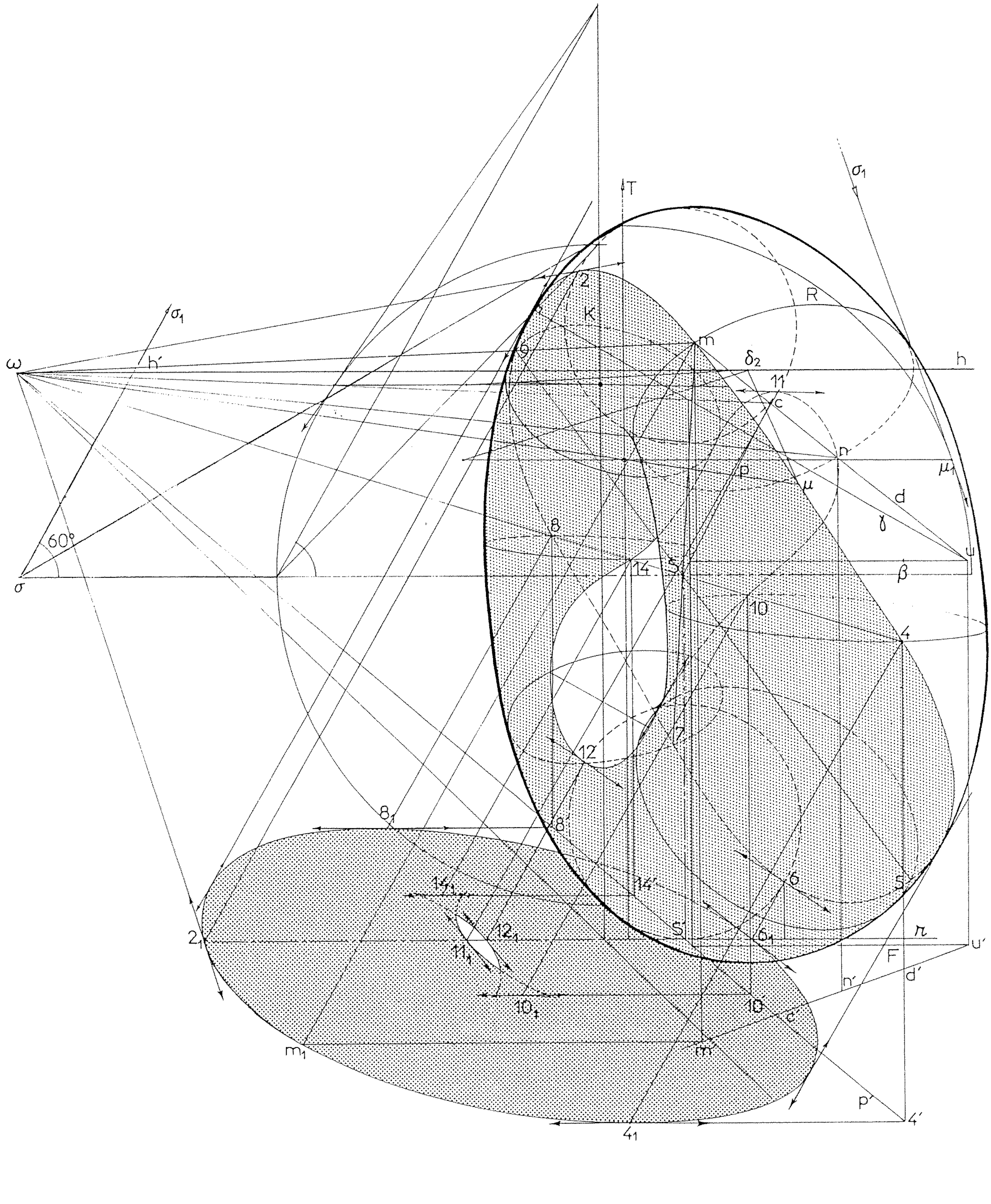
L'OUVERT

JOURNAL DE L'A.P.M.E.P. D'ALSACE ET DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG
n° 63 – JUIN 1991 I.S.S.N. 0290 - 0068



NOTRE COUVERTURE :

C'est à tort qu'on n'enseigne plus la géométrie descriptive sous prétexte que des logiciels puissants font ce travail à notre place. Encore faut-il être capable de fabriquer, de modifier et d'améliorer ces logiciels. C'est pourquoi cet enseignement de la descriptive a toujours lieu dans un certain nombre d'écoles et justifie la parution d'ouvrages spécialisés.

Le dessin de couverture est extrait de : "*La mise en perspective*", par MOLLE et HENNEBICQ (éd. Eyrolles). Il représente en perspective conique (point de fuite principal ω) un tore d'axe parallèle à $x'x$, tangent au sol et éclairé latéralement par les rayons du soleil qui font un angle de 60° avec le sol.

Pour construire l'ombre d'une surface de révolution, on utilise la méthode des surfaces inscrites :

Soit Σ une surface éclairée par une source lumineuse S (fig. 1). On cherche sa séparative σ. Inscrivons dans Σ une surface A qui est tangente à Σ le long du contour R. Notons α la séparative de A; elle rencontre R en un point M de σ. En faisant varier A (donc R et α), on obtiendra des points tels que M qui engendrent σ. Suivant les cas, on utilise pour A des surfaces simples telles que cône, cylindre, sphère.

Dans le cas du tore éclairé par des rayons de direction Δ (fig. 2), prenons une sphère variable de centre C, inscrite dans le tore le long du méridien R. La séparative de la sphère est le grand cercle α tracé dans le plan orthogonal à Δ passant par C. Les points communs M et N à R et α appartiennent à la séparative cherchée. En pratique, il est inutile de tracer le cercle α; il suffit en effet de construire la droite D, intersection des plans de R et de α, puis de placer M et N aux rencontres de D et du cercle R supposé tracé à l'avance sur le tore.

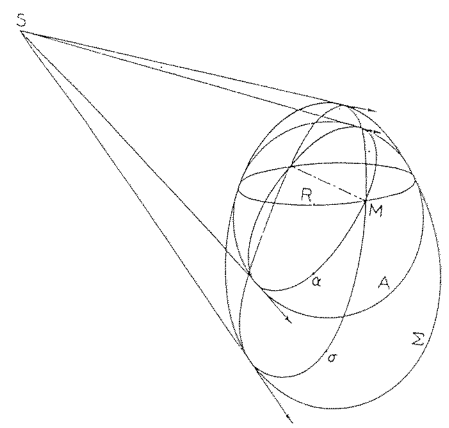


Figure 1

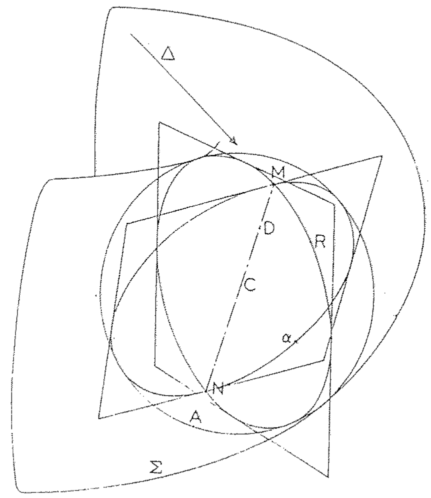


Figure 2

L'ESPRIT ET LA LETTRE

"*Et si l'inspecteur vient ?*" Argument massue de certains collègues à qui on parle d'adapter les programmes à leurs élèves. A croire que ces enseignants sont obligés de sacrifier leurs élèves à leur carrière! Mais c'est en général beaucoup plus grave que cela : ils sacrifient leurs élèves sur l'autel d'un prétendu niveau mythique qui correspond dans leur inconscient à celui qu'ils devaient avoir quand ils étaient élèves et bons élèves!

Quand on leur fait remarquer qu'en seconde, par exemple, la manipulation systématique des inégalités et inéquations n'est pas au programme, ils vous répondent : "*Si, il y a les encadrements et il y en a toute une page dans les programmes; de plus c'est très important pour ceux qui voudront faire C* ". Bien qu'il s'agisse plutôt de commentaires cherchant à placer des gardes-fous, les élèves voient fleurir des listes d'exercices avec des radicaux (simples pour ceux qui savent), des fractions et des $\leq$ que la plupart apprendront à résoudre mécaniquement et tant pis pour ceux qui cherchent un sens à ce qu'ils font, et tant pis pour ceux qui auraient pu aller en C.

Que dire, que répondre pour essayer d'infléchir une telle pratique? Lors d'une discussion à l'I.R.E.M. sur l'esprit et la lettre des programmes, un collègue faisait remarquer que pour bien s'imprégner de l'esprit d'un programme de niveau n, le lire soigneusement avec ses commentaires ne suffit pas; il faut non seulement lire aussi celui de niveau $n-1$ mais encore le programme qu'il a remplacé lors de la dernière réforme. Judicieuse idée pour comprendre dans quel sens il a évolué, pour comprendre contre quoi il réagit. Mais est-ce suffisant pour ces collègues qui, déformés par un certain style mathématique, ne veulent voir que la lettre?

J. LEFORT.

SOMMAIRE

N° 63 – JUIN 1991

L'OUVERT

ISSN 0290 – 0068

◇ *Responsable de la publication* : Jean LEFORT

◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur
Bibliothèque de l'I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88-41-64-40

◇ *Abonnement (pour 4 numéros annuels)*
50 F (95 F/2 ans) pour les membres A.P.M. d'Alsace
90 F (170 F/2 ans) pour l'Alsace
120 F (220 F/2 ans) pour la France ou l'Étranger.
Chèque à l'ordre de Monsieur l'Agent
Comptable de l'U.L.P. (IREM)

◇ *Prix du numéro* : 25.– F

COMMENT MÉMORISER LES LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES USUELLES SANS TROP SE FATIGUER

Edith KOSMANEK (*)

1.— LE TABLEAU DE CHOSSAT

Le tableau de CHOSSAT [1] présente 9 lois discrètes. Nous représentons sur le tableau ci-après les 7 qui sont unidimensionnelles. Pour ces lois, le modèle est celui du tirage dans une urne à 2 catégories de boules, les blanches en proportion p et les noires en proportion $q = 1 - p$.

En croisant 2 critères à 2 modalités chacun :
— mode de tirage : avec ou sans remise
— paramètre fixé : nombre n de tirages ou nombre r d'occurences de blanches
on récolte 4 lois principales : binômiale, hypergéométrique, Pascal avec ou sans remise, lesquelles admettent 3 autres lois comme cas particuliers : uniforme, Bernouilli, géométrique et la loi de Poisson comme loi limite. Des étudiants de 1er cycle, confrontés à ce tableau, émettent spontanément 2 remarques judicieuses :
— il manque la loi de Pascal sans remise (voir ci-dessous),
— pourquoi changer de modèle pour présenter la loi uniforme : boules numérotées au lieu de boules blanches et noires.

Loi	Valeurs possibles	Probabilités
Pascal **sans** remise $S[N, r, p]$	$[r, r+1, \ldots, k, Nq + r]$	$P[X = k] = \frac{C_{Np}^{r-1} C_{Nq}^{k-r}}{C_N^{k-1}} \frac{Np - r + 1}{N - k + 1}$

Espérance	Variance	Modèle
$r\frac{N+1}{Np+1}$	$rq\frac{N(N+1)(Np-r+1)}{(Np+1)^2(Np+2)}$	Dans une urne, deux catégories de boules : proportion p de blanches et q de noires. On tire, sans remise, jusqu'à obtenir r boules blanches. X est la variable aléatoire : nombre de tirages nécessaires.

Observations
On retrouve la loi de Pascal **avec** remise pour $N \to +\infty$ et la loi **uniforme** pour $p = \frac{1}{N}$ et $r = 1$.

(*) À Aimé FUCHS (Strasbourg), mon initiateur aux probabilités.

LOIS DE PROBABILITÉ :

LOI	VALEURS POSSIBLES	PROBABILITÉS DE CES VALEURS	ESPÉRANCE
BERNOULLI $\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$P[X=0]=1-p=q$ $P[X=1]=p$ où $0 \leq p \leq 1$	p
BINOMIALE $\mathcal{B}(n,p)$	$\{0,1,\ldots n\}$	$P[X=k]=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $0 \leq p \leq 1$ et $p+q=1$	np
GÉOMÉTRIQUE $R(1,p)$	$\{1,2,\ldots,k,\ldots,+\infty\}$	$P[X=k]=q^{k-1}p$ où $0 < p \leq 1$ et $p+q=1$	$\frac{1}{p}$
PASCAL (parfois appelée "*Binomiale négative*") $R(r,p)$	$\{r,r+1,\ldots+\infty\}$	$P[X=k]=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$ où $0 < p \leq 1$ et $p+q=1$	$\frac{r}{p}$
HYPER-GÉOMÉTRIQUE $H(N,n,p)$	$\sup(0,n-N_2) \leq K \leq \inf(n,N_1)$	$P[X=k]=C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}/C_N^n$ $(N=N_1+N_2)$	np avec $p=\frac{N_1}{N}$
POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$	$\{0,1,\ldots+\infty\}$	$P[X=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ
UNIFORME SUR UN ENSEMBLE FINI $U(n)$	$\{1,2,\ldots,n\}$	$P[X=k]=\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$

VARIABLES DISCRÈTES

VARIANCE	MODÈLE	OBSERVATIONS (*)
pq	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On effectue un tirage. X est la variable aléatoire "*nombre de boules blanches*".	
npq	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On effectue n tirages <u>avec</u> remise. X est la variable aléatoire "*nombre de boules blanches*".	Si $X_1 \to \mathcal{B}(n_1,p), X_2 \to \mathcal{B}(n_2,p)$ X_1 et X_2 indépendants alors $X_1 + X_2 \to \mathcal{B}(n_1+n_2,p)$.
$\frac{q}{p^2}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On tire <u>avec</u> remise jusqu'à obtenir une boule blanche. X est la variable aléatoire "*nombre de tirages nécessaires*".	
$\frac{rq}{p^2}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : proportion p de boules blanches, q de noires. On tire <u>avec</u> remise jusqu'à obtenir r boules blanches. X est la variable aléatoire "*nombre de tirages nécessaires*".	On retrouve la loi géométrique avec $r = 1$. Si $X_1 \to$ Pascal de paramètre r_1, $X_2 \to$ Pascal de paramètre r_2. Si X_1 et X_2 sont indépendants, alors $X_1 + X_2$ suit une loi de Pascal de paramètre $r_1 + r_2$.
$npq\frac{N-n}{N-1}$ avec $q = \frac{N_2}{N}$	Dans une urne, 2 catégories de boules : nombre N_1 boules blanches, N_2 de noires. On tire n boules <u>sans</u> remise. X est la variable aléatoire "*nombre de boules blanches*".	On retrouve la loi binomiale à la limite où $N \to \infty, N_1 \to \infty, N_2 \to \infty$ avec $\frac{N_1}{N} \to p$, $\frac{N_2}{N} \to q = 1-p$.
λ	Loi limite d'une loi binomiale lorsque $(n > 50)$ et $p < 0,10$. Loi des évènements "*rares*".	Si $X_1 \to \mathcal{P}(\lambda_1), X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_2), X_1$ et X_2 sont indépendants alors : $X_1 + X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
$\frac{n^2-1}{12}$	Dans une urne, n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage, avec équiprobabilité de tirer chaque boule. X est la variable aléatoire "numéro de la boule tirée"	

(*) $X \to A$ signifie : X suit la loi de probabilité A.

Les résultats (page 1), obtenus sans trop de difficultés, répondent aux deux questions et manifestent le lien qui existe entre elles : la loi uniforme apparaît comme cas particulier de la loi Pascal sans remise et peut donc, elle aussi, se présenter à partir du modèle standard : on tire sans remise dans une urne contenant une seule blanche et $(N-1)$ noires jusqu'à l'occurence de cette unique blanche.

2.— L'ARBORESCENCE KOSMANIENNE

Le schéma unitaire ci-contre (p. 5) résume les considérations précédentes sous forme de graphe arborescent ; il met bien en évidence l'homogénéïté du mécanisme générateur des différentes lois.

3.— UN LOSANGE COMMUTATIF

En homogénéïsant les notations de façon évidente, on observe les particularités suivantes : on passe de la loi binômiale à la loi Pascal avec remise simplement en multipliant par le taux de "*succès*" $\frac{K}{n}$ (nombre d'occurences de blanches divisé par nombre total de tirages) :

$$C_n^K p^k q^{n-K} . \frac{K}{n} = C_{n-1}^{K-1} p^K q^{n-K}.$$

Idem pour le passage de la loi hypergéométrique à la loi Pascal sans remise.

$$\frac{C_{Np}^K C_{Nq}^{n-K}}{C_N^n} . \frac{K}{n} = \frac{C_{Np}^{K-1} C_{Nq}^{n-K}}{C_N^{n-1}} . \frac{Np-K+1}{N-n+1}$$

propriété généralisée au paragraphe 4.

L'arborescence précédente peut alors, compte tenu des observations du tableau de Chossat, se présenter sous forme de "*losange commutatif*" à rallonges (voir p. 6). Il suffit de **mémoriser une seule formule**, celle de la loi hypergéométrique ; toutes les autres s'en déduisent par trois opérations simples :
— multiplication par le taux de succès $\frac{K}{n}$;
— passage à la limite : $N \to +\infty, n \to +\infty, np \to \lambda$;
— particularisation : $n = 1, K = 1, p = \frac{1}{N}$.

4.— UNE GÉNÉRALISATION (*)

Notations :

• (A_i) : suite d'événements associée à une suite d'épreuves,

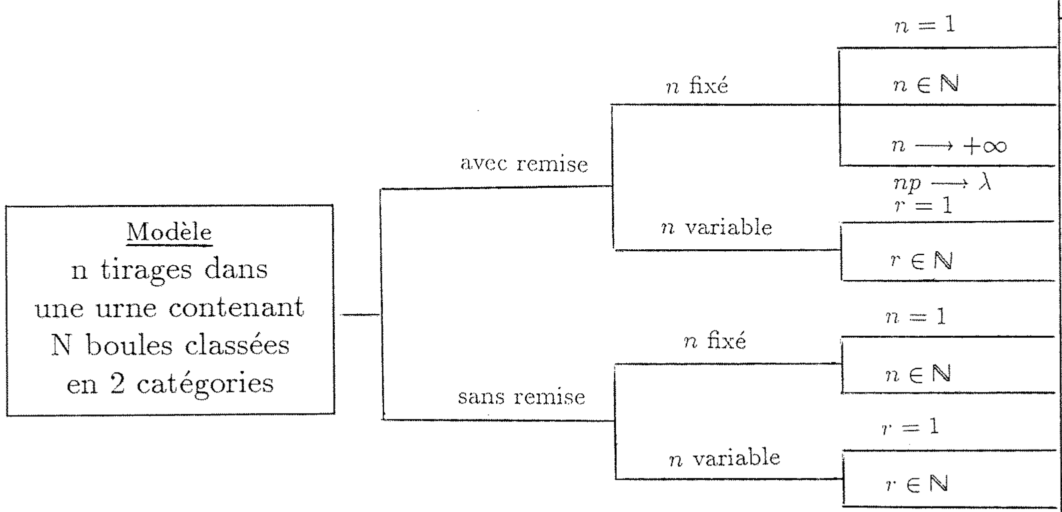
• 1_{A_i} : variable aléatoire indicatrice de l'événement A_i,

• $S_n = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$: nombre d'événements réalisés en n épreuves,

• $T_K = \text{Min } \{n | S_n = K\}$: nombre d'épreuves nécessaires à l'occurence de K événements.

(*) Avec l'aide de P.-L. HENNEQUIN.

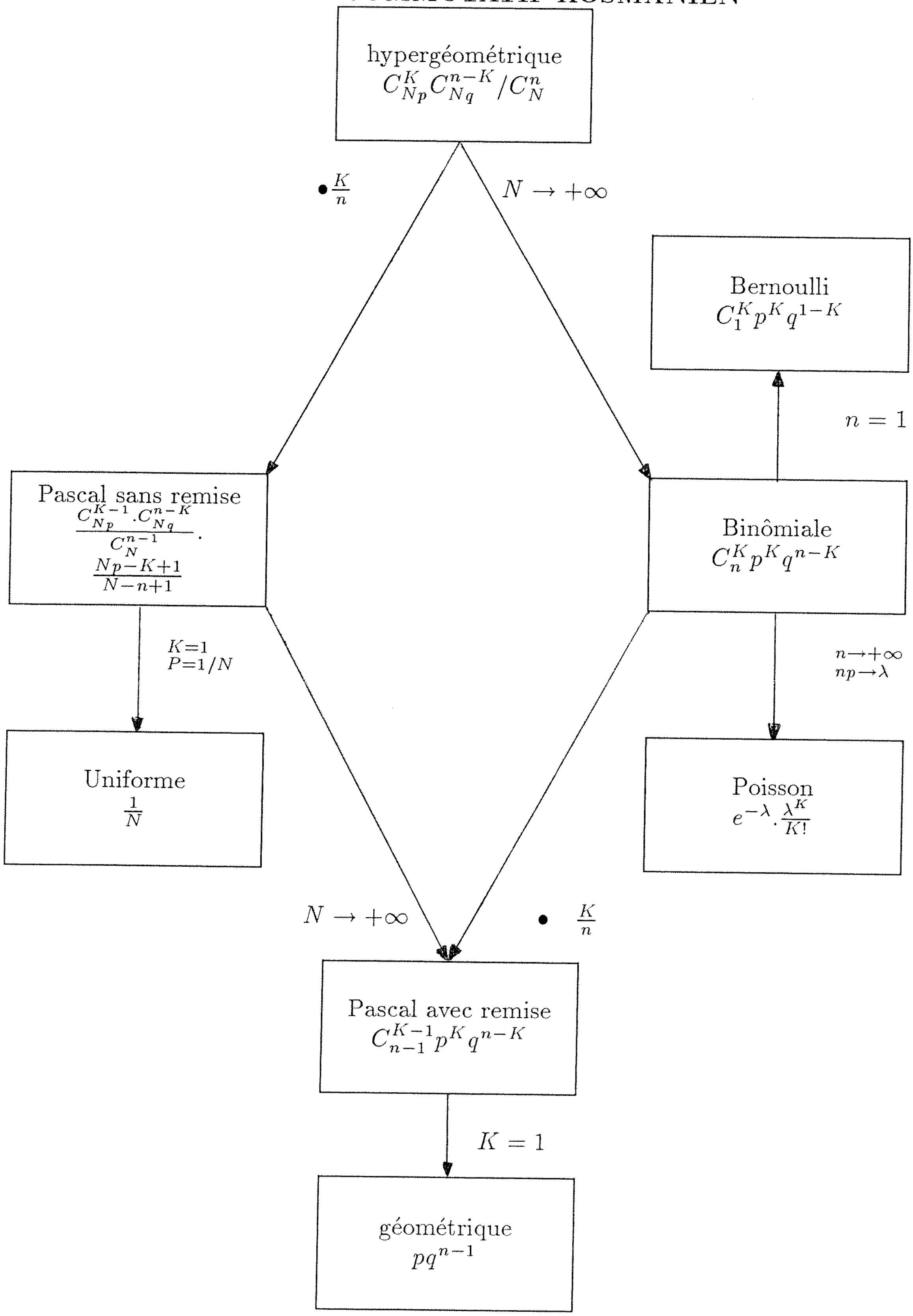
SCHÉMA ARBORESCENT RELATIF AUX VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES USUELLES À UNE DIMENSION.



Variable X	Notation	Appellation
Nombre de blanches	$B(1,p)$	Bernoulli
Nombre de blanches	$B(n,p)$	Binômiale
Nombre de blanches	$P(\lambda)$	Poisson
Nombre de tirages	$R(1,p)$	Géométrique
Nombre de tirages	$R(r,p)$	Pascal
Nombre de blanches	$H(N,1,p) = B(1,p)$	Bernoulli
Nombre de blanches	$H(N,n,p)$	Hypergéométrique
Nombre de tirages	$U(N) = S(N,1,\frac{1}{N})$	Uniforme
Nombre de tirages	$S(N,r,p)$	Pascal sans remise

ARBORESCENCE KOSMANIENNE

LOSANGE COMMUTATIF KOSMANIEN



Hypothèse

$$P(A_i|S_n = K) = C \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Proposition

$$\boxed{P(T_K = n) = P(S_n = K) \bullet \frac{K}{n}, 1 \leq K \leq n.}$$

Démonstration

On montre d'abord que la constante C est égale au taux de succès : $\frac{K}{n}$; en effet :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i|S_n = K) = nC = \sum_{i=1}^{n} E(1_{A_i}|S_n = K) =$$

$$= E(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}|S_n = K) = E(S_n|S_n = K) = K \Longrightarrow C = \frac{K}{n}.$$

Il est clair, par ailleurs, que l'événement $(T_K = n)$ est équivalent à l'événement : $(S_{n-1} = K - 1$ et $S_n = K)$ donc $P(T_K = n) = P(S_n = K)P(S_{n-1} = K - 1|S_n = K) = P(S_n = K)P(A_n|S_n = K) = P(S_n = K) \bullet C = P(S_n = K) \bullet \frac{K}{n}$.

Application

Considérons comme suite d'épreuves celle du modèle des urnes. L'événement A_i est l'occurence d'une blanche $\forall i$. Que le tirage soit avec ou sans remise, l'hypothèse $P(A_i|S_n = K) = C$ est valable.

Pour le tirage avec remise :
— S_n suit la loi binômiale,
— T_K suit la loi Pascal avec remise.

Pour le tirage sans remise :
— S_n suit la loi hypergéométrique,
— T_K suit la loi Pascal sans remise.

On retrouve donc le losange.

Bibliographie

[1] Aide-mémoire de l'étudiant en économie et gestion (Tableau de Chossat), éd. Bordas-Dunod
[2] KOSMANEK E. : Simple remarque à propos d'un tableau d'aide-mémoire (Bull. A.P.M.E.P., sept. 1989)
[3] KOSMANEK E. : Y a-t-il un probabiliste dans l'avion? (Revue Quadrature n° 4, 1990)

BRÈVE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

L'OUVERT

Ce texte est librement adapté d'une conférence prononcée en 1948 par SLESSENGER et CURTIS pour le 25^e anniversaire de l'Adams Society (St John's College, Cambridge, Mathematical Society).

Les mathématiques sont bien plus vieilles que l'Histoire avec un grand H qui, elle, commence avec nos ancêtres les gaulois comme le sait tout bon français. En effet, le premier vrai mathématicien est le grec ZENON, né en -494. ZENON est surtout connu pour avoir démontré les trois théorèmes suivants :

1) Le mouvement est impossible.

2) Achille ne peut jamais rattraper la tortue (mais ZENON n'avait pas remarqué que ce n'est qu'une conséquence du (1)).

3) La moitié est égale au double.

Tout ceci ne fut jamais considéré comme un bon point de départ par les autres grecs qui se tournèrent dès lors vers la géométrie.

C'est à EUCLIDE que l'on doit, vers -300, l'invention de cette dernière. Pour faire bonne mesure, il inventa même le célèbre théorème de PYTHAGORE auquel il a donné son nom! C'est lui aussi qui lança la mode des parallèles qui furent d'un plus grand usage pour la pose des rails de chemin de fer que chez les mathématiciens. Certains lecteurs en connaissent sans doute plus que nous à ce propos.

ARCHIMÈDE (-286, -211) est surtout connu pour avoir pris un bain duquel il sortit sans prendre la peine de se rhabiller, et ce, malgré ses principes.

A partir de cette époque, on n'entendit guère parler des mathématiques jusqu'à un certain DESCARTES (1596– 1650) qui lança la mode de la géométrie analytique. Incidemment il découvrit qu'il existait et fut même capable de le démontrer!

Puis vint PASCAL (1623 – 1662) très connu pour son pari dont on ne sait toujours pas s'il l'a gagné ou non. Mais cela est de peu d'importance puisque c'est ce qui le conduisit à inventer le calcul des probabilités, raison probable d'une partie de sa renommée.

Ensuite apparurent NEWTON (1642 – 1727) et LEIBNIZ (1646 – 1716) qui se disputèrent la découverte du calcul différentiel et intégral. C'est LEIBNIZ qui emporta le plus gros morceau malgré les efforts désespérés mais trop tardifs d'un TAYLOR (1685 – 1731) qui soutint NEWTON en inventant les séries de MAC LAURIN.

Citons maintenant l'inventeur des nombres, BERNOULLI(S), dont personne (malgré cela) ne sait combien il était et qui vécut, sans doute, de 1654 à 1782, ce qui est beaucoup pour un seul mathématicien!

Passons rapidement sur EULER (1707 – 1783), LAGRANGE (1736 – 1813) et LAPLACE (1749 – 1827) qui, tous les trois, bâtirent leur renommée sur les équations. A vrai dire, seules les équations de LAPLACE sont bien connues, mais c'est assez pour trois! EULER et LAGRANGE, en outre, travaillèrent sur des sujets variés ce qui les conduisit, bien sûr, au calcul des variations, ce qu'en général les étudiants regrettent beaucoup.

GAUSS (1777 – 1855) inventa ...en fait il est plus facile de dire ce qu'il n'a pas inventé car quoi que quiconque découvrit dans la première moitié du XIX^{e} siècle, GAUSS l'avait découvert 20 ans plus tôt et il vivait encore pour le faire remarquer à l'auteur. Citons cependant les équations de CAUCHY-RIEMAN et le théorème de CAUCHY très important mais malheureusement beaucoup plus difficile à démontrer aujourd'hui qu'il ne l'était lorsque GAUSS l'inventa.

C'est peut-être pour avoir été recalé à un examen de géométrie quand il était jeune que LOBATCHEVSKI (1793 – 1856) s'ingénia, par pur esprit de vengeance, à compliquer cette science en créant la géométrie non-euclidienne. Il y fut aidé par BOLYAI (1802 – 1860), mais ensuite ces deux mathématiciens se disputèrent. Tout cela n'arrangea pas les affaires des jeunes sociétés de chemin de fer pour la pose des rails.

HAMILTON (1805 – 1865) était un irlandais à principes. Après avoir appris 13 langues, il décida qu'il n'y avait pas d'avenir dans ce domaine et s'adonna aux mathématiques. On lui doit l'hamiltonien, le théorème de CAYLEY et surtout les quaternions, invention qu'il fut le seul à trouver géniale.

WEIERSTRASS (1815 – 1897) doit sa renommée à Sofia KOVALESKA (1850 – 1891) qui doit la sienne à WEIERSTRASS. Il a expliqué que si on place une infinité d'objets dans un tout petit espace alors la plupart de ces objets seront vraiment très très proches les uns des autres.

Le plus naïf des mathématiciens fut sans nulle doute CHASLES (1793 – 1880) qui perdit une fortune à essayer de prouver l'existence d'une relation entre PASCAL et NEWTON.

Le plus malchanceux des mathématiciens fut sans conteste John Couch ADAMS (1819 – 1890) qui aurait découvert Neptune deux mois avant LE VERRIER si les astronomes de sa très gracieuse majesté la reine VICTORIA avaient ouvert correctement les yeux.

Le plus discret des mathématiciens fut certainement Charles L. DODGSON (1832 – 1898) qui ne doit pas être confondu avec Lewis CARROLL. C'est un logicien qui écrivit beaucoup de textes pas très logiques, raison pour laquelle peu de gens le connaissent.

Le moins mathématicien des mathématiciens (mais ceci est très relatif) fut EINSTEIN (1879 – 1955), mais il est inutile d'en parler ici pour cette raison.

On pourrait croire que les mathématiques se seraient achevées avec Bertrand RUSSEL (1872 – 1970) qui établit que la classe de toutes les classes qui se contiennent elles-mêmes ne se contiennent pas elles-mêmes. Contradiction définitive qui aurait dû tuer les maths mais les mathématiciens s'ingénièrent à l'occulter au public pour pouvoir conserver leur travail.

Même cachée, la contradiction finit par engendrer un monstre polycéphale. Tel celui du Loch Ness, personne ne l'a jamais vraiment vu, mais tout le monde en parle. Nicolas BOURBAKI, puisque c'est son nom, n'est pas encore mort malgré un faire-part officiel qui circula un temps dans la communauté mathématique. Curieusement, ce mathématicien n'a rien inventé, mais, tel le Minotaure, il se contente de prendre les idées des autres et de rejeter celles qui ne lui plaisent pas. Un dénommé ROBINSON et ses disciples en furent victimes un certain temps. Ce monstre touvera-t-il son THÉSÉE? Nous laissons à l'avenir le soin de répondre à cette question si les mathématiciens ne sont pas remplacés par des machines d'ici là!

MAXIMALISATIONS D'AIRES DE POLYGONES

Albert LENTZ

Dans toute l'étude, les polygones envisagés ont des côtés dont les longueurs sont fixées dans l'ordre.

Nous nous posons la question suivante : les polygones étant "*articulés*", comment les déformer pour rendre leur aire maximale s'il y a lieu.

La résolution du problème nécessite seulement des notions de 1ère S et peut donner lieu à des T.P. (relations métriques dans le triangle, variation de fonctions, etc...) dans cette classe.

I. — PROBLÈMES D'HEXAGONES

Au cours d'une journée pédagogique de professeurs de seconde, il y a quelques années, il nous a été proposé à titre d'exemple de thème de recherche, le problème de la maximalisation de l'aire d'un **hexagone articulé à côtés égaux**.

A. Recherche d'une solution

Plusieurs démarches sont possibles. En voilà une parmi d'autres, accessible à un élève de seconde.

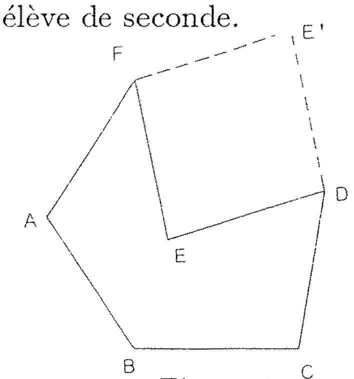


Figure 1

A partir d'un hexagone à côtés égaux et à angles quelconques :

1. Par symétries le rendre convexe; cela augmentera l'aire (fig. 1).

2. Choisir une diagonale : elle partage l'hexagone en deux quadrilatères d'aires différentes. Remplacer celui qui est d'aire la plus petite par le symétrique de l'autre par rapport au milieu de la diagonale (fig. 2).

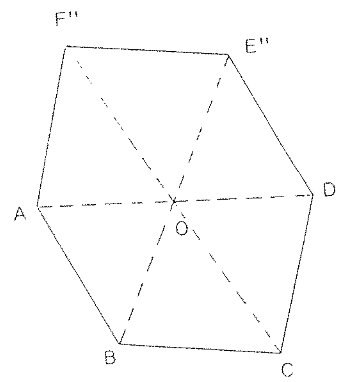


Figure 2

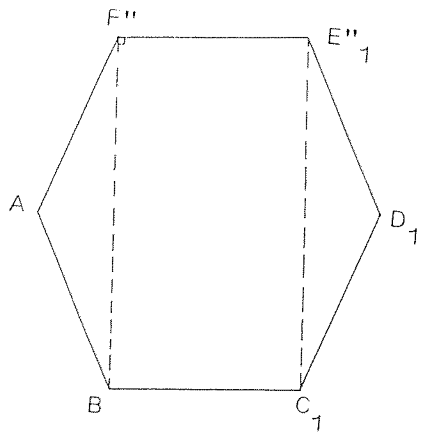


Figure 3

3. On peut obtenir des hexagones dont les aires vont en croissant, en déformant, successivement, l'un des parallélogrammes formés par deux côtés opposés pour obtenir le rectangle dont les côtés ont même longueur que ceux du parallélogramme (fig. 3). **L'hexagone sera maximalisé** si toutes les paires de côtés opposés définissent des rectangles, donc **s'il est inscriptible dans un cercle, donc régulier**; on s'y attendait !

B. Etude des déformations successives envisagées (A.3)

1. Etudions une telle suite de transformations en considérant alternativement les parallélogrammes $ACDF$ et $BCEF$. Supposons qu'on ait initialement :

$$\widehat{BAF} = a \ , \ \widehat{ABC} = b \text{ et } \widehat{FBC} = \pi/2.$$

Comme ABF et ABC sont isocèles, on a toujours :

$$a + 2\widehat{ABF} = \pi \text{ et } b = \pi/2 + \widehat{ABF}$$

soit

$$b = \pi - a/2.$$

Dans la suite de transformations soient
$u_0, u_2, \ldots, u_{2n}, \ldots$ les valeurs successives de a,
$u_1, u_3, \ldots, u_{2n+1}, \ldots$ les valeurs successives de b.

On a alors une suite u définie par :

$$u_{n+1} = -0,5u_n + \pi$$

convergeant vers $2\pi/3$ et telle que :

$$u_{n+2} = 0,25u_n + \pi/2$$

relation entre les valeurs de a (et celles de b).

Les suites des valeurs de a et de b sont l'une croissante, l'autre décroissante, suivant qu'au départ $a > 2\pi/3$ ou non. Les limites de a et de b sont donc effectivement $2\pi/3$.

2. Il y a plus court!

L'hexagone, avant maximalisation, a nécessairement au moins un angle supérieur à $2\pi/3$. Supposons que cela soit a. Déformons alors $ACDF$ en $ACD'F'$ pour que l'angle BAF' mesure $2\pi/3$: l'aire a augmenté car $\sin a < \sin 2\pi/3$.

Une seule autre transformation suffit maintenant à obtenir l'hexagone maximal.

II. — GÉNÉRALISATIONS

1. La généralisation est à envisager de deux manières :

a) Peut-on généraliser ce résultat à tout polygone à n côtés égaux?
b) Pour un polygone à n côtés éventuellement inégaux quelle forme prendra la réponse, puisqu'il ne sera plus question de polygones réguliers?

2. Faisons ici deux remarques :

a) Pour un polygone à $2n$ côtés dont les côtés opposés sont égaux, la démarche utilisée pour l'hexagone reste valable; il en résulte que ce polygone a l'aire maximale s'il est **inscriptible**.

b) Pour qu'un polygone existe, il faut nécessairement que chaque côté soit inférieur à la somme de tous les autres (en particulier le plus grand est inférieur à la somme des autres côtés).

3. Comment procéder dans le cas d'un polygone quelconque?

De la méthode précédente on peut retenir que la maximalisation est ramenée à celle de l'aire d'un **quadrilatère**. Le polygone $A_1A_2\ldots A_n$ a une aire maximalisée si chaque quadrilatère $A_iA_jA_kA_l$ défini par les sommets du polygone a une aire maximalisée : chaque quadrilatère $A_iA_jA_kA_l$ étant transformé, successivement en un quadrilatère $A'_iA'_jA'_kA'_l$ dont les côtés ont **mêmes longueurs respectives que ceux de $A_iA_jA_kA_l$**.

Nous étudierons donc d'abord le problème pour le quadrilatère.

III. — LE QUADRILATÈRE

1. Expression de l'aire d'un quadrilatère

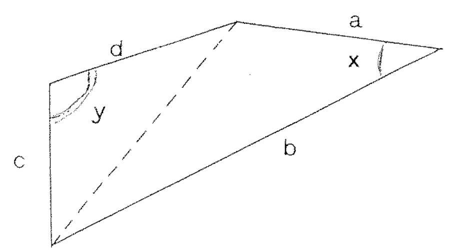


Figure 4

Nous appellerons ici a, b, c, d les longueurs des côtés, x l'angle des côtés a et b, y l'angle opposé à x, D la diagonale opposée à x et A l'aire du quadrilatère (fig. 4).

L'aire A est fonction de x, de même que y. On a alors :

$$2A(x) = ab\sin x + cd\sin y(x).$$

Etudions les variations de $2A(x)$. En dérivant :

$$2A'(x) = ab\cos x + y'(x)cd\cos y(x).$$

Comme $D^2(x) = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 - 2cd\cos y(x) \quad (1)$
on a $D^{2'}(x) = 2ab\sin x = 2cdy'(x)\sin y(x)$.
D'où :

$$cd\ y'(x) = \frac{ab\sin x}{\sin y(x)}.$$

Et :

$$2A'(x) = ab\cos x + \frac{ab\sin x\cos y(x)}{\sin y(x)}.$$

Soit :

$$A' = \frac{ab}{2\sin y(x)}\sin(x + y(x)).$$

Comme on a : $0 < x < \pi$ et $0 < y < \pi$, on en déduit :

$$\begin{aligned} A' &> 0 \text{ si } x + y < \pi \\ A' &= 0 \text{ si } x + y = \pi \\ A' &< 0 \text{ si } x + y > \pi. \end{aligned}$$

Donc A est maximum si $x + y = \pi$.

Donc **le quadrilatère a une aire maximale s'il est inscriptible**.

2. Quelle est alors cette aire?

Comme $x + y = \pi$, la relation (1) s'écrit :

$$D^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x = c^2 + d^2 + 2cd\cos x.$$

On en tire :

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \qquad (2)$$

Donc, comme $\sin y = \sin x$, on a :

$$\begin{aligned} 2A(x) &= (ab + cd)\sin x \\ &= (ab + cd)(1 - \cos^2 x)^{0,5}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\cos x$ et en effectuant, on a:

$$\begin{aligned}
16A^2 =&8abcd + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) \\
&- (a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \\
=&(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) \\
\text{ou } A^2 =&(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) \text{ si } 2p = a + b + c + d \\
\text{soit } A =&\big((p - a)(p - b)(p - c)(p - d)\big)^{0,5}.
\end{aligned}$$

Remarque : de (1) et de (2) on déduit :

$$D^2 = a^2 + b^2 - ab\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd} = \frac{(a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)(ab)}{ab + cd} \qquad (3).$$

3) Détermination du cercle circonscrit :

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est : $abc = 4AR$, où A est l'aire du triangle. Donc :

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{a^2b^2c^2}{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)} \\
&= \frac{a^2b^2c^2}{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab + c^2 - a^2 - b^2)} \\
&= \frac{a^2b^2c^2}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \qquad (4).
\end{aligned}$$

Le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère s'obtient en remplaçant c par D dans (4); on a :

$$R^2 = \frac{(ab + cd)(a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2)}{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}$$

$$\text{ou } R^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)} \qquad (5)$$

$$\text{ou } R^2 = \frac{a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{8abcd + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) - (a^4 + b^4 + c^4 + d^4)}.$$

Remarque : La relation (5) peut s'écrire

$$4RA = \big((ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)\big)^{0,5}$$

qui est à comparer à la relation dans le triangle.

IV. — MAXIMALISATION DE L'AIRE D'UN POLYGONE À n CÔTÉS (n > 4)

Un polygone a donc une aire maximalisée si chaque quadrilatère qu'il définit est inscriptible, donc si le polygone est lui-même inscriptible.

Pour un polygone donné, le procédé de maximalisation fait-il nécessairement **avoir pour limite** un polygone inscriptible ? L'aire d'un polygone inscriptible (dont nous prouverons l'existence et l'unicité) est-elle le maximum absolu ?

Questions ouvertes : Nous aimerions y répondre OUI!...

Le calcul du rayon amène à la résolution d'équations de degré supérieur à 4 non bicarrées. Pour établir l'existence de R, nous utiliserons l'approche géométrique qui suit.

A. Existence du polygone inscriptible pour n > 4

Le polygone est défini si le rayon du cercle circonscrit est défini. Intuitivement, son existence et son unicité sont évidentes.

Considérons un polygone à n côtés dont les côtés ont pour longueurs : $c_1, c_2, \ldots, c_n$, et nous supposerons que c_1 soit la longueur la plus grande, ce qui est toujours possible.

Construisons un cercle de rayon r dans lequel nous inscrivons la ligne polygonale $A_0A_1A_2\ldots A_n$ dont les côtés ont pour longueur $c_1, c_2, \ldots c_n$ dans l'ordre. Il faut que $2r \leq c_1$ pour que la construction soit possible.

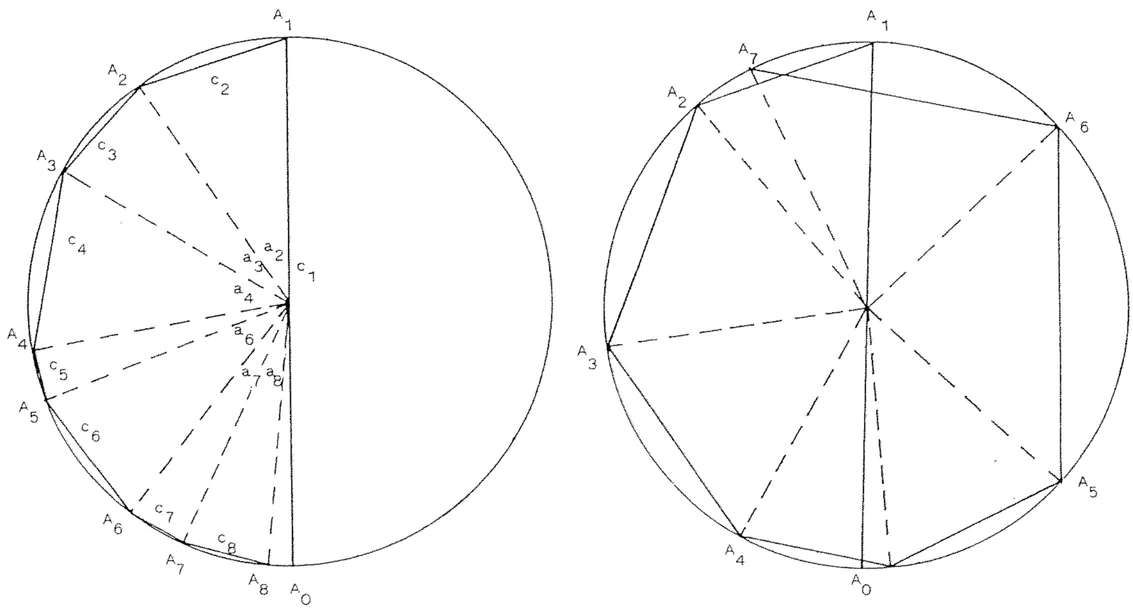


Figure 5

Ces deux situations correspondent à $r = c_1/2$

Supposons maintenant r variable (et croissant), et considérons le polygone $A_1A_2\ldots A_n$ de côtés $c_2, \ldots, c_n$ et soit c la longueur du côté A_1A_n.

Soit $a_i (2 \leq i \leq n)$ l'angle au centre opposé au côté de longueur c_i. Les a_i sont des fonctions décroissantes de r d'après les variations de $\sin x$ et de $1/x$ car :

$$\sin(a_i/2) = c_i/(2r) \text{ et } a_i/2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ est une fonction décroissante de r et la limite, quand r tend vers l'infini, est nulle, car n est fixé. On peut donc choisir r_0 assez grand pour que :

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < 2\pi \text{ si } r_0 \text{ et } r \geq c_1/2.$$

A cette condition le polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ est convexe.

Montrons que $A_1 A_n$ est alors une fonction croissante de r.

Les angles $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ sont des fonctions croissantes de r et compris entre 0 et π car dans chaque triangle isocèle OA_iA_{i+1} les angles à la base valent : $(\pi - a_i)/2$. Soient r' et r'' deux valeurs de r telles que $r_0 < r' < r''$ et $A'_1A'_2 \ldots A'_n, A''_1A''_2 \ldots A''_n$ les polygones correspondants. Pour transformer $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ en $A''_1A''_2 \ldots A''_n$ décomposons en $n-2$ transformations $t_i (2 \leq i \leq n-1)$ successives telles que t_i remplace A'_i par A''_i.

La seule dimension affectée par chacune de ces transformations est celle de A_1A_n dans le triangle $A_1A'_iA_n$ qui devient $A_1A''_iA_n$ (voir fig. 6).

Or on a :

$$A_1A_n^2 = A_1A_i'^2 + A'_iA_n^2 - 2A_1A'_i \times A'_iA_n \cos A'_i.$$

Comme A_i est croissant, $\cos A_i$ est décroissant $(0 \leq A_i \leq \pi)$. Donc pour chaque transformation t_i, A_1A_n augmente. Il s'en déduit que A_1A_n est une fonction croissante de r. Comme la limite de A_1A_n est égale à $c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ et que :

$$c_2 + c_3 + \cdots + c_n > c_1 \text{ (inégalité triangulaire)}$$

il existe donc une valeur unique de r pour laquelle $A_1A_n = c_1$.
D'où le polygone inscriptible unique dont les côtés sont donnés (fig. 6).

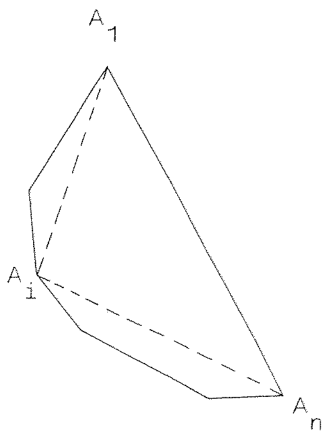


Figure 6

B. Problème du maximum absolu de l'aire

Exemple du pentagone quelconque de côtés a, b, c, d et e

On peut le considérer comme la réunion d'un triangle de côtés a, b et x et d'un quadrilatère de côtés c, d, e et x, où x est la diagonale convenable.

D'après les calculs précédents, l'aire est alors :

$$\begin{aligned} A(x) = & \left((a+b+x)(a+b-x)(b+x-a)(x+a-b)\right)^{0,5} + \\ & \left((-x+c+d+e)(x-c+d+e)(x+c-d+e)(x+c+d-e)\right)^{0,5} \end{aligned}$$

La détermination du maximum devient difficile : des exemples numériques précis et la calculatrice graphique le font apparaître.

EN CONCLUSION

Ce petit problème nous aura entraîné bien loin et posé quelques questions non résolues. L'existence d'un maximum absolu amène à considérer le cas de fonctions à plusieurs variables si le nombre de côtés est supérieur ou égal à 7 : le découpage du polygone en quadrilatères et éventuellement un triangle fait intervenir au moins deux diagonales.

Merci à tous ceux qui feront part du résultat de leurs réflexions et de leurs recherches !

Dans "Discours de la méthode" DESCARTES *définit quatre préceptes qui seront la base de ce qui deviendra la méthode cartésienne :*

Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse **évidemment** être telle; c'est-à-dire d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention, et de ne comprendre rien de plus en mes jugements que ce qui se présenterait si **clairement** et si **distinctemnt** à mon esprit **que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute**.

Le second, de **diviser** chacune des difficultés que j'examinais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de **conduire par ordre de mes pensées**, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu comme par degrés jusques à la connaissance des plus composés, et **supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres**.

Et le dernier, de faire partout **des dénombrements si entiers et des revues si générales**, que je fusse assuré de ne rien omettre.

René DESCARTES, *Discours de la méthode*,
La Pléiade, (1970)

MATHÉMATIQUES D'HIER À AUJOURD'HUI

Gilles FLAMENT (*)

"Situation paradoxale que celle des mathématiques ! L'homme de la rue soupçonne bien leur omniprésence dans sa vie quotidienne sans pouvoir toujours réellement repérer leur trace. Quel rapport entre l'algèbre, la géométrie, les statistiques et le fonctionnement d'une calculette, la vitesse du TGV, l'informatique ou l'architecture ? Les paradoxes des mathématiques se retrouvent dans le système de formation, où elles exercent un véritable impérialisme. L'impitoyable sélection dont elles sont l'instrument n'empêche pas la France de manquer cruellement, non seulement de professeurs, mais aussi de chercheurs et d'ingénieurs. Ayant succédé au latin comme critère de sélection des élites, les mathématiques ont vu leur prestige grandir dans le monde scolaire. Mais leur cause y a-t-elle gagné ? Beaucoup d'enseignants constatent qu'il n'en est rien. A force d'être gavés de mathématiques, les élèves finissent par les considérer d'abord comme le passage obligé du succès scolaire, non comme une source d'enrichissement intellectuel, ni même comme un débouché professionnel en soi.

Cet assèchement constitue, avec l'insuffisance des salaires et l'attrait de l'étranger, l'une des causes de la crise de recrutement d'enseignants et de chercheurs que connaît notre pays. Il n'est pas le seul : la plupart des grandes puissances, Etats-Unis et Union Soviétique compris, ont déjà sonné l'alarme.

En France, les enseignants en mathématiques réfléchissent aux moyens de redonner tout son sens à leur discipline. Ils disposent pour cela d'instruments dynamiques comme les associations de spécialistes et un réseau original d'instituts de recherche, les IREM, *où praticiens et chercheurs de tous niveaux confrontent leurs expériences. Le ministère de l'éducation nationale encourage aussi l'évolution des contenus et des méthodes d'enseignement avec la création d'une mission de réflexion confiée à M. Didier* DACUNHA-CASTELLE, *professeur à l'université de Paris-Sud (Orsay). Ce renouveau apparaît indispensable au moment où les compétences mathématiques sont recherchées dans un nombre sans cesse croissant de secteurs tels que l'industrie, la banque ou les assurances, sans parler de leur utilisation en sciences sociales ou dans le domaine des arts."*

(Source : Dossiers et documents "*Le Monde*" Avril 1988)

A.— Les mathématiques comme outil de sélection

Depuis que le débat a été porté devant l'opinion, personne ne saurait plus ignorer que les mathématiques sont officiellement reconnues comme la discipline "*reine*" et le critère majeur de la sélection scolaire.

Pour être médecin, comme pour être ingénieur, il faut d'abord montrer son aptitude aux mathématiques.

Tout en haut des valeurs, nous trouvons la prestigieuse section C. On a calculé que sur 100 élèves admis en troisième, 4 % iront en TC. Et 40,4 % des élèves de TC sont admis dans les grandes écoles, contre moins de 4,8 % des élèves issus de D (chiffres 1986).

(*) Texte exposé aux professeurs certifiés stagiaires de l'Académie de Strasbourg en novembre 1990.

Placées en position d'arbitre à tous les points clés de l'orientation et des examens, les mathématiques sont bien l'atout maître de toute stratégie de carrière, dont elles ouvrent la voie aux plus prestigieuses.

Si notre société — à travers son institution scolaire — a consacré les mathématiques comme clef de voûte de l'excellence, c'est qu'elles constituent, aujourd'hui, la trame de sa modernité, son mode d'expression privilégié et le pivot de ses valeurs positives.

B.— Les mathématiques de tous les jours

Voilà des siècles que nous parlons et écrivons le français, mais l'apparition de ces chiffres, qui nous sont désormais si familiers, est très récente :
— le numérotage des maisons de Paris ne date que du Premier Empire,
— le matricule des soldats, du 19^{e} siècle,
— le chéquier, du début du siècle,
— le numéro de sécurité sociale, de la dernière guerre.

Ces innombrables codes qui quadrillent notre vie quotidienne — codes d'entrée de maison, codes postaux, cartes de crédit, télex, minitel, etc — n'ont que quelques années d'existence.

Un signe des temps : aujourd'hui, on ne vous demande plus votre "*adresse*", mais vos "*coordonnées*".

Conséquence inéluctable de cette inflation irrésistible : par effet de vases communicants, la langage artificiel des chiffres (taux d'inflation, de croissance, d'intérêt, ..., chiffres du chômage, du commerce extérieur, de la délinquance, ..., états informatiques, statistiques de l'emploi, sondages, SME, ...) a prix le pas sur le langage naturel des lettres (caligraphie, dissertation, rhétorique, latin, ...).

Pour prendre conscience du rôle des chiffres dans la société moderne, imaginez, un instant, ce qui se passerait si tous les chiffres s'effaçaient soudain, sur les voitures, les maisons, les billets de banque, les cadrans téléphoniques, les relevés bancaires, les contrats, les bornes kilométriques, les thermomètres, les ordonnances médicales, les horloges, les calendriers, les comptabilités, les instruments de navigation, les bulletins de salaires, etc...

C.— Les mathématiques sources de puissance

Mais, constater l'omniprésence incontournable des chiffres ne suffit pas. Il faut également bien comprendre que les chiffres ne "*vivent*" jamais seuls et qu'ils ne sont que la partie visible de la logique mathématique qui les sous-tend.

Pour être efficaces et "*crédibles*", les chiffres ont besoin d'un infrastructure logique inspirée d'une méthode uniforme et régulière. Cette logique s'appelle mathématique.

Son règne absolu date de GALILÉE qui a donné le premier rôle à son langage : "*Le livre de nature est écrit en langue mathématique sans l'aide de laquelle il est impossible d'en comprendre un seul mot*".

Si notre époque a choisi le langage mathématique du "*livre de nature*", c'est pour en tirer son pouvoir scientifique et son efficacité. Son programme : gouverner les nombres pour gouverner la nature.

La caractéristique la plus frappante de notre époque, c'est incontestablement la puissance immense qu'elle tient directement de la science. Mais la science, elle-même, tire sa force de la méthode millénaire des mathématiques.

C'est la confiance que les navigateurs des 15^{e} et 16^{e} siècles avaient dans leurs instruments de mesure (astrolabe, boussole, compas, ...) qui leur a donné le courage de s'aventurer sur les océans.

C'est cette même confiance qui a animé nos astronautes du 20^{e} siècle, assistés par l'ordinateur, dans leur conquête de l'espace.

La présence rassurante des instruments de mesure nous est tellement familière que nous n'avons plus conscience de leur rôle décisif.

Il est bien étonnant qu'à notre époque, où le pouvoir et l'omniprésence des chiffres sont si visibles, tant et tant de personnes se demandent toujours : "*À quoi diable les mathématiques peuvent-elles bien servir ?*".

Réponse : **elles donnent du pouvoir**.

Pourquoi les banques, le fisc, les organisations militaires, les services de police, les multinationales, les puissances économiques et les Etats seraient-ils les premiers consommateurs d'informatique et d'ordinateurs, si l'immense puissance de calcul qu'ils leur procurent ne leur donnait pas un pouvoir à la mesure des sommes engagées ?

Au 18^{e} siècle, contrairement à ce qui se passe de nos jours, bien que la quantité de chiffres dans la société fût encore relativement discrète, le rôle des mathématiques était clairement avoué. Ainsi, en 1765, dans "*Institutions de géométrie*", l'abbé de LA CHAPELLE constatait-il déjà, que les mathématiques sont "*la base de l'art militaire et de la politique, qui est toute de calcul*".

Si la méthode mathématique confère un tel pouvoir, c'est que, science de la preuve, elle donne à l'esprit l'assurance et la boussole qui permettent toutes les grandes découvertes. N'a-t-elle pas fait la fortune et la gloire de tous ses adeptes ?

Depuis l'Antiquité, les plus grands esprits on souligné son emprise intellectuelle : PYTHAGORE, PLATON, Roger BACON, GALILÉE, DESCARTES, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, KANT, NAPOLÉON, Auguste COMTE, EINSTEIN, ...

C'est PASCAL qui formule le mieux le surcroît d'intelligence que confère la méthode mathématique : "*Entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle*".

C'est NAPOLÉON — le propre inventeur de l'Etat français moderne — qui proclame la puissance qu'elles donnent à l'Etat : "*L'avancement, le perfectionnement des mathématiques sont liés à la prospérité de l'Etat*".

D'ailleurs (CNDP, 1990), les programmes scolaires annoncent bien que "*l'enseignement des mathématiques vise à développer le raisonnement et à cultiver chez l'élève les possibilités d'abstraction*".

Cette faculté des mathématiques de multiplier l'intelligence — littéraire et scientifique — est une valeur sûre, reconnue de tous.

Au point où nous en sommes, le pouvoir intellectuel que confèrent les mathématiques laisse, déjà, entrevoir le rôle capital qu'elles jouent dans la construction de la personnalité intellectuelle des hommes comme dans celle des nations. Les mathématiques marquent, souvent, l'ascendant entre personnes, toujours entre nations, et cela à toutes les époques de l'histoire; aux puissances dominantes les écoles mathématiques les plus brillantes : françaises à l'époque de la révolution, américaines ou soviétiques aujourd'hui.

D.— La situation des mathématiques : un constat dramatique

Or, la situation actuelle des mathématiques, en France, est des plus paradoxales, puisque c'est au moment même où le défi techno-scientifique est le plus ambitieux que notre enseignement l'affronte dans les pires conditions de vulnérabilité, qualitatives et quantitatives :

— durant 25 ans, la proportion des bacheliers C n'a pas augmenté, tandis que le nombre total des bacheliers de l'enseignement général a été multiplié par trois;

— le nombre d'étudiants inscrits pour préparer le CAPES ou l'agrégation a diminué de moitié entre 1980 et 83. En dépit de l'augmentation constante et très forte des postes offerts au CAPES, les candidats sont de plus en plus rares;

— à chaque rentrée, l'éducation nationale doit recruter près de 3000 maîtres-auxiliaires;

— les étudiants en mathématiques sont de moins en moins nombreux à se diriger vers la recherche ...

Tout ceci compromet à terme le troisième rang mondial des mathématiques françaises.

E.— La racine du mal ...

Comment expliquer que nous en soyons arrivés là?

Nous subissons, aujourd'hui, le contrecoup de la réforme des "*mathématiques modernes*", mises en place à partir de 1969. A cette époque, les plus éminentes personnalités du monde des sciences avaient protesté, soulignant que, si l'on s'était trompé, c'est toute une génération qui serait sacrifiée. Alfred KASTLER, prix Nobel de physique, affirmait alors que la réforme aurait des conséquences aussi graves que celles résultant du blocage des prix sur les loyers, après la guerre. A l'Académie des sciences, le mathématicien Jean LERAY portait un jugement sans appel sur les "*maths modernes*" : "*Les apprendre est un exercice de mémoire nocif à l'intelligence*".

La racine du mal? On a rompu la chaîne d'évidences de la méthode d'EUCLIDE, et, avec elle, la clé du raisonnement.

Coupé de ses sources, l'enseignement des mathématiques s'est dilué en chapelles et en courants. Paradoxalement, cette perte de substance s'est accompagnée d'un formalisme exacerbé, interdisant toute véritable compréhension et, partant, compromettant gravement l'avenir de la recherche.

Une véritable schizophrénie du sens et de la forme — correspondant à la séparation de plus en plus étanche des littéraires et des scientifiques — s'est alors installée. Et cette situation étrange nous a conduits à la production d'un système éducatif polarisé sur deux catégories limites d'élèves :
— d'un côté, des "*matheux*", véritables "*bêtes à concours*" capables de calculer et de résoudre en un tour de main les problèmes les plus sophistiqués, mais, généralement, inaptes à les comprendre en profondeur et à en expliquer le sens dans une langue à la fois convaincante et charpentée;
— de l'autre, les "*littéraires*", les mieux placés pour extraire "*la substantifique moelle*" des problèmes, mais bien incapables d'en poser la première équation.

Le premier groupe, grisé de ses succès faciles, en oublie de se poser la question du rapport au réel et du sens de l'activité mathématique.

Le second, repoussé par l'habillage rébarbatif d'une présentation axiomatique, renonce, sans combat, à s'initier à une discipline dont les bases sont pourtant indispensables au plein épanouissement intellectuel. Il croit qu'il faut, en mathématiques, un don qui lui manque.

F.— Un remède possible : les mathématiques chronologiques

Nous sommes tous convaincus des obligations et des privilèges qui sont, aujourd'hui, attachés à la connaissance des mathématiques. Mais sont-elles accessibles à tous?

Certainement, si l'on tient compte du paradoxe suivant : il faut attendre l'âge de la puberté pour commencer à parler des rudiments du langage mathématique, alors qu'un bambin de deux ou trois ans à peine comprend déjà sa langue maternelle, infiniment plus riche et plus compliquée.

C'est que la seconde fait appel à la nature innée de l'intelligence, alors que la première demande l'apprentissage d'une discipline artificielle.

En soi, l'acquisition des mathématiques n'est pas une question d'intelligence mais de méthode. En fait, plongés dans une société toute imprégnée de culture mathématique, nous avons tous plus de connaissances qu'il n'en faudrait pour réussir dans cette discipline. Mais ce qui nous manque, pour y parvenir, c'est de savoir LIRE la surabondance d'informations exposées sous nos yeux, pour en comprendre le LANGAGE. C'est que personne n'a pris le temps de nous exposer cette discipline du regard qui permet, d'un seul coup d'œil, de rassembler en un tour de main les éléments apparemment les plus disparates, pour les ranger DANS LE BON ORDRE, en extraire le ressort mathématique et créer ainsi une FIGURE de géométrie ou d'algèbre. Simple question de reconnaissance de formes et donc de vision.

La meilleure manière de savoir reconnaître une forme est de suivre sa gestation. D'où : "*suite d'évidences, les mathématiques doivent être apprises dans l'ordre dans lequel l'humanité les a découvertes*".

En lisant l'histoire des mathématiques — dont le début est écrit dans une langue littéraire, et la fin en termes algébriques codés — on apprend insensiblement, sans effort particulier, à lire le langage mathématique dans sa course à l'abstraction.

"*De quoi s'agit-il ?*" avait coutume de demander le Maréchal FOCH.

Aussi, quoi de plus légitime, au début d'un cours, que de souhaiter s'en voir expliquer l'objet. Pourtant, en mathématiques, point d'explication. Dès le départ, le geste de l'enfant y est invité à précéder l'idée. Au début de la scolarité, on met les enfants au travail, à manipuler des cubes et des chiffres, sans la moindre justification. "*Ils sont bien trop jeunes*", direz-vous. Certes, mais au fur et à mesure que nous grandissons, au fil des années, l'apprentissage des quatre opérations de base est progressivement remplacé par celui de l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre et l'analyse. Et jamais le moindre effort ne sera tenté pour justifier la raison d'être des mathématiques : leur statut de discipline reine doit être tenu pour allant de soi, sans besoin d'être légitimé.

Pourtant, un jour ou l'autre, le prof de mathématiques se trouve soudain désarmé devant un élève, plus curieux ou plus entreprenant que les autres, qui lui pose une question toute bête : "*Mais, au fait, Monsieur, à quoi les mathématiques servent-elles ?*". Question bien embarassante pour notre professeur, qui ne risque pas de trouver dans son corrigé habituel la réponse. En effet, oh paradoxe! feuilletez les manuels : les mathématiques sont habilitées à définir l'univers entier, mais se gardent bien de se définir elles-mêmes.

G.— Les mathématiques : redéfinition

L'histoire des mathématiques nous livre, pourtant, plusieurs définitions simples. Ainsi, dans l'Antiquité, les Grecs désignaient-ils sous le nom de mathématiques "*l'ensemble des sciences alors coordonnées*", définition très éloignée de notre perception actuelle. Selon DESCARTES, on ne doit "*rapporter aux mathématiques que toutes les choses dans lesquelles on examine l'ordre ou la mesure*". Pour d'ALEMBERT, c'est "*la sciences qui a pour objet les propriétés de la grandeur*". De son côté, Auguste COMTE pense que le but des mathématiques est de "*déterminer les grandeurs les unes par les autres, d'après les relations précises qui existent entre elles*". Quant à lui, TAINE considère que leur rôle est de préparer d'avance des moules que le physicien viendra plus tard remplir. Enfin, le Petit Robert définit les mathématiques comme "*l'ensemble des sciences qui a pour objet la quantité et l'ordre*".

Quelle est donc l'âme unique des mathématiques? Le besoin d'une définition claire, qui englobe toutes les autres, s'impose.

La définition des mathématiques comme la **science du calcul** répond à toutes les conditions souhaitées de :
— clarté : elle est immédiatement compréhensible;
— fond : elle manifeste que les mathématiques sont UNE méthode — une technique mentale —;
— rigueur : elle satisfait le débutant sans rien retirer au spécialiste qui peut la traduire dans sa spécialité;
— puissance : elle permet de produire "*automatiquement*" toutes les définitions secondaires des différentes branches mathématiques :

- l'astronomie, c'est le calcul des astres,
- l'arithmétique, c'est le calcul des nombres entiers,
- la géométrie, c'est le calcul des formes spatiales,
- la mécanique, c'est le calcul du mouvement des objets,
- l'analyse, c'est le calcul des grandeurs infiniment petites, ...

— ampleur : elle englobe toutes les autres définitions, même philosophiques. Notamment celle de BACHELARD : "*Les mathématiques sont la précision dans l'indéterminé*", qui manifeste la précision du calcul applicable à n'importe quel objet, et implique que les mathématiques sont la voie royale pour toutes les sciences.

Pour comprendre toute la puissance des mathématiques, il faut, d'abord, en méditer l'emprise sur les objets matériels. Les progrès de la science en donnent la mesure. Ensuite, apprendre à transporter le calcul des choses au calcul des quantités et à tirer des concepts.

Il est, en effet, indispensable d'être pleinement conscient, au départ, qu'il y a deux grands niveaux de signification dans le mot calcul :
— le "*scientifique*", qui va du calcul élémentaire de l'enfant qui compte ses billes à celui du savant qui transforme le monde;
— le "*littéraire*" : celui de l'écrivain qui fait son plan et dose son sujet, ..., du philosophe qui construit l'architecture de sa vision du monde à partir des mathématiques, "*pont jeté entre la métaphysique et la physique*" (KANT).

Toute l'initiation mathématique consistera à se rendre maître de ces deux hémisphères de calcul, scientifique et littéraire, occidental et oriental, et à progresser ainsi du calcul physique au calcul mental.

L'INÉGALITÉ D'ERDÖS–MORDELL
(1ère partie)

Patrick FUHR

Ce texte a été élaboré dans le cadre du groupe "Lycée" de l'IREM de Strasbourg. C'est pourquoi il est présenté sous forme de travaux pratiques. Ce T.P. offre beaucoup d'occasions d'employer les notions et outils qui se trouvent essentiellement au programme de la classe de première S : minorations, majorations, second degré, transformations, théorème de l'angle inscrit, relations métriques, produit scalaire, calcul de distances et d'angles dans le plan ou l'espace, barycentres et recherche d'extremums d'une fonction. Il peut être étudié assez tôt dans une année de terminale en raison des possibilités de révisions qu'il donne.

Le but du T.P. est alors clairement d'aborder de nombreuses questions de géométrie autour d'un thème central qui est ici l'inégalité d'ERDÖS–MORDELL, conjoncturée en 1935 par P. ERDÖS, démontrée en 1937 par L.-J. MORDELL, et qui stipule que :

> "*Dans le plan, la somme des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux sommets A, B et C est au moins égale au double de la somme des distances de ce point aux côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle.*"

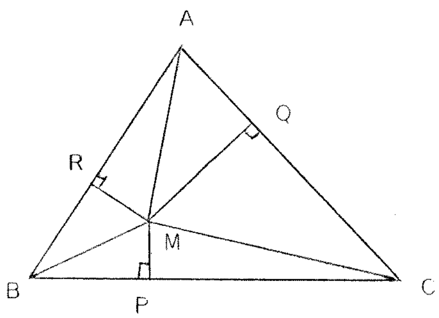


Figure 1

Nous noterons P (resp. Q, R) le projeté orthogonal d'un point M quelconque sur (BC) (resp. $(CA), (AB)$) ; l'inégalité d'ERDÖS–MORDELL signifie donc que : "Pour tout M intérieur au triangle ABC, $MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$" (ce que nous noterons inégalité (E.M.).

Paul ERDÖS est un mathématicien hongrois né en 1913 (son nom se prononce "*èrdeuch*"). Il est célèbre pour le grand nombre de conjectures qu'il énonca. Louis-Joël MORDELL est un mathématicien britanique né en en 1888 et mort en 1972. Ses travaux portèrent, entre autres, sur l'arithmétique.

La somme $MA + MB + MC$ est assez difficile à étudier, sa propriété la plus classique fait l'objet du T.P. intitulé "*Problème de Fermat*" déjà publié et auquel nous renvoyons le lecteur (*); par contre, la somme $MP+MQ+MR$ est beaucoup plus simple, et quelques-unes de ses propriétés sont étudiées au § 1, qui contient aussi quelques remarques destinées à familiariser le lecteur avec l'inégalité (E.M.).

Le § 2 contient quelques résultats sur les inégalités qui nous seront utiles.

Les § 3, 4 et 5 sont consacrés à diverses démonstrations de l'inégalité (E.M.), chacune d'elles étant suivie de la recherche des cas d'égalité, c'est-à-dire des points M et des triangles ABC tels que : $MA + MB + MC = 2(MP + MQ + MR)$.

Dans le § 6 enfin, on se demande de quelle manière on peut améliorer l'inégalité (E.M.) dans le cas de triangles particuliers.

Tout cela fait un T.P. assez long; mais, si l'on souhaite gagner du temps, on peut très bien faire l'économie de l'une des démonstrations de l'inégalité (E.M.).

1.— LA SOMME MP + MQ + MR; QUELQUES CONSÉQUENCES

Nous commençons par établir une caractérisation en termes de barycentres, de l'intérieur du triangle ABC; précisons que, dans tout le T.P., l'intérieur du triangle ABC est entendu "*bords compris*".

Question 1 :

a) Expliquer pourquoi l'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des points M dont les coordonnées (y,z) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vérifient le système :

$$[y \geq 0\ ;\ z \geq 0\ ;\ y + z \leq 1].$$

b) En déduire que l'intérieur du triangle ABC est aussi l'ensemble des barycentres de (A, x), (B, y), (C, z), où x, y et z désignent des réels ≥ 0 quelconques de somme égale à 1.

Voyons ce que ce dernier résultat implique pour la somme $MP + MQ + MR$; pour cela, nous notons A' (resp. B', C') le pied sur (BC) (resp. $(CA), (AB)$) de la hauteur issue de A (resp. B, C); le point M, supposé intérieur au triangle ABC, est donné comme barycentre de $(A,x), (B,y), (C,z)$ où $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$.

Question 2 :

a) Que déduit-on par projection, au sujet des points P, Q et R, de : "M est barycentre de $(A,x), (B,y), (C,z)$" ? Compléter alors : $\overrightarrow{MP} = \cdots \times \overrightarrow{AA'}$.

b) En conclure que : $MP + MQ + MR = xAA' + yBB' + zCC'$. (Voilà pourquoi nous disions que la somme $MP + MQ + MR$ est assez simple; c'est en effet une fonction "du premier degré" des coefficients x, y et z !)

(*) "*Les Maths en Pratique*", Terminales C/D/E, par l'IREM de Strasbourg, éd. Bordas, 1990 (en vente en librairie $\simeq$ 79 F).

c) Plus particulièrement, quelle propriété (classique) de la somme $MP+MQ+MR$ obtient-on, dans le cas où ABC est équilatéral ? (théorème de VIVIANI*) (*).*

d) En 1986, les candidats au Rallye Mathématique d'Alsace (**) (classe de Première) avaient à résoudre l'exercice suivant : "Soit M un point à l'intérieur d'un triangle équilatéral; on projette M perpendiculairement sur les côtés du triangle en P, Q, R; dans quel domaine doit-on choisir M pour que des segments égaux à MP, MQ, MR, puissent former un triangle ? Faire un dessin".

Il devient maintenant assez simple de répondre à quelques questions concernant la somme $MP + MQ + MR$ (M parcourant toujours l'intérieur du triangle ABC); dans les questions 3 et 4, nous continuons de regarder M comme barycentre de $(A, x), (B, y), (C, z)$ où x, y et z sont ≥ 0, et : $x + y + z = 1$.

Question 3 :

a) Supposons, pour fixer les idées : $AA' \geq BB' \geq CC'$. Nous rappelons que AA', BB' et CC' sont les hauteurs du triangle ABC. (Le lecteur pourra démontrer qu'il revient au même de supposer : $BC \leq CA \leq AB$.)
Quelle est la valeur maximum de la somme $MP+MQ+MR$? Sa valeur minimum ?

b) Supposons en outre, pour simplifier : $AA' > BB'$. En quel point M la valeur maximum de la somme $MP+MQ+MR$ est-elle atteinte ? Vérifier qu'en ce point on a bien : $MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$. Cela suffit-il à prouver que l'inégalité (E.M.) est vraie en n'importe quel point M intérieur au triangle ABC ?

La question suivante porte sur la recherche des "*lignes de niveau*" de la fonction $M \to MP + MQ + MR$; d'après la question 2 c), cette recherche n'a d'intérêt que si le triangle ABC n'est pas équilatéral, ce que nous supposerons.

Question 4 :

a) Soit s un réel ≥ 0 quelconque :
Interpréter l'égalité : $xAA' + yBB' + zCC' = s$ comme une relation entre les coordonnées de M prises dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, et en déduire la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M (intérieurs au triangle ABC) tels que : $MP + MQ + MR = s$.

b) Quelle précision sur l'ensemble $\mathcal{L}$ peut-on apporter lorsque ABC est isocèle, disons de sommet principal A ?

Pour terminer ce paragraphe, revenons au cas particulier d'un triangle ABC équilatéral; d'une part nous allons y voir que la démonstration de l'inégalité (E.M.) devient assez simple (question 6); d'autre part l'examen de ce cas nous permettra de comprendre pourquoi :

(*) Nous renvoyons le lecteur au livre "*Mathématiques en 1ère S*", par l'IREM de Strasbourg, éd. Casteilla-Istra, 1988, pour un autre très bel exemple d'application du théorème de VIVIANI, qui concerne le problème de FERMAT.
(**) Consulter : "*Mathématiques de compétition*", 2nde/1ère/Term, Sélection des Rallyes mathématiques d'Alsace, éd. Bordas, 1990 (en vente en librairie $\simeq$ 59 F).

- Il est important que M soit pris à l'intérieur du triangle ABC (question 7).
- Le facteur 2 qui apparaît dans : "$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$" correspond au "meilleur résultat général possible" (question 8); ce point mérite explication : il est, par exemple, bien clair que pour tout M et tout triangle ABC : $MA + MB + MC \geq MP + MQ + MR$.

Question 5 :

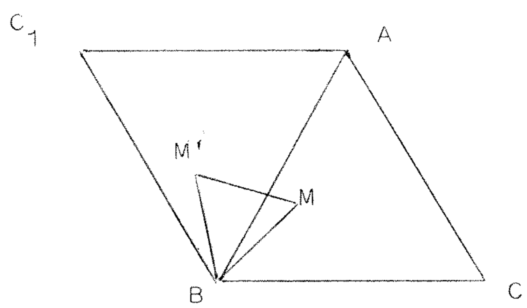
Pourquoi ?

Mais l'inégalité (E.M.) est bien meilleure que l'inégalité $MA + MB + MC \geq MP + MQ + MR$; or, a priori, rien n'interdit d'espérer pouvoir encore améliorer l'inégalité (E.M.); la question 8 prouvera qu'en réalité c'est impossible, si du moins l'on veut garder un résultat valable pour tout triangle ABC et tout point M intérieur à celui-ci.

Question 6 :

a) Rappeler la valeur trouvée pour la somme $MP + MQ + MR$ en n'importe quel point M intérieur au triangle équilatéral ABC de côté a.

b) Sur la figure 2, on a fait subir aux points M et A une rotation de centre B et d'angle 60° : Calculer CC_1 et expliquer pourquoi cette construction prouve que : $MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$.



Par rotation de centre B et d'angle $60°$, M vient sur M' et A sur C_1.

Figure 2

Question 7 :

Imaginer un point M, extérieur au triangle équilatéral ABC, pour lequel l'inégalité (E.M.) ne soit plus vraie.

Question 8 :

a) Vérifier qu'au centre O du triangle équilatéral ABC, on a : $OA + OB + OC = 2(OP + OQ + OR)$. (Nous découvrons ainsi un "cas d'égalité", qu'il faudra avoir présent à l'esprit en temps utile.)

b) En déduire qu'il n'existe pas de constante $k > 2$ telle que : pour tout triangle ABC et tout point M intérieur à celui-ci, on ait :

$$MA + MB + MC \geq k(MP + MQ + MR).$$

2.— QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES INÉGALITÉS

Question 9 :

a) On minore un réel a par un réel b, puis b par un réel c :
Que peut-on en conclure, s'il advient que : $a = c$ *?*

b) On sait que :

$$\begin{array}{ll} a \geq b & \\ & a + a' \geq b + b'. \\ a' \geq b' & \end{array}$$

Sachant que : $a \geq b$ *et* $a' \geq b'$*, que peut-on en conclure, s'il advient que :* $a + a' = b + b'$ *?*

Question 10 :

a) On donne deux réels positifs a et b quelconques : Comparer leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ *et leur moyenne géométrique* $\sqrt{ab}$*; quand l'égalité a-t-elle lieu ?*

b) Plus particulièrement, étant donné un réel $x > 0$*, comparer* $x + \frac{1}{x}$ *et 2; quand l'égalité a-t-elle lieu ?*

3.— PREMIÈRE DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (E.M.)

Les notations utilisées dans cette démonstration sont fixées par les figures 3 et 4 suivantes :

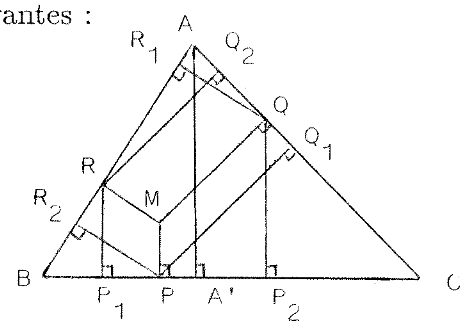


Figure 3

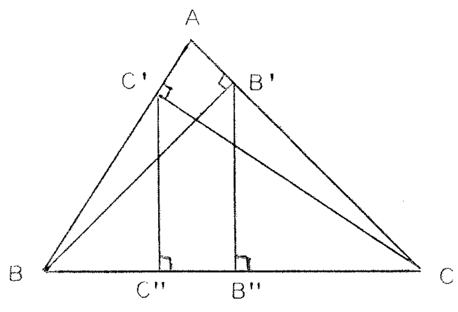


Figure 4

Nous commencerons par l'examen d'un cas particulier de manière à pouvoir l'écarter ensuite, car il se révèlerait un peu gênant pendant la démonstration générale.

Question 11 :

Quels sont les points M tels que : $P = Q$ *?* $Q = R$ *?* $R = P$ *?*
Vérifier qu'en ces points : $MA + MB + MC > 2(MP + MQ + MR)$.

Du même coup, ces points se trouveront aussi écartés de la recherche des "*cas d'égalité*". Désormais nous supposerons M distinct des sommets A, B et C du triangle; les longueurs PQ, QR, RP sont alors non nulles, et les droites $(PQ), (QR)$ et (RP) parfaitement définies.

Question 12 :

Sous réserve qu'on ait prouvé que P (resp. Q, R) est situé sur le segment $[P_1P_2]$ (resp. $[Q_1Q_2]$, $[R_1R_2]$), justifier l'inégalité :

$$(1) \qquad MA+MB+MC \geq MA\frac{P_1P+PP_2}{RQ}+MB\frac{Q_1Q+QQ_2}{PR}+MC\frac{R_1R+RR_2}{QP}.$$

Cette première minoration de la somme $MA+MB+MC$ constitue le point de départ de notre démonstration; mais auparavant, voici comment on peut prouver que, par exemple : $P \in [P_1P_2]$:
Rappelons que M peut être considéré comme barycentre de $(A,x),(B,y),(C,z)$, où x,y et z sont des réels ≥ 0 tels que : $x+y+z=1$.

Question 13 :

a) Qu'en déduit-on, par les projections orthogonales appropriées, au sujet des points P, R, Q, P_1, P_2 ?

b) Prouver que : $\overrightarrow{PP_1} = z\overrightarrow{CC''}$ et $\overrightarrow{PP_2} = y\overrightarrow{BB''}$.

c) En déduire que si les vecteurs (colinéaires) $\overrightarrow{PP_1}$ et $\overrightarrow{PP_2}$ ne sont pas nuls, ils sont de sens contraire et conclure.

Nous allons à présent transformer le membre de droite de l'inégalité (1); il est remarquable, pour cela, que l'on puisse calculer les longueurs $PP_1, PP_2, \ldots$, en fonction des longueurs MA, MB, MC, MP, MQ, MR et PR, QP, RQ; la démarche n'est détaillée que pour le calcul de PP_1 : il en ressortira que : $PP_1 = MR\frac{PR}{MB}$.

Question 14 :

a) Vérifier cette formule lorsque : $M \in [AB]$.

b) Lorsque $M \notin [AB]$, justifier que M est distinct de R et de B, et P distinct de R et de P_1, de sorte que les angles $\widehat{BMR}$ et $\widehat{RPP_1}$ sont bien définis; trouver un cercle passant par M, R, B et P; démontrer que $\widehat{BMR} = \widehat{RPP_1}$; en déduire l'expression annoncée de PP_1.

c) Donner de même une expression de chacune des longueurs $PP_2, Q_1Q, QQ_2, R_1R, RR_2$ en fonction des longueurs $PR, QP, RQ, MA, MB, MC, MP, MQ, MR$. (Voilà une belle occasion de se convaincre de l'importance du choix des notations et du rôle des permutations circulaires !)
d) Par report dans l'inégalité (1) des expressions trouvées, vérifier que celle-ci devient :

$$\begin{aligned} MA+MB+MC \geq\ & MP\Big(\frac{MB.PQ}{MC.PR}+\frac{MC.PR}{MB.PQ}\Big) \\ & + MQ\Big(\frac{MC.QR}{MA.QP}+\frac{MA.QP}{MC.QR}\Big) \\ & + MR\Big(\frac{MA.RP}{MB.RQ}+\frac{MB.RQ}{MA.RP}\Big). \end{aligned}$$

Cela nous permet de passer à une deuxième minoration :
e) Observer attentivement les rapports tels que $\frac{MB.PQ}{MC.PR}$ *figurant dans une même "parenthèse", et conclure à l'inégalité :*

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR).$$

Passons maintenant à la recherche des cas d'égalité, dont sont exclus, rappelons-le, les sommets A, B et C du triangle; la première chose à faire pour cela est de relire les différentes étapes de la démonstration précédente, pour se convaincre qu'au fond elle a consisté en deux minorations de la somme $MA + MB + MC$; chaque minoration résultait elle-même de l'addition "membre à membre" d'inégalités "de même sens", les unes exprimant qu'une projection orthogonale ne peut augmenter les distances, les autres que la quantité $x + \frac{1}{x}$ ne peut, pour $x > 0$, être < 2.

Question 15 :

a) A quelle condition la longueur d'un segment est-elle conservée par projection orthogonale sur une droite ?

b) Démontrer que si $MA+MB+MC = 2(MP+MQ+MR)$ *alors les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :*

(C_1) : Les droites $(PQ), (QR)$ *et* (RP) *sont, respectivement, parallèles à* $(AB), (BC)$ *et* (CA).
(C_2) : $\frac{PQ}{MC} = \frac{QR}{MA} = \frac{RP}{MB}$.

(On observera que deux au moins des trois longueurs MP, MQ, MR *sont* > 0*).*

Commençons par examiner la condition (C_1) :

Question 16 :

a) Prouver que (C_1) n'est réalisée que dans un cas : lorsque P, Q, R *sont respectivement milieux de* $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$. *(Pensez au théorème de* THALÈS*).*

b) En déduire le seul point M *pour lequel (C_1) est réalisée. (C'est un point très particulier lié au triangle* ABC*, et qui ne nous intéressera pour notre problème que s'il est bien intérieur à* ABC*.)*

Passons maintenant à l'examen de (C_2), à supposer que (C_1) soit déjà réalisée :

Question 17 :

a) Prouver que (C_2) ne peut être réalisée que si le triangle ABC *est équilatéral.*

b) En conclure que le seul cas d'égalité est celui où M *est le centre d'un triangle équilatéral* ABC.

(à suivre ...)

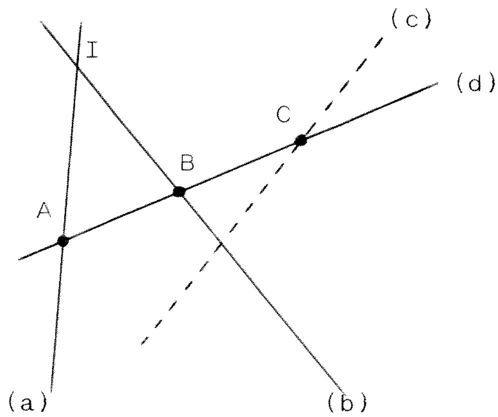
POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE

Jean MARTINET

Dans les archives de '*L'Ouvert*' nous avions conservé un document de Jean MARTINET qui donne un exemple de plan affine à 9 points : l'ensemble des 9 points d'inflexion d'une cubique. Ce texte n'était pas destiné à la publication, du moins pas dans cet état, c'est pourquoi nous y ajoutons quelques commentaires en note (1).

1.— Soit (Γ) une cubique du plan projectif (Γ est un polynôme de degré 3 en x et y) (2).

Théorème 1 : Si A et B sont deux points d'inflexion de (Γ), le point C où la droite (AB) recoupe (Γ) est aussi un point d'inflexion.



• Soient (a) et (b) les tangentes à (Γ) en A et B et (d) la droite (AB).
Considérons le polynôme du 3e degré :

$$P = \Gamma - \lambda d^3$$

où λ est choisi de façon que $\Gamma - \lambda d^3$ s'annule en I. Le polynôme P restreint à (a) admet 4 racines (3 en A et une en I). Il est donc nul sur (a) et par conséquent divisible par a. De même, il est divisible par b.

• Il suit $P = a.b.c$ où c est un polynôme du premier degré ((c) est une droite) donc :

$$\Gamma = \lambda d^3 + abc.$$

• Le point $(c) \cap (d)$ est clairement le point C (car $\Gamma = 0$ et $d = 0 \Longleftrightarrow \Gamma = 0$ et $abc = 0$) et (c) est une tangente d'inflexion car :

$$(\Gamma = 0 \text{ et } c = 0) \Longleftrightarrow (c = 0 \text{ et } d^3 = 0)$$

qui met en évidence le contact d'ordre 3.

(1) On pourra se reporter avec profit à l'article de J. Martinet "*Géométrie analytique sans coordonnées ... au presque*" paru dans '*L'Ouvert*' n° 54.

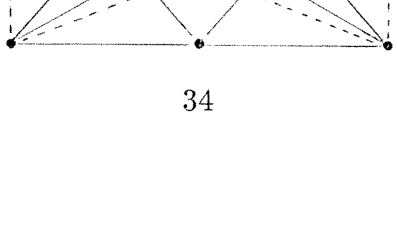
(2) C'est nous qui distinguons dans cet article la courbe (Γ) du polynôme Γ, de même (a) et a ...

2.— Le résultat précédent est en fait un cas particulier du suivant :

Théorème 2 : Si A, B, C sont alignés sur (Γ) et si A', B', C' sont alignés sur (Γ) alors les points A'', B'', C'' où (AA'), (BB'), (CC') respectivement recoupent (Γ), sont aussi alignés ([3]).

3.— Une cubique (non dégénérée) a en fait, en général, **neuf** (9) **points d'inflexion** ([4]) dans le plan projectif **complexe**. Le théorème 1 montre que dans le plan **réel**, il y en a au plus **3**; sinon ils sont tous **alignés** ([5]), et comme une droite coupe une cubique en au plus trois points ([6]) ...

([3]) Voir une démonstration dans l'article cité (*'L'Ouvert'* n° 54).
([4]) Ce qui est facile à voir puisque rechercher les tangentes d'inflexion revient à chercher les droites qui coupent (Γ) en 3 points confondus. Or en remplaçant dans Γ, y par $mx + p$, on obtient un polynôme du 3^e^ degré en x dont les coefficients sont des polynômes du 3^e^ degré en m et p. Ecrire que le polynôme en x admet une racine triple c'est écrire que son discriminant est nul, or le discriminant est une fonction du 3^e^ degré des coefficients donc du 9^e^ degré en m et p.
([5]) D'après le théorème de SYLVESTER : Si n points du plan sont tels que toute droite passant par deux des n points en contient un troisième, alors ces n points sont alignés.
([6]) On obtient ainsi un exemple de plan affine à 9 points, malheureusement peu visible puisque dans $\mathbb{C}^2$. On trouvera une représentation torique dans "*Le livre du problème, volume 6 : Géométrie d'incidence*", par l'IREM de Strasbourg, éd. Cédic. La représentation classique est celle-ci :



UNE BISSECTRICE, UNE MÉDIANE ET UNE HAUTEUR CONCOURANTES

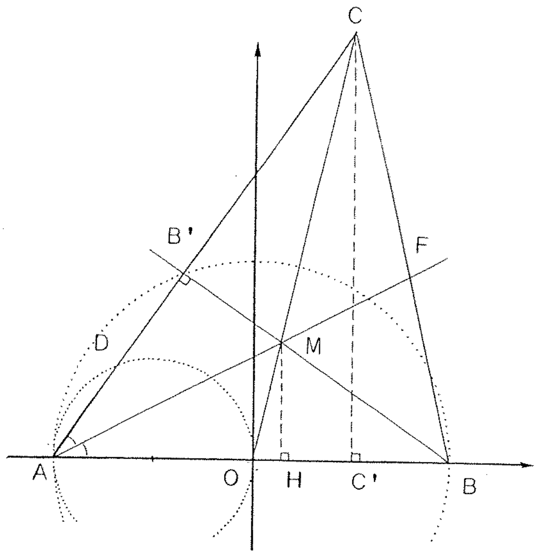
Pierre DANIEL (*)

A l'origine de ma recherche se trouve un exercice pour une classe de 5ème :

> *"L'unité de longueur étant le cm, placer dans un système d'axes rectangulaires les points $A(-3;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ et $C(1{,}5;\ 6{,}5)$. Puis dans le triangle ABC, tracer la hauteur issue de B, la médiane issue de C et la bissectrice de $\widehat{BAC}$."*

Sur les dessins (exacts!) chaque élève peut constater que les droites construites sont concourantes . . .

Mais pourquoi donc, moi, le professeur, ai-je un doute?



Je calcule les coordonnées des points d'intersection de la médiane avec la hauteur et avec la bissectrice. L'écart entre ces deux points est inférieur à 3 centièmes de mm! Et après un tel exercice, comment faire admettre sur les mêmes "*preuves*", la concourance des hauteurs?

Il s'en suit un temps de recherche auprès de mes collègues et aussi dans mes classiques de géométrie au sujet d'un théorème concernant la concourance d'une médiane, d'une hauteur et d'une bissectrice : sans succès.

(*) Collège de La Voulte (07800).

D'où le devoir à la maison suivant :

1ère étape

A partir de $A(-1;0), B(1;0)$ et $C(x,y), y \neq 0$ je cherche l'intersection de la médiane issue de C avec la hauteur issue de B.

— Cette intersection existe si (CO) n'est pas perpendiculaire à (AC), c'est-à-dire si C n'appartient pas au cercle de centre $(-\frac{1}{2};0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

— L'équation de la médiane (OC) est : $yX - xY = 0$.
(BB') qui est orthogonal à (AC) a pour équation : $(x+1)X + yY - x - 1 = 0$.
L'intersection M de ces deux droites a pour coordonnées :

$$X = \frac{x(x+1)}{y^2 + x(x+1)}\ ;\ Y = \frac{y(x+1)}{y^2 + x(x+1)}.$$

Ce point M appartient à la bissectrice si sa distance à (AB) et à (AC) est la même. Après simplification il vient :

$$x^2 + y^2 - 1 = (1+x)\sqrt{(1+x)^2 + y^2}$$

ce qui se traduit clairement, avec les notations de la figure, par :

$$\overline{CB'}.\overline{CA} = \overline{AC'}.AC$$

ce qui est équivalent à : $B' \in]AC[$ et $CB' = AC'$. D'où le théorème :

Théorème : B' et C' étant les pieds des hauteurs issues de B et C du triangle ABC, une condition nécessaire et suffisante pour que la bissectrice, la hauteur et la médiane issues respectivement de A, B et C soient concourantes est que $B' \in]AC[$ et $CB' = AC'$.

On en déduit une construction simple d'un tel triangle ABC après avoir choisi $\widehat{A}$ et AC. On construit C' puis B' sur $]AC[$, tel que $CB' = AC'$. La perpendiculaire à (AC) en B' donne B sur (AC').

2ème étape

Plus tard, j'ai recherché une solution géométrique. Pour la médiane issue de C, on a $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -1$. Pour la bissectrice issue de A, on a $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = -\frac{AB}{AC}$. Et enfin pour la hauteur issue de B on a : $\overline{AB'}.\overline{AC} = \overline{AC'}.\overline{AB}$. Pour assurer la concourance de ces trois droites, l'utilisation du théorème de CEVA implique $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \times \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$, ou encore, avec les relations précédentes $\overline{B'C} = \overline{AC'}$ (avec $\overline{B'C}$ mesuré de A vers C et $\overline{AC'}$ mesuré de A vers B).

Au passage, on démontre que $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}$ ce qui prouve que (FB') est parallèle à (AB) et par suite que le triangle $FB'A$ est isocèle en B' puisque les angles en A et F sont égaux.

On en déduit une construction simple de F, M et C à partir de $[AB]$ et de B' choisi arbitrairement sur le cercle de diamètre $[AB]$. On construit F intersection de la bissectrice de $\widehat{BAB'}$ et de la parallèle à (AB) passant par B'. D'où M intersection de (AF) et (BB') puis C intersection de (OM) et (AB').

3ème étape : lieux de F, M et C.

Les lieux de F, M et C s'obtiennent facilement en coordonnées polaires dans un repère d'origine A et des abscisses (AB) avec $\overline{AB} = 2a$ $(a > 0)$.

$$\text{Pour } C \quad \text{on a } AC = AB' + B'C = AB' + AC'$$
$$\text{soit } \rho = 2a\cos\theta + \rho\cos\theta.$$

Finalement (C) : $\rho = \frac{2a\cos\theta}{1-\cos\theta}$ avec $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$ pour avoir B' sur $]AC[$.

Pour M, on remarque que sa projection sur (AC) est la même que celle de B : B'. Comme les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{MAC}$ sont égaux, on trouve :

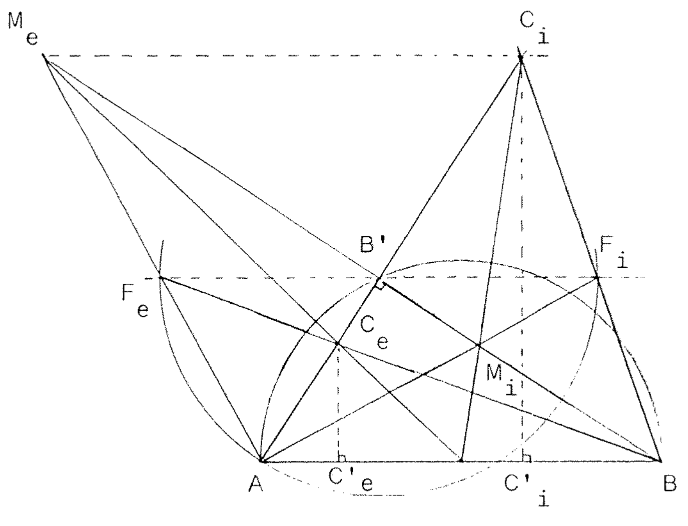
$$(M) : \rho = \frac{2a\cos 2\theta}{\cos\theta} \text{ avec } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}$$

l'angle polaire de M étant évidemment la "*moitié*" de celui de C.

Pour F, comme le triangle $AB'F$ est isocèle en B', que l'angle à la base vaut θ, angle polaire de F et qu'enfin AB' vaut $2a\cos\theta$ on trouve :

$$(F) : \rho = 4a\cos 2\theta.\cos\theta. \text{ avec } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}.$$

Il est facile de tracer ces trois ensembles de points comme sur la figure 2. Il est à noter que si on se libère des conditions sur θ, les courbes obtenues, support des lieux de C, M et F sont respectivement un kappa, une strophoïde droite et un trifolium. Pour les points de ces courbes qui ne correspondent pas aux lieux précédents il y a concours de la hauteur, de la médiane et de la **bissectrice extérieure** de l'angle en A.



Ci-contre, deux triangles "*conjugués*" ABC_i et ABC_e pour lesquels le point de concours remarquable est respectivement sur la bissectrice intérieure (en A) et sur la bissectrice extérieure.

Le parallélisme des droites C_iM_e, F_iF_e, avec la base AB, facilite la construction, point par point, des lieux (C) , (M) et (F), ci-dessous, à partir du pied de la hauteur commune aux deux triangles.

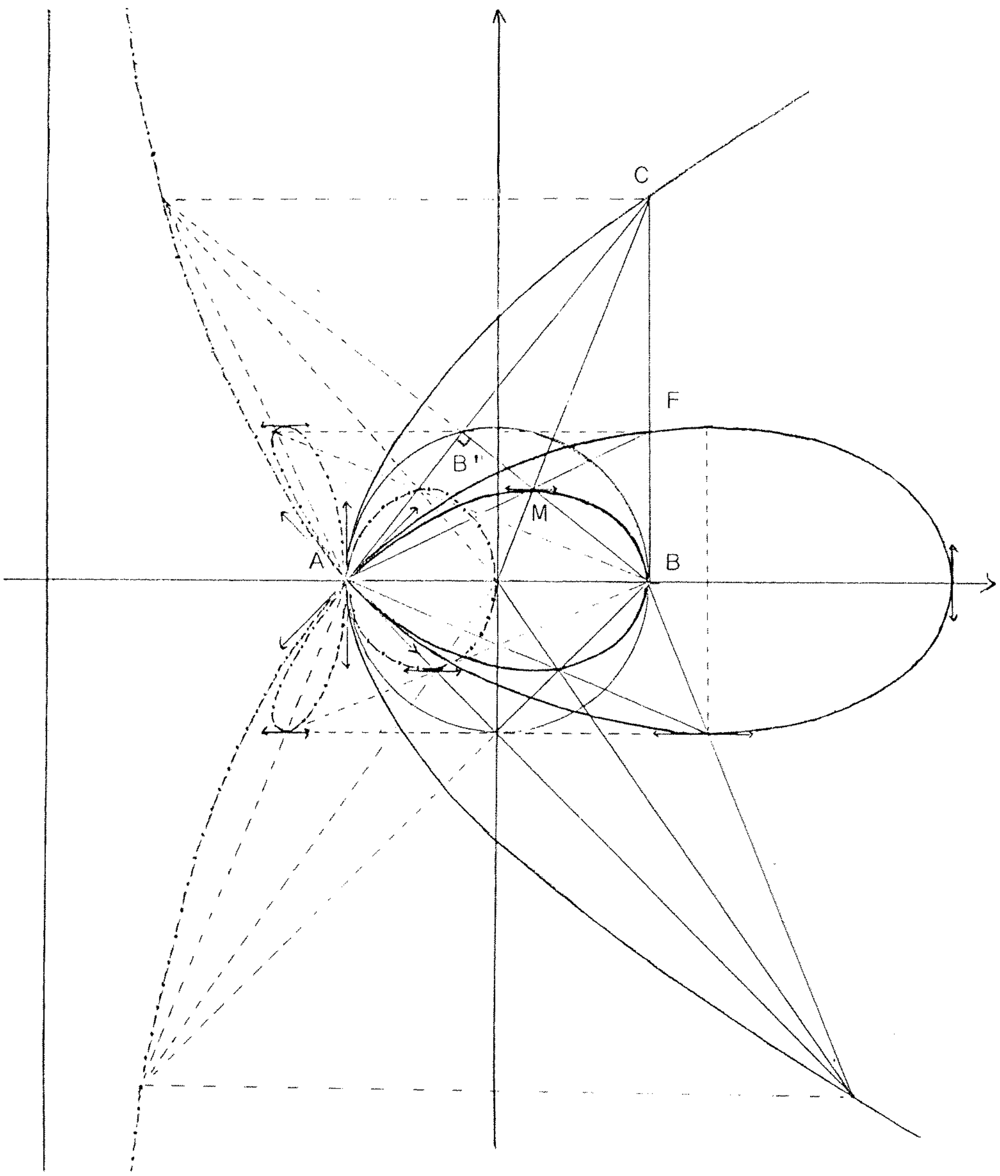
Et pour terminer, quelques remarques ...

1) ABC est rectangle en B pour $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Alors $AB = 2$; $BC = \sqrt{2+2\sqrt{5}}$; $AC = \sqrt{5}+1$; $AB = CB'$. Dans ce cas, le point M a une ordonnée maximum $y_M = \sqrt{10\sqrt{5}-22}$ pour $x_M = \sqrt{5}-2$.

2) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($AB = 2$; $AC = 2\sqrt{2}+2$; $BC = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$) le point F a une ordonnée maximum $y_F = 1$ pour $x_F = \sqrt{2}$.

3) Le triangle $(1, \sqrt{\varphi}, \varphi)$ où φ est le nombre d'or est un triangle qui possède la propriété de concours.

4) Si nous revenons au point de départ, nous remarquons que dans l'exercice proposé la hauteur CC' est de 6,5 cm. Si le point C est supposé être sur (C), le calcul donne pour valeur approchée de CC' : 6,508125...!



A VOS STYLOS

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{3x^3}{1+x^3}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\cdots=\frac{x}{1-x}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\frac{7x^7}{1-x^7}+\cdots$$

Question complémentaire

Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croit la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

Solution (de M. KRIER)

Cette solution nous est arrivée après bouclage du numéro précédent. Nous tenons à la faire paraître, d'une part en raison de son élégance, d'autre part parce qu'elle répond partiellement à la question complémentaire.

1°) La série de terme général x^n ($|x| < 1$) est absolument convergente, donc le produit $(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^4)\dots$ est convergent, et même commutativement convergent. D'autre part, on a l'identité (pour $|x| < 1$)

1) $\quad (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{(2^n)})\dots = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^p+\cdots = \frac{1}{1-x}$.
(Il suffit pour s'en rendre compte de décomposer chaque entier p dans le système binaire.)
En écrivant l'égalité (1) pour x, x^3, x^5, x^7, etc et en effectuant le produit, on trouve l'identité

2) $\quad (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^n)\dots = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{1-x^5} \times \cdots$
C'est une égalité entre deux fonctions analytiques dans le disque unité. En prenant les dérivées logarithmiques, on obtient la formule demandée.

2°) Soient $0 < x < 1$ et $u_n = \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$. Nous pouvons encadrer u_n : en effet en utilisant la convexité de la fonction $f(z) = x^z$ on voit que

$$(2k+1)x^k \leq 1+x+x^2+\cdots+x^{2k} \leq 2k+1$$

d'où $\frac{x^{2k+1}}{1-x} \leq u_k = \frac{(2k+1)x^{2k+1}}{(1+x+x^2+\cdots+x^2k)(1-x)} \leq \frac{x^{k+1}}{1-x}$ et par addition :

$$\frac{x}{1-x}\frac{1-x^{n+2}}{1-x^2} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \frac{x}{1-x} \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

puis :

$$\frac{x}{1+x} \times \frac{1}{(1-x)^2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq x \times \frac{1}{(1-x)^2}$$

conclusion : la fonction $(1-x^2)(\sum_{k=0}^{\infty} u_k)$ est encadrée par les fonctions $\frac{x}{1+x}$ et x.

PROBLÈME 15

Enoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n\to\infty} f(x+\sqrt{n}) = 0$ pour tout x. A-t-on $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$?

Solution de '*L'Ouvert*'

Soit $\varepsilon > 0$. Appelons U_n l'ouvert formé des x tels que $|f(x+\sqrt{k})| > \varepsilon$ pour un $k > n$. L'hypothèse entraîne que l'intersection de tous les U_n est vide. Il en résulte que l'un d'eux, U_m, ne rencontre pas un certain intervalle non vide $]a, b[$. (En effet, si chaque U_n rencontrait tout intervalle $]a, b[$,

U_1 contiendrait un $]a_1, b_1[$ pour $a_1 < b_1$,
U_2 contiendrait un $]a_2, b_2[$ pour $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$,
U_3 contiendrait un $]a_3, b_3[$ pour $a_1 < a_2 < a_3 < b_3 < b_2 < b_1$,

etc ..., donc $a = \lim_n a_n$ serait dans tous les $\mathcal{V}_n$; on pourrait aussi évoquer le théorème de BAIRE.)

Donc l'ensemble des x tels que $|f(x)| \leq \varepsilon$ contient les intervalles $I_k =]a+\sqrt{k}, b+\sqrt{k}[$ pour tout $k > m$. Il ne reste qu'à remarquer que pour k assez grand, il n'y a pas de trou entre I_k et I_{k+1} ; $|f|$ est majorée par ε au voisinage de $+\infty$.

PROBLÈME 16

Enoncé

Les touches $(+)$, $(\times)$, $(\cdot/\cdot)$ de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction $(-)$ et d'inversion $(1/x)$?

Indication

Utiliser le carré fournit une méthode, probablement pas minimale.

PROBLÈME 17

Enoncé (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples (a, b) de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$. $[x]$ est la partie entière de x.

Même question avec trois réels a, b, c tels que A, B et C forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

PROBLÈME 18

Enoncé (proposé par M. EMERY)

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102, de déclarer : "*Je parie que la prochaine carte sera rouge*". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain?

> Tous les grands mathématiciens qui ont parlé de leurs travaux se sont toujours plu à insister sur le rôle qu'y joue ce qu'ils appellent généralement leur "*intuition*". Cela peut paraître étrange au non-initié : s'il ouvre un livre de mathématiques d'aujourd'hui, il n'y verra que des centaines de lemmes, formules, théorèmes, corollaires, s'enchaînant de façon compliquée suivant des règles logiques implacables, et relatifs à des objets mathématiques qui ne peuvent avoir aucune "*image*" dans notre univers sensible. J'ai connu des mathématiciens plus âgés, ayant acquis une maîtrise incontestée de l'analyse classique, qui ne pouvaient concevoir la façon dont leurs cadets naviguent sans hésitation dans un océan d'"*abstraction*" ; ils auraient volontiers assimilé leurs raisonnements à un travail de machines, agençant des formules sans chercher à les comprendre.
>
> Je crois que rien n'est plus éloigné de la réalité; mais il faut évidemment renoncer à prendre le mot "*intuition*" au sens qu'on lui donne d'ordinaire. La difficulté est que ce que le mathématicien appelle "*intuition*" est pour lui une expérience psychologique tout à fait personnelle, à peu près incommunicable et il y a tout lieu de croire que les "*intuitions*" de deux mathématiciens sont le plus souvent très différentes.
>
> (...)
>
> Comment le mathématicien d'aujourd'hui peut-il s'engager dans ce parcours vers la découverte (...) alors que les notions qu'il manie sont entièrement dépourvues de toute "*image*" sensible? Je crois qu'il se crée pour lui-même des images purement mentales et incommunicables de ces objets mathématiques. La formulation précise des axiomes qui les définissent, d'où ont été éliminées toutes les particularités superflues qu'ils peuvent présenter dans les utilisations diverses de leur structure, peuvent aider à la formation de ces images; en d'autres termes, et, bien que cela puisse paraître paradoxal, **l'abstraction peut être utile à la formation de "l'intuition" plutôt qu'elle ne la paralyse.**
>
> J. DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette (1987)

NOUVELLE BROCHURE
de la Commission Inter – I.R.E.M. Université
"ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHÉMATIQUES EN DEUG A PREMIÈRE ANNÉE"
PRINCIPES ET RÉALISATIONS

Prix de vente sur place à la Bibliothèque de l'IREM de Strasbourg : 60 F; par correspondance : 80 F.