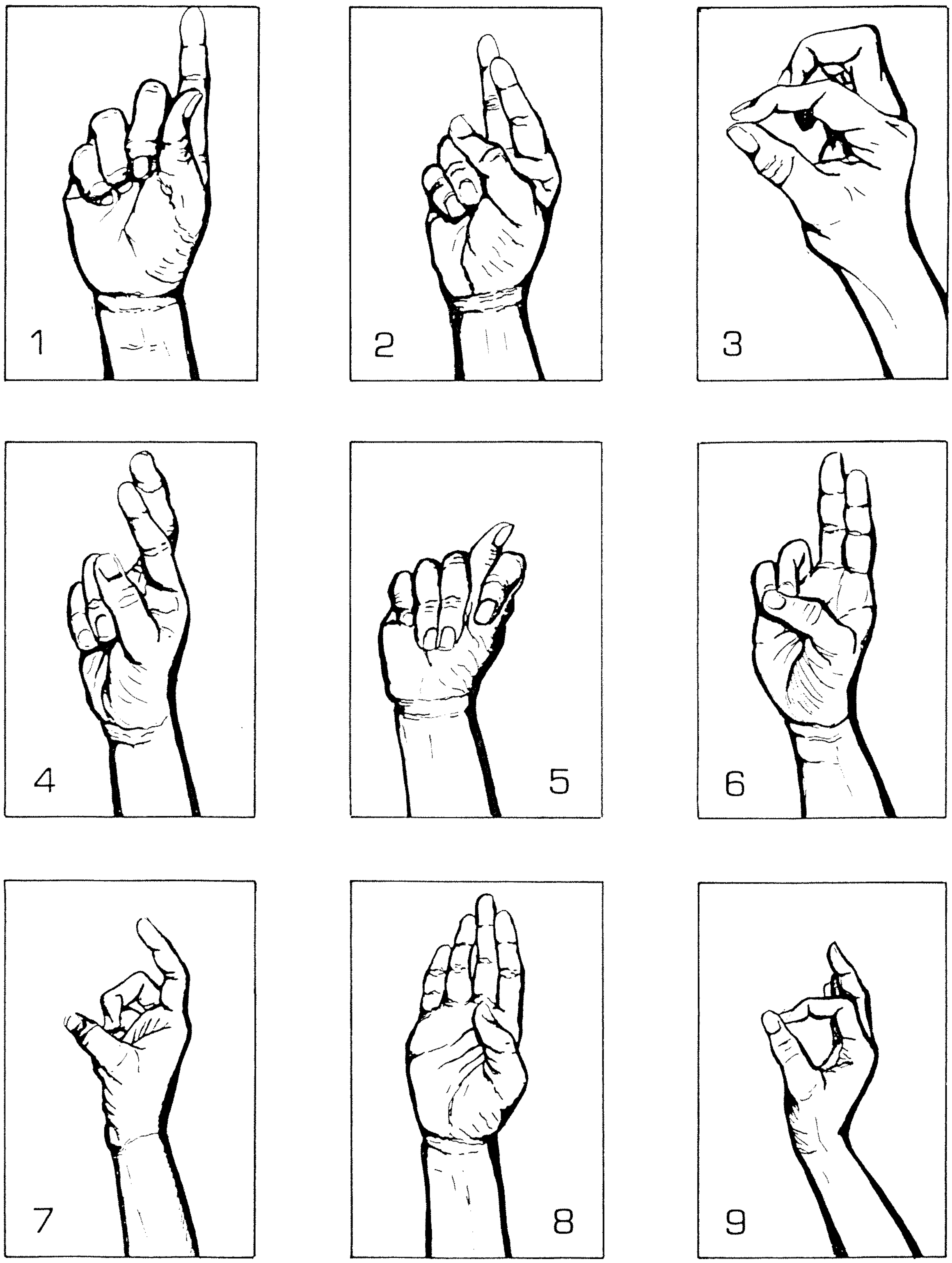
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 60 – SEPTEMBRE 1990 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

Dans la plupart des civilisations, les gestes correspondant aux nombres sont parfaitement éloquents (au moins jusqu'à 10) pour toute autre culture : trois doigts levés pour 3, une main pour 5...

Les Arusha Maasai, qui vivent en Tanzanie du nord ont une numération gestuelle originale qui n'utilise qu'une main. Le dessin de couverture, réalisé d'après des photographies par Francine LEFORT, montre ce qu'il en est.

On trouvera d'autres indications dans le livre "*Africa Counts*" par Claudia ZASLAVSKY.

HARMONISATION

De haut en bas de la hiérarchie, on nous parle d'harmonisation des exigences, de la notation... mais on sait combien les professeurs sont jaloux de leurs libertés et les proviseurs peu enclins à corriger les écarts d'une classe à l'autre. Voici l'exemple de trois élèves de seconde : les notes sont les moyennes des trois trimestres.

	A	B	C
Mathématiques	6,2	8,3	14
Physique	11,5	10	15
Sciences naturelles	11,5	13,2	16
Français	10,8	9,3	12,3
Histoire-Géographie	5,8	14,8	15
Économie	7,8	11,2	12,3
Langue 1	6,2	13,7	12,5
Langue 2	5,8	7,7	16
E.P.S.	11	14	9,3
Musique ou arts plastiques	—	16	19
Langue 3	—	11,2	—
Moyenne générale	8,4	11,8	14,2

Quelles furent les orientations de ces élèves? Sur pression des parents auprès du chef d'établissement, l'élève A est admis en première S. Selon la procédure normale et sur les conseils de son professeur principal, l'élève B a demandé et obtenu une première B. Quant à l'élève C, ayant le choix entre une première A et une première S, il opte pour la première A par goût.

Cet exemple est caricatural, mais témoigne bien des difficultés de jugement au sein d'un même établissement. Combien plus grandes sont ces difficultés lorsqu'il s'agit de comparer des élèves provenant d'horizons divers : pensons aux entrées dans les I.U.T., les prépas, les sections de T.S., entrées qui se font sur dossiers en ne regardant bien souvent que les notes qui sont soigneusement moulinées par un programme informatique! Comment comparer un élève de terminale F et un de C? Il n'est pas étonnant que les résultats dans ces classes post-bac n'aient pas grand chose à voir avec l'ordre d'admission et tel élève reçu dernier sur la liste supplémentaire peut très bien se retrouver en tête de classe.

Au moment où le baccalauréat s'achemine petit à petit vers un contrôle continu, il serait temps de penser sérieusement à ces problèmes d'évaluation.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 60 – 1990

◇ *Notre couverture : Africa counts* I

◇ *Editorial : Harmonisation* II

◇ *Quadratures sans intégrales ni calculs*, par J.-P. FRIEDELMEYER 1

◇ *Comment compiler ou interpréter une expression arithmétique (suite)*,
par R. SEROUL 10

◇ *Les maths nouvelles sont arrivées*, d'après "Temps fort" 18

◇ *Du bon usage d'un traceur de courbes*, par G. KUNTZ 25

◇ *Ovales à deux points isocordes*, par E. EHRHART 32

◇ *Nouvelle parution : La démonstration mathématique dans l'histoire*,
par la Commission inter-IREM Histoire et épistémologie (Besançon 1989) ... 34

◇ *Changement de registre*, par le L.E.G.T. de Colmar 35

◇ *A vos stylos*, par '*L'Ouvert*' 45

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT
◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40
◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)
◇ *Prix du numéro* : 25.– F

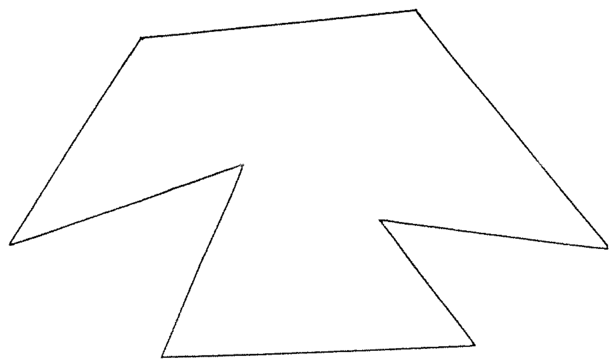
QUADRATURES SANS INTÉGRALES NI CALCULS

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Le mot QUADRATURE est l'un des rares mots du vocabulaire mathématique à être passé dans le langage courant, mais utilisé seulement dans l'expression "QUADRATURE DU CERCLE" pour signifier un problème impossible à résoudre. Ainsi J.-J. ROUSSEAU dans une lettre à MIRABEAU :

> *"Voici dans mes vieilles idées, le grand problème en politique, que je compare à celui de la quadrature du cercle en géométrie et à celui des longitudes en astronomie : trouver une forme de gouvernement qui mette la loi au-dessus de l'homme "*

Est-il utile de rappeler qu'à l'origine, la QUADRATURE d'une surface désignait la construction géométrique d'un carré équivalent (1) à la surface donnée? On utilise aussi le mot QUARRER une surface, du latin QUADRARE : rendre carré. Par exemple QUARRER la surface ci-dessous?



D'où aussi les problèmes célèbres en histoire des mathématiques comme la QUADRATURE de la parabole par ARCHIMÈDE et surtout le fameux problème déjà évoqué de la QUADRATURE du cercle : construire un carré équivalent à un cercle donné (sous-entendu, à la règle et au compas). Peu de problèmes ont suscité autant de recherches, fait dépenser autant d'énergie à trouver sa résolution, moins au total par des mathématiciens de qualité, que par une foule de gens incompétents et superstitieux pour qui la résolution de ce problème représentait une sorte de pierre philosophale capable de donner la clef de la compréhension de l'Univers. Au point qu'en 1754 MONTUCLA éprouva le besoin de publier une

"HISTOIRE des RECHERCHES sur la QUADRATURE du CERCLE"
"Ouvrage propre à instruire des découvertes réelles faites sur ce problème célèbre, et à servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre".

(1) Dans tout cet article, je qualifierai d'équivalentes deux surfaces de même aire.

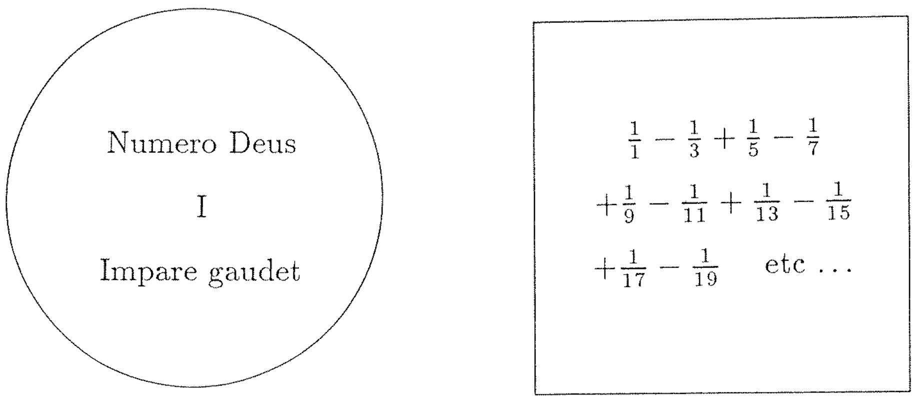
N'est-il pas significatif à cet égard qu'un esprit aussi puissant que LEIBNIZ présente sous la forme suivante sa découverte de la somme de la série

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

dans un article de 1682 :

> "*De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa* "

(Expression en nombres rationnels, de la proportion exacte entre un cercle et son carré circonscrit.)



"*Le carré du Diamètre étant 1, l'aire du cercle sera*

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{17}-\tfrac{1}{19} \quad \textit{etc} \ldots = \text{"}$$

Aujourd'hui la situation a bien changée, au point que l'on en vient à avoir complètement perdu le sens même du mot QUADRATURE qui est devenu synonyme d'intégration. Par exemple voici la définition donnée par le DICTIONNAIRE des MATHÉMATIQUES de A. BOUVIER et M. GEORGE (éd. P.U.F.) :

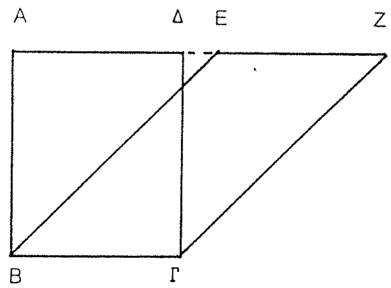
> QUADRATURE : calcul d'une intégrale définie ou détermination d'une aire.

On peut regretter cette perte du sens originel pour nos élèves de collège et lycée qui n'ont ainsi plus l'occasion de faire la moindre quadrature avant la Terminale, et qui alors, ne recontrent plus ce problème qu'en termes de calcul intégral. L'objet de cet article est de présenter quelques activités simples de quadrature pour des élèves de niveau collège ou de Seconde. Elles ont leur source dans les deux premiers livres des ÉLÉMENTS d'EUCLIDE, et ne font donc appel qu'à des connaissances élémentaires et concrètes, tout en pouvant donner lieu à des problèmes relativement élaborés.

Voici les quelques propositions d'EUCLIDE nécessaires pour la suite. On remarquera que ces propositions sont purement géométriques, en ce sens qu'elles ne font appel à aucune formule numérique, pas même l'expression de l'aire d'un triangle comme demi produit d'une base par la hauteur correspondante. Tout est exprimé en termes de surfaces équivalentes.

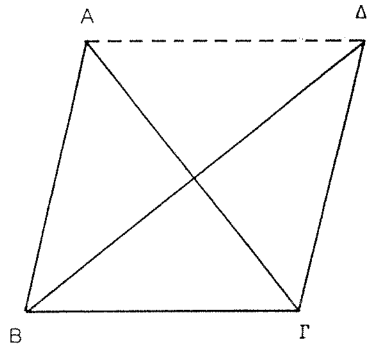
LES PROPOSITIONS D'EUCLIDE - Livre I (2)

35. Les parallélogrammes construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux (3) entre eux.



36. Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

37. Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

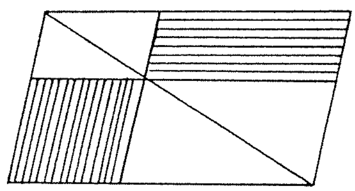


38. Des triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

39. Les triangles égaux, construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles.

40. Les triangles égaux, construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

43. Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux entre eux.



QUADRATURE D'UNE FIGURE RECTILIGNE

Principe

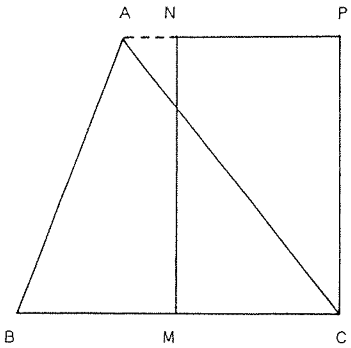
- on décompose la figure en triangles
- on transforme chaque triangle en un rectangle équivalent (construction C_1)

(2) Traduction de F. PEYRARD - Rééd. par Blanchard (1966).
(3) EUCLIDE dit "égaux" là où nous dirions équivalents.

- on transforme tous ces rectangles en des rectangles équivalents ayant tous une dimension commune de façon à obtenir un unique rectangle en les accolant (construction C_2)
- on transforme ce dernier rectangle en un carré équivalent (consctruction C_3).

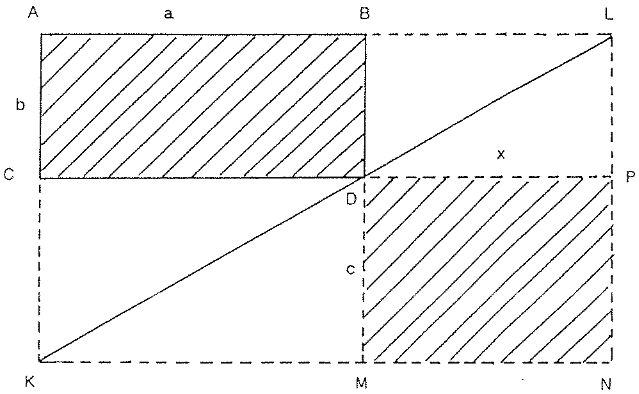
Construction C_1

Le triangle ABC est équivalent au rectangle $MNPC$ où M est le milieu de $[BC]$ (cf. EUCLIDE prop. I 36-38).



Construction C_2

Le rectangle (parallélogramme) $ABCD$ de côtés $a \times b$ est équivalent au rectangle $DMNP$ de côtés $c \times x$, c donné (cf. EUCLIDE prop. I 43).

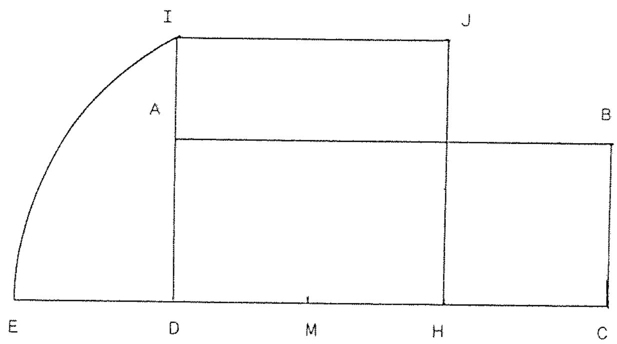


Construction C_3
(cf. EUCLIDE prop. II 14)

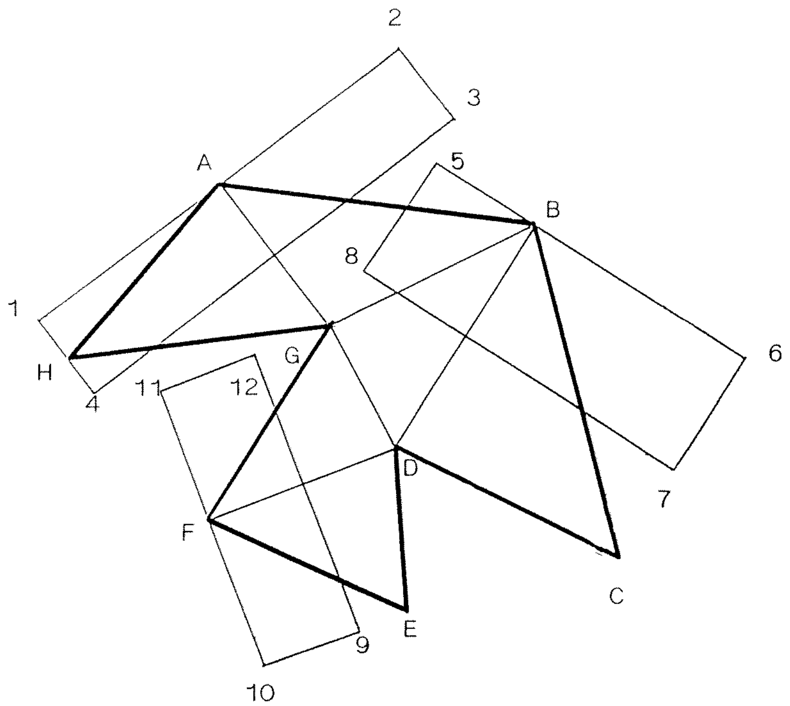
Le rectangle $ABCD$ étant donné, soit $DE = DA$ et M milieu de EC. Le demi cercle de centre M et de rayon ME coupe le prolongement de DA en I. Comme le triangle EIC est rectangle, on a

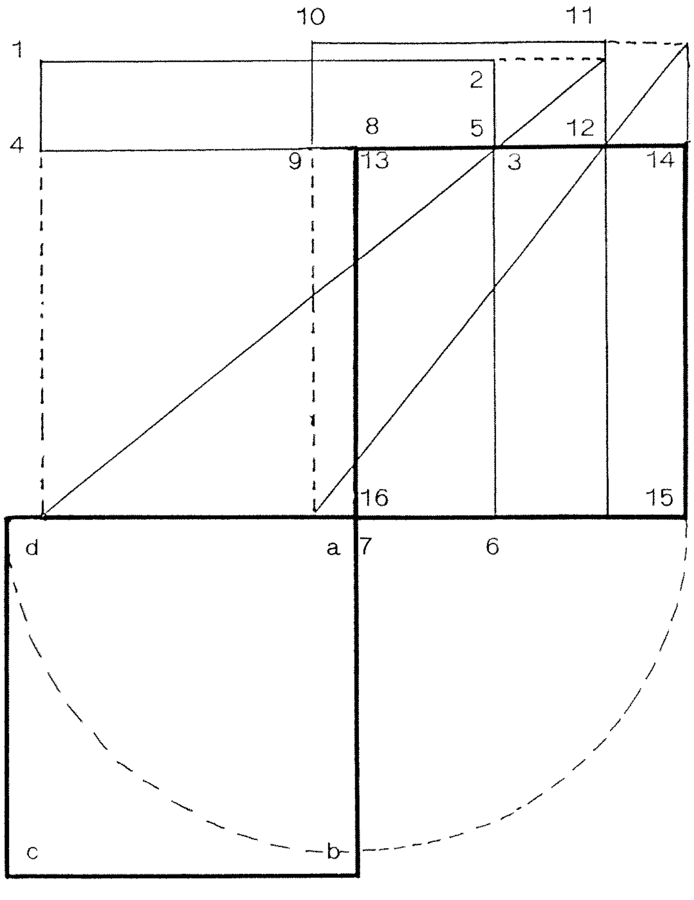
$$ID^2 = ED.DC$$

$$ID^2 = AD.AB.$$



ID est donc le côté du carré équivalent au rectangle. C'est l'ensemble de ces constructions qui ont été successivement réalisées pour la quadrature de la surface $ABCDEFGH$ sous la forme du carré $abcd$ (voir figure en face).


2
3
A
5
B
8
1
6
H
4
11
12
G
D
7
F
C
E
9
10

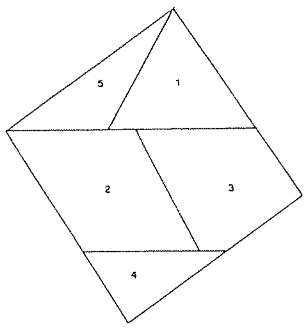

10
11
1
2
8
5
12
4
9
13
3
14
16
15
d
a
7
6
c
b

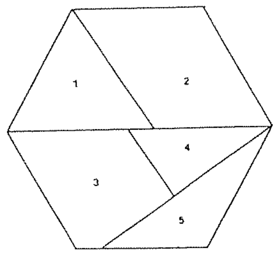
On s'est arrangé pour regrouper les six triangles constituant la surface deux par deux, selon une base commune ce qui donne les trois rectangles 1-2-3-4; 5-6-7-8; 9-10-11-12.

Les rectangles 1-2-3-4 et 9-10-11-12 sont transformés en rectangles dont l'un des côtés est égal à 5-6 pour former au total l'unique rectangle 13-14-15-16 sur lequel est alors effectué l'opération de quadrature de la construction C_3.

UN CASSE TÊTE (4)

On demande de découper un hexagone régulier en morceaux, qui réagencés autrement, donnent un carré (ou réciproquement).





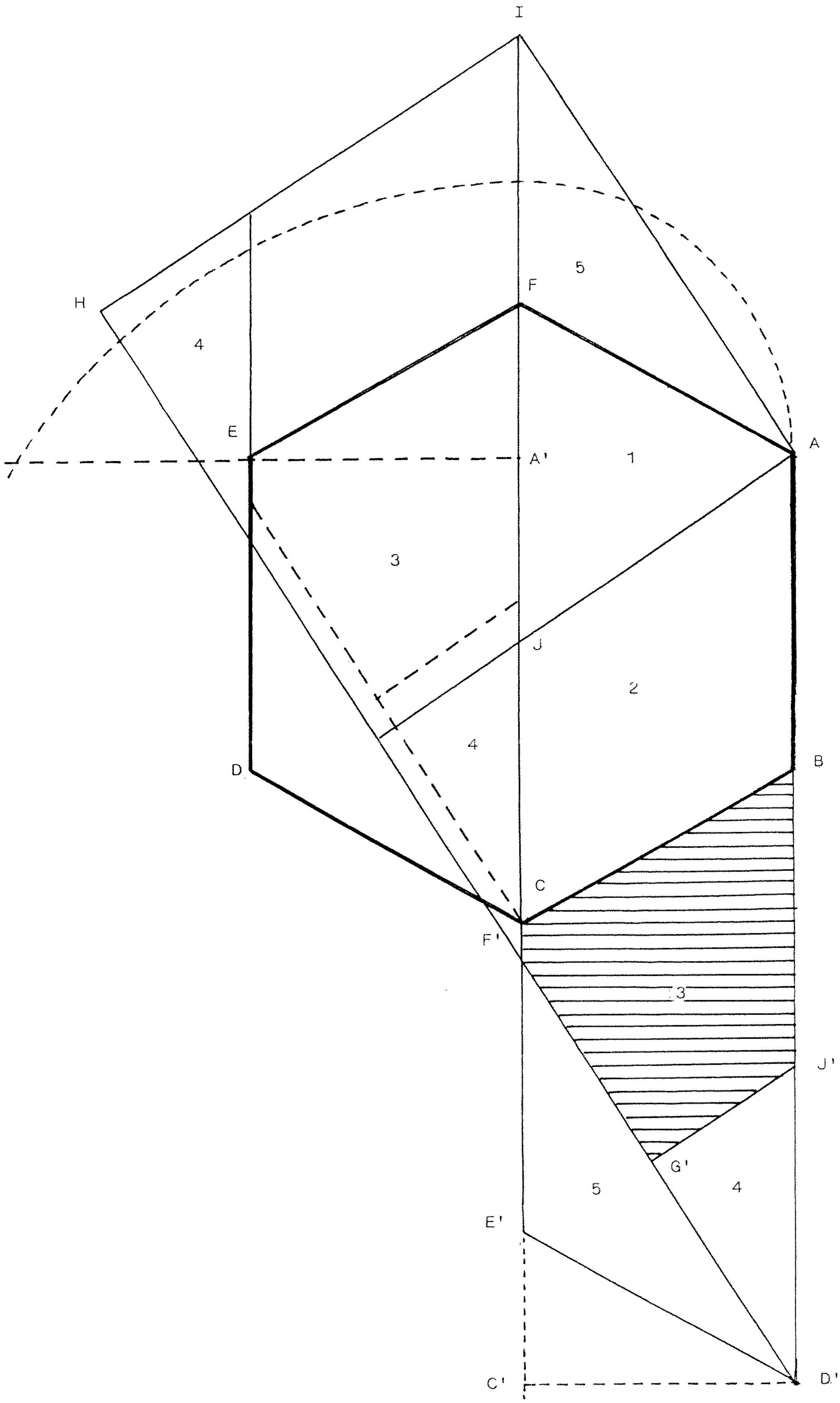
Solution (voir figure en face) : Soit l'hexagone régulier $ABCDEF$, équivalent au parallélogramme $AD'E'F$ ou au rectangle $AA'C'D'$. Transformons ce rectangle en un carré équivalent (quadrature) par la construction C_3 et plaçons ce carré selon $AGHI$, de façon que I soit sur la diagonale FC. Alors (EUCLIDE prop. I 40) comme le parallélogramme $AIF'D'$ est équivalent au carré $AIHG$ et qu'ils ont une base commune AI, ils sont entre les mêmes parallèles, c'est-à-dire que H, G, F', D' sont alignés. Soit $(J'G')$ parallèle à (AG) tel que $HG = GG'$. Nous mettons ainsi en évidence cinq morceaux numérotés 1-2-3-4-5 qui remplissent ensemble à la fois l'hexagone $ABCDEF$ et le carré $AGHI$, et exactement. On trouvera dans le livre de FOURREY de nombreux autres casses-têtes et puzzles de ce genre.

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE ET SES GÉNÉRALISATIONS

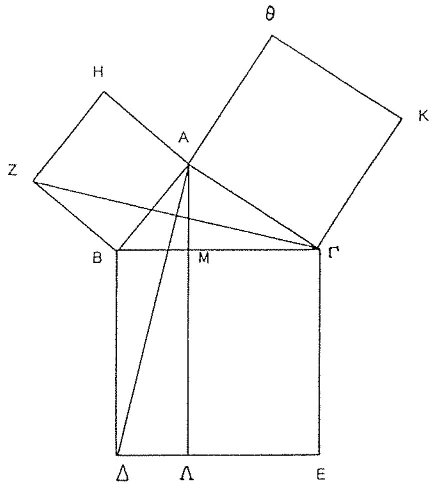
EUCLIDE donne deux démonstrations du théorème de PYTHAGORE dans ses ÉLÉMENTS, sans d'ailleurs jamais mentionner le nom de PYTHAGORE. (EUCLIDE ne mentionne aucun nom dans ses ÉLÉMENTS). La première est l'aboutissement du Livre I, proposition 47 et s'appuie essentiellement sur les propositions 36 à 40 rappelées plus haut.

Prop. 47 : "*Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit*".

(4) D'après E. FOURREY, Curiosités géométriques, Vuibert (1938) dont on ne saurait assez recommander la lecture.


I
5
F
H
4
E
A'
1
A
3
J
2
4
D
B
C
F'
3
J'
G'
5
4
E'
C'
D'

Voici en abrégé la démonstration d'EUCLIDE :



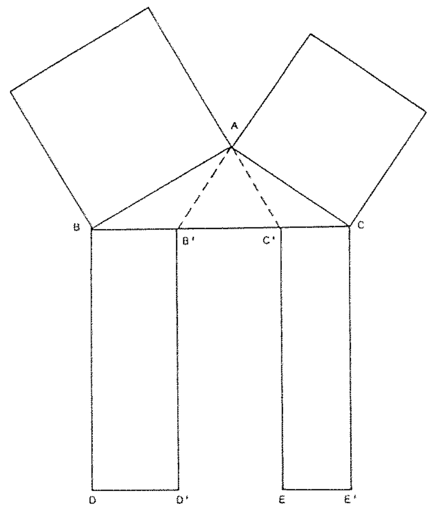
Les triangles ΒΓΖ et ΑΒΔ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre des côtés égaux respectivement.

Or, le carré ABZH vaut le double du triangle ΒΓΖ, le rectangle ΒΔΛΜ vaut le double du triangle ΑΒΔ.

Ce rectangle est donc équivalent au carré ABZH.

De la même manière le rectangle ΓΕΛΜ est équivalent au carré ΑΓΚΘ. Ce qui démontre la proposition.

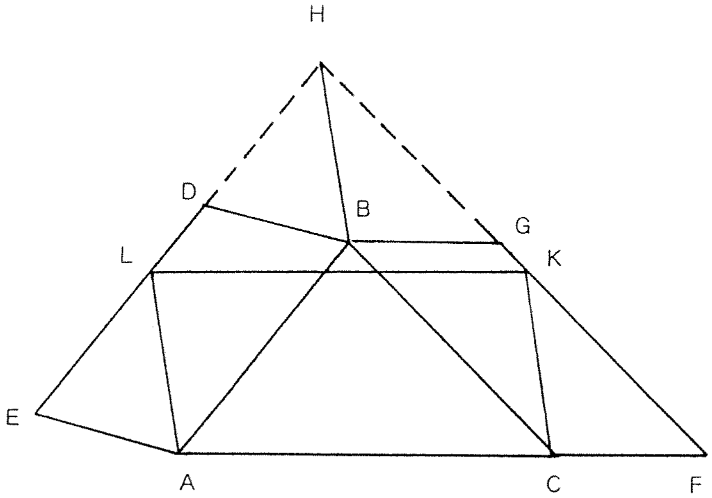
THABIT IBN-QURRA (826-901) donne une généralisation intéressante du théorème de PYTHAGORE, valable pour un triangle ABC quelconque. Soient sur $[BC]$ les points B' et C' tels que $\widehat{AB'B} = \widehat{AC'C} = \widehat{BAC}$. Alors, la somme des carrés construits sur AB et AC est égale à la somme des rectangles de côtés $BC \times BB'$ et $BC \times CC'$.



(Si l'angle en A est aigu, les rectangles $BDD'B'$ et $C'EE'C$ se chevauchent.)

Plus générale encore est la proposition suivante dûe à PAPPUS d'ALEXANDRIE (environ 320 après J.-C.).

Soit un triangle ABC **quelconque**, et $ABDE$, $BCFG$ deux parallélogrammes **quelconques** construits sur les deux côtés AB et BC. Soit H le point de rencontre de ED et FG. Si on mêne par A et C les parallèles à BH, qui coupent respectivement (ED) et (FG) en L et K, alors le quadrilatère $ALKC$ est un parallélogramme équivalent à la somme des parallélogrammes $ABEH$ et $BCFG$.



Le lecteur en trouvera facilement la démonstration.

PARTAGER UN TRIANGLE EN TROIS TRIANGLES D'AIRES PROPORTIONNELLES À DES NOMBRES m, n, p, DONNÉS

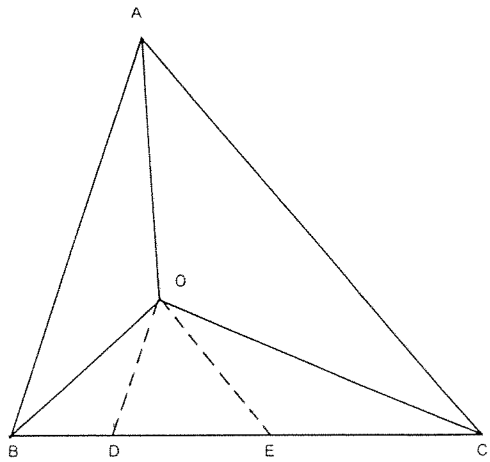
Enfin signalons cette autre application des propositions d'EUCLIDE dûe à Jordanus NEMORARIUS (environ 1260 ap. J.-C.) dans un livre intitulé "*De Triangulis*".

Problème : Le triangle ABC étant donné, ainsi que les nombres m, n, p; trouver un point O à l'intérieur du triangle tel que les triangles OAB, OBC, OAC soient proportionnels aux nombres m, n, p.

Et voici la solution très élégante et fort simple de NEMORARIUS.

Partageons le segment $[BC]$ en segments proportionnels à m, n, p selon les points D et E.

Menons par D et E les parallèles aux côtés AB et AC respectivement.



Le point O intersection de ces parallèles répond à la question. Là aussi, je laisse au lecteur le plaisir de justifier cette solution (la figure a été réalisée avec $m = 2$; $n = 3$; $p = 4$).

COMMENT COMPILER OU INTERPRÉTER UNE EXPRESSION ARITHMÉTIQUE

(suite)

Raymond SEROUL

8. Dérivation formelle

Dans cette partie, nous allons apprendre comment *dériver* une expression arithmétique. Ce que nous voulons, c'est que le programme nous réponde que la dérivée par rapport à x de la fonction

$$(a * x * x + b * x + c) * (d * x + e)$$

est la fonction

$$(a * x + a * x + b) * (d * x + e) + (a * x * x + b * x + c) * d.$$

On notera qu'il s'agit de manipuler des chaînes de caractères.

8.1 — Les constantes suivantes rendront plus facile la lecture du programme :

$$\begin{aligned} \textbf{const}\ \ zero &= '0'\ ; \\ un &= '1'\ ; \end{aligned}$$

8.2 — Quand on programme naïvement, on s'aperçoit très vite que les dérivées obtenues sont très maladroites : la dérivée de $a * x * x$ est

$$(a * 1 + 0 * x) * (x) + (a * x) * (1)\ !$$

Ce n'est pas faux, mais il y a trop de parenthèses et trop de facteurs inutiles. Pour remédier à cela, nous allons créer un type :

$$\begin{aligned} \textbf{type}\ fonction = \ & \textbf{record} \\ & \quad text : str255\ ; \\ & \quad plus : boolean\ ; \\ & \textbf{end}\ ; \end{aligned}$$

Le champ *text* contient la fonction elle-même. Le champ *plus* indique si la chaîne *text* contient un signe '+' non *caché* par des parenthèses. Précisons ce que nous entendons par là : si *text* est l'une des chaînes

$$a, \quad a * b, \quad (a + b) * c,$$

le champ *.plus* est faux. Par contre, il est vrai pour les chaînes

$$a + b, \quad a + (\cdots), \quad (\cdots) + c.$$

8.3 — Nous aurons besoin d'*ajouter* deux expressions. Mais comme ces expressions-là sont des chaînes de caractères, il faut faire attention : les chaînes '$a + 0$', '$0 + a$' et 'a' sont distinctes ! Il est donc nécessaire de prévoir une procédure qui *ajoute* intelligemment deux chaînes :

```
procedure somme(var u : fonction; v1, v2 : fonction) ;
begin
   if (v1.text = zero) and (v2.text = zero) then begin
      u.text := zero ; u.plus := false ; exit(somme) ;
      end ;
   if (v1.text <> zero) and (v2.text = zero) then
      begin u := v1 ; exit(somme) end ;
   if (v1.text = zero) and (v2.text <> zero) then
      begin u := v2 ; exit(somme) end ;
   if (v1.text <> zero) and (v2.text <> zero) then begin
      u.text := concat(v1.text, '+', v2.text) ; u.plus := true ;
      exit(somme) ;
      end ;
end ;
```

8.4 — Il est parfois nécessaire de parenthéser un facteur quand on l'insère dans un produit. Par exemple, il est inutile de parenthéser a et $(b + c)$ si on les multiplie. Par contre, il est indispensable de parenthéser $a * x + b$ s'il figure dans un produit : $a*(b+c)*(a*x+b)$. Pour éviter une multiplication excessive de parenthèses inutiles, il est prudent de prévoir une procédure capable de parenthéser une expression uniquement lorsque c'est nécessaire :

```
procedure parentheser(var u : fonction) ;
begin
   if (length(u.text) > 1) and u.plus
   then begin
         u.text := concat('(', u.text, ')') ; u.plus := false ;
         end ;
end ;
```

8.5 — Lorsqu'on *multiplie* deux expressions représentées par des chaînes de caractères, il faut encore faire plus attention que dans le cas d'une somme. En effet, la situation est plus riche : les chaînes '$a * 1$' et '$a * 0$' sont différentes des chaînes 'a' et '0'.

```
procedure produit(var u : fonction ; v1, v2 : fonction) ;
begin
   if (v1.text = zero) or (v2.text = zero) then begin
      u.text := zero ; u.plus := false ; exit(produit) ;
      end ;
   if (v1.text = un) and (v2.text = un) then begin
      u.text := un ; u.plus := false ; exit(produit) ;
      end ;
   if (v1.text <> un) and (v2.text = un) then
       begin u := v1 ; exit(produit) end ;
   if (v1.text = un) and (v2.text <> un) then
       begin u := v2 ; exit(produit) end ;
   if (v1.text <> un) and (v2.text <> un) then begin
      parentheser(v1) ; parentheser(v2) ;
      u.text := concat(v1.text, '*', v2.text) ; u.plus := false ;
      exit(produit) ;
      end ;
end ;
```

8.6 — La formules de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ nous apprend qu'il est nécessaire de connaître simultanément les quatre fonctions u, v, u' et v' pour calculer la dérivée de uv. C'est pourquoi la déclaration des procédures E, T et F est ici :

```
procedure E(var u, du : fonction) ; forward ;
procedure T(var u, du : fonction) ; forward ;
procedure F(var u, du : fonction) ; forward ;
```

La procédure E renvoie dans la chaîne *u.text* une version simplifiée de l'expression qu'elle a reconnu et dans *du.text* la dérivée de *u.text*. Nous avons des énoncés analogues pour T et F.

8.7 — Il n'y a rien de spécial concernant la procédure E. On écrit toujours le même code, avec quelques variantes :

```
procedure E ;
var v, dv : fonction ;
begin
   T(u, uprime) ;
   while token = '+' do begin
      next_token(token) ;
      T(v, dv) ;
      somme(u, u, v) ; somme(du, du, dv)
      end ;
   if not (token in [')', '$']) then erreur ;
end ;
```

8.8 — Mêmes commentaires concernant la procédure T. Un point technique : cette procédure contient les affectations $u := u * v$ et $u' := u'v + uv'$. Il faut donc calculer u' d'abord (sinon, la fonction u qui figurera dans le calcul de u' ne sera pas la bonne) :

```
procedure T ;
var v, dv, alpha, beta : fonction ;
begin
   F(u, du) ;
   while token = '*' do begin
      next_token(token) ;
      F(v, dv) ;
      produit(alpha, du, v) ; produit(beta, u, dv) ;
      somme(du, alpha, beta) ;
      produit(u, u, v) ;
      end ;
end ;
```

8.9 — La procédure F est — pour une fois — plus intéressante à écrire. La variable x est traitée à part. Lorsque la procédure F traite une expression parenthésée, elle renvoie l'expression et sa dérivée *sans* les parenthèses. Celles-ci seront rétablies lorsque le besoin s'en fera sentir (c'est pour cela que le champ *.plus* existe). Par conséquent, après appel de $F(u, du)$, l'expression *u.text* renvoyée par F n'est pas tout à fait l'expression que F a reconnue, mais une version simplifée :

```
procedure F ;
begin
   if token = 'x' then begin
      u.text := 'x' ; u.plus := false ;
      du.text := un ; du.plus := false ;
      next_token(token) ; exit(F) ;
      end ;
   if token in ['a'..'z'] then begin
      u.text := token ; u.plus := false ;
      du.text := zero ; du.plus := false ;
      next_token(token) ; exit(F) ;
      end ;
   next_token('(') ; E(u, du) ; next_token(')') ;
end ;
```

8.10 — Le corps du programme principal est, à quelques variantes près, toujours le même. Il consiste à initialiser correctement les variables globales k, *expression* et *token*. On appelle ensuite $E(u, du)$ (ce qui exige d'avoir déclaré u et du comme variables globales du programme), puis on demande l'affichage de *du.text* (et aussi celui de *u.text* si l'on est curieux). Une remarque : pourquoi ne pas avoir lancé $E(expression, du)$? Rappelons-nous que la fonction *next_token* se réfère à *expression*. On ne peut donc pas communiquer *expression* à la procédure E, car celle-ci modifie ses arguments!

```
begin
   write('expression à dériver = '); readln(expression) ;
   expression := concat(expression, '$') ;
   k := 1 ; token := expression[k] ;
   E(u, du) ;
   if token <> '$' then erreur
   else writeln('dérivée = ', du.text) ;
   999 :
   end ;
end .
```

9. Extentions possibles

Une expression arithmétique ne contient pas que des additions ou des multiplications. On rencontre aussi des soustractions, des divisions et des appels de fonctions. (Les signes '$-$' unaires seront traités dans la partie suivante.)

9.1 — La définition d'une expression arithmétique se généralise facilement. Continuons à noter les noms de variables et les constantes par les minuscules de 'a' à 'z'. Notons les noms de fonctions par des majuscules, de 'A' jusqu'à 'Z'. Ceci posé :

- une *expression* est une chaîne de caractères $\mathcal{E}$ qui est un terme $\mathcal{T}$ ou de la forme $\mathcal{T}\theta\mathcal{T}\theta\cdots\theta\mathcal{T}$, le signe θ étant à prendre parmi les signes '$+$' ou '$-$';
- un *terme* $\mathcal{T}$ est une chaîne de caractères qui est un facteur $\mathcal{F}$ ou de la forme $\mathcal{F}\varphi\mathcal{F}\varphi\cdots\varphi\mathcal{F}$, le signe φ étant à prendre parmi les signes '$*$' ou '$/$';
- un *facteur* $\mathcal{F}$ est une chaîne de caractères qui est un nom de variable (de a à z), une expression parenthésée $(\mathcal{E})$ ou une expression parenthésée précédée d'un nom de fonction (de $A(\mathcal{E})$ à $Z(\mathcal{E})$ donc).

9.2 — La procédure E doit tenir compte de la présence des signes '$-$' :

```
procedure E ;
begin
   T ;
   while token in ['+', '-'] do
   begin next_token(token) ; T end ;
   if not (token in [')', '$']) then erreur ;
end ;
```

9.3 — La procédure T doit tenir compte de la présence des signes '$/$' :

```
procedure T ;
begin
   F ;
   while token in ['*', '/'] do
   begin next_token ; F end ;
end ;
```

9.4 — La procédure F examine si le caractère courant de la chaîne d'entrée est un nom de variable, un nom de fonction ou une expression parenthésée :

```
procedure F ;
begin
   if token in ['a'..'z'] then next_token(token)
   else if token in ['A'..'Z'] then begin
          next_token(token) ;
          next_token('(') ; E ; next_token(')')
          end
   else if token = '(' then begin
          next_token(token) ;
          next_token('(') ; E ; next_token(')')
          end ;
end ;
```

10. L'analyse lexicale

Il s'agit dans cette partie de décrire l'interface indispensable entre une "vraie" expression arithmétique (par exemple $\exp(3.14 * x + 0.135)$) et la vision idéale avec laquelle nous avons travaillé jusqu'ici (les variables, les constantes et les noms de fonctions sont représentées par un seul caractère).

10.1 — Lorsque vous lisez, votre cerveau assemble certaines lettres pour en faire des mots. Un ordinateur fait exactement la même chose. Quand je tape

$$\sin(3 * x + 5) + x * x - 12.35$$

j'introduit en mémoire une chaîne de caractères (stockée d'habitude sous la forme d'un tableau), ce qu'on peut symboliser par

s	i	n	(	3	$*$	x	+	5	)	+	x	$*$	x	$-$	1	2	.	3	5

L'ordinateur commence par lire les trois lettres 's', 'i' et 'n' et reconnaît le mot 'sin'. La parenthèse ouvrante forme à elle seule un mot, etc. Dans notre exemple, l'ordinateur reconnaîtrait les mots :

sin	(	3	$*$	x	+	5	)	+	x	$*$	x	$-$	12.35

Au lieu de 'mot', les informaticiens préfèrent utiliser 'lexème'.
Les lexèmes ont des formats et des significations différentes ('sin', 'x', '+', etc.). Pour fonctionner de manière efficace, l'ordinateur ne se contente pas de découper la chaîne d'entrée en lexèmes. Il *code* ceux-ci sous une forme convenable, de format fixe. Traditionnellement, un lexème codé s'appelle un *token*.
L'information portée par un token est à deux niveaux (par exemple sous la forme d'un record). Un premier niveau nous apprend s'il s'agit d'un identificateur,

d'un nom de fonction, d'une parenthèse, d'une opération binaire. Les autres informations utiles (le nom d'une variable, la valeur d'une constante, le type, etc.) sont mémorisées dans une *table des symboles*. Ces informations sont accessibles à partir du token grâce à un pointeur vers la table des symboles.

10.2 — Comme nous nous occcupons uniquement d'expressions arithmétiques, nous pouvons employer une forme très simple de codage :

- Chaque lexème est codé par un entier différent de 0.
- Les codes des lexèmes sont stockés dans le tableau $tokens[1..50]$.
- L'entier nul marque la fin de la suite des tokens (en remplacement du caractère '\$' que nous avons utilisé).
- Un entier strictement positif représente *l'adresse*, dans le tableau $valeurs[1..50]$, d'une variable ou d'une constante. Par convention, la valeur de la variable x est à l'adresse 1 dans ce tableau.
- Un entier strictement négatif représente un nom de fonction, une parenthèse ou une opération. Pour ne pas nous surcharger la mémoire, nous utiliserons une facilité que nous offre PASCAL. Au début de notre programme, nous déclarerons ces entiers négatifs comme des *constantes* :

const
$\_sin = -1$; $\_cos = -2$; $\_exp = -3$;
$\_parg = -4$; $\_pard = -5$;
$\_plus = -6$; $\_moins = -7$; $\_mult = -8$;

La valeur de ces entiers importe peu car nous ne ferons références à ces entiers qu'à travers leur nom.

10.3 — Après codage de l'expression précédente, le tableau *valeurs* se présenterait comme ceci :

1	2	3	4	5	6	
?	3	5	12.35	?	?	...

et le tableau *tokens* comme cela :

1	2	3	4	5	6	7	8
_sin	_parg	2	_mult	1	_plus	2	_pard

9	10	11	12	13	14	15	16
1	_mult	1	_moins	4	0	?	...

Les points d'interrogation symbolisent des variables non initialisées. Il est interéssant de noter que la valeur de x n'a pas besoin d'être connue au moment de l'analyse lexicale; cette valeur ne sert qu'au moment de l'évaluation de l'expression.

10.4. — Si nous adoptons cette suggestion :

• La variable *token* devient une variable de type entier qui *pointe* sur le tableau *tokens*.

• La procédure *next_token* (qui s'appelle traditionnellement *l'analyseur lexical*) déchiffre la chaîne d'entrée *expression*, code le lexème reconnu (en entrant l'entier convenable dans le tableau *tokens* et en entrant, si nécessaire, la valeur d'une constante dans le tableau *variables*) et renvoie ses informations dans *token*.

10.5 — Un dernier mot, comme promis, sur les signes '−' unaires. Comment décider si un signe '−' est un signe unaire ou binaire ? Pour cela, il suffit de regarder le token qui précède. Si le signe '−' est le premier caractère de l'expression, s'il est précédé d'une parenthèse ouvrante ou d'un signe opératoire (unaire ou binaire), alors c'est un signe unaire. Dans tous les autres cas, le signe '−' est un signe binaire. Bien entendu, un signe '−' binaire ne sera pas codé de la même manière qu'un signe '−' unaire dans le tableau *tokens*.

Toujours pour éviter les phénomènes de "bord de chaîne", il est plus recommandé d'entourer l'expression de départ de parenthèses (et de la faire suivre du symbole dollar '$'). Cela simplifie la détection des signes '−' unaires qui peuvent débuter une expression.

Il n'y a presque rien à changer aux procédures E, T et F. Il suffit d'introduire un nouveau type de facteur : un facteur précédé d'un signe moins unaire (en symboles : $\dot{-}\mathcal{F}$) est encore un facteur. (Ici, le signe '−' unaire est typographié $\dot{-}$.)

À vos claviers !

CATALOGUE DES PUBLICATIONS DES IREMS
1985 — 1988

Ce catalogue présente les publications des IREM de 1985 à 1988 , à l'exception des revues, bulletins de liaison, bulletins de commission ... recensés dans les "Répertoires des Articles des IREM".

Il reprend les documents de 1985 non épuisés et non annulés qui figuraient dans le Catalogue précédent et répertorie quelques productions antérieures qui n'avaient pas été présentées dans la mise à jour de 1985.

Les publications sont ici rangées en général dans l'ordre chronologique de leur parution, en respectant si possible, pour les nouveaux documents, les collections éventuelles proposées par les IREM éditeurs.

Dans certains cas il a été impossible, malgré la répétition des démarches, d'avoir accès à tous les renseignements recherchés ; mais la plupart des IREM ont contribué avec conviction et efficacité - par leurs équipes de direction, d'animation, de documentation et de secrétariat - à la précision de ce Catalogue : que leur participation soit ici vivement remerciée et qu'elle fasse oublier les faiblesses éventuelles sur l'homogénéité du document.

Les propositions pour améliorer l'organisation et l'utilisation de ce Catalogue - et donc pour faciliter, dans le cadre des IREM, la documentation, la formation, la communication des enseignants, chercheurs, étudiants, élèves, ... - seront accueillies avec reconnaissance.

En plus de la liste alphabétique des publications et de celle des auteurs, vous y trouverez un index des mots clés ainsi qu'un classement par niveaux.

Prix de vente sur place à la Bibliothèque de l'IREM de Strasbourg : 50 F ; par correspondance : 60 F.

LES MATHS NOUVELLES SONT ARRIVÉES

'*L'Ouvert*' présente ci-après de larges extraits de l'émission "*Temps fort*" animé par Gérard KUNTZ sur une radio locale ... Participaient à cette émission : Marie-Agnès EGRET, Eliane LEGRAND et Nicole VOGEL (professeurs dans l'enseignement du second degré), Dominique GUIN (maître de conférence à l'Université Louis Pasteur et animatrice IREM), Michel de COINTET et Rémy JOST (I.P.R. de Mathématiques).

1. LA RÉFORME DES PROGRAMMES

G. K. : *Les mathématiques sont en réforme permanente depuis trente ans. On a parlé de mathématiques nouvelles, de mathématiques abstraites, de mathématiques modernes... S'agit-il d'une maladie chronique ? La nouvelle réforme et les nouveaux programmes sont-ils stables ou seront-ils remis en question dans dix ans par des gens qui nous dirons que nous nous sommes trompés ? Pourquoi faut-il sans cesse réformer ?*

M. de C. : Pour répondre à ces questions, pour comprendre ces bouleversements, il faut revenir vingt ans en arrière, à l'époque des mathématiques modernes. Cette première réforme répondait à la fois à une nécessité scientifique et à un souci pédagogique. Contrairement à ce que l'on pense, les mathématiques comme toute science vivante, évoluent. Or, il y avait trop de choses qui n'étaient pas explicites dans l'enseignement des mathématiques; on voulait mieux définir les bases avant de faire ou d'appliquer les mathématiques. On s'est rendu compte au bout de peu de temps que c'était une erreur comme celle qui consisterait à apprendre la natation sans jamais aller dans une piscine. Il fut donc décidé de nouveaux changements. Maintenant on peut dire qu'il ne s'agit plus de bouleversements mais d'ajustements au fil des ans. L'enseignement est aujourd'hui centré sur l'essentiel de l'activité mathématique, à savoir la résolution de problèmes.

G. K. : *Commençons par le collège et tournons-nous vers Marie-Agnès* EGRET *qui travaille à l'IREM comme animatrice. Qu'est-ce qui a fondamentalement changé par rapport au passé dans la nouvelle mouture des programmes de collège ?*

M.-A. E. : On part de situations-problèmes pour introduire un concept. On essaye de faire en sorte qu'il devienne un outil. Cela signifie que dans une situation donnée, l'élève essaye de construire sa connaissance pour s'approprier l'outil et le réutiliser dans d'autres domaines par la suite.

G. K. : *On commence donc par étudier des situations concrètes et pour cela on utilise des outils qui sont ensuite généralisés.*

M.-A. E. : C'est cela, et ces outils deviennent alors des objets au sein d'une certaine théorie.

G. K. : *Est-ce une erreur de dire que l'abstraction mettra plus de temps à se réaliser que par le passé ?*

R. J. : Sans doute puisque maintenant l'abstraction vient plutôt comme une victoire, un parachèvement après une période expérimentale d'essais et d'erreurs, de conjectures. On élabore l'outil, on le fabrique pour ensuite l'utiliser dans d'autres situations. Il s'agit de donner du sens aux mathématiques.

G. K. : *Pourquoi a-t-on cru d'abord qu'on pouvait poser les objets mathématiques abstraits a priori et faire travailler à partir de là ? Pourquoi a-t-on mis relativement longtemps pour dégager cette idée de partir de situations-problèmes ?*

D. G. : L'introduction de l'abstraction et le courant des mathématiques modernes sont dûs à ce qui s'est passé dans l'enseignement supérieur et à l'influence de l'école BOURBAKI, des mathématiciens qui étaient portés vers le formalisme des concepts. Mais ce qui est adapté à l'enseignement supérieur peut très bien être une catastrophe au niveau secondaire.

M. de C. : Il est bon de noter que la réforme des mathématiques modernes est dûe aux idées personnelles de quelques grands mathématiciens, mais un des grands bienfaits de cette réforme a été la création des IREMs : de véritables instituts de recherche.

M.-A. E. : Ce sont des recherches en didactique, des réflexions dans le cadre des IREMs qui ont amené ces idées nouvelles qui ont ainsi des fondements à la fois théoriques et pratiques, ce qui garantit leur sérieux mieux qu'une idée personnelle.

G. K. : *Résoudre des problèmes, partir du concret, essayer de mettre en œuvre des outils ... Les mathématiques ne deviennent-elles pas dans le secondaire une science expérimentale ?*

R. J. : Il ne faudrait pas les enfermer à ce niveau là, car dès que possible, on donne à l'élève un outil à partir duquel il peut résoudre des problèmes que lui-même peut construire. D'une manière rigoureuse, on lui apprend à raisonner, ce qui est indispensable pour la formation générale.

M. de C. : Les mathématiques ne sont pas une science expérimentale mais je crois que leur apprentissage passe par une phase expérimentale : il faut toucher, conjecturer, émettre des hypothèses, les vérifier avant de passer à un stade de formalisation.

G. K. : *La question qui se pose est donc : "Peut-on apprendre les mathématiques en résolvant des problèmes ?". Un grand nombre d'enseignants du secondaire semble en douter.*

M.A. E. : On n'a pas l'habitude de cette méthode. L'enseignant a l'impression que cela fait perdre du temps par rapport au cours magistral où il croit faire passer beaucoup de connaissances. Mais le temps passé au départ est gagné par la suite car l'outil approprié par l'élève l'est une bonne fois pour toutes.

G. K. : *En fait les buts sont les mêmes, mais les chemins sont différents.*

M.-A. E. : Oui, mais je suis assez déconcertée. Je gagnerais du temps en donnant plus de cours que l'élève retravaillerait à la maison, mais je sais que cela est un leurre, car l'élève n'a pas les moyens de travailler à la maison de cette façon là.

2. LE RÔLE DE L'INFORMATIQUE

G. K. : *Je voudrais que nous évoquions maintenant une question liée à la technologie contemporaine qui est celle de l'introduction des calculatrices et de l'informatique de façon plus générale. C'est un vaste sujet et l'on s'aperçoit que l'usage des calculatrices a changé pas mal de choses dans l'enseignement des mathématiques. Comment percevez-vous les uns et les autres l'arrivée massive des calculatrices programmables dans cet enseignement ?*

N. V. : Il y a quelques années les calculatrices ont été interdites puis tolérées. Maintenant elles sont obligatoires dans le sens que l'un des objectifs de l'enseignement est d'apprendre à s'en servir au collège. Cela est utile pour l'expérimentation et à partir de la seconde on va apprendre à la programmer. L'objectif est de savoir lui faire faire des tâches techniques qui sont difficiles à réaliser parce que fastidieuses ou prenant beaucoup de temps. Les ordinateurs étant présents dans le monde du travail, il est naturel que l'on apprenne à s'en servir pour faire des mathématiques. On peut expérimenter tant dans le domaine numérique que dans le domaine géométrique grâce aux écrans graphiques qui permettent de faire des figures, de les modifier, de les animer, de conjecturer ... Bref, utiliser les figures pour voir si ce que l'on veut démontrer est plausible ou non.

M.-A. E. : Je suis tout à fait d'accord, mais je voudrais relativiser la place de l'informatique dans les collèges car c'est en général une structure très figée, c'est-à-dire que les ordinateurs se trouvent dans une salle spécialisée et à cause de cela une bonne partie des possibilités qu'offre l'informatique ne peut être utilisée. Il faut en effet se déplacer avec sa classe et mettre en place le nanoréseau ce qui n'est pas toujours facile! A court terme on utilisera sans doute l'informatique d'une manière différente, mais pour le moment, dans les collèges, cela se passe rarement comme Nicole VOGEL vient de le dire.

N. V. : Une autre voie d'ulisation pour laquelle il nous faudra des moyens, sera d'avoir dans chaque classe un ordinateur muni d'une interface pour retroprojecteur. L'ordinateur fonctionnerait alors un peu comme un tableau noir, ce qui permettrait de faire participer la classe avec moins de perte de temps.

G. K. : *J'ai entendu beaucoup de critiques, en particulier de professeurs de mathématiques, qui trouvent gênante cette introduction massive de l'informatique ; ils critiquent le fait que pour bien des élèves, le calcul sur machines remplace le raisonnement. Que pensez-vous de cette objection ?*

M.-A. E. : Il faut attirer l'attention des élèves sur le fait que des nombres comme

$\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ ne sont pas égaux à la valeur qu'affiche leur calculatrice. Il apparaît ainsi qu'un travail sur la notion de nombre est indispensable.

N. V. : Effectivement puisque les nombres que manipule une calculatrice ne sont pas exactement les mêmes et n'ont donc pas exactement les mêmes propriétés que ceux que l'on manipule en mathématiques.

G. K. : *Il faut donc que l'enseignant fasse preuve de recul, de manière à faire comprendre à l'élève qu'il s'agit d'approximation et non de la réalité des objets eux-mêmes.*

D. G. : Le problème est que pour un enseignant, modifier son enseignement pour profiter des nouveaux outils que sont calculatrices et ordinateurs, n'est pas un travail évident : ce travail ne peut pas être accompli par l'enseignant seul dans sa classe. C'est justement dans ce but que des recherches sont faites au sein des IREMs. Des séquences pédagogiques sont construites, expérimentées, analysées, modifiées, évaluées puis publiées pour que tous en profitent. Quand les enseignants sauront comment se servir efficacement du matériel informatique qui se trouve dans les établissements, celui-ci sera utilisé à plein.

3. LA FORMATION CONTINUE

G. K. : *Un axe important de ces nouveaux programmes est la formation des enseignants. On ne peut pas mettre en œuvre une nouvelle pédagogie s'il n'y a pas un gros travail de formation. Est-ce que les nouvelles démarches sont accompagnées d'un travail de recherche au sein des IREMs ou ailleurs ? Les inspecteurs étant aussi des animateurs et des formateurs, comment cela fonctionne-t-il concrètement ?*

R. J. : Grâce aux ressources de l'IREM, nous avons pu monter un certain nombres de formations en 89/90, formation auxquelles les enseignants ont répondu massivement puisqu'au lieu de la centaine d'inscrits de l'an dernier, nous en avons 750 cette année, ce qui représente en gros 30% des enseignants de mathématiques de l'académie et certains ont suivi deux ou trois stages. Ces stages sont animés par des formateurs de l'IREM ou par d'autres selon les compétences et les besoins mais malgré cela toutes les attentes ne peuvent être satisfaites, ce qui implique un renouvellement pour les années à venir. Un des objectifs essentiel de ces stages est de favoriser l'échange d'expériences et de pratiques entre enseignants.

G. K. : *Pour animer ces stages, il faut évidemment des gens qui ont travaillé sur la matière et des structures qui vivent dans le temps et je ne vois là encore que l'IREM ; il ne faut donc pas que les IREM meurent.*

M. de C. : Non seulement il ne faut pas qu'ils meurent, mais il faut qu'ils vivent toujours mieux si possible.

4. LA LIAISON ENTRE COLLÈGES ET LYCÉES

G. K. : *Cette année est programmé un stage sur la charnière 3ème – 2nde. Qu'essayez-vous d'y faire avec les professeurs qui y participent ?*

M.-A. E. : Il y a eu trente inscrits, ce qui est beaucoup, mais vingt professeurs de collège pour dix de lycées, ce qui est peu équilibré. Cela est dû au fait que si la classe de 3ème est la classe importante pour le collège, la 2nde n'est pas encore la classe importante en lycée. C'est vrai qu'enseigner en 1ère ou Terminale C ou D pose de réels problèmes mais il y en a ailleurs. C'est pourquoi Nicole VOGEL et moi, à partir d'un travail mené dans un des groupes IREM, nous essayons de mettre au point des méthodes pour les deux classes de 3ème et 2nde.

N. V. : Concrètement nous proposons des exemples d'activités que nous avons faites l'une ou l'autre dans nos classes, et nous proposons aux collègues d'essayer quelque chose de semblable ou de préparer une activité qui irait dans le sens que nous avons proposé, puis de l'expérimenter dans leurs classes et de revenir avec des impressions et des résultats à échanger.

G. K. : *Les enseignants de 2nde se plaignent souvent de la faiblesse des élèves qui viennent du collège. Il y a là des critiques plus ou moins voilées et cela témoigne d'un hiatus entre le collège et le lycée. Comment vivez-vous cela et comment voyez-vous l'avenir ? Comment peut se mettre en place une harmonisation ?*

N. V. : J'ai l'impression, en écoutant les élèves, qu'il y a de grandes différences entre les lycées. Par exemple, le passage de 3ème en 2nde n'est pas vécu de la même façon dans une petite ville et à Strasbourg. Dans une petite ville il y a un peu moins d'écart entre les élèves et on est peut-être un peu moins ambitieux pour eux, mais au bout du compte ils arrivent néanmoins au même niveau, alors que les lycées strasbourgeois ont souvent plus d'ambition, ont une image de marque qu'ils veulent absolument maintenir.

R.J. : C'est une des raisons de la résistance au changement de programme. En lycée, à Strasbourg, les classes sont souvent plus chargées (quarante élèves) et le travail ne peut se mettre en place de la même manière et c'est là que les enseignants, quand ils ont à faire à des classes assez hétérogènes sont un peu démunis.

5. LIAISON ENTRE LYCÉE ET POSTBAC

G. K. : *Autre seuil important en mathématiques, celui entre la terminale et l'université ou les grandes écoles. On entend des grincements de tous les côtés. Les étudiants disent : "Quand on arrive en fac., on ne reconnaît plus notre monde, c'est trop difficile, ce sont d'autres mathématiques". Alors, Dominique* GUIN*, comment vivez-vous cette transition entre le secondaire et le supérieur ?*

D. G. : C'est tout simple. L'évolution dont nous parlions à propos des collèges et des lycées, cette évolution s'est arrêtée au bac, ce qui fait qu'en DEUG l'enseignement des mathématiques n'a guère évolué. Par conséquent les élèves qui ont un bac et qui arrivent en fac ont de grosses difficultés. Les programmes qui supposent connus des concepts et des sujets qui ne sont pratiquement pas abordés au lycée leur posent problème.

G. K. : *Que faudrait-il faire ? Changer les programmes ? Mettre en place une concertation ? Et quoi encore ?*

D. G. : Il y a effectivement un manque de concertation, mais il n'y a pratiquement que la structure des IREMs qui regroupe des enseignants des deux niveaux. S'il y a des commissions chargées de l'élaboration des programmes au niveau national pour le secondaire, il n'y a rien de similaire pour le supérieur. L'adaptation du contenu de la première année relève plus de l'intérêt que pourra prendre l'enseignant, et c'est là un des travers de l'autonomie des universités. Il semble qu'il devrait y avoir, au niveau national, des commissions qui fixent une continuité et une homogénéïsation des programmes.

G. K. : *L'inspection tire-t-elle la sonnette d'alarme et a-t-elle des chances de se faire entendre ?*

R. J. : Au niveau du supérieur non, car cela ne relève pas de notre compétence. Par contre il y a eu quelques rencontres informelles avec le directeur des filières DEUG : nous avons prévu une réunion avec des professeurs de terminale C et des professeurs enseignants en DEUG.

G. K. : *Il paraît curieux que de telles structures de concertation n'existent pas. Il s'agit de la formation de toute une génération de jeunes étudiants qui risquent de tomber dans des mondes totalement inconnus alors qu'il suffirait de réfléchir ensemble. Est-ce le revers de l'autonomie comme vous le disiez tout à l'heure ? Ne peut-on rien faire contre cela ? Vous paraissez accepter la situation.*

D. G. : C'est toujours très gênant de constater que les étudiants ne comprennent rien à ce qu'on leur raconte, mais le problème de l'université est que les enseignants ne sont pas uniquement des enseignants. Ils sont enseignants-chercheurs et tout, dans l'université, les pousse à ne pas trop investir dans l'enseignement s'ils s'occupent un tant soit peu de leur carrière, et de le délaisser pour la recherche.

G. K. *Il faudra peut-être créer des postes de professeurs-enseignants dans les universités ?*

D. G. : C'est dangereux. Il faut que les enseignants-chercheurs prennent leur enseignement à cœur, mais il est indispensable qu'ils continuent à faire de la recherche sinon la connaissance va se figer.

6. LES FILLES ET LES MATHÉMATIQUES

G. K. : *J'aimerais aborder un dernier sujet qui n'est pas anecdotique : c'est la place relativement modeste des filles dans les sections scientifiques. Le journal "Femmes" signale une défection importante des filles. Comment peut-on expliquer cela, et surtout, quels remèdes y apporter ?*

E. L. : J'ai souvent observé que les filles sont plus exigentes vis à vis de leurs résultats scolaires que les garçons. Elles ont un peu peur de se lancer dans une section qui leur paraît difficile et d'y échouer : les garçons soutenus par leur famille et poussés par tout leur environnement vont se lancer, même s'ils risquent l'échec, alors qu'une fille n'acceptera pas cette éventualité!

G.K. : *Il faudrait donc faire de l'information, changer les mentalités, mais cela est une œuvre de très longue haleine.*

R. J. : Bien sûr, les médias devraient donner les informations sur toutes les filières possibles qui ne sont pas réservées qu'aux garçons. On peut par exemple penser aux métiers d'ingénieur de laboratoire ... où les filles ont leur place. Et pourtant si on regarde certaines math-sup. qui préparent aux concours pour ce genre de métier, on voit à peine un cinquième si ce n'est pas un dixième de filles. Là, elles manquent sûrement d'informations; or, c'est grâce à elles que l'on pourrait élargir le recrutement.

N. V. : Il y a aussi un problème de mentalité de l'enseignement scientifique, qui est lié à des traditions un peu anciennes et très machistes, en particulier dans les prépas. Une mentalité peu ouverte à l'esprit féminin et on a l'impression de devoir passer par un côté polar qui est mal adapté à ce que souhaite une fille en particulier à 18-20 ans.

G. K. : *Faut-il être polar pour faire des maths ?*

N. V. : Non, cela n'est pas nécessaire, mais souvent les prépas sont comme cela et développent le mauvais côté de l'esprit scientifique.

M.-A. E. : Laissez-moi vous raconter une anecdote. A Troyes, l'an dernier, lors d'un colloque inter-IREM, nous nous interrogions sur le fait que si en 3ème les filles sont souvent meilleures que les garçons, on ne les retrouve pas ensuite dans les sections scientifiques. Un collègue nous a alors dit : "*C'est normal, après on leur demande de réfléchir, alors qu'avant ce n'était pas le cas !*" !

N. V. : Marie-Agnès et moi nous nous sommes dit qu'avec un professeur comme ça, il n'était pas étonnant que si peu de filles fassent des maths ...

DU BON USAGE D'UN TRACEUR DE COURBES POUR ÉCLAIRER CERTAINS CONCEPTS MATHÉMATIQUES

Gérard KUNTZ

Le logiciel GRAPHIX, commercialisé par l'IREM de Marseille est un traceur de courbes dont la prise en main ne nécessite aucune connaissance en informatique. En moins d'une heure, une classe de seconde peut commencer à faire des mathématiques avec cet outil qui l'accompagnera tout au long de sa scolarité en lycée et au-delà. Voici quelques séquences pédagogiques qui ont été expérimentées avec succès avec des élèves du lycée Couffignal de Strasbourg. Leur durée varie de quelques minutes à deux heures. Certaines de ces séquences peuvent être traitées sur calculatrices avec écran graphique.

a) Tracé de courbes point par point. Variations de fonctions

Il suffit d'introduire la fonction, de choisir les unités, la position de l'origine, l'intervalle d'étude et voilà que la courbe se dessine. C'est tellement simple que l'élève de seconde a vite fait d'imaginer que dans ce domaine, l'informatique le déchargera à l'avenir de toute étude de fonction. Il convient de le détromper dès le début de l'année.

Trois types de contre-exemples mettent en évidence les limites du genre : les fonctions présentant des changements de variations sur un très petit intervalle, la représentation de fonctions sur de grands intervalles, enfin des fonctions du type $f(x) = \sin(1/x)$ sur un intervalle dont un bord est voisin de zéro.

On demandera par exemple aux élèves de tenter de dresser le tableau de variation de $f(x) = x\hat{}3 + 0.001001 * x\hat{}2 + 1E - 9 * x + 0.5$ au seul vu du tracé de la courbe. Après cette séquence, on conduira les élèves par un raisonnement simple à zoomer sur un intervalle où les surprises apparaîtront.

On proposera ensuite la représentation de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; 5000]$ par exemple. Il suffit de faire varier le nombre de points pour obtenir des tracés apparemment cohérents ... mais faux et contradictoires, si l'on relie les points (voir les figures). On prendra bien entendu le temps d'expliquer cette pseudo-cohérence, calculatrice en main.

La fonction $f(x) = \sin(1/x)$ permet à peu de frais de faire apparaître à l'écran un nuage de points sur un petit intervalle voisin de zéro, puis de retrouver une cohérence en réduisant l'intervalle.

De cet ensemble de travaux sur ordinateur les élèves concluront qu'un tracé de courbes par points ne fournit aucune certitude : entre deux points quelconques, aussi voisins soient-ils, tout peut arriver, même si habituellement les choses se passent bien.

On profitera de cette séquence pour montrer que si l'on réduit l'intervalle d'étude, les tracés ressemblent fort à des segments : l'interpollation linéaire en découle naturellement.

b) Approximation d'une fonction par des fonctions simples

Cette séquence, particulièrement spectaculaire utilise la facilité de superposition des tracés qu'offre GRAPHIX. On commence par tracer la courbe du sinus dans $[0; 2\pi]$, puis les représentations des polynomes de degré $1, 3, 5 \ldots 15$ qui constituent les approximations de TAYLOR. Sur l'écran, on comprendra une fois pour toutes ce que signifie l'expression : la fonction g est une approximation de f dans tel intervalle. La notion d'intervalle de validité saute aux yeux. De nombreux exemples peuvent être mis en œuvre, sans justification, en seconde ou première, avec justification après certains T.P. de terminale. En section BTS ou à l'université, l'approximation d'une fonction par une série de FOURIER permettra aux étudiants de voir concrètement le sens des théorèmes qui leur sont proposés. Il suffit de quelques minutes pour avoir les tracés sous les yeux.

c) Tangente à une courbe plane en un point

On commence par représenter la courbe d'une fonction dans un intervalle donné. Par un point fixe et par un point variable de cette courbe, on fait passer une droite dont les élèves établiront l'équation, qui dépend du paramètre k, abscisse de ce point variable. GRAPHIX offre la possibilité d'utiliser un paramètre qui peut prendre 25 valeurs distinctes. Il suffira de prendre pour k des valeurs de plus en plus voisines de l'abscisse du point fixe pour voir apparaître une famille de droites tendant vers une position limite. Les contre-exemples feront appel à des courbes présentant un point anguleux, ou à la courbe de $f(x) = x * \sin(1/x)$ prolongée par l'origine.

d) Étude d'une famille de fonctions dépendant d'un paramètre

On pourra utiliser les facilités offertes par GRAPHIX pour représenter des familles de fonctions dépendant d'un paramètre : des propriétés apparaissent, donnant naissance à des conjectures que l'on s'emploiera à démontrer (point commun, tangente commune). Cette démarche est essentielle dans une formation scientifique où des phénomènes dépendant de paramètres sont le pain quotidien.

e) Limites et prolongement par continuité

Cette séquence, particulièrement importante, illustre parfaitement les services rendus par l'informatique aux mathématiques, et leurs évidentes limites. Les nombres positifs disponibles dans un logiciel constituent un intervalle $[a, b]$ de décimaux, a étant voisin de zéro, b étant très grand mais fini.

La notion de limite à l'infini ou en zéro est donc inaccessible à tout logiciel. Par exemple TURBO PASCAL travaille dans l'intervalle $[1E - 38, 1E + 38]$. Ce "*détail*" mis à part, on peut se faire une idée de la manière dont évolue une fonction à l'infini ou en zéro en donnant à la variable des valeurs voisines de zéro ou très grandes : le résultat est souvent correct, mais de nombreuses erreurs apparaissent, qu'il convient d'expliquer. L'exemple de $f(x) = (1+1/x)\hat{}x$ à l'infini est significatif : après s'être approché de e, les valeurs sautent brutalement à 1. On ne peut que conjecturer avec l'informatique, ensuite il convient de démontrer.

Pour réaliser les prolongements par continuité d'une fonction f en 0, il suffit de représenter f sur $]0,1]$: le prolongement est fait automatiquement ... aux risques et périls de l'utilisateur.

f) Variations d'une fonction et signe de la dérivée

GRAPHIX fournit à l'utilisateur la possibilité de tracer automatiquement la courbe de la fonction dérivée d'une fonction f. On mettra sans peine en évidence les rapports entre les variations de f et le signe de f'.

g) Études de transformations ponctuelles

Cette séquence utilise une très remarquable possibilité de GRAPHIX. Soit une courbe C1 définie en coordonnées cartésienness, paramétriques ou polaires. On peut définir une courbe C2 en coordonnées paramétriques par les formules :

$$x = f(x1, y1)\ ;\ y = g(x1, y1) \qquad (1)$$

Le logiciel interprète $x1$ et $y1$ comme les coordonnées d'un point de C1 et trace donc l'image de C1 par la transformation ponctuelle définie par les formules (1).

On pourra alors passer en revue l'ensemble des transformations ponctuelles du lycée, vérifier leurs propriétés, ou émettre des conjectures. Au cours d'un T.P. préparatoire, on pourra décrire les transformations ponctuelles par des formules de type (1) pour celles qui ne sont pas au programme sous cette forme.

On pourra aussi exhiber sans peine des exemples de transformations qui ne sont pas aussi simples que celles du programme, et qui finissent par donner l'impression aux élèves que l'image d'un cercle ne peut être qu'un cercle et que celle d'une droite ne saurait différer d'une droite ... On obtient un franc succès en transformant une droite en cercle ou un cercle en droite. Cela justifie les efforts de démonstrations qui finissent par lasser les élèves non avertis des bizarreries qu'offrent des transformations décrites par des formules relativement simples.

On pourra sans peine composer des transformations, mettre en évidence leurs invariants.

Enfin, on pourra étudier des familles de transformations dépendant d'un paramètre (homothéties de centre A, de rapport k) et conjecturer à propos des propriétés de la famille d'images de la courbe initiale.

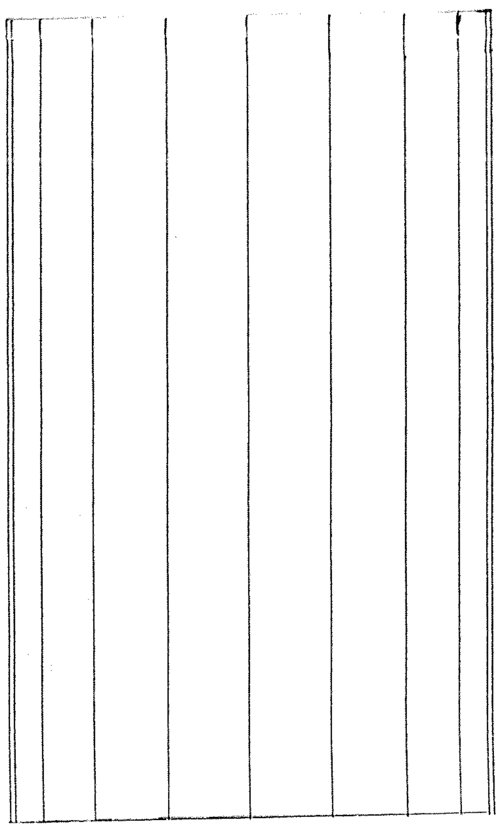
h) Courbes paramétrées. Lieu de points

Il suffit d'introduire les formules et l'intervalle, ainsi que les unités, et la courbe se dessine. Cela permet en particulier de visualiser un ensemble de points dépendant d'un paramètre. Les séquences g et h constituent une approche complémentaire à celle du "*Géomètre*" de Nathan dont le point de vue est résolument géométrique.

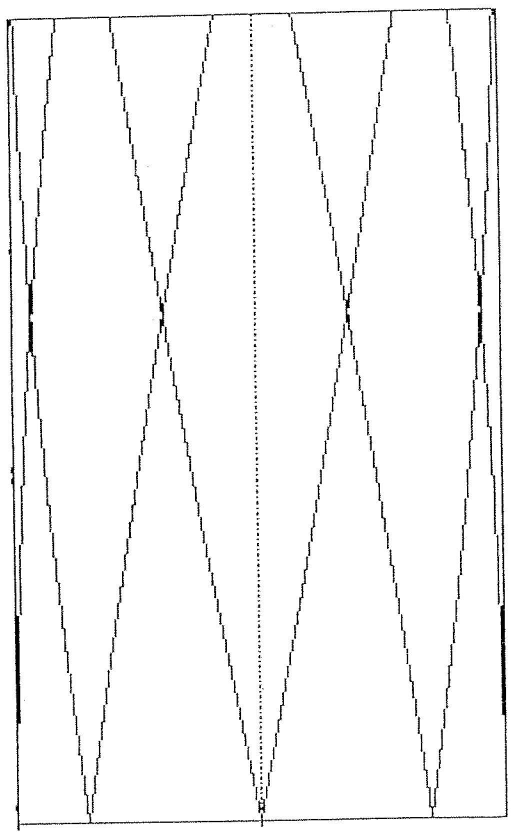
Conclusion

Ce logiciel constitue un remarquable outil au service des enseignants et des élèves pour préparer l'étude théorique des notions mathématiques, et pour conjecturer. Ce qui est décrit plus haut est loin d'être exhaustif. Les mises en gardes étant faites, les élèves sont rapidement habiles pour en tirer parti, sachant que rien ne pourra remplacer le travail conceptuel et la démarche démonstrative.

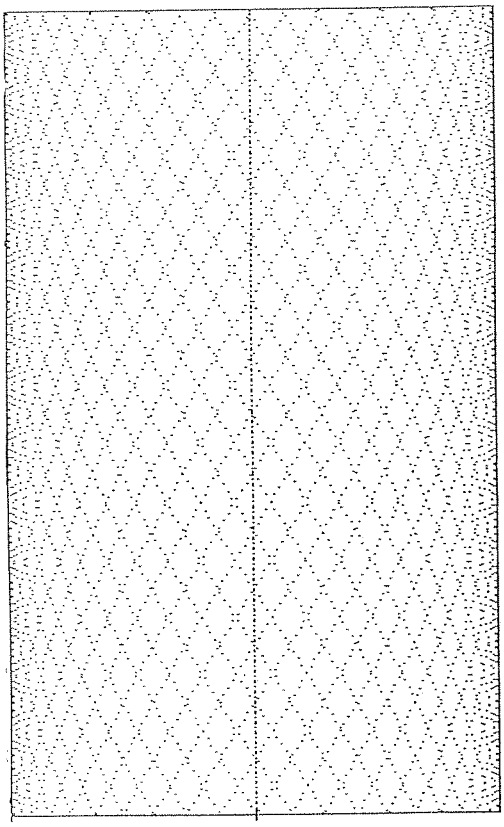
Représentation de $f(x) = \sin x$ sur $[0; 5000]$
avec les pas indiqués
(Logiciel GRAPHIX)



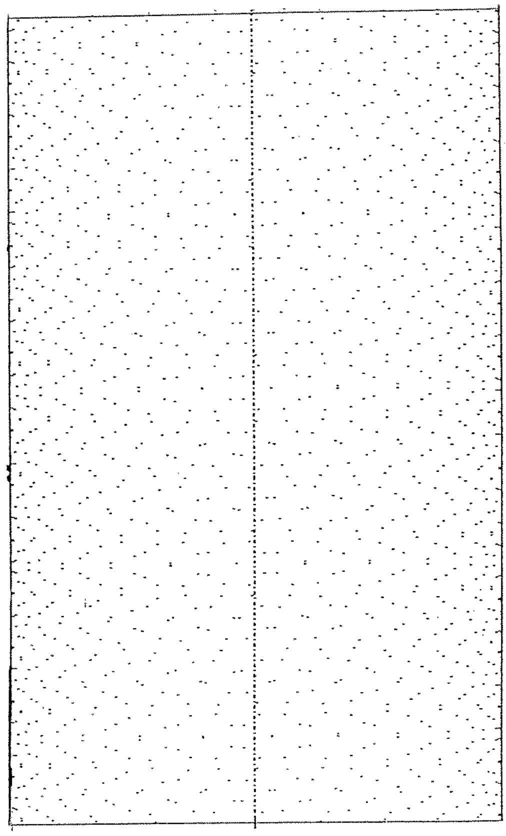
pas = $0.34906585 \simeq \frac{\pi}{9}$



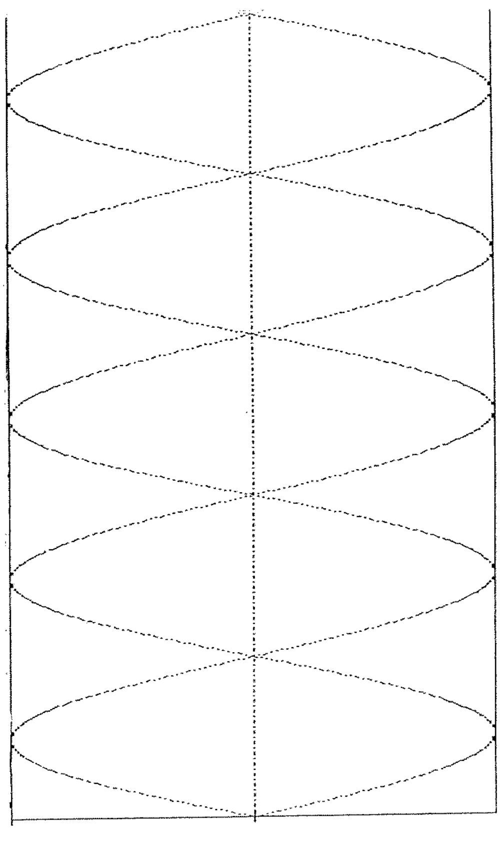
pas = $6.7853 \simeq \frac{\pi}{4}$



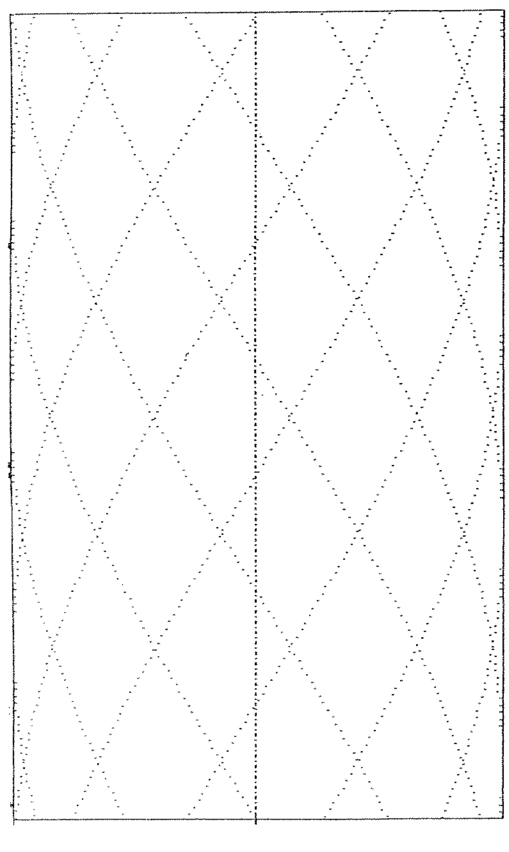
pas = 1



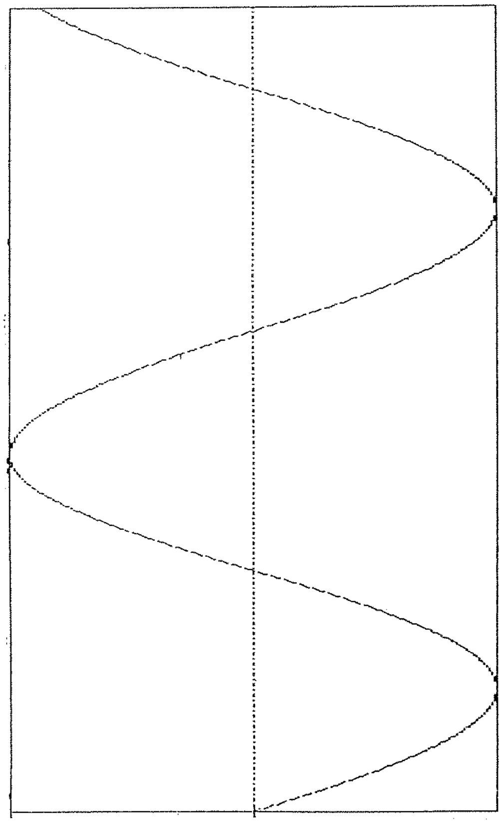
pas = 3



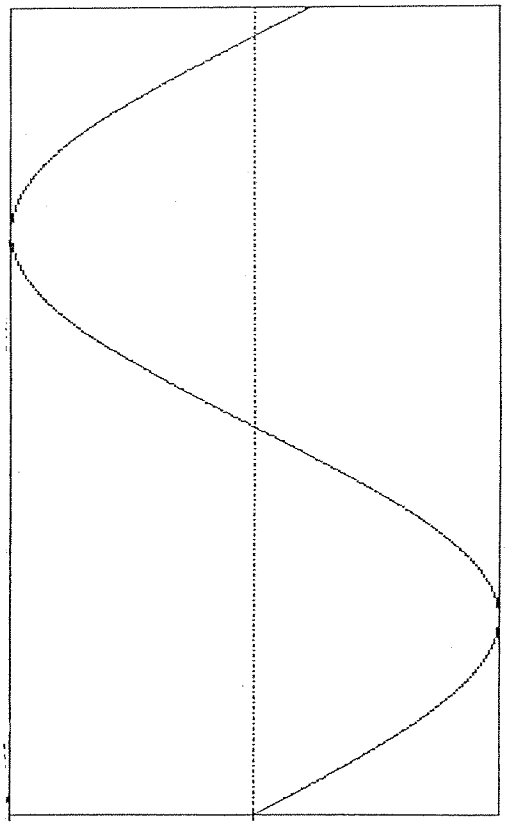
pas = 3.15159



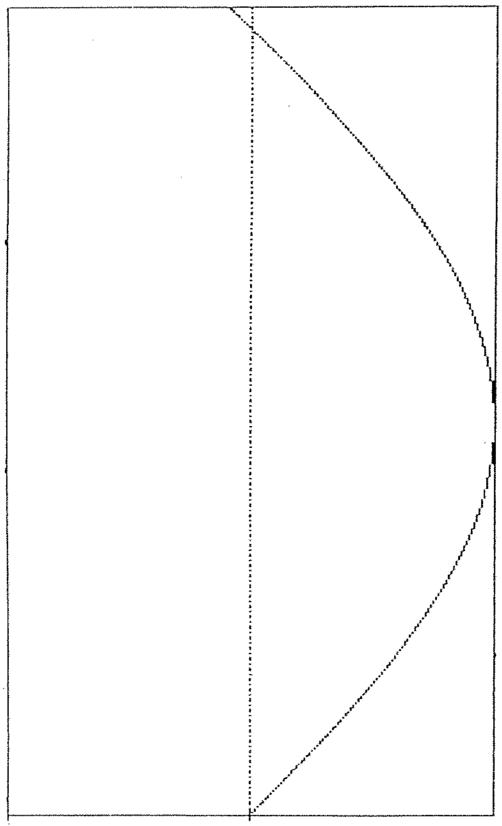
pas =4



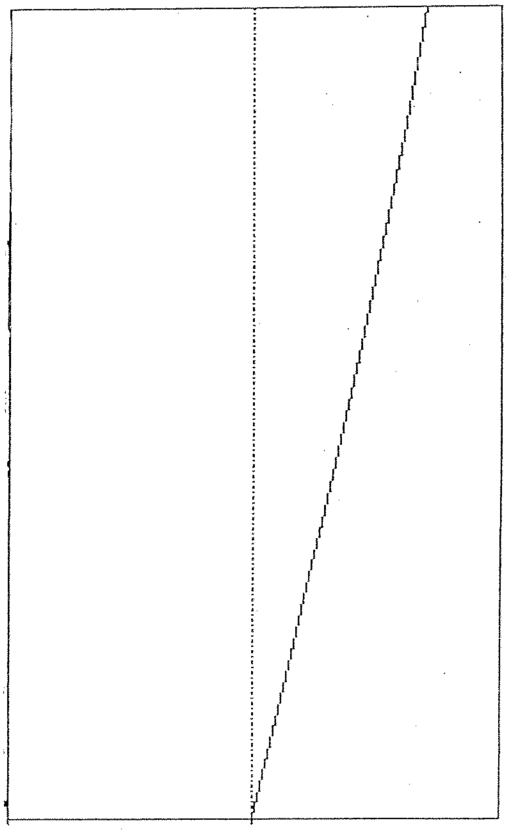
pas = 6.27



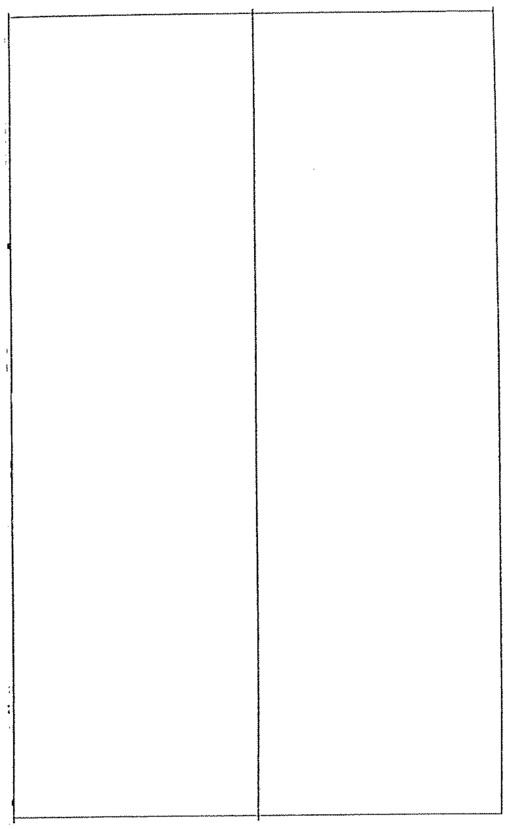
pas = 6.275



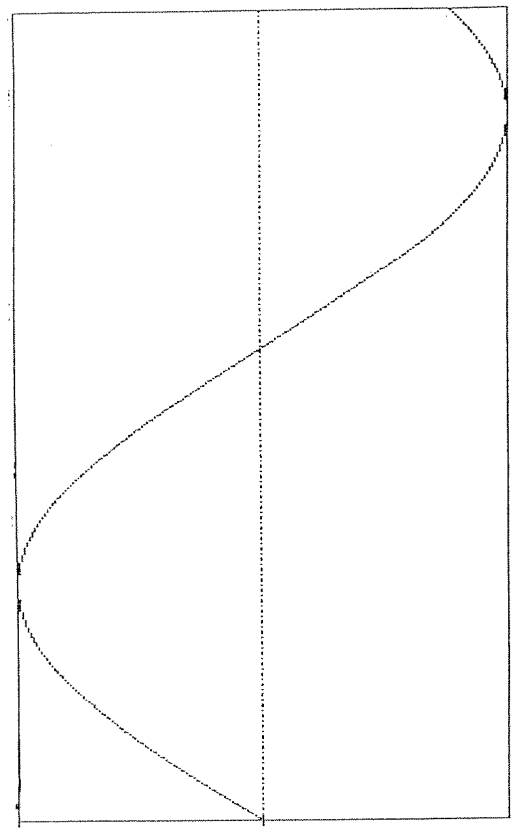
pas = 6.27912



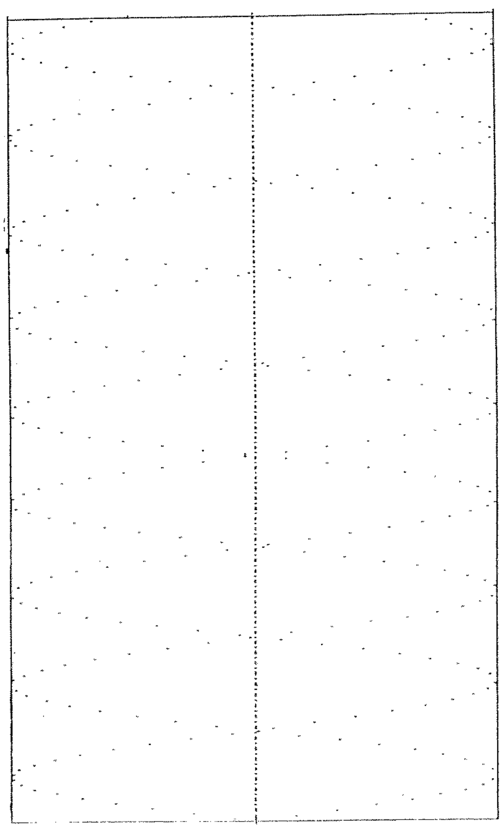
pas = 6.2822



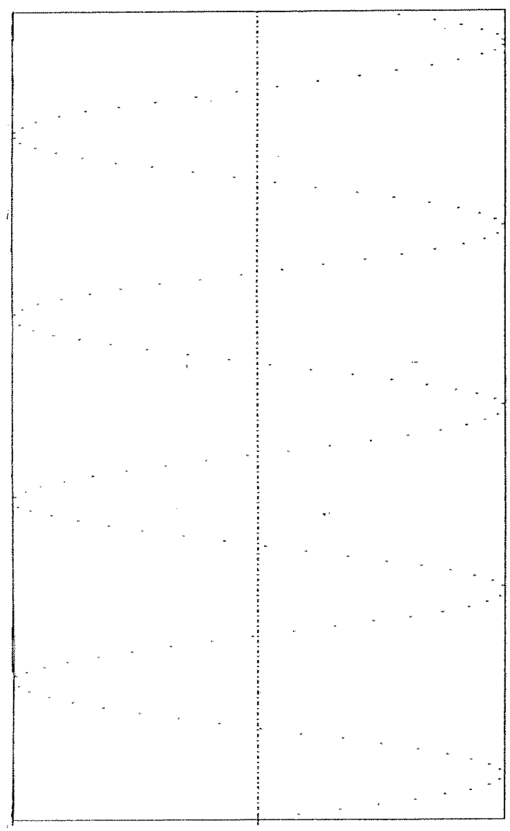
pas = 2π



pas = 6.29



pas = 15.621



pas = $2 \times 15.621 = 31{,}242$

OVALES À DEUX POINTS ISOCORDES?

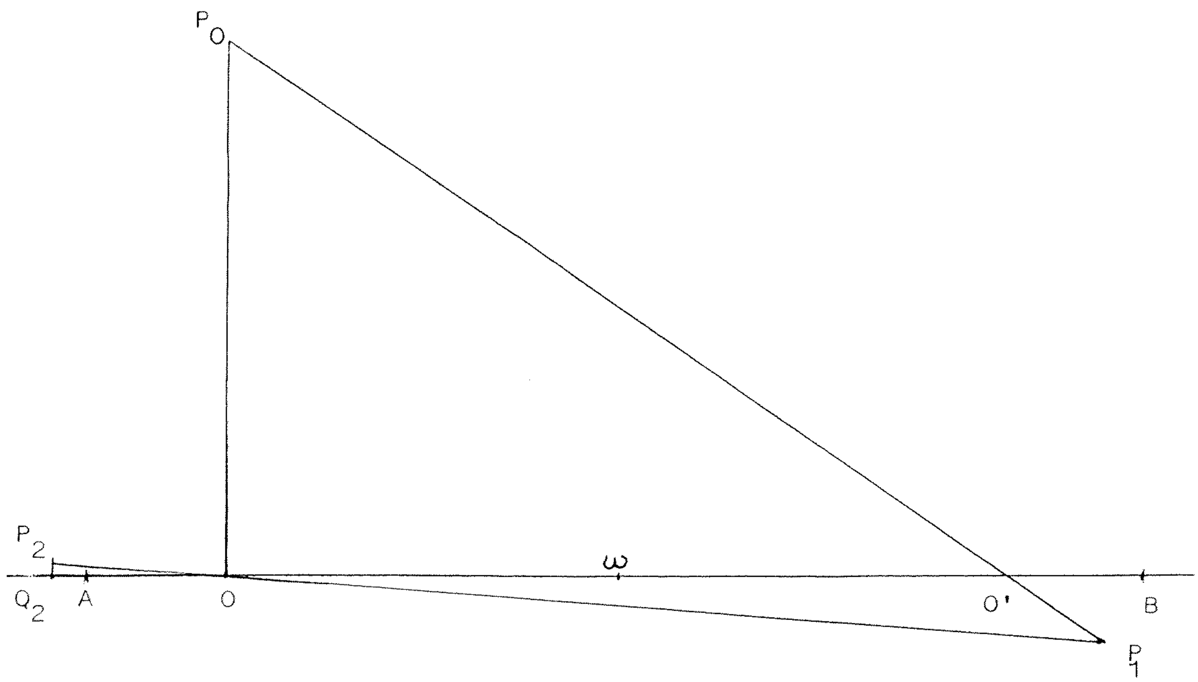
Eugène EHRHART

Un ovale est une courbe convexe fermée. Un point intérieur est **isocorde** si toutes les cordes qui y passent sont égales. On sait qu'il y a une infinité d'ovales possédant un tel point. Le cercle par exemple, ou le limaçon de PASCAL dans le cas convexe ($\frac{d}{a} \leq \frac{1}{2}$ dans l'équation polaire $r = d\cos\theta \pm a$).

Un ovale peut-il avoir deux points isocordiaux O et O'? (La longueur constante de la corde est la même pour les deux points, car c'est celle de leur corde commune AB.) Posée par P. ERDÖS depuis plus d'un demi-siècle, la question reste ouverte. Voir "*Problèmes non résolus*", livre assez récent de Stanley OGILVY.

En 1952 G.-A. DIRAC prouve dans le "*Journal of the London math. soc.*", pp. 429–439, que pour un tel ovale, la droite AB serait un axe de symétrie et le milieu commun ω de OO' et AB serait centre de symétrie. L'excentricité $e = \frac{\omega O}{\omega A}$ serait inférieure à $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$ (car OP_0 étant une demi-corde perpendiculaire à $AB = a$ en 0, $OP_0 = a/2$ et $O'P_0 < a$). DIRAC pense qu'il n'existe pas d'ovale biisocordial.

Nous allons voir que cette conjecture est probablement exacte.



Les points A, O, O', B se suivent dans cet ordre sur AB. En portant $P_0P_1 = a$ sur la demi-droite P_0O', on obtient un autre point P_1 de l'ovale. Le report de $P_1P_2 = a$ sur la demi-droite P_1O donne un point P_2 et ainsi de suite.

Soit Q_i la projection orthogonale de P_i sur la droite AB. Comme dans notre figure, Q_2 est extérieur au segment AB, on peut arrêter la construction : la courbe ne peut être convexe. Pour la valeur correspondante de e il n'existe donc pas d'ovale convenable.

Soit $\omega A = a/2 = 10$ cm. Un programme établi pour l'ordinateur par François Pluvinage donne **le point d'arrêt** Q_j pour quelques excentricités échelonnées de 0,85 à 0,10 :

e	j	ωQ_j (cm)
0,85	2	11,260
0,80	2	11,028
0,40	4	10,028
0,35	6	10,014
0,30	8	10,004 006
0,25	10	10,000 409
0,20	16	10,000 039
0,15	28	10,000 000 439
0,10	62	10,000 000 000 028

On constate que $\omega Q_j > \omega A$ pour toutes les valeurs e de la liste : **pour ces e il n'existe pas d'ovale convenable**, la courbe ne pouvant être convexe.

Pour $e < 0,10$ le calcul de j est délicat. Il semble pourtant que pour ces valeurs il n'existe pas non plus d'ovale convenable.

Si quelqu'un pouvait **démontrer** que ωQ_j décroît avec e et tend vers 10 si e tend vers zéro, la preuve de l'inexistence d'un ovale biisocorde serait faite.

LA DÉMONSTRATION MATHÉMATIQUE DANS L'HISTOIRE
Actes du 7e colloque inter-IREM
"Epistémologie et Histoire des Mathématiques"
Besançon : 12–13 mai 1989

TABLE DES MATIÈRES

A - OBJET DE LA DÉMONSTRATION MATHÉMATIQUE :

- Présentation	E. BARBIN	page 7
- Prouver : amener à l'évidence ou contrôler les implications ?	N. ROUCHE	page 9
- Arrière-plans philosophiques de la démonstration	J. GUICHARD	page 39
- A propos d'une référence "classique" au Ménon de Platon et de plusieurs lectures possibles	J. GUICHARD	page 53
- Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie	E. BARBIN	page 57
- Argumentation et démonstration : A quoi sert la démonstration de la "Loi des grands nombres" de Jacques Bernoulli (1654-1705)	N. MEUSNIER	page 81
- Bolzano et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires	M. GUILLEMOT	page 99
- Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)	R. BKOUCHE	page 115

B - FORMES DE LA DÉMONSTRATION MATHÉMATIQUE :

- Présentation	E. BARBIN	page 129
- Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises	J.C. MARTZLOFF	page 131
- Différentes formes de démonstrations dans les mathématiques grecques	M. LELOUARD C. MIRA J.M. NICOLLE	page 155
- Intuition et démonstration chez Archimède	B. BETTINELLI	page 181
- De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)	J.P. LE GOFF	page 197
- Euler, l'infini, et les nombres imaginaires	C. MERKER	page 221
- Mathématiques constructives : hier et demain	H. LOMBARDI	page 233
- Démonstration automatique en géométrie : une approche par l'algèbre	M.F COSTE-ROY	page 251

C - VARIATIONS ET CONTROVERSES AUTOUR DE DEMONSTRATIONS :

- Présentation	E. BARBIN	page 261
- Les porismes d'Euclide : démonstration ou divination ?	D. LANIER	page 263
- Sur l'histoire des démonstrations de la règle des variations de signe de Descartes	J. BOROWCZYK	page 275
- La courbe brachystochrone : l'histoire d'un problème (analogies, erreurs et incertitudes)	J.L. CHABERT	page 313
- Les démonstrations de la formule du binôme au XVIIIème siècle	M. PENSIVY	page 325
- Arbogast ou la formule oubliée	J.P. FRIEDELMEYER	page 339
- Paradoxe de Condorcet et procédures d'agrégation	G. FERREOL	page 355
- Introduction à l'axiome du choix	M. GUILLEMOT	page 367
- Autour de l'axiome du choix	M. SERFATI	page 377

D - HISTOIRE DE LA DÉMONSTRATION ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES :

- Présentation	E. BARBIN	page 387
- Sur la démonstration de l'irrationalité chez les grecs	D. DAUMAS	page 389
- Périmètre et surface du cercle dans les manuels français de la fin du 18ème siècle : Bézout, Peyrard, Legendre et Lacroix	P. LAMANDE	page 425
- Le mystère de la pyramide	M. GREGOIRE	page 441
- L'enseignant, la démonstration et l'Histoire	G. ITARD	page 479

Prix de vente sur place à la Bibliothèque de l'IREM de Strasbourg : 110 F; par correspondance : 125 F.

CHANGEMENT DE REGISTRE

L.E.G.T. — COLMAR

1.— HISTORIQUE

L'évaluation étant à la mode, le proviseur du L.E.G.T. de Colmar avait demandé en mai-juin 89 d'organiser dans toutes les disciplines un test d'évaluation pour les élèves entrant en seconde. Cette idée n'enthousiasma pas les professeurs qui, outre le travail supplémentaire qu'ils voyaient poindre, n'en comprenaient pas très bien l'utilité : que tester? dans quel but? En mathématiques, la réflexion finit par tourner autour du fait que si nous savions, par notre pratique professionnelle, juger chez nos élèves la compréhension du cours passé ou l'aptitude à résoudre des exercices plus ou moins techniques, nous avions peu de moyens pour tester ou évaluer la compréhension globale des mathématiques et l'aptitude à suivre avec profit une classe de seconde. Et surtout, si un test était mis en place, nous ne savions pas bien dans quel sens l'utiliser. Profitant des liens que l'un d'entre nous avait avec l'I.R.E.M. et le D.E.A. de didactique des mathématiques, nous convainquîmes le proviseur de faire appel à un didacticien. Raymond DUVAL voulu bien répondre à notre appel et nous nous retrouvâmes fin juin au lycée avec sept collègues de maths. Les indications que nous fournit R. DUVAL débouchèrent sur la confection d'une batterie de tests dont la durée de passation fut fixée à 90 min. La banalisation de deux heures de cours un mercredi matin de la rentrée 89 permit, grâce à l'amabilité de quelques collègues d'autres disciplines, de proposer l'évaluation à tous les élèves de seconde.

Une partie du dépouillement fut rapidement effectuée à la main, les différentes classes ayant été réparties entre les collègues de mathématiques. Un dépouillement plus précis sur ordinateur demanda plus de temps, faute de compétences. Cela fut fait grâce du C.P.E., Dominique DUPUIS qui eût l'intelligence d'associer des élèves à la manipulation d'un fichier en D-Base III. Il faut reconnaître que c'est un travail assez lourd et que nous n'avons pas le logiciel adapté, mais il semble difficile de faire beaucoup mieux, d'autant plus qu'il paraît peu utile de recommencer chaque année.

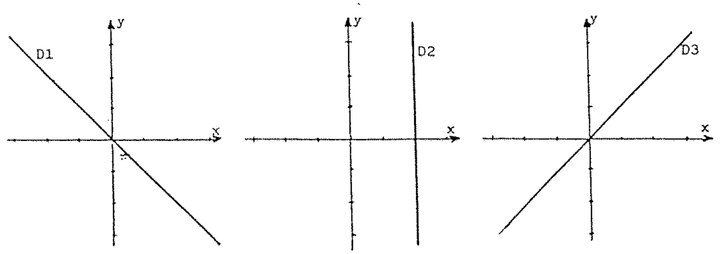
On trouvera ci-après une partie des résultats concernant les exercices 1, 2 et 4.

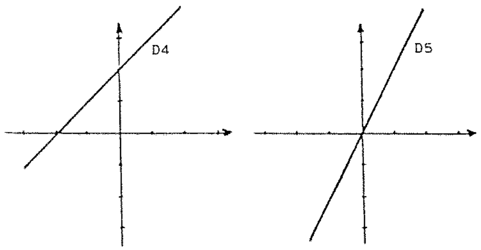
2.— LES EXERCICES

NOM . . . . .Prénom . . . . Classe . . . .

Exercice n° 1 Temps : 5 minutes

On désigne par x l'abscisse et par y l'ordonnée d'un point M du plan repéré. Indiquer à quelle expression algébrique (E1,E2,...ou E11) chacune des droites D1, D2... D5 correspond.





E1 :	$y \geqslant x$
E2 :	$y \leqslant x$
E3 :	$y = x$
E4 :	$y = -x$
E5 :	$y = 0$
E6 :	$y = x + 2$
E7 :	$y = x - 2$
E8 :	$y = 2.x$
E9 :	$y \geqslant x + 2$
E10:	$y = 2$
E11:	$x = 2$

REPONSES

La droite D1 correspond à l'expression ....

La droite D2 correspond à l'expression ....

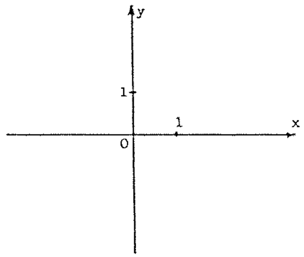
La droite D3 correspond à l'expression ....

La droite D4 correspond à l'expression ....

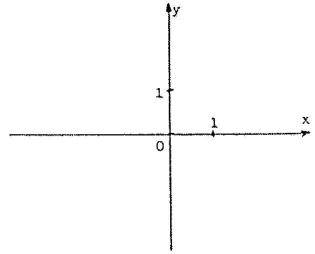
La droite D5 correspond à l'expression ....

NOM . . . . .Prénom . . . . Classe . . . .

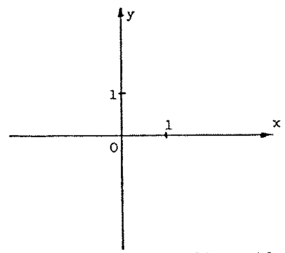
Exercice n° 2 Temps : 10 minutes



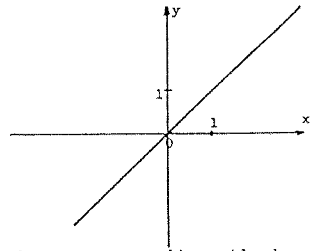
Représenter en rouge l'ensemble des points qui ont une abscisse positive.



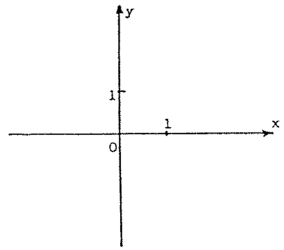
Représenter en rouge l'ensemble des points qui ont une ordonnée négative.



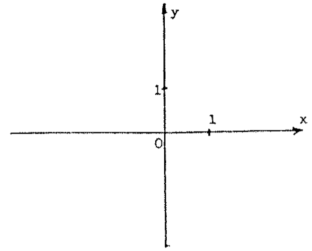
Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à l' abscisse.



Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse.



Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'ordonnée est l'opposée de l'abscisse.



Représenter en rouge l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe.

NOM . . . . .Prénom . . . . Classe . . . .

Exercice n° 4 Temps : 15 minutes

ENONCE :

ABCD est un parallélogramme, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD]. (BJ) et (DI) se coupent en K. Montrer que les points A, K, C sont alignés.

DEMONSTRATION :

I et J sont les milieux de [AB] et [AD] . Les droites (BJ) et (DI) sont donc deux médianes du triangle ABD . Ces droites se coupent en K qui est le centre de gravité du triangle ABD . Soit O le centre du parallélogramme ABCD . La droite (AO) est la troisième médiane du triangle ABD et passe donc par K . O étant le milieu de [AC] , les points A, K et C sont alignés.

QUESTIONS :

a) Souligne les passages correspondants aux hypothèses de l'énoncé.

b) Encadre les passages correspondants aux conclusions intermédiaires.

c) Cite les théorèmes ou propriétés utilisés.

d) Précise, en justifiant, la position du point K sur le segment [AC].

Ont été testé 362 élèves répartis sur 11 classes :

2 classes option gestion : dont l'orientation vers une première G sera majoritaire,

1 classe médico-sociale : avec orientation majoritaire vers la première F8,

4 classes de seconde T : avec orientation majoritaire vers les sections E, F1, F3 de première,

3 classes de seconde IES : (le lycée n'a pas de section A ou B),

1 classe dite S.T. : dont la moitié des élèves suivent l'option TSA, l'autre moitié d'autres options de "*prestige*" (latin, informatique, ...).

3.— RÉSULTATS DU PREMIER EXERCICE

Répartition des réponses	$y=-x$	$x=2$	$y=x$	$y=x+2$	$y=2x$
Réussite	144	222	178	60	95
Non réponse	33	13	16	46	**80**
$y \geq x$	26	7	**53**	16	**31**
$y \leq x$	19	5	24	4	19
$y=x$	**72**	5		22	22
$y=-x$		3	26	**61**	13
$y=0$	34	**25**	15	4	25
$y=x+2$	4	**22**	12		20
$y=x-2$	11	4	7	**77**	10
$y=2x$	4	16	10	12	
$y \geq x+2$	2	6	5	9	18
$y=2$	3	16	3	27	9
$x=2$	0		4	3	9
Réponses multiples	10	18	9	20	8

Cet exercice demande d'être capable de passer rapidement d'une représentation graphique à l'équation. Ce n'est pas l'exercice classique qui, lui, est plutôt du style :
* Tracer la droite d'équation ... ou bien :
* Donner l'équation de la droite passant par ...

Il est beaucoup plus rare d'avoir à tracer une droite et à trouver ensuite son équation. C'est un exercice que l'on recontre plutôt en terminale A2/3 où l'on demande en statistique, de représenter un nuage de points par une droite, puis de donner son équation.

Ici, on se rapproche un peu de ce type d'exercice, à la différence près que, plus qu'une valeur exacte, c'est d'un ordre de grandeur qu'il s'agit :
* être capable de distinguer une pente positive d'une pente négative (items 1 et 3);
* être capable de situer l'ordonnée à l'origine au dessus ou en dessous de 0 (item 4);
* être capable de voir si une pente est ou non supérieure à 1 (item 5).

Analysons item par item les résultats :

1) y = -x est réussi par 40 % des élèves et l'erreur la plus fréquente (20 % des cas) consiste à répondre $y = x$. Est-ce influence de la notion de bissectrice ou attraction du signe +? Peut-être un peu des deux et il n'est pas possible de répondre ici.

2) x = 2 est réussi par plus de 60 %, les erreurs les plus fréquentes conduisent à $y = 0$ (sans doute parce que l'élève ressent qu'il n'y a pas de y dans l'équation) et $y = x + 2$ (ce qui se comprend si on veut absolument $ax + b$ avec a non nul). Ces deux erreurs regroupent chacune 6 ou 7 % des réponses. Signalons encore $y = 2x$ et $y = 2$.

3) y = x est réussi par près de 50 % des élèves. C'est pourtant le B.A.BA des fonctions affines. Curieusement, 15 % des réponses donnent $y \geq x$ dont nous n'avons pas pu comprendre l'origine.

4) y = x + 2 est l'item le moins bien réussi. Sans doute n'est-ce pas une fonction linéaire, mais surtout quand on regarde l'erreur la plus fréquente, on tombe sur $y = x - 2$ qui a un taux d'apparition supérieur au taux de réussite (21 % au lieu de 16,6 %), preuve que la notion d'ordonnée à l'origine n'est pas du tout comprise et confondue avec "l'abscisse à l'origine"! On note encore $y = 2$ (il ne reste plus que l'ordonnée à l'origine) qui intervient dans 7,5 % des cas.

5) y = 2x est l'item qui a posé le plus de problème. Seulement un quart de réussite et surtout 22 % de non réponse. Etait-ce manque de temps ou ignorance? Nous pencherions plutôt vers la deuxième hypothèse quand on remarque de quelle façon sont réparties les erreurs :

* $y \geq x$ arrive en tête, traduction assez logique d'une pente supérieure à 1, avec 8,6 % des réponses;

* $y = 0$!;

* $y = x$ qui est une erreur somme toute moins grave puisqu'elle respecte l'allure générale de la fonction (pente positive et passage par 0);

* $y = x + 2$ qui traduit sans doute une confusion entre somme et produit.

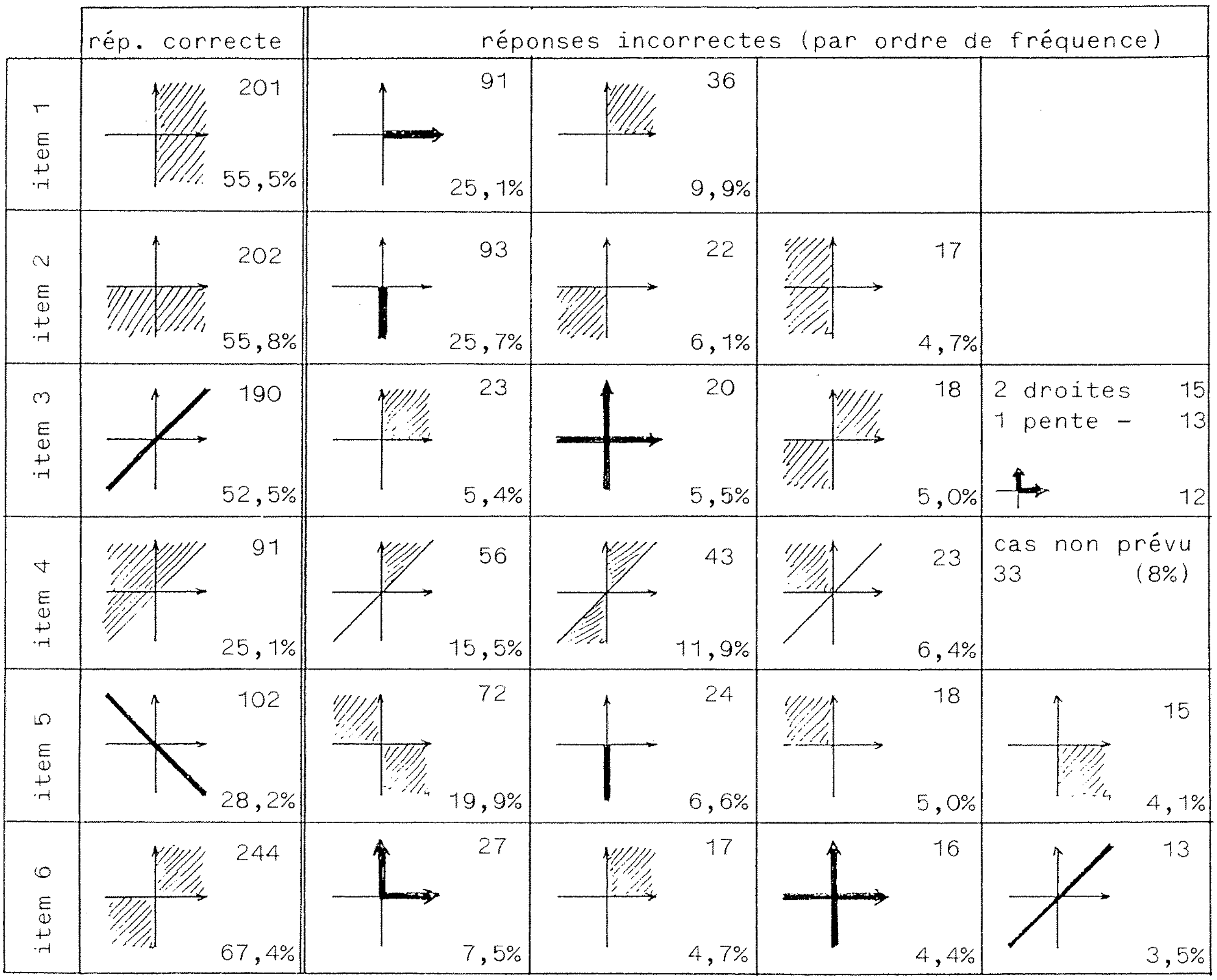
Nous noterons aussi que 31 élèves (8,6 %) répondent correctement à la fois à "$y = x + 2$" et "$y = 2x$" tandis que 35 (9,7 %) le font à "$y = x$" et "$y = x + 2$".

Enfin le tableau suivant donne le nombre de réponses correctes à l'ensemble des items de l'exercice 1. En moyenne il y a 1,9 réponses justes, ce qui correspondrait à 7,7 sur 20. Ce n'est pas brillant!

Nombre d'items réussis	Nombre d'élèves	%	% cumulé
5	26	7,2	7,2
4	34	9,4	16,6
3	67	18,5	35,1
2	63	17,4	52,5
1	103	28,5	81,0
0	69	19,1	100

Etant donnée la simplicité des équations et le rôle important joué par la fonction affine dans le cours de mathématiques de collège, on s'attendait à recueillir des résultats supérieurs à la moyenne. Or, seul est réussi l'item 2 correspondant à la droite d'équation $x = 2$, ce qui a surpris les professeurs : c'est l'exception qui est bien retenue. Aucun autre item n'obtient un score de réussite supérieur à 50 %.

4.— RÉSULTATS DU DEUXIÈME EXERCICE



	rép. correcte	réponses incorrectes (par ordre de fréquence)			
item 1	201 55,5%	91 25,1%	36 9,9%		
item 2	202 55,8%	93 25,7%	22 6,1%	17 4,7%	
item 3	190 52,5%	23 5,4%	20 5,5%	18 5,0%	2 droites 15 1 pente – 13 12
item 4	91 25,1%	56 15,5%	43 11,9%	23 6,4%	cas non prévu 33 (8%)
item 5	102 28,2%	72 19,9%	24 6,6%	18 5,0%	15 4,1%
item 6	244 67,4%	27 7,5%	17 4,7%	16 4,4%	13 3,5%

Cet exercice demande d'être capable de passer rapidement d'un texte en français courant à une représentation graphique. Cela est bien différent des exercices du type :
* Tracer la droite d'équation $y = x$ ou bien :
* Représenter l'ensemble des points tels que $y = -x$.

Il est beaucoup plus rare d'avoir un texte de maths sans aucune formule, un texte où "$y = x$" a été remplacé par "l'ordonnée est égale à l'abscisse". Ceci prouve que l'on a encore ici un exercice de transfert, de changement de registre. Il faut pouvoir passer d'un texte au graphique. L'aspect inhabituel de cet exercice a sans doute poussé les élèves à passer par une étape de formalisation, c'est-à-dire ici par une formule mais qui, malheureusement n'était peut-être pas exacte.

Nombre d'items réussis	Nombre d'élèves	%	% cumulé
6	38	10,5	10,5
5	56	15,5	26,0
4	51	14,1	40,1
3	53	14,6	54,7
2	50	13,8	68,5
1	59	16,3	84,8
0	55	15,2	100

Si on compare cet exercice au précédent, il est plutôt mieux réussi. Il y a eu en moyenne 2,8 réponses justes (soit 9,5 sur 20). De nombreux items dépassent la barre des 50 %. L'analyse des erreurs est un peu plus délicate puisqu'ici l'ensemble des réponses est ouvert.

Analysons item par item les résultats :

1) $\mathbf{x > 0}$: L'erreur principale vient de l'absence de y qui est naturellement remplacé par $y = 0$.

2) $\mathbf{y < 0}$: On trouve de façon analogue que l'absence de x est remplacée par $x = 0$. Les résultats très voisins à ces deux items ainsi que ce qui a été vu à propos de l'exercice n° 1 (item $x = 2$) montre bien la tendance à l'assimilation de "rien" avec "0". Mais alors que pour l'item 1, il y a environ 10 % des réponses qui donne le premier quadrant, pour l'item 2, le fait qu'on ne puisse manifestement pas donner une réponse dans le premier quadrant implique une dispersion entre le 3ème quadrant (x et y tous deux négatifs) et la réunion de 2ème et 3ème quadrant (x négatif). Curieusement il n'y a que peu de réponses (7) donnant le 4ème quadrant.

Cette similitude entre les deux premiers items est corroborée par le grand nombre d'élèves ayant les deux réponses correctes : 192 soit 95 % de ceux ayant répondu juste à la première question.

3) $\mathbf{y = x}$: Il y a ici une grande dispersion des réponses fausses. Les réponses sous forme de quadrants conduisent soit au premier quadrant, soit à la réunion du premier et du troisième quadrant. Il y a alors confusion entre l'égalité des nombres et égalité des signes avec en plus dans le premier cas auto-limitation aux nombres positifs. Les réponses sous forme de droites conduisent soit aux deux axes de coordonnées, soit aux deux bissectrices, soit encore aux deux demi-axes positifs. Il semble qu'il faille voir, dans le cas des axes, là encore, l'oubli du "0" de l'une des coordonnées, limitées éventuellement aux nombres positifs; quant aux bissectrices, leur intervention résulte évidemment de l'oubli du signe.

4) y > x : Il n'y a qu'un quart de bonnes réponses, preuve s'il en est besoin que les inégalités dans le plan ne sont pas comprises à l'entrée en seconde. On notera toutefois que la principale erreur qui rassemble plus de 15 % des cas revient à ne considérer que les nombres positifs. Près de 12 % des élèves donnent une réponse mixte conduisant à $y > x$ pour x positif et à $y < x$ ($|y| > |x|$) pour x négatif; ceci témoigne une fois de plus de la difficulté de manipulation des nombres négatifs.

5) y = -x : Au vu de l'exercice 1 et de l'item 3 du présent exercice, on s'attendait à un meilleur score; ce mauvais résultat s'explique difficilement, même si l'analyse des erreurs conduit aux mêmes constatations que précédemment. Les réponses sous forme de quadrant traduisent le remplacement des nombres par leur signe en se limitant éventuellement à un demi-axe positif (x ou y). La réponse correspondant au demi-axe y négatif est plus surprenante!

6) x . y > 0 : C'est l'item le mieux réussi avec deux tiers de bonnes réponses. Si on trouve près de 5 % de réponses qui se limite au premier quadrant, traduisant encore une fois la méconnaissance des nombres négatifs il faut noter les réponses donnant les deux demi-axes positifs et celles donnant les deux axes qu'il vaut sans doute mieux interpréter comme les deux demi-axes positifs et les deux demi-axes négatifs; il s'agit de la confusion entre les points et une de leurs coordonnées quand celles-ci interviennent séparément. On peut en effet imaginer le "raisonnement" suivant : "abscisse et ordonnée de même signe $\Longrightarrow$ ($x > 0$ et $y > 0$) ou ($x < 0$ et $y < 0$) $\Longrightarrow$ (demi-axe x positif et demi-axe y positif) ou ...", "raisonnement" mené plus ou moins jusqu'au bout!

5.— LA DISTINCTION Y = X et Y = -X

Cette notion se retrouve dans les deux premiers exercices et il a semblé intéressant de comparer les résultats.

$y = x$ est trouvé par environ 50 % des élèves aussi bien dans le premier que dans le deuxième exercice, cependant seuls 111 élèves (soit 30 %) réussissent simultanément les deux exercices sur cette notion.

Par contre, si dans le premier exercice $y = -x$ atteint un score d'environ 40 %, il tombe à moins de 30 % dans le deuxième et seuls 63 élèves (17 %) réussissent simultanément les deux exercices sur cette notion.

Si maintenant on compare les erreurs relatives à ces deux notions, on trouve dans le premier exercice que l'erreur se fait essentiellement par assimilation de $y = \pm x$ à $y = x$ puisque 20 % des élèves donne la réponse $y = x$ à la place de $y = -x$

alors que seuls 7 % d'entre eux donne $y = -x$ au lieu de $y = x$ (l'erreur la plus fréquente à ce niveau étant $y \geq x$ réponse donnée par un élève sur sept!?).

On peut aussi noter que 118 élèves, soit le tiers, donne la réponse correcte aux deux items à la fois du premier exercice tandis que pour le deuxième exercice on en trouve 96, soit un peu plus du quart. Une étude plus approfondie montre que la réussite à $y = -x$ dans un des exercices comme dans l'autre, est un bon "prédicteur" de la réussite à $y = x$.

6.— RÉSULTATS DU QUATRIÈME EXERCICE

On a coutume de répéter que les mathématiques développent l'esprit logique. Mais de quelle logique s'agit-il? Il est connu que la logique mathématique, essentiellement binaire (du moins au stade où on l'enseigne) n'est qu'une faible partie de la logique que l'on peut mettre en œuvre dans les raisonnements quotidiens. En ce sens la logique mathématique devrait être plus simple et par suite d'accès plus facile pour les élèves. Or, que constatons nous?

* **Les hypothèses** ne sont entièrement reconnues que par une petite moitié des élèves et on ne dépasse la moyenne que si on ajoute les élèves qui n'ont cité qu'une des deux hypothèses. Cependant un peu plus d'un élève sur cinq (23,5 %) cite la conclusion parmi les hypothèses. Le rôle de la phrase "Soit O le centre du parallélogramme" est plus ambigüe, mais n'étant citée que par 19 élèves, cela ne modifie pas beaucoup les résultats d'ensemble.

* **Les conclusions intermédiaires** ne sont reconnues comme telles que par 6 % des élèves. En fait il y avait 5 conclusions intermédiaires à citer et 82 élèves (22,5 %) en ont cité au moins 4 et 208 (57,5 %) au moins une.

Cependant 105 (29 %) ont en général cité une hypothèse et quelquefois la conclusion générale. Cela fait quand même un pourcentage important que nous ne pouvons négliger.

* **Les théorèmes :** Un nombre infime d'élèves a vu les quatre propriétés utilisées. Reconnaissons que ce n'est pas évident car la démonstration proposée n'y fait que des allusions. Mais la majorité des élèves ne cite qu'un ou deux théorèmes ce qui correspond à une analyse très superficielle. Il se trouve cependant un quart des élèves pour inventer ou citer des théorèmes qui les arrangent (PYTHAGORE, THALÈS, ...).

* **La démonstration** n'est achevée que par 11 élèves, score ridiculement bas, mais peut-être, osons l'espérer, est-ce manque de temps puisqu'il y a quand même 40 % de réponses correctes pour la position du point K. Preuve que les élèves n'ont pas tout oublié du cours de maths, quant à faire une démonstration c'est autre chose!

Les mathématiques étant la science de la démonstration, il est certain que la réussite à ce quatrième exercice paraît primordiale pour la compréhension de l'enchaînement logique des démonstrations du cours. La distinction entre hypothèses et conclusions, la reconnaissance des théorèmes utilisés, ...semblent être des préalables à une saine activité mathématique.

HYPOTHÈSES	les 2 réponses justes	176	48,6 %	56,9 %
	une réponse juste	30	8,3 %	
	O centre du parallélogramme	19	5,3 %	
	la conclusion générale	85	23,5 %	29,0 %
	une conclusion intermédiaire	20	5,5 %	
	phrase mal coupée	18	5,0 %	
	absence de réponse	14	3,9 %	
CONCLUSIONS	les 5 réponses justes	23	6,4 %	57,5 %
	4 réponses justes	59	16,3 %	
	1, 2 ou 3 réponses justes	126	34,8 %	
	une hypothèse	105	29,0 %	35,4 %
	O centre du parallélogramme	23	6,4 %	
	phrase mal coupée	14	3,9 %	
	absence de réponse	12	3,3 %	
THÉORÈMES	les 4 réponses justes	10	2,8 %	57,2 %
	3 réponses justes	15	4,1 %	
	1 ou 2 réponses justes	182	50,3 %	
	théorème sans rapport	73	20,2 %	24,6 %
	théorème inventé	16	4,4 %	
	absence de réponse	66	18,2 %	
RÉSULTATS	réponse 1/3 ou 2/3	147	40,6 %	
	dont réponse justifiée	11	3,0 %	
	réponse fausse	61	16,9 %	
	absence de réponse	154	42,5 %	

Malgré ses imperfections, le test que propose cet exercice met en évidence la faillite de l'enseignement de la démonstration dans les classes antérieures (mais qu'en est-il en terminale?). Or, différents travaux (ceux de l'école piagétienne, par exemple) montrent que l'élève de 15 – 16 ans est capable de comprendre ce qu'est une démonstration. D'où vient alors qu'il ne sache pas en reconnaître les articulations? On pourra consulter à ce propos les articles de M.-A. EGRET et R. DUVAL dans le volume 2 des "*Annales de didactique et de sciences cognitives*" (1989) (*).

7.— CONCLUSION PROVISOIRE

Nous n'avions pas l'intention de faire œuvre de didacticien mais de réfléchir à notre pratique enseignante et de faire réfléchir l'ensemble des collègues. Ce but là est certainement atteint.

Il reste à savoir comment exploiter ces résultats dans nos classes respectives. Dans quelle direction agir pour telle classe qui réussit plus mal que d'autres tel ou tel item?

En particulier certaines des classes les plus faibles en mathématique (option gestion ou médico-social) ont une bonne réussite aux deux premiers items de l'exercice 4. N'y a-t-il pas là amorce d'une approche nouvelle pour faire comprendre à ces élèves ce que sont les mathématiques et les réconcilier avec une certaine pratique du raisonnement logique utilisé dans notre discipline? C'est sans doute en ce sens que nous continuerons à travailler.

(*) En vente à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg, 70 F (port compris). (Pour rappel : vol. 1 : 60 F et vol. 3 : 70 F (port compris toujours))

A VOS STYLOS

PROBLÈME 12

Enoncé

Soit Ω un ouvert non vide du plan. Deux points C (chat) et S (souris) sont mobiles dans Ω et choisissent chacun à chaque instant leur vitesse, le module de cette dernière étant toutefois limité à un intervalle $[O, V]$, où la vitesse maximale V est la même pour C et S. On demande, selon la forme de Ω, si C a une stratégie imparable pour finir par rattraper S, si au contraire S a un moyen certain de toujours échapper à C, ou si ni l'un ni l'autre de ces deux cas ne se présente.

Solution (de "*L'Ouvert*") :

Voici une stratégie (attribuée, dans ses miscellanées, par LITTLEWOOD à BESICOVITCH) qui permet à S d'échapper indéfiniment à C. Choisir un disque ouvert D, de centre $A \neq S_0$ et de rayon $r > 0$, tel que $S_0 \in D \subset \Omega$. Choisir des réels $\ell_n > 0$ tels que $\Sigma_{n \geq 1} \ell_n = \infty$ et $\Sigma_{n \geq 1} \ell_n^2 < r^2 - (AS_0)^2$ (par exemple $\ell_n = a/n$, avec a assez petit). La droite AS_0 délimite deux demi-plans ouverts; l'un au moins d'entre eux, soit Π_0, ne contient pas C_0. A la vitesse V, S parcourt le segment $S_0 S_1$, de longueur ℓ_1, perpendiculaire à AS_0, et situé dans Π_0 (sauf son origine S_0). Il est clair que pendant ce temps, C ne peut rattraper S; donc à l'instant ℓ_1/V où S arrive en S_1, C arrive en un point $C_1 \neq S_1$. Puis S choisit un demi-plan Π_1 limité par AS_1 et ne contenant pas C_1, et parcourt à la vitesse V le segment $S_1 S_2$ perpendiculaire à AS_1, situé dans Π_1, et de longueur ℓ_2; durant ce temps C ne peut rattraper S et donc $C_2 \neq S_2$. Puis ... comme la longueur $S_0 S_1 S_2 \ldots S_n \ldots$ est infinie, S n'est jamais rattrapée par C; comme, par le théorème de PYTHAGORE,

$$AS_n^2 = AS_0^2 + S_0 S_1^2 + \cdots + S_{n-1} S_n^2 = AS_0^2 + \ell_1^2 + \cdots + \ell_n^2 < r^2,$$

S reste toujours dans le disque D et donc a fortiori dans Ω. On remarquera que cette stratégie reste efficace même si C est, lui, autorisé à sortir de Ω!

PROBLÈME 13

Enoncé

Un réel x est algébrique si et seulement s'il existe des polynômes à coefficients entiers $P(u, v)$ et $Q(u, v)$ et des entiers u_o, v_o tels que, en posant

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \quad ; \quad v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

on ait $v_n \neq 0$ pour tout n et $(u_n/v_n) \longrightarrow x$, quand n tend vers ∞.

Indication

Méthode itérative de NEWTON.

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \cdots$$

Question complémentaire : Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croit la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

PROBLÈME 15

Enoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n\to\infty} f(x+\sqrt{n}) = 0$ pour tout x. A-t-on $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$?

Au pays colinéaire

Au pays colinéaire
Où les esprits sont obtus
On vit à l'ordinaire
Près de logiques talus
Taillés à coup d'équerres
Par un théorème ambigu.

Au pays colinéaire
De logique et de raison
L'esprit s'arrête aux limites de la matière
Sans que le rêve, ce doux poison
Qui n'obéit à aucun axiome arbitraire
Nous entraîne au delà de l'apparence et du son.

Au pays colinéaire
Où tout se calcule et se trace
Il n'y a plus entre les volumes et les aires
Les vitesses et les masses
De place pour se haïr ou se plaire
Et tous les cœurs sont de glace.

Au pays colinéaire
Où l'on se perd parfois
On ne sent plus le courant d'air
De la vie et de ses pourquoi
Drogue inhumaine tu es trop amère
Pour nous dicter ta propre loi.

Stéphane BURGERT
18 avril 1990

SOMMAIRE

ALGÈBRE ET ANALYSE

Équations du troisième degré
Équations de degré trois et trigonométrie
Construction des polygones réguliers à 5 et 17 côtés
Construction d'un polygone régulier : une solution approchée
Solution approchée d'un système d'équations linéaires
Les autoroutes de Monsieur Fermat
Trajets en temps minimum
Un calcul d'aire comme au XVIIe siècle
Calcul d'aires : la méthode de Simpson
Calcul d'aires : la méthode de Hermite
Programmation de calculs d'intégrales : quelques utilitaires
Intégration par parties répétées
Calcul numérique de logarithmes népériens
Encadrement de ln $(1+x)$ par des fonctions rationnelles
Dérangements
La méthode du point fixe pour la résolution d'une équation
Résolution d'une équation par la méthode de Newton
Itération d'une fonction trinôme du second degré
Un paradoxe : les cylindres rugueux

GÉOMÉTRIE

Transformation de $\Sigma\, \alpha_i\, MA_i^2$
Points alignés, points cocycliques
Autour du rapport $\overline{\dfrac{MA}{MB}}$
Ensemble des points M tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$
Cinq méthodes différentes pour un même problème de construction
Le problème des abeilles
Où l'on retrouve l'angle des abeilles
Un problème de réservoir
La duplication du cube
La trisection de l'angle
À propos de trisection
À la recherche d'un triangle rectangle
Courbes paramétrées, lieux géométriques et constructions
Coniques et radars
Zone d'audibilité d'un avion supersonique
Sections planes des cônes et cylindres de révolution