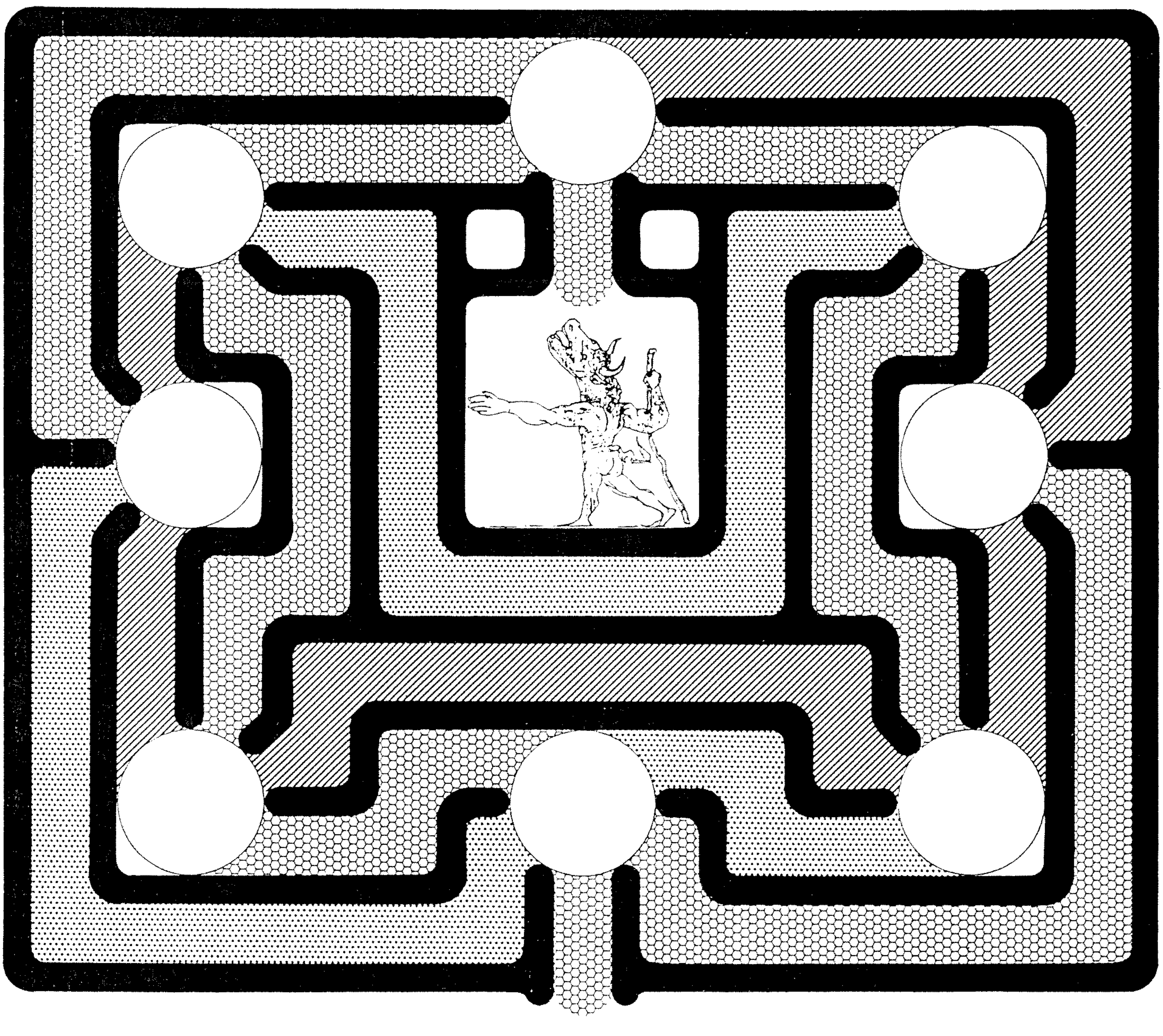
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 61 – DÉCEMBRE 1990 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

En hommage à nos amis anglais qui ont inauguré en novembre 1990 l'année du labyrinthe, en voici un, inspiré de l'exposition "*Pop Maths Roadshow*".

Sauriez-vous rejoindre l'antre du minotaure? Mais à chaque carrefour, vous devez emprunter un couloir d'une couleur différente de celui que vous venez de quitter.

Ou peut-être préférez-vous guider vers la sortie ce malheureux minotaure aveugle (d'après PICASSO) tout en respectant la condition de changement de couleur à chaque carrefour?

ECOLE GRATUITE, LAÏQUE ET OBLIGATOIRE

Voici la liste du matériel demandé aux parents d'enfants entrant en Cours Préparatoire dans une école primaire de la région de Colmar :

- *une trousse,*
- *un crayon papier,*
- *un stylo bleu, un vert, un noir,*
- *une paire de ciseaux à bouts ronds,*
- *un tube de colle en bâton,*
- *une petite pochette de feutres,*
- *une petite pochette de crayons de couleur,*
- *un cahier d'essai,*
- *un carnet de devoirs,*
- *une paire de chaussons de gymnastique ou de chaussures de sport,*
- *un sac de sport,*
- *un classeur grand format avec feuilles à grands carreaux de quatre couleurs différentes (bleu, rose, vert, jaune),*
- *trois ou quatre pochettes perforées en plastique,*
- *un cahier de travaux pratiques petit format,*
- *quatre protège-cahiers (bleu, vert, jaune, orange),*
- *une gomme,*
- *une règle plate,*
- *deux pinceaux (un gros et un fin),*
- *deux chiffons,*
- *une paire de pantoufles,*
- *une boîte pour étiquettes de lecture,*
- *une pochette de papier Canson blanc,*
- *une pochette de papier Canson de couleurs vives.*

De plus, à la rentrée chaque enfant aura à payer :

– le fichier de maths	*42,00 F*	
– le cahier d'exercices	*17,50 F*	*total : 77,50 F*
– le cahier d'écriture	*18,00 F*	

L'école fournira :

– le livre de lecture	*à rendre plus tard*
– les lettres mobiles	*en bon état*
– un protège cahier rouge.	

Sans commentaire.

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 61 – DÉCEMBRE 1990

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT

◇ *Correspondance à adresser à :*

Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*

50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)

◇ *Prix du numéro* : 25.– F

MATH.EN.JEANS
ou : L'initiation à la recherche (*)

Pierre AUDIN

M.éthode
d'**A.**pprentissage
des **Th.**éories mathématiques
en
J.umelant
des **E.**tablissements
pour une **A.**pproche
N.ouvelle
du **S.**avoir

1.— "MATh.en.JEANS" : Buts et moyens

C'est dans le cadre de l'opération "1.000 classes, 1.000 chercheurs" que se place le projet "MATh.en.JEANS".

C'est en 85–86 au lycée Braque d'Argenteuil avec l'intervention de Pierre DUCHET comme chercheur mathématicien que commença l'expérience qui débouchera en 89–90 sur "MATh.en.JEANS".

Il s'agit d'initier les élèves **aux maths, aux vraies, aux dures**, en un mot à la **recherche**. Le jumelage pour l'occasion de deux établissements (le lycée J. JAURÈS d'Argenteuil et le lycée RACINE de Paris) permettait de simuler les conditions de la recherche.

Il est important de souligner ici que les élèves participant à "MATh.en. JEANS" n'ont pas été sélectionnés. Ces élèves sont seulement des **volontaires**, qui n'étaient pas les meilleurs de leurs classes, et à qui personne n'a fait subir la moindre enquête préalable, si ce n'est pour la recherche de l'horaire hebdomadaire, en fonction de l'emploi du temps de chacun.

Nous avons placé les élèves dans les conditions véritables de la recherche. Dans chacun des deux établissements, les élèves se sont répartis en groupes de trois ou quatre. Chacun des quatre groupes a choisi un des quatre sujets communs aux deux établissements, sujets auxquels ils ne comprenaient pas grand chose et sur lesquels ils n'ont eu que quelques explications rapides :

(*) Travail effectué dans le cadre d'un Projet d'Action Éducative, participant à l'Opération "1.000 chercheurs, 1.000 classes" réalisé avec l'aide du Ministère de la Recherche et de la Technologie (D.I.S.T.).

SUJET 1 : Combinatoire de l'échiquier. Parcours du cavalier. Placer des tours, des reines, des dominos. Les fins de partie aux échecs. Analyse rétrograde. Les grilles magiques.

SUJET 2 : Géométries non-euclidiennes. Les énoncés équivalents à l'axiome des parallèles. La géométrie euclidienne est une géométrie non-euclidienne. La géométrie de LOBATCHEVSKI. Quadrangles. Sinus et cosinus. Théorème de PYTHAGORE. Axiomatisation de la géométrie utilisable dans l'enseignement et par l'enseignement. Géométries finies.

SUJET 3 : Le nombre d'or. Définition. Rectangles et triangles d'or. Suite de FIBONACCI. La nature. La musique et les arts. Algorithme d'EUCLIDE, paradoxe de Lewis CARROLL, numération. Fractions continues. Application au solitaire.

SUJET 4 : L'infini. L'infiniment grand et l'infiniment petit. Histoire et histoires. La continuité ou les continuités. Le continu, le transfini.

Nous avions ainsi contitué au lycée RACINE de Paris et au lycée Jean JAURÈS d'Argenteuil, quatre équipes de recherche, chacune d'elles ayant la possibilité, à plusieurs reprises, de rencontrer l'équipe correspondante. Il restait à les mettre au travail. Nous leur avons donné les mêmes documents, constitués surtout de la collection complète du "*Petit Archimède*" (1). Nous simulions ainsi une *banque de données*, dans laquelle ils ont obtenu soit beaucoup — voire trop — d'informations, soit pas assez, suivant les sujets.

2.— Déroulement d'une séance hebdomadaire, d'un séminaire, du Congrès

Séances hebdomadaire :

Dans un premier temps, le travail des élèves a essentiellement consisté à comprendre leur sujet, à organiser leur travail de groupe, à prendre des directions de recherche, à trouver des informations dans les documents qui leur étaient fournis. Cela a duré environ six semaines, au bout desquelles ils n'ont plus guère utilisé leurs documents, travaillant de façon presque totalement autonome.

Les enseignants, eux, on appris à se taire. Quand les élèves se fourvoyaient dans de fausses pistes ou des contre-sens, il n'était pas question de leur apporter la bonne parole ou *le* resultat *juste* sous prétexte de ne pas laisser dire de bêtises. Le prof était présent pour répondre à la demande, et encore, ses réponses ne devaient pas être des réponses dans le sens habituel qu'un prof peut donner à ce mot : nous les mettions sur la piste, nous leur proposions des directions qu'ils prenaient ou pas, nous leur indiquions des sources, qu'ils consultaient ou pas. D'autres fois, nous allions à leur rencontre, leur posant nous-mêmes des questions, pour les obliger à affiner leurs réponses, ou les amener à envisager des situations auxquelles ils n'avaient pas pensé, et pour lesquelles leurs réponses étaient incomplètes.

(1) donnée en double exemplaire par l'A.D.C.S. (Association pour le Développement de la Culture Scientifique), éditrice de feu "*Le Petit Archimède*", et de l'actuel "*Jeune Archimède*".

Séminaires

A trois reprises, les élèves des deux lycées se sont rencontrés, comme dans un *vrai* séminaire, pour confronter leurs travaux, échanger leurs idées, ouvrir leur champ de recherche, ou préciser leur direction de travail. Ces séminaires ont eu lieu des samedis, de 9h à 17h, dans l'un ou l'autre des établissements, avec l'aide des administrations locales et/ou des collègues (mathématiques, histoire-géographie, dessin industriel, musique).

L'emploi du temps de ces séminaires était le suivant : d'abord, visite de l'établissement, lors du premier séminaire tenu dans l'établissement; ensuite, réunion plénière avec Pierre DUCHET, pour un exposé mathématique n'ayant pas de lien privilégié avec l'un des sujets. Puis, quelques plages horaires pour permettre aux groupes de se rencontrer, sujet par sujet, avec ou sans enseignant, avec ou sans Pierre DUCHET (nous nous efforcions, à trois, d'assurer une rotation convenable sur les quatre groupes). L'objectif, outre de tenir un séminaire spécialisé sujet par sujet, était de préparer une présentation de l'état de la recherche à l'ensemble des élèves par chacun des groupes.

C'était donc la phase suivante : chaque groupe, complet, à tour de rôle, *passait* devant les autres, pendant environ 20 minutes, en supportant le feu plus ou moins nourri des questions qui venaient aussi bien des enseignants et du chercheur que des autres élèves. Les élèves ont généralement trouvé cette séance éprouvante, mais cela s'est avéré payant, car cela les a obligés à préciser leurs énoncés, à se rendre compte de problèmes qu'ils n'avaient pas soupçonnés.

Certaines définitions étaient mal comprises (définition du nombre d'or, d'une injection, d'une surjection), certains problèmes mal énoncés (parcours de tous les sommets ou de toutes les arêtes d'un graphe, axiome ou postulat des parallèles), certaines solutions mal exposées (convergence de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}$ vers 2), certaines conjectures présentées comme théorèmes, etc. En bref, ils ont dû vulgariser leur travail, en s'obligeant à être à la fois clairs et convaincants.

Dans ces courses contre la montre qu'ont constituées ces trois séminaires, la dernière étape était le bilan que Pierre DUCHET tirait à chaud sur leur travail, leur méthode de travail, l'avancement de leur travail, les directions à suivre d'ici le prochain séminaire ou le Congrès.

Notre rôle pendant ces séminaires

En aidant les élèves à formuler leurs questions et leurs réponses, nous leur avons apporté un langage, et nous leur avons aussi donné quelques théorèmes dont ils avaient besoin pour poursuivre l'étude de leur sujet :

Les élèves de 1ère qui cherchaient les géodésiques sur la sphère en découpant un chemin en petits morceaux assimilables à des segments n'avaient pas assez de temps devant eux pour *redécouvrir le calcul infinitésimal*; ils ont admis que ces géodésiques sont les grands-cercles, et ont poursuivi l'étude de la géométrie de la sphère.

Les élèves qui cherchaient à comparer les cardinaux d'ensemble infinis ont admis qu'au lieu d'une bijection entre deux ensembles, ils pouvaient se contenter de deux injections ou de deux surjections d'un ensemble dans l'autre.

Les élèves de 2nde qui avaient besoin de démontrer la convergence d'une suite, et qui avaient déjà des difficultés avec un raisonnement par récurrence ont admis qu'une suite croissante majorée est convergente.

Les élèves qui savaient que le problème du placement des huit dames sur un échiquier 8×8 a quatre-vingt-douze solutions n'ont pas fait semblant de l'oublier, mais ont cherché à comprendre comment obtenir une solution, et comment s'obtiennent toutes les solutions.

Mais nous, profs et chercheur, nous nous sommes refusés à leur faire une démonstration. Nous leur avons donné (quelquefois) ces outils parce que l'avancement de leur travail exigeait qu'on les leur donne. Mais il s'agissait de leur démonstration, et ce sont eux qui nous demandaient le soutien théorique dont ils avaient besoin à ce moment-là. Notre travail de *direction de recherche* a essentiellement consisté à nous taire, ou à les provoquer pour redynamiser leur travail.

Le Congrès de Vaugrigneuse

C'est le *quatrième séminaire*. A la différence des autres séminaires, ce week-end s'est tenu au château de Vaugrigneuse. Nous disposions de plus de temps pour que les élèves peaufinent leur travail, puisqu'il s'est tenu du samedi matin au dimanche soir. L'objectif donné aux élèves était l'exposé habituel de séance plénière, devant un public inhabituel : mathématiciens, parents d'élèves, enseignants, pour l'essentiel. Les élèves ont pu profiter du parc du château, d'autant que nous, organisateurs, avons souvent été pris par des tâches inhabituelles (pour aller vite : organisation pratique, mise au point d'un programme, mondanités, accueil des invités). Notre pression sur les élèves s'en est trouvée relâchée, ce qui ne les a pas empêchés de mener à bien leur travail.

Le Congrès et ses suites

Pendant toute l'année, au lieu de devoir *répéter nos explications* comme en cours, nous avons eu le plaisir d'observer les élèves se construire leurs mathématiques. A Vaugrigneuse, cela devint le plaisir de les regarder présenter leurs travaux à des mathématiciens sous le charme, à des profs et des élèves étonnés ou à des parents fiers comme ils l'auraient été s'ils avaient assisté à une *audition* d'un chérubin apprenti musicien.

La dernière phase de leur travail a été de **communiquer** leurs travaux : expositions, articles, ...car il ne sert à rien de trouver quelque chose si on n'est pas capable de le faire savoir aux autres. Pourtant, c'est la phase la moins réussie : les élèves avaient surtout envie de continuer à faire des maths, plutôt que de revenir sur ce qu'ils avaient déjà fait. Trois des quatre groupes ont tout de même écrit des articles, comme des professionnels, pour "*Tangente*" et "*Quadrature*", qui acceptaient de publier des articles après avoir jugé de la qualité de leur travail et de leur exposé public.

Le dernier séminaire a donc eu un fonctionnement différent des trois premiers : il avait pour objectif la réalisation d'une exposition sur le déroulement de leur travail dans "MATh.en.JEANS". La motivation et l'intérêt des élèves pour cette exposition ont été croissant, à croissance exponentielle. Commencée à 9 heures, en visionnant la cassette vidéo réalisée sur "MATh.en.JEANS", la journée s'est terminée à 19 heures, parce que **nous** avons obligé les élèves à s'arrêter : il restait quelques panneaux à plastifier, et, eux voulaient finir. (Entre-temps, la plastification du premier panneau terminé avait relancé le moral des troupes qui n'était alors pas bien haut.)

3.— Les résultats des élèves, groupe par groupe

Ensemble : l'exposition

L'exposition, terminée in extremis par les élèves de Racine avant la fin des cours au lycée Racine, fait le point sur l'ensemble des sujets abordés par chaque groupe avec contrôle de l'ensemble des élèves. Mis à part le Congrès de Vaugrigneuse, c'est la seule production collective des élèves.

Combinatoire

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— Parcours hamiltoniens du cavalier sur l'échiquier 5×5 (864 solutions) : études sur le 8×8.
— Placements de Tours sans prise mutuelle possible sur le $n \times p$ (existence de solutions optimales, dénombrements).
— Même problème pour les Dames : méthode pour obtenir les 92 solutions sur le 8×8; 2 solutions sur le 4×4, 10 solutions sur le 5×5.
— Placement de dominos sur des échiquiers tronqués; rôle de la parité; variantes serbo-croates (échiquiers troués).
— Réalisation de graphes : nombre d'arêtes dans le graphe du cavalier; parcours eulériens (CNS).

Ce groupe était celui qui disposait du plus grand nombre de documents. Il y en avait certainement trop, et c'est sans doute ce qui les a coincés dans leur travail. Car, pour chaque thème (ou presque), l'un des élèves trouvait le résultat dans l'un des numéros du "*Petit Archimède*" avant que le groupe ne l'ait trouvé lui-même. L'ensemble est donc plutôt hétéroclite.

Nombre d'or

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— Historique, nombre d'or, arts, sciences ....
— Musique et nombre d'or.
— Convergence de la suite de FIBONACCI vers le nombre d'or (démonstration

presque complète); paradoxe de Lewis CARROLL.
— $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} \to 2$ (démonstration complète; conjecture générale).
— Périodicité de la suite des derniers chiffres des nombres de FIBONACCI.
— Définitions du nombre d'or (équations du second degré ...).

Le groupe disposait aussi de nombreux documents. C'est la raison pour laquelle les élèves ont eu, au début, du mal à décider des thèmes qu'ils allaient traiter. Beaucoup des résultats qu'ils ont obtenus individuellement ne sont donc pas ressortis dans le travail collectif. Finalement, les thèmes traités sont ceux pour lesquels ils avaient le moins de documents : paradoxe de Lewis CARROLL et radicaux itérés.

Géométries non-euclidiennes

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— Étude de la **demi-sphère** ouverte avec demi-équateur moins un point. Vérification des axiomes de HILBERT sur cette demi-sphère : le postulat d'EUCLIDE n'est pas vérifié.
— Démonstration du **premier axiome** dans la géométrie de la sphère (par deux points ...).
— Le problème du *Jardinier* : comment planter des arbres à la mode de chez JEANS.
— **Géométrie sphérique** : (i) comparaison plan-sphère (points, droites, segments, angles, triangles); (ii) intersection de deux grands cercles; (iii) définition de la mesure d'un angle (par la longueur d'un arc); (iv) somme des angles d'un triangle *normal* (démonstration).
— **Axiomatique de la géométrie JEANS** (en collaboration avec P. DUCHET) : théorie catégorique ayant pour modèle la géométrie sphérique.

C'est le groupe qui avait le moins de documents à sa disposition : à part l'Encyclopaedia Universalis et le Géométricon (*), ils n'avaient rien. Nous leur avons fourni la liste des axiomes de HILBERT, et un petit historique de l'évolution de la définition de *droite*. Ils ont donc tout produit eux-mêmes, jusqu'au jour où Pierre DUCHET a dérapé ... Dérapage contrôlé, mais dérapage tout de même, par rapport à l'esprit dans lequel nous menions "MATh.en.JEANS" : ce manque de documents a titillé Pierre DUCHET, qui a fait, une fois, un cours de la géométrie non-euclidienne que les élèves *voulaient* créer à ... ces élèves eux-mêmes.

Cela ne retire rien à l'intérêt de ce produit (géométrie "JEANS")., ni aux résultats obtenus par les élèves, grâce, il faut **bien** le dire, aux élèves de seconde, qui ont fait preuve de beaucoup d'imagination.

L'infini

Les thèmes abordés et les résultats obtenus sont les suivants :
— La **bijection** comme moyen privilégié de comparer les infinis.

(*) Offert par les éditions Belin, en double exemplaire, un pour chaque établissement.

— Bijections explicites entre **segments** (ouverts, semi-ouverts, fermés) et droite.
— $1 + (1/2) + (1/4) + (1/8) + (1/16) + \ldots \to 2$.
— Démonstration originale de $1 + (1/2) + (1/3) + (1/4) + \ldots \to \infty$.

C'est le groupe le plus *scolaire*, et aussi le plus productif quant à la quantité des résultats obtenus. Le plus *scolaire*, car le seul groupe qui n'ait pas vraiment travaillé en groupe, mais plutôt en juxtaposition de travaux individuels. Les élèves de seconde se sont acharnés sur la somme de la série géométrique de raison 1/2 sans jamais vouloir profiter des connaissances des autres à propos des séries géométriques, ni écouter leurs conseils.

Mais les élèves étaient accrochés et déterminés, et ils ont obtenus de nombreux résultats tout en se posant beaucoup de questions de nature philosophique sur l'infini.

4.— Conclusion(s)

Travail personnel, en groupe, avec aide éventuelle de l'enseignant, en *séminaire* avec le groupe correspondant, avec supervision du chercheur C.N.R.S., ont permis aux élèves de produire de nouvelles mathématiques, pas tant en ce qui concerne les résultats obtenus que les démonstrations qu'ils ont inventées (par exemple, démonstration inédite d'un résultat connu : divergence de la série harmonique). Ils ont produit **leurs** mathématiques. Hors la structure de la classe, ils ont pratiqué un **loisir**, faisant des maths *comme d'autres font du tennis*. Ils ont fait des maths ensemble, acceptant de se tromper ensemble, de se faire contester ou rectifier par les autres, de donner des explications et de convaincre.

Face à notre plaisir subsiste une inquiétude de taille. Les élèves demandent à ce que ce travail reste en marge de leur scolarité : il s'agit de culture et (de leur point de vue ...) cela ne regarde pas l'école. Ils ne veulent pas que l'expérience s'intègre au cours; et eux-mêmes n'utilisent pas leur travail, leurs méthodes, leurs résultats, leurs acquis dans le déroulement du cours classique. Ainsi, dans un *devoir à choix multiple* où les élèves de 1ère S avaient à choisir les exercices à traiter dans une liste d'énoncés trop longue, aucun élève de "MATh.en.JEANS" n'a choisi de traiter un exercice en rapport avec son sujet de recherche.

Le seul point nouveau dont j'ai pu juger, pour les élèves que j'avais aussi en classe, est qu'ils participaient davantage au cours, au fur et à mesure que l'année s'écoulait. Mais leurs résultats n'ont guère évolué, et ils n'ont pas été, loin s'en faut, les meilleurs élèves de mes classes. Quant à ceux qui avaient d'autres enseignants en cours, plusieurs disaient être en complet décalage avec leur prof, n'ayant même pas toujours droit à la parole alors que c'est un droit qu'ils ont effectivement conquis, entre eux **et** face aux adultes!

Pourtant, pour nous les mathématiques ne sont pas un catalogue de recettes plus ou moins utiles à ingérer. Les mathématiques sont vivantes; l'enseignement des mathématiques devrait donner le goût d'en faire, devrait donner les moyens d'en faire. Ce ne sont pas les résultats qu'il faut apprendre mais les méthodes. Ce n'est pas la difficulté d'une discipline qu'il faut revendiquer, mais l'efficacité, la force, voire aussi la beauté d'un raisonnement qu'il faut transmettre. Et si l'Economie désire des créateurs, si l'Education Nationale veut susciter des vocations et former des profs de qualité, si la Recherche veut s'éviter un vieillissement important de ses cadres, c'est bien ces mathématiques là qu'il faut enseigner.

Il y a à cela beaucoup de moyens simples à la portée des enseignants : l'utilisation des textes historiques, l'enseignement de méthodes mais aussi l'enseignement de l'Histoire des maths, l'introduction d'une dimension philosophique dans le cours. Mais même un pédagogue talentueux ne peut pas pour l'instant mettre ses élèves en situation réelle de recherche mathématique dans le cadre de son cours. Cela exige des élèves motivés (même faibles), une perte de temps importante qui ne permettra pas de *boucler le programme*, un travail par lui-même difficile à noter (la recherche **doit** se faire en groupe et non dans des tours d'ivoire) et qui ne prépare pas à *l'examen* qui ne sert qu'à contrôler des savoir-faire.

Et l'authenticité de la recherche menée par les élèves ne peut être assurée que par un intervenant extérieur : un chercheur! La formation d'un prof ne lui permet pas de tenir le rôle de directeur de recherche. Et le discours du prof est visiblement suspect aux yeux des élèves qui le connaissent trop. Le contact avec le chercheur est essentiel pour eux. Pour différentes raisons, l'une d'elles — et non la moindre — étant de rencontrer un travailleur véritable, différent du seul qu'ils ont l'habitude de côtoyer : leur prof.

Car les motivations des élèves de "MATh.en.JEANS" sont diverses : attrait pour les mathématiques, recherche d'une activité de type soutien pour des élèves qui se sentent en difficulté et se trompent sur nos objectifs, activité périscolaire en concurrence avec l'Ecole, établissement de rapports plus profonds avec d'autres élèves de leur lycée, avec des élèves d'un autre lycée, d'un autre milieu socio-culturel, rencontre avec un métier mystérieux, ou avec une *bête curieuse*, ou tout simplement curiosité pour quelque chose d'original qui démarre dans leur lycée ...

Pour la plupart, ils ont produit des mathématiques par eux-mêmes, ils ont *séché*, ils se sont découragés, ils se sont pris par la main et ont surmonté leurs découragements, ils ont parlé d'égal à égal avec leurs profs, avec des mathématiciens, ils ont trouvé des mathématiques mais ils ont aussi découvert la réalité des mathématiques qui se font. Ils ne deviendront sans doute pas tous des mathématiciens, des enseignants ou des ingénieurs, mais le devenir leur semble désormais concevable. Et si au début de l'année ils n'osaient pas trop dire aux copains qu'ils faisaient des maths en plus du cours, sans y être obligés, en fin d'année c'étaient leurs copains qui leur demandaient des explications ou des nouvelles sur ce qu'ils faisaient. Premier pas vers une dédramatisation des mathématiques.

ANNEXE : Exemples de résultats d'élèves

On trouvera les grandes lignes de travaux réalisés par des élèves. Il ne saurait être question ici, de faire le tour de toutes les questions traitées et nous nous contenterons des résultats originaux de deux des groupes.

Exemples de résultats traités par le groupe "l'infini"

"Un hôtel au nombre de chambres fini affiche complet ; un voyageur arrive et souhaiterait en obtenir une, mais l'hôtelier ne peut que le renvoyer gentiment. Ce voyageur continue sa route et arrive devant un autre hôtel qui affiche lui aussi complet. Toutefois cet établissement comprend un nombre infini de chambres. Peut-il convaincre l'hôtelier de lui donner une chambre ?"

Ce problème a été parfaitement formulé, puis traité par les élèves, qui en ont réinvesti la solution dans l'établissement d'une bijection entre segment ouvert et segment semi-fermé. Ils ont par ailleurs acquis une maîtrise suffisante de l'infini pour que l'un d'entre eux nous propose une démonstration **originale** de la divergence de la série harmonique. Le principe en est simple et surprenant : après avoir remarqué que $(1/2) + (1/4) + (1/8)$ ne dépasse pas 1, mais que $(1/2) + (1/4) + (1/8) + (1/5)$ si, il minore la série harmonique par la série $1 + 1 + 1 + \dots$ en groupant les termes par paquets de plus en plus gros dans lesquels il minore certains groupements par 1/2, d'autres par 1/4, d'autres par 1/5, d'autres par 1/8, et tous les autres par ... 0 :

$$\begin{gathered}(1/2)+(1/3)+(1/4)+(1/5)+(1/6)+(1/7)+(1/8)+(1/9)+(1/10)\\ >(1/2)+0+(1/4)+(1/5)+0+0+(1/8)+0+0>1\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}(1/11)+(1/12)+\cdots+(1/100)=\\ (1/11)+(1/12)+(1/13)+(1/14)+(1/15)+(1/16)+(1/17)+(1/18)+(1/19)+(1/20)\\ +(1/21)+(1/22)+(1/23)+(1/24)+(1/25)+(1/26)+(1/27)+(1/28)+(1/29)+(1/30)\\ \dots+(1/91)+(1/92)+(1/93)+(1/94)+(1/95)+(1/96)+(1/97)+(1/98)+(1/99)+(1/100)\\ >(10/20)+0+(10/40)+(10/50)+0+0+(10/80)+0+0>1\end{gathered}$$

etc. C'est-à-dire que des 90 termes allant de 1/11 à 1/100, il n'en conserve que 40, la somme des 40, donc des 90, étant minorée par 1. Il me semble qu'il faut avoir bien compris les manipulations sur l'infini pour mettre au point, tout seul, cette démonstration.

Le problème du jardinier : exemple de résultat traité par le groupe "géométries non-euclidienne"

Le "*Problème du jardinier*" a été posé par Pierre Duchet aux élèves lors du premier séminaire "MATh.en.JEANS" : "Peut-on planter des arbres de telle manière qu'ils ne soient pas tous alignés et que toute droite déterminée par deux quelconques d'entre eux contienne au moins trois de ces arbres? Quelle réponse peut-on apporter à un jardinier du plan, à un jardinier de la sphère?" Sur le plan, les élèves obtiennent deux solutions avec un ensemble infini de points.

• Les trois droites

On choisit trois droites parallèles D_1, D_2, D_3. Ces droites sont constituées d'une infinité de points que l'on assimile à des arbres. On considère deux droites, par exemple D_1 et D_2. On prend un point A sur D_1 et un point B sur D_2. Lorsque l'on trace la droite D qui passe par ces deux points, elle passe obligatoirement par un troisième point C, appartenant à la troisième droite D_3 (fig. 1).

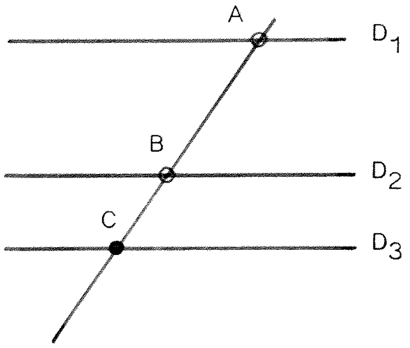


Figure 1

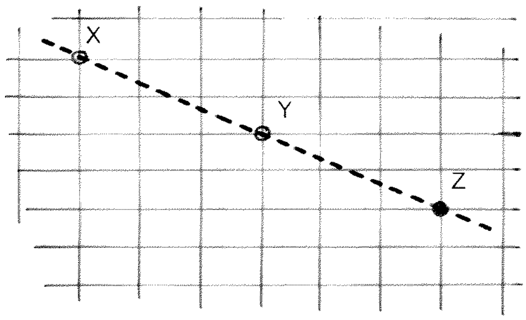


Figure 2

Remarque : D_1, D_2, D_3 ne sont pas nécessairement équidistantes. Cette solution est infinie, avec la puissance du continu, ce qui fait beaucoup d'arbres, et beaucoup de travail pour notre pauvre jardinier.

• Le plan quadrillé

On trace une infinité de droites parallèles et équidistantes. On trace également une infinité de droites parallèles et équidistantes, orthogonales aux premières. Les arbres, toujours assimilés à des points, sont situés à l'intersection de ces droites. Si l'on prend deux points X et Y sur le quadrillage, on obtient comme troisième point Z aligné aux deux autres, le symétrique de X par rapport à Y (fig. 2).

La solution est encore infinie, mais dénombrable cette fois-ci. De fait, il n'existe pas de solution finie dans le plan.

• Par contre, sur la sphère, il existe des solutions finies :

On définit une droite comme un grand cercle; les arbres sont toujours des points. On place trois points distincts, non alignés: A, B, C. Puis on trace tous les grands cercles passant par deux de ces points; chaque grand cercle contient au moins deux des points donnés (fig. 3).

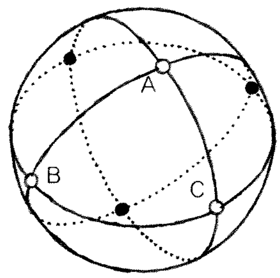
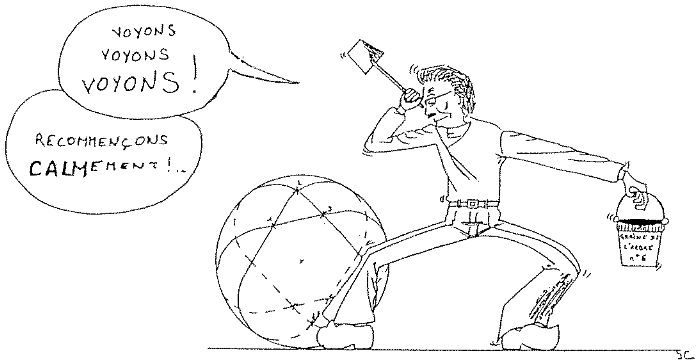


Figure 3

On prendra comme troisième point de chaque droite les *autres* intersections de ces droites (marquées +), ce qui donne une solution à cinq arbres. Sur le plan, ce problème n'a que des solutions infinies, alors que sur la sphère, une solution finie existe. Voir "*Quadrature*" n° 7, pour l'article de synthèse écrit par les élèves et Pierre DUCHET, présentant l'axiomatique de la *géométrie JEANS*.



Quel avenir pour "MATh.en.JEANS" ? Dès cette année scolaire, cinq nouveaux jumelages auront lieu : trois entre le lycée Racine et les Lycées Jaurès, Braque, d'Argenteuil, Balzac de Mitry-Mory; un en Alsace; un entre deux collèges, à Noisy le Grand et Torcy. Pour coordonner ces jumelages, Pierre AUDIN et René VEILLET ont obtenu chacun de la Direction des Lycées et Collèges une décharge de deux heures. C'est peu; c'est aussi une première marque d'intérêt de la part de l'Education Nationale. Espérons que ce ne sera pas la dernière.

Les jumelages nouvelle cuvée 1991 se retrouveront les 20 & 21 avril 1991 à Strasbourg, pour tenir un Congrès des "*Jeunes Mathématiciens*". Les lecteurs de '*L'Ouvert*' qui voudront juger sur pièces peuvent prendre contact avec les responsables de "MATh.en.JEANS".

Responsables de l'expérience "MATh.en.JEANS" :

Pierre DUCHET, mathématicien en combinatoire, chercheur C.N.R.S.
(16-1) 48.92.14.79

Pierre AUDIN, professeur de mathématiques au Lycée Jean Racine de Paris

(16-1) 42.00.32.29 serveur APMEP : 36.14 / APM2 / BAL / A80
36.15 / APMEP / BAL / A80

René VEILLET, professeur de mathématiques au Lycée Jean Jaurès d'Argenteuil

(16-1) 39.80.43.33 serveur APMEP : 36.14 / APM2 / BAL / V29
36.15 / APMEP / BAL / V29

(On peut se procurer la cassette vidéo VHS-Sécam, de 13 minutes, réalisée sur l'expérience "MATh.en.JEANS" en 1989-90 auprès de l'A.P.M.E.P. 26, rue Duméril 75013 PARIS.)

DES AVATARS DE LA SÉRIE HARMONIQUE ALTERNÉE

Jean LEFORT

C'est un exercice classique que de démontrer la divergence de la série harmonique $\Sigma\frac{1}{n}$ et la convergence vers $\ell n 2$ de la série harmonique alternée $\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Cela traduit la semi-convergence de la série harmonique alternée. Rappelons qu'une série est semi-convergente si elle converge alors que la série des valeurs absolues diverge (si cette dernière converge également on dit que la série est absolument convergente).

On démontre que l'ordre de sommation des termes d'une série absolument convergente n'influe pas sur le résultat final alors que pour une série semi-convergente tout peut arriver. En effet un théorème dû à RIEMANN énonce qu'on peut réordonner les termes pour obtenir n'importe quel nombre donné à l'avance. La démonstration repose sur le fait que la sous-série des termes positifs et celle des termes négatifs divergent. Pour obtenir la somme s (positive par exemple), on ajoute dans l'ordre les termes positifs pour dépasser s puis on compense avec les termes négatifs jusqu'à être sous s ...et ainsi de suite dans un mouvement de bascule infini.

On peut traduire autrement ces propriétés de l'ordre de sommation des termes d'une série. Pour les séries absolument convergentes on peut parler de commutativité infinie, c'est-à-dire qu'on peut toujours *commuter* un nombre infini de termes, deux par deux, aussi grande soit la *distance* qui les sépare dans la série initiale. Exemple :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$
$$a_0 + a_2 + a_1 + a_4 + a_6 + a_3 + \ldots + a_{4p} + a_{4p+2} + a_{2p+1} + \ldots$$

ont même somme si la première est absolument convergente. On a bien dans la deuxième écriture, utilisation de la commutativité infinie puisque la *distance* entre la position initiale et finale d'un terme est arbitrairement grande.

Au contraire, pour les séries semi-convergentes cette commutativité infinie n'existe pas. Cependant on peut toujours commuter un nombre infini de termes à condition que la distance entre la position initiale et finale d'un terme reste bornée quels que soient les termes choisis. Il n'y a donc dans ce cas que commutativité finie. A titre d'exemple considérons le réarrangement suivant de la série harmonique alternée :

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

ce qui correspond à

$$a_0 + a_1 + a_3 + a_2 + a_5 + a_7 + a_4 + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{2n} + a_{4n+1} + a_{4n+3} + \cdots$$

le regroupement

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{4}+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})-\frac{1}{8}+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10})-\frac{1}{12}\ldots\\ =\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots\end{aligned}$$

montre que la somme vaut $\frac{1}{2}\ell n2$.

• La méthode de RIEMANN permet de construire un réarrangement donnant une somme s fixée a priori. Mais cette méthode est peu agréable, car elle ne permet pas de connaître le nième terme du réarrangement sans avoir calculé les précédents et de plus elle ne fonctionne que dans un sens, c'est-à-dire qu'il semble difficile de connaître s à partir de la donnée du réarrangement. Cela résulte du fait que le théorème de RIEMANN est très général puisqu'il s'applique à une serie semi-convergente quelconque. Nous allons faire beaucoup mieux dans le cas de la série harmonique alternée.

Nous définissons un regroupement (m, n) de la série harmonique alternée comme étant la série obtenue en écrivant les m premiers termes positifs puis les n premiers termes négatifs puis les m termes positifs suivants puis les n termes négatifs suivants et ainsi de suite. Par exemple :

$$(2) \qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

est un regroupement (2,1).

Utilisons la théorie des séries entières pour calculer la somme de (2). Nous pouvons écrire (2) sous la forme :

$$(2') \qquad x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\ldots$$

où l'on fera ultérieurement $x=1$. Or pour $|x|<1$, (2') est absolument convergente. Il est alors possible d'utiliser la commutativité infinie et nous pouvons écrire (2') sous la forme :

$$(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ldots)-(\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{4}+\frac{x^{12}}{6}\ldots)$$

soit $\frac{1}{2}[\ell n(1+x)-\ell n(1-x)]+\frac{1}{2}\ell n(1-x^4)$ qui se réduit à $\frac{1}{2}\ell n[(1+x)^2(1+x^2)]$.

Maintenant un théorème d'ABEL nous permet d'affirmer que la somme de (2) est égale à la limite de celle de (2') quand x tend vers 1. C'est-à-dire que (2) a pour somme $\frac{3}{2}\ell n2$.

Prenons un autre exemple avec un regroupement (3,2) :

$$(3) \qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\ldots$$

se transforme en la série entière

$$(3') \qquad x^2+\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}-\frac{x^6}{2}-\frac{x^{12}}{4}+\frac{x^{14}}{7}+\frac{x^{18}}{9}+\frac{x^{22}}{11}-\frac{x^{18}}{6}\ \ldots$$

soit

$$(x^2+\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}+\ldots)-(\frac{x^6}{2}+\frac{x^{12}}{4}+\frac{x^{18}}{6}+\ldots)$$

où nous reconnaissons $\frac{1}{2}[\ell n(1+x^2)-\ell n(1-x^2)]+\frac{1}{2}\ell n(1-x^6)$ ce qui montre que (3) a pour somme $\frac{1}{2}\ell n6$.

D'une façon générale, pour un regroupement (m,n) nous écrivons pour les termes positifs $\frac{x^{n(2p-1)}}{2p-1}$ et pour les termes négatifs $-\frac{x^{m(2p)}}{2p}$ ce qui conduit à la somme :

$$\frac{1}{2}[\ell n(1+x^n)-\ell n(1-x^n)]+\frac{1}{2}\ell n(1-x^{2m})$$

pour la série entière et à $\ell n2+\frac{1}{2}\ell n(\frac{m}{n})$ pour la série harmonique alternée regroupée en (m,n), c'est-à-dire alternativement m termes positifs et n termes négatifs.

Intéressons nous maintenant au cas où nous n'avons pas un regroupement (m,n), mais une alternance irrégulière avec cependant conservation de l'ordre naturel pour les sous séries des termes positifs et négatifs. Posons λ_p égal au rapport du nombre de termes positifs au nombre de termes négatifs de rang inférieur ou égal à p. Si λ_p admet une limite λ quand p tend vers l'infini il semble naturel d'admettre que le réarrangement de la série harmonique alternée converge vers $\ell n2+\frac{1}{2}\ell n\lambda$, puisque c'est une généralisation du cas précédent où λ valait $\frac{m}{n}$.

Soit $\Sigma_{k=1}^{\infty}u_k$ le réarrangement de la série harmonique alternée : soit m_p et n_p le nombre de termes respectivement positifs et négatifs de rang inférieur à p. Nous pouvons écrire

$$\Sigma_{k=1}^{p}u_k=\Sigma_{j=1}^{m_p}\frac{1}{(2j-1)}-\Sigma_{j=1}^{n_p}\frac{1}{2j}.$$

Il est bien connu que la suite de terme général $E_p=\Sigma_{k=1}^{p}\frac{1}{k}-\ell np$ converge en décroissant vers γ, la constante d'Euler, quand p tend vers l'infini. Ceci nous permet de traiter les termes négatifs :

$$\Sigma_{j=1}^{n_p}\frac{1}{2j}=\frac{1}{2}\Sigma_{j=1}^{n_p}\frac{1}{j}=\frac{1}{2}\ell n\ n_p+\frac{1}{2}E_{n_p}$$

mais comme

$$\Sigma_{j=1}^{2m_p}\frac{1}{j}=\Sigma_{j=1}^{m_p}\frac{1}{2j-1}+\Sigma_{j=1}^{m_p}\frac{1}{2j}$$

(en séparant les termes d'ordre pair de ceux d'ordre impair), nous avons aussi :

$$\Sigma_{j=1}^{m_p}\frac{1}{2j-1}=\Sigma_{j=1}^{2m_p}\frac{1}{j}-\Sigma_{j=1}^{m_p}\frac{1}{2j}=\ell n2m_p+E_{2m_p}-\frac{1}{2}\ell nm_p-\frac{1}{2}E_{m_p}$$

et finalement en regroupant :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \Sigma_{k=1}^{p} u_k &= \lim_{p\to\infty}[\ell n 2m_p - \frac{1}{2}\ell n m_p - \frac{1}{2}\ell n n_p + E_{2m_p} - \frac{1}{2}E_{m_p} - \frac{1}{2}E_{n_p}] \\ &= \ell n 2 + \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty} \ell n \frac{m_p}{n_p} \\ &= \ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n \lambda\end{aligned}$$

qui est bien le résultat que nous attendions (*).

• La valeur de la somme du réarrangement de la série harmonique alternée ne dépend que de la densité in fine des termes positifs par rapport aux termes négatifs. Si maintenant nous nous donnons un nombre λ irrationnel quelconque, nous pouvons facilement construire un réarrangement de la série harmonique alternée qui admette pour somme $\ell n 2 + \frac{1}{2}\ell n \lambda$. Prenons le cas où $\lambda > 1$ et alternons $E[p\lambda] - E[(p-1)\lambda]$ termes positifs avec un terme négatif, p prenant les valeurs entières successives 1, 2, 3 ... (E désignant la fonction partie entière). La densité relative après l'écriture de p termes négatifs est comprise entre

$$\frac{E[p\lambda]}{p} \quad \text{et} \quad \frac{E[(p+1)\lambda]}{p}$$

quantités qui tendent toutes deux vers λ quand p tend vers l'infini. Dans le cas où $\lambda < 1$, il suffira d'alterner un terme positif avec $E[p\frac{1}{\lambda}] - E[(p-1)\frac{1}{\lambda}]$ termes négatifs pour obtenir également une densité relative ayant λ pour limite.

Par exemple pour $\lambda = e^{2-\ell n\ 4} \simeq 1,84726\ldots$ nous obtenons successivement

$$E(p\lambda) : 0,1,3,5,7,9,11,12,14,16,18,20,\ldots$$
$$E(p\lambda) - E((p-1)\lambda) : 1,2,2,2,2,2,1,2,2,2,2,2,\ldots$$

et la série :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{10} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{12} + \frac{1}{23} - \ldots$$

qui converge vers 1.

De même pour $\lambda = e^{1-\ell n\ 4} \simeq 0,67957\ldots$ nous obtenons successivement :

$$E(\frac{p}{\lambda}) : 0,1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,\ldots$$
$$E(\frac{p}{\lambda}) - E(\frac{p-1}{\lambda}) : 1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,\ldots$$

(*) Cette démonstration est adaptée de COWEN, DADIDSON et KAUFMAN (Amer. Math. Monthly, Dec. 1980).

et la série :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}$$
$$-\frac{1}{14}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\frac{1}{13}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\cdots$$

qui converge vers $\frac{1}{2}$.

Ce que nous venons de voir avec la série harmonique alternée est spécifique à celle-ci. Considérons en effet une suite (u_n) alternée décroissante en valeur absolue avec, pour fixer les idées, $u_1 > 0$. Alors :

1) Si $\lim_{n\to\infty} n|u_n| = +\infty$, on peut toujours trouver un réarrangement de la série Σ_n de densité relative $\lambda = 1$ dont la somme est un nombre réel arbitraire.

2) Si $\lim n|u_n| = 0$, on peut trouver un réarrangement $\Sigma u'_n$ de densité relative $\lambda < 1$ avec $\Sigma u'_n = \Sigma u_n$.

A ce sujet on pourra consulter : PRINGSHEIM : "*Über die Werthveränderungen bedingt convergierten Reihe und Produkte*".– Mathematische Annalen, 22 (1883) 455–503.

Un très vieil ami de mon père, sorti premier de l'école normale, avait dû à cet exploit de débuter dans un quartier de Marseille : quartier pouilleux, peuplé de misérables où nul n'osait se hasarder la nuit. Il y resta de ses débuts à sa retraite, quarante ans dans la même classe, quarante ans sur la même chaise.

Et comme un soir mon père disait :

— "Tu n'as donc jamais eu d'ambition?

— Oh mais si! dit-il, j'en ai eu! Et je crois que j'ai bien réussi! Pense qu'en vingt ans, mon prédécesseur a vu guillotiner six de ses élèves. Moi, en quarante ans, je n'en ai eu que deux, et un gracié de justesse. Ça valait la peine de rester là."

Marcel PAGNOL
La gloire de mon père.

SUR L'ÉQUATION $x^2 + 7 = 2^n$

Maurice MIGNOTTE

RAMANUJAN avait noté que l'équation

$$x^2 + 7 = 2^n$$

possède les solutions $n = 3, 4, 5, 7, 15$, sans trouver d'autres solutions. En 1948, NAGELL, le premier, montra que ce sont les seules solutions. D'autres preuves ont été données par BROWKIN et SCHINZEL, SKOLEM, CHOWLA et LEWIS, CHOWLA, DUNTON et LEWIS, MORDELL, ... HASSE a écrit un article présentant ces diverses solutions. La preuve qui suit a été publiée par l'auteur en 1984.

• Si n est pair :

Dans ce cas on peut écrire l'équation :

$$(x - 2^{n/2})(x + 2^{n/2}) = -7.$$

Puisque les seules décompositions en facteurs premiers de -7 sont $1 \times (-7)$ et $(-1) \times (7)$, l'un des facteurs est négatif et l'autre positif. En cherchant x positif on a nécessairement

$$\left.\begin{aligned} x - 2^{n/2} &= -1 \\ x + 2^{n/2} &= 7 \end{aligned}\right\}$$

dont la résolution conduit à $n = 4$ (puis $x = 3$) qui est alors la seule solution paire.

• Si n est impair :

Nous posons $n = 2m + 1$ et $y = 2^m$, ce qui permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$x^2 - 2y^2 = -7, \text{ avec } y > 0.$$

L'idée est de travailler dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, ensemble des nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$. Cet **anneau est principal**, c'est-à-dire qu'entre autre il y a unicité de la décomposition en facteurs premiers (aux unités près). Les **unités ou éléments inversibles** sont de la forme $\pm\varepsilon^s$, avec $s \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$. Dans cet anneau, -7 admet la factorisation en éléments premiers $(1 + 2\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2})$. L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) &= (1 + 2\sqrt{2})(1 - 2\sqrt{2}) \\ &= \delta\varepsilon^s(1 + 2\sqrt{2})\delta\varepsilon^{-s}(1 - 2\sqrt{2}) \text{ avec } \delta = \pm 1. \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons les deux cas :

$$\begin{cases} x + y\sqrt{2} = \delta\varepsilon^s(1+2\sqrt{2}) \\ x - y\sqrt{2} = \delta\varepsilon^{-s}(1-2\sqrt{2}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y\sqrt{2} = \delta\varepsilon^s(1-2\sqrt{2}) \\ x - y\sqrt{2} = \delta\varepsilon^{-s}(1+2\sqrt{2}). \end{cases}$$

D'autre part, comme dans chacun des cas les premiers membres sont conjugués, les deuxièmes membres doivent l'être aussi, ce qui n'est possible que si s est pair car le conjugué de ε est $(-\varepsilon)^{-1}$.

Enfin, comme nous pouvons toujours nous limiter à $x > 0$, nous voyons que dans le premier cas $\delta = +1$ et $s > 0$ et dans le deuxième $\delta = -1$ et $s > 0$. Les deux cas peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} x + y\sqrt{2} = \varepsilon^s(1+2\sqrt{2}) \\ x - y\sqrt{2} = (-\varepsilon)^{-s}(1-2\sqrt{2}) \\ s \text{ pair} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y\sqrt{2} = -\varepsilon^s(1-2\sqrt{2}) \\ x - y\sqrt{2} = -(-\varepsilon)^{-s}(1+2\sqrt{2}) \\ s \text{ pair} \end{cases}$$

et en tirant y nous obtenons (toujours avec s pair) :

$$y = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\varepsilon^s - (-\varepsilon)^{-s}\Big) + \Big(\varepsilon^s + (-\varepsilon)^{-s}\Big) \text{ ou } y = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\Big(\varepsilon^s - (-\varepsilon)^{-s}\Big) + \Big(\varepsilon^s + (-\varepsilon)^{-s}\Big)$$

et nous remarquons que l'on passe d'un cas à l'autre en remplaçant s par $-s$. Notons $y_s = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\varepsilon^s - (-\varepsilon)^{-s}\Big) + \Big(\varepsilon^s + (-\varepsilon)^{-s}\Big)$.

Il est facile de vérifier que la suite y_s est donnée par :

$$y_0 = 2 \;;\; y_1 = 3 \;;\; y_{s+2} = 2y_{s+1} + y_s \qquad s \in \mathbb{Z}$$

(il suffit de vérifier la récurrence pour ε^s et $(-\varepsilon)^{-s}$). Les solutions de l'équation initiale sont à rechercher parmi les y_s correspondant à s pair.

• La question est de savoir si y_s peut être une puissance de 2. L'exploration pour les petites valeurs de s donne les solutions indiquées au début de l'article pour $s = -6, -2, 0, 2$ correspondant respectivement à $n = 15, 5, 7, 3$ ($m = 7, 2, 3, 1$). Or, si y_s est une puissance de 2, il est divisible par 2^p (et le quotient vaut 2^q), d'où l'idée d'étudier les valeurs de la suite y_s modulo 2^p pour p pas trop grand. Les petites solutions ayant été trouvées, plaçons-nous dans le cas $m \geq 8$, soit $2^m \geq 256 = 8 \times 32$.

L'étude de la suite y_s modulo 8 donne : $y_0 \equiv 2, y_1 \equiv 3, y_2 \equiv 0, y_3 \equiv 3, y_4 \equiv 6, y_5 \equiv 7, y_6 \equiv 4, y_7 \equiv 7, y_8 \equiv 2, y_9 \equiv 3$ et par conséquent

$$y_s \equiv 0 \pmod 8 \iff s \equiv 2 \pmod 8.$$

On peut donc, pour limiter un peu les calculs, se contenter d'étudier la suite $u_t = \frac{1}{8}y_{8t-6}$, qui est définie par $u_0 = 16, u_1 = 1, u_{t+2} = 1154u_{t+1} - u_t$ (ici encore il suffit de vérifier la récurrence pour ε^{8t-6} et $(-\varepsilon)^{-(8t-6)}$ après avoir calculé les deux premiers termes).

L'étude de la suite u_s modulo 32 se simplifie en : $u_0 \equiv 16, u_1 \equiv 1, u_{t+2} \equiv 2u_{t+1} - u_t$. Il en résulte que l'on a $u_t \equiv t \pmod{32}$ lorsque t est impair et $u_t \equiv 16 + t$ (mod 32) quand t est pair, comme le montre une récurrence immédiate. Par conséquent, si $y = 2^m$ avec $m \geq 8$, alors $y = 8u_t$ pour un certain $t \equiv 16$ modulo 32.

• Nous allons maintenant revenir à la suite u_t, l'étudier modulo un autre nombre, et montrer que pour $t \equiv 16 \pmod{32}$ u_t ne peut pas être une puissance de 2. Pour cela, nous allons choisir un nombre premier p tel que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, 2 soit un carré parfait. On dit alors que **2 est résidu quadratique modulo p**. Cela a lieu pour $p = 8k \pm 1$. Si nous montrons que, pour $t \equiv 16 \pmod{32}$, u_t n'est pas résidu quadratique modulo p, il ne pourra pas être une puissance de 2 et par conséquent le problème n'aura pas d'autres solutions que celles trouvées par RAMANUJAN.

Il nous faut choisir ce nombre premier p de façon que, modulo p, la suite u_t ait une période pas trop longue et multiple de 32 pour qu'il n'y ait qu'un petit nombre de termes u_t différents avec $t \equiv 16 \pmod{32}$. De plus, ces termes ne doivent pas être résidus quadratiques modulo p. Quelques tâtonnements conduisent à prendre $p = 7681 = 8(2^6 \times 3 \times 5) + 1$, en prenant pour k des petits facteurs.

Modulo 7681, on vérifie que la suite u_t a une période égale à 64 et que $u_{16} \equiv 4214$ et $u_{48} \equiv -4214$. Pour montrer qu'aucun de ces deux nombres n'est résidu quadratique nous utiliserons le **symbole de Legendre** et **la loi de réciprocité quadratique**. Rappelons que le symbole de LEGENDRE $(\frac{a}{p})$ note la quantité $a^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p (premier impair). Cette quantité vaut +1 ou -1 selon que a est ou n'est pas résidu quadratique modulo p. On a évidemment $(\frac{a}{p}) \times (\frac{b}{p}) = (\frac{ab}{p})$ mais surtout, la loi de réciprocité quadratique, pour p et q premiers impairs :

$$(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \times \frac{q-1}{2}(\frac{p}{q}).$$

Or, pour $p = 7681$, -1 et 2 sont résidus quadratiques et par suite :

$$(\frac{\pm 4214}{p}) = (\frac{\pm 1}{p})(\frac{2}{p})(\frac{49}{p})(\frac{43}{p}) = (\frac{p}{43}) = (\frac{27}{43}) = (\frac{3}{43}) = -(\frac{43}{3}) = -1.$$

ce qui achève la démonstration.

• En regardant cette démonstration d'un peu plus près, on constate que l'on a même prouvé le résultat suivant :

Théorème : Les équations $x^2 - 2^{17}y^4 = -7$ et $x^2 - 2^{19}y^4 = -7$ n'ont pas de solutions en nombres entiers.

Références

H. HASSE.— *Über eine diophantische Gleichung von Ramanujan-Nagell und ihre Verallgemeinerung, Nagoya Math. J.*, **27**, 1966, p. 77–102.

L'ŒUVRE DE JEAN MARTINET EN FAVEUR DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

François PLUVINAGE

Caballeros habrá muchos
Pero como ese pocos ...
Cervantes.

Régulièrement de par le monde, quelques éminents mathématiciens trouvent de l'intérêt à consacrer une partie de leur activité à s'occuper de questions touchant à l'enseignement, même élémentaire, des mathématiques. Jean MARTINET était l'un d'eux. Il se plongeait dans les problèmes de l'enseignement avec à la fois le même enthousiasme et la même modestie que dans des sujets de haute volée de la recherche mathématique. Enthousiasme vis à vis de l'activité mathématique à tous les niveaux, pour lui source de continuelles merveilles, foisonnement d'idées et d'images, à l'opposé de l'univers froid qui correspond à une vision trop souvent répandue. Et modestie réelle tant par rapport aux sujets traités que dans ses relations avec autrui, résultant de sa conviction bien enracinée que ses interlocuteurs quelle que soit leur position sociale ou leurs titres, pouvaient avoir quelque chose de passionnant à lui montrer ou lui raconter. Et en effet, il les amenait spontanément à lui présenter le meilleur de leur savoir ou de leur expérience, convaincus de bénéficier d'une écoute attentive, sans complaisance laxiste mais très bienveillante.

Une phrase de Jean MARTINET me revient à l'esprit : "*Avec de tels élèves, quels bons professeurs deviendrons nous !*". Il était question dans ce propos d'élèves très intéressés, qui viennent hors temps scolaire à l'IREM de Strasbourg rencontrer des mathématiciens. Mais il pouvait être tout aussi heureux de s'adresser par exemple à des élèves-instituteurs, ayant plutôt suivi des études littéraires. Il y a plusieurs années déjà, en avant-première sur l'enseignement supérieur scientifique, il leur proposait des réflexions sur les fractions continues, sujet à la fois très abordable et riche. Il avait su, comme à bien d'autres occasions, entrer en résonnance avec l'intérêt de ses auditeurs : dans ce cas, non la pure spéculation mais la compréhension en profondeur de thèmes mathématiques (telle la division avec reste) à enseigner aux jeunes élèves et la possibilité d'imaginer des applications dans les classes. Il va sans dire que, dans l'enseignement universitaire, ses cours étaient hautement appréciés.

A l'IREM de Strasbourg, dont il avait assumé la direction pendant la durée d'un mandat, il participait avec une constance qui ne s'est jamais démentie aux réunions du groupe lycée. Et puis-je avancer qu'un groupe où intervenait Jean MARTINET avait toujours du talent, parce que lui-même réussissait à en être membre au même titre que les autres tout en prenant le recul qui permettait d'apercevoir des ouvertures intéressantes, de découvrir ou de ne pas perdre de vue des perspectives importantes ?

Lorsqu'il assura la présidence de la COPREM (Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques), les participants ont certainement tous ressenti comme moi l'impression que la chaleur cordiale des réunions qu'il animait était le climat naturel d'un travail efficace et sérieux rassemblant les contributions des uns et des autres, dans des lignes directrices néanmoins nettement tracées. Par exemple, Jean MARTINET tenait à ce que les mathématiques soient enseignées à leur juste place, mais pas plus, en fonction des besoins de formation et des goûts du public concerné. Pour lui cet élément n'était pas contradictoire, mais complémentaire du souci d'une authentique formation scientifique offerte aux élèves intéressés. S'adresser à ce public aussi bien qu'à un public non scientifique ou technique demande de toute façon à la communauté mathématique d'être attentive à mettre en valeur l'image de marque de sa discipline.

Jean MARTINET contribuait à cette valorisation de multiples façons, tant au sein d'organismes comme la Section Française de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique ou la COPREM déjà citée que par son action directe. Il aimait à se rendre à l'occasion dans des classes, où les élèves étaient ravis de la rencontre des mathématiques que son passage provoquait. Ses conférences et ses articles où il réussissait à diffuser de manière attrayante des résultats de la mathématique qui se fait aujourd'hui (dans le genre "*Le problème des trois corps, un cas simple*" paru dans '*L'Ouvert*' n° 10 en 1976 n'a pas pris une ride de nos jours) étaient d'autres moyens d'agir dans la même direction. Contrairement à d'autres, le nom de Jean MARTINET n'apparaît jamais seul en tête d'ouvrages volumineux pour l'enseignement : il a toujours contribué à des ouvrages collectifs. C'est un signe qui ne trompe pas sur son sens du travail en équipe. Pour cela aussi, l'ami Jean MARTINET était un grand exemple.

LA NOUVELLE BROCHURE DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
LOGO 4 (*) : RÉCURSIVITÉ
PRÉSENTATION ET ANALYSE DE SITUATIONS

par Claire DUPUIS, Marie-Agnès EGRET et Dominique GUIN

Cette brochure contient la description et l'analyse d'une expérimentation d'enseignement de la récursivité menée avec des élèves de 3^{e}. Ces élèves ont suivi en 4^{e} un enseignement de base du langage LOGO orienté vers l'apprentissage de la programmation structurée dont la description et l'analyse figurent dans le document "LOGO 3".
Les enseignants pourront trouver, s'ils le souhaitent, des thèmes d'activités dans la partie "Présentation des différentes séances" avec leurs objectifs et nos commentaires.

A TITRE DE RAPPEL :
LOGO 1 (*) : LE LANGAGE

par D. GUIN (1985)

Ce fascicule a pour but de faciliter une première approche du langage LOGO. Il est présenté dans la version MICRAL (unique version LOGO disponible à l'époque sur le matériel agréé par l'Education Nationale). Vous trouverez en annexe, une correspondance des primitives version APPLE & TO7 nécessaire pour utiliser un manuel quelconque concernant le langage LOGO.
Cette brochure n'a pas l'ambition de remplacer un tel manuel, mais plutôt d'aider à la compréhension de certaines notions propres au langage LOGO.

LOGO 2 (*) : DANS UNE CLASSE DE COURS MOYEN

par J.-G. HELM et D. GUIN (1984)

L'ordinateur est-il un outil d'apprentissage efficace à l'École Elémentaire? Pour pouvoir répondre à cette question, il faut d'abord essayer ... Nous avons donc placé un micro-ordinateur un an dans une classe de CM 2 et exploré quelques possibilités d'utilisation. L'idée de départ est d'offrir au système scolaire un espace d'exploration, de créativité, d'apprentissage : utiliser l'outil informatique c'est, pour nous, mettre à la disposition des enfants un outil pour "apprendre mieux".
Cette brochure décrit succintement les activités suscitées dans la classe. Nous y avons privilégié les préoccupations d'ordre pédagogique. Nous ne prétendons pas apporter une réponse à la question posée précédemment qui nécessite une étude approfondie qui a été menée par l'équipe de didactique des mathématiques dans les années qui ont suivi.

LOGO 3 (*) : PROGRAMMATION STRUCTURÉE

par Claire DUPUIS, Marie-Agnès EGRET et Dominique GUIN (1987)

Cette brochure contient la description et l'analyse d'une expérimentation menée avec des élèves de 4^{e} sur un enseignement de base du langage LOGO orienté vers l'apprentissage de la programmation structurée (il a été suivi par une introduction de la récursivité qui a fait l'objet de la brochure LOGO 4). Les enseignants pourront trouver, s'ils le souhaitent, des thèmes d'activités dans la partie "présentation des différentes séances" avec leurs objectifs et nos commentaires. La partie "présentation des différents tests" permet d'estimer les acquis et les difficultés des élèves au cours de cet apprentissage.

(*) Prix de vente sur place à la bibliothèque de l'I.R.E.M. (entre parenthèses : prix avec port) : Vol. 1 : 13 F (35 F) — Vol. 2 : 9 F (35 F) — Vol. 3 : 35 F (50 F) — Vol. 4 : 35 F (50 F) (150 F par poste si vous commandez les 4 volumes).

QUATERNIONS, OCTONIONS ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Marc GUINOT

Le Groupe de mathématiques de Saumur est de formation trop récente pour que sa notoriété ait pu jusqu'à présent dépasser les rives du Thouet. Conscient du handicap que constitue, à notre époque hypermédiatisée, ce défaut de rayonnement, le Comité directeur de cet estimable groupe d'autoformation permanente a jugé utile de lancer une grande campagne de relations publiques. Les contacts pris du côté de TF 1, de France-Culture et de divers journaux n'ayant rien donné, nous nous sommes tournés vers les revues spécialisées. Malheureusement "*The Mathematical Intelligencer*", la revue allemande bien connue, ne publie que des articles en anglais, et "*Quadrature*", la nouvelle venue, présente une typographie qui laisse encore par trop à désirer. Aussi nous sommes-nous rabattus sur les nombreuses publications des IREM de France et de Navarre dont la plus prestigieuse est sans conteste l'organe officiel de l'IREM de Strasbourg. Par chance, son directeur se lamentait, dans un éditorial récent, sur la difficulté de trouver des articles de haut niveau dont ses lecteurs sont si friands. Il a été facile de le convaincre, dans la torpeur du mois d'août, de l'intérêt que présentent, pour l'image de marque de sa revue, les derniers Travaux du groupe de Saumur sur les rapports étonnants qu'entretiennent la géométrie élémentaire, le corps des quaternions et l'algèbre des octonions.

Moyennant quoi, c'est ce dont il va être question maintenant.

Introduction : les théorèmes de Desargues et de Pappus

Lorsque David HILBERT publia en 1899 son célèbre ouvrage sur les fondements de la géométrie, il ne se contenta pas de dresser une liste d'axiomes à partir desquels on pouvait déduire toute la géométrie traditionnelle, mais, les regroupant par affinité, il s'attacha à mesurer la portée de chacun d'eux en les considérant isolément ou en les modifiant de diverses façons. A la lumière de ces opérations, il montra que certains résultats de la géométrie classique pouvaient s'enrichir de significations nouvelles qui étaient restées cachées jusque là. C'est le cas en particulier des théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS dont la validité est liée, comme on le verra, à des propriétés purement algébriques qui sont sous-jacentes à la structure géométrique du plan et de l'espace.

Dans sa version la plus générale, le théorème de DESARGUES est un résultat de géométrie projective qu'il est très facile d'énoncer dans ce cadre. Si on se limite à la géométrie traditionnelle, on est malheureusement contraint de multiplier quelque peu les hypothèses et les conclusions. On peut néanmoins en donner une idée assez précise en considérant dans le plan ordinaire trois droites distinctes, parallèles ou concourantes, puis deux points A et A' sur la première droite, deux points B et B' sur la seconde droite, et deux points C et C' sur la troisième droite, tous ces points étant supposés distincts du point de concours éventuel des trois droites considérées. Cette configuration générale permet de considérer les six droites $AB, BC, AC, A'B', B'C'$ et $A'C'$, groupées deux par deux de façon à former les trois paires AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$. La conclusion du théorème dépend alors de la nature des trois paires de droites ainsi envisagées : si chacune des trois paires est constituée de deux droites sécantes, on a alors trois points d'intersection possibles I, J, et K ; la conclusion est que ces trois points sont alignés.

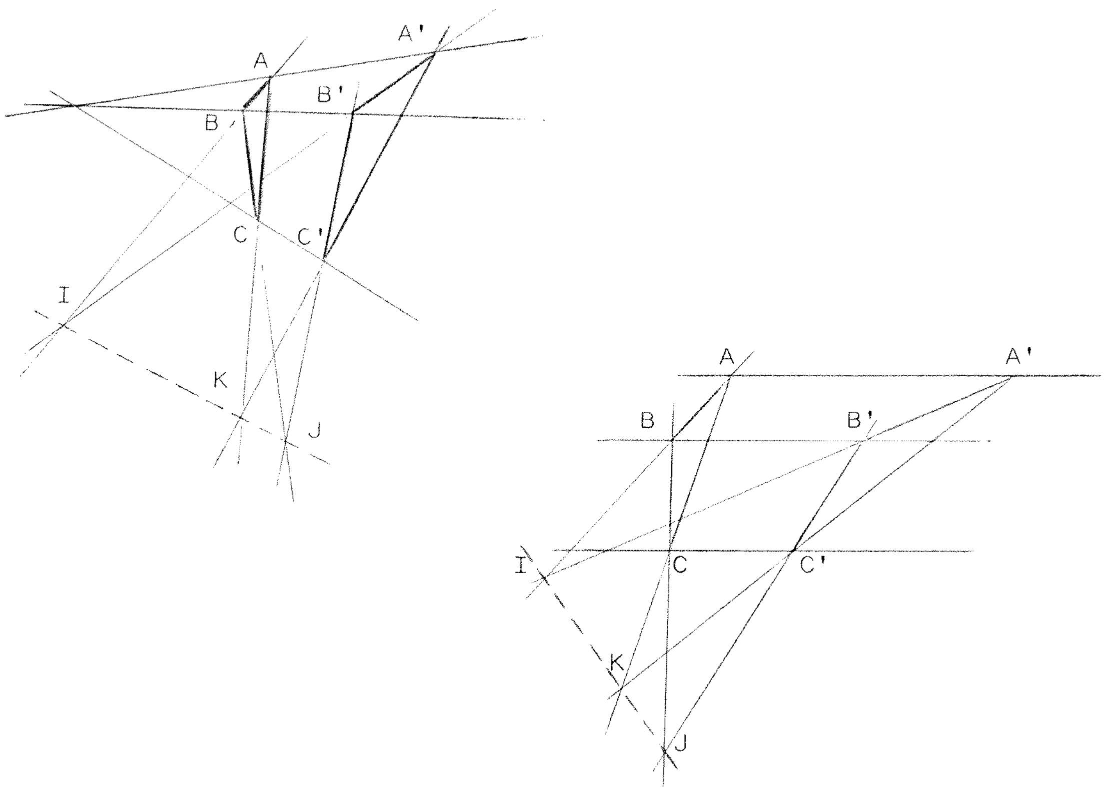


Figure 1

Si les hypothèses précédentes ne sont pas plus vraies pour l'une des trois paires de droites et si on suppose par exemple que la première paire AB et $A'B'$ est formée de droites parallèles distinctes, alors le point I n'existe plus. Dans le langage de la géométrie projective, on dit qu'il est rejeté à l'infini. Dans ce cas, l'alignement des points I, J et K vu précédemment se traduit maintenant par la propriété que la droite JK (si on suppose $J \neq K$) en parallèle à AB et à $A'B'$: elle continue en quelque sorte à passer par I, mais ... à l'infini ! Enfin, si deux des trois paires sont constituées de droites parallèles, la conclusion est qu'il en est de même de la troisième paire : l'alignement subsiste encore, mais à l'infini uniquement.

C'est en fait ces phénomènes, faciles à observer sur des figures qui ont conduit DESARGUES, PASCAL et leurs émules à envisager l'existence de *points à l'infini* dans le plan, chaque point à l'infini correspondant finalement à tout un faisceau de droites parallèles. On admirera à ce propos le processus qui a conduit de cette idée relativement simple à la définition passablement sophistiquée des espaces projectifs que donne BOURBAKI dans ses "*Eléments de mathématique*" (Algèbre, Chap. II, § 9, n° 11, nouvelle édition, p. 138). L'auteur offre d'ailleurs une bouteille de champagne à quiconque saura lui expliquer convenablement le sens exact de la définition en question ...

La dernière version du théorème de DESARGUES, avec deux paires de droites parallèles au départ, exprime en fait une propriété assez élémentaire de la géométrie plane classique en rapport avec les notions d'homothétie et de translation :

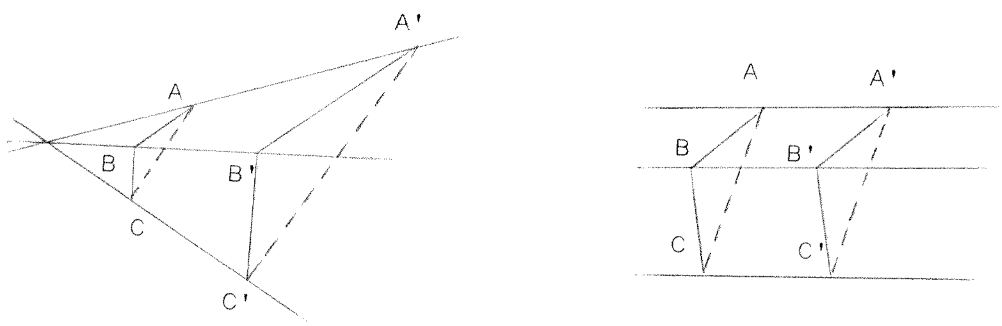


Figure 2

Il est bien évident que DESARGUES (1591 – 1661) n'aurait pas atteint la notoriété qui est la sienne (et qui lui vaut une plaque commémorative à l'entrée de la rue des Trois-Maries à Lyon) s'il s'était contenté de découvrir ce dernier résultat. Mais il se trouve que le cas général illustré par la première version ci-dessus (*fig. 1*) peut se ramener, moyennant un passage par la géométrie dans l'espace, à la version élémentaire en question (*fig. 2*), ce qui fait que d'un point de vue purement logique, cette version élémentaire caractérise le théorème général. Ce n'est pas le lieu ici d'en dire davantage et le lecteur qui désirerait en savoir plus peut toujours se procurer, auprès de l'auteur de cet article, le compte-rendu de la séance du 25 septembre 1989 qui rapporte les travaux du Groupe de mathématiques de Saumur sur cette importante question (CCP 2 208 90 S, Nantes).

L'énoncé du théorème de PAPPUS présente beaucoup d'analogies avec celui du théorème de DESARGUES, mais au lieu de considérer trois droites, on n'en considère que deux, supposées distinctes, avec trois points A, B, C sur la première et trois points A', B', C' sur la seconde. Cette configuration générale permet de considérer les trois paires de droites $A'B$ et AB', $A'C$ et AC', $B'C$ et BC'. S'il n'y a, dans ces trois paires, que des droites sécantes, on a alors trois points d'intersection possibles I, J et K ; la conclusion est que ces trois points sont toujours alignés.

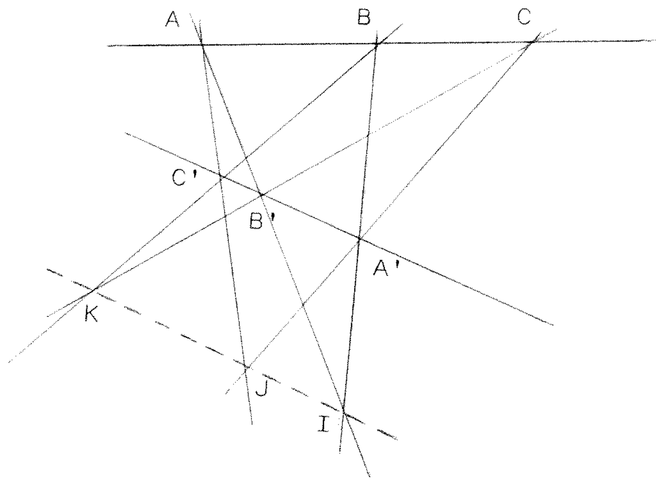


Figure 3

Comme pour le théorème de DESARGUES, le cas général peut dégénérer en plusieurs cas particuliers. Ainsi, si on suppose $(A'B)$ et (AB') parallèles, ainsi que $(A'C)$ et (AC'), la conclusion est qu'il en est de même de $(B'C)$ et de (BC'). En lui-même, ce dernier résultat n'est d'ailleurs pas évident et nous verrons dans ce qui suit qu'il est curieusement lié à une propriété de commutativité. Mais là encore, comme pour le théorème de DESARGUES, on peut ramener la démonstration du cas général à ce cas particulier, moyennant un passage par l'espace (CCP 2 208 90 S Nantes ...).

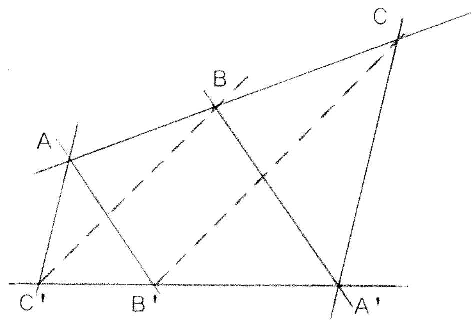


Figure 4

Les propriétés précédentes ne font intervenir que des notions élémentaires de géométrie plane. Il est donc naturel de les formuler (ou de les reformuler) dans le cadre d'une présentation axiomatique ne prenant en compte que ces notions. Pour fixer les idées, nous conviendrons d'appeler **plan d'incidence de type affine** tout ensemble E muni de la structure définie par la donnée d'un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E vérifiant les conditions axiomatiques suivantes :

(P_1) L'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas vide et si $D \in \mathcal{D}$ aucun des ensembles D et $E - D$ n'est vide.

(P_2) Si a et b sont des éléments différents de E, il existe un ensemble D et un seul, appartenant à $\mathcal{D}$, tel que $a \in D$ et $b \in D$.

(P_3) Si a est un élément de E et si D est un élément de $\mathcal{D}$ tels que $a \notin D$, il existe un ensemble D' et un seul appartenant à $\mathcal{D}$, tel que $a \in D'$ et $D \cap D' = \emptyset$.

Naturellement, dans la pratique, les éléments de E s'appellent des **points** (les points de E), ceux de $\mathcal{D}$ des **droites** (les droites de E) et on peut développer d'une manière générale tout un vocabulaire analogue, inspiré de la géométrie classique, permettant d'affirmer par exemple que par deux points distincts de E il passe une droite de E et une seule (c'est l'axiome (P_2) ci-dessus) ou que par un point extérieur à une droite donnée D de E il passe une droite de E et une seule sans point commun avec D (c'est l'axiome (P_3)). Si on convient de qualifier de **parallèles** deux droites D et D' de E *confondues* ou *sans point commun*, on peut dire aussi que par un point donné de E passe une droite de E et une seule parallèle à une droite donnée.

Naturellement, comme toujours dans ce genre de présentation, il ne faut pas se laisser abuser par le vocabulaire : les éléments d'un plan d'incidence de type affine peuvent être de nature aussi variée que l'on veut et si on se hasarde à qualifier de *rectilignes* les droites de E, ce ne peut être que par pure convention. Au rebours de la tradition classique, ce sont les axiomes qui fixent les définitions et non l'inverse!

La terminologie ci-dessus est empruntée à Jacqueline LELONG-FERRAND qui définit, comme nous l'avons fait, les *plans de type affine* dans son livre "*Les fondements axiomatiques de la géométrie*" (P.U.F., 1985). Il existe aussi une définition analogue pour des plans d'incidence *de type projectif* dont nous n'aurons pas à faire usage et pour lesquels la notion de droites parallèles n'existe pas. Je me suis permis d'ajouter qu'il s'agissait de plans *d'incidence* pour souligner la nature très élémentaire des axiomes utilisés. Dans la suite, nous parlerons de *plans de type affine* sans autre précision.

Vu le caractère très général des axiomes donnés plus haut, il existe de très nombreux exemples de plans de type affine. Il en est un, assez connu, qui ne contient que quatre points A, B, C, D et six droites $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$. Un autre exemple a été donné, en 1902 par l'américain MOULTON. Il consiste à prendre les droites d'un plan ordinaire, rapporté à un repère orthonormé, et à remplacer les droites de coefficient directeur < 0 par des lignes brisées faites de deux demi-droites D_+ et D_- se joignant sur l'axe des abscisses et formant entre elles un angle défini de telle sorte que le coefficient directeur de D_- soit le double de celui de D_+.

Les autres droites restant inchangées, on vérifie sans trop de peine que l'ensemble de ces "*lignes de* MOULTON" satisfait aux axiomes des plans de type affine. On peut dire que les *droites* du plan de MOULTON ainsi obtenu subissent une sorte de réfraction sélective qui ne s'applique que dans le cas des pentes négatives!

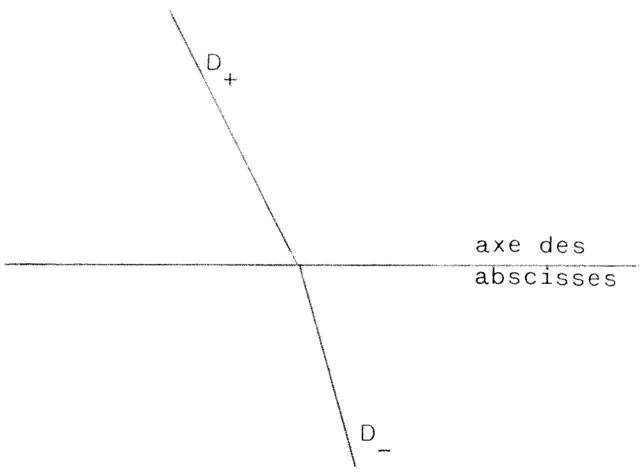


Figure 5

Avec des exemples aussi variés, on peut s'interroger alors sur ce que deviennent, dans le cadre des plans de type affine, les théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS. Nous nous proposons de voir deux modèles assez semblables, l'un construit à partir de la notion de quaternion, l'autre fondée sur la notion plus générale d'octonion, et où les théorèmes de PAPPUS et de DESARGUES subissent des distorsions aussi inattendues qu'intéressantes.

Première partie : PAPPUS, DESARGUES et le corps des quaternions

On sait qu'une introduction pédagogiquement mal conduite des nombres complexes peut entraîner chez certains adolescents fragiles, dressés à voir dans tout carré un nombre positif, des troubles psychologiques graves que le Dr MUSIL a analysés dans un ouvrages célèbre sous le vocable de *désarrois* (Verwirrungen) (*). A fortiori, c'est avec d'infinies précautions qu'on devrait parler, pour la première fois, d'un système algébrique qui viole le principe de commutativité. Comme je m'adresse ici, heureusement, à des lecteurs avertis, depuis longtemps au fait des bizarreries de leur science préférée et qui ont déjà des connaissances sur les quaternions, je me contenterai de rafraîchir leur mémoire en leur rappelant simplement que l'on sait définir en mathématiques un ensemble particulier, noté $\mathbb{H}$, muni de deux lois de composition $(x, y) \to x + y$ et $(x, y) \to xy$, contenant trois éléments privilégiés i, j et k, de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(H_1) $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{H}$.

(H_2) L'addition et la multiplication de $\mathbb{H}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication des nombres réels.

(H_3) L'addition dans $\mathbb{H}$ est commutative et associative.

(H_4) La multiplication dans $\mathbb{H}$ est associative et distributive par rapport à l'addition.

(H_5) Si a est un nombre réel et si $x \in \mathbb{H}, ax = xa$.

(*) Cf. "*Les désarrois de l'élève* TÖRLESS" (die Verwirrungen des Zöglings TÖRLESS) de Robert MUSIL, Le Seuil, 1960.

(H_6) Tout élément x de $\mathbb{H}$ peut s'écrire sous la forme d'une somme $a+bi+cj+dk$ où a, b, c, d sont des nombres réels.

(H_7) On a $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Les éléments de $\mathbb{H}$ sont appelés des **quaternions** (ou plus précisément des **quaternions d'Hamilton**). D'après le premier axiome (H_1), tout nombre réel est un quaternion.

Si x et y sont des quaternions, $x+y$ (la somme) et xy (le produit) sont encore des quaternions. Lorsque x et y sont des réels, les résultats précédents sont, d'après (H_2), les réels que l'on connaît déjà avec les mêmes notations et les mêmes noms. Il n'y a donc pas de confusion possible.

Si x est un quaternion, x^2 (le carré de x) représente naturellement le produit xx. Les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ de (H_7) montrent que les quaternions i, j, k, ne sont pas des réels.

Nous ne développerons pas en détail les conséquences bien connues des axiomes (H_3) et (H_4). Notons simplement que si x est un quaternion quelconque, on a $0 + x = x$, $1x = x$ et $0x = 0$. Pour démontrer les deux premières égalités (qui ne figurent pas dans la liste des propriétés données plus haut), il suffit d'utiliser (H_6) et d'écrire x sous la forme $a + bi + cj + dk$. La dernière relation est un peu plus délicate à établir. On commence par remarquer que $(0i)i = 0i^2 = 0(-1) = 0$ grâce à (H_7) et à (H_2), donc que $(0i + 0)i = (0i)i = 0$. Comme $(0i + 0)i$ est aussi égal à $(0i)i + 0i = 0 + 0i = 0i$, on voit finalement que $0i = 0$. Par le même raisonnement, on démontre que $0j = 0$ et $0k = 0$. Le cas général s'obtient alors sans problème. Moyennant quoi, il n'est pas difficile de voir que, muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble $\mathbb{H}$ est un anneau. En outre, de la relation $ijk = -1$ donnée dans (H_7) on tire $ijk^2 = -k$. Comme $k^2 = -1$ on trouve $ij = k$. De façon analogue, on a $jk = i$ et par suite $j^2k = ji$ donc $ji = -k$. Le lecteur vérifiera de la même manière que $jk = -kj = i$ et que $ki = -ik = \;\; j$.

Tout cela permet de développer le produit général de deux quaternions :

$$(1) \qquad (a + bi + cj + dk)(a' + b'i + c'j + d'k) = aa' - bb' - cc' - dd' + \\ (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

étant entendu que les coefficients sont tous réels.

Si on prend $a' = a, b' = -b, c' = -c$ et $d' = -d$ dans la formule précédente, on obtient

$$(2) \qquad (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

comme on le vérifie aussitôt.

On déduit de là qu'un quaternion qui s'écrit $a + bi + cj + dk$ avec a, b, c, d réels ne peut être nul que si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, donc si $a = b = c = d = 0$ puisqu'on a affaire à des nombres réels. On peut alors préciser l'énoncé de (H_6) en affirmant que tout quaternion s'écrit d'une manière et d'une seule $a+bi+cj+dk$ où a, b, c, d sont des réels. Ainsi, se donner un quaternion revient à se donner quatre nombres réels bien déterminés, rangés dans un certain ordre : c'est évidemment là l'origine du mot *quaternion*.

Une autre façon d'interpréter ce résultat est de munir le groupe additif $\mathbb{H}$ de la loi *externe* $(a,x) \to ax$ (où x est un quaternion quelconque et a un nombre réel). On voit immédiatement que l'on obtient ainsi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 4 pour lequel le système $(1,i,j,k)$ est une base.

En sens inverse, on peut se servir de cette propriété pour définir $\mathbb{H}$: il suffit de considérer l'ensemble $\mathbb{R}^4$ des quadruplets de nombres réels et de définir une addition et une multiplication en posant

$$(a,b,c,d)+(a',b',c',d')=(a+a',b+b',c+c',d+d')$$

et

$$\begin{aligned}(a,b,c,d)\times(a',b',c',d')=(&aa'-bb'-cc'-dd',ab'+ba'+cd'-dc',\\ &ac'+ca'+db'-bd',ad'+da'+bc'-cb').\end{aligned}$$

Quitte alors à identifier $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{R}^4$ en confondant tout réel a avec le quadruplet $(a,0,0,0)$, on vérifie aisément que l'on a toutes les propriétés (H_1) à (H_7) énumérées plus haut. Il faut naturellement poser $i=(0,1,0,0), j=(0,0,1,0)$ et $k=(0,0,0,1)$.

Mais ce qui est le plus important, c'est que $\mathbb{H}$ est un exemple de corps non commutatif, le premier à avoir été découvert, et ce par W.R. HAMILTON le 16 octobre 1843 (la précision est de sir William Rowan soi-même!).

La non commutativité de la multiplication résulte de l'unicité de l'écriture $a+bi+cj+dk$ car, de ce fait, un quaternion $x=a+bi+cj+dk$ ne peut être égal à son opposé $-x=-a-bi-cj-dk$ que si x est nul. On a en particulier $i\neq -i, j\neq -j$ et $k\neq -k$, ce qui veut dire aussi, d'après ce qu'on a vu, que $jk\neq kj, ki\neq ik$ et $ij\neq ji$.

Pour démontrer que malgré cela $\mathbb{H}$ est un corps, il est commode d'associer successivement à tout quaternion $x=a+bi+cj+dk$ le **quaternion conjugué** $\bar{x}$, égal par définition à $a-bi-cj-dk$, le **module** (ou **valeur absolue**) $|x|$ égal à $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ et, si $x\neq 0$, l'**inverse** x^{-1} égal par définition à $(a-bi-cj-dk)(a^2+b^2+c^2+d^2)^{-1}$. On a alors effectivement la relation $xx^{-1}=x^{-1}x=1$ si $x\neq 0$. On vérifie en outre que

$$(3)\qquad x\overline{x}=\overline{x}x=|x|^2 \quad\text{et}\quad \overline{\overline{x}}=x \text{ si } x\in\mathbb{H}$$

$$(4)\qquad \overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y} \quad\text{et}\quad \overline{xy}=\overline{y}\,\overline{x} \text{ si } x,y\in\mathbb{H}$$

$$(5)\qquad x=\overline{x}\Longleftrightarrow x\in\mathbb{R}$$

Signalons qu'un quaternion $x=a+bi+cj+dk$ est dit **pur** si $a=0$. Il revient au même de dire que $\bar{x}=-x$. Il en est ainsi de i, de j et de k. Tout quaternion x s'écrit alors d'une manière et d'une seule sous la forme $a+y$ où a est un réel et y un quaternion pur. Cela permet de parler de la **partie réelle** et de la **partie pure** de n'importe quel quaternion.

Notons pour finir que l'absence de commutativité peut être précisée en montrant qu'un quaternion q ne peut permuter avec tous les autres que si q est un réel. Comme la réciproque est vraie (axiome (H_5)), on résume cela en disant que $\mathbb{R}$ est le **centre** du corps $\mathbb{H}$.

Mais il est temps de passer de l'algèbre à la géométrie en montrant que les quaternions peuvent servir à définir un modèle de plan de type affine que l'on peut présenter en convenant d'associer à tout triplet (a, b, c) de quaternions l'ensemble, que l'on notera $D(a, b, c)$, des couples (x, y) de quaternions tels que $ax+by+c = 0$. Ainsi $D(a, b, c)$ est-il toujours un sous-ensemble du produit cartésien $\mathbb{H} \times \mathbb{H} = \mathbb{H}^2$.

Si $a = b = c = 0$, on a évidemment $D(a, b, c) = \mathbb{H}^2$, alors que si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, on a $D(a, b, c) = \emptyset$. Ce ne sont pas là, naturellement, les cas les plus intéressants.

Théorème 1.— Si on écarte le cas des ensembles $D(0, 0, c)$ où $c \in \mathbb{H}$, les ensembles $D(a, b, c)$ qui restent forment un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de $\mathbb{H}^2$ satisfaisant aux axiomes (P_1), (P_2), (P_3) de l'introduction. Autrement dit, muni de la structure définie par l'ensemble $\mathcal{D}$ en question, $\mathbb{H}^2$ est un plan de type affine.

Le premier résultat qui nous sera utile pour la démonstration peut être énoncé sous forme de lemme.

Lemme 1.— Quels que soient les quaternions a, b, c, on a $D(a, b, c) = D(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ pour tout $\lambda \neq 0$ dans $\mathbb{H}$.

Par définition, un couple (x, y) de $\mathbb{H}^2$ appartient à $D(a, b, c)$ si et seulement si $ax + by + c = 0$. Si $\lambda \neq 0$, cette relation équivaut à $\lambda(ax + by + c) = 0$ (en utilisant l'inverse λ^{-1} de λ pour justifer l'implication réciproque). Comme $\lambda(ax + by + c) = \lambda(ax) + \lambda(by) + \lambda c = (\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)$, le résultat annoncé est établi.

Par définition, les éléments de $\mathcal{D}$ sont les sous-ensembles de $\mathbb{H}^2$ de la forme $D(a, b, c)$ où a, b, c sont des quaternions tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Il nous sera alors commode dans la suite d'appeler $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}''$) l'ensemble des parties de $\mathbb{H}^2$ de la forme $D(a, b, c)$ où $b \neq 0$ (resp. $a \neq 0$). On a ainsi par conséquent $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$.

Enfin, si a et b sont des quaternions quelconques, on notera $\Delta'(a, b)$ (resp. $\Delta''(a, b)$) l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $y = ax + b$ (resp. $x = ay + b$).

Lemme 2.— Tout ensemble de la forme $\Delta'(a, b)$ appartient à $\mathcal{D}'$. Réciproquement tout ensemble qui appartient à $\mathcal{D}'$ est de la forme $\Delta'(a, b)$. On a des résultats analogues pour $\Delta''(a, b)$ et $\mathcal{D}''$.

Par définition, l'ensemble $\Delta'(a, b)$ est constitué des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $y = ax + b$. Comme cette relation s'écrit $ax - y + b = 0$, on voit que $\Delta'(a, b) = D(a, -1, b)$, ce qui montre que $\Delta'(a, b)$ appartient à $\mathcal{D}'$. Inversement, un ensemble qui appartient à $\mathcal{D}'$ est de la forme $D(a, b, c)$ avec $b \neq 0$. D'après le lemme 1, il s'écrit aussi $D(-b^{-1}a, -1, -b^{-1}c)$ et on vérifie facilement que ce dernier ensemble n'est autre que $\Delta'(-b^{-1}a, -b^{-1}c)$. On raisonne de même pour la dernière partie du lemme.

Passons alors à la vérification des axiomes (P_1), (P_2) et (P_3). Il est bien clair tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{D}$ n'est pas vide car on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ où ni $\mathcal{D}'$ ni $\mathcal{D}''$ ne sont vides : le premier contient $D(0,1,0)$, le second $D(1,0,0)$.

Pour démontrer ensuite que tout ensemble $D \in \mathcal{D}$ est différent à la fois de $\mathbb{H}^2$ et de $\emptyset$, le mieux est de distinguer deux cas selon que $D \in \mathcal{D}'$ ou que $D \in \mathcal{D}''$. Dans le premier cas, d'après le lemme 2, D est de la forme $\Delta'(a,b)$, de sorte que $(x,y) \in D$ si et seulement si $y = ax + b$. Si on choisit alors $x = 0$ et $y = b$, on obtient un élément de D et si on choisit $x = 0$ et $y = b'$, avec $b' \neq b$, on obtient un élément de $\mathbb{H}^2$ qui n'appartient pas à D. D'où le résultat annoncé dans ce cas. On raisonne de même si $D \in \mathcal{D}''$.

Considérons maintenant deux éléments A et B différents dans $\mathbb{H}^2$. Notons-les (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Comme la condition $A \neq B$ signifie que l'on a $x_A \neq x_B$ ou $y_A \neq y_B$, on distingera deux cas.

Supposons d'abord $x_A \neq x_B$. Alors, s'il existe un ensemble $D \in \mathcal{D}$ contenant A et B, cet ensemble appartient nécessairement à $\mathcal{D}'$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $D \notin \mathcal{D}'$. Alors D appartient à $\mathcal{D}''$, ce qui veut dire que D est de la forme $\Delta''(a,b)$, autrement dit que $(x,y) \in D$ si et seulement si $x = ay + b$. Si a n'est pas nul, cette relation équivaut à $y = a^{-1}x - a^{-1}b$. Cela montrerait que $D = \Delta'(a^{-1}, -a^{-1}b)$, donc que $D \in \mathcal{D}'$, contrairement à l'hypothèse. Si a est nul, on a $x = b$ pour tout couple $(x,y) \in D$. Cela impliquerait en particulier que $x_A = x_B = b$, contrairement aux hypothèses. D'où la contradiction recherchée.

Ainsi, tout ensemble $D \in \mathcal{D}$ qui contient A et B est nécessairement de la forme $\Delta'(a,b)$ où a et b sont deux quaternions. On a donc simultanément

$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

ce qui donne $a(x_B - x_A) = y_B - y_A$, donc $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - ax_A$ avec cette valeur de a. Cela démontre l'unicité de l'ensemble D.

Considérons alors l'ensemble $D = \Delta'(a,b)$ avec $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - ax_A$. Il est évident que A appartient à D à cause du choix de b. Quant à B, son appartenance à D résulte de ce que $ax_B + b = ax_B + y_A - ax_A = a(x_B - x_A) + y_A = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}(x_B - x_A) + y_A = y_B - y_A + y_A) = y_B$. On raisonnerait de même si on avait $y_A \neq y_B$ mais en démontrant au préalable que tout ensemble $D \in \mathcal{D}$ contenant A et B appartient nécessairement à $\mathcal{D}''$.

Reste à vérifier l'axiome (P_3). Pour cela, considérons un ensemble $D \in \mathcal{D}$ et un élément $A = (x_A, y_A)$ de $\mathbb{H}^2$ n'appartenant pas à D. Il s'agit de rechercher un ensemble $D' \in \mathcal{D}$ contenant A et sans élément commun avec D.

Supposons d'abord que D appartienne à $\mathcal{D}'$, donc que D est de la forme $\Delta'(a,b)$ et montrons que l'ensemble D' appartient aussi nécessairement à $\mathcal{D}'$. Dans le cas contraire, D' serait de la forme $\Delta''(c,d)$ avec $c, d \in \mathbb{H}$. On aurait en outre $c = 0$ car si cela n'était pas, la relation $x = cy + d$ (qui exprime qu'un couple $(x,y) \in \mathbb{H}^2$

appartient à D') serait équivalente à $y = c^{-1}x - c^{-1}d$, de sorte que l'on aurait $D' = \Delta'(c^{-1}, -c^{-1}d)$, contrairement au fait que $D' \notin \mathcal{D}'$. On voit ainsi que D' serait simplement l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $x = d$. Dans ces conditions, l'ensemble $D \cap D'$ ne peut être vide contrairement à l'hypothèse car si on pose $x = d$ et $y = ad + b$ on obtient un couple (x, y) commun à D et à D'. D'où la contradiction recherchée.

Ainsi, si $D \in \mathcal{D}'$, l'ensemble D' cherché appartient aussi à $\mathcal{D}'$. On a donc $D = \Delta'(a, b)$ et $D' = \Delta'(c, d)$. Dans ces conditions, on a nécessairement $c = a$ car dans le cas contraire le système

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

aurait une solution unique, donnée par $x = (c - a)^{-1}(b - d)$ et $y = a(c - a)^{-1}(b - d) + b$, ce qui est contraire au fait que $D \cap D' = \emptyset$.

On n'a donc pas le choix pour c et d : on a nécessairement $c = a$ et $d = y_A - cx_A = y_A - ax_A$. D'où l'unicité. Réciproquement, si on pose $D' = \Delta'(c, d)$ avec $c = a$ et $d = y_A - ax_A$, il est clair que A appartient à D'. En outre, $D \cap D' = \emptyset$ car un couple (x, y) commun à ces deux ensembles devrait vérifier à la fois

$$y = ax + b \quad \text{et} \quad y = ax + y_A - ax_A.$$

On aurait donc $y_A = ax_A + b$, ce qui signifierait que A appartient à D, contrairement à l'hypothèse. D'où le résultat. Comme on peut raisonner de la même manière dans le cas où $D \in \mathcal{D}''$, la démonstration du théorème peut être considérée comme achevée.

Si on examine en détail cette démonstration, on remarque que les seules propriétés des quaternions utilisées sont les règles de calcul qui font que $\mathbb{H}$ est un corps. On pourrait donc étendre considérablement le th. 1 en démontrant que pour tout corps K, commutatif ou non, l'ensemble $K^2 = K \times K$ est un plan de type affine.

On peut appliquer désormais le vocabulaire de la géométrie plane à l'ensemble $\mathbb{H}^2$ (qu'on appellera de ce fait le **plan de Hamilton**) et considérer en particulier qu'un couple (x, y) de deux quaternions est un point. On dira naturellement que x est l'**abscisse** et y l'**ordonnée** de ce point, les deux constituant les **coordonnées** du point.

Si a, b, c sont des quaternions tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite : on dira que c'est la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Par définition, toute droite du plan $\mathbb{H}^2$ admet une équation de ce type.

Comme on l'a vu au cours de la démonstration du th. 1, certaines droites de $\mathbb{H}^2$ peuvent être définies par une équation de la forme $y = ax + b$ (resp. de la forme $x = ay + c$) qu'on appellera une **équation réduite de première espèce** (resp. de

seconde espèce). Toute droite admet donc une équation réduite soit de première espèce soit de seconde espèce.

On notera en particulier que l'ensemble $\mathbb{H} \times \{0\}$ (resp. $\{0\} \times \mathbb{H}$) est une droite du plan de HAMILTON, admettant une équation réduite de première espèce (resp. de seconde espèce), savoir $y = 0$ (resp. $x = 0$). On dira que cette droite est l'**axe des abscisses** (resp. l'**axe des ordonnées**). Plus généralement, on dira qu'une droite de $\mathbb{H}^2$ est **horizontale** (resp. **verticale**) si elle est parallèle à l'axe des abscisses (resp. à l'axe des ordonnées).

Proposition 1.— Pour qu'une droite de $\mathbb{H}^2$ admette une équation réduite de première espèce (resp. de seconde espèce) il faut et il suffit que cette droite ne soit pas verticale (resp. horizontale).

Supposons qu'une droite D admette une équation de la forme $y = ax + b$. Alors D ne peut avoir qu'un point commun avec l'axe des ordonnées, à savoir $(0, b)$. Cela veut dire que D est sécante à l'axe des ordonnées, donc non verticale.

Supposons que D ne soit pas verticale. Si elle n'admettait pas d'équation de la forme $y = ax + b$, elle admettrait une équation de la forme $x = ay + b$. Dans cette équation, le quaternion a devrait être nul sinon on pourrait écrire, d'une manière équivalente, $y = a^{-1}x - a^{-1}b$, ce qui est impossible par hypothèse. Par suite, la droite D serait constituée de tous les couples $(x, y) \in \mathbb{H}^2$ avec $y = b$. Si $b = 0$, D serait confondue avec l'axe des ordonnées. Si $b \neq 0$, D n'aurait aucun point commun avec cet axe. Dans tous les cas, D serait verticale, ce qui n'est pas. On raisonne évidemment de même pour la seconde partie du théorème.

Proposition 2.— Si une droite D de $\mathbb{H}^2$ admet une équation réduite de première espèce (resp. de seconde espèce) celle-ci est unique.

Supposons que D admette deux équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Il s'agit de montrer que $a = a'$ et $b = b'$. Comme le point $(0, b)$ appartient à D d'après la première équation, on a $b' = b$ d'après la seconde. Comme le point $(1, a + b)$ appartient aussi à D d'après la première équation, on a de même $a' + b' = a + b$. D'où $a' = a$ puisque $b' = b$. On raisonne de même pour les équations de seconde espèce.

On accorde souvent une importance particulière aux droites admettant une équation de première espèce. Si une droite D admet une équation de ce genre $y = ax + b$, le quaternion a (unique d'après la prop. 2) sera appelé le **coefficient directeur** de D. Si D n'admet pas d'équation réduite de première espèce (autrement dit si D est verticale), on convient d'appeler coefficient directeur de D un symbole ∞ qui a pour seule particularité de ne pas être un quaternion. Cette terminologie s'explique par le résultat suivant.

Proposition 3.— Pour que deux droites du plan de HAMILTON $\mathbb{H}^2$ soient parallèles il faut et il suffit qu'elles aient même coefficient directeur.

Supposons d'abord que D et D' soient deux droites de même coefficient directeur

a. Si $a = \infty$, D et D' sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées, donc parallèles entre elles.

Si a est un quaternion, alors les équations réduites de première espèce de D et de D' peuvent s'écrire respectivement $y = ax + b$ et $y = ax + b'$ où b et b' sont des quaternions. Si $b = b'$, D et D' sont confondues. Si $b \neq b'$, D et D' n'ont pas de point commun car si (x_0, y_0) en était un, on aurait à la fois $y_0 = ax_0 + b$ et $y_0 = ax_0 + b'$, donc $b = b'$. Bref, dans tous les cas, D et D' sont parallèles.

Supposons maintenant D et D' parallèles et appelons a et a' leurs coefficients directeurs respectifs. Si D est parallèle à l'axe des ordonnées, il en est de même de D', et l'on a $a = \infty$ et $a' = \infty$, donc $a = a'$. Si D est sécante à l'axe des ordonnées, il en est de même de D', de sorte que D et D' admettent des équations réduites $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ avec a et a' dans $\mathbb{H}$.

Si $D = D'$, il est clair que $a = a'$ et $b = b'$. Si D et D' sont distinctes, elles n'ont pas de point commun, ce qui veut dire que le système $y = ax+b$ et $y = a'x+b'$ n'a pas de solution. Or si $a \neq a'$, sa résolution conduit immédiatement à la solution $x = (a - a')^{-1}(b' - b)$ et $y = a(a - a')^{-1}(b' - b) + b$; d'où encore $a = a'$. CQFD.

Proposition 4.— Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{H}^2$. Si $x_A = x_B$, le coefficient directeur de la droite (AB) est ∞; si $x_A \neq x_B$, c'est un quaternion égal à $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$.

Si $x_A = x_B$, la droite (AB) est confondue avec la droite d'équation $x = x_A$ comme on le vérifie aussitôt. Comme cette dernière est parallèle à l'axe des ordonnées, il en est de même de (AB) dont le coefficient directeur est de ce fait ∞.

Si $x_A \neq x_B$, l'équation réduite de (AB) est $y = ax + b$ avec $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - ax_A$ comme on le vérifie sans peine (et comme on l'a déjà vu, en fait, dans la démonstration du th. 1). D'où le résultat.

Ces résultats étant acquis, nous allons pouvoir étudier la validité des théorèmes de Desargues et de Pappus dans le plan $\mathbb{H}^2$. Pour le théorème de Pappus, la question va être vité réglée par un contre-exemple. Posons en effet $A = (1, 0), B = (i, 0), C = (j, 0), A' = (0, 1), B' = (0, -i)$ et $C' = (0, -j)$, ce qui donne trois points A, B, C sur l'axe des abscisses et trois points A', B', C' sur l'axe des ordonnées. Montrons par le calcul, en utilisant la prop. 4, que $A'B \parallel AB'$ et $A'C \parallel AC'$ alors que $B'C \nparallel BC'$, ce qui contredira les résultats illustrés par la figure 4 de l'introduction.

On a en effet successivement pour les coefficients directeurs

$$\begin{array}{rclcl}
(y_B - y_{A'})(x_B - x_{A'})^{-1} &=& (-1)(i)^{-1} &=& (-1)(-i) = i \\
(y_{B'} - y_A)(x_{B'} - x_A)^{-1} &=& (-i)(-1)^{-1} &=& (-i)(-1) = i \\
(y_C - y_{A'})(x_C - x_{A'})^{-1} &=& (-1)(j)^{-1} &=& (-1)(-j) = j \\
(y_{C'} - y_A)(x_{C'} - x_A)^{-1} &=& (-j)(-1)^{-1} &=& (-j)(-1) = j \\
(y_C - y_{B'}(x_C - x_{B'})^{-1} &=& i(j)^{-1} &=& -ij \quad = -k \\
(y_{C'} - y_B)(x_{C'} - x_B)^{-1} &=& (-j)(-i)^{-1} &=& -ji \quad = +k.
\end{array}$$

On peut donc énoncer le résultat suivant.

Théorème 2.— Dans le plan de HAMILTON $\mathbb{H}^2$, le théorème de PAPPUS n'est pas valable.

Les calculs précédents montrent que le mal vient essentiellement du fait que $ij \neq ji$. Plus généralement, comme les propositions 1 à 4 sont encore valables en remplaçant partout $\mathbb{H}$ par un corps quelconque K, on peut penser que l'on a l'équivalent du th. 2 lorsque K est un corps non commutatif. Prenons en effet des éléments x, y, x', y' non nuls dans K et posons $A = (1,0), B = (x,0), C = (y,0), A' = (0,1), B' = (0,x'), C' = (0,y')$, de sorte que A, B, C (resp. A', B', C') sont des points de l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) de K^2. Alors les coefficients directeurs de $A'B, AB', A'C, AC', B'C$ et BC' sont respectivement $-x^{-1}, -x', -y^{-1}, -y', -x'y^{-1}$ et $-y'x^{-1}$. Si on veut que $A'B \parallel AB'$ et $A'C \parallel AC'$, il est nécessaire de prendre $x' = x^{-1}$ et $y' = y^{-1}$. Dans ces conditions, pour que $B'C \parallel BC'$ il faut et il suffit que $-x^{-1}y^{-1} = -y^{-1}x^{-1}$. Cela revient à avoir $xy = yx$, ce qui n'est pas réalisé si x et y sont deux éléments non permutables de ce corps.

Inversement, on peut montrer que lorsque K est un corps commutatif le théorème de PAPPUS est valable dans le plan K^2 construit sur ce corps (cf. par exemple le livre de J. LELONG-FERRAND déjà cité).

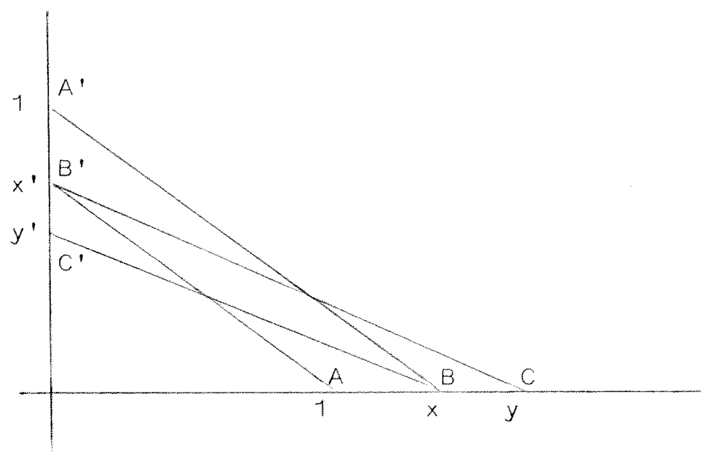


Figure 6

En ce qui concerne le théorème de DESARGUES, sa validité repose en définitive sur la possibilité de définir, dans le plan considéré, des *translations* et des *homothéties* convenables (cf. fig. 2 de l'introduction). Cela peut se faire par voie purement algébrique.

Nous dirons qu'une application t de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même est une **translation algébrique** (ou simplement une translation) s'il existe des quaternions a et b tels que $t(x, y) = (x + a, y + b)$ quel que soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2$. De façon précise, l'application $(x, y) \to (x + a, y + b)$ ainsi définie sera appelée la translation d'**opérateur** (a, b) dans $\mathbb{H}^2$.

On vérifie facilement que la translation d'opérateur (a, b) est une bijection dont la bijection réciproque est la translation d'opérateur $(-a, -b)$ et que si on compose la translation d'opérateur (a, b) avec la translation d'opérateur (a', b'), on obtient la translation d'opérateur $(a + a', b + b')$. On peut dire, en résumé, que l'inverse d'une translation est une translation et qu'il en est de même du produit de deux translations quelconques. En fait, les résultats qui nous seront utiles sont les deux suivants :

Proposition 5.— Si A et B sont deux points de $\mathbb{H}^2$, il existe une translation t de $\mathbb{H}^2$ et une seule qui transforme A en B.

Si on pose $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, il est facile de voir que la translation d'opérateur $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ transforme effectivement A et B et que c'est la seule à avoir cette propriété.

Proposition 6.— Soient A, B deux points de $\mathbb{H}^2$, et A', B' leurs images respectives par une même translation t de $\mathbb{H}^2$.

Si $A \neq B$, alors $A' \neq B'$ et les droites AB et $A'B'$ sont parallèles.

Si $A \neq A'$, alors $B \neq B'$ et les droites AA' et BB' sont parallèles.

Posons $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), A' = (x_{A'}, y_{A'}), B' = (x_{B'}, y_{B'})$, et supposons que l'on ait $t(x, y) = (x + a, y + b)$ quels que soient x, y dans $\mathbb{H}$. Si $A \neq B$, il est évident que $A' \neq B'$ puisque t est une bijection. Pour voir que $AB \parallel A'B'$ déterminons les coefficients directeurs de ces droites. Si $x_A = x_B$, on a $x_{A'} = x_{B'}$ puisque $x_{A'} = x_A + a$ et $x_{B'} = x_B + a$; dans ce cas, les coefficients directeurs sont égaux à ∞. Si $x_A \neq x_B$, on a aussi $x_{A'} \neq x_{B'}$ pour la même raison. En outre, les deux coefficients directeurs sont $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $(y_{B'} - y_{A'})(x_{B'} - x_{A'})^{-1} = (y_B + b - y_A - b)(x_B + a - x_A - a)^{-1} = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$. D'où le résultat cherché.

Si $A \neq A'$, alors $B \neq B'$ car l'égalité $B = B'$ signifierait que $x_B = x_{B'}$ et $y_B = y_{B'}$, donc que $a = b = 0$ puisque $x_{B'} = x_B + a$ et $y_{B'} = y_B + b$, ce qui impliquerait $A' = A$.

Pour voir que $AA' \parallel BB'$, calculons encore les coefficients directeurs. Si $x_A = x_{A'}$, alors $x_B = x_{B'}$ car le quaternion a est nécessairement nul. Les coefficients directeurs sont donc tous deux égaux à ∞. Si $x_A \neq x_{A'}$, alors $x_B \neq x_{B'}$, car a ne peut être nul. Les deux coefficients directeurs sont alors $(y_{A'} - y_A)(x_{A'} - x_A)^{-1} =$

ba^{-1} et $(y_{B'}-y_B)(x_{B'}-x_B)^{-1} = ba^{-1}$. D'où le deuxième résultat et la proposition.

Corollaire 1.— Si A, B, C, D sont des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et si A', B', C', D' sont leurs images par la translation t, alors la relation $AB \parallel CD$ entraîne la relation $A'B' \parallel C'D'$.

Cela résulte de la première partie de la proposition précédente et de la transitivité de la relation de parallélisme.

Corollaire 2.— Si A, B, C dont des points alignés (resp. non alignés) de $\mathbb{H}^2$, et si A', B', C' sont leurs images par t, alors A', B', C' sont alignés (resp. non alignés).

Les résultats étant évidents si deux des trois points sont confondus, on peut supposer A, B, C deux à deux distincts. Dans ce cas-là, dire que A, B, C sont alignés (resp. non alignés) revient à dire que les droites AB et AC sont parallèles (resp. sécantes). On a des résultats analogues pour A', B', C'. Il suffit donc d'appliquer le cor. 1 soit en utilisant la translation t, soit en utilisant la translation réciproque.

Nous allons pouvoir appliquer les résultats précédents pour démontrer une première moitié du théorème de DESARGUES, celle où l'on suppose que l'on a six points répartis sur trois droites parallèles. De façon précise, considérons trois droites distinctes parallèles D_A, D_B, D_C, puis deux points A et A' sur D_A, deux points B et B' sur D_B, et deux points C et C' sur D_C, placés de façon que $AB \parallel A'B'$ et $BC \parallel B'C'$. Il s'agit de montrer que $AC \parallel A'C'$.

Si $A = A'$, il est facile de voir que l'on a successivement $B = B'$ et $C = C'$, de sorte que la conclusion est évidente dans ce cas-là. On peut donc supposer $A \neq A'$. Appelons alors t l'unique translation de $\mathbb{H}^2$ qui transforme A et A' (prop. 5). Alors t transforme le point B en un point B_1, pour lequel on a, d'après la prop. 6, $AA' \parallel BB_1$ et $AB \parallel A'B_1$. La première propriété montre que B_1 se trouve sur la droite D_B et la seconde que B_1 se trouve sur la parallèle à AB passant par A' ; B_1 est donc à l'intersection des deux droites.

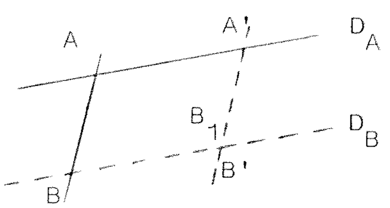


Figure 7

Comme $AB \parallel A'B'$, B' a exactement la même propriété. On a donc $B_1 = B'$. Cela veut dire que la translation t transforme B en B'. Par le même raisonnement, mais en utilisant le fait que $BC \parallel B'C'$, on voit que t transforme aussi C en C'. Dès lors, le parallélisme de AC et de $A'C'$ découle de la prop. 6. Pour démontrer la seconde moitié du théorème de DESARGUES (celle où les six points sont répartis sur trois droites concourantes) nous aurons recours aux *homothéties* du plan $\mathbb{H}^2$.

Nous dirons qu'une application h de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même est une **homothétie algébrique** (ou simplement une homothétie) s'il existe un quaternion a non nul tel que $h(x, y) = (xa, ya)$ quel que soit $(x, y) \in \mathbb{H}^2$. De façon plus précise, l'application $(x, y) \to (xa, ya)$ ainsi définie sera appelée l'homothétie **de rapport** a dans $\mathbb{H}^2$. On notera que le *rapport* a est placé à droite. On vérifie aussitôt que l'homothétie de rapport a est une bijection de $\mathbb{H}^2$ dans lui-même dont la bijection réciproque est l'homothétie de rapport a^{-1} et que si on compose, dans cet ordre, l'homothétie de rapport a avec l'homothétie de rapport b (b quaternion non nul), on obtient l'homothétie de rapport ab.

L'inverse d'une homothétie est donc une homothétie et le produit de deux homothéties une troisième homothétie. On aura surtout besoin des trois résultats suivants.

Proposition 7.— Si h est une homothétie de $\mathbb{H}^2$ et si A est un point quelconque, les points $0 = (0, 0), A$ et $A' = h(A)$ sont alignés.

Ce résultat est évident si $A = 0$.

Si $A \neq 0$, alors $A' \neq 0$ car si $A = (x, y)$ avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, on a $A' = (xa, ya)$ avec $xa \neq 0$ ou $ya \neq 0$. Pour démontrer alors que $0, A$ et A' sont alignés, il suffit de montrer que les droites OA et OA' sont parallèles, ce qui se fait aisément avec les coefficients directeurs. Celui de OA est yx^{-1} si $x \neq 0$ ou ∞ si $x = 0$; celui de OA' est $(ya)(xa)^{-1} = yaa^{-1}x^{-1}$ si $x \neq 0$, ∞ sinon. D'où le résultat.

Proposition 8.— Si A et B sont deux points du plan $\mathbb{H}^2$, distincts de 0 et alignés avec 0, il existe une homothétie et une seule qui transforme A en B.

Posons $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$. Comme $0, A$ et B sont alignés, les droites OA et OB sont confondues. Elles ont donc le même coefficient directeur m. Si $m = \infty$, on a $x_A = x_B = 0$. Par suite, $y_A \neq 0$ et $y_B \neq O$ (car $O \neq A, B$) et si on pose $a = y_A^{-1} y_B$, on obtient un quaternion non nul pour lequel on a $y_B = y_A a$. Comme la relation $x_B = x_A a$ est trivialement vérifiée, on voit que B est l'image de A par l'homothétie de rapport a. Si $m \neq \infty$, c'est un quaternion, égal à la fois à $y_A x_A^{-1}$ et à $y_B x_B^{-1}$. De l'égalité $y_A x_A^{-1} = y_B x_B^{-1}$ qui en résulte, on déduit $y_B = (y_A x_A^{-1}) x_B = y_A (x_A^{-1} x_B)$. Comme $x_B = x_A (x_A^{-1} x_B)$, on voit que $y_B = y_A a$ et $x_B = x_A a$ avec $a = x_A^{-1} x_B$, ce qui veut dire que B est l'image de A par l'homothétie de rapport a.

Pour justifier l'unicité, considérons deux homothéties h et k telles que $h(A) = B$ et $k(A) = B$. Cela veut dire qu'il existe des quaternions a et b tels que $x_B = x_A a, y_B = y_A a, x_B = x_A b$ et $y_B = y_A b$. On a donc $x_A a = x_A b$ et $y_A a = y_A b$.

Comme l'un des éléments x_A, y_A au moins n'est pas nul (car $0 \neq A$), on en déduit que $a = b$, donc que $h = k$. CQFD.

Proposition 9.— Soient A, B deux points de $\mathbb{H}^2$ et A', B' leurs images respectives par une même homothétie h. Alors si $A \neq B$, on a $A' \neq B'$ et $AB \parallel A'B'$.

Il est évident que la relation $A \neq B$ implique $A' \neq B'$ puisque h est bijective.

Pour vérifier que $AB \parallel A'B'$, il suffit de calculer les coefficients directeurs de ces droites. Posons pour cela $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), A' = (x_{A'}, y_{A'})$ et $B' = (x_{B'}, y_{B'})$. Par hypothèse, il existe un quaternion $a \neq 0$ tel que $x_{A'} = x_A.a$, $y_{A'} = y_{A'}.a$, $x_{B'} = x_B.a$ et $y_{B'} = y_B.a$.

Si $x_A = x_B$, on a alors immédiatement $x_{A'} = x_{B'}$ et par suite, dans ce cas, les coefficients directeurs cherchés sont égaux à ∞. Si $x_A \neq x_B$, alors $x_{A'} = x_A.a$ est naturellement différent de $x_{B'} = x_B.a$ et l'on a $(y_{B'} - y_{A'})(x_{B'} - x_{A'})^{-1} = (y_B.a - y_A.a)(x_B.a - x_A.a)^{-1} = [(y_B - y_A)a][(x_B - x_A)a]^{-1} = (y_B - y_A)aa^{-1}(x_B - x_A)^{-1} = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$. CQFD.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la seconde moitié du théorème de DESARGUES. Considérons pour ce faire trois droites (distinctes) concourantes D_A, D_B, D_C, deux points A et A' sur D_A, deux points B et B' sur D_B, deux points C et C' sur D_C, tous distincts du point de concours, tels que $AB \parallel A'B'$ et $BC \parallel B'C'$. Il s'agit de montrer que $AC \parallel A'C'$. Supposons d'abord que le point de concours des trois droites soit l'origine $O = (0,0)$ de $\mathbb{H}^2$. Alors les points O, A et A' sont alignés. D'après la prop. 8, il existe une homothétie h qui transforme A en A'. Alors h transforme le point B en un point B_1 qui, aligné avec O et B (prop. 7), est nécessairement sur $OB = D_B$, et pour lequel on a $AB \parallel A'B_1$ (prop. 9). Cela montre que B_1 est à l'intersection de D_B et de la parallèle à AB passant par A'.

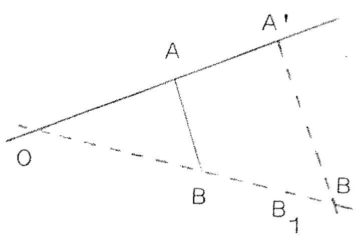


Figure 8

Comme B' a la même propriété (puisque $A'B' \parallel AB$), on a nécessairement $B_1 = B'$. Ainsi, l'homothétie h transforme B et B'. Par le même raisonnement, en utilisant le fait que $BC \parallel B'C'$, on voit que h transforme aussi C en C'. Dès lors, le parallélisme cherché découle de la prop. 9. Reste à examiner le cas où les trois droites D_A, D_B, D_C sont concourantes en un point I quelconque. Appelons t la translation qui transforme I en O (prop. 5). Alors t transforme les six points A, B, C, A', B', C' en six points que l'on notera $A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$. Comme t *conserve le parallélisme* (cor. 1 de la prop. 6), on a $A_1B_1 \parallel A'_1B'_1$ et $B_1C_1 \parallel B'_1C'_1$.

Comme t *conserve l'alignement et le non-alignement* (cor. 2 de la prop. 6), on voit aussi que les droites $A_1A'_1, B_1B'_1$ et CC'_1 sont concourantes en O. Par suite, d'après la démonstration précédente, on a $A_1C_1 \parallel A'C'_1$. Comme $AC \parallel A_1C_1$ et $A'C' \parallel A'_1C'_1$, on en déduit que $AC \parallel A'C'$. CQFD.

Résumons :

Théorème 3.— Dans le plan de HAMILTON $\mathbb{H}^2$, le théorème de DESARGUES est valable.

On exprime souvent ce résultat en disant que $\mathbb{H}^2$ est un **plan arguésien** (l'adjectif *arguésien* étant dérivé du nom de DESARGUES comme *cartésien* l'est de celui de DESCARTES). Ainsi, contrairement à ce qui a lieu pour le théorème de PAPPUS, l'absence de commutativité pour la multiplication n'influe pas sur la validité du théorème de DESARGUES. Pour mettre ce dernier en défaut, il va nous falloir modifier les règles de calcul sur les quaternions, quitter les corps qui nous sont familiers et ne pas hésiter à abandonner l'associativité ...

à suivre ...

NOUVELLE PARUTION AUX EDITIONS BORDAS

en vente en librairie ($\simeq$ 59 F)

Documents rassemblés et présentés par Jean LEFORT

MATHEMATIQUES DE COMPETITION

2de/1re/Terminale

Sélection des Rallyes mathématiques d'Alsace

JOKERS-JEUX

Bordas

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage s'adresse à un large public : élèves des classes de lycée, bien sûr, mais aussi étudiants, professeurs, ingénieurs en activité ou à la retraite, bref à tous ceux qui aiment les mathématiques comme d'autres les problèmes d'échecs ou de mots croisés. Pour satisfaire leur passion, cet ouvrage rassemble de nombreux problèmes originaux représentant la totalité des sujets des rallyes **mathématiques d'Alsace**, de 1981 à 1989.

Ces problèmes sont classés par niveau : seconde, première, terminale. Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'entraînement (chapitre 1 : Échauffement, chapitre 2 : Tous niveaux). En regard de chacun des énoncés, donnés dans l'ordre chronologique, une, deux ou trois étoiles signalent la difficulté (facile pour une étoile, difficile pour trois). La deuxième partie de chaque chapitre développe les solutions de chaque problème proposé. En fin d'ouvrage, la liste des mots-clés de l'index permet au lecteur de retrouver très rapidement, même longtemps après l'avoir lu, un problème qui l'a particulièrement intéressé ou dont le titre l'a accroché.

Nous souhaitons que chacun puisse, grâce à cet ouvrage exercer sa perspicacité, son imagination et satisfaire son goût de la recherche, en un mot, faire des mathématiques...

I.R.E.M. de STRASBOURG

L'I.R.E.M. de STRASBOURG

Le rallye mathématique d'Alsace est l'ancêtre de tous les rallyes, olympiades ou championnats qui ont actuellement cours en France. C'est à Georges Glaeser que l'on doit sa création et son organisation pour la première fois le 15 mai 1974. Une des originalités du rallye alsacien est de permettre le travail en « binôme », c'est-à-dire que les candidats travaillent par deux. Certaines années, dans un but d'entraînement, a été organisé un « rallye par correspondance » contenant des exercices s'adressant à plusieurs niveaux et des exercices plus faciles dits « d'échauffement ».

Soutenus par l'I.R.E.M. de STRASBOURG, les rallyes d'Alsace sont chaque année couronnés par la remise de prix richement dotés, grâce à la générosité de divers organismes.

L'I.R.E.M. de STRASBOURG tient à exprimer ici ses remerciements aux concepteurs des sujets : Mesdames et Messieurs DOUE, FUHR, HAEGEL, ISS, KAHN, KŒCHLIN, SCHRUOFFENEGER, SCHWARTZ.

Soit n le nombre de marches de l'escalier au repos; v la vitesse de l'escalier en mouvement (v est le nombre de marches qui disparaissent au sommet

A VOS STYLOS

PROBLÈME 13

Enoncé

Un réel x est algébrique si et seulement s'il existe des polynômes à coefficients entiers $P(u,v)$ et $Q(u,v)$ et des entiers u_o, v_o tels que, en posant

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \quad ; \quad v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

on ait $v_n \neq 0$ pour tout n et $(u_n/v_n) \longrightarrow x$, quand n tend vers ∞.

Remarque de '*L'Ouvert*'

Plus généralement, on pourrait chercher à caractériser les nombres $x = \lim \frac{u_n}{v_n}$, où l'on a trois relations de récurrence

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(u_n, v_n, w_n) \\ v_{n+1} &= Q(u_n, v_n, w_n) \\ w_{n+1} &= R(u_n, v_n, w_n). \end{aligned}$$

Combien faut-il de relations de récurrence pour atteindre des nombres tels que e et π (sans parler de la constante γ d'EULER)? Ces questions semblent difficiles.

Solution de Pierre RENFER

1) Condition suffisante

Supposons que x est limite d'une suite (u_n/v_n) du type de l'énoncé. Il s'agit de prouver que x est algébrique. Si x est rationnel, c'est terminé! Si x est irrationnel :

a) Montrons d'abord que $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$
- Pour tout entier $q > 0$, posons :

$$A_q = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq |b| \leq q\}.$$

L'ensemble A_q est une partie discrète de $\mathbb{R}$ et x est extérieur à A_q. Il existe donc un intervalle de centre x, de rayon $\varepsilon_q > 0$, ne contenant aucun élément de A_q.
- Comme $x = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$, il existe un entier n_q tel que :

$$|\frac{u_n}{v_n} - x| < \varepsilon_q, \text{ pour tout } n \geq n_q.$$

Mais alors : $\frac{u_n}{v_n} \notin A_q$ et $|v_n| > q$, pour tout $n \geq n_q$.

b) • Soit $u^a v^b$ un monôme de degré $d = a + b$.
Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^a v_n^b}{v_n^k} \text{ vaut } x^a \text{ si } k = d \text{ et vaut } 0 \text{ si } k > d.$$

Plus généralement, si $P(u,v)$ est un polynôme quelconque de degré d alors : $P(u,v) = H(u,v) + R(u,v)$, où H est la partie homogène de degré d, et R un polynôme de degré strictement inférieur à d.
Et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(u_n, v_n)}{v_n^k} \text{ vaut } H(x,1) \text{ si } k = d \text{ et vaut } 0 \text{ si } k > d.$$

• Soient H et K les parties homogènes respectives de P et Q.
Si $H(x,1) = 0$ ou $K(x,1) = 0$, alors x est algébrique!
Si $H(x,1) \neq 0$ et $K(x,1) \neq 0$, alors P et Q ont le même degré.
En effet, si ce n'était pas le cas, en appelant d le plus grand des deux degrés, on pourrait écrire l'égalité (E) :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{P(u_{n_1}, v_n)/v_n^d}{Q(u_{n_1}, v_n)/v_n^d}$$

et la valeur absolue du second membre tendrait vers 0 ou $+\infty$, alors que celle du premier membre tendrait vers $|x| \neq 0$.
Si d est donc le degré commun de P et Q, le passage à la limite dans l'égalité (E) donne :

$$x = \frac{H(x,1)}{K(x,1)}.$$

D'où : $xK(x,1) - H(x,1) = 0$. Ce qui prouve que x est algébrique!

2) Condition nécessaire

Réciproquement, supposons x algébrique. Il existe un polynôme f de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant : $f(x) = 0$. En remplaçant si nécessaire f par une de ses dérivées, on peut supposer $f'(x) \neq 0$.
• Construisons une suite (x_n) de réels par le procédé de Newton, c'est-à-dire :

$$x_{n+1} = g(x_n), \text{ avec } g(X) = \frac{Xf'(X) - f(X)}{f'(X)}.$$

• Comme $g'(x) = 0$, il existe un intervalle $I =]x - \alpha, x + \alpha[$ sur lequel $|g'(X)|$ est majoré par $\frac{1}{2}$.

• Si le terme initial x_0 appartient à l'intervalle I, alors la suite (x_n) converge vers x, car :

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{2^n}|x_0 - x| \text{ (théorème des accroissements finis).}$$

• Choisissons pour x_0 un rationnel $\frac{u_0}{v_0}$ dans I (c'est possible!). Alors tous les termes x_n sont des rationnels $\frac{u_n}{v_n}$, les entiers u_n, v_n vérifiant les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = P(u_n, v_n) \text{ et } v_{n+1} = Q(u_n, v_n)$$

avec

$$P(u,v) = uv^{d-1} f'(\frac{u}{v}) - v^d f(\frac{u}{v})$$
$$Q(u,v) = v^d f'(\frac{u}{v})$$

où d est le degré du polynôme $f(X)$.

3) Remarque

La méthode de Newton de la démonstration fournit explicitement les suites (u_n) et (v_n) et la convergence de $(\frac{u_n}{v_n})$ est très rapide.

Un exemple :

$$x = \sqrt{2}$$
$$f(X) = X^2 - 2$$
$$g(X) = \frac{2X^2(X^2-2)}{2X} = \frac{1}{2}(X + \frac{2}{X})$$

On retrouve l'algorithme babylonien

$$P(u,v) = u^2 + 2v^2 \text{ et } Q(u,v) = 2uv.$$

PROBLÈME 14 (proposé par D. Dumont)

Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \cdots$$

Question complémentaire :

Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croit la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

Indication :

La somme des diviseurs pairs d'un entier n est égale au double de la somme de leurs diviseurs complémentaires (si $d|n$ alors n/d est le diviseur complémentaire de d).

PROBLÈME 15

Enoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n\to\infty} f(x+\sqrt{n}) = 0$ pour tout x. A-t-on $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$?

PROBLÈME 16

Enoncé

Les touches (+) , (×) , (·/·) de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction (-) et d'inversion (1/x)?

Remarque :

'*L'Ouvert*' publiera la solution du lecteur proposant une méthode de multiplication qui utilise le plus petit nombre d'opérations (soustractions et inversions).

> Lors [du] premier séjour [d'EINSTEIN] en Amérique, en 1921, on lui présenta un questionnaire qui devait évaluer le bagage intellectuel qu'un étudiant emporte dans la vie, ses études universitaires terminées. A la question sur la vitesse du son, [il] répondit :
>
> — "*Je ne sais pas. Je n'encombre pas ma mémoire par des faits que je peux trouver facilement dans une encyclopédie.*"
>
> Albert EINSTEIN
> Par Antonina VALLENTIN (1958).

Nouvelle parution :
LIAISON COLLÈGE – SECONDE
Bulletin Inter - IREM (Nouveaux programmes de seconde)

Prix de vente sur place à la Bibliothèque de l'IREM de Strasbourg : 40 F; par correspondance : 50 F.