d relativement premiers encore strictement positifs et dans la même relation

$$(a/d)^2 + (b/d)^2 = (c/d)^2.$$

Il suffit donc d'étudier les triples d'entiers > 1 relativement premiers avec $a^2+b^2 = c^2$. Permutant au besoin a et b, on peut supposer b pair.

Définition. Un triple pythagoricien est un triple (a, b, c) formé d'entiers > 1, relativement premiers avec b pair et $a^2 + b^2 = c^2$.

THÉORÈME. Les triples pythagoriciens (a, b, c) sont tous donnés par les formules (paramétrisation)

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

où $m > n > 1$ sont deux entiers relativement premiers de parité différente.

De plus, deux couples $(m, n) \neq (m', n')$ distincts satisfaisant aux conditions conduisent à des triples pythagoriciens différents.

Corollaire. L'aire d'un triangle rectangle à côtés entiers est un nombre pair.

(En effet, les côtés d'un triangle rectangle entier sont multiples d'un triple pythagoricien, donc de la forme

$$d(m^2 - n^2), \quad 2d\, mn \quad \text{et} \quad d(m^2 + n^2)$$

et l'aire de ce triangle rectangle est

$$d^2 mn(m^2 - n^2) \text{ paire car } mn \text{ pair.})$$

Nous allons donner trois démonstrations (ou indications de démonstrations) du théorème.

Démonstration arithmétique

Nous supposons b pair et a, b, c, relativement premiers avec $a^2 + b^2 = c^2$. Donc a et c sont impairs, d'où $c + a$ et $c - a$ pairs. Ecrivons alors la relation de base $b^2 = c^2 - a^2$ sous la forme

$$(b/2)^2 = \frac{c-a}{2} \times \frac{c+a}{2} \text{ (produit d'entiers).}$$

Tout diviseur commun de $(1/2)(c + a)$ et $(1/2)(c - a)$ doit diviser la somme c et la différence a de ces deux nombres, donc encore diviser $b^2 = c^2 - a^2$. Un tel diviseur commun ne peut être que 1, prouvant que $(1/2)(c + a)$ et $(1/2)(c - a)$ sont relativement premiers. Comme leur produit est un carré, chacun d'eux est un carré, disons

$$\frac{1}{2}(c+a) = m^2 \text{ et } \frac{1}{2}(c-a) = n^2.$$

On en tire bien $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ puis $b = 2mn$. Tout diviseur commun de m et n doit diviser a, b et c : m et n sont donc relativement premiers. Finalement, b étant supposé pair, a est impair

$$m^2 - n^2 \text{ impair } \Longrightarrow m \text{ et } n \text{ sont de parité différente.}$$

Les formules

$$m = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \quad \text{et} \quad n = \sqrt{\frac{c-a}{2}}$$

montrent que le couple (m, n) est bien déterminé par le triple pythagoricien (a, b, c).

Démonstration algébrique

Au lieu de résoudre $a^2 + b^2 = c^2$ en entiers, résolvons l'équation $x^2 + y^2 = 1$ en nombres rationnels ($x = a/c$, $y = b/c$). La paramétrisation du cercle unité par les fonctions trigonométriques

$$x = \cos t, \ y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi[$$

ne conduit pas immédiatement (!) aux solutions rationnelles. Introduisons plutôt le corps de Gauss

$$\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[i] = \{x + iy : x \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}.$$

La norme d'un tel nombre $z = x + iy$ est définie par

$$N(z) = z\bar{z} = (x + iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}.$$

Nous cherchons donc les solutions de

$$z \in \mathbb{Q}(i) \text{ et } N(z) = 1.$$

On en devine les solutions

$$z = u/\bar{u} \text{ où } u \in \mathbb{Q}(i)$$

puisque dans ce cas

$$N(z) = N(u)/N(\bar{u}) = 1$$

(la norme jouit des propriétés $N(uv) = N(u)N(v)$ et $N(\bar{u}) = N(u)$). Nous allons démontrer ci-dessous que ces solutions particulières fournissent **toutes** les solutions du problème proposé. Supposons acquis ce fait et continuons en écrivant $u = m + in$, $\bar{u} = m - in$ avec m et $n \in \mathbb{Q}$. En amplifiant par un dénominateur commun à m et n (le plus économique possible) on peut supposer que dans la représentation

$$z = \frac{m + in}{m - in}, m \text{ et } n \text{ sont entiers relativement premiers.}$$

On a donc :

$$x + iy = \frac{(m + in)(m + in)}{m^2 + n^2} = \frac{m^2 - n^2 + 2imn}{m^2 + n^2}.$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, on trouve

$$X = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad (= \frac{a}{c}), \quad y = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad (= \frac{b}{c})$$

d'où il est facile de déduire une nouvelle démonstration du théorème. En cours de route, nous avons admis le **résultat**

$$Z \in \mathbb{Q}(i),\ N(z) = 1 \Longrightarrow \exists u \in \mathbb{Q}(i),\ z = u/\bar{u}.$$

Voici comment on vérifie ce résultat. Calculons

$$z(1 + \bar{z}) = z + z\bar{z} = z + N(z) = z + 1.$$

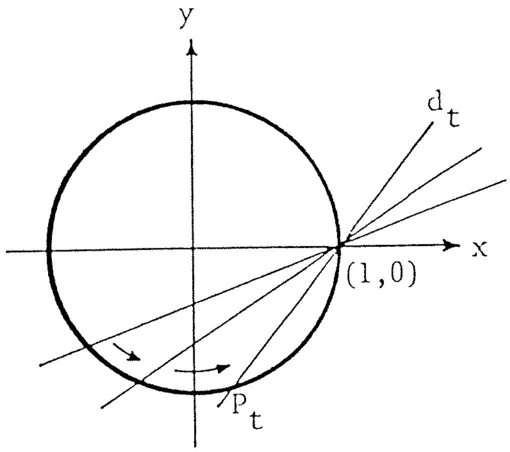
Ainsi $u = 1 + z$ fera l'affaire : $z = (z + 1)/(1 + \bar{z}) = u/\bar{u}$.

Signalons simplement que la méthode algébrique a connu d'importantes généralisations. Par exemple, le résultat démontré à la fin du raisonnement a été généralisé par LAGRANGE sous la forme suivante :
Lorsque K/k est une extension galoisienne de corps avec groupe de GALOIS cyclique fini engendré par un automorphisme σ de K

$$z \in K,\ N(z) = 1 \Longrightarrow \exists u \in K,\ z = u/\sigma(u)$$

(rappelons que la norme dans ce contexte est définie par $N(z) = z\sigma(z)\ \sigma^2(z) \ldots$ produit des conjugués de z de sorte que $N(z) \in K$ pour tout $z \in K$; l'expression $1+\bar{z}$ de ci-dessus étant remplacée par une "*résolvante*" de LAGRANGE). Ce résultat a encore été généralisé par HILBERT à toutes les extensions galoisiennes finies : son fameux théorème 90 s'écrit aujourd'hui sous forme cohomologique

$$H^1(Gal(K/k), K^x) = \{0\}.$$



Preuve géométrique.
Pour trouver les solutions rationnelles de $x^2 + y^2 = 1$, considérons le faisceau de droites issues du point rationnel $(1, 0)$. L'équation de la droite d_t de pente t est $y = t(x-1)$. Cette droite coupe le cercle en un deuxième point p_t dont les coordonnées seront rationnelles précisément si la pente t de d_t est rationnelle.

Explicitement, les points d'intersection de $y = t(x-1)$ avec le cercle $y^2 = 1 - x^2$ conduisent aux valeurs d'abscisses

$$t^2(x-1)^2 = 1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

d'où

$$\begin{gathered} x = 1 \text{ (abscisse du point } (1,0) \text{ sur } d_t\text{) et} \\ t^2(x-1) = -(1+x), \\ x(t^2+1) = t^2 - 1. \end{gathered}$$

Les valeurs rationnelles de t conduisent bien à des coordonnées rationnelles et en posant $t = m/n \in \mathbb{Q}$, on retrouve bien

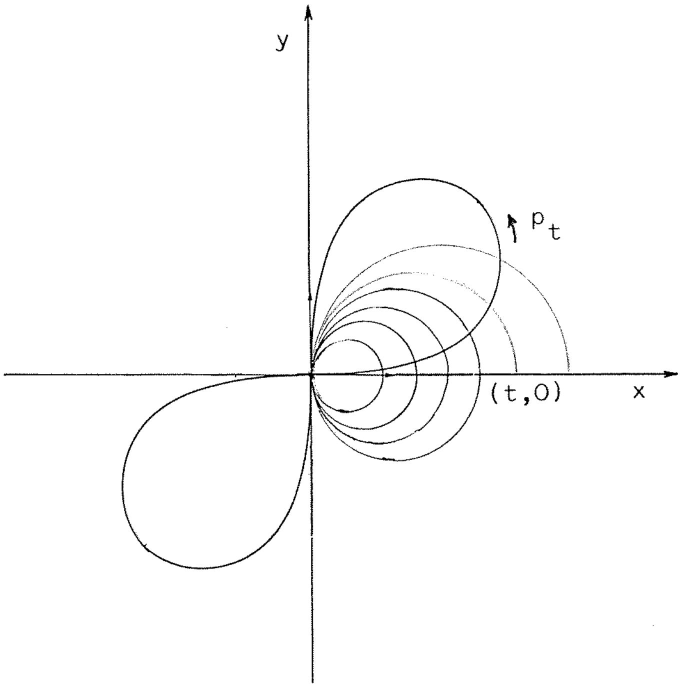
$$|x| = \frac{|m^2 - n^2|}{m^2 + n^2}, \quad |y| = \frac{|2mn|}{m^2 + n^2}.$$

Cette méthode de paramétrisation rationnelle permet de même de trouver les points à coordonnées rationnelles sur l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ ou plus généralement sur toute courbe de "*genre 0*". Une modification convenable de la méthode permet aussi de trouver les points rationnels sur la lemniscate de BERNOULLI d'équation $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$.

Ici, on choisira des cercles tangents à une branche du point singulier (point double). Chacun de ces cercles recoupe la lemniscate en un point p_t de coordonnées

$$x = \frac{2t}{1+t^4}, \quad y = \frac{2t^3}{1+t^4}$$

rationnelles pour les valeurs rationnelles de t (le paramètre t est tout simplement le rayon du cercle centré sur l'axe Ox coupant la lemniscate).



— à suivre ... —

Tu sais que la bombe atomique a été utilisée pendant la guerre. A ton avis est-ce que les chercheurs scientifiques qui l'ont inventée sont responsables de cette utilisation ?

Oui tout à fait	*32*
Oui un peu	*37*
Non assez peu	*13*
Non pas du tout	*17*
SR	*1*

Imagine que tu fasses de la recherche scientifique. Tu as besoin d'argent pour faire tes recherches, les militaires t'en proposent pour travailler pour eux, que fais-tu ?

Tu acceptes	*43*
Tu refuses	*47*
Ça dépend des cas	*7*
SR	*3*

Pour les adultes, le texte de la question [a été] le suivant : "Les chercheurs scientifiques qui ont découvert le principe de la bombe atomique ont une grande part de responsabilité dans l'utilisation qui en a été faite" ; 55% des personnes interrogées sont tout à fait ou plutôt d'accord, 39 % plutôt pas ou pas du tout d'accord, 7% sans réponse.

POINT D'ANCRAGE EN GEOMETRIE

Ana MESQUITA et Virginia PADILLA

Une même figure peut solliciter différents types d'appréhension. Cette distinction, introduite par R. DUVAL (1988) est à la base du modèle d'analyse de tâches géométriques que nous utilisons ici (A. MESQUITA 1989).

Un premier type d'appréhension sollicité par une figure est l'appréhension spontanée et immédiate, dite appréhension perceptive : on y privilégie la forme globale de la figure.

Par exemple, l'appréhension perceptive de la figure 1 consiste à y identifier quatre petits triangles, ou un petit triangle inscrit dans un grand triangle. Dans le premier cas, on a affaire à une appréhension analytique, c'est-à-dire à une appréhension qui repose sur un rassemblement de parties élémentaires, autrement dit, ce sont les sous-figures constituées par les parties élémentaires – les petits triangles – qui sont privilégiés. Dans le deuxième cas, l'appréhension – dite globale – repose sur un partage de la figure extérieure, c'est le contour qui est privilégié.

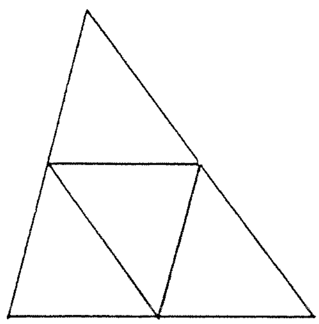


Figure 1

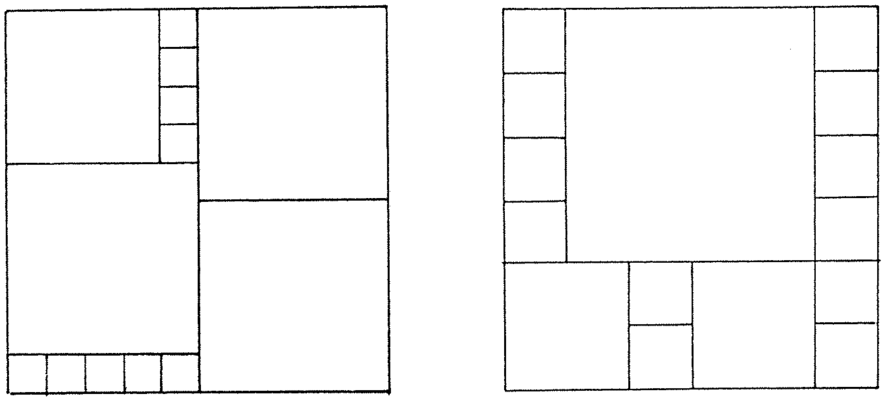
Un deuxième type d'appréhension est l'appréhension opératoire qui se fonde sur l'identification des parties élémentaires de la figure et sur les reconfigurations de ces parties en sous-figures permettant des traitements. Elle permet de donner un sens dynamique aux caractéristiques de la figure, facilitant les manipulations, soit physiques, soit mentales sur tout ou partie de la figure. En particulier, le fractionnement de la figure donnée ici joue un rôle important. Dans le cas où les parties obtenues ont la même forme que le tout, le fractionnement est dit homogène, sinon on parle d'un fractionnement non-homogène (R. DUVAL 1988, p. 62). L'appréhension opératoire de la fig. 1 met en évidence trois parallélogrammes.

En considérant le point d'ancrage comme la sous-figure privilégiée par le traitement, il est évident que celui-ci peut reposer soit sur la figure dans sa globalité, soit sur l'une ou l'autre des parties élémentaires soit encore sur des reconfigurations.

Ces différences d'appréhension et de point d'ancrage peuvent conduire à des traitements différents. Certaines formes d'appréhension, associées au "*bon*" point d'ancrage permettent de résoudre rapidement le problème, d'autres, au contraire, constituent un obstacle à son traitement.

Dans l'observation que nous relatons ci-après, une appréhension opératoire mettant en évidence des reconfigurations non-homogènes de la figure est essentielle à la résolution du problème, tandis qu'une appréhension opératoire centrée sur des reconfigurations homogènes constitue un obstacle à son traitement; dans ce cas, la résolution exige un changement de point d'ancrage, car seul un point d'ancrage centré sur les reconfigurations non-homogènes permet la résolution du problème.

Le problème : L'observation portait sur le problème suivant : "*Etant donné un carré, pour quelles valeurs de n est-il possible de le diviser en n petits carrés*". La consigne énoncée oralement était accompagnée des deux figures suivantes :



Exemple avec 13 carreaux — Exemple avec 15 carreaux

Figure 2

Dans cet article, nous en décrivons la résolution incomplète par deux enfants de huit ans et demi : Nathan et Lionel que nous avons observés pendant une séance enregistrée. A cet âge, il semble presque impossible qu'un écolier réponde à la question posée et trouve la réponse : n est un entier quelconque différent de 2, 3 et 5. Mais il est capable d'inventer des découpages corrects pour certaines valeurs de n (par contre, le problème a été complètement résolu par un binôme d'enfants de 9 à 10 ans en une heure et demie environ). Nous faisons quelques commentaires sur leurs stratégies et en particulier sur le rôle de l'appréhension dans la résolution du problème.

Analyse a priori : La question donnée peut être résolue par des enfants de cet âge grâce à la mise en évidence du fait récursif suivant : on sait qu'on peut toujours partager un carré en quatre carreaux. Il suffit alors de laisser invariant trois des quatre carreaux du partage initial et en se centrant sur un seul des carreaux de le partager à son tour en quatre. On obtient alors un partage en $3 + 4 = 7$ carreaux.

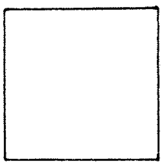


Figure 3

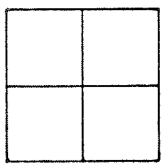


Figure 4

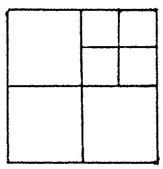


Figure 5

La transition entre ces reconfigurations n'est pas automatique. Elle exige
1) qu'on se centre initialement sur le carré à partager (fig. 3);
2) qu'on se centre ensuite en un seul des petits carreaux résultat du partage initial (fig. 4), en l'isolant et en abandonnant les autres;
3) que l'on procède enfin au partage de ce seul carré (fig. 5).

On peut visualiser de la façon suivante ce que nous venons de dire :

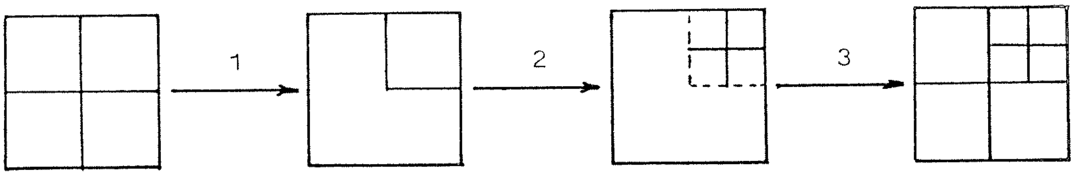


Figure 6

Les partages exigent en effet des points d'ancrage différents : les passages (1) et (3) n'exigent que des changements de point d'ancrage. Le passage (2) est essentiel : il se heurte à un obstacle heuristique considérable puisqu'il s'agit d'ajouter des traits sur la figure.

Les stratégies de résolution : Nous décrivons et comparons les stratégies des deux enfants en analysant essentiellement les points d'ancrage.

1) **Lionel :** Cet enfant a, dès le début, le même type d'appréhension de la figure : il la voit à partir de son contour global qu'il décompose comme un puzzle en carreaux pas nécessairement égaux. Il est influencé par le modèle suggéré par la consigne. On peut dire qu'il a une appréhension globale de la figure considérée à deux dimensions. La non-homogénéïté des petits carrés intérieurs est parfaitement admise.

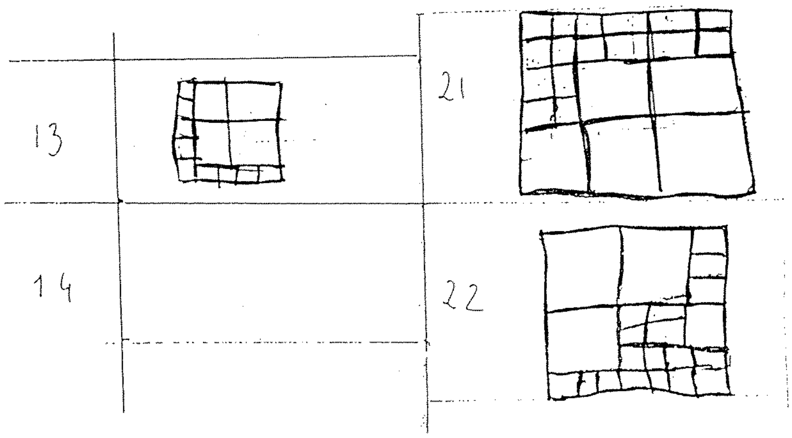


Figure 7

2) **Nathan :** La stratégie de cet enfant, avec deux phases bien démarquées peut être résumée de la façon suivante :

1ère phase :

1ère étape : Après avoir fait quelques dessins, Nathan fait sa première conjecture : la division en un nombre pair de carrés est possible et impossible en un nombre impair (ce qui est contradictoire avec la feuille distribuée et avec quelques dessins de Nathan lui-même!). En voici un témoignage :
N : "On ne peut pas avoir un carré de 25 ... 25 c'est pas pair (...) Il faut qu'il soit pair ... 25 c'est impair."

2ème étape : Elle se caractérise par le partage du carré en rectangles; chaque côté du carré étant divisé en parties égales. Comme Nathan traite chaque côté individuellement en restant centré sur les segments unidimensionnels et indépendants qu'il divise en parties égales, le résultat est un ensemble de rectangles et non pas de carrés. Cette centration sur chaque côté conduit à une reconfiguration homogène : un pavage par des rectangles identiques.

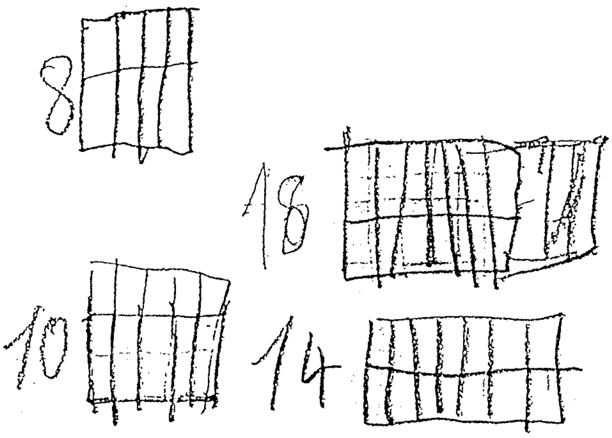


Figure 8

C'est peut-être la prégnance de la grille, associée au problème de la division du carré en rectangles égaux qui amène Nathan à une recherche numérique centrée sur les tables de multiplication comme en témoigne le dialogue suivant :
N : "4 fois 4 jusqu'à ce que ça arrive à 12."
L : "3 fois 4 ..."
(...)
N : "On ne peut pas faire sur la table de 3 ... 22."

3ème étape : A la suite de l'intervention suivante de Lionel :
L : "Le carré doit être de la même manière ... de la même longueur ... et en même temps il faut qu'on ait des carreaux."
Nathan cherche alors à partager le carré en carreaux égaux.

4ème étape : Nathan reprend sa conjecture sur les pairs.

2ème phase :
Elle démarre à la suite d'un échange avec Lionel qui parlait peu et faisait des figures comme celles de la page suivante :

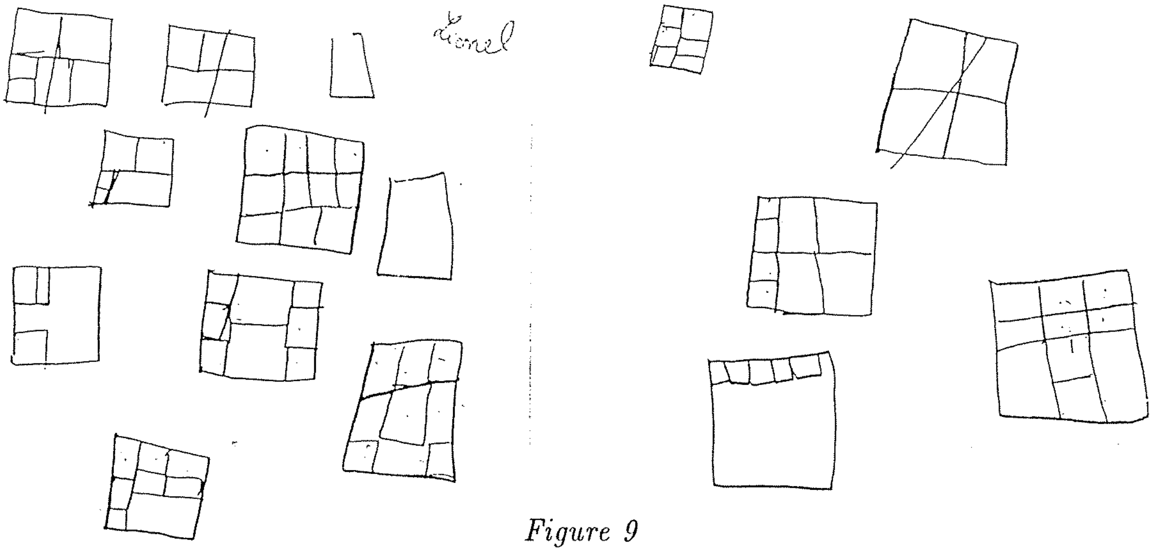


Figure 9

1ère étape : Nathan essaye d'obtenir un grand carré à partir de différents petits carrés. Autrement dit, il fait des rassemblements de petits carrés de façon à composer un grand carré. Par la suite il compte les carrés obtenus. C'est une phase de composition par tatonnement du puzzle : le nombre de carrés du puzzle n'est pas défini au départ mais déterminé au fur et à mesure par les contraintes de la figure et de la tâche.

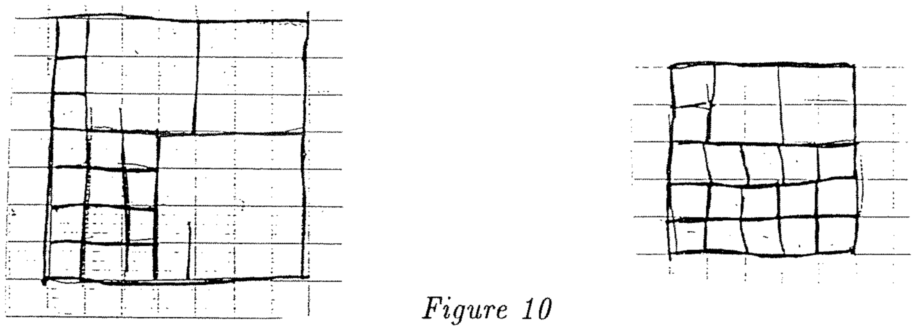


Figure 10

Deux remarques importantes :

1) A ce moment, 55 minutes après le début de la recherche, Nathan a **compris l'énoncé** au sens de Glaeser (*). Il prend en considération :
— la propriété des parties élémentaires : les carrés (avec des côtés exactement égaux);
— la possibilité d'admettre des carrés intérieurs inégaux.
N : "C'est juste. Il y en a un qu'est plus grand, mais ils sont toujours carrés."

2) A ce moment, le problème est, pour Nathan, l'inverse de celui qui est posé : il essaie d'obtenir un carré à partir d'un nombre à déterminer de carreaux. C'est d'ailleurs le sens de la question de contrôle qu'il pose à Lionel, après avoir fait un carré avec 13 carreaux.
N : "13, tu as déjà fait?"

(*) **Comprendre l'énoncé** c'est avant tout comprendre ce que signifient les mots des phrases. **Comprendre le problème** c'est saisir "où gîte le lièvre", où se situe la difficulté.

2ème étape : Nathan commence à faire des recompositions à partir des puzzles déjà obtenus en essayant d'obtenir des carrés avec un nombre déterminé a priori de carreaux :
N : "49 carrés ... il faut en faire 22 (...)"

La recherche de Nathan s'achève quand son père arrive, au bout d'une heure et demie, au moment où il travaillait autour de 3, en cherchant à réduire le nombre de carreaux d'un carré donné.
N : "18 plus quelque chose ça fait 21 ... Il faut que je retire 3"
En tout cas, il arrête son travail sans s'être aperçu du rôle essentiel du 3 :
N : "Là je peux pas tirer 3, sinon ça fait pas un carré ... Comment je fais ? ... je dois en barrer ? Je dois effacer quelque chose ? ... peut-être 1 ... 9, j'ai tiré 9 ..., 3 moins 9 ça fait 6, j'essayerai de faire 6 ... un carré de 6, comme ça ... "

Conclusion

1) Cette observation met en évidence l'importance centrale des différents types d'appréhension dans la résolution des problèmes et en particulier les difficultés résultant d'une centration excessive sur une des formes d'appréhension perceptive.

2) Cela suggère que les stratégies de résolution se développent en fonction du type d'appréhension, autrement dit, c'est l'appréhension qui conditionne les formes de raisonnement.

3) Cette observation attire notre attention sur la centration excessive de Nathan sur son image mentale d'un damier, ce qui lui fait négliger complètement les deux exemples qui illustraient la consigne : deux exemples de pavages non-homogènes avec un nombre impair de carreaux (13 et 15).

4) D'un autre point de vue, l'observation suggère que le changement d'appréhension est essentiel. Or ce changement se heurte à plusieurs obstacles, ce qui nécessite une éducation, voire une ré-éducation des formes d'appréhension et des points d'ancrage sur la figure.

5) Il nous faut également tenir compte du rôle de la feuille indicative que nous avions distribuée. Elle apporte plus qu'un simple complément à la consigne orale : elle induit une procédure d'obtention des résultats en obligeant à un ordre déterminé, ordre qui cache une structure sous-jacente générative de la solution.

Bibliographie :

DUVAL R. (1988).– *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.*– "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", IREM de Strasbourg, p. 57–74.

MESQUITA A. (1989).– *Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie.*– "Educational Studies in Mathematics" 20, p. 55–77.

MESQUITA A. (1989).– *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie.*– Thèse IREM de Strasbourg.

PADILLA V. (1990).– *Les figures aident-elles à voir en géométrie ?*– "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", IREM de Strasbourg, p. 223–252.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 10

(proposé par D. DUMONT)

Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, \ldots\}$ dont on propose trois définitions :

Définition 1 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 2 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 - xy + y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

Définition 3 : E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire sous la forme

$$n = x^2 + 3y^2 \text{ avec } x, y \text{ entiers } \geq 0.$$

1°) Montrer que ces trois définitions sont bien équivalentes.

2°) Montrer que E est stable pour la multiplication, c'est-à-dire que $n_1 \in E$ et $n_2 \in E \Rightarrow n_1 n_2 \in E$.

3°) Soit $P = \{3, 7, 13, 19, 31, 37, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Montrer que P se compose de 3 et de l'ensemble des nombres premiers de la forme $6k + 1$, et que pour ces nombres premiers la représentation sous la forme $x^2 + 3y^2$ est unique. En outre, si p est de la forme $6k+1$ alors $4p$ s'écrit de manière unique comme suit :

$$4p = x^2 + 27y^2 \qquad (x, y \text{ entiers } > 0).$$

Solution :

Nous avons reçu quatre solutions, respectivement de Christian CUVIER, Jacques DAUTREVAUX, Thierry DOLLINGER et Pierre RENFER. C'est la solution de ce dernier que nous publions ci-après et à laquelle nous adjoignons la bibliographie proposée par J. DAUTREVAUX.

Pour tout nombre complexe z, posons : $N(z) = |z|^2 = z\bar{z}$. Alors : pour $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, j = e^{2i\pi/3}$,

$$\begin{aligned} N(x + i\sqrt{3}y) &= x^2 + 3y^2 \\ N(x + jy) &= (x + jy)(x + \bar{j}y) = x^2 + y^2 + (j + \bar{j})xy \\ &= x^2 - xy + y^2 \end{aligned}$$

Cela suggère deux autres définitions encore pour E.

Définition 4
E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire : $n = N(z)$, où z appartient à l'anneau $\mathbb{Z}(i\sqrt{3})$, $(\mathbb{Z}(i\sqrt{3}) = \{x + i\sqrt{3}y | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\})$.

Définition 5
E est l'ensemble des entiers n pouvant s'écrire : $n = N(z)$, où z appartient à l'anneau $\mathbb{Z}(j)$, $(\mathbb{Z}(j) = \{x + jy | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\})$.

1) Montrons l'équivalence des cinq définitions

• $3 \Longleftrightarrow 4$ est évident (les signes de x et y n'interviennent pas)

• $2 \Longrightarrow 5$ est évident

• $1 \Longrightarrow 5$ car $x^2 + xy + y^2 = N(x - jy)$

• Pour démontrer $5 \Longrightarrow 1$ et $5 \Longrightarrow 2$, il suffit de prouver que $N(x + jy)$, avec $x > 0$, peut être égalé à $N(x' + jy')$ tel que xy et $x'y'$ aient des signes différents.
L'anneau $\mathbb{Z}(j)$ possède six éléments inversibles : ce sont les racines sixièmes de l'unité : $1, j, 1 + j$ et leurs opposés.
Un tel élément u vérifie : $N(u) = 1$ et pour tout z dans $\mathbb{Z}(j)$: $N(uz) = N(u)N(z) = N(z)$.
On calcule :

$$j(x + jy) = -y + (x - y)j$$
$$(1 + j)(x + jy) = (x - y) + xj.$$

Si $x \geq y > 0$ alors $j(x + jy) = x' + iy'$, avec $x'y' \leq 0$.
Si $y \geq x > 0$ alors $(1 + j)(x + jy) = x' + iy'$, avec $x'y' \leq 0$.
Si $x > 0 > y$ alors $j(x + jy) = x' + iy'$, avec $x'y' > 0$.

• Il ne reste plus qu'à démontrer : $4 \Longleftrightarrow 5$. $4 \Longrightarrow 5$ est facile, car $x + i\sqrt{3}y = (x + y) + 2yj$.
Pour $5 \Longrightarrow 4$, on remarque $x + jy \in \mathbb{Z}(i\sqrt{3})$, si y est pair. Sinon, on remplace $x + jy$ par :

$$(1 + j)(x + jy) = (x - y) + xj, \quad \text{si } x \text{ est pair}$$
$$\text{ou } j(x + jy) = -y + (x - y)j, \text{ si } x \text{ et } y \text{ sont impairs}$$

2) Grâce à la définition 4 ou 5,il est facile de prouver que E reste stable par la multiplication.
Si

$$n_1 \in E \quad \text{et} \quad n_2 \in E$$

alors

$$n_1 n_2 = N(z_1)N(z_2) = N(z_1 z_2) \in E.$$

3) Soit p un nombre premier de E, distinct de 3 :

$$p \equiv x^2 \pmod 3.$$

Donc $p \equiv 0$ ou $p \equiv 1 \pmod 3$.
Mais p n'étant pas divisible par 3, $p \equiv 1 \pmod 3$.
Donc $p \equiv 1 \pmod 6$ ou $p \equiv 4 \pmod 6$.
Mais p n'étant pas divisible par 2, $p \equiv 1 \pmod 6$.

Réciproquement si $p \equiv 1 \pmod 6$ et si p est premier, il faut prouver que p appartient à E.
Soit $p = 6k + 1$.

• D'après le théorème de FERMAT, l'équation $x^{6k} - 1 = 0$ admet comme solutions les $6k$ éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Or $x^{6k} - 1 = (x^{2k} + 1)(x^{4k} - x^{2k} + 1)$. L'équation $x^{4k} - x^{2k} + 1 = 0$ admet donc au moins une solution $x = a$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce qui signifie que p divise $a^{4k} - a^{2k} + 1 = N(a^{2k} + j)$ (élément de E).

• On peut démontrer (voir annexe) que $\mathbb{Z}(j)$ est un anneau principal. Les résultats usuels d'arithmétique y sont donc valables : notamment l'existence et l'unicité (aux éléments inversibles près) de la décomposition en facteurs premiers.

• Considérons une décomposition en facteurs premiers de $a^{2k} + j$:

$$a^{2k} + j = u\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_l,$$

où u est inversible et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_l$ sont premiers.
Alors $p | N(a^{2k} + j) = u\bar{u}\alpha_1\bar{\alpha}_1\alpha_2\bar{\alpha}_2 \dots \alpha_l\bar{\alpha}_l$.
L'un des facteurs, par exemple α_1, divise p; son conjugué $\bar{\alpha}_1$ divise p aussi.
Mais p ne saurait admettre un autre facteur encore, par exemple α_2, sinon : $p^2 = N(p) = N(\alpha_1)N(\bar{\alpha}_1)N(\alpha_2)N(\bar{\alpha}_2)$ aurait quatre facteurs entiers non triviaux.
Donc : $p = \alpha_1\bar{\alpha}_1 = N(\alpha_1) \in E$.
Le choix de α_1 est unique, à un élément inversible de $\mathbb{Z}(j)$ près, ce qui conduit, d'après les calculs de 1), à une expression unique de p sous la forme $x^2 + 3y^2$, avec x, y entiers naturels.

La décomposition de $4p$ en facteurs premiers dans $\mathbb{Z}(j)$ est : $4p = 2 \times \alpha_1 \times 2 \times \bar{\alpha}_1$.
Les facteurs sont uniques à un élément inversible près.
Soit $\alpha_1 = x + jy$ alors

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= (2x - y) + i\sqrt{3}y \\ 2j\alpha_1 &= -(x + 3y) + i\sqrt{3}(x - y) \\ 2(1 + j)\alpha_1 &= (x - 3y) + i\sqrt{3}(x + y). \end{aligned}$$

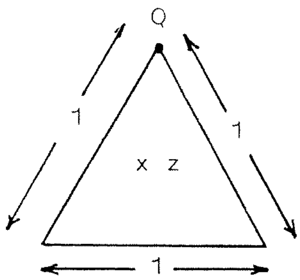
De ces trois éléments associés, un et un seul a pour seconde composante un multiple de 3, (y, $x - y$ ou $x + y$). D'où l'unicité de l'écriture : $4p = X^2 + 27Y^2$, avec $X \in \mathbb{N}, Y \in \mathbb{N}$.

Annexe

Pour prouver que $\mathbb{Z}(j)$ est un anneau principal, il suffit de montrer qu'il est euclidien, c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathbb{Z}(j)$ et tout élément B non nul de $\mathbb{Z}(j)$, il existe Q et R dans $\mathbb{Z}(j)$, tels que

$$A = BQ + R, \quad \text{avec} \quad N(R) < N(B).$$

$\mathbb{Z}(j)$ est un réseau de triangles équilatéraux dans le plan, de côtés 1.
Soit $z = A/B$. C'est un élément du corps $\mathbb{Q}(j)$.
S'il appartient à $\mathbb{Z}(j)$, on choisit $Q = z$ et $R = 0$. Sinon, il est à l'intérieur d'une maille triangulaire du réseau $\mathbb{Z}(j)$; on choisit Q égal à l'un des sommets de cette maille et $R = A - BQ$.



$$N(\frac{A}{B} - Q) < 1$$

Donc : $N(A - BQ) = N(B \times (\frac{A}{B} - Q)) < N(B)$.

Par contre, il est intéressant de noter que $\mathbb{Z}(i\sqrt{3})$ n'est pas un anneau principal! En effet : 4 admet, par exemple, deux décompositions en facteurs premiers distincts :

$$4 = 2 \times 2 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}).$$

Bibliographie

Gauss C.-F.– *Recherches arithmétiques.*– Paris 1807 (rééd. Blanchard).
Legendre A.-M.– *Théorie des nombres.*– 2 vol., Paris 1830 (rééd. Blanchard).
Humbert E.– *Traité d'arithmétique.*– Paris, Vuibert 1948.
Tannery J.– *Leçons d'arithmétique.*– Paris, A. Colin 1911.

PROBLÈME 11

Enoncé

Trouver le plus petit entier positif k pour lequel il existe un polynôme à coefficients entiers, de degré k, de la forme

$$P(x) = x^k + a, x^{k-1} + \cdots + a_k$$

et tel que, pour tout entier $x \in \mathbb{Z}$, $P(x)$ soit divisible par un milliard.

Indication

Coefficients binomiaux.

PROBLÈME 12

Enoncé

Soit Ω un ouvert non vide du plan. Deux points C (chat) et S (souris) sont mobiles dans Ω et choisissent chacun à chaque instant leur vitesse, le module de cette dernière étant toutefois limité à un intervalle $[O, V]$, où la vitesse maximale V est la même pour C et S. On demande, selon la forme de Ω, si C a une stratégie imparable pour finir par rattraper S, si au contraire S a un moyen certain de toujours échapper à C, ou si ni l'un ni l'autre de ces deux cas ne se présente.

PROBLÈME 13

Enoncé

Un réel x est algébrique si et seulement s'il existe des polynômes à coefficients entiers $P(u,v)$ et $Q(u,v)$ et des entiers u_o, v_o tels que, en posant

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \quad ; \quad v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

on ait $v_n \neq 0$ pour tout n et $(u_n/v_n) \longrightarrow_\infty x$.

Voici une liste de personnes. Pour chacune dis-moi si pour toi, elle ressemble ou pas à un chercheur scientifique, par exemple, est-ce qu'un professeur ressemble ou ne ressemble pas à un chercheur scientifique ...

	ressemble	*ne ressemble pas*	*SR*
Un professeur	*39*	*60*	*1*
et un médecin	*71*	*29*	*0*
et un explorateur	*74*	*25*	*1*
et un ingénieur	*62*	*37*	*1*
et un artiste	*18*	*81*	*1*
et un inventeur	*88*	*12*	*0*

Je vais te lire des phrases à propos de tes parents et de toi. Pour chaque phrase, je voudrais que tu me dises si c'est vrai ou si ce n'est pas vrai ...

	vrai	*pas vrai*	*SR*
Veulent que tu sois surtout bon en maths	*45*	*54*	*1*
Veulent que tu sois bon surtout en français	*57*	*41*	*2*
Veulent que tu sois bon en sciences (physique, chimie, biologie, géologie)	*36*	*62*	*2*
